

# Fondamenti di Automatica

Francesco Bonistalli

March 2024

# Indice

<b>1 Parte 1 (Munafò)</b>	<b>10</b>
1.1 Principles of automatic control . . . . .	10
1.1.1 Sfide dei sistemi a controllo in feedback . . . . .	11
1.1.2 Esempio . . . . .	11
1.1.3 Approccio di design del sistema a controllo in feedback . . . . .	12
1.2 Introduction to Feedback Control Systems . . . . .	12
1.2.1 Hydraulic Power Steering Mechanism . . . . .	12
1.2.2 Residential Heating System . . . . .	13
1.2.3 Diagramma a blocchi della struttura in feedback di base . . . . .	13
1.3 Introduction to the control problem . . . . .	14
1.3.1 Modelli matematici di sistemi fisici . . . . .	14
1.3.2 Tipi di sistemi fisici . . . . .	14
1.3.3 Passi per formulare modelli matematici . . . . .	14
1.3.4 Sistemi lineari tempo invarianti . . . . .	14
1.3.5 Modello a variabili di stato . . . . .	14
Modello del circuito a variabili di stato . . . . .	15
1.3.6 Modello standard a variabili di stato . . . . .	15
1.3.7 Capire le variabili di stato . . . . .	16
1.4 Modeling in Control Systems . . . . .	16
1.4.1 Modello a variabili di stato . . . . .	16
1.4.2 Modello a risposta impulsiva . . . . .	17
Capire l'integrale di convoluzione . . . . .	17
Integrale di convoluzione . . . . .	17
1.4.3 Trasformata di Laplace . . . . .	18
1.4.4 Significato della funzione di trasferimento . . . . .	19
Forma generica della funzione di trasferimento . . . . .	19
Poli e zeri . . . . .	20
Diagramma a blocchi input-output usando il modello a funzione di trasferimento . . . . .	20
Diagramma inclusi i disturbi . . . . .	21
1.4.5 Modelli di disturbo nei sistemi di controllo . . . . .	21
1.5 Dynamic response of control systems . . . . .	22
1.5.1 Paia comuni di trasformate di Laplace . . . . .	22
Teorema del valore finale . . . . .	23
1.5.2 Caratteristiche dei sistemi del primo e del secondo ordine . . . . .	24
Sistemi del primo ordine . . . . .	25
Modello generale per i sistemi del primo ordine . . . . .	25

1.5.3	Sistemi del secondo ordine . . . . .	26
1.5.4	Modello generale per sistemi del secondo ordine . . . . .	27
	Implicazioni pratiche . . . . .	29
1.6	Inverse Laplace Transform: Partial fraction decomposition . . . . .	30
1.7	Introduction to Modeling of Dynamic Systems . . . . .	30
1.7.1	Intro . . . . .	30
1.7.2	Meccanica . . . . .	30
1.7.3	Modelli fisici e approssimazioni . . . . .	31
1.7.4	Trasformazione nel modello a funzione di trasferimento . . . . .	31
1.7.5	Sistemi con asse rotazionale fisso . . . . .	31
	Cambiare la variabile di output . . . . .	32
	Dal diagramma a blocchi di funzioni di trasferimento al modello a variabili di stato . . . . .	33
1.7.6	Introduzione ai sistemi termici in controllo automatico . . . . .	34
1.7.7	Principi di variabili analoghe . . . . .	34
1.8	Control System Components . . . . .	35
1.8.1	Controllori analogici . . . . .	37
1.8.2	Amplificatori operazionali . . . . .	38
1.8.3	Amplificatori invertitori (P) . . . . .	39
1.9	Models of Controlled Devices . . . . .	39
1.9.1	Rivisitazione dei modelli di impianto . . . . .	39
1.9.2	Blocchi in cascata . . . . .	39
1.9.3	Giunzioni di somma e diramazioni . . . . .	39
	Sistema di livello del liquido: sguardo dettagliato . . . . .	40
1.9.4	Fondamentali dei diagrammi a blocchi . . . . .	40
1.9.5	Panoramica del sistema di controllo in feedback . . . . .	40
	Diagramma a blocchi standard per il design in feedback . . . . .	41
	Un diagramma a blocchi conveniente . . . . .	41
	Unità nei sistemi in feedback . . . . .	41
1.9.6	Design del diagramma a blocchi in feedback . . . . .	42
1.9.7	Importanza dei disturbi . . . . .	42
1.9.8	Funzione di trasferimento ad anello chiuso . . . . .	42
	Mettere i disturbi a 0 . . . . .	42
	Mettere l'input di riferimento a 0 . . . . .	42
	Funzione di trasferimento ciclica . . . . .	43
1.9.9	Conclusioni sui diagrammi delle funzioni di trasferimento . . . . .	43
1.9.10	Riduzione avanzata dei diagrammi a blocchi . . . . .	43
	Sezionamento di un sistema multi loop . . . . .	44
1.9.11	Regole per la manipolazione dei diagrammi a blocchi . . . . .	44
1.10	Hardware of Control Systems and Case Studies . . . . .	45
1.11	AC Motion Control Systems . . . . .	45
1.12	A Feedback Control System . . . . .	45
1.13	Principles of Feedback Control . . . . .	45
1.13.1	Diagramma dei sistemi di controllo in feedback . . . . .	45
1.13.2	Obiettivi della progettazione . . . . .	45
	Filtrazione dei rumori . . . . .	45
	sensibilità e robustezza . . . . .	45
	Modellamento della risposta dinamica . . . . .	46

1.13.3	Analisi della sensibilità di sistemi in Feedback vs anello aperto . . . . .	46
	Analisi della sensitività . . . . .	46
1.13.4	Definizione della sensitività quantitativa . . . . .	46
1.13.5	Sistemi in feedback e sensitività . . . . .	47
1.14	Feedback systems and their effects . . . . .	47
1.14.1	Analisi della sensitività . . . . .	48
1.14.2	Compromessi del controllo in feedback . . . . .	48
1.14.3	Rifiuto dei disturbi . . . . .	49
1.14.4	Filtrazione dei rumori e relative sfide . . . . .	49
1.14.5	Modellamento della risposta dinamica nei sistemi di controllo in feedback . . . . .	49
	Modellamento della risposta dinamica . . . . .	49
	Ruolo del feedback nella modellazione della risposta dinamica . . . . .	50
	Problema della Progettazione . . . . .	50
	Limitazioni dei controlli ad anello aperto nella modellazione dinamica	50
1.14.6	Accuratezza allo stato stabile nel controllo in feedback . . . . .	50
1.14.7	Teorema del valore finale ed errore allo stato stabile . . . . .	51
	Caso studio: risposta all'input gradino . . . . .	51
	Comparazione con in controllo ad anello aperto . . . . .	51
1.14.8	Conclusioni . . . . .	51
1.15	Introduction to Control Systems . . . . .	51
1.15.1	Controllo proporzionale . . . . .	51
1.15.2	Controllo proporzionale integrale . . . . .	52
1.15.3	Controllo derivativo proporzionale . . . . .	52
1.15.4	Controllo derivativo integrale proporzionale . . . . .	52
1.15.5	Esempio: sistema di controllo della temperatura . . . . .	52
1.15.6	Capire l'impatto dei disturbi (theta-a) . . . . .	52
1.15.7	Effetti del guadagno dell'amplificatore . . . . .	52
	Sviluppo dell'equazione del sistema . . . . .	52
	Equazione finale . . . . .	53
1.15.8	Controllo integrale e errore allo stato stabile . . . . .	53
1.15.9	Rivisitazione del sistema di controllo della temperatura . . . . .	53
1.15.10	Introduzione al controllo derivativo . . . . .	53
1.15.11	Implementazione del controllo derivativo nel sistema di controllo . . . . .	53
1.16	Stability Analysis in Control Systems . . . . .	53
1.16.1	Capire un sistema lienare . . . . .	53
1.16.2	Capire il ruolo dei disturbi (w) e delle condizioni iniziali (x0) . . . . .	54
1.16.3	Metodi dell'analisi della stabilità . . . . .	54
1.16.4	Esempi . . . . .	54
1.16.5	BIBO stabilità . . . . .	54
1.16.6	Zero input stabilità . . . . .	54
1.16.7	Combinare BIBO e zero input stabilità . . . . .	55
	BIBO stabilità e risposta impulsiva . . . . .	55
	Analisi nel piano s . . . . .	56
	Poli e zeri nell'analisi della FDT . . . . .	56
1.16.8	Zero input stabilità e variabili di stato . . . . .	57
	Stabilità asintotica . . . . .	58
	Condizioni di stabilità, instabilità e stabilità marginale . . . . .	58
	Effetti della posizione dei poli . . . . .	58

Equivalenza tra stabilità asintotica e BIBO . . . . .	59
Matrice aggiunta . . . . .	59
1.17 Stability Analysis in Control Systems . . . . .	59
1.17.1 Determinare la stabilità . . . . .	60
1.17.2 Criterio di stabilità di Routh . . . . .	60
Condizioni necessarie . . . . .	60
Condizioni sufficienti . . . . .	61
Esempio illustrativo . . . . .	61
Analizzarare la stabilità con il vettore di Routh . . . . .	62
1.17.3 Gestire le radici sull'asse immaginario . . . . .	62
Capire le righe di soli zero . . . . .	62
Elemento pivot a 0 . . . . .	65
1.17.4 Routh oltre la stabilità assoluta . . . . .	65
Stabilità relativa . . . . .	65
1.17.5 Sensibilità dei parametri e analisi della stabilità . . . . .	66
Eq. caratteristica e Routh array . . . . .	66
1.18 Performance of Feedback Systems . . . . .	67
1.18.1 Introduzione alle specifiche di performance quantitative . . . . .	67
1.18.2 Rivisitazione aspetti qualitativi . . . . .	67
1.18.3 Transizione a specifiche quantitative . . . . .	67
Approccio classico . . . . .	67
Metodologia di progettazione . . . . .	68
1.18.4 Esplorazione delle specifiche di performance del transitorio . . . . .	68
Sistema a feedback unitario . . . . .	68
Natura dei segnali di input . . . . .	68
Utilizzo dell'input gradino per analisi della risposta transitoria . . . . .	68
Specifiche di performance allo stato stabile . . . . .	68
Avere a che fare con input sconosciuti . . . . .	68
1.18.5 Specifiche di performance del transitorio . . . . .	68
Approccio industriale . . . . .	68
Dinamica transitoria nei sistemi del secondo ordine . . . . .	69
1.18.6 Sfide di progettazione e performance allo stato stabile . . . . .	69
Specifiche di performance allo stato stabile . . . . .	69
Specifiche dell'errore per vari input . . . . .	69
1.18.7 Robustezza della progettazione . . . . .	70
1.19 Design Cycle for a Standard Second-Order System . . . . .	70
1.19.1 Descrizione del sistema . . . . .	70
1.19.2 Analisi . . . . .	70
Capire il rateo di smorzamento . . . . .	71
Equazione caratteristica e radici . . . . .	71
Relazione tra zeta, omega-n e poli ad anello chiuso . . . . .	73
1.19.3 Caratteristiche della risposta transitoria . . . . .	73
Capire i trade-off . . . . .	74
Indicatori chiave delle performance del transitorio . . . . .	74
1.19.4 Specifiche di performance del transitorio . . . . .	75
1.19.5 FDT di sistemi del secondo ordine . . . . .	75
1.19.6 POI . . . . .	75
1.19.7 Approssimare il tempo di salita . . . . .	75

Tempo di impostazione con una tolleranza del 2% . . . . .	76
1.19.8 Capire l'errore allo stato stabile . . . . .	77
1.20 Understanding the Standard Second-Order System: Recap . . . . .	78
1.20.1 Gestione di sistemi di ordine superiore . . . . .	78
1.21 Steady State Accuracy and Design Principles . . . . .	78
1.21.1 Dinamica dell'errore . . . . .	78
1.21.2 Th. del valore finale rivisitato . . . . .	79
1.21.3 Espressione generale per la FDT . . . . .	79
Ruolo dei poli quando $s=0$ . . . . .	80
1.21.4 Classificazione dei sistemi e comportamento allo stato stazionario basati su N . . . . .	80
Influenza del controllore e gestione di input differenti . . . . .	80
Tipo numero del sistema . . . . .	80
1.21.5 Esplorazione dei tipi di sistema e del loro comportamento in base a N . . . . .	81
Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-0 . . . . .	81
Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-1 . . . . .	81
Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-2 . . . . .	81
Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-3 . . . . .	82
Commenti . . . . .	82
1.21.6 Esempio di progettazione: uno schema di controllo PID . . . . .	82
Progettazione di un sistema di controllo posizionale con un controllore proporzionale . . . . .	82
Selezionare un K-A per ridurre il rateo di smorzamento . . . . .	83
1.22 Compensator Design . . . . .	83
1.22.1 Metodo del luogo delle radici nell'ingegneria del controllo . . . . .	83
Introduzione . . . . .	83
Capire il luogo delle radici . . . . .	83
Relazionare il luogo delle radici con le performance del sistema . . . . .	85
Capire e applicare il metodo del luogo delle radici nella progettazione dei sistemi di controllo . . . . .	85
1.22.2 Esempio 2 . . . . .	86
1.22.3 Esempio: aggiungere uno zero . . . . .	87
Disegno del luogo delle radici . . . . .	87
Analisi del luogo delle radici . . . . .	88
Impatto del controllo PD sulla stabilità del sistema . . . . .	88
Capire la dinamica del sistema . . . . .	88
Tradurre specifiche di performance in locazioni dei poli . . . . .	88
Consideriamo lo zero a $s=-5$ . . . . .	88
1.22.4 Costruzione e analisi del disegno del luogo delle radici . . . . .	88
Definire la fdt ad anello aperto (o del ciclo) . . . . .	89
Fattorizzazione della FDT ad anello aperto . . . . .	89
Capire il luogo delle radici . . . . .	89
Condizioni matematiche per il luogo delle radici . . . . .	89
Esplorazione delle condizioni di magnitudine e angolare . . . . .	90
1.22.5 Linee guida per disegnare il luogo delle radici . . . . .	91
Regola 1: Simmetria . . . . .	91
Regola 2: Rami . . . . .	91
Regola 3: Segmenti dell'asse reale . . . . .	91

Regola 4: direzione degli asintoti . . . . .	91
Regola 5: centroide degli asintoti . . . . .	91
Regola 6: punti di fuga . . . . .	91
1.22.6 Angoli di fuga delle radici . . . . .	92
Regola 7: angolo di partenza e di arrivo . . . . .	92
Angolo di arrivo negli zeri complessi . . . . .	92
1.22.7 Analisi del luogo delle radici per sistemi con tempi morti . . . . .	93
1.23 Design with the Root Locus . . . . .	93
1.23.1 Esempio di problema . . . . .	93
Analisi del luogo delle radici . . . . .	93
Soddisfare requisiti del transitorio . . . . .	94
Rivalutazione dei requisiti di progettazione . . . . .	95
Introdurre uno zero nel sistema . . . . .	95
Codice python per comparare i sistemi . . . . .	95
Risultato previsto . . . . .	96
Realizzazione fisica del compensatore . . . . .	96
Compensazione in anticipo di fase . . . . .	96
1.23.2 Effetti di aggiungere un polo nell'origine . . . . .	97
Approccio pratico: compensatore a ritardo di fase . . . . .	97
1.24 Compensators and the Root Locus . . . . .	97
1.24.1 Tipi di compensatori . . . . .	97
Compensatore in anticipo di fase . . . . .	97
Definizione e fdt . . . . .	97
Esempio . . . . .	98
Scelta nel design del compensatore . . . . .	99
Implementazione del compensatore in anticipo di fase . . . . .	99
Progettazione per specifici requisiti di performance . . . . .	99
Progettazione del compensatore in anticipo di fase: posizionamento dello zero e del polo . . . . .	100
Guida passo passo per la progettazione di un compensatore con il luogo delle radici . . . . .	100
1.24.2 Compensatore a ritardo di fase . . . . .	100
Regolatore a ritardo di fase . . . . .	100
Esempio: applicazione della compensazione in ritardo di fase . . . . .	101
1.25 Introduction to Frequency Domain Analysis in Control Systems . . . . .	101
1.25.1 Transizione dall'analisi nel dominio del tempo al dominio della fre- quenza . . . . .	101
1.25.2 Formalismi del dominio della frequenza . . . . .	102
1.25.3 Risposta in frequenza di sistemi lineari . . . . .	102
Definizione della risposta in frequenza . . . . .	102
1.25.4 Caratterizzazione completa del sistema . . . . .	102
1.25.5 Implicazioni pratiche . . . . .	103
1.25.6 Formalismi del luogo delle radici vs dominio della frequenza . . . . .	103
1.25.7 Introduzione all'analisi del dominio in frequenza . . . . .	103
Passi base dell'analisi nel dominio della frequenza . . . . .	103
1.25.8 Criterio di stabilità di Nyquist . . . . .	103
1.25.9 Capire il criterio . . . . .	103
Capire $G(s)H(s)$ , la fdt ad anello aperto . . . . .	104

Stabilità nell'anello aperto . . . . .	104
Stabilità ad anello chiuso . . . . .	104
1.25.10 Capire il piano s e il piano w . . . . .	105
Mappatura dei contorni . . . . .	105
Focus sul mapping qualitativo . . . . .	105
1.25.11 Esempio di analisi del contorno e mappatura verso il piano w . . . . .	106
Mappare un punto dal piano s al piano w . . . . .	106
1.25.12 Principio argomentativo di Cauchy . . . . .	108
1.25.13 Il criterio di stabilità di Nyquist . . . . .	108
1.25.14 Interpretazione del criterio . . . . .	109
1.25.15 Applicazione del criterio . . . . .	109
Sistemi stabili ad anello aperto . . . . .	109
1.26 Application of Nyquist Stability Criterion in Control Systems . . . . .	109
1.26.1 Ripasso . . . . .	109
Concetto di mappare . . . . .	109
Sistemi strettamente propri . . . . .	109
Sistemi propri . . . . .	110
1.26.2 Attraversare il contorno di Nyquist . . . . .	110
Analisi del criterio di stabilità di Nyquist attraverso la mappatura di G(s)H(s) sul contorno di Nyquist . . . . .	110
1.26.3 Esempi pratici . . . . .	111
Esempio 1: Sistemi in feedback con fdt ad anello aperto . . . . .	111
1.26.4 Disegnare il diagramma di Nyquist . . . . .	111
Esame dettagliato di ogni punto per il nostro esempio . . . . .	111
Intersezioni con gli assi . . . . .	111
1.26.5 Costruzione del diagramma polare della risposta in frequenza . . . . .	112
Semplificazione del diagramma di Nyquist . . . . .	113
1.26.6 Transizione alla costruzione pratica del diagramma di Nyquist . . . . .	113
1.26.7 Esempio 2: contorno passante per le singolarità . . . . .	114
Conclusioni sulla stabilità . . . . .	116
Analisi della stabilità basata sul diagramma di Nyquist . . . . .	116
Conclusioni sulla stabilità . . . . .	117
1.27 The Nyquist Stability Criterion and Relative Stability . . . . .	117
1.27.1 Introduzione alla stabilità relativa . . . . .	117
Transizione al dominio della frequenza . . . . .	117
Interpretare diagrammi di Nyquist per la stabilità relativa . . . . .	118
Margini di guadagno e di fase . . . . .	119
1.27.2 Margine di guadagno infinito . . . . .	120
Capire margini di fase e guadagno in sistemi stabili ad anello aperto . . . . .	120
Sistemi tipo-0 . . . . .	121
1.27.3 Affrontare i sistemi ad anello aperto instabili . . . . .	121
1.27.4 Capire le frequenze crossover . . . . .	121
1.28 Analisi del diagramma di Bode . . . . .	121
1.28.1 Il diagramma di Nyquist e la sua intensità computazionale . . . . .	121
1.28.2 Metodo di semplificazione di Bode . . . . .	122
L'essenza dell'analisi di Bode . . . . .	122
Calcolo di grandezza e fase . . . . .	122
1.28.3 Sidebar - Decibel nei sistemi di controllo . . . . .	122

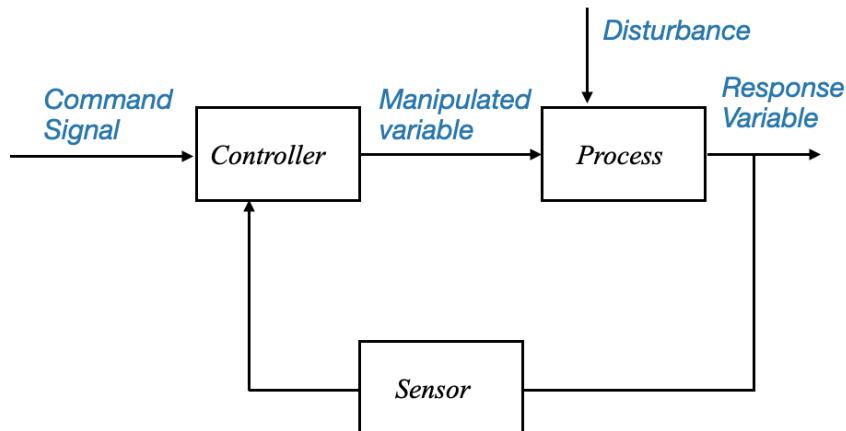
1.28.4	Struttura dei diagrammi di Bode . . . . .	123
1.28.5	Elementi costitutivi dei diagrammi di Bode . . . . .	123
1.28.6	Diagramma di Bode . . . . .	123
	Elementi costitutivi dei diagrammi di Bode . . . . .	124
1.28.7	Margine di fase e margine di guadagno nei diagrammi di Bode . . . . .	128
1.28.8	Costruzione di grafici di Bode per funzioni di trasferimento specifiche .	129
1.29	Feedback System Performance Based On Frequency Response . . . . .	129
1.29.1	Rappresentazione e caratterizzazione di un sistema nel dominio della frequenza . . . . .	129
1.29.2	Caratteristiche ideali del filtro passa basso nei sistemi di controllo . . . . .	129
	Tipica frequenza di risposta di un sistema di controllo in feedback . . . . .	130
	Capire la larghezza di banda nei sistemi di controllo . . . . .	130
	Quantificazione delle performance di sistema . . . . .	130
	Quantificazione del comportamento dei sistemi di controllo . . . . .	131
	Visualizzazione del comportamento del sistema nel dominio del tempo .	131
	Semplificazione con il dominio della frequenza . . . . .	131
1.29.3	Approssimare il comportamento di un sistema del secondo ordine . . . . .	131
	Derivare frequenza e picco di risonanza in un sistema del secondo ordine. . . . .	132
	Relazione tra rateo di smorzamento e picco di risonanza . . . . .	132
	Calcolo della larghezza di banda per sistemi del secondo ordine . . . . .	133
1.30	Principles of Automatic Control: Lead and Lag Compensation . . . . .	133
1.30.1	Il concetto di compensatori di anticipo e ritardo . . . . .	133
	Caratteristiche di magnitudine e fase . . . . .	134
	Calcolo della massima fase in un compensatore di anticipo . . . . .	134
	Determinare la magnitudine del compensatore . . . . .	134
1.30.2	Progettazione con requisiti specifici . . . . .	134
	Passo 1 . . . . .	135
	Passo 2 . . . . .	135
	Ottimizzazioni e verifiche . . . . .	136
1.30.3	Compensatori di ritardo . . . . .	136
	Principi dei compensatori di ritardo . . . . .	136
	Grandezza . . . . .	136
	Fase . . . . .	136
	Progettazione . . . . .	137
	Scelta della frequenza di angolo . . . . .	137
	Scelta di beta . . . . .	137
<b>2 Costanzi</b>		<b>138</b>
2.1	Lezione 1 (pagina 1) . . . . .	138
	2.1.1 Proprietà di un sistema dinamico . . . . .	138
2.2	Lezione 2: Passaggio da forma normale a forma di stato e viceversa (pagina 7)	139
2.2.1	Caso $p=0$ . . . . .	139
	Esempi . . . . .	140
2.2.2	Caso $0 < p < n$ per sistemi lineari . . . . .	141
2.2.3	Caso $p=n$ per sistemi lineari . . . . .	141
	Esempi . . . . .	141
2.3	Lezione 3: Utilizzo di uno stato arbitrario (pagina 13) . . . . .	142

2.4	Lezione 4: Linearizzazione di un sistema (pagina 16) . . . . .	143
2.5	Lezione 5: Soluzioni delle equazioni in forma di stato (pagina 20) . . . . .	144
2.5.1	Studio delle soluzioni generiche per sistemi lineari . . . . .	145
	Caso sistemi SISO con $\dim(x) = 1$ . . . . .	145
	Caso sistemi MIMO con $\dim(x) > 1$ . . . . .	146
2.6	Lezione 6: Concetto di stabilità interna (pagina 24) . . . . .	146
2.6.1	Studio della stabilità di sistemi LTI . . . . .	147
	Studio della matrice A . . . . .	147
2.6.2	Criterio di stabilità per sistemi LTI . . . . .	148
	Esempi . . . . .	149
2.7	Lezione 7: Stabilità di un movimento per un sistema non lineare (pagina 32) .	151
2.7.1	Criterio di Lyapunov . . . . .	151
2.7.2	Criterio di Lyapunov per sistemi lineari . . . . .	152
2.8	Lezione 8 (pagina 39) . . . . .	154
2.9	Lezione 9: Osservabilità (pagina 44) . . . . .	156
2.10	Lezione 10: Legame tra la forma di stato e la funzione di trasferimento (pagina 47) . . . . .	158
2.11	Lezione 11 (pagina 50) . . . . .	159
2.12	Lezione 12: Ispezione diretta della completa raggiungibilità (pagina 54) . . .	162
2.12.1	Ispezione diretta della completa osservabilità . . . . .	164
2.13	Lezione 13: Legame tra la funzione di trasferimento e la forma di stato (passaggio inverso) (pagina 58) . . . . .	164
2.13.1	Prima rappresentazione possibile: forma canonica di raggiungibilità .	165
2.13.2	Seconda rappresentazione possibile: forma canonica di osservabilità .	165
2.13.3	Forma minima . . . . .	166

# Capitolo 1

## Parte 1 (Munafò)

### 1.1 Principles of automatic control



#### **Definizione 1 - Processo o Impianto**

è il sistema, la macchina o il processo che ha bisogno di un controllo automatico.

#### **Definizione 2 - Risposta o Variabile Controllata**

è la variabile di uscita del nostro processo che miriamo a controllare.

#### **Definizione 3 - Variabile Manipolata**

è la variabile regolata dal controllore che influenza la risposta.

#### **Definizione 4 - Controllore**

è quell'elemento che ha il ruolo di regolare la variabile manipolata per far sì che la variabile controllata segua il comando di set.

#### **Definizione 5 - Disturbo**

un non voluto e incontrollato segnale che ha effetto sul processo.

#### **Definizione 6 - Sistema ad anello aperto**

il controllore riceve il segnale di comando e regola la variabile manipolata senza curarsi di alcun disturbo

### **Definizione 7 - Sistema ad anello chiuso**

il controllore è costantemente informato dello stato corrente del processo dalla variabile di risposta, questo continuo flusso di feedback permette al sistema di tenere sotto controllo l'uscita.

□

### **Definizione 8 - Sensore**

misura la variabile controllata (quella di uscita).

□

### **Definizione 9 - Comparatore**

compara il valore letto dal sensore con il segnale di comando desiderato.

□

### **Definizione 10 - Controllore**

basandosi sul risultato del comparatore altera la variabile manipolata per correggere qualsiasi errore.

□

#### **1.1.1 Sfide dei sistemi a controllo in feedback**

Sono:

- **Rumore dei sensori:** rumore dato ad esempio da misurazioni ad alte frequenze
- **Requisiti di controllo:** lo scopo primario del controllore è di rendere il sistema robusto. Questo implica che la variabile controllata segua da vicino il segnale di comando anche in presenza di disturbi esterni o variazioni di parametri. Per fare ciò è necessario però trovare il giusto equilibrio tra accuratezza del sistema e stabilità, in particolare un controllore in anello chiuso dovrebbe ottenere:
  - **Accuratezza allo stato stabile:** minimizzando errori sul lungo termine (tra variabile controllata e segnale di comando)
  - **Velocità di risposta:** rapidità nel rispondere ai cambiamenti nei comandi o nei disturbi.
- **Interessamento alla stabilità:** compromesso tra accuratezza e stabilità

Alla luce di quanto appena detto possiamo dunque affermare che i sistemi a controllo in feedback sono di natura robusta (al contrario di quelli ad anello aperto).

#### **1.1.2 Esempio**

Simulando un sistema del primo ordine otteniamo, come equazione che governa la sua dinamica, la seguente:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

dove:

- $\tau$  è la costante di tempo del sistema: ci dà un'idea di quanto il sistema risponda velocemente ai cambiamenti di input.
- $K$  è il guadagno del sistema: ci dice quanto l'output del sistema cambi per un cambiamento in input dato.
- $u(t)$  è l'input del sistema nel tempo.
- $y(t)$  è l'output del sistema nel tempo.

Si nota come il sistema ad anello aperto agisca direttamente sull'input  $u(t)$  e non essendoci feedback se si hanno disturbi o comportamenti inaspettati non se ne accorge.

Al contrario il sistema ad anello chiuso, usando il feedback, misura costantemente  $y(t)$  e la compara con il setpoint desiderato per misurare l'errore. Il controllore aggiusta poi l'input del sistema  $u(t)$  basandosi sull'errore per far corrispondere l'output con il setpoint desiderato.

### 1.1.3 Approccio di design del sistema a controllo in feedback

Ci sono 3 categorie di approccio:

1. Approccio sperimentale
2. Approccio *Model-Based*
3. Approccio *Data-Based* o *Knowledge-Based*

Noi ci concentreremo sul **Model-Based**.

## 1.2 Introduction to Feedback Control Systems

Esempi...

### Definizione 11 - MIMO

si parla di sistemi MIMO quando sono Multi-Input Multi-Output. □

### Definizione 12 - SISO

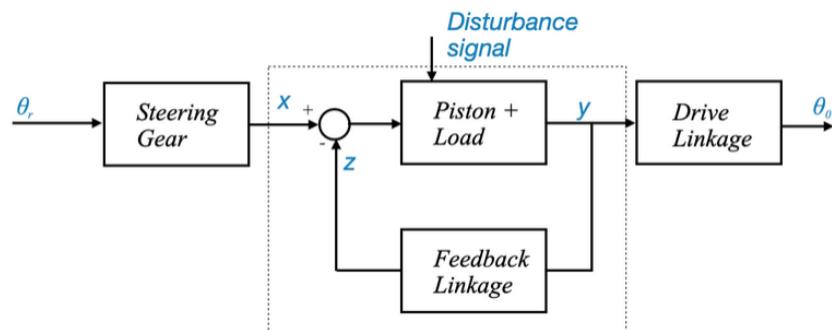
si parla di sistemi SISO quando sono Single-input Single-Output. □

**Nota:** i sistemi MIMO sono più complessi per via dell'interazione di più input e output, tuttavia si possono spesso scomporre in più sistemi SISO per studiarli più facilmente. Ci soffermiamo quindi solo sullo studio di questi ultimi.

**Nota:** Nel sistema di controllo dell'automobile vediamo un nuovo componente: l'attuatore. Esso trasforma il segnale elettrico in azione meccanica.

### 1.2.1 Hydraulic Power Steering Mechanism

Possiamo andare a rappresentare questo sistema tramite il seguente diagramma a blocchi:



dove:

- il riquadro tratteggiato è la **parte di feedback**

- $x$  è il **segnale di riferimento**
- $x$  è inoltre proporzionale al segnale di comando  $\theta_r$
- il segnale di output  $\theta_0$  è dipendente dalla variabile controllata  $y$ : si parla quindi di **variabile controllata indirettamente**.

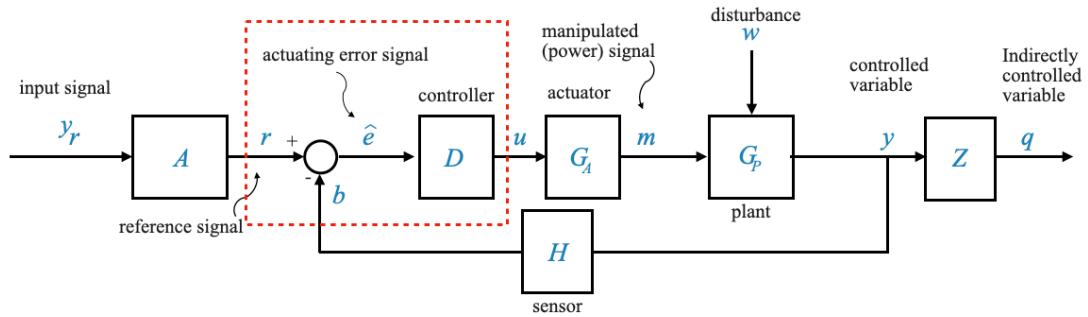
### 1.2.2 Residential Heating System

esempio...

#### Definizione 13 - Attuatore

Produce un segnale manipolato per l'impianto, spesso amplifica l'input a un livello adatto per pilotare l'impianto.  $\square$

### 1.2.3 Diagramma a blocchi della struttura in feedback di base



dove:

- $y_r$  segnale di comando
- $A$  blocco per generare dall'input il **segnale di riferimento**  $r$
- $b$  segnale di feedback comparato con  $r$  per produrre il **segnale di errore**  $\hat{e}$
- $D$  **controllore** che genera il **segnale di controllo**  $u$  basandosi su  $\hat{e}$ , a volte la definizione di controllore include l'error detector (di base è solo logica di controllo).
- $G_A$  blocco attuatore che incrementa il livello di potenza del segnale per pilotare l'impianto, producendo un segnale manipolato
- $G_P$  impianto o processo, prende il segnale manipolato  $m$  e i disturbi  $w$  per produrre  $y$  variabile manipolata.
- $H$  sensore che produce il segnale di feedback  $b$
- $Z$  sistema indirettamente controllato
- $q$  output indirettamente controllato.

## 1.3 Introduction to the control problem

esempi...

### 1.3.1 Modelli matematici di sistemi fisici

#### *Definizione 14 - Modello matematico*

un modello matematico è una rappresentazione astratta del sistema fisico nella forma di equazioni matematiche. Descrive il comportamento del sistema e come risponde a vari input.  $\square$

### 1.3.2 Tipi di sistemi fisici

- **lineari o non lineari:** se rispondono al principio di sovrapposizione e di omogeneità
- **tempo invarianti o tempo varianti:** nei primi i parametri non cambiano col tempo.
- **continui nel tempo o tempo-discreti:** i primi operano su un orizzonte di tempo continuo, i secondi su specifici intervalli.

### 1.3.3 Passi per formulare modelli matematici

1. Identificazione del sistema: determinarne il tipo (meccanico, elettrico, ...)
2. Semplificazione: fare approssimazioni ragionevoli e trascurare effetti insignificanti.
3. Selezione di variabili: scegliere variabili di stato appropriate per descrivere il sistema.
4. Applicazione di leggi fondamentali per derivarne equazioni (legge di Ohm, ...)
5. Rappresentazione: usare equazioni differenziali, funzioni di trasferimento o modelli state-space.

### 1.3.4 Sistemi lineari tempo invarianti

Nelle nostre discussioni i **sistemi** saranno **lineari tempo invarianti** (LTI). Per essere lineari dovranno dunque rispondere ai due principi sopra citati e quindi:

- la risposta del sistema alla combinazione lineare degli input sarà data dalla combinazione lineare delle risposte individuali.

### 1.3.5 Modello a variabili di stato

Dato un semplice circuito RCL con un generatore di tensione  $e_i$ , e date la tensione ai capi del condensatore  $e(t)$  e la corrente passante per l'induttore  $i(t)$  possiamo derivare le altre variabili di interesse.

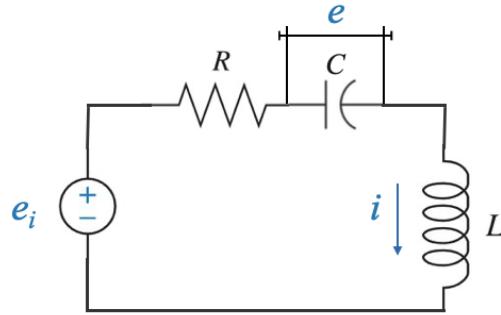
Le variabili  $e(t)$  e  $i(t)$  sono dunque dette **variabili caratteristiche** in quanto caratterizzano completamente il sistema poiché ogni output di interesse può essere ottenuto come funzione di queste variabili. Si ha inoltre che queste ci permettono di capire come l'energia si distribuisce all'interno del sistema.

Questa proprietà comporta la possibilità di conoscenza del comportamento del sistema: definiamo quindi  $e(t)$  e  $i(t)$  **variabili di stato**.

### Definizione 15 - Variabili di stato

set di variabili caratteristiche che forniscono totale conoscenza sul sistema ogni volta che sono dati lo stato iniziale e gli input esterni.  $\square$

### Modello del circuito a variabili di stato



Riorganizzazione del modello matematico: si ottiene ponendolo in modo che esprima le derivate prime delle variabili caratteristiche. Si ha quindi dalle equazioni:

$$e_i = Ri + e + L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{de}{dt}$$

Dato che vogliamo avere le variabili di stato espresse dalle derivate delle variabili caratteristiche, le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{de}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di}{dt} = \frac{e_i}{L} - \frac{R_i}{L} - \frac{e}{L} \end{cases}$$

da cui ricaviamo una rappresentazione standard tramite la definizione di:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e(t) \\ x_2(t) &= i(t) \\ r(t) &= u(t) = e_i(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{R}{L} - \frac{R}{L}x_2(t) - \frac{x_1(t)}{L} \end{cases}$$

Quello finale è quindi chiamato sistema delle equazioni di stato

Se siamo, ad esempio, interessati alla tensione dell'induttore possiamo esprimere l'output usando le variabili di stato, dimostrando come l'output dipenda dalle variabili di stato e dalle variabili di input:

$$y(t) = -Ri - e + e_i = -Rx_2 - x_1 + r$$

#### 1.3.6 Modello standard a variabili di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

dove:

- $x(t)$  è il vettore di stato di dimensione  $n$
- $u(t)$  è un input scalare
- $y(t)$  è un output scalare
- $A$  è il sistema matriciale di dimensione  $n$
- $b$  è il vettore in input di dimensione  $n$
- $c$  è il vettore in output di dimensione  $1$
- $d$  è la matrice di trasmissione diretta di dimensione  $1 \times 1$  (prodotto scalare)

**Nota:** si possono poi considerare  $b$ ,  $c$ ,  $d$  come matrici...

### 1.3.7 Capire le variabili di stato

Le variabili di stato sono introdotte per convenienza matematica: non c'è bisogno che siano sempre variabili fisiche (al contrario di input e output).

## 1.4 Modeling in Control Systems

La modellazione fornisce una rappresentazione matematica dei sistemi la quale fornisce supporto nella loro analisi, progettazione e comprensione.

### 1.4.1 Modello a variabili di stato

Consideriamo un sistema con variabili di stato  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . La relazione tra queste variabili e le equazioni differenziali del sistema può essere rappresentata come:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1r$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_nr$$

dove  $r$  è la variabile di input.

L'equazione di output è invece:

$$y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + dr$$

l'output è quindi un attributo del sistema ed è ottenuto come combinazione algebrica delle variabili di stato.

Il modello è compreso di  $n$  equazioni di stato e 1 equazione di output per un sistema SISO. Avere  $n$  equazioni di stato comporta che l'ordine del sistema sia  $n$ .

### 1.4.2 Modello a risposta impulsiva

Modello utile in particolare per sistemi lineari tempo invarianti.

Per questo modello ci sono 2 condizioni da considerare:

- **sistema rilassato:** quando la sua energia iniziale è 0, a livello matematico si deve quindi avere le condizioni iniziali uguali a 0 al tempo 0:  $x(0) = 0$
- **relazione input-output**

Questo modello non si rifà quindi alle variabili di stato, ma permette di descrivere la relazione tra input e output di ogni sistema LTI, che inizialmente è rilassato, per  $t \geq 0$  tramite l'integrale di convoluzione che ha forma:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau \quad t \geq 0$$

dove  $g(t)$  è la risposta impulsiva del sistema e  $r(t)$  è l'input del sistema per  $t \geq 0$ .

Notare quindi la differenza:

- il modello a variabili di stato descrive lo stato del sistema  $x(t)$  nel tempo basandosi su input e condizioni iniziali
- l'integrale di convoluzione fornisce il valore dell'output  $y(t)$  per ogni tempo dato l'input, sotto assunzione che le condizioni iniziali siano 0

Possiamo quindi dire che la risposta impulsiva  $g(t)$  caratterizza (definisce) completamente un sistema rilassato.

### Capire l'integrale di convoluzione

La risposta impulsiva di un sistema LTI è il suo output quando l'input è un segnale di impulso ovvero un segnale breve ma di grande energia al tempo 0.

Questo ci permette di assumere che, date anche le proprietà date dalla LTI, la risposta completa di un sistema è data dalla somma di singoli segnali; questo ci permette inoltre di scomporre segnali complessi (ad esempio la rampa) in una sequenza di impulsi.

### Integrale di convoluzione

Dato che abbiamo sistemi LTI possiamo costruire ogni segnale sommando una versione scalata e traslata del segnale impulsivo: la risposta impulsiva ci dirà quindi come il sistema reagirà a questi impulsi.

L'integrale di convoluzione è uno strumento matematico che prende una funzione (il nostro segnale di input) e la "sposta" in un'altra funzione (la risposta impulsiva del sistema). Allo stesso tempo moltiplica i valori sovrapposti delle due funzioni per ogni punto nel tempo e integra questi prodotti per poi fornire in output il risultato: questo processo combina gli effetti della risposta del sistema con tutti i "piccoli impulsi" che formano il segnale di input dando in uscita l'output totale del sistema (dato quell'input).

**Nota:** analogia con l'altalena: il sistema è l'altalena e le spinte che diamo sono il segnale di input mentre il movimento ottenuto dalla spinta è l'output. Il modo in cui l'altalena reagisce alle singole spinte è come la risposta impulsiva: se sappiamo esattamente come l'altalena

*risponde a una singola spinta possiamo prevedere come risponderà a una serie di spinte sommando i vari movimenti dati dalle spinte nel tempo. Questa somma è attuata dall'integrale di convoluzione.*

Con la risposta impulsiva di un sistema possiamo quindi prevederne il comportamento per certi input senza applicarli.

### 1.4.3 Trasformata di Laplace

Data la complessità computazionale dell'integrale di convoluzione si usa la trasformata di Laplace che converte il problema da un'integrazione nel dominio del tempo a uno nel dominio di Laplace (dominio della frequenza). La trasformata di Laplace di una funzione data è:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

dove  $s$  è una variabile complessa  $s = \sigma + j\omega$ .

Applicando questa relazione alla funzione integrale di convoluzione si ottiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

dove  $y(t)$  è l'integrale di convoluzione.

Dato che stiamo parlando di un sistema causale, la risposta del sistema può accadere solo dopo che l'input è stato applicato, per questo motivo:

$$g(t - \tau) = 0 \quad \text{per} \quad t < \tau$$

ovvero la risposta impulsiva del sistema è nulla per tempi negativi.

Quindi questo ci permette di estendere il limite dell'integrazione da  $t$  a  $\infty$ , nell'integrale di convoluzione, senza cambiare il valore di quest'ultimo.

Tornando alla trasformata di Laplace si ha quindi

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty g(t - \tau)r(\tau)d\tau \right] e^{-st}dt$$

che con  $t - \tau = \theta$  diventa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) &= \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty g(\theta)e^{-s\theta}d\theta \right] \cdot e^{-s\tau}r(\tau)d\tau \\ &= \left[ \int_0^\infty g(\theta)e^{-s\theta}d\theta \right] \left[ \int_0^\infty r(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right] \end{aligned}$$

dove notiamo che l'integrale tra parentesi è  $\mathcal{L}\{\text{impulso}\}$  che indichiamo con  $G(s)$ , mentre l'altro membro del prodotto è  $\mathcal{L}\{\text{ingresso}\}$  che indichiamo con  $R(s)$ .

L'integrale di convoluzione è quindi una operazione algebrica tra trasformate di Laplace che possiamo scrivere come

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s)$$

Dove  $G(s)$  prende il nome di **Funzione di Trasferimento** ed è definita come indicato sopra. In particolare è più conveniente, per l'analisi e la progettazione, della risposta impulsiva perché ci dà una *relazione diretta tra input e output* nel dominio della frequenza, eliminando la necessità della convoluzione.

#### 1.4.4 Significato della funzione di trasferimento

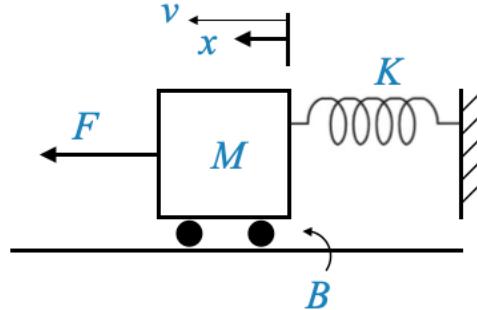
**Definizione 16 - Funzione di Trasferimento (FT)**

è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva di un sistema rilassato.  $\square$

Non potendo avere sempre la risposta impulsiva vogliamo trovare la funzione di trasferimento direttamente dal modello delle equazioni differenziali:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}|_{relaxed}$$

**Esempio 1:** Consideriamo il sistema:



dove si ha che  $M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t)$ .

Consideriamo le trasformate di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0)$$

e dato che il sistema è rilassato si ha  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , da cui:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t) \implies Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

Si ottiene quindi

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

Nel modello della funzione di trasferimento l'**ordine del sistema** è definito dal massimo esponente di  $s$  al denominatore della FT.  $\square$

**Forma generica della funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad \text{con } m \leq n$$

**Nota:** tutte le  $a_i$  e le  $b_i$  sono reali, questo garantisce che le radici del denominatore e del numeratore siano reali o coppie di complessi coniugati.

Si distinguono funzioni di trasferimento:

- **proprie**, se  $m = n$
- **strettamente proprie**, se  $m < n$

**Nota:** possiamo scrivere la FT anche in forma polinomiale chiamando il numeratore  $N(s)$  e il denominatore  $\Delta(s)$ :

$$G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$$

### Poli e zeri

Le radici del numeratore polinomiale sono chiamate **zeri** della FT. Al contrario le radici del denominatore polinomiale sono chiamate **poli**.

Il comportamento del sistema, in particolare la sua evoluzione dinamica, è profondamente influenzata dai suoi poli. Questi, per la loro centralità nella dinamica del sistema, sono chiamati **radici caratteristiche del sistema**, dettano la risposta naturale del sistema.

Gli zeri invece affliggono l'ampiezza della risposta.

Gli zeri della trasformata di Laplace sono i valori di  $s$  per i quali la trasformata è 0, i poli invece sono i valori di  $s$  per cui la trasformata è infinita.

Possiamo dunque esprimere la FT in una forma che evidenzi poli e zeri:

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

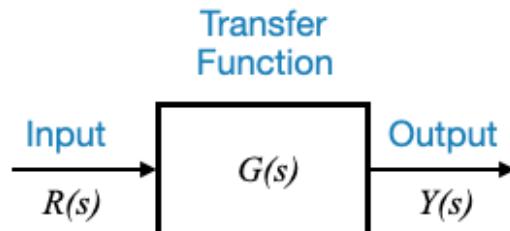
dove  $K$  è la costante di guadagno (uguale a  $b_0$  ???).

### Definizione 17 - Costante di guadagno

La costante di guadagno indica in generale la quantificazione del rapporto tra l'output e l'input. Questo indica di quanto amplifica (o attenua) un input o un segnale e quindi quanto velocemente un sistema risponde senza perdere le sue caratteristiche lineari di progettazione per un certo range di input e output.  $\square$

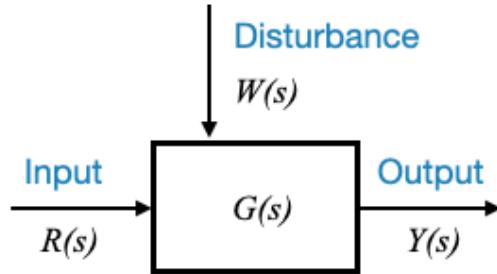
Questa rappresentazione è spesso chiamata la **forma zero-poli**.

### Diagramma a blocchi input-output usando il modello a funzione di trasferimento



**Nota:** la funzione di trasferimento associa gli input agli output.

## Diagramma inclusi i disturbi



**Nota:** l'obiettivo del controllore è quello di cercare di annullare l'effetto dei disturbi

Si possono classificare i disturbi in due categorie principali:

- segnali irregolari con forme d'onda sconosciute, spesso di natura ad alta frequenza (rumori).
- segnali a variazione lenta, la natura generale della loro forma d'onda è in qualche modo prevedibile

Tipi di disturbo:

- disturbi esterni: si presentano dall'ambiente del sistema
- disturbi interni: sono cambiamenti che avvengono dentro il sistema ma non fanno parte delle operazioni desiderate.

### 1.4.5 Modelli di disturbo nei sistemi di controllo

Categorie di modelli di disturbo:

- pulsivo (breve e costante)
- impulsivo (breve e di grande magnitudine)

Una funzione impulsiva unitaria è definita come:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \neq 0 \\ \infty & \text{for } t = 0 \end{cases}$$

da cui:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  La trasformata di Laplace del delta di Dirac è 1.

Altra categoria è quella dei disturbi a gradino ( $\mu(t)$ ): magnitudine costante che imitano un cambiamento persistente. La trasformata di Laplace del segnale gradito è  $\frac{1}{s}$

C'è poi il segnale rampa: incremento o decremento continuo del segnale:

$$f(t) = t \quad t \geq 0 \quad \text{oppure} \quad t\mu(t)$$

La cui trasformata di Laplace è  $\frac{1}{s^2}$

Infine c'è il disturbo parabolico (più veloce di quello rampa) definito come

$$f(t) = \frac{t^2}{2}\mu(t) \quad \text{per} \quad t \geq 0$$

la cui trasformata di Laplace è  $\frac{1}{s^3}$

## 1.5 Dynamic response of control systems

Abbiamo visto la forma generale per l'output del sistema nel dominio di Laplace, quando siamo però interessati alla risposta nel tempo  $y(t)$  dobbiamo calcolare  $Y(s)$  e poi invertire per ottenere  $y(t)$ . Per ottenere l'inversa faremo affidamento a tabelle (ricordando che tipicamente gli ingressi sono modellati tramite impulsi, gradini, rampe e parabole).

### 1.5.1 Paia comuni di trasformate di Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s} \quad s > 0$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{(s - a)} \quad s > a$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{(n+1)}} \quad s > 0$
$f(t) = \sin(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
$f(t) = \cos(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
$f(t) = \sinh(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad s >  a $
$f(t) = \cosh(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad s >  a $
$f(t) = t^n e^{at}$	$F(s) = \frac{n!}{(s - a)^{(n+1)}} \quad s > a$
$f(t) = e^{at} \sin(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2} \quad s > a$
$f(t) = e^{at} \cos(bt)$	$F(s) = \frac{(s - a)}{(s - a)^2 + b^2} \quad s > a$
$f(t) = e^{at} \sinh(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s - a)^2 - b^2} \quad s - a >  b $
$f(t) = e^{at} \cosh(bt)$	$F(s) = \frac{(s - a)}{(s - a)^2 - b^2} \quad s - a >  b $

**Esempio 2:** Data

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

si nota che il numeratore polinomiale è di ordine 0, il denominatore polinomiale è del secondo ordine implicando un sistema del secondo ordine.

Portando in forma zero-poli si ha:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

Dato poi l'input  $r(t) = 5(t)$  ovvero uno scalino di magnitudine 5 sappiamo che  $R(s) = \frac{5}{s}$  e si ha quindi:

$$Y(s) = \frac{5}{s(s + 1)(s + 2)}$$

da cui invertendo si ottiene

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

- dove gli ultimi due termini sono generati quando il sistema è eccitato dall'input a gradino e quindi muoiono quando il tempo aumenta: questa è la **risposta del transitorio**.
- Il termine  $\frac{5}{2}$  è dovuto dall'input e la sua natura è simile all'input stesso. Permanendo nel tempo è detta **risposta allo stato stabile**.

□

### Teorema del valore finale

È uno strumento indispensabile per determinare il valore allo stato stabile della risposta di un sistema senza avere bisogno di calcolare l'intera risposta nel dominio del tempo.

#### Teorema 1 Teorema del Valore finale

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

è applicabile se e solo se i poli di  $Y(s)$  si trovano nella metà sinistra del piano  $s$ , garantendo che la funzione sia stabile.

Questo significa che  $sY(s)$  non ha poli sull'asse immaginario e nella metà destra. □

**Nota:** Ci focalizziamo sulla metà sinistra del piano per applicare il teorema perché i sistemi che hanno poli nella metà destra sono instabili, la loro risposta tende a infinito quando

$$t \rightarrow \infty$$

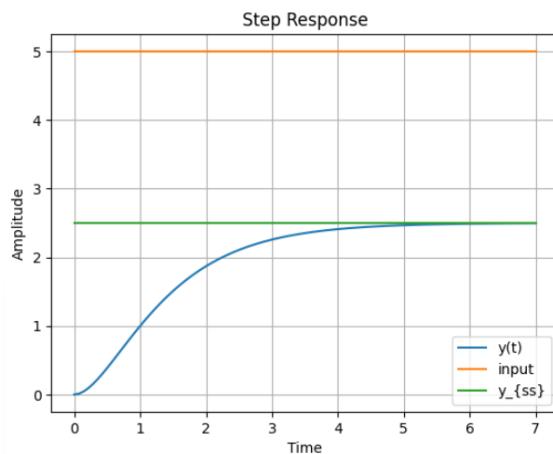
mentre il teorema richiede che la funzione sia stabile o raggiunga lo stato stabile quando si verifica questa condizione nel tempo.

**Esempio 3:** Riprendendo l'esempio di prima abbiamo :

$$sY(s) = \frac{5s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{5}{2}$$

e possiamo quindi disegnare la risposta gradino del sistema;



□

**Esempio 4:** Data la stessa funzione di trasferimento se diamo in input un segnale a rampa:

$$r(t) = 5t\mu(t)$$

la cui trasformata di Laplace è:  $R(s) = \frac{5}{s^2}$  abbiamo che la trasformata della risposta è

$$Y(s) = \frac{5}{s^2(s+1)(s+2)}$$

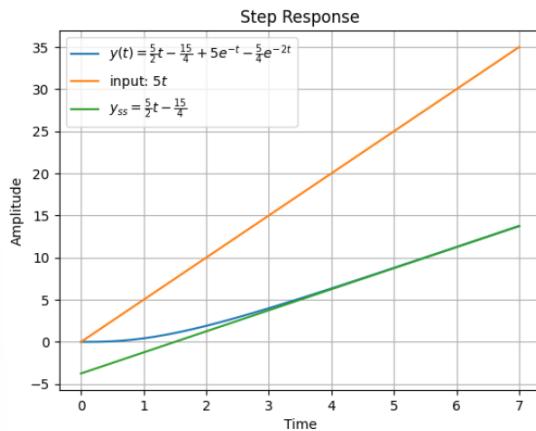
da cui sviluppando in fratti semplici e invertendo:

$$y(t) = \frac{5}{2}t - \frac{15}{4} + 5e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-2t}$$

dove nuovamente gli ultimi due termini sono dovuti dai poli del sistema e vanno a 0 (detti componenti transitoria) mentre i primi due sono dovuti a uno specifico input a rampa.

La risposta allo stato stabile è:

$$y_{ss} = \frac{5}{2}t - \frac{15}{4}$$



Applicando il teorema del valore finale si ottiene come risultato *infinito*. Tuttavia non possiamo applicarlo perché c'è un polo nell'origine e quindi lo stato stabile non è infinito ma è dato da  $y_{ss}$ .

**Nota:** C'è un polo nell'origine perché calcolando  $sY(s)$  rimane un  $s$  al denominatore.

**Nota:** lo stato stabile parte appena il transitorio "muore".

□

### 1.5.2 Caratteristiche dei sistemi del primo e del secondo ordine

Ci focalizziamo su questi perché sono i più comuni.

**Nota:** con ordine si intende il massimo grado di derivazione nell'equazione differenziale governante nel sistema.

## Sistemi del primo ordine

Prendiamo in esempio un semplice sistema meccanico rotazionale:

- variabile di input: coppia  $T(t)$
- variabile di output: velocità  $\omega(t)$
- parametri costanti:  $J$  e  $B$

Dalle leggi di Netwon abbiamo che l'equazione governante sia  $J\dot{\omega}(t) + B\omega(t) = T(t)$  che applicando Laplace diventa:  $Js\omega(s) + B\omega(s) = T(s)$

**Nota:** consideriamo sempre il sistema rilassato: le condizioni iniziali non appaiono nell'equazione trasformata.

Da essa ricaviamo la FT:  $G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js+B}$  che è un modello del primo ordine con i parametri  $J$  e  $B$ .

## Modello generale per i sistemi del primo ordine

Ogni sistema del primo ordine, a prescindere dal suo dominio, può essere generalizzato usando la seguente forma:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$$

dove  $K$  è il guadagno del sistema e  $\tau$  la costante di tempo di esso.

Il "guadagno del sistema" fa riferimento al cambiamento allo stato stabile dell'output a fronte di un cambiamento unitario nell'input, mentre la costante di tempo descrive quanto velocemente il sistema risponde ai cambiamenti.

Se applichiamo un input scalino  $T(s) = \frac{1}{s}$  la risposta diventa:

$$\omega(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

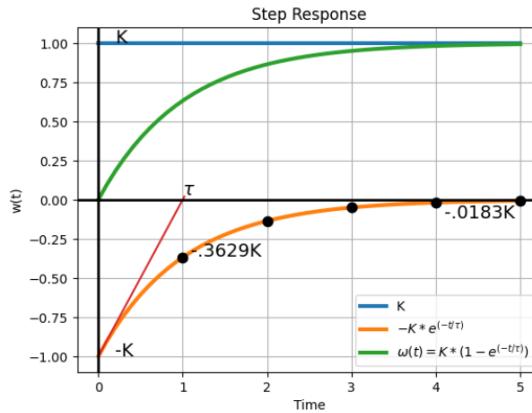
La risposta nel dominio del tempo (successiva all'inversione) caratterizza il comportamento dinamico del sistema.

$$\omega(t) = K[1 - e^{-t/\tau}]$$

## Decodifica dei parametri

- **Guadagno del sistema  $K$ :** quando  $t \rightarrow \infty$  allora  $\omega(t)$  tende a  $K$ . La velocità del nostro sistema cambia al valore  $K$  in risposta a un gradino unitario, varia l'output del sistema di  $K$
- **Costante di tempo  $\tau$ :** indica la velocità di risposta

$t$	$e^{-t/\tau}$
$\tau$	0.3679
$4\tau$	0.0183
$5\tau$	0.0067



Dall'immagine vediamo come il valore finale della risposta sia  $K$ ; per quanto riguarda invece il termine transitorio  $-Ke^{-t/\tau}$  esso diminuisce a zero quanto  $t \rightarrow \infty$ .

Capiamo il transitorio: valutando  $\frac{d}{dt} (-Ke^{t/\tau}) \Big|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$  deduciamo che il rateo iniziale del transitorio è  $\frac{K}{\tau}$  (**pendenza iniziale**).

Se il transitorio mantiene il suo rateo di discesa iniziale esso svanisce in una durata di  $\tau$ .

Tuttavia questo rateo  $(\frac{K}{\tau})$  non è statico ma osserva specifici valori:

Osserviamo come tra 4 e 5  $\tau$  il transitorio sia praticamente non esistente indicando il tempo che il sistema impiega a stabilizzarsi. (ricordarsi che è veramente 0 solo con  $t$  a infinito).

**Velocità di risposta** Il nostro obiettivo tipicamente è che l'impianto risponda senza ritardi.

**Sistemi lenti e veloci** Sistemi considerati "lenti" (come controlli di temperatura, livello di liquidi ecc.) hanno una costante di tempo grande.

Sistemi considerati "veloci" (come controllo di velocità o tracking radar) hanno costanti di tempo piccole.

**Ritardo del primo ordine** Quando vediamo la FT vista prima ( $G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)}$ ) suggerisce che il sistema non permette una risposta istantanea.

### 1.5.3 Sistemi del secondo ordine

**Spesso sistemi di ordine maggiore possono essere approssimati da sistemi del secondo ordine.** Questo rende il capirli cruciale.

Prendiamo in esame l'esempio di prima ma considerando che la barra sia flessibile, indicando con  $k$  la costante di flessibilità e con  $\theta$  la sua posizione angolare. Abbiamo quindi:

- variabile di input: coppia  $T(t)$
- variabile di output: displacement della barra  $\theta$
- parametri costanti:  $J$ ,  $k$  e  $B$

l'equazione governante diventa  $J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = T(t)$  che nel dominio di Laplace diventa  $Js^2\theta(s) + Bs\theta(s) + k\theta(s) = T(s)$  da cui deriviamo la FT:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k}$$

che è un modello del secondo ordine con parametri  $J$ ,  $k$  e  $B$ .

#### 1.5.4 Modello generale per sistemi del secondo ordine

Nel modello generale si usano di solito 3 parametri generali per descrivere il comportamento di un sistema del secondo ordine:

- $\omega_n$ ; frequenza naturale
- $\zeta$ : rateo di smorzamento
- $K$ : guadagno del sistema

quindi il modello generale della funzione di trasferimento diventa:

$$G(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

che relativamente al nostro esempio si riferisce con:

- $K = \frac{1}{k}$
- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}}$
- $\zeta = \frac{1}{2} \frac{B}{\sqrt{kJ}}$

**Parametro K** Come prima determina il guadagno del sistema. Il Th. del valore finale può essere impiegato per verificare che per un input gradino il valore finale della risposta sarà governato da  $K$ .

$$Y(s) = \frac{K}{s \left( \frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1 \right)}$$

$$sY(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

assumendo che i parametri generali siano tali che le radici del denominatore stiano nella metà sinistra del piano possiamo applicare il Th. del valore finale:  $\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = K$

**Parametri  $\omega_n$  e  $\zeta$**

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dato uno step input  $T(s) = \frac{1}{s}$ :

$$\theta(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La risposta nel dominio del tempo,  $\theta(t)$ , dopo l'inversione caratterizza il comportamento dinamico del sistema:

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}[\theta(s)]$$

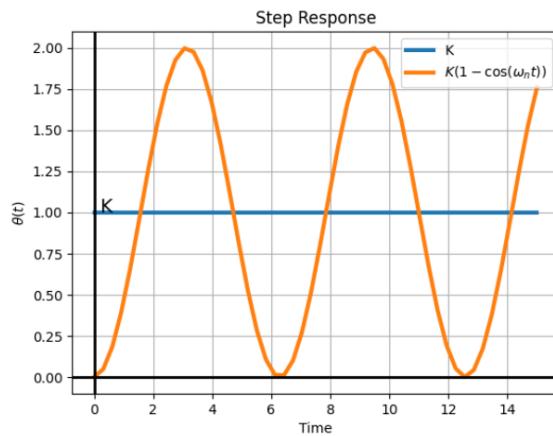
Consideriamo 4 casi:

1.  $\zeta = 0$
2.  $0 < \zeta < 1$
3.  $\zeta = 1$
4.  $\zeta > 1$

**Nota:** nel nostro esempio il caso 1 corrisponde a  $B = 0$  (no smorzamento) mentre gli altri casi corrispondono a  $B \neq 0$  (smorzamento)

**Caso 1** Andando a sostituire  $\zeta$  e invertendo si ottiene

$$\theta(t) = K(1 - \cos(\omega_n t))$$



in questo scenario il sistema mostra oscillazione intorno a  $K$  dovute all'assenza di smorzamento.

La frequenza di queste oscillazioni,  $\omega_n$ , è chiamata **frequenza naturale non smorzata**.

**Nota:** questo è un comportamento di solito non voluto

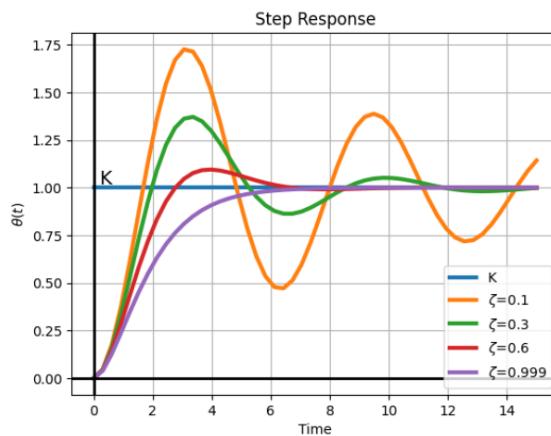
**Caso 2 (Caso sottosmorzato)** Questo caso corrisponde, nel nostro esempio, al caso in cui i parametri del nostro sistema originario devono verificare:

$$B \neq 0 \Rightarrow \frac{k}{J} > \left(\frac{B}{2J}\right)^2$$

La risposta sarà quindi:

$$\theta(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right]$$

dove  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  è detto **frequenza naturale smorzata**



in questo scenario la risposta del sistema è oscillatoria, tuttavia queste oscillazioni non sono illimitate ma tendono ad annullarsi nel tempo (oscillazioni smorzate) e diminuiscono quando  $\zeta$  aumenta.

**Nota :** Situazioni limite: quando  $\zeta$  tende a 1 le oscillazioni tendono a scomparire, quando tende a 0 le oscillazioni sono illimitate.

**Nota:** Notare dal grafico come all'aumentare di  $\zeta$  il sistema diventi più lento.

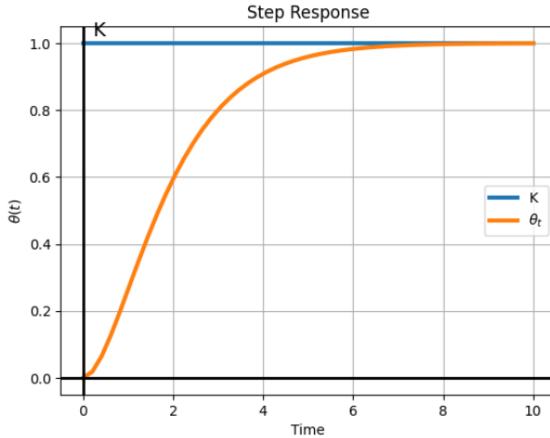
### Implicazioni pratiche

1. **comportamento del sistema:** il comportamento a smorzamento controllato è voluto spesso in ambito industriale perché garantisce una risposta veloce senza oscillazioni prolungate
2. **bilanciamento di velocità e oscillazione:** scegliere bene  $\zeta$  per evitare che il sistema sia troppo lento o troppo oscillatorio
3. **esempi di applicazioni:** stessa zuppa

**Caso 3 (caso criticamente smorzato)** La risposta mostra uno scenario in cui le oscillazioni sono eliminate, nel nostro esempio corrisponde a:  $\frac{k}{J} = \left(\frac{B}{2J}\right)^2$

La risposta sarà:

$$\theta(t) = K \left[ 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} \right]$$



Ottenerne smorzamento critico è difficile in quanto richiede regolazioni precise: questo tipo di sistemi raggiunge lo stato stabile senza oscillazioni nel più veloce tempo possibile.

**Nota:** per una equazione differenziale omogenea lineare del secondo ordine che descrive un sistema, lo stato criticamente smorzato produce due radici reali uguali.

**Caso 4 (caso sovra smorzato)** È il caso che rappresenta una situazione dove lo smorzamento è eccessivo, portando a un lento (caso più lento di tutti) ritorno all'equilibrio (lo fa senza overshooting).

**Nota:** per una equazione differenziale omogenea lineare del secondo ordine che descrive un sistema, lo stato sovra smorzato produce due radici reali distinte.

**Nota:** a volte il sovra smorzamento è voluto: ad esempio chiusura delle porte.

## 1.6 Inverse Laplace Transform: Partial fraction decomposition

Vedi appunti elettrotecnica

## 1.7 Introduction to Modeling of Dynamic Systems

### 1.7.1 Intro

Primo obiettivo: stabilire equazioni precise che definiscano sistemi dinamici. Il nostro focus è stato applicare leggi fisiche, facendo questo possiamo trasformare le equazioni differenziali che ne deriviamo in forme più gestibili quali:

- modello a variabili di stato
- modello a funzioni di trasferimento

### 1.7.2 Meccanica

Richiami ai vari componenti meccanici (massa, frizione, molle).

Derivazione del modello matematico.

### 1.7.3 Modelli fisici e approssimazioni

Se consideriamo nel sistema massa molla frizione dei disturbi  $F_\omega$  l'equazione diventerà

$$M\ddot{v} + Bv + Ky = F - F_\omega$$

dove il termine di destra è la forza netta.

Possiamo trasformarlo in un modello a variabili di stato con

$$x_1 = y$$

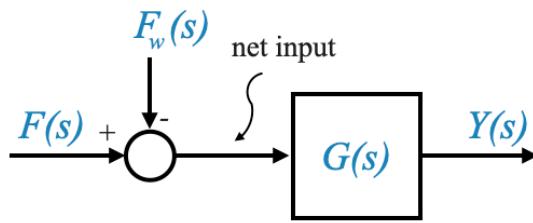
$$x_2 = v = \dot{y}$$

### 1.7.4 Trasformazione nel modello a funzione di trasferimento

Per scrivere la FT di questo modello ho bisogno di esplicitare la variabile di output:

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = F - F_\omega$$

e di rendere singolo l'ingresso:



Possiamo scrivere quindi la funzione di trasferimento tra  $Y(s)$  e  $F(s)$  e tra  $Y(s)$  e  $F_\omega(s)$  ponendo a 0 una  $F$  per volta, otteniamo in entrambi i casi

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = G(s)$$

Che dopo alcune semplificazioni e considerando lo smorzamento del sistema e la sua frequenza diventa

$$G(s) = \frac{\frac{1}{K}}{\frac{M}{K}s^2 + \frac{B}{K}s + 1} = \frac{K_S}{\frac{1}{\zeta_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

Dove  $K_S$  indica il guadagno del sistema (per differenziarlo da  $K$  costante elastica).

Questa funzione, chiamata ritardo quadratico, è un ritardo del secondo ordine, diversa dal ritardo del primo ordine precedentemente discusso.

pochi altri dettagli (uselsess)

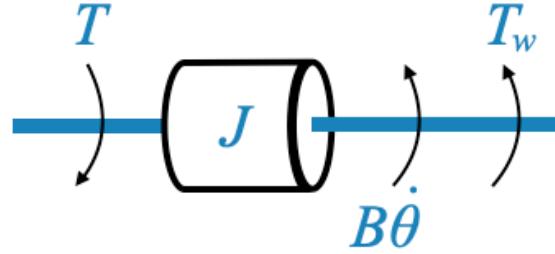
### 1.7.5 Sistemi con asse rotazionale fisso

Dati:

- $J$ : momento di inerzia del sistema
- $B$ : coefficiente di attrito viscoso

- $K$ : costante elastica (molla)

varie considerazioni...



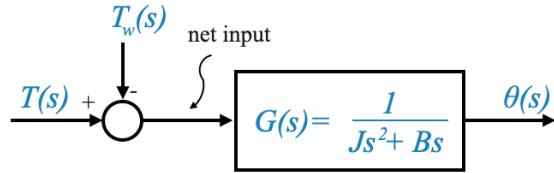
Otteniamo l'equazione:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T - T_w$$

dove:

- il primo termine è la coppia iniziale
- il secondo la coppia di smorzamento
- $T$  è la coppia applicata
- l'altra è la coppia di disturbo

Il modello a funzione di trasferimento per il sistema, considerando come output  $\theta(s)$ , è dato da:



dove se esprimiamo la funzione di trasferimento nella sua forma standard ( $G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$ ) otteniamo che:

- $K = \frac{1}{B}$  è il guadagno del sistema
- $\tau = \frac{J}{B}$  è la costante di tempo del sistema

### Cambiare la variabile di output

In alcuni casi è più pertinente considerare la velocità angolare come la variabile di output (al posto del displacement angolare  $\theta$ ). Applicando questo cambiamento l'equazione differenziale di controllo diventa:

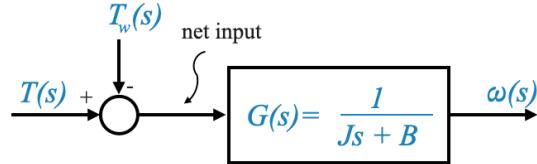
$$J\dot{\omega} + B\omega = T - T_w$$

dove abbiamo:

- il primo termine che rappresenta la coppia inerziale dovuta all'accelerazione
- il secondo la coppia di smorzamento dovuta alla velocità
- le altre due la coppia applicata e la coppia di disturbo

Trasformando l'equazione differenziale nel dominio di Laplace la funzione di trasferimento diventa:

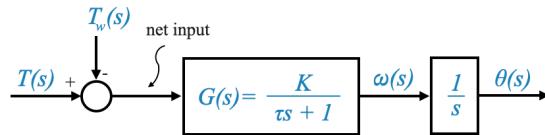
$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$



**Nota:** cambiare la variabile di output cambia la dinamica del sistema:

- il sistema risponde a cambiamenti nella velocità
- la strategia di controllo si concentra sul mantenere o aggiustare la velocità (non più la posizione)

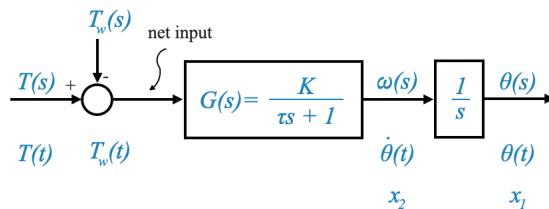
Possiamo ora rivisitare il sistema quando l'output era la posizione:



Un motore che è controllato in posizione ha un effetto integrante. Non c'è un integratore fisico ma l'effetto complessivo è quello di un integratore.

**Dal diagramma a blocchi di funzioni di trasferimento al modello a variabili di stato**

È importante notare che l'output di un ritardo del primo ordine è lo stesso di un integratore con un filtro. Quindi il suo output è anche una variabile di stato adeguata.



Dal diagramma a blocchi sopra si possono calcolare semplicemente le variabili di stato. Dall'integratore sulla destra possiamo ottenere:

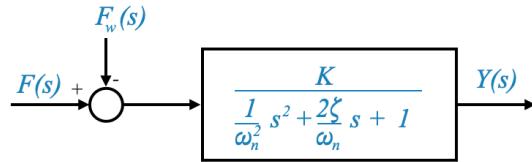
$$\dot{x}_1 = x_2$$

e dal ritardo del primo ordine otteniamo

$$\tau \dot{x}_2 + x_2 = K(T - T_\omega)$$

e quindi trovare le matrici A, b, c e d per avere la forma standard.

Un ritardo del secondo ordine sarà modellato con 2 variabili di stato ma in questo caso non sono disponibili come output di un integratore



La scelta delle variabili non è unica ma un'opzione che funziona è di prendere l'output come una variabile di stato e la sua derivata come l'altra.

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = x_1$$

### 1.7.6 Introduzione ai sistemi termici in controllo automatico

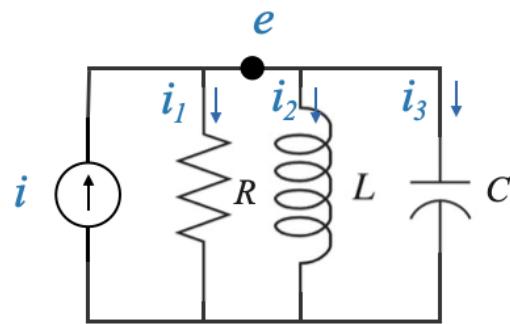
concetti generali

### 1.7.7 Principi di variabili analoghe

È utile fare parallelismi tra vari tipi di sistemi (ad esempio tra meccanico ed elettrico) per avere prospettive e strumenti aggiuntivi sull'analisi e sulla progettazione.

Il concetto alla base è che sistemi governati da equazioni differenziali simili avranno comportamenti uguali, studiando quindi la risposta di un sistema ne possiamo dedurre il comportamento della controparte analoga.

**Esempio 5:** Per capire prendiamo il circuito:



da cui le equazioni:

$$\begin{aligned}\frac{e}{R} + i_2 + C \frac{de}{dt} &= i \\ L \frac{di_2}{dt} &= e\end{aligned}$$

Se vogliamo farne il parallelo meccanico:

- la forza è analoga al voltaggio
- la velocità è analoga alla corrente

Utilizzando le tecniche di analisi dei sistemi meccanici possiamo riscrivere l'equazione governante come :

$$\frac{e}{R} + C \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau = i$$

possiamo riscrivere l'equazione precedente come:

$$M\dot{v} + Bv + K \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = F$$

dove abbiamo ottenuto l'analogia *forza-corrente* nei due sistemi:

- la forza è analoga della corrente
- la velocità del voltaggio
- la massa della capacità
- lo smorzamento del reciproco della resistenza
- la costante elastica del reciproco dell'induttanza

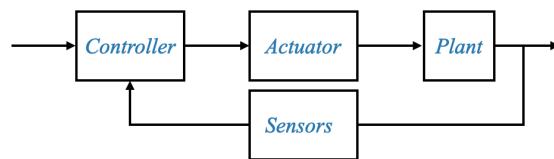
**Nota:** questa analogia può essere trasportata al sistema rotazionale.

□

## 1.8 Control System Components

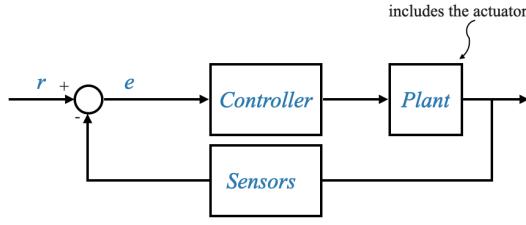
I sistemi in controllo automatico hanno ampio uso nell'industria poiché aiutano a mantenere un output desiderato aggiustando per lo scopo gli input.

In questi l'intero processo può essere visualizzato come una sequenza di componenti interconnesse che inizia con l'impianto che essenzialmente è il sistema che miriamo a controllare. Quest'ultimo è guidato da un attuatore la cui potenza è controllata dal controllore (la mente del nostro sistema) che prende decisioni in base al feedback che riceve dai sensori che monitorano il sistema.



**Nota:** Il **controllore** può essere un circuito amplificatore (amplificatore operazionale) o un computer digitale (nei sistemi moderni): è quindi spesso di natura elettronica.

Un diagramma più preciso è



Il controllore può rispondere agli errori in più modi:

1. **Controllore proporzionale** quando amplifica l'errore.
2. **Controllore proporzionale e integrale** quando crea un segnale diviso in due parti: una direttamente proporzionale all'errore e l'altra proporzionale all'errore accumulato nel tempo.
3. **Controllore proporzionale derivativo (PD)** che presentano in uscita non solo l'errore ma anche il rateo di cambiamento di questo; in questo modo si può anche anticipare l'errore futuro. (utile quando deve essere molto reattivo)
4. **Controllore proporzionale integrale derivativo** combina le 3 strategie: offre un approccio completo in quanto allo stesso tempo garantisce accuratezza allo stato stabile, velocità di risposta e anticipazione degli errori futuri.

Dal punto di vista matematico si traducono in:

1.

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

dove  $u$  è l'output di controllo,  $K$  il guadagno proporzionale e  $e$  il segnale di errore

2.

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t) dt$$

dove  $K_i$  è il guadagno integrale

3.

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

dove  $K_d$  è il guadagno derivativo

4.

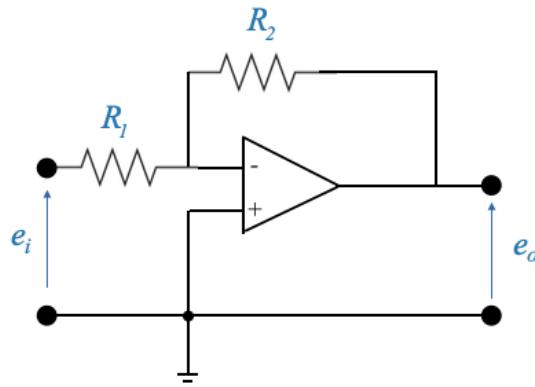
$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Modificare questi guadagni permette di regolare le performance del controllore, questo può essere implementato con controllori analogici tramite amplificatori operazionali.

### 1.8.1 Controllori analogici

Sono componenti che possono comportarsi come amplificatori, integratori o differenziatori. Non fanno passare corrente ma danno una tensione in uscita  $V_{out} = K(V^+ - V^-)$  con  $K \gg 1$

1. circuito:

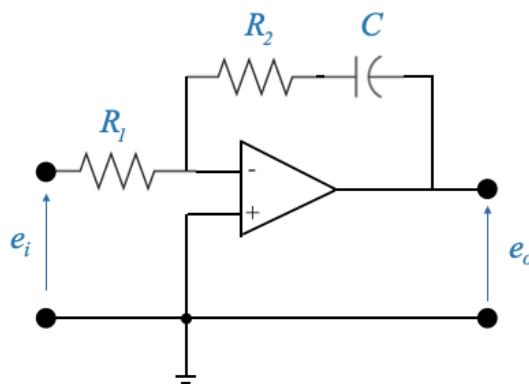


Funzione di trasferimento:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

**Nota:** con due circuiti in serie si può fare a meno del segno meno

2. circuito



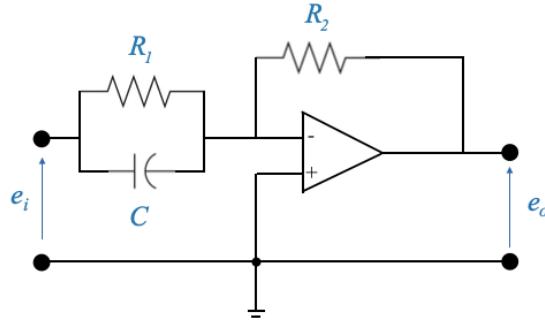
Funzione di trasferimento:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{R_1 C} \frac{1}{s}$$

che può essere scritta come:

$$e_0(t) = \frac{R_2}{R_1} e_i(t) - \frac{1}{R_1 C} \int_0^t e_i(\tau) d\tau$$

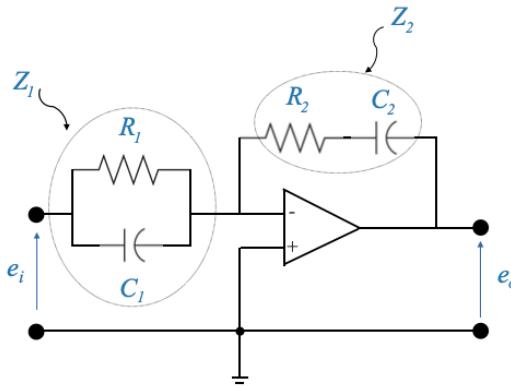
3. circuito:



Funzione di trasferimento:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 \frac{1}{sC}}}{R_1 + \frac{1}{sC}}$$

4. circuito:



Funzione di trasferimento:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

dove:

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s} \quad Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

### 1.8.2 Amplificatori operazionali

È un componente elettronico che amplifica il voltaggio. Prende due voltaggi in input, ne fa la differenza e moltiplica questa per un numero molto grande. Questo funzionamento li rende utili per vari applicativi (di base per le varie operazioni di addizione, integrazione ecc.).

In particolare  $K$  è chiamato guadagno differenziale ed è di solito molto grande ovvero circa  $1e5$  o  $1e6$  per segnali a bassa frequenza ( $< 10Hz$ ).

### 1.8.3 Amplificatori invertitori (P)

nulla di che

## 1.9 Models of Controlled Devices

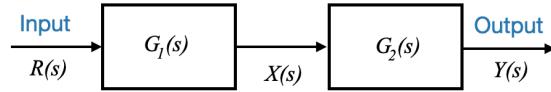
### 1.9.1 Rivisitazione dei modelli di impianto

Come abbiamo già visto possiamo incapsulare la dinamica di un impianto con una funzione di trasferimento, l'output sarà quindi sempre:

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

### 1.9.2 Blocchi in cascata

Assumiamo di avere due blocchi:



vediamo come

$$X(s) = G_1(s)R(s)$$

$$Y(s) = G_2(s)X(s)$$

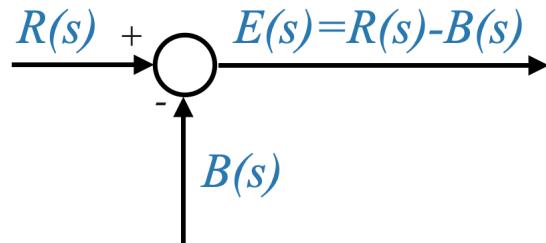
che se combinate danno

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)R(s)$$

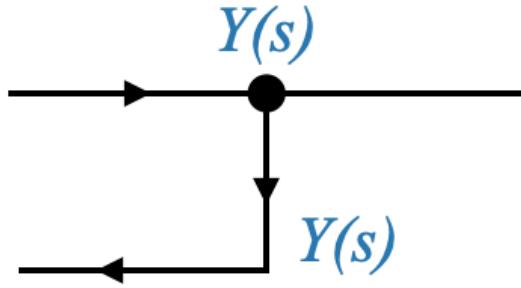
che ci dice come se abbiamo due blocchi in cascata le loro FDT possano essere moltiplicate per ottenere la relazione tra input e output.

### 1.9.3 Giunzioni di somma e diramazioni

Le giunzioni di somma sono:



Le diramazioni sono:



### Sistema di livello del liquido: sguardo dettagliato

esempio

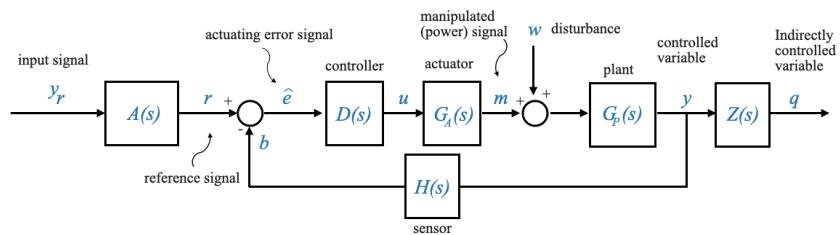
#### 1.9.4 Fondamentali dei diagrammi a blocchi

Breve riassunto:

1. FDT base: semplice rappresentazione della dinamica di un sistema con un input e un output.
2. Cascata di blocchi: due FDT ordinate in serie.
3. Giunzione somma: un punto nel diagramma dove due segnali sono **algebricamente** sommati o sottratti.
4. Diramazioni: punto del diagramma in cui il segnale è diramato senza alcun cambiamento

#### 1.9.5 Panoramica del sistema di controllo in feedback

Consideriamo:



**Nota:**

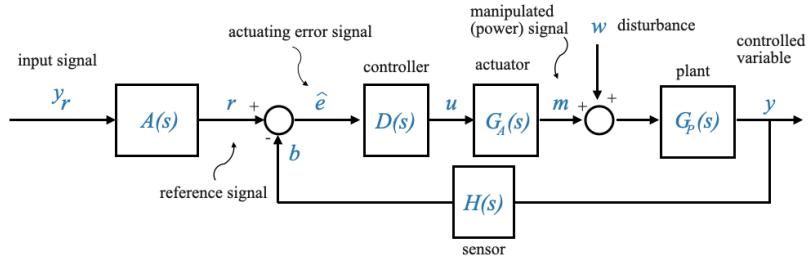
- Da ora in poi ometteremo il sottosistema  $Z$  in quanto non gioca un ruolo nel loop di feedback

- Differenza fondamentale tra  $e$  ed  $\hat{e}$ :

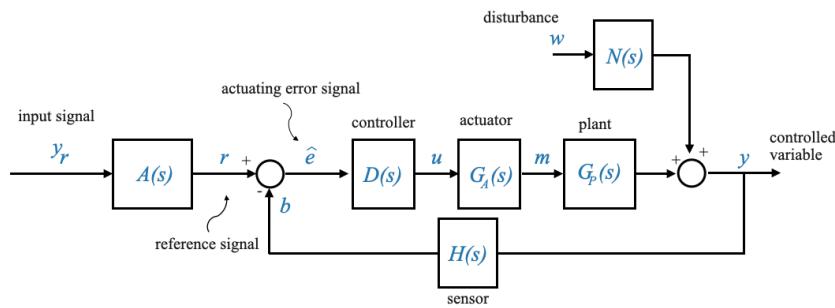
- $\hat{e}$  è il segnale che eccita il controllore
- $e$  è l'errore reale tra la variabile controllata  $y$  e il segnale di comando  $y_r$ .

Si ha quindi che  $e = y - y_r$  e che  $\hat{e} = r - b$

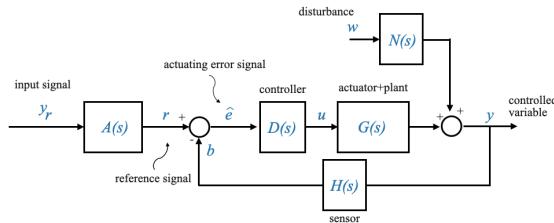
## Diagramma a blocchi standard per il design in feedback



## Un diagramma a blocchi conveniente

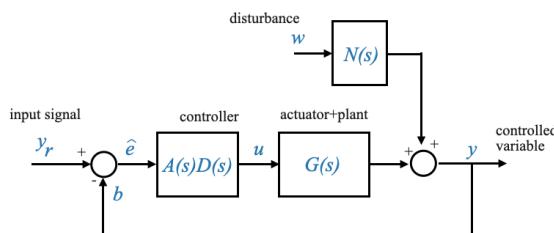


che può essere ancora ottimizzato unificando  $G_A(s)$  e  $G_p(s)$ :



## Unità nei sistemi in feedback

Una ulteriore trasformazione si ha quando  $H(s)$  corrisponde a  $A(s)$  che significa che la FDT è allineata con la FDT di riferimento.



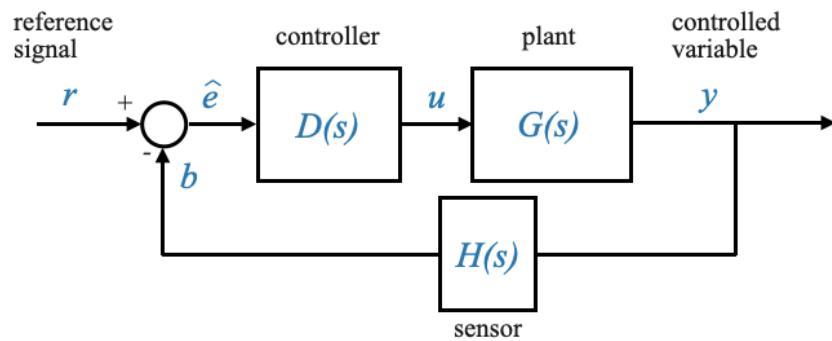
Questo sistema, per il suo valore, è chiamato "sistema unitario in feedback"

**Nota:** il termine "unitario" non implica per forza una FDT del sensore unitaria (=1).

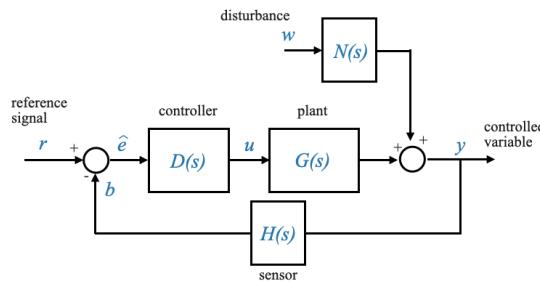
**Nota:** è comune errore pensare che il segnale  $y$  arrivi direttamente alla giunzione senza l'intervento di un sensore.

### 1.9.6 Design del diagramma a blocchi in feedback

possiamo semplificare i precedenti diagrammi:



### 1.9.7 Importanza dei disturbi



### 1.9.8 Funzione di trasferimento ad anello chiuso

Determiniamo la FDT ad anello chiuso:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = ?$$

**Mettere i disturbi a 0**

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{w=0} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)} = M(s)$$

Questa è chiamata **Funzione di Trasferimento di Riferimento** in quanto relaziona  $R$  con  $Y$ .

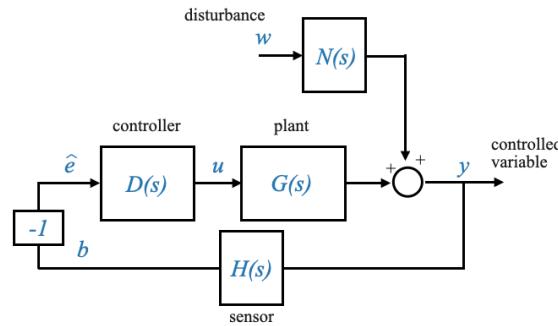
**Mettere l'input di riferimento a 0**

Siamo ora interessati alla FDT tra l'output  $Y$  e il disturbo  $W$ .

$$\left. \frac{Y(s)}{W(s)} \right|_{w=0} = ?$$

Questa FDT cattura la risposta del sistema ai disturbi. È una misura di quanto i disturbi esterni sono filtrati o amplificati dalla dinamica del sistema prima di influenzare l'output.

Per rendere il nostro obiettivo più maneggevole possiamo applicare la seguente modifica:



Da cui deriviamo due relazioni fondamentali:

1.  $\hat{E}(s) = -H(s)Y(s)$
2.  $Y(s) = D(s)G(s)\hat{E}(s) + N(s)W(s)$

Da cui

$$\left. \frac{Y(s)}{W(s)} \right|_{R(s)=0} = \frac{N(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)} = M_W(s)$$

che è chiamata **Funzione di trasferimento dei disturbi**

### Funzione di trasferimento ciclica

L'espressione

$$D(s)G(s)H(s)$$

è chiamata FDT ciclica perché rappresenta l'effetto combinato di tutte le funzioni di trasferimento presenti nel circuito di feedback.

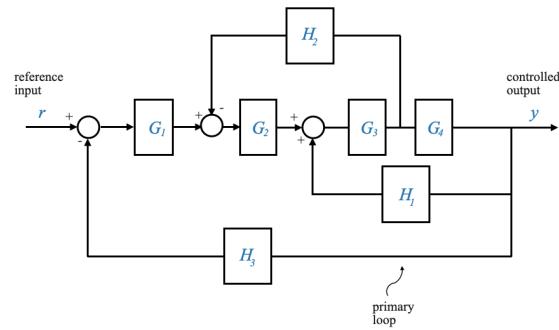
#### 1.9.9 Conclusioni sui diagrammi delle funzioni di trasferimento

Solite cose

#### 1.9.10 Riduzione avanzata dei diagrammi a blocchi

Intro

## Sezionamento di un sistema multi loop



Per trovare la relazione tra Y e R:

1. Identificare un circuito in feedback base.
2. Manipolazione del diagramma a blocchi per ottenere i cicli in feedback base identificati (ad esempio spostando giunzioni).
3. Applicazione delle formule di riduzione, ovvero applicazione della formula standard:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

4. Riduzione iterativa: si riparte dal punto 1.

### 1.9.11 Regole per la manipolazione dei diagrammi a blocchi

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1	$A \xrightarrow{G} AG$ $AG - B$	$A \xrightarrow{+} \frac{A-B}{G}$ $\frac{B}{G} \xrightarrow{G} AG - B$
2	$A \xrightarrow{G} AG$ $AG$	$A \xrightarrow{G} AG$ $AG \xrightarrow{G} AG$
3	$A \xrightarrow{G} AG$ $A$	$A \xrightarrow{G} AG$ $AG \xrightarrow{\frac{1}{G}} A$
4	$A \xrightarrow{+} B$ $G_1 \xrightarrow{} B$ $G_2 \xleftarrow{} G_1$	$A \xrightarrow{\frac{1}{G_2}} \xrightarrow{+} G_2 \xrightarrow{G_1} B$
5	$A \xrightarrow{+} B$ $G_1 \xrightarrow{} B$ $G_2 \xleftarrow{} G_1$	$A \xrightarrow{\frac{G_1}{1+G_1G_2}} B$

altro...

## 1.10 Hardware of Control Systems and Case Studies

Descrizioni dei vari hardware.

## 1.11 AC Motion Control Systems

Esempi di vari motori elettrici.

## 1.12 A Feedback Control System

Esempi industriali e storia dei sistemi di controllo.

## 1.13 Principles of Feedback Control

### 1.13.1 Diagramma dei sistemi di controllo in feedback

Recap dei vari componenti.

### 1.13.2 Obiettivi della progettazione

**Obiettivo primario:** assicurarsi che la variabile controllata  $y$  rifletta da vicino  $y_r$  per tutti i tempi maggiori di  $t_0$  dove questo è il tempo in cui inizia il controllo.

Uno scenario comune è che  $y_r$  rimanga costante per un tempo esteso e si ha come obiettivo allineargli velocemente  $y$ . Questo è chiamato **controllo del punto fisso** o **problema regolatore**.

Due misuratori di performance:

1. **settling time:** tempo che impiega  $y$  ad approssimarsi a  $y_r$
2. **accuratezza allo stato stabile:** una volta raggiunto l'equilibrio deve essere mantenuto

Limitazioni ai nostri obiettivi:

1. Stabilità
2. Limitazioni all'ampiezza dei limiti
3. Rifiuto dei disturbi

### Filtrazione dei rumori

I sensori, essenziali in un mondo non ideale come quello reale, introducono rumore ad alta frequenza nel sistema.

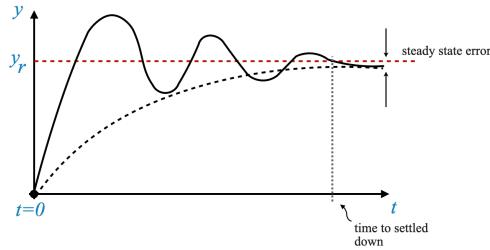
### sensitività e robustezza

La **robustezza** è l'abilità di un sistema di performare in modo soddisfacente nonostante finiti cambiamenti nel modello.

La **sensitività** si riferisce a come un sistema risponde a piccoli cambiamenti differenziali.

## Modellamento della risposta dinamica

Anche se vorremmo reazioni istantanee le componenti fisiche introducono sempre un ritardo: questo si manifesta come *settling time* ovvero il tempo che il sistema impiega a stabilizzare il suo output. C'è inoltre l'*errore allo stato stabile* che non è altro che la differenza tra l'output desiderato e quello attuale una volta che il sistema è stabile.



### 1.13.3 Analisi della sensibilità di sistemi in Feedback vs anello aperto

Veloce recap

#### Analisi della sensitività

Questa si riferisce alla misura di come un cambiamento in un parametro del sistema interessa la performance del sistema.

Il valore nominale delle tue prestazioni (ad es., velocità di risposta) è:

$$J_n = J(\theta_n) \quad (1.1)$$

Poiché la sensitività è legata a variazioni differenzialmente piccole, possiamo utilizzare l'espansione in serie di Taylor per  $J$  intorno al suo punto nominale.

Utilizzando l'espansione in serie di Taylor, l'effetto delle variazioni in  $\Delta$  su  $J$  può essere rappresentato come:

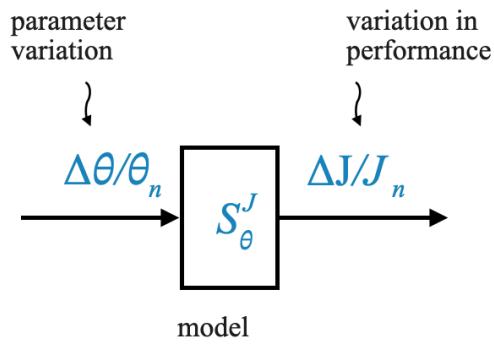
$$J(\theta_n + \Delta\theta) = J(\theta_n) + \left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_n} \Delta\theta + \text{termini di ordine superiore} \quad (1.2)$$

Per la nostra analisi, trascuriamo i termini di ordine superiore, considerando solo la variazione del primo ordine, e quindi la nostra equazione diventa:

$$J(\theta_n + \Delta\theta) = J(\theta_n) + \left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_n} \Delta\theta \quad (1.3)$$

### 1.13.4 Definizione della sensitività quantitativa

$$S_\theta^J = \frac{\Delta J/J_n}{\Delta\theta/\theta_n}$$



Questa determina come il sistema risponde a varie variazioni nei parametri (input).

### 1.13.5 Sistemi in feedback e sensitività

Espressioni varie.

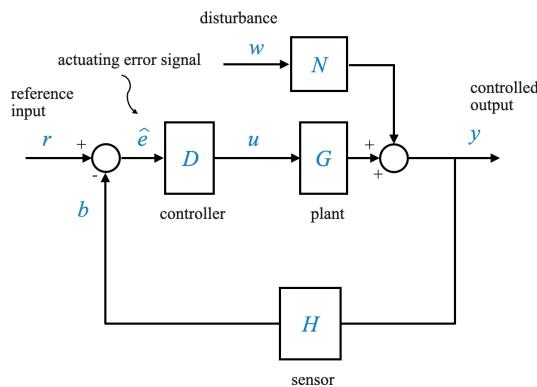
Commenti:

- controllando in modo adeguato il guadagno del controllore D possiamo aggiustare il guadagno del circuito e in tal modo ridurre la sensitività al livello desiderato. Essenzialmente un maggiore guadagno nel circuito risulta in una minore sensitività.
- D rappresenta il controllore ed è sotto il nostro controllo dato che lo possiamo modificare (questo lo rende unico)
- il principio alla base è semplice: **maggior è il guadagno del circuito minore sarà la sensitività del sistema**

**Nota:** Un sistema è più sensibile rispetto al sensore quando il guadagno del circuito aumenta.

## 1.14 Feedback systems and their effects

Ricordiamo il diagramma:



e la relazione tra input e output che può essere espressa da  $M(s)$ :

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

### 1.14.1 Analisi della sensitività

**sensitività di M rispetto a G** Abbiamo prima derivato che la sensitività della funzione di trasferimento generale M rispetto alla FDT dell'impianto G è:

$$S_G^M = \frac{1}{1 + D(s)G(\theta_n, s)H(s)}$$

( $\theta$  appartiene all'impianto)

**sensitività di M rispetto a H** In modo simile la funzione di sensitività rispetto ad H è:

$$S_H^M = \frac{-D(s)G(s)H(\alpha_n, s)}{1 + D(s)G(s)H(\alpha_n, s)}$$

### Conclusioni

1. Incrementando il guadagno del circuito (loop gain) che è il prodotto di D, G e H, si riduce la sensitività di M rispetto a G
2. In un sistema ad anello aperto la sensitività è unitaria, indicando grande sensitività ai cambiamenti dei parametri nell'impianto.

### 1.14.2 Compromessi del controllo in feedback

Nei sistemi ad anello aperto il guadagno del sistema è:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = D(s)G(s)$$

mentre nei sistemi ad anello chiuso:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

Si ha quindi che nei sistemi ad anello chiuso il guadagno è limitato dall'azione del feedback.

*La riduzione del guadagno è un compromesso per una maggiore sensitività.*

**Implicazioni di progettazione** Per contrastare la perdita di guadagno nei sistemi in feedback è possibile aggiustare l'impianto G per avere un alto guadagno ad anello aperto per compensare le perdite indotte dal feedback.

### 1.14.3 Rifiuto dei disturbi

L'abilità del sistema di respingere i disturbi che possono condizionarlo è molto importante.

Considerando la FDT:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = M_W(s) = \frac{N(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

si capisce il comportamento del sistema in risposta ai disturbi:

- se il guadagno del circuito  $D(s)G(s)H(s)$  è alto gli effetti dei disturbi sono ridotti
- l'aumento del guadagno del circuito ha le sue sfide specialmente considerando il rumore nel sistema
- se  $H(s) = 0$  e quindi non c'è il sensore il rifiuto dei disturbi non è possibile: tutti i disturbi avranno effetto sull'output

### 1.14.4 Filtrazione dei rumori e relative sfide

Il sistema in feedback introduce una sfida: il **rumore**, specialmente quello ad alta frequenza spesso generato dai sensori.

Dato  $v$  segnale ad alta frequenza (rumore) si ha la FDT rispetto all'output:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{-D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

#### Compromessi tra sensitività e riduzione dei disturbi e respingimento del rumore

- Il guadagno del circuito è  $DG$
- Il compromesso è: come incrementiamo il guadagno del circuito per respingere i disturbi o ridurre la sensitività incrementiamo la suscettibilità del sistema ai rumori.
- Questo perché aumentare il guadagno del circuito significa far tendere il precedente rapporto a 1, il che significa che il segnale di rumore viene inserito direttamente nel circuito: non possiamo ottenere tutti i requisiti esclusivamente incrementando il guadagno del circuito.

**Aggiungere filtri per il rumore ad alta frequenza** Un approccio comune per far fronte a questo problema è aggiungere filtri per rumori ad alta frequenza: questi assicurano che solo segnali rilevanti passino eliminando i rumori ad alta frequenza.

### 1.14.5 Modellamento della risposta dinamica nei sistemi di controllo in feedback

#### Modellamento della risposta dinamica

Consideriamo la FDT di un sistema in circuito chiuso:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

La risposta dinamica del sistema è influenzata dai suoi poli e dai suoi zeri, in particolare i poli determinano la natura della risposta del sistema (es. oscillatoria o no) mentre gli zeri influiscono la magnitudine di queste risposte.

Esempi python

## Ruolo del feedback nella modellazione della risposta dinamica

roba già detta

### Problema della Progettazione

Ottimale: traslare una desiderata risposta dinamica in locazioni specifiche dei poli.

Passi da seguire:

1. determinare la posizione dei poli corrispondente alla risposta dinamica desiderata
2. progettare  $D_1$  e  $D_2$  nel controllore per realizzare queste posizioni nel sistema ad anello chiuso.

### Limitazioni dei controlli ad anello aperto nella modellazione dinamica

I poli di  $G$  non sono accettabili in quanto non ci danno la risposta desiderata: ci vogliamo muovere dove ci danno la risposta che vogliamo.

**Strategia di controllo ad anello aperto** Idea: cancellare i poli di  $G$  e rimpiazzarli con i poli desiderati.

Implementazione: progettare  $D$  in modo che cancelli i poli di  $G$  e introduca i poli prescritti.

Esempio.

Note:

**Nota:** • la cancellazione è possibile solo in rispetto del modello e non dell'impianto, inoltre non essendoci feedback non c'è conoscenza del suo errore al controllore.

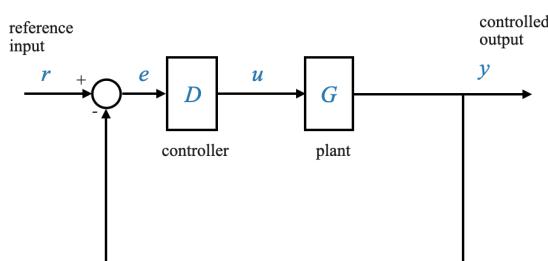
- le performance di questo metodo deteriorano nel tempo in quanto i cambiamenti dell'impianto non sono catturati dal modello.

- è instabile in quanto ad anello aperto

Si conclude quindi che nonostante la maggiore complessità il sistema in feedback è preferibile per i vari vantaggi che offre.

#### 1.14.6 Accuratezza allo stato stabile nel controllo in feedback

Consideriamo un sistema in cui il fattore di feedback è 1 (= no sensore (?)).



La FDT del sistema è data da:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

mentre quella del segnale di errore:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + D(s)G(s)}$$

questa relazione è fondamentale e depone le fondamenta per capire l'errore allo stato stabile.

### 1.14.7 Teorema del valore finale ed errore allo stato stabile

Usando il Th. del valore finale l'errore allo stato stabile è dato da;

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + D(s)G(s)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

questa equazione mostra come  $e_{ss}$  si relazioni all'input  $R$  e alla FDT del sistema.

#### Caso studio: risposta all'input gradino

Per un input gradino si ha:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + D(0)G(0)}$$

dove i due termini a prodotto al denominatore rappresentano il guadagno del circuito alle basse frequenze.

Progettando correttamente il controllore  $D$  si può manipolare il guadagno per ridurre l'errore allo stato stabile (aumenta l'accuratezza).

#### Comparazione con in controllo ad anello aperto

$$e_{ss} = 1 - D(0)G(0)$$

In questo caso è possibile eliminare completamente l'errore allo stato stabile impostando  $D(0) = 1$ . Tuttavia questo approccio manca di robustezza e capacità di respingimento dei disturbi.

### 1.14.8 Conclusioni

nulla di speciale

## 1.15 Introduction to Control Systems

### 1.15.1 Controllo proporzionale

È uno dei più semplici modi di controllo. Il segnale di controllo, nel controllo proporzionale, è dato da:

$$u = K_c \cdot e$$

dove  $K$  è il guadagno del controllore.

Nel dominio di Laplace:

$$U(s) = K_c \cdot E(s)$$

### 1.15.2 Controllo proporzionale integrale

$$u(t) = K_c \cdot (e + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt)$$

### 1.15.3 Controllo derivativo proporzionale

$$u = K_c(e + T_D \dot{e})$$

dove  $T_D$  è il tempo derivativo o tempo di rateo.

### 1.15.4 Controllo derivativo integrale proporzionale

$$u(t) = K_c \cdot (e + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_D \cdot \frac{de}{dt})$$

### 1.15.5 Esempio: sistema di controllo della temperatura

esempio solo parole

### 1.15.6 Capire l'impatto dei disturbi (theta-a)

Riferendosi all'esempio precedente consideriamo un incremento nella temperatura ambiente  $\theta_a$ , di conseguenza si riduce il flusso del sistema di riscaldamento ecc...

Dato ciò considereremo l'effetto del disturbo  $\theta_a$  su un sistema  $\theta$  come positivo.

### 1.15.7 Effetti del guadagno dell'amplificatore

Miriamo a studiare gli effetti del guadagno dell'amplificatore  $K_A$

#### Sviluppo dell'equazione del sistema

##### Descrizione dell'equazione

1. Segnale di errore:

$$e = K_t \theta_r(s) - K_t \theta(s)$$

dove  $K_t$  è la costante di termocoppia,  $\theta_r$  la temperatura di riferimento e  $\theta$  la temperatura attuale.

2. Segnale di controllo: il segnale di errore viene moltiplicato dal prodotto dei guadagni:

$$K_A K_e K_x K_v$$

risultando nella variabile manipolata

3. Dinamica generale del sistema: include la dinamica dell'impianto data da  $\frac{K_p}{\tau_p s + 1}$  e il disturbo  $\theta_a$

4. Includendo il disturbo (secondo elemento della somma) si ottiene dal numero 3:

$$[(K_t \theta_r(s) - K_t \theta(s)) K_A K_e K_x K_v] \frac{K_p}{\tau_p s + 1} + \frac{1}{\tau_p s + 1} \theta_a(s) = \theta$$

## Equazione finale

Usando il guadagno del circuito  $K$  si può ottenere:

$$(\tau_p s + 1 + K)\theta(s) = K\theta_r(s) + \theta_a(s)$$

Questa equazione lega la temperatura in output theta con la temperatura di riferimento theta r e la temperatura di disturbo ambientale theta a.

### 1.15.8 Controllo integrale e errore allo stato stabile

Limitazione del controllo proporzionale: è necessario un errore persistente in quanto se l'errore va a 0 l'azione del controllore è zero. Il ruolo del controllo integrale è quindi quello di, accumulando l'errore nel tempo, permettere all'errore di ridursi a 0 continuando a prevedere l'azione del controllore.

### 1.15.9 Rivisitazione del sistema di controllo della temperatura

#### 1.15.10 Introduzione al controllo derivativo

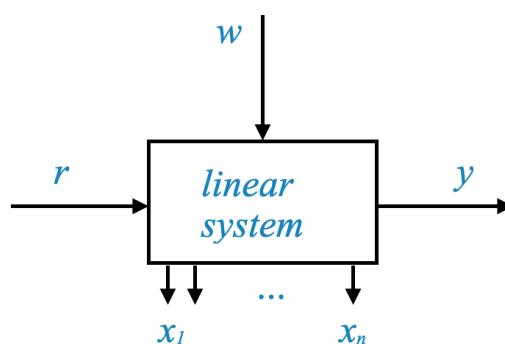
#### 1.15.11 Implementazione del controllo derivativo nel sistema di controllo

AGGIUNGERE(?)

## 1.16 Stability Analysis in Control Systems

### 1.16.1 Capire un sistema lineare

Consideriamo un sistema lineare (che per il nostro scopo può essere un qualsiasi sistema fisico) influenzato dall'ambiente che include input di riferimento, disturbi e output.



Dato che l'output da solo non descrive la dinamica dello stato del sistema completamente per farlo ci sono le variabili di stato (le x).

**Modello del sistema e limitazioni** Quando un sistema è caratterizzato da una FDT, input e output non è detto che il sistema rifletta esattamente questa risposta in quanto ci sono discrepanze. Questo perché certe variabili di stato che non si riflettono sull'output y possono mostrare instabilità quando stimolate dall'input o dai disturbi.

È quindi **cruciale** che tutte le variabili di stato si stabilizzino allo stato stabile per affermare la generale stabilità del sistema.

### 1.16.2 Capire il ruolo dei disturbi ( $w$ ) e delle condizioni iniziali ( $x_0$ )

Cambiamenti nei disturbi cambiano le condizioni iniziali del sistema e quindi l'immagazzinamento di energia. Cambiando le condizioni iniziali e osservando la stabilità della var. di stato possiamo valutare la stabilità del sistema.

1. Influenze dei disturbi ( $w$ ): impattano sull'immagazzinamento di energia del sistema (simile all'alterare le condizioni iniziali). Le condizioni iniziali servono come indicatori dell'energia del sistema in quel momento
2. Condizioni iniziali e risposta del sistema: la risposta del sistema input o disturbi è equivalente a cambiamenti nell'energia iniziale del sistema. Modificando le condizioni iniziali e osservando la risposta del sistema ci permette di capire come i disturbi hanno effetto sulla stabilità. Questo processo implica esaminare la stabilità delle var. di stato sotto variazione delle condizioni: se rimangono stabili possiamo affermare la generale stabilità del sistema.

### 1.16.3 Metodi dell'analisi della stabilità

- **BIBO stabilità** (bounded input bounded output): garantisce che se l'input è limitato lo sarà anche l'output
- **Zero input stabilità**: si focalizza sul comportamento del sistema in assenza di input esterni riferendosi quindi solo a condizioni iniziali e disturbi

### 1.16.4 Esempi

esempi inutili

### 1.16.5 BIBO stabilità

Consideriamo che un sistema è inizialmente rilassato ovvero a  $t = 0$  si ha  $x_n = 0 \forall n$  e che non c'è energia immagazzinata inizialmente.

**Nota:** *Essendo a 0 l'energia iniziale tutte le var. di stato non sono eccitate e possiamo ignorarle in modo sicuro, avendo quindi tutte le condizioni iniziali a 0 possiamo studiare la stabilità solo nei termini della FDT (la quale caratterizza completamente i sistemi rilassati).*

**Il principio chiave è che se l'input esterno è limitato lo sarà anche l'output.**

**Analisi quantitativa della BIBO stabilità** Il metodo quantitativo per stabilire la BIBO stabilità è accertarsi che l'output  $y$  rimanga limitato per ogni input limitato  $x$ .

**Nota:** *La stabilità può essere analizzata utilizzando il modello a FDT in quanto un sistema rilassato può essere totalmente descritto con questo modello.*

### 1.16.6 Zero input stabilità

L'input esterno è assunto essere 0, tuttavia lo stato iniziale  $x_0$  può cambiare per via degli input esterni influenzando l'immagazzinamento di energia nel sistema.

Il modello matematico per questo modello è:

$$\dot{x} = Ax$$

Il focus in questo caso è su quando lo stato del sistema rimane limitato per tutti i  $t$  al variare di  $x_0$ . Se questo accade il sistema preserva la zero input stabilità.

### 1.16.7 Combinare BIBO e zero input stabilità

Se in un sistema sono soddisfatte le condizioni di stabilità di entrambi i casi si può dedurre che per ogni input e disturbo limitato lo stato del sistema e l'output rimangono limitati

#### BIBO stabilità e risposta impulsiva

La risposta impulsiva di un sistema provvede una completa caratterizzazione di un sistema rilassato. L'output del sistema è dato da:

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

dove  $r(t)$  è l'input.

Dato che siamo interessati alla BIBO stabilità siamo interessati all'ampiezza:

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty g(\tau)r(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^\infty |g(\tau)||r(t-\tau)|d\tau$$

Se l'input è limitato ( $|r(t-\tau)| \leq M$ ) e finito ( $M$  finito) l'espressione sopra sarà  $\leq N < \infty$ .

**Questo significa che per la BIBO stabilità l'integrale del modulo della risposta impulsiva dovrebbe essere finito.** (si porta infatti fuori dall'integrale l'input sostituito con  $M$ ).

L'integrale del modulo della risposta impulsiva del sistema caratterizza la BIBO stabilità, nello specifico un sistema è BIBO stabile **se e solo se**:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$$

**Nota:** questa condizione implica che l'area sotto il valore assoluto della curva della risposta impulsiva deve essere finita.

**Poli zeri e analisi dell'FDT** Consideriamo la FDT:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

con  $m \leq n$  (per motivi già visti). L'equazione caratteristica derivata dal denominatore della FDT è:

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Le radici di questa equazione (i poli della FDT) determinano la stabilità del sistema.

Se prendiamo l'espansione in frazioni parziali:

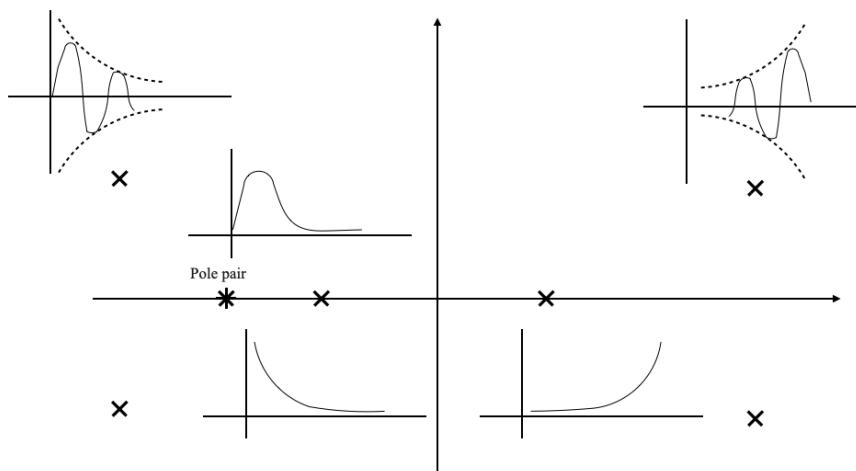
- gli zeri influenzano la magnitudine e la forma della risposta transitoria
- i poli dettano la stabilità del sistema e il suo comportamento

## Analisi nel piano s

Analizziamo il piano per capire come i poli affliggono il comportamento del sistema:

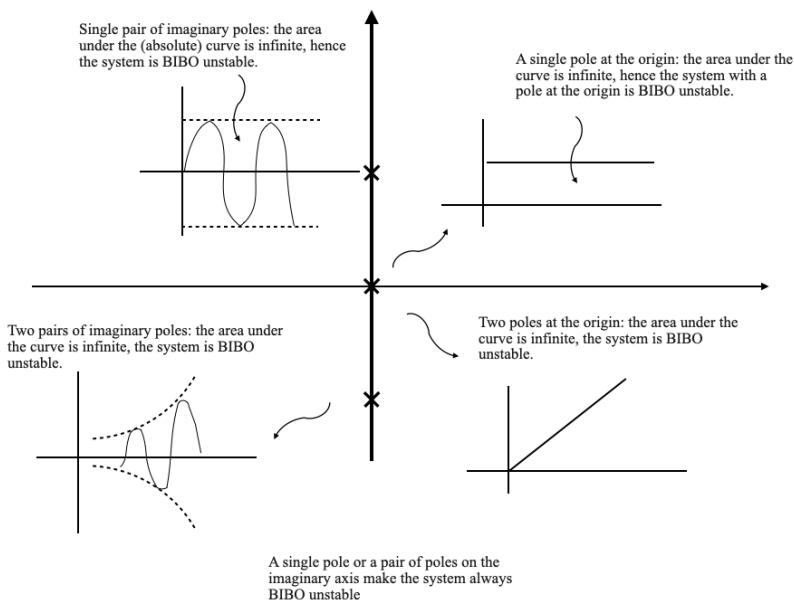
- **Metà sinistra:** poli nella metà sinistra del piano s portano a una risposta decadente, indicando un sistema stabile. (stesso vale per poli immaginari in questa regione)
- **Metà destra:** poli nella metà destra risultano in una risposta crescente indicando un sistema instabile

## Poli e zeri nell'analisi della FDT



If poles (single, multiple, complex) lie in the LHP the condition we have established for stability is always satisfied and the system is BIBO stable

If poles (single, multiple, complex) lie in the RHP the condition we have established for stability is never satisfied and the system is BIBO unstable



A single pole or a pair of poles on the imaginary axis make the system always BIBO unstable

**Sistemi marginalmente stabili** Situazione che si verifica quando si hanno poli (specialmente se poli semplici) sugli assi immaginari.

**Nota:** • Da un punto di vista matematico sistemi con poli sull'asse immaginario sono ritenuti instabili

- La risposta rimane limitata per gli input che non corrispondono a questi poli sull'asse immaginario, in questo caso l'input corrisponde ai poli semplici e li rende poli doppi.
- Sistemi marginalmente stabili sono quelli dove poli semplici esistono sull'asse immaginario ma la risposta rimane limitata per input che non corrispondono a questi poli.

### 1.16.8 Zero input stabilità e variabili di stato

Consideriamo un sistema lineare autonomo:

$$\dot{x} = Ax$$

$$x(0) = x_0$$

Applicando la trasformata di Laplace otteniamo:

$$sX(s) - x_0 = AX(s)$$

da cui

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

Qui  $X(s)$  rappresenta la trasf. di Laplace del vettore di stato  $x$ ,  $A$  è una matrice di coefficienti costanti.

Per analizzare la stabilità ci concentriamo sull'inversa della trasformata di Laplace di  $X$ : per ogni stato iniziale  $x_0$  vogliamo studiare come si comporta  $x(t)$ .

Per farlo si coinvolge la matrice  $(sI - A)^{-1}$ , dove indichiamo:

$$X(s) = \det(sI - A) = \frac{(sI - A)_{\text{adjoint}}}{\Delta(s)}x_0$$

Il polinomio caratteristico  $\Delta(s)$  della matrice  $A_{n \times n}$  è un polinomio di ordine  $n$  le cui radici sono autovalori di  $A$ , le quali determinano la stabilità del sistema nel caso ingresso zero (zero input).

Concentriamoci ora sull'equazione caratteristica derivata dal modello a variabili di stato. Lo stesso determinante infatti si riferisce all'equazione caratteristica quando derivata dal modello a variabili di stato.

**Capire le entrate della matrice aggiunta** Quando si considera la matrice aggiunta di  $sI - A$  ogni entrata è un polinomio di ordine  $n - 1$

**Stabilità e zeri dallo spazio di stato** La stabilità è data dalle radici dell'eq. caratteristica  $\Delta(s)$  (i poli).

**Nota:** gli zeri, che provengono dalle entrate della matrice aggiunta non hanno effetto sulla stabilità.

## Stabilità asintotica

Un sistema è asintoticamente stabile se **tutte** le radici di  $\Delta(s)$  sono nella metà sinistra del piano, causando il decadimento a zero, per  $t \rightarrow \infty$ , di tutte le variabili di stato.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$$

Questo concetto è cruciale perché assicura che la risposta del sistema non solo rimane limitata ma tende a 0 (nel tempo)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{(sI - A)_{\text{adjoint}}}{\Delta(s)} \right] x_0$$

**Nota:**  $x_0$  è un fattore di scala (come gli zeri), la dinamica invece è guidata da  $\Delta(s)$

## Condizioni di stabilità, instabilità e stabilità marginale

- **Asintoticamente stabile:** tutti i poli sono nella metà sinistra del piano
- **Instabile:** almeno un polo nella metà destra o più poli sull'asse immaginario
- **Marginalmente stabile:** tutti i poli nella metà sinistra eccetto poli semplici sull'asse immaginario.

## Stabilità marginale commenti commenti brevi

**Relazione tra stabilità ingresso zero e BIBO** Se e solo se  $\Delta(s) = \det(sI - A)$  è il solito del denominatore della FDT del sistema, allora stabilità asintotica (ingresso zero) e BIBO sono uguali (le solite).

**Nota:** In molti sistemi reali questa condizione è soddisfatta, si parla di condizione di controllabilità e osservabilità.

## Effetti della posizione dei poli

### Poli sull'asse immaginario e risposta del sistema

1. Un polo semplice sull'asse immaginario (origine esclusa) corrisponde a una componente sinusoidale nella risposta del sistema. Quando lo stato del sistema  $x(t)$  è influenzato da un polo semplice posto sull'asse immaginario la risposta sarà dunque oscillatoria: la magnitudine di questa oscillazione sarà influenzata dalla condizione iniziale  $x_0$  ma comunque rimane limitata. Questo comportamento oscillatorio limitato caratterizza un sistema marginalmente stabile.
2. Polo nell'origine: un polo semplice nell'origine del piano s corrisponde a una componente costante nella risposta del sistema. Questo porta a un valore allo stato stabile che dipende dalla condizione iniziale  $x_0$  risultando in una risposta limitata che non cambia nel tempo.

## Classificazione della stabilità basata sulla locazione dei poli

1. Stabilità asintotica: lo è se ... (visto prima), in questo caso tutti i modi del sistema decadono nel tempo portando  $X(t)$  ad approssimare a 0 quando  $t \rightarrow \infty$
2. Sistemi instabili: lo è se ... , questo perché la posizione dei poli porta a risposte che crescono senza limiti nel tempo
3. Stabilità marginale: lo è se... , questi sistemi non mostrano una crescita senza limiti della risposta né si fermano a uno stato stabile, sostengono invece oscillazioni.

## Equivalenza tra stabilità asintotica e BIBO

Condizione di equivalenza: le due stabilità sono equivalenti quando  $\det(sI - A)$  corrisponde con il denominatore della FDT del sistema ( $G(s)$ ).

## Matrice aggiunta

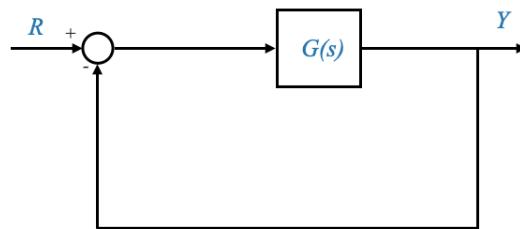
L'aggiunta di una matrice è formata dai cofattori di ogni elemento della matrice.

**Nota:** un cofattore di un elemento di una matrice è il determinante della matrice ottenuta eliminando riga e colonna contenenti quell'elemento moltiplicato per +1 o -1 in base al segno dato dalla posizione dell'elemento. Esempio dei segni di una matrice 3x3:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

## 1.17 Stability Analysis in Control Systems

Consideriamo un sistema ad anello chiuso caratterizzato dalla sua FDT con feedback unitario dove  $G(s)$  è la FDT dell'anello aperto.



La fdt ad anello chiuso è data da:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

quindi l'equazione caratteristica del sistema è  $1 + G(s) = 0$ . Le radici di questa equazione, noti come i poli dell'anello chiuso, dettano la stabilità del sistema.

**Criteri di stabilità** La stabilità è determinata dalla posizione di queste radici nel piano complesso:

1. Sistema stabile: tutte le radici della eq. caratteristica sono strettamente nella metà sinistra del piano
2. Sistema instabile: almeno una radice nella metà destra o almeno due radici sull'asse immaginario (asse  $jw$ )
3. Sistema marginalmente stabile: radici nella metà sinistra eccetto alcune radici semplici sull'asse immaginario che sono distinte

### 1.17.1 Determinare la stabilità

Vogliamo capire se gli zeri dell'eq caratteristica:

$$\Delta(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

(derivata da  $1 + G(s) = 0$ ) sono stabili o no.

(L'eq. caratteristica rappresenta i poli per il nostro sistema ad anello chiuso)

**Nota:** Questi zeri del sistema ad anello chiuso non sono considerati nell'analisi della stabilità in quanto hanno effetto solo sulla magnitudine ma non sulla modalità della risposta.

**Controllabilità, osservabilità e zeri** Assunzione cruciale è che gli zeri non cancellano poli: se uno zero cancella un polo instabile può portare ad assunzioni scorrette sulla stabilità.

Questo è il punto di convergenza per stabilità asintotica e BIBO, negli altri casi i due tipi di stabilità divergono nelle loro interpretazioni.

### 1.17.2 Criterio di stabilità di Routh

Data una eq caratteristica ci può essere chiesto per quale range dei coefficienti è garantita la stabilità del sistema. Il criterio di stabilità di Routh fornisce conoscenze sulle implicazioni sulla stabilità al variare dei parametri del sistema, colmando il gap lasciato da metodi numerici non sempre relazionabili con la realtà.

**Costruzione del vettore di Routh** Data l'eq caratt.

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

assicurarsi che  $a_n \neq 0$ , per evitare strane radici in  $s = 0$ , e  $a_0 > 0$ , altrimenti possiamo cambiare il segno moltiplicando per -1 per continuare l'analisi.

**Nota:** avere segno positivo è fondamentale per avere un vettore di Routh che inizi con un valore positivo in modo da poter determinare correttamente il numero di cambi di segno e quindi la stabilità del sistema

#### Condizioni necessarie

Per avere un sistema stabile è necessario che tutti i **coefficienti** nell'equazione caratteristica polinomiale siano **positivi e non zero**.

**Nota:** Se non abbiamo  $a_0 > 0$  la condizione diventa: **tutti i coefficienti dello stesso segno**.

## Condizioni sufficienti

Il vettore è costruito riga per riga utilizzando i coefficienti della caratteristica polinomiale.

1. **Prime due righe:** direttamente derivate dal polinomio. La prima riga contiene i coefficienti delle potenze pari, la seconda quelli delle potenze dispari.
2. **Righe successive:** formula specifica. Per, ad esempio, la terza riga ovvero la corrispondente a  $s^{n-2}$  ogni elemento è calcolato come:
  - Il primo elemento della riga è dato da  $\frac{a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3}{a_1}$
  - Il secondo da  $\frac{a_1 \times a_4 - a_0 \times a_5}{a_1}$
3. **Indicizzazione delle righe:** l'indicizzazione delle righe (es.  $s^{n-1}$ ) serve come guida ma non corrisponde alla potenza di  $s$  nell'eq originaria dopo le prime due righe.

Order of $s$	Column 1	Column 2	Column 3	...	Column $\frac{n}{2} + 1$
$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	...	$a_{2k}$ or 0
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...	$a_{2k+1}$ or 0
$s^{n-2}$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	...	...	...
$s^{n-3}$			...	...	...
...			...	...	...
$s^1$			...	...	...
$s^0$			...	...	...

**Nota:** Al punto 2 se qualche coefficiente manca (la potenza di  $s$  non compare nel polinomio) trattarlo come 0 nei calcoli.

## Esempio illustrativo

Dato il polinomio:

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

si ha:

Order of $s$	Column 1	Column 2	Column 3
$s^4$	1	18	5
$s^3$	8	16	0
$s^2$	16	5	0
$s^1$	13.5	0	
$s^0$	5		

Dato che non ci sono cambiamenti di segno nella prima colonna il sistema è stabile.

Il criterio di stabilità di Routh ci dice infatti che tutte le radici dell'equazione caratteristica sono nella metà sx del piano complesso.

## Analizzarare la stabilità con il vettore di Routh

Dopo aver realizzato il vettore esaminiamo i segni della prima colonna per trarre conclusioni sulla stabilità:

- Se non ci sono cambiamenti di segno nella prima colonna il sistema è stabile
- Se ci sono cambiamenti di segno il sistema non è stabile e il numero delle radici nella metà destra è uguale al numero dei cambiamenti di segno.

### 1.17.3 Gestire le radici sull'asse immaginario

Esempio:

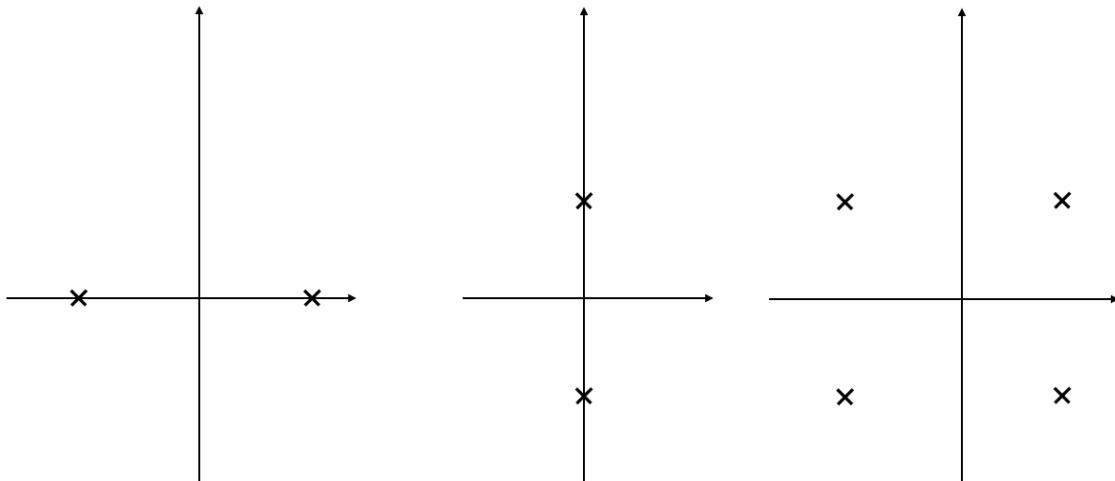
$$s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 = 0$$

In questo caso una intera riga potrebbe contenere solo 0, indicando la possibilità di radici sull'asse immaginario (suggerendo la possibilità di stabilità marginale o instabilità).

Order of $s$	Column 1	Column 2	Column 3
$s^5$	1	4	3
$s^4$	1	24	63
$s^3$	-1	-3	
$s^2$	1	3	0
$s^1$	0	0	
$s^0$			

#### Capire le righe di soli zero

- se troviamo una riga tutti zero il coefficiente della successiva riga è indefinito e abbiamo bisogno di costruire un polinomio ausiliare dalla riga immediatamente sopra quella tutta 0 e usare la sua derivata per continuare la costruzione dell'array.
- Implicazioni: la presenza di queste suggerisce che l'eq caratteristica potrebbe avere radici simmetriche rispetto all'asse immaginario
- Incertezza di stabilità: non indica subito stabilità o meno, indica invece la **necessità** di ulteriori analisi



A pair of poles symmetrical with respect to the jw axis. The system is unstable.

A pair of poles on the jw axis. The system is marginally stable.

Complex pair of poles, symmetrical with respect to the jw axis. The system is unstable

Note that this case also includes multiple imaginary axis poles (in which case the system is unstable).

**Nota:** In questo caso il sistema **non** può essere stabile.

Per via della simmetria una riga di zeri è sempre associata a potenze dispari di  $s$ .

**Costruzione del polinomio ausiliario** Per la costruzione ci rifacciamo ai coefficienti della riga sopra la all-zero (potenza maggiore).

Dall'esempio sopra ci rifacciamo quindi alla riga  $s^2$  e quindi il polinomio ausiliario sarà

$$A(s) = s^2 + 3$$

**Nota:**  $s^2$  deriva dall'ordine della riga usata.

**Nota:** Il polinomio ausiliario è un fattore dell'equazione caratteristica iniziale.

Dato che le radici del polinomio ausiliario sono immaginarie possiamo concludere che le radici dell'eq caratteristica sono anch'esse sull'asse immaginario (caso centrale dell'immagine) e il sistema è marginalmente stabile o instabile in base se abbiamo poli immaginari multipli (per farlo ci vogliono le altre radici dell'eq caratt.).

**Conclusioni sulla stabilità** Una volta ottenuto il polinomio ausiliare ci sono due modi per concludere sulla stabilità:

1. dividiamo l'eq caratteristica per il polinomio ausiliario: si ottiene il polinomio residuo a cui si applica il criterio di Routh
2. prendiamo la derivata del polinomio ausiliario e rimpiaziamo la riga tutti zero con i coefficienti del polinomio derivato in modo da continuare con la costruzione del vettore.

Nel nostro caso:

$$\frac{dA}{ds} = 2s + 0$$

L'array finito sarà quindi

Order of $s$	Column 1	Column 2	Column 3
$s^5$	1	4	3
$s^4$	1	24	63
$s^3$	-1	-3	
$s^2$	1	3	0
$s^1$	2	0	
$s^0$	3		

Da cui concludiamo:

- 2 radici nella metà destra (dall'array di Routh)
- 2 radici sull'asse immaginario (dal polinomio ausiliare)
- una radice nella metà sinistra (quella rimanente)

Il sistema è quindi instabile.

**Caso limite riga tutti zero** Se la riga tutti zero è la riga  $s_0$  praticamente non è fattibile,  
...

## Riassunto

1. **Obiettivo:** il criterio di Routh è usato per determinare la stabilità di un sistema senza calcolare esplicitamente le radici dell'eq caratt.
2. **Equazione caratteristica:** tipicamente un polinomio in  $s$  (variabile di Laplace) è la base su cui si analizza la stabilità. (eq. caratt. della FDT del sistema)
3. **Costruzione dell'array di Routh**
4. **Analisi della stabilità:**
  - se tutti gli elementi della prima colonna sono positivi il sistema è stabile (poli solo nella metà sx)
  - la presenza di cambiamenti di segno indica instabilità (il numero dei cambiamenti di segno indica il numero di poli nella metà dx)
  - se una riga è tutti zero indica radici simmetriche rispetto all'asse immaginario e richiede ulteriori analisi
5. **Gestione dei casi speciali:**
  - Riga tutti zero: ... formazione del polinomio aux e utilizzo della derivata per continuare la costruzione del vettore
  - Stabilità marginale: può verificarsi con una riga tutti zero ma richiede ulteriori analisi
6. **Polinomio ausiliare:**
7. **Limitazioni:** non provvede il trovare i valori esatti delle radici

## Elemento pivot a 0

Rende impossibile andare avanti con la costruzione in quanto si richiede la divisione per l'elemento pivot.

Per proseguire si rimpiazza lo zero con un numero positivo molto piccolo  $\epsilon$ .

**Nota:** *Fare ciò corrisponde a creare una perturbazione nei coefficienti del polinomio.*

Piccole perturbazioni non creano problemi (solo variazioni minime) per radici stabili in una delle due metà. Si hanno variazioni effettive solo per le radici che stanno sull'asse, comunque ci accorgiamo in quale metà del piano andranno dopo la perturbazione.

**Nota:** *Non fare conclusioni affrettate se utilizzando epsilon si ottiene una riga tutti zero. Guardare al polinomio aux. : se il polinomio aux ha radici immaginarie questo indica la presenza di radici sull'asse immaginario.*

## Interpretazione dei risultati

- se tutti gli elementi della prima colonna del nuovo array sono positivi indica che le rimanenti radici (escludendo quelle sull'asse immaginario) sono nella metà sx suggerendo stabilità per questa parte del sistema.
- se ci sono cambiamenti di segno indica instabilità per radici nella metà dx.

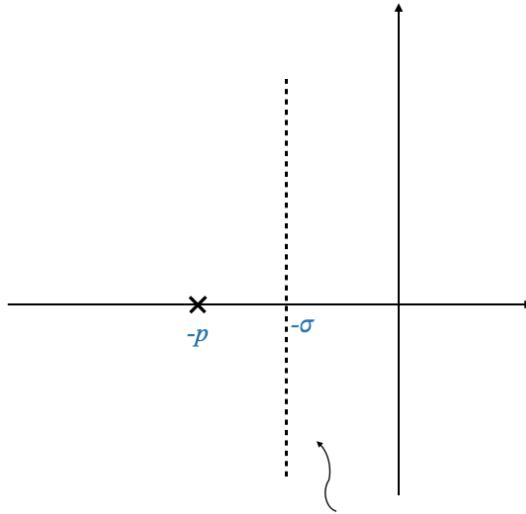
### 1.17.4 Routh oltre la stabilità assoluta

#### Stabilità relativa

La stabilità relativa si concentra sul capire le caratteristiche della risposta transitoria del sistema.

In altre parole la stabilità relativa si riferisce al grado di stabilità del sistema, indicando quanto velocemente la risposta di un sistema impiega ad arrivare allo stato stabile o quanto sia resistente alle oscillazioni e perturbazioni.

- **significato della locazione delle radici:** nel piano s la locazione dei poli del sistema (ovvero le radici dell'equazione caratteristica) determinano la sua stabilità relativa. Poli che sono più lontani verso sinistra indicano un più veloce decadimento del transitorio implicando una più grande stabilità relativa.
- **Costante di tempo e risposta:** la risposta transitoria di un modo in un sistema può essere rappresentata come  $e^{-pt}$  dove  $p$  è il polo e  $t$  il tempo. Questo può essere scritto come  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  dove  $\tau$  è la costante di tempo che corrisponde all'inverso della parte reale del polo. Un  $\tau$  più piccolo indica una risposta più veloce.
- **Utilizzo del criterio di stabilità di Rout:** questo può essere esteso per determinare la stabilità relativa esaminando quanto vicine sono le radici all'asse immaginario. Il criterio può verificare se le radici tendono verso la sinistra di una linea verticale specifica (esempio  $s = -\sigma$ ) nel piano s la quale rappresenta un confine di uno smorzamento desiderato: sapremo a quel punto se i nostri poli sono più veloci di  $e^{-\sigma t}$ .



A system whose poles are further to the left of this line means that its transient is faster than that of a root at this location.

### 1.17.5 Sensibilità dei parametri e analisi della stabilità

Vediamo la sensibilità del sistema alle variazioni del parametro  $K$ , in particolare lo spettro di valori per cui  $K$  assicura la stabilità del sistema.

#### Eq. caratteristica e Routh array

dato:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 4)}$$

la stabilità è governata dall'eq caratt  $1 + G(s) = 0$  che per questo sistema diventa funzione di  $K$ :

$$s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + K = 0$$

da cui l'array:

$s^4$	1	5	$K$
$s^3$	5	4	
$s^2$	$\frac{21}{5}$	$K$	
$s^1$	$\frac{84/5 - 5K}{21/5}$	0	
$s^0$	$K$		

L'analisi dell'array rivela i limiti di  $K$ , per assicurare la stabilità:

- $K > 0$  perché nei sistemi fisici il guadagno dell'amplificatore è positivo
- per avere la prima colonna positiva  $K < \frac{84}{25}$

si ha quindi  $0 < K < \frac{84}{25}$

## Implicazioni di progettazione

- Range di stabilità: il range  $0 < K < \frac{84}{25}$  diventa critico nella progettazione del sistema: qualsiasi specifica di performance deve rientrare in esso
- Movimento dei poli al variare di  $K$ : al crescere di  $K$  all'interno dell'intervallo i poli ad anello chiuso tendono verso la metà destra del piano. Un valore di  $K$  pari a  $\frac{84}{25}$  porta i poli sull'asse  $j\omega$  indicando stabilità marginale del sistema (si otterrebbe una riga di 0 nell'array).
- Comportamento del sistema oltre l'intervallo: per  $K > \frac{84}{25}$  il sistema diventa instabile oscillando con frequenza  $\omega_0$  radianti per secondo.

aggiungere considerazioni con elementi di ritardo (poche righe)

## 1.18 Performance of Feedback Systems

### 1.18.1 Introduzione alle specifiche di performance quantitative

Ci concentriamo ora sugli aspetti quantitativi delle performance dei sistemi di controllo.

### 1.18.2 Rivisitazione aspetti qualitativi

1. stabilità: un sistema lo è se in risposta a un input limitato produce un output limitato.
2. Risposta transitoria: cruciale nel determinare quanto velocemente e accuratamente raggiunge lo stato desiderato dopo un cambiamento.
3. Accuratezza allo stato stabile:
4. sensitività e robustezza: robustezza = mantiene le performance anche a fronte di variazioni nei parametri del sistema o discrepanze nella modellazione
5. Rifiuto dei disturbi:

### 1.18.3 Transizione a specifiche quantitative

Spesso si parte specificando il transitorio desiderato e l'accuratezza allo stato stabile.

#### Approccio classico

1. Assicurarsi la stabilità del sistema (es si usa Routh)
2. Ottimizzazione del transitorio e performance allo stato stabile: selezione dei parametri: parametri scelti nel dominio dato dal punto 1 (specificazione quantitativa delle performance del sistema)
3. Valutazione di robustezza e capacità di rifiuto dei disturbi: simulazione del sistema per le valutazioni

## **Metodologia di progettazione**

1. Identificazione del dominio di stabilità dei parametri: utilizzo di metodi come il criterio di Routh
2. Verifica dell'accuratezza del transitorio e dello stato stabile:
3. Valutazione di robustezza e di rifiuto dei disturbi: si fa tramite simulazione del sistema sotto varie condizioni.

Seguendo questo approccio ci si assicura delle performance.

### **1.18.4 Esplorazione delle specifiche di performance del transitorio**

#### **Sistema a feedback unitario**

Per semplicità consideriamo un sistema a feedback unitario.

#### **Natura dei segnali di input**

- input gradino
- input rampa
- input parabola

#### **Utilizzo dell'input gradino per analisi della risposta transitoria**

Comunemente per l'analisi della risposta transitoria si usa l'input gradino  $\mu(t)$ . La rampa si usa per esaminare l'abilità del sistema a resistere a continui cambiamenti mentre la parabola per testare cambiamenti accelerati.

**Nota:** Ricordarsi che la stabilità e il transitorio sono prima determinati dalla locazione dei poli (ereditata dalla natura del sistema) e in secondo luogo dall'input.

#### **Specifiche di performance allo stato stabile**

Dipende sia dal sistema che dall'input.

#### **Avere a che fare con input sconosciuti**

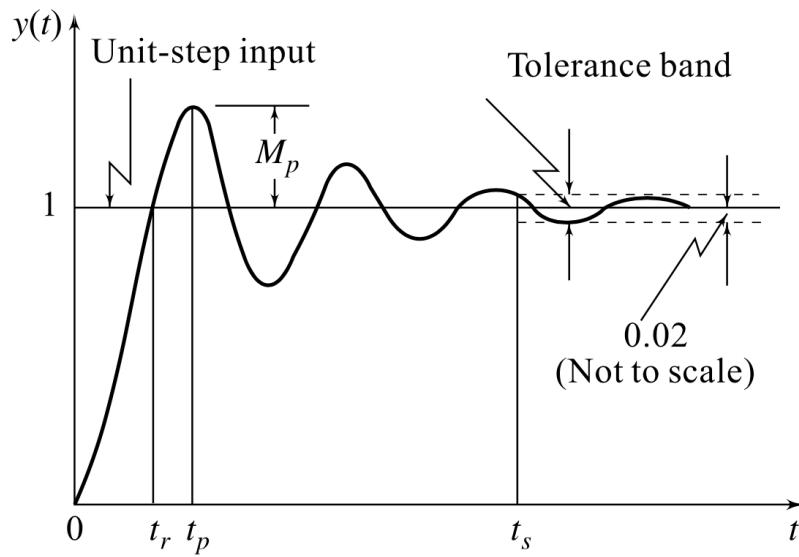
Esempi: Modo per affrontare il problema: rappresentare l'input come somma di funzioni polinomiali sfruttando il fatto che ogni funzione complessa può essere decomposta in una serie di funzioni polinomiali.

Altro forse inutile

### **1.18.5 Specifiche di performance del transitorio**

#### **Approccio industriale**

Consiste nell'esaminare sistemi di controllo del mondo reale.



Indici di performance chiave:

1. **Tempo di salita ( $t_r$ )**: tempo richiesto per raggiungere la prima volta il valore finale (fornisce intrinseco la velocità di risposta ai cambiamenti).
2. **Superamento del limite ( $M_p$ )**: massimo eccedere rispetto al valore finale.
3. **Tempo di picco ( $t_p$ )**: tempo per raggiungere il picco.
4. **Tempo di stabilizzazione ( $t_s$ )**: tempo richiesto per rimanere in modo consistente in una tolleranza specifica intorno al valore finale.

### Dinamica transitoria nei sistemi del secondo ordine

esempio python

#### 1.18.6 Sfide di progettazione e performance allo stato stabile

Per raggiungere migliori valori degli indici di performance si cade spesso in problemi di conflitto tra essi per via delle interconnessioni tra le caratteristiche del sistema.

Esempio: per raggiungere un minore tempo di salita si aumenta il superamento del limite.

#### Specifiche di performance allo stato stabile

Misurate con l'errore allo stato stabile

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - y(t)]$$

#### Specifiche dell'errore per vari input

1. input gradino:  $e_{ss}$  dice quanto l'output è vicino al valore finale a fronte di un transitorio iniziale che poi scompare. La capacità del sistema di mantenere un output stabile dopo un fissato cambiamento in input

2. input rampa:  $e_{ss}$  esprime la capacità di seguire un continuo cambiamento nell'input
  3. input parabola:  $e_{ss}$  esprime la capacità di seguire un cambiamento accelerante
- esempi

### 1.18.7 Robustezza della progettazione

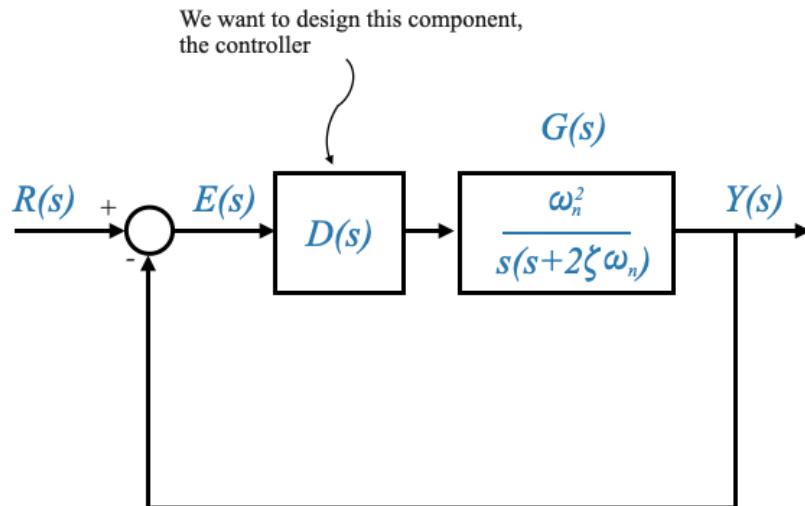
non credo fondamentale, si parla di come la simulazione sia importante.

## 1.19 Design Cycle for a Standard Second-Order System

### 1.19.1 Descrizione del sistema

Consideriamo la FDT  $G$  nel percorso di un sistema a feedback unitario.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$



- Problema di analisi: determinare il comportamento del sistema senza controllore
- Problema di progettazione: introdurre un controllore per soddisfare specifiche allo stato stabile

### 1.19.2 Analisi

La fdt a circuito chiuso è data da

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)$$

dove in  $G(s)$  (vista sopra):

- $\omega_n$  è la frequenza naturale non smorzata
- $\zeta$  è il rateo di smorzamento

## Capire il rateo di smorzamento

Vari comportamenti tra 0 e 1 già visti

### Equazione caratteristica e radici

l'eq caratteristica è

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Le radici dell'equazione (poli dell'anello chiuso o radici caratteristiche) sono fondamentali nell'analisi del comportamento del sistema.

Per ottenere le radici dell'eq. caratteristica risolviamo per s usando la formula quadratica

$$s = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

semplificando si ottiene che le radici caratteristiche (o poli) sono:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

A seconda del valore di  $\zeta$  le radici possono essere reali o complesse:

- = 0 : sotto smorzato:

$$s = \pm j\omega_n$$

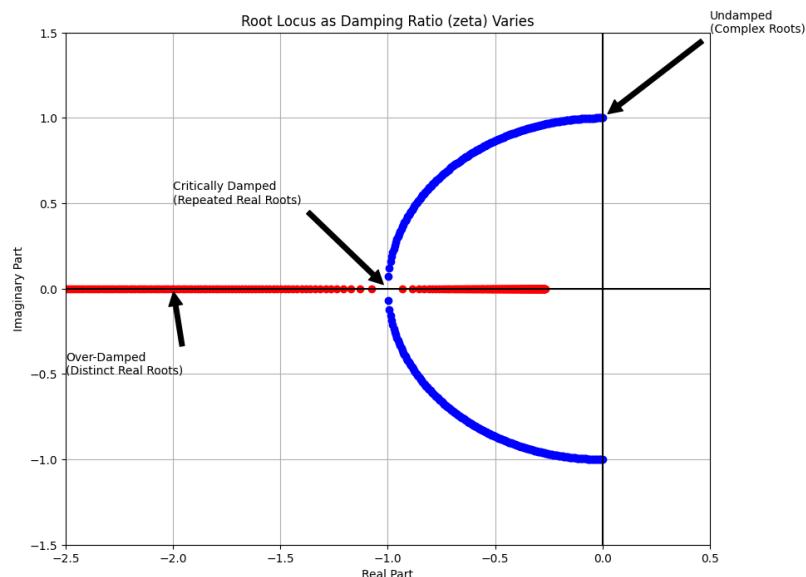
- < 1 : (sotto smorzato) le radici sono complesse coniugate

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad ???$$

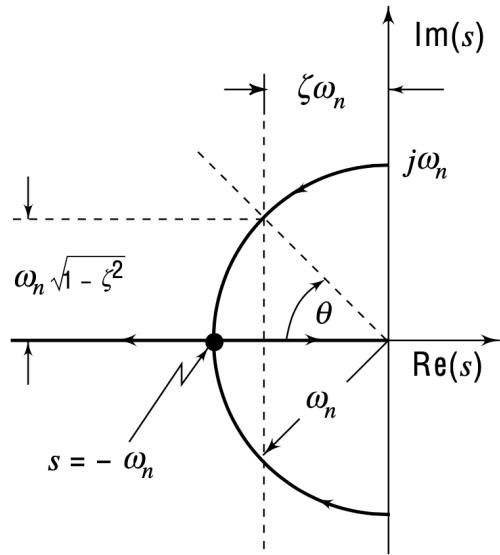
- = 1 : (criticamente smorzato) le radici sono reali identiche

$$s = -\omega_n$$

- > 1 : (sovra smorzato) radici due reali distinti



La quantità  $\zeta\omega_n$  ha un ruolo importante in quanto parte reale del paio di complesso coniugati.



**Determinare l'angolo di smorzamento** Dato il diagramma del luogo delle radici sopra visto abbiamo

$$\omega_n \cos \theta = \zeta \omega_n$$

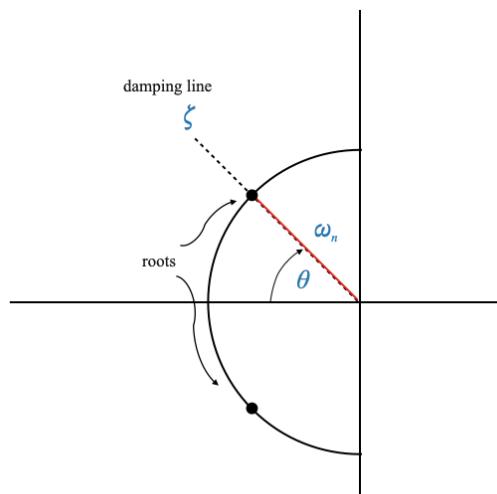
$$\cos(\theta) = \zeta$$

$$\theta = \cos^{-1}(\zeta)$$

L'angolo è così chiamato perché funzione solo di  $\zeta$ .

La linea di  $\theta$  costante è detta linea di smorzamento: dato uno specifico zeta le radici giaceranno sulla linea di smorzamento associata.

Dati specifici theta e omega-n i poli ad anello chiuso saranno:



### Relazione tra zeta, omega-n e poli ad anello chiuso

1. i primi due definiscono la posizione dei poli: un cambiamento in essi muove i poli e quindi modifica la risposta transitoria del sistema
2. questi poli determinano le caratteristiche chiave del sistema (esempio overshoot, tempo di assestamento, frequenza oscillatoria).
3. Aggiustare la progettazione del luogo delle radici per ottenere gli effetti desiderati
4. specificando i primi due si decide dove vogliamo che siano i poli ad anello chiuso

Nel contesto dei sistemi del secondo ordine, specificare zeta e omega-n è un modo di definire le caratteristiche di performance desiderate.

#### 1.19.3 Caratteristiche della risposta transitoria

Dato l'input gradino e la fdt di esempio di prima:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

l'output è:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

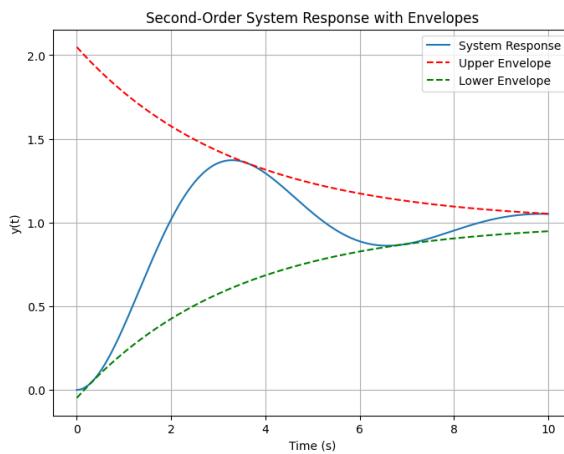
La funzione di risposta ottenuta con l'inversa della trasformata di laplace è:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

dove

- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  è la frequenza smorzata
- $\theta = \cos^{-1}(\zeta)$  è l'angolo di smorzamento

In questo caso i poli sono complessi coniugati.



**Curve di inviluppo e costante di tempo** La risposta è limitata dalle curve di inviluppo superiore e inferiore date dalle equazioni:

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

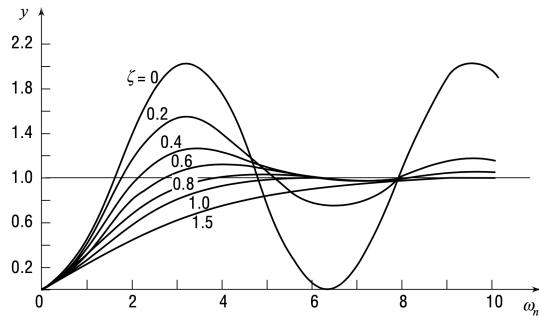
Più queste decadono più velocemente cadrà la risposta.

La costante di tempo di inviluppo è

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

### Capire i trade-off

Più basso è  $\zeta$  più sarà oscillatorio e più veloce sarà la salita e più grande l'overshoot, più alto  $\zeta$  si ha l'effetto contrario.



### Indicatori chiave delle performance del transitorio

Sono:

1. Tempo di salita
2. Tempo di picco
3. Massimo superamento (overshoot)

Partendo da

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

- **Tempo di salita:** si pone la risposta uguale a 1:

$$t_r : y(t_r) = 1 \Rightarrow \frac{e^{-\zeta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \Rightarrow \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \Rightarrow \omega_d t_r + \theta = \pi$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

- **Tempo di picco:** per determinare un tempo di picco bisogna analizzare quando il sistema raggiunge il massimo. Si fa quindi la derivata di  $y(t)$  e si pone = 0. Si arriva ad ottenere:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

- **Massimo overshoot:** Per trovarlo dobbiamo valutare la risposta del sistema al tempo di picco:  $y(t_p)$  per poi togliere il valore allo stato stabile (per la risposta allo step input è 1)

$$M_p = y(t_p) - 1 = e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}$$

Andando poi a sostituire  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  si ottiene:

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\omega_n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}.$$

che è quindi il massimo superamento per un sistema del secondo ordine sotto-smorzato

#### 1.19.4 Specifiche di performance del transitorio

solita roba

#### 1.19.5 FDT di sistemi del secondo ordine

FDT di un sistema del secondo ordine con input gradino

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

#### 1.19.6 POI

ripetizione di questi concetti.

#### 1.19.7 Approssimare il tempo di salita

Approssimare il tempo di salita di un sistema di controllo utilizzando lo sviluppo della sua risposta è un approccio pratico. Lo sviluppo fornisce una chiara rappresentazione visiva della massima entità della risposta del sistema nel tempo, il che è particolarmente utile per identificare quando l'output del sistema si stabilizza entro una certa banda di tolleranza.

Questo renderà possibile avere un'approssimazione della parte dove  $0 < \zeta < 0.7$  nel grafico sopra (non so quale). Ricorda che tipici valori per il rateo di smorzamento saranno in questo range (il comportamento per valori di  $\zeta > 0.7$  è diverso).

La forma standard della risposta di un sistema del secondo ordine sotto-smorzato può essere espressa come:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

dove  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  è la frequenza naturale smorzata.

Lo sviluppo della risposta oscillatoria è dato dal termine dell'esponenziale decadente:

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Questo sviluppo cattura la natura oscillatoria della risposta del sistema e il suo decadimento esponenziale.

Per approssimare il tempo di stabilizzazione si può porre lo sviluppo uguale alla tolleranza cercata e risolvere per il tempo ( $t$ ). Per esempio per un livello di tolleranza del 5% l'equazione diventa:

$$1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.05$$

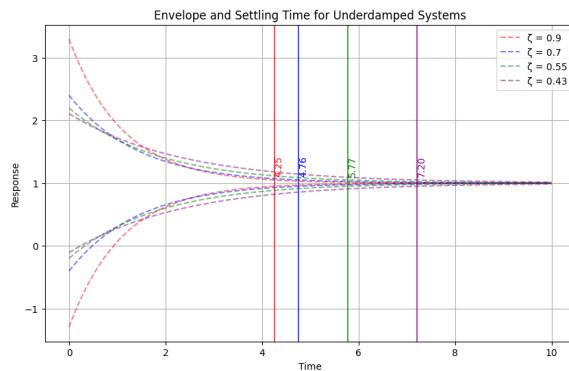
che risolvendo per  $t$  da:

$$\begin{aligned}\zeta\omega_n t_s &= -\ln(0.05\sqrt{1 - \zeta^2}) \\ \omega_n t_s &= -\frac{1}{\zeta} \ln(0.05\sqrt{1 - \zeta^2}) \\ t_s &= -\frac{1}{\omega_n \zeta} \ln(0.05\sqrt{1 - \zeta^2})\end{aligned}$$

**Nota: piccola nota**

Si può ottenere una ulteriore approssimazione come:

$$t_s = \frac{3}{\omega_n \zeta}$$



### Tempo di impostazione con una tolleranza del 2%

La tolleranza del 2% è spesso utilizzata. Tramite simulazioni al computer è stato osservato che il rateo di smorzamento critico per raggiungere questa tolleranza è  $\zeta = 0.76$ , quindi

- quando  $0.76 < \zeta < 1$  il tempo di settling normalizzato diminuisce
- quando  $0 < \zeta < 0.76$  il tempo di settling normalizzato aumenta

Calcoli vari

L'espressione che otteniamo è:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

è quella che utilizzeremo più spesso per il tempo di stabilizzazione.

### 1.19.8 Capire l'errore allo stato stabile

Varia in base al tipo di input.

1. Input gradino: un ben progettato sistema del secondo ordine ha un'errore allo stato stabile pari a 0 a fronte di uno step-input. Questo si può vedere bene nella risposta unitaria per  $t \rightarrow \infty$ :

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$$

2. Input rampa: per un sistema del secondo ordine standard di solito l'errore è non zero. Può essere calcolato usando il teorema del valore finale dal teorema della trasformata di Laplace, abbiamo infatti:

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

la cui inversa è

$$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\theta)$$

che con  $t \rightarrow \infty$  si traduce con un errore di:

$$y_{ss} = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} \implies e_{ss} = r - y_{ss} = t - \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_n}\right) = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

Analiticamente l'errore può essere determinato tramite il teorema del valore finale dal teorema della trasformata di Laplace il quale afferma che "*il valore allo stato stabile di una funzione può essere trovato prendendo il limite con  $s \rightarrow 0$  di  $s$ -volte la trasformata di Laplace della funzione*". Ad esempio:

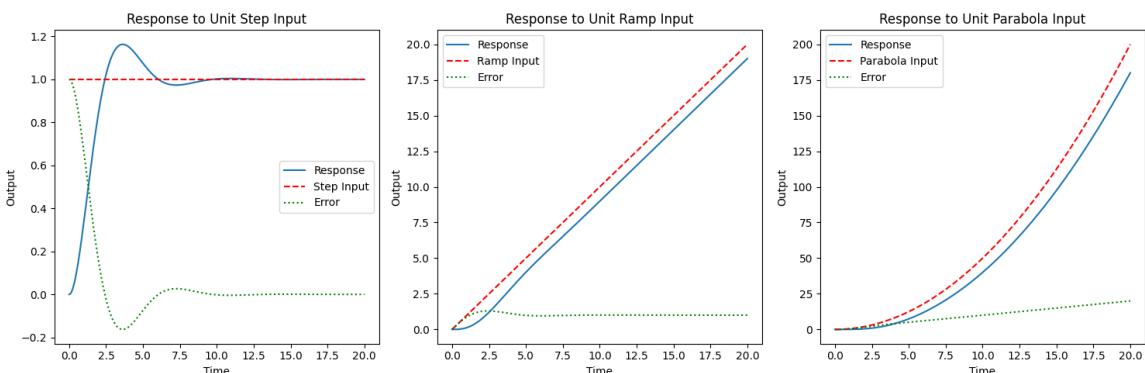
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

dove  $E(s) = R(s) - Y(s)$

3. Input parabola: tipicamente risulta in un errore allo stato stabile infinito per un sistema del secondo ordine standard. Dato quindi l'input parabola ( $R(s) = \frac{1}{s^3}$ ) abbiamo:

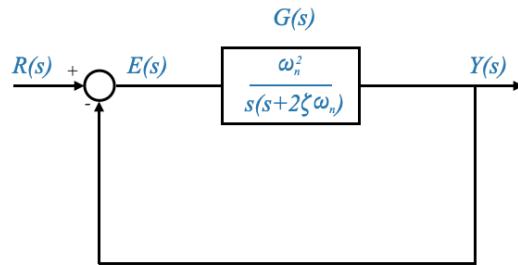
$$sE(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

a cui non possiamo applicare il teorema del valore finale in quanto abbiamo un polo sull'asse immaginario.



## 1.20 Understanding the Standard Second-Order System: Recap

Recap di tutto sul secondo ordine:



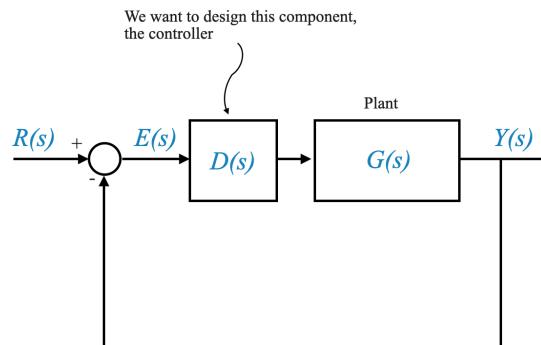
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

### 1.20.1 Gestione di sistemi di ordine superiore

aggiungere

## 1.21 Steady State Accuracy and Design Principles

Accuratezza allo stato stabile indica l'abilità di mantenere l'output costante quando soggetto a un input costante. (Già visto ma ora analizziamo l'aspetto quantitativo)



**Nota:**  $D(s)$  definisce come il controllore si comporta con il segnale di errore per aggiustare il comportamento del sistema

### 1.21.1 Dinamica dell'errore

Esprimiamo l'errore, in anello chiuso, come:

$$E(s) = R(s) - G(s)D(s)E(s)$$

da cui

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

dove  $D(s)G(s)$  rappresenta il guadagno in circuito del sistema.

**Nota:** Teniamo  $D(s)$  e  $G(s)$  separati per una maggiore flessibilità nello studio del sistema

### 1.21.2 Th. del valore finale rivisitato

Sostituendo nel teorema la  $E(s)$  appena trovata:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

#### Errore allo stato stabile per input standard

1. input gradino  $R(s) = \frac{1}{s}$ :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(1 + D(s)G(s))} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s)}$$

che si semplifica come

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

dove la  $K$  è la costante di posizione di errore.

2. input rampa  $R(s) = \frac{1}{s^2}$  che sostituendo nel teorema fa ottenere:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

dove  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)$  è la costante di errore di velocità, infatti nei sistemi di controllo a posizione un input rampa corrisponde a un comando di velocità.

3. input parabolico  $R(s) = \frac{1}{s^3}$  che porta a:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Dove  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 D(s)G(s)$  è la costante di errore di accelerazione.

Ci sono quindi due modi di descrivere l'accuratezza allo stato stabile di un sistema:

1. Errore allo stato stazionario con un input specifico: implica lo specificare direttamente l'errore allo stato stabile per un dato tipo di output.
2. Costanti di errore  $K_p, K_v, K_a$ : alternativamente si può descrivere l'accuratezza usando le costanti di errore (ognuna definita specificatamente per un tipo standard di input).

### 1.21.3 Espressione generale per la FDT

Può essere rappresentata come:

$$\frac{\prod_i (s - z_i)}{s^N \prod_j (s - p_j)}$$

- $z$  e  $p$  indicano zeri e poli.
- $s^N$  indica la presenza di poli nell'origine.

## Ruolo dei poli quando s=0

Quando s si avvicina a 0 ogni termine della fdt (quelli tra parentesi) mantengono il loro valore definito. Il comportamento di  $D(s)G(s)$  dipende da  $N$ , ovvero dal numero di poli in  $s = 0$ .

Il significato di  $s^N$  è quindi quello di decidere se il sistema avrà errore allo stato stabile finito o infinito.

Infatti come abbiamo visto in precedenza:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Dove  $G(s)$ , che sta al denominatore, se ha poli nell'origine al tendere di  $s$  a 0 tenderà a *infinito*, portando dunque la funzione di  $e_{ss}$  a tendere a 0.

**Nota:** Valori negativi di  $N$  indicano zeri nell'origine.

### 1.21.4 Classificazione dei sistemi e comportamento allo stato stazionario basati su N

La classificazione avviene in base al valore di  $N$ : indica il numero di poli nell'origine ma anche il numero di integratori nel forward path (percorso di andata) del sistema.

In base a  $N$  si identifica il *Tipo – n* del sistema.

L'influenza di  $N$  sulla risposta del sistema non è assoluta ma vaira in base all'input, tuttavia generalmente il valore di  $N$  è un forte indicatore del potenziale del sistema per avere accuratezza allo stato stazionario.

### Influenza del controllore e gestione di input differenti

Il controllore ha la capacità di modificare il numero di integratori del cammino di andata del sistema modificando in modo significativo il suo comportamento allo stato stabile.

### Tipo numero del sistema

Relazione tra il valore di  $N$  e il corrispondente tipo di sistema di controllo:

Value of N	Type of System	Description
0	Type-0 System	The system has no integrators in the forward path, meaning no poles at the origin.
1	Type-1 System	The system includes one integrator in the forward path, equivalent to a single pole at the origin.
2	Type-2 System	The system contains two integrators in the forward path, indicating two poles at the origin.
3	Type-3 System	The system has three integrators in the forward path, corresponding to three poles at the origin.
...	...	As $N$ increases, the number of integrators in the forward path increases accordingly.

### 1.21.5 Esplorazione dei tipi di sistema e del loro comportamento in base a N

La FDT, che sia il modello a impianto ( $G(s)$ ) o il sistema combinato ( $D(s)G(s)$ ) può essere rappresentata come

$$D(s)G(s) = \frac{K \prod_i (s - z_i)}{s^N \prod_j (s - p_j)}$$

Value of N	System Type	Characteristics	Example
0	Type-0 System	No integrators in the forward path. Typically, finite steady-state error for step inputs but infinite error for ramp or parabolic inputs.	Temperature control systems modeled as $\frac{k}{s+1}$ , Liquid level control systems.
1	Type-1 System	One integrator in the forward path. Zero steady-state error for step inputs, finite for ramp inputs, but infinite for parabolic inputs.	Motor control systems in speed control applications, modeled as $\frac{k}{s(s+1)}$ .
2	Type-2 System	Two integrators in the forward path. Zero steady-state error for both step and ramp inputs, finite for parabolic inputs.	Attitude control of a satellite, modeled as $\frac{k}{s^2}$ .
$\geq 3$	Type-3 System	Three or more integrators in the forward path. Highly specialized applications requiring advanced static accuracy.	Advanced radar or antenna control systems tracking fast-moving targets.

#### Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-0

(non ci sono poli all'origine)

L'errore allo stato stabile per input gradino è calcolato come:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P}$$

che è un valore finito, un sistema tipo-0 può dunque gestire un input gradino con un errore finito allo stato stabile.

**Altri input** Per input rampa e parabola, applicando il th dell'errore finale si nota come  $e_{ss} = \infty$

#### Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-1

(1 polo nell'origine)

- **Input gradino:**  $e_{ss} = 0$
- **Input rampa:**  $= e_{ss} = finito$
- **Input parabola:**  $= e_{ss} = infinito$

#### Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-2

- **Input gradino:**  $e_{ss} = 0$
- **Input rampa:**  $= e_{ss} = 0$
- **Input parabola:**  $= e_{ss} = finito$

**Nota:** Avere 2 integratori nel forward path rende il sistema vicino all'instabilità.

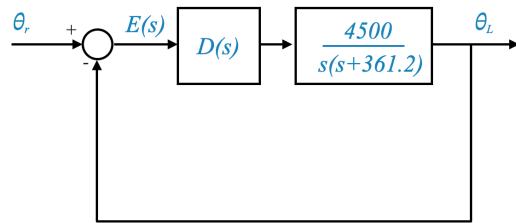
## Analisi dell'errore allo stato stazionario nei sistemi tipo-3

### Commenti

- Generalmente i sistemi di controllo hanno come obiettivo di raggiungere errore 0 allo stato stazionario per un input gradino e mantenere errori finiti per input rampa (a meno di altre specifiche)
- Per la scelta dei controllori le caratteristiche del sistema guidano la scelta:
  - Se il sistema include naturalmente un integratore è spesso appropriato utilizzare un controllore proporzionale derivativo (PD).
  - Se il sistema manca di un integratore naturale è più efficace un controllore proporzionale integrale (PI).

### 1.21.6 Esempio di progettazione: uno schema di controllo PID

Applichiamo queste conoscenze per progettare un controllore PID per un impianto dato.



### Progettazione di un sistema di controllo posizionale con un controllore proporzionale

Il nostro obiettivo è progettare un controllore  $D(s)$  che assicuri le performance desiderate.

Dato che l'impianto incorpora un integratore possiamo iniziare il processo di progettazione con un controllore proporzionale rappresentato da  $D(s) = K_A$ .

**Analizzare il sistema combinato** Per un controllore proporzionale la FDT del sistema combinato (controllore e impianto) è:

$$D(s)G(s) = \frac{4500K_A}{s(s + 361.2)}$$

**Equazione caratteristica** Quella di questo sistema ad anello chiuso è

$$s^2 + 361.2s + 4500K_A = 0$$

da cui possiamo derivare parametri importanti del sistema come funzioni di  $K_A$ :

- frequenza naturale:  $\omega_n = \sqrt{4500K_A}$
- $\zeta = \frac{2.692}{\sqrt{K_A}}$
- poli del sistema:  $s_{1,2} = -180.6 \pm j\sqrt{32616.36 - 4500K_A}$

- errore allo stato stazionario per un input rampa:  $e_{ss} = \frac{0.0803}{K_A}$

**Nota:** Per un input gradino l'errore  $ss$  è zero per via della presenza di un integratore nell'impianto.

**Selezionare K-A per smorzamento critico** Per raggiungere smorzamento critico ( $\zeta = 1$ ) scegliamo  $K_A = 7.247$ . Questo specifico valore risulta in una risposta criticamente smorzata che è ideale per il controllo posizionale in quanto assicura risposta veloce senza oscillazioni.

**Nota:** Scegliere un guadagno tale che  $\zeta = 1$  porta ad un alto tempo di assestamento, notare anche che il tempo di salita è infinito in quanto il sistema va ad 1 solo quando  $t \rightarrow \infty$  (ricordarsi grafico). Per calcolare il tempo di assestamento ricordare che l'approssimazione che abbiamo derivato era valida quando  $0 < \zeta < 0.7$

### Selezionare un K-A per ridurre il rateo di smorzamento

continua... (non capito molto)

## 1.22 Compensator Design

È un componente del sistema designato a compensare i deficit dell'impianto.

### 1.22.1 Metodo del luogo delle radici nell'ingegneria del controllo

#### Introduzione

È un approccio grafico usato nei sistemi di controllo per determinare la stabilità e la risposta transitoria di un sistema come una funzione di un parametro variante, tipicamente un guadagno.

**Misure di performance chiave** Abbiamo visto le varie misure chiave (tempo di salita, ...., errore  $ss$ ) e abbiamo osservato che le performance spesso presentano conflitti, tuttavia la risposta transitoria del sistema è governata principalmente dal rateo di smorzamento (zeta) e dalla frequenza naturale (omega-n).

Di conseguenza capire e controllare la risposta transitoria si traduce in posizionare strategicamente un paio di poli ad anello chiuso dominanti nel piano s. In poche parole i parametri zeta e omega-n sono importanti nel modellare le performance generali del sistema di controllo.

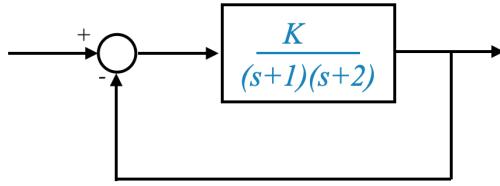
Il metodo del luogo delle radici implica disegnare le possibili locazioni dei poli del sistema ad anello chiuso il che aiuta a visualizzare come questi poli si muovono in risposta ai cambiamenti nei parametri.

#### Capire il luogo delle radici

Consideriamo un sistema la fdt ad anello aperto:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

dove K è la **variabile di guadagno**. Questo corrisponde a:



**Step 1:** derivare la fdt ad anello chiuso

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s + 2 + K}$$

**Step 2:** determinare la locazione dei poli Le radici dell'eq caratt. sono:

$$s_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K}$$

possiamo quindi verificare il comportamento del sistema da 0 a infinito al variare di K.

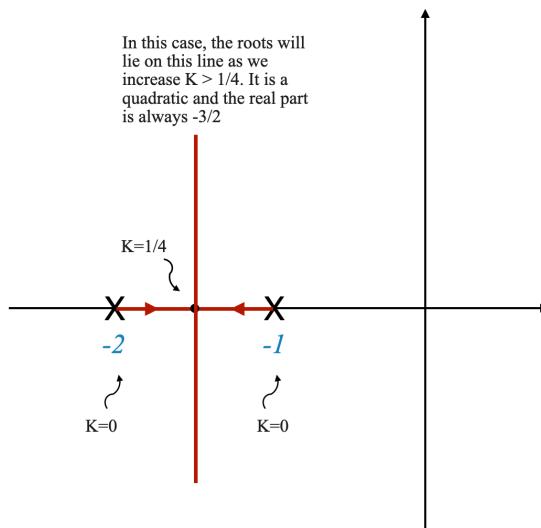
Per differenti valori di K i poli ad anello chiuso cambiano:

- quando  $K = 0$  i poli sono nel luogo che hanno in caso di anello aperto (in questo caso  $-1$  e  $-2$ )
- all'aumentare di K si muovono lungo specifici percorsi nel piano s (questo movimento può essere disegnato e analizzato)

Per esempio consideriamo  $K = 1/4$ :

$$s_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4K} = -1.5 \text{ (poli ripetuti)}$$

se K aumenta oltre  $1/4$  i poli diventano complessi coniugati.



**Nota:** • I poli si muovono poi su una linea verticale perché la parte reale è sempre  $-\frac{3}{2}$ .

- Il cammino che seguono i poli è detto "ramo".
- nel sistema dato ci sono 2 rami poiché si tratta di un sistema del secondo ordine (quindi 2 poli)

**Condizione iniziale: K=0** In questo caso i poli i poli ad anello chiuso sono gli stessi di quelli ad anello aperto.

**K incrementa** Quanto K incrementa i poli dell'anello chiuso si iniziano a muovere dalla posizione iniziale.

**K=1/4** Avviene un cambiamento critico: il discriminante, nella formula, diventa 0 rendendo i poli reali e ripetuti, entrambi locati in  $s = -1.5$  (sempre seguendo l'esempio)

**Dopo K=1/4** Il discriminante diventa negativo risultando in poli complessi coniugati con parte reale costante: si muovono in verticale.

### Relazionare il luogo delle radici con le performance del sistema

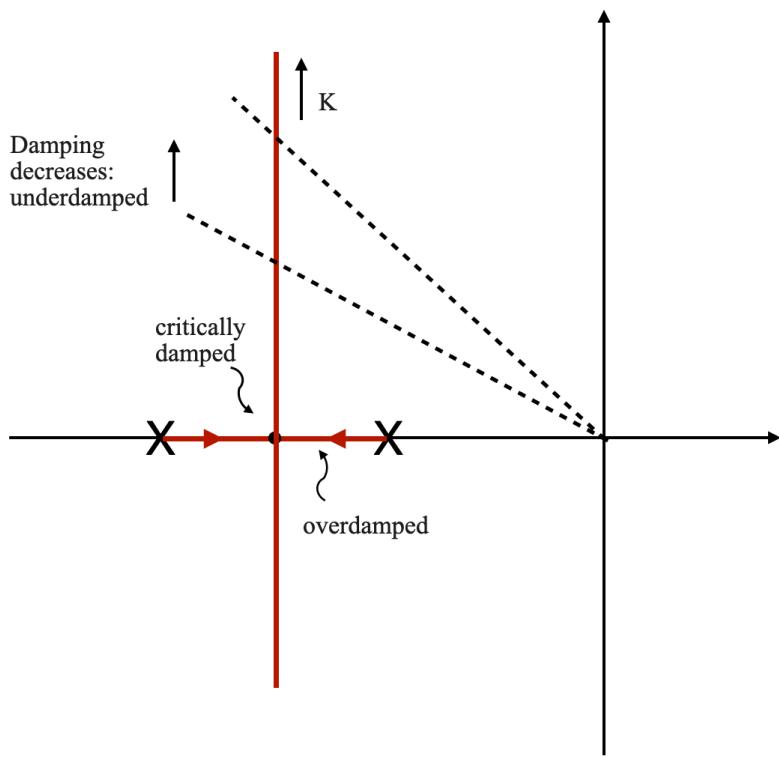
Il luogo delle radici è un potente strumento per visualizzare parametri chiave come il tempo di salita,... e la frequenza naturale: la posizione dei poli è infatti direttamente relazionata a questi parametri.

Nel nostro caso ad esempio vediamo come per ogni valore di K i poli rimangono nella metà sinistra del piano indicando stabilità del sistema per ogni valore di K da 0 a infinito.

### Capire e applicare il metodo del luogo delle radici nella progettazione dei sistemi di controllo

Per sfruttare questo metodo bisogna prima identificare quale sia il parametro di progettazione, quello che vogliamo regolare, per poi disegnare il luogo delle radici in modo da visualizzare i comportamenti al variare del parametro.

Possiamo vedere come cambia lo smorzamento al variare di K.



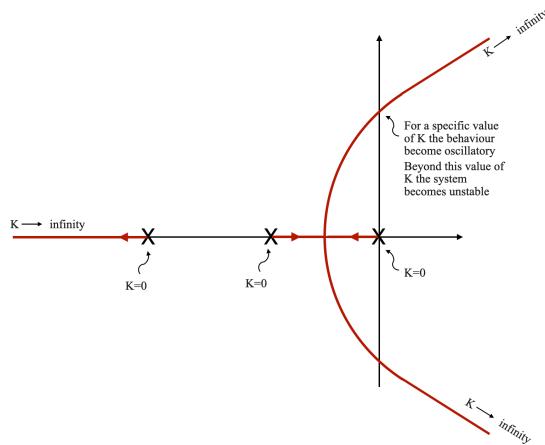
### 1.22.2 Esempio 2

Consideriamo un sistema con la fdt ad anello aperto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

dove  $K$  è una variabile di guadagno.

Il luogo delle radici in questo caso è:



Come si vede il diagramma parte con 3 punti sull'asse reale, rappresentati i poli ad anello aperto a  $K = 0$ .

Da essi partono 3 linee: due che si vanno incontro facendo diventare queste due radici reali, per poi dividersi in un paio di radici complesse coniugate che approcciano l'asse immaginario; la terza che si muove indipendentemente dalle altre.

Punti critici: punti in cui le radici diventano complesse coniugate o punti in cui il sistema diventa oscillatorio e poi instabile.

**Significato della terza radice** Questa è quattro o cinque volte distante dalla parte reale del complesso coniugato, questo rende il suo impatto nel sistema insignificante (condizione di dominanza).

**Stabilità del sistema e oscillazioni** Con l'aumentare di K il sistema si avvicina all'asse immaginario, a un certo valore di K il sistema diventa oscillatorio.

### 1.22.3 Esempio: aggiungere uno zero

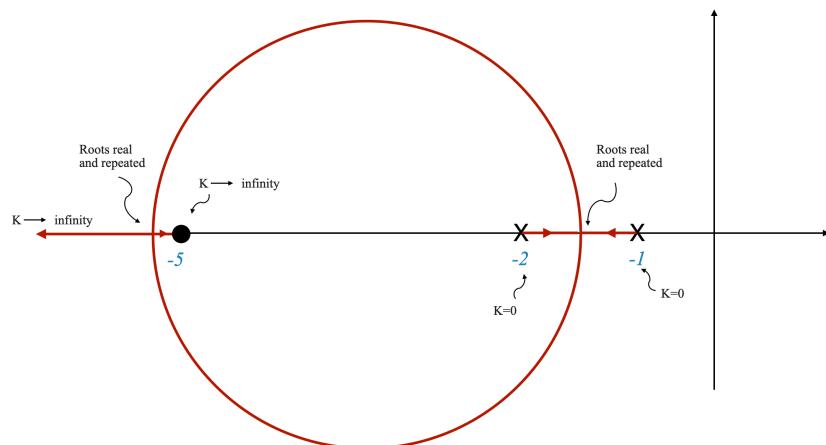
In questa sezione ci concentriamo su un sistema con uno zero, questo equivale ad avere un controllo PD.

Consideriamo un sistema rappresentato dalla fdt:

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$

Lo zero è in  $s = -5$ . Questo sistema è un tipo-0 con controllo PD.

Il luogo delle radici risultante è:



Disegno del luogo delle radici

Identificare poli e zeri

- poli:  $s = -1, -2$
- zeri:  $s = -5$

**Equazione caratteristica** Con K come parametro corrente è:

$$1 + K \cdot \frac{1}{(s+5)(s+1)(s+2)} = 0$$

## Analisi del luogo delle radici

Analisi immagine.

## Impatto del controllo PD sulla stabilità del sistema

- Aggiungere uno zero (PD controllo) sposta il luogo delle radici a sinistra il che implica maggiore stabilità.
- Comparare questo con quanto successo quando abbiamo aggiunto l'integratore che invece "tirava" il sistema verso metà destra.

## Capire la dinamica del sistema

Stesso discorso.

## Tradurre specifiche di performance in locazioni dei poli

Nulla.

### Consideriamo lo zero a s=-5

Questo zero lo è sia ad anello aperto che chiuso. La sua posizione relativamente a quella dei poli impatta significativamente la risposta del sistema.

Lo zero in  $s = -5$  introduce un effetto di picco nella risposta del sistema ovvero un picco "presto" nella risposta del sistema e potenzialmente un overshoot grande. Per mitigare questo effetto la progettazione dovrebbe mirare a un maggiore rateo di smorzamento.

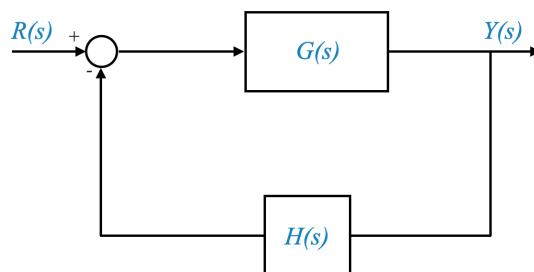
Fare ciò significa muovere i poli più verso sinistra nel piano s.

### 1.22.4 Costruzione e analisi del disegno del luogo delle radici

Consideriamo un sistema con fdt ad anello chiuso:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

In questo caso G è la fdt del cammino di andata e H la fdt del cammino di feedback.



**Definire la fdt ad anello aperto (o del ciclo)**

$$\frac{B(s)}{R(s)} = G(s)H(s)$$

Dove  $B(s)$  è il segnale di output del sensore.

L'equazione caratteristica del sistema è:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

### Fattorizzazione della FDT ad anello aperto

Una fdt ad anello aperto può essere generalmente espressa nella forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

**Nota:** I poli di un sistema ad anello aperto possono essere nella metà destra del piano senza implicare necessariamente l'instabilità del sistema.

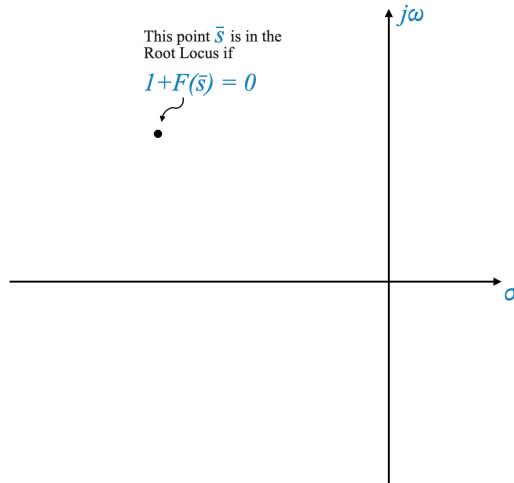
### Capire il luogo delle radici

Chiamiamo  $F(s) = G(s)H(s)$ , l'eq. caratteristica diventa quindi

$$1 + F(s) = 0$$

Nulla di che.

### Condizioni matematiche per il luogo delle radici



Un punto del piano s è parte del luogo delle radici se soddisfa  $1 + F(s) = 0 \Rightarrow F(s) = -1$ . Questo si traduce in due condizioni matematiche:

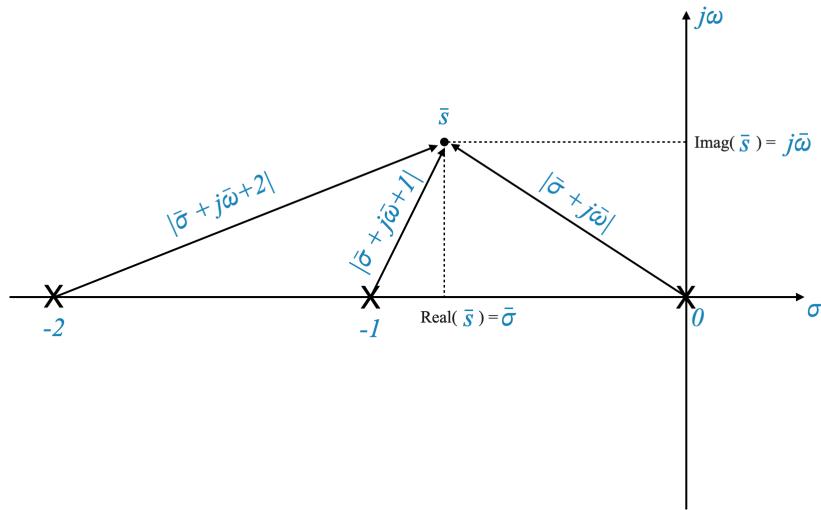
- **Condizione di magnitudine:**  $|F(s)| = 1$

- **Condizione angolare:** l'angolo di  $F(s)$  deve essere un multiplo **dispari** di 180 gradi.  
Formalmente  $\angle F(s) = \pm(2q + 1) \times 180^\circ$  dove  $q = 0, 1, 2, \dots$

Un punto è quindi parte del luogo delle radici se soddisfa entrambe le condizioni.

### Esplorazione delle condizioni di magnitudine e angolare

...

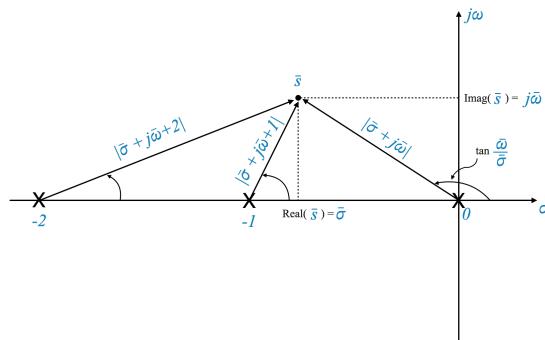


**Visualizzare la condizione di magnitudine** La lunghezza di ogni linea rappresenta la magnitudine (distanza) da ogni polo.

Graficamente si può aggiustare  $K$  in modo che il prodotto di queste lunghezze sia 1 per soddisfare la condizione.

**Nota:**  $K$  è nella fdt considerata da esempio:  $F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

**Condizione angolare** Implica che la somma degli angoli formati dalle linee rispetto all'asse reale positivo dovrebbe essere un multiplo dispari di 180.



**Conclusioni** Il luogo delle radici è costruito considerando sia magnitudine che condizione angolare.

Esempi vari

### 1.22.5 Linee guida per disegnare il luogo delle radici

Si parte dall'equazione  $1 + F(s) = 0$ , si fanno i controlli e poi si applicano i due criteri. Si passa poi alla scansione del piano s: identificazione dei punti che soddisfano la condizione angolare, costruzione del luogo delle radici, utilizzo della magnitudine per trovare il valore di K che soddisfa entrambe le condizioni.

Altre indicazioni sul luogo delle radici e su come disegnarlo.

#### Regola 1: Simmetria

Il luogo delle radici deve essere simmetrico rispetto all'asse reale, se quindi si costruisce accuratamente una sola metà si ha facilmente l'immagine completa.

#### Regola 2: Rami

I rami partono dai poli ad anello aperto (dove  $K = 0$ ) e finiscono negli zeri ad anello aperto o a infinito.

#### Regola 3: Segmenti dell'asse reale

Per determinare se un segmento sull'asse reale è parte del luogo delle radici contare il numero di poli e zeri alla destra di ogni punto sul segmento. Se il conto è dispari il segmento allora è parte del luogo delle radici.

#### Regola 4: direzione degli asintoti

Per ogni sistema con  $n$  poli e  $m$  zeri,  $n - m$  rami del luogo delle radici vanno a infinito. La direzione in cui questi rami vanno a infinito è determinata da una formula:

$$\Phi_A = (2q + 1) \times \frac{180^\circ}{n - m}$$

dove  $q = 0, 1, \dots, n - m - 1$ .

Questa formula fornisce gli angoli ai quali i rami tendono a infinito.

#### Regola 5: centroide degli asintoti

È un punto cruciale sull'asse reale dal quale la direzione degli asintoti è misurata. Si calcola come:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{parte reale dei poli} - \sum \text{parte reale degli zeri}}{n - m}$$

È il punto sull'asse reale dove tutti gli asintoti si incontrano.

#### Regola 6: punti di fuga

Punti del luogo delle radici dove rami di radici multiple convergono o divergono sull'asse reale (punti dove da reali diventano complessi coniugati).

**Calcolo dei punti di fuga** Sono i punti che massimizzano il valore di K, quindi:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

**Nota:** • Per essere valido un punto di fuga deve rispettare le condizioni angolari.

- Non sempre sono sull'asse reale.

### 1.22.6 Angoli di fuga delle radici

Angolo con il quale le radici escono dall'asse reale.

$$\phi = \frac{180^\circ}{r}$$

dove r è il numero di rami che si incontrano nel punto di fuga.

**Nota:** • Il disegno del luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale per via della natura delle radici complesse coniugate in un sistema reale.

#### Regola 7: angolo di partenza e di arrivo

L'angolo di partenza da un polo complesso e l'angolo di arrivo a uno zero complesso sono importanti per capire come i rami si comportano vicino a questi punti.

**Regola per l'angolo di partenza** È determinato dalla somma dei contributi angolari di tutti i poli e zeri a quel polo, meno 180 gradi moltiplicati per  $(2q + 1)$ .

#### Passi per l'angolo di partenza

1. Identificare il polo complesso di interesse
2. calcolare il contributo angolare  $\theta_1$  dovuto dallo zero e  $\theta_2$  dovuto dall'altro polo.
3. Il contributo angolare netto a questo polo è  $\theta_1 - \theta_2$
4. L'angolo di partenza è dato da:  $\phi_p = \pm 180^\circ \times (2p + 1) + \phi$  dove  $\phi_p$  è il contributo angolare netto.

#### Angolo di arrivo negli zeri complessi

**Regola** È determinato dalla somma dei contributi angolari da tutti gli altri poli e zeri a questo zero

#### Passi

1. Identificare lo zero complesso di interesse
2. calcolare il contributo angolare totale  $\phi_z$
3. L'angolo di arrivo è dato da:  $\phi_z = \pm 180^\circ \times (2p + 1) - \phi$

Aggiungere

Esempi

### 1.22.7 Analisi del luogo delle radici per sistemi con tempi morti

Con "tempi morti" ci si riferisce a ritardi tra l'input e la risposta. Spesso sono rappresentati tramite termini del tipo  $e^{-s\tau_D}$  dove  $\tau_D$  è il tempo morto.

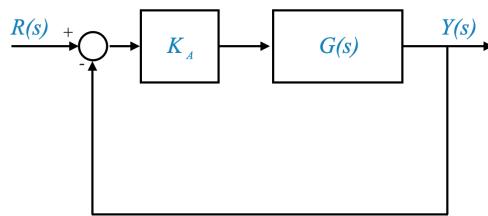
Aggiungere

## 1.23 Design with the Root Locus

### 1.23.1 Esempio di problema

Impianto con fdt:

$$G(s) = \frac{5}{s \left( \frac{1}{6}s + 1 \right) (0.5s + 1)} = \frac{60K_A}{s(s+2)(s+6)}$$



**Requisiti** Accuratezza allo stato stazionario:  $K_v \geq 5$  or  $e_{ss} \leq 0.2$

Specifichiamo una accuratezza a ss anche nei termini della costante di errore della velocità  $K_v$ .

### Analisi del luogo delle radici

Prima cosa da fare: portare la fdt nella forma del luogo delle radici:

$$G(s) = \frac{60K_A}{s(s+2)(s+6)} = \frac{K}{s(s+2)(s+6)}$$

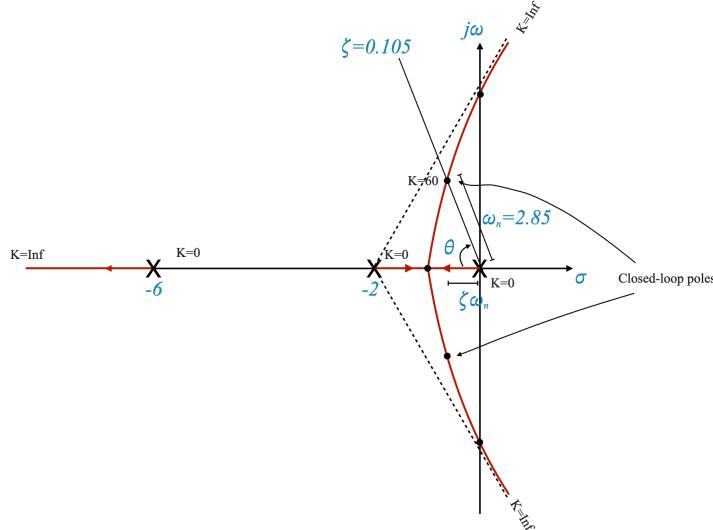
dove  $K = 60K_A$  è il guadagno del luogo delle radici.

In questo caso possiamo calcolare  $K_v$ :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{60K_A}{s(s+2)(s+6)} = 5K_A$$

e il nostro requisito è soddisfatto per  $K_A = 1$  e quindi è soddisfatto per un guadagno del luogo delle radici  $K = 60$ .

Possiamo quindi disegnare il ldr e applicare la condizione di magnitudine, dal disegno ricaviamo  $\theta$  e  $\zeta$  e  $\omega_n$ .



**Tempo di assestamento** Considerando una tolleranza del 2% la formula è:

$$t_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} = 13.36 \text{ sec}$$

### Soddisfare requisiti del transitorio

Per esempio consideriamo:

- $\zeta = 0.6$
- $t_s \leq 4 \text{ sec}$

**1. Trovare i poli dominanti** Partendo da  $\zeta = 0.6$  provando a diritto troviamo un punto in cui il criterio angolare e il requisito di zeta sono soddisfatti: questo rappresenta i poli dominanti.

**2. Valutazione del tempo di assestamento** Si calcola con la formula di prima (nel nostro esempio viene  $t_s = 5.3$ )

**3. Calcolare il guadagno del luogo delle radici  $K$**  Dato il punto selezionato applichiamo la condizione di magnitudine, nel nostro caso si ottiene  $K = 10.5$  e quindi  $K_A = 10.5/60$ .

**4. Accuratezza allo stato stazionario** Per assicurarsi che il sistema raggiunge il valore finale desiderato senza errore usiamo la costante di errore di velocità:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \frac{10.5}{12} = 0.825$$

con  $e_{ss} = 1.14 \text{ rad}$ . Quest'ultimo risulta troppo alto per le nostre specifiche: un semplice guadagno non può soddisfare i nostri requisiti.

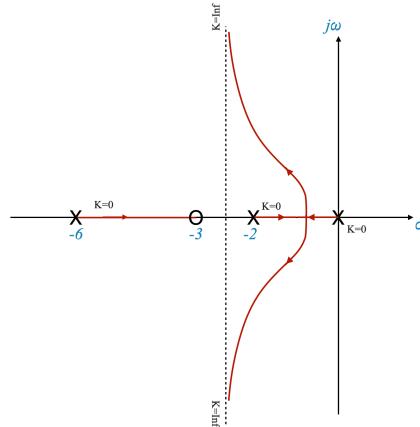
## Rivalutazione dei requisiti di progettazione

... (poche righe)

### Introdurre uno zero nel sistema

Introducendo uno zero nel sistema possiamo aggiustare il luogo delle radici in modo che incontri i requisiti del transitorio (questo potrebbe avere effetto sull'accuratezza ss).

Introduciamo uno zero in  $s = -3$  :



Il disegno è stato trascinato verso sinistra e quindi si è ottenuta stabilità.

Abbiamo ora un compensatore PD che effettivamente aggiunge uno zero nella fdt del cammino di andata.

**Nota:** Un compensatore PD è un tipo di controllore usato per incrementare stabilità e risposta.

### Codice python per comparare i sistemi

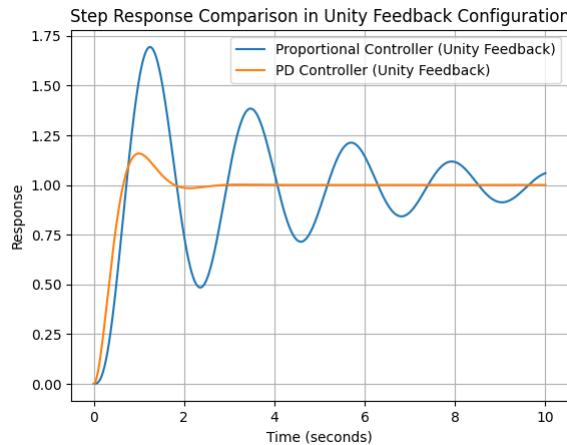
Esempi python:

- Sistema originario (controllore P):

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+6)}$$

- Sistema con controllore PD:

$$G(s) = \frac{16(s+3)}{s(s+2)(s+6)}$$



## Risultato previsto

Altra variante su questo esempio.

## Realizzazione fisica del compensatore

Abbiamo scelto un controllore  $D(s) = s + z_c$  dove  $z_c$  è il compensatore zero.

La realizzazione pratica del compensatore include un filtro per ridurre l'impatto del rumore ad alta frequenza, il compensatore ha quindi la forma:

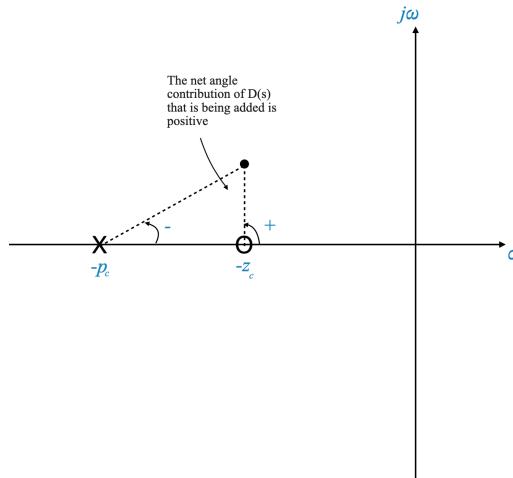
$$D(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

dove  $p_c$  è un polo introdotto per filtrare il rumore ad alta frequenza.

**Nota:** L'aggiunta di un polo è destabilizzante: controllare tutti gli altri parametri dopo l'aggiunta.

## Compensazione in anticipo di fase

Questo tipo di controllore aggiunge un angolo di anticipo.



In teoria lo spiega meglio dopo.

### 1.23.2 Effetti di aggiungere un polo nell'origine

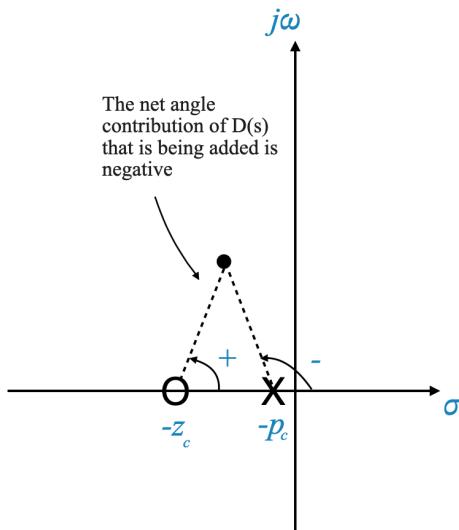
Ha effetti significativi sia nel transitorio che nel comportamento allo stato stazionario.

Quando si aggiunge un polo nell'origine il tipo-numero aumenta e quindi aumenta  $K_v$  a infinito per un input rampa, questo incrementa l'accuratezza ss. Tuttavia ha effetto avverso sulla risposta al transitorio: potenzialmente destabilizza il sistema per tutti i valori di  $K$ .

#### Approccio pratico: compensatore a ritardo di fase

La sua progettazione coinvolge la prudente selezione della locazione del polo e dello zero compensatore per bilanciare i requisiti del trans. e ss.

Invece di posizionare il polo compensatore esattamente nell'origine lo poniamo vicino ad essa.



## 1.24 Compensators and the Root Locus

Un compensatore è un tipo di controllore designato per migliorare le performance di un sistema.

### 1.24.1 Tipi di compensatori

#### Compensatore in anticipo di fase

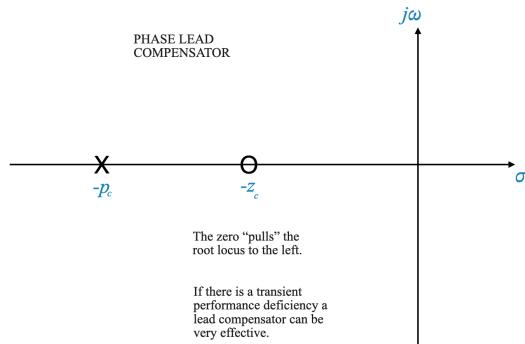
##### Definizione e fdt

È usato per migliorare le performance del transitorio spostando il luogo delle radici sulla sinistra. La fdt del regolatore a controllo di fase è data da:

$$D(s) = K_c \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}$$

Dove  $K_c$  è il guadagno.

**Nota:** Fisicamente spesso sono realizzati tramite un op-amp con specifici resistenze e condensatori che determinano i valori di  $z$ ,  $p$  e  $K$ .



## Esempio

Controllo dell'altitudine di un satellite:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

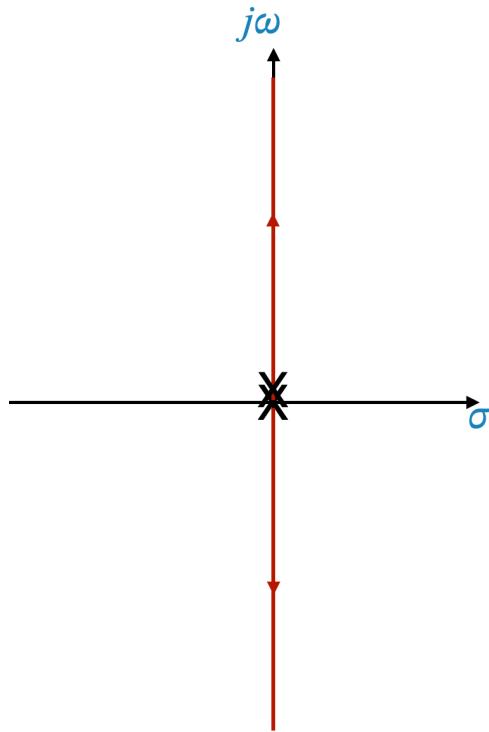
Input: coppita T, output: angolo  $\theta$ , sistema tipo-2 (buone performance ss: 0 errore per scalino e rampa input, errore finito per accelerazione input)

Iniziamo considerando la situazione semplice dove  $D(s) = K$ .

La fdt ad anello aperto sarà:

$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

Comportamento ad anello chiuso:



**Nota:**  $\frac{K}{s^2}$  indica natura oscillatoria per il sistema.

### Scelta nel design del compensatore

Scegliere tra compensatore in ritardo o in anticipo di fase:

- Anticipo di fase: ideale per implementare le performance del transitorio spostando il root locus a sinistra, favorendo la stabilità
- Ritardo di fase: aggiunge un altro integratore al sistema rendendolo un tipo-3 portando instabilità. È tipicamente usato per aumentare accuratezza ss.

### Implementazione del compensatore in anticipo di fase

**Approccio di progettazione** Abbiamo 3 parametri sotto controllo, come li implementiamo dipende dall'hardware.

Bo

### Progettazione per specifici requisiti di performance

Richieste:  $\zeta = 0.707$  e  $t_s = 2 \text{ sec}$

Per calcolare la posizione dei poli in anello chiuso usiamo formule standard relazionate alle caratteristiche dei sistemi del secondo ordine.

1. Calcolo della frequenza naturale

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s}$$

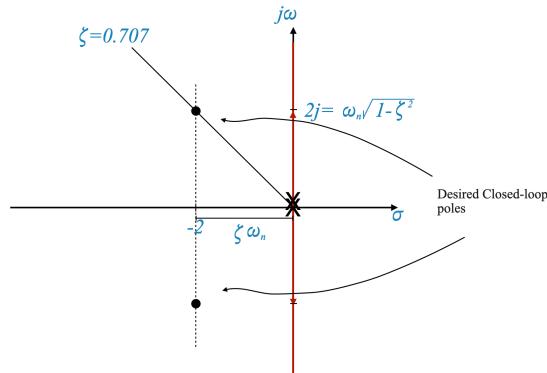
2. Determinare la parte reale e immaginaria dei poli:

$$s = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

### 3. Posizione dei poli ad anello chiuso:

$$s = -2 \pm j2$$

dove le parti reale e immaginaria sono quelle trovate al punto 2.



Progettazione del compensatore in anticipo di fase: posizionamento dello zero e del polo

• • •

## Guida passo passo per la progettazione di un compensatore con il luogo delle radici

aggiungere

### 1.24.2 Compensatore a ritardo di fase

Vengono utilizzati principalmente per migliorare la precisione in condizioni stazionarie.

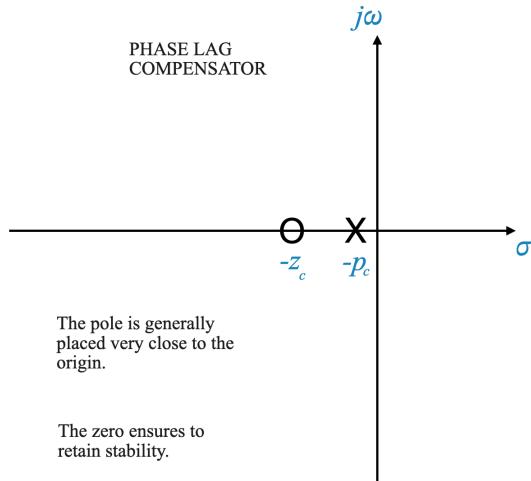
### Regolatore a ritardo di fase

### Funzione di trasferimento del compensatore in ritardo di fase

$$D(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

## Configurazione zero-polo

- Il polo è solitamente posizionato vicino l'origine, questo lo rende un controllore PI.
  - Lo zero è posto vicino al polo: questo è essenziale per mantenere la stabilità.



### Come scegliere tra i vari tipi

#### 1. Requisiti di performance al transitorio:

- (a) Se il sistema non compensato, attraverso l'aggiustamento del guadagno, incontra i requisiti di performance del transitorio allora scegliere ritardo di fase
- (b) Altrimenti se siamo in grado di scegliere un guadagno che soddisfa i requisiti al transitorio e c'è bisogno di "tirare" a sinistra il ldr meglio anticipo di fase.
- (c) Aggiustando il guadagno si potrebbero soddisfare i requisiti e quindi non necessitare di compensazione

#### 2. Accuratezza allo stato stabile:

- (a) Per aumentarla (specialmente nei tipo-1 e tipo-0) meglio ritardo di fase (difficile da usare nei tipo-2)
- (b) Avvicinare lo zero al polo indica che vogliamo ridurre gli effetti che il compensatore potrebbe avere sul transitorio.

**Esempio: applicazione della compensazione in ritardo di fase**

## 1.25 Introduction to Frequency Domain Analysis in Control Systems

Ci concentriamo ora sull'analisi nel dominio della frequenza.

### 1.25.1 Transizione dall'analisi nel dominio del tempo al dominio della frequenza

Mentre il dominio del tempo era utile per visualizzare le performance al transitorio, il dominio della frequenza enfatizza la risposta allo stato stabile.

### 1.25.2 Formalismi del dominio della frequenza

Un vantaggio significativo è la robustezza ovvero minore dipendenza dall'accuratezza del modello del sistema (Ricavare un modello accurato è infatti difficile, questo lo rende il dominio più utilizzato). Altro vantaggio è la facilità di analisi.

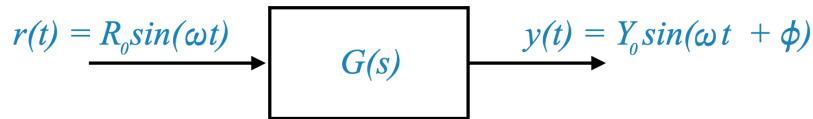
### 1.25.3 Risposta in frequenza di sistemi lineari

**Concetto 3: Input sinusoidale e risposta ss** Dato un sistema lineare con fdt  $G$  quando soggetto a un input sinusoidale  $r(t) = R_0 \sin(\omega t)$  l'output avrà componente sia transitoria che ss.

La risposta allo stato stabile può essere rappresentata come:

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Anche la risposta è quindi sinusoidale, questo implica che capendo il **rateo di ampiezza**  $\frac{Y_0}{R_0}$  e l'**angolo di fase**  $\phi$  possiamo descrivere completamente la relazione input output.



#### Definizione della risposta in frequenza

Questa può essere caratterizzata da come questi parametri variano con la frequenza  $\omega$ .

$$\text{Risposta in frequenza} = \left\{ \frac{Y_0}{R_0}(\omega), \phi(\omega) \right\}$$

**Relazione con la FDT** Il rateo di ampiezza è la magnitudine della fdt valutata in  $s = j\omega$  e  $\phi$  è l'angolo di fase di  $G(j\omega)$

$$\frac{Y_0}{R_0} = |G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|$$

$$\phi = \angle G(j\omega)$$

Queste due grandezze costituiscono la risposta in frequenza del sistema.

### 1.25.4 Caratterizzazione completa del sistema

La risposta in frequenza caratterizza completamente il comportamento del sistema (sia transitorio che ss). Questo è dovuto all'abilità della trasformata di Fourier di collegare la risposta in frequenza al comportamento nel dominio del tempo.

### 1.25.5 Implicazioni pratiche

- Indipendenza del modello: è meno dipendente da un modello matematico preciso (utile quando questi sono difficili da ottenere)
- Accessibilità sperimentale: la risposta in frequenza può essere misurata direttamente.

**Nota:** *È quasi impossibile avere modelli matematici esatti: quando si usa il luogo delle radici si sta usando un'approssimazione.*

Riassumendo, il dominio della frequenza offre:

- una più chiara visione del comportamento sul filtraggio dei rumori
- maggiore flessibilità sui modelli del sistema
- semplici e dirette tecniche di analisi e design del sistema

### 1.25.6 Formalismi del luogo delle radici vs dominio della frequenza

...

(stesse cose dette prima)

### 1.25.7 Introduzione all'analisi del dominio in frequenza

#### Passi base dell'analisi nel dominio della frequenza

1. Analisi della stabilità: prima abbiamo usato Routh o il luogo delle radici, nel dominio della frequenza usiamo il criterio di stabilità di Nyquist
2. Specifiche di performance: larghezza di banda, picco di risonanza e frequenza di risonanza (prima erano tempo di assestamento ecc.)
3. Progettazione: si usano compensatori simili, tuttavia il processo è più facile.

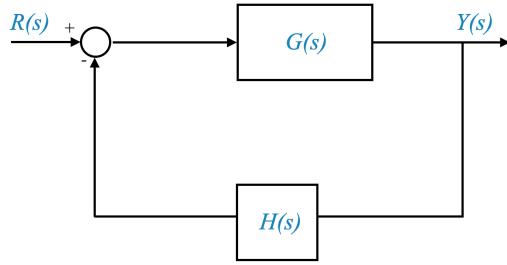
### 1.25.8 Criterio di stabilità di Nyquist

Questo criterio è basato sulla teoria della variabile complessa e sul principio dell'argomento di Cauchy, e fornisce una modo di determinare la stabilità di un sistema analizzando la fdt ad anello aperto nel dominio della frequenza.

### 1.25.9 Capire il criterio

Consideriamo una fdt ad anello chiuso:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



Determinazione della stabilità:

- Ci concentriamo sul denominatore
- La stabilità è determinata analizzando il luogo di  $1 + G(s)H(s)$  nel piano complesso
- Se non ci sono punti nella metà destra, incluso l'asse immaginario, che soddisfano  $1 + G(s)H(s) = 0$  il sistema è stabile.

### Capire $G(s)H(s)$ , la fdt ad anello aperto

$G(s)H(s)$  rappresenta il prodotto delle singole fdt nel ciclo di controllo quando l'anello è aperto.

**Rappresentazione polinomiale:** Rappresentiamo spesso  $G(s)H(s)$  come:

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$$

**Poli e zeri di  $G(s)H(s)$**  Gli zeri sono le radici del numeratore polinomiale, i poli quelle del denominatore.

### Stabilità nell'anello aperto

Se i poli di  $G(s)H(s)$  sono nella metà sinistra il sistema è stabile ad anello aperto.

### Stabilità ad anello chiuso

La fdt ad anello chiuso è:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Per analizzare la stabilità ci concentriamo sulla funzione:

$$1 + \frac{N(s)}{\Delta(s)}$$

la quale viene espansa come:

$$1 + \frac{N(s)}{\Delta(s)} = \frac{\Delta(s) + N(s)}{\Delta(s)}$$

Assumendo che  $\Delta(s)$  è un polinomio di ordine n lo possiamo esprimere come

$$\Delta(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)\dots(s - \alpha_n)$$

l'ordine del numeratore è  $n$  in quanto contiene  $\Delta(s)$ , possiamo scrivere quindi l'eq espansa come:

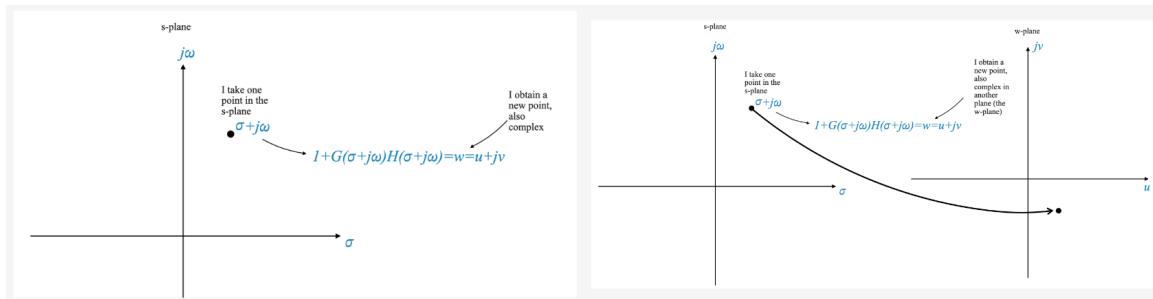
$$\frac{(s - \beta_1)(s - \beta_2)\dots(s - \beta_n)}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)\dots(s - \alpha_n)}$$

**Nota:** La metà sinistra del piano perché tutti i poli hanno parte reale negativa che corrisponde a una risposta decadente.

**Nota:** Il criterio di Nyquist si basa sul principio di argomento nell'analisi complessa il quale relaziona il numero di accerchiamenti di un punto da una funzione con il numero di zeri e poli di questa funzione.

### 1.25.10 Capire il piano s e il piano w

Quando applichiamo la funzione  $1 + G(s)H(s) = 0$  a un punto nel piano s questo mappa a un punto, in un altro piano complesso chiamato piano w, rappresentato come  $u + jv$ .



Se dopo questa mappatura l'origine del piano w non è coperta (vedi dopo) il sistema è stabile, altrimenti è instabile. Questo equivale a dire: l'eq  $1 + G(s)H(s) = 0$  non ha radici nella metà destra (incluso asse imm).

#### Mappatura dei contorni

Un contorno nel piano s, ovvero una collezione di punti connessi, mapperà (corrisponderà) in un corrispondente contorno nel piano w. Il contorno nel piano w rifletterà le caratteristiche dei poli e zeri del sistema.

#### Focus sul mapping qualitativo

Ci interessa capire se l'origine è coperta o no (non un mapping perfetto one-to-one).

**Esempio di mapping di un contorno** Consideriamo un cammino specifico, o contorno, nel piano s che includa uno zero della funzione  $1 + G(s)H(s)$  e analizziamo il suo mapping nel piano w. La chiave è capire come gli angoli contribuiscono da punti differenti su questo contorno nel mapping nel piano w.

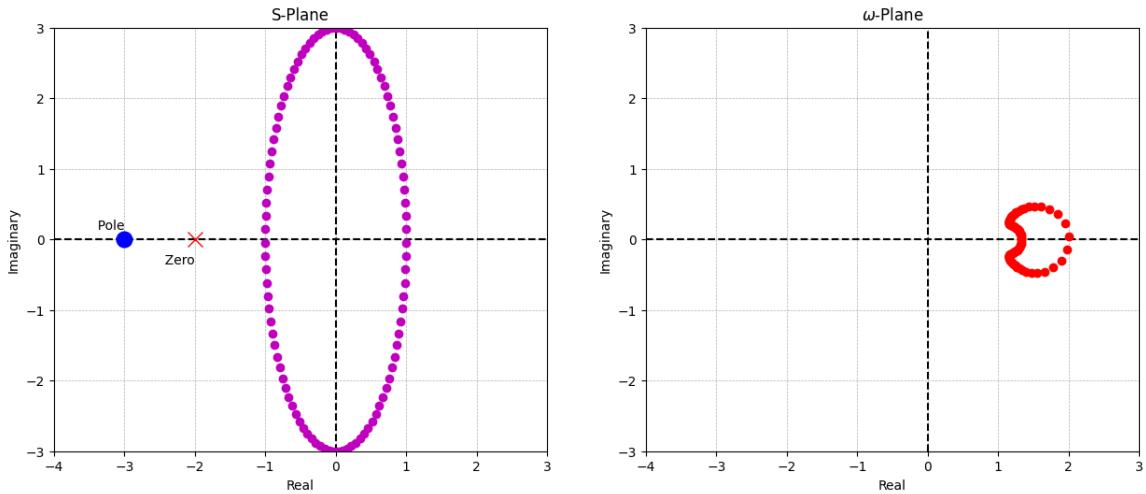
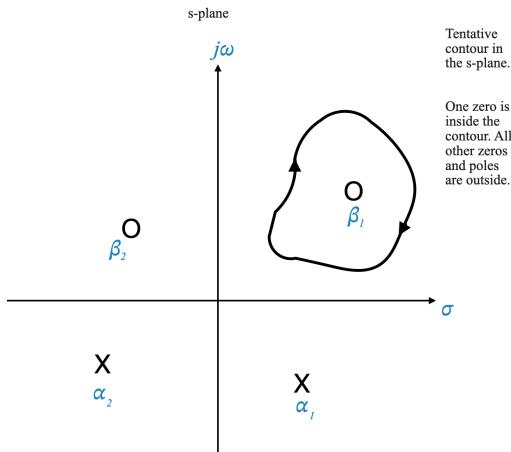


Figura 1.1: Esempio

### 1.25.11 Esempio di analisi del contorno e mappatura verso il piano w

Consideriamo un cammino specifico, o contorno, nel piano s che includa uno zero della fdt  $1 + G(s)H(s)$ . Vogliamo capire come questo contorno trasla nel piano w.



#### Mappare un punto dal piano s al piano w

Esempio con un punto specifico  $s_1$ :

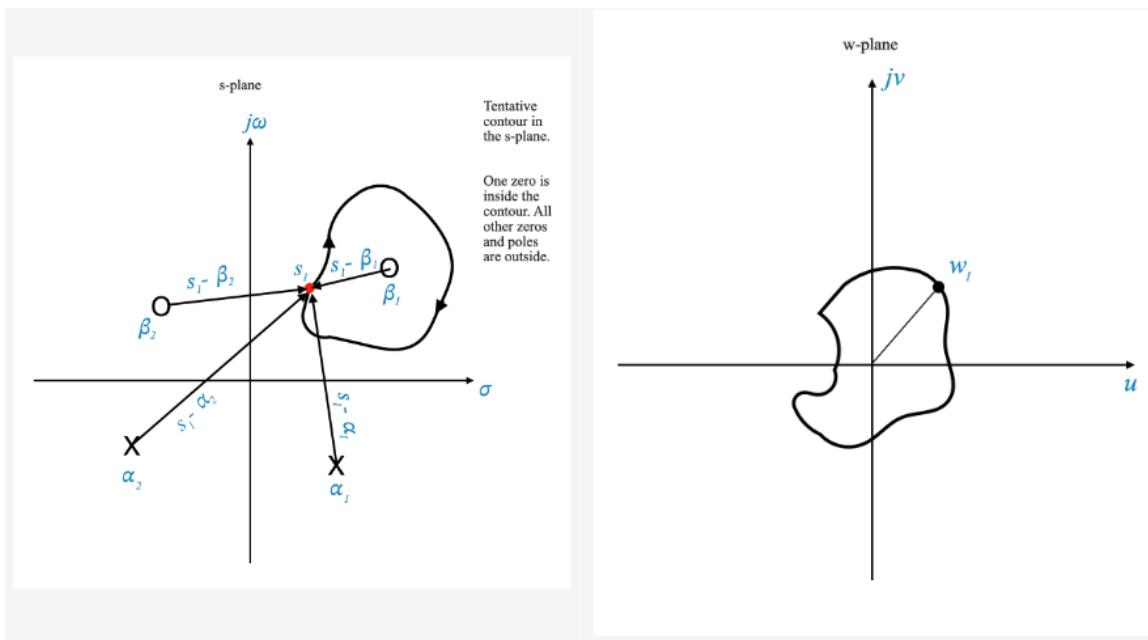
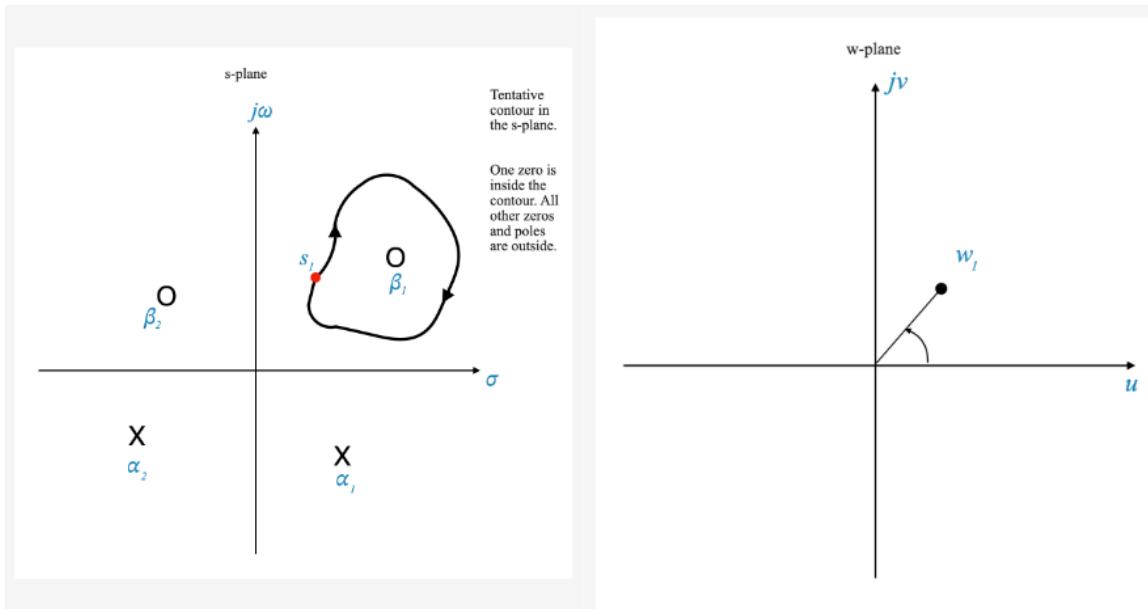
$$1 + G(s)H(s) = \frac{(s_1 - \beta_1)(s_1 - \beta_2)\dots}{(s_1 - \alpha_1)(s_1 - \alpha_2)\dots}$$

Dove ogni termine rappresenta un fasore numeratore (o denominatore).

Per calcolare magnitudine e fase del punto mappato:

- magnitudine = prodotto di ogni fasore numeratore diviso per ogni fasore denominatore  
???

- fase = somma delle fasi dei fasori numeratori - la fase dei fasori denominatori.



**Nota:** Se uno zero della funzione è incluso in un contorno il corrispettivo fasore contribuisce con un angolo di  $-2\pi$  radianti al totale cambiamento di angolo, tutti gli altri zeri e poli fuori dal contorno non contribuiscono al cambiamento netto di angolo.

Il contributo angolare di un polo è l'opposto di quello di uno zero ovvero  $2\pi$ .

Se un contorno comprende sia poli che zero il contributo è calcolato come la differenza tra quello dei poli e quello degli zeri.

### 1.25.12 Principio argomentativo di Cauchy

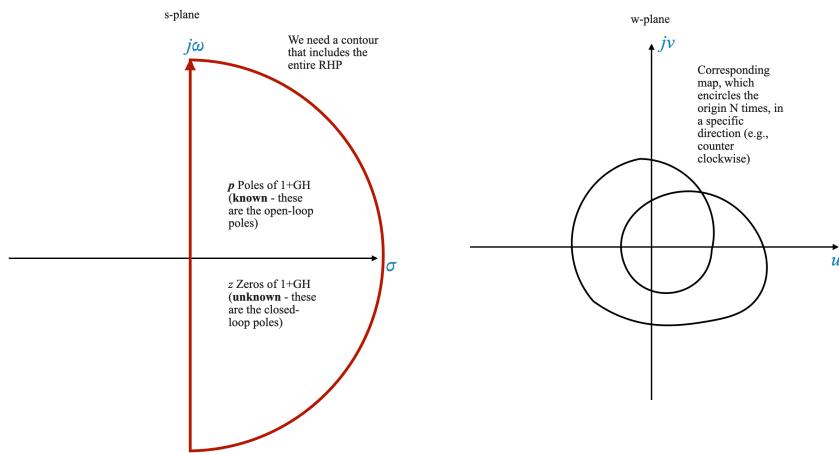
Possiamo dichiarare la differenza relativa tra il numero di poli e zeri all'interno di un contorno contando quante volte il disegno circonda l'origine e in quale direzione.

### 1.25.13 Il criterio di stabilità di Nyquist

Applichiamo il principio a un contorno specifico detto *contorno di Nyquist* che circonda l'intera metà destra e comprende l'asse immaginario.

**Nota:** Per ora consideriamo che **non ci sono poli sul contorno**.

Tramite la funzione  $1 + G(s)H(s)$  questo specifico contorno è mappato nel piano w:



- I poli di  $1 + G(s)H(s)$  sono gli stessi di quelli ad anello aperto del sistema.
- Gli zeri di  $1 + G(s)H(s)$  corrispondono ai poli ad anello chiuso.

Se, mappando il piano w, si circonda l'origine  $N$  volte in direzione antioraria, allora  $N$  è matematicamente espresso come il numero di poli di  $1 + G(s)H(s)$  (denotato con  $P$ ) meno il numero di zeri (denotato con  $Z$ ), questa relazione è catturata dall'equazione di Nyquist:

$$N = P - Z$$

Questa sta alla base del criterio di Nyquist il quale asserisce che *il numero totale di aggiramenti antiorari dell'origine nel piano w da parte della funzione  $1+G(s)H(s)$  è uguale alla differenza tra il numero dei suoi poli e zeri*.

Pertanto, per determinare la stabilità ad anello chiuso del sistema, è necessario mappare il contorno nel piano w e contare il numero di volte che questo circonda l'origine.

**Nota :** Commenti finali:     • Se uno zero sta sul contorno allora il contorno nel piano w passerà attraverso l'origine, questa condizione indica stabilità marginale.

- Quando un polo giace sul contorno di Nyquist la sua mappatura sul piano w risulterà in un valore infinito (richiede maggiore analisi).
- Gli zeri di  $G(s)H(s)$  non creano problemi.

### 1.25.14 Interpretazione del criterio

- $N$  è il numero di aggiramenti antiorari del punto  $-1 + 0j$  nel piano w.
- $P$  è il numero di poli di  $1 + G(s)H(s)$  nella metà destra del piano s.
- $Z$  è il numero di zeri di  $1 + G(s)H(s)$  nella metà destra del piano s.

### 1.25.15 Applicazione del criterio

recap

#### Sistemi stabili ad anello aperto

Per un sistema stabile ad anello aperto (dove  $P = 0$ ) il sistema ad anello chiuso è stabile se il disegno di Nyquist il piano w non circonda l'origine.

$Z = N \rightarrow N = 0$  o no aggiramenti del punto  $-1$  per avere un sistema ad anello chiuso stabile.

## 1.26 Application of Nyquist Stability Criterion in Control Systems

### 1.26.1 Ripasso

È un metodo grafico per asserire la stabilità di un sistema ad anello chiuso.

Il contorno di Nyquist è rappresentato matematicamente come un semicerchio di raggio infinito, ogni punto del semicerchio è rappresentato come  $s = Re^{j\theta}$  con  $R \rightarrow \infty$  e  $\theta$  che varia tra  $+e - 90^\circ$

#### Concetto di mappare

ripasso

#### Sistemi strettamente propri

Esplorando il comportamento di  $G(s)H(s)$  nel piano w incontriamo 2 componenti: fase e guadagno.

**Fase nel piano w** la fase di  $G(s)H(s)$  determina il contributo angolare dei suoi poli e zeri:

$$\angle G(s)H(s) = \sum \angle \text{zeri} - \sum \angle \text{poli}$$

**Guadagno nel piano w** La magnitudine del guadagno di  $G(s)H(s)$  è data da:

$$|G(s)H(s)| = \frac{K \prod |zeri|}{\prod |poli|}$$

con  $K$  una costante qualsiasi moltiplicatrice.

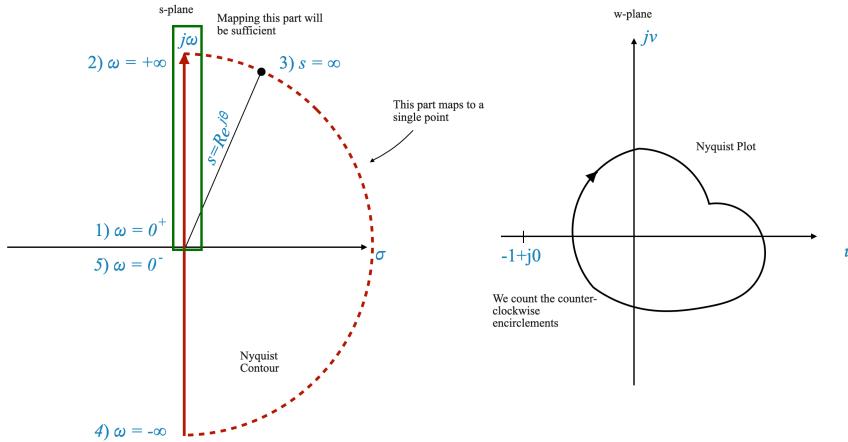
**Comportamento a infinito** Per i punti del contorno di Nyquist dove  $R \rightarrow \infty$  il guadagno di  $G(s)H(s)$  tende a 0. Ognuno di questi punti corrisponde all'origine nel piano w.

## Sistemi propri

$$n = m.$$

Quando  $R \rightarrow \infty$  il guadagno  $|G(s)H(s)|$  non va a zero. La fase dell'angolo similmente al caso strettamente proprio è determinato dai contributi angolare degli zeri e dei poli.

### 1.26.2 Attraversare il contorno di Nyquist



1. La mappatura inizia all'origine del piano s dove  $\omega = 0$  (punto detto  $\omega = 0^+$ )
2. Cammino lungo l'asse immaginario:  $s = j\omega$  con  $\omega$  che cresce da 0 a infinito.
3. Semicerchio infinito: concettualizzato con la transizione di  $\omega$  da + a  $-\infty$  durante il quale  $R$  tende a infinito.
4. Ritorno all'origine:  $\omega$  si muove da  $-\infty$  a 0.
5. Simmetria e semplificazione: il cammino sull'asse immaginario è simmetrico quindi di solito si considera solo la prima metà (la seconda si prende come riflesso)
6. Significato nell'analisi della stabilità: il criterio di Nyquist usa questo contorno per determinare se ci sono poli ad anello chiuso nella metà destra (i quali indicano instabilità)
7. Tecnica in pratica: di solito ci si concentra sull'asse immaginario e sul comportamento a infinito

**Analisi del criterio di stabilità di Nyquist attraverso la mappatura di  $G(s)H(s)$  sul contorno di Nyquist**

1. **Mappatura della Funzione di Trasferimento:** Il compito è mappare  $G(s)H(s)$  mentre la variabile complessa  $s$  attraversa il contorno di Nyquist. Questo percorso lungo il contorno creerà un grafico nel piano di  $G(s)H(s)$ .
2. **Creazione del Diagramma di Nyquist:** Mentre  $s$  si muove lungo il contorno di Nyquist, osserviamo come cambia il valore di  $G(s)H(s)$ . Il grafico risultante nel piano di  $G(s)H(s)$  è il nostro principale oggetto di studio.

3. **Natura Qualitativa del Diagramma:** Sebbene i valori quantitativi esatti del grafico non siano la nostra principale preoccupazione, la sua forma qualitativa è cruciale. Gli assi reale e immaginario del piano di  $G(s)H(s)$  sono punti di riferimento importanti per la nostra analisi.
4. **Punto Cruciale sul Diagramma:** Un elemento chiave nel diagramma di Nyquist è il punto  $-1+j0$ . Questo punto è critico perché abbiamo spostato la nostra prospettiva da  $1+G(s)H(s)$  a  $G(s)H(s)$  solamente.
5. **Conteggio degli Avvolgimenti:** L'essenza del criterio risiede nel conteggiare il numero di avvolgimenti in senso antiorario del punto  $-1+j0$  da parte del diagramma di Nyquist. Questo conteggio è denotato da  $N$ .
6. **Criterio di Stabilità di Nyquist:** Il numero totale di avvolgimenti in senso antiorario,  $N$ , è correlato a due variabili chiave:  $P$  e  $Z$ . Qui,  $N = P - Z$ , dove  $P$  rappresenta il numero di poli a ciclo aperto all'interno della regione di Nyquist, e  $Z$  corrisponde al numero di zeri, il che equivale al numero di poli a ciclo chiuso nel sistema.

### 1.26.3 Esempi pratici

#### Esempio 1: Sistemi in feedback con fdt ad anello aperto

Consideriamo:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

(forma a costante di tempo, più pratica in questo dominio).

La trasformiamo nell'equivalente sinusoidale ponendo  $s = j\omega$ :

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)}$$

In questo modo si può gestire più facilmente il variare di  $\omega$  nella mappatura del contorno di Nyquist.

### 1.26.4 Disegnare il diagramma di Nyquist

#### Esame dettagliato di ogni punto per il nostro esempio

1. Magnitudine ( $|G(j\omega)H(j\omega)|$ ) e angolo di fase ( $\angle G(j\omega)H(j\omega)$ ) a  $\omega = 0$ : andando a sostituire si trova magnitudine 1 e angolo 0:  $1\angle 0^\circ \quad \omega = 0$
2. Magnitudine e angolo a  $\omega = \infty$ : la magnitudine tende a 0 e l'angolo a -180 deg:  $0\angle -180^\circ \quad \omega = \infty$

Aggiungere sidebar sul calcolo per ottenere  $0\angle -180^\circ$

#### Intersezioni con gli assi

Per trovarle bisogna esprimere la fdt nella forma  $x + jy$ :

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1)} = x + jy$$

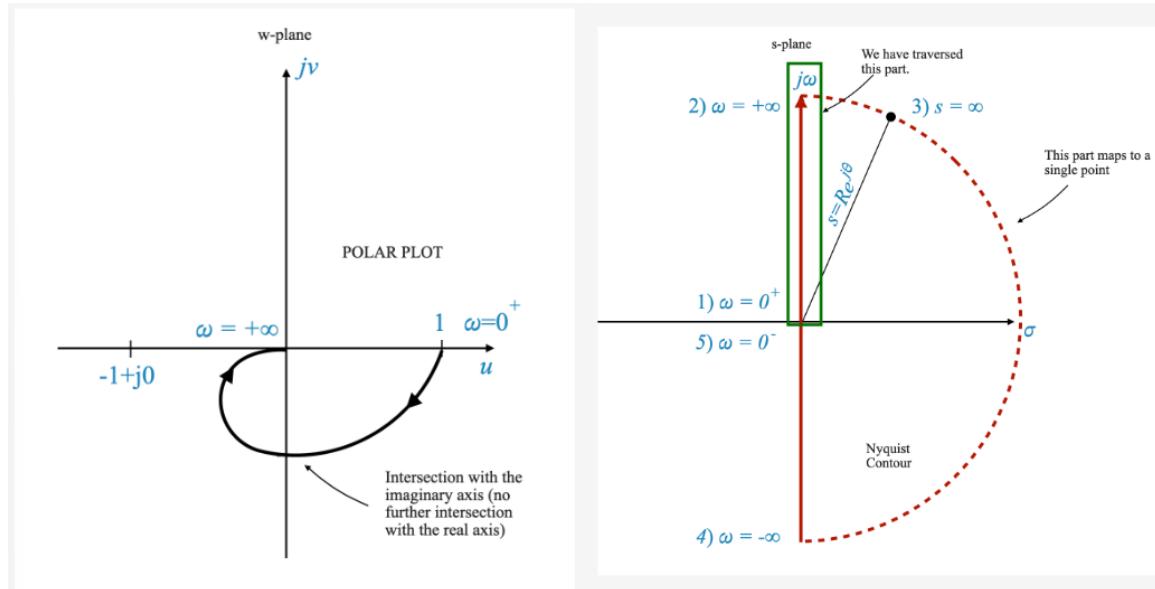
per poi trovare le intersezioni ponendo a zero una delle due parti ( $y$  e  $x$ ) alla volta per trovare una o l'altra intersezione.

### 1.26.5 Costruzione del diagramma polare della risposta in frequenza

Prima di Nyquist creiamo il diagramma polare della risposta in frequenza di sistemi ad anello aperto. Questo diagramma parte da  $\omega = 0$  e arriva a  $\omega = \infty$ .

Usiamo i punti che abbiamo calcolato prima:

$$1\angle 0^\circ \quad 0\angle -180^\circ$$



Punti chiave dell'analisi:

- $\omega = 0$  : la magnitudine (grandezza) è uno e l'angolo è 0 gradi.
- $\omega = \infty$  la grandezza tende a 0 e l'angolo a -180 gradi.

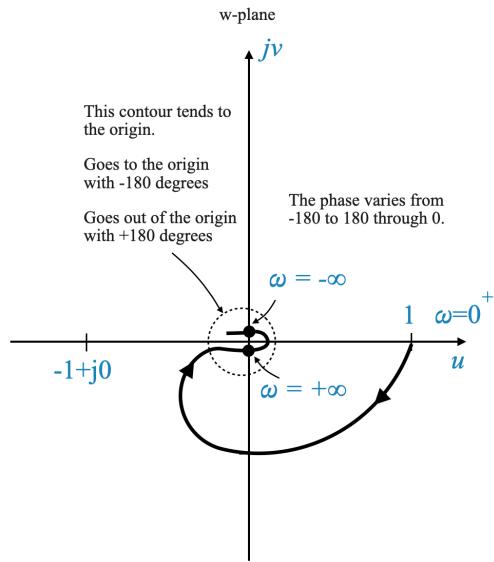
Dobbiamo capire come mappare il punto  $s = Re^{j\theta}$ . Consideriamo intanto la funzione originale  $G(s)H(s)$ , a cui applichiamo la mappatura del punto:

$$G(s)H(s)\Big|_{s=Re^{j\theta}} = \frac{1}{(T_1 Re^{j\theta} + 1)(T_2 Re^{j\theta} + 1)}$$

dove con  $R \rightarrow \infty$  diventa

$$\frac{1}{T_1 T_2 R^2 e^{j2\theta}}$$

dove  $\theta$  varia da + a  $-90^\circ$ , quindi la magnitudine tende a 0 e l'angolo  $\theta$  varia da  $-180^\circ$  per poi passare da 0 per poi andare a  $+180^\circ$ .



Capire l'approccio all'origine:

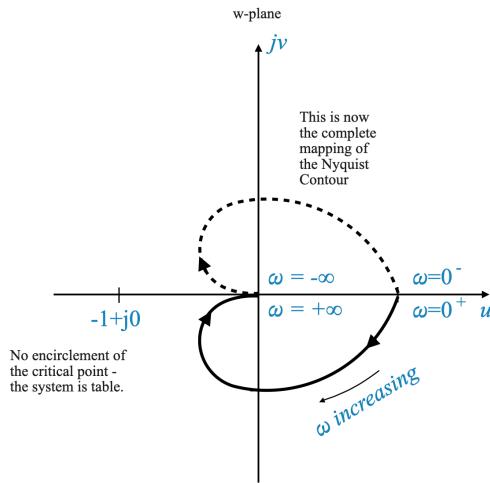
- Il contorno approcca l'origine asintoticamente con un angolo di -180 gradi e lascia la stessa sempre asintoticamente con un angolo di +180 gradi.
- L'angolo  $\theta$ , al suo variare, illustra come il contorno entra ed esce dalla vicinanza all'origine (-180 e +180)

#### Semplificazione del diagramma di Nyquist

- Per la stabilità il nostro interesse primario è la vicinanza al punto  $-1 + j0$ .
- In molti scenari possiamo semplificare la mappatura attorno all'origine: possiamo considerare l'origine in sé come mappa totale di un particolare contorno fin tanto che siamo lontani dal punto critico  $-1 + j0$ .

#### 1.26.6 Transizione alla costruzione pratica del diagramma di Nyquist

Una volta creato il diagramma polare riflettendolo rispetto all'asse reale si ottiene il diagramma di Nyquist.



un altro paio di considerazioni

### 1.26.7 Esempio 2: contorno passante per le singolarità

#### *Definizione 18 - Singolarità*

Con singolarità si intende un punto che influisce sul tracciamento del diagramma, quali poli e zeri  $\square$

Data:

$$G(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

si può prima ottenere il diagramma polare utilizzando la fdt sinusoidale:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(\tau j\omega + 1)}$$

da cui  $\omega = 0 \quad \infty \angle -90^\circ$  e  $\omega = \infty \quad 0 \angle -180^\circ$

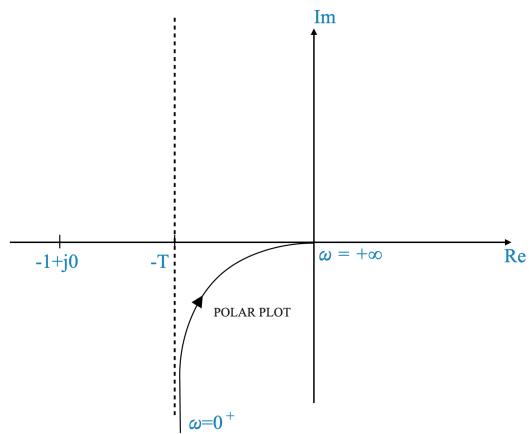
Per calcolare le intersezioni con gli assi reale e immaginario convertiamo la funzione nella sua rappresentazione  $x + jy$ :

$$G(j\omega) = x + jy = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

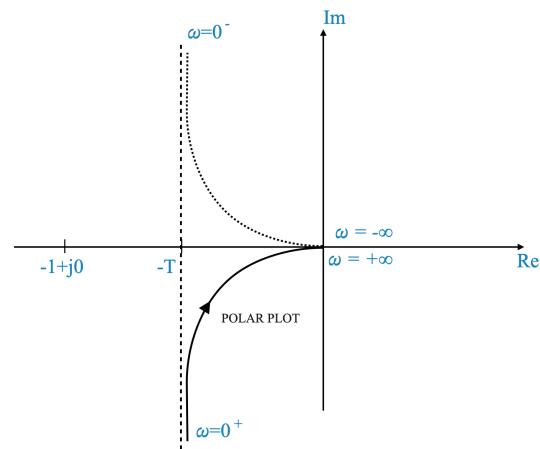
Dall'equazione notiamo che non ci sono intersezioni con gli assi se non per  $\omega = \infty$ .

Per  $\omega = 0 \rightarrow G(j0) = -T - j\infty$

Il che ci dà come informazione aggiuntiva che va a infinito lungo l'asintoto a  $-T$ .



Questo grafico mostra perché per  $\omega = 0$  si ha  $\angle = -90^\circ$  (il comportamento asintotico e la fase mostrano la solita informazione).



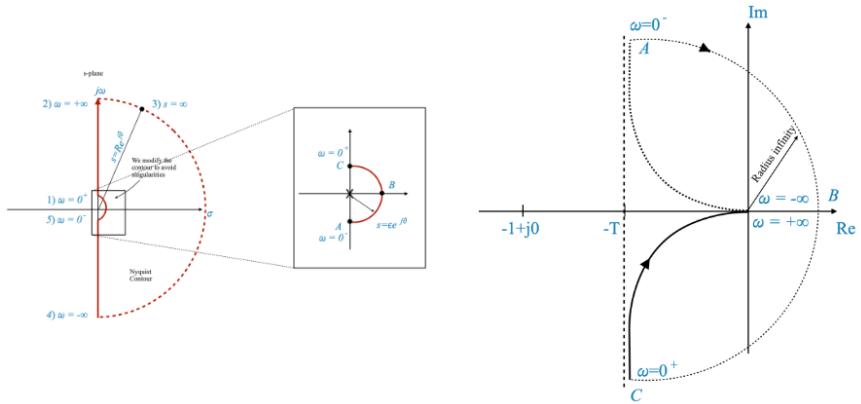
L'unico problema è che abbiamo un polo ad anello aperto nell'origine e mappare questo punto da un valore infinito.

Per ovviare a questo problema il contorno di Nyquist è modificato indentando il polo in questione. Questo si fa disegnando un piccolo semicerchio di raggio  $\epsilon$  adiacente al polo con  $\epsilon \rightarrow 0$ .

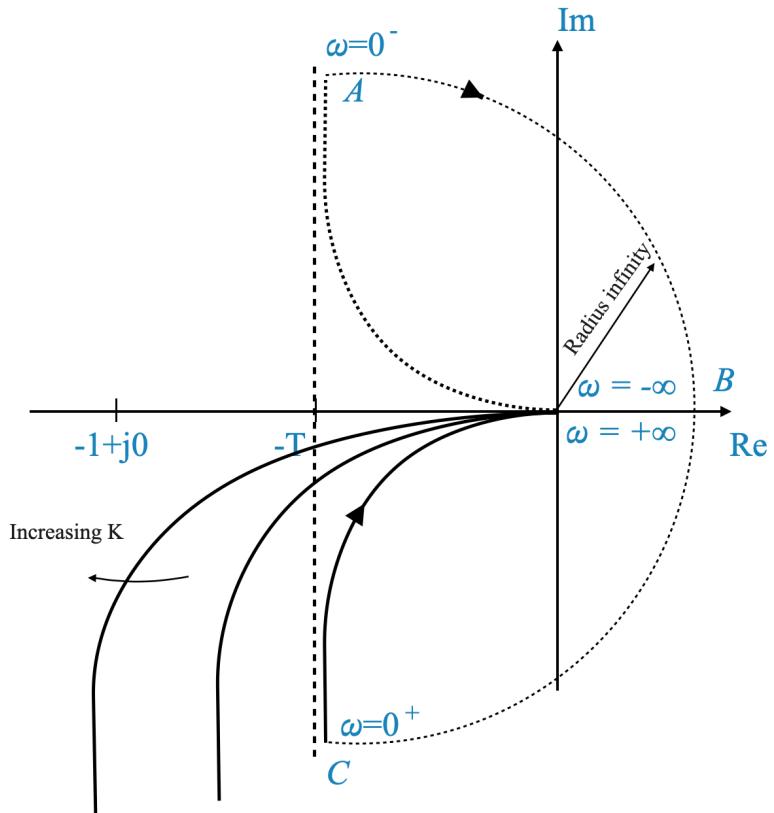
Nella mappatura si considera quindi un cammino semicircolare definito da

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

dove  $\theta$  varia da  $-90^\circ$  attraverso  $0$  fino a  $+90^\circ$



## Conclusioni sulla stabilità



Considerazioni su questo esempio.

### Analisi della stabilità basata sul diagramma di Nyquist

- **Assenza di accerchiamento del punto -1:** il sistema è ritenuto stabile se il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1 nel piano complesso.

- **Effetto dell'aumentare di K:** all'aumentare di  $K$  aumenta la magnitudine della risposta del sistema. Tuttavia questo aumento nella grandezza non comporta un accerchiamento del punto  $-1$ .

### Conclusioni sulla stabilità

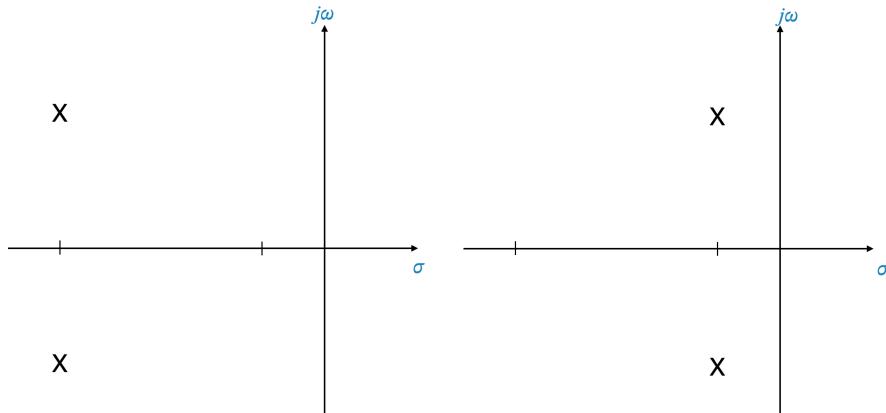
La stabilità del sistema non è influenzata dalle variazioni di  $K$  rendendolo stabile entro un ampio range di valori di guadagno.

## 1.27 The Nyquist Stability Criterion and Relative Stability

### 1.27.1 Introduzione alla stabilità relativa

La stabilità relativa fa riferimento al grado in cui un sistema tollera cambiamenti nei suoi parametri prima di diventare instabile. A differenza della stabilità assoluta, la quale ci dice solo se un sistema è stabile o no, provvede a misurare quanto vicino è un sistema al confine dell'instabilità.

Consideriamo un diagramma che rappresenta i poli ad anello chiuso sul piano  $\sigma - j\omega$ . Supponiamo di avere due poli dominanti in questo sistema, se questi sono più vicini all'asse  $j\omega$  la risposta transitoria del sistema decade più velocemente (dovrebbe essere più lenta, come si dice dopo). Questo posizionamento dei poli relativi all'asse indica la stabilità relativa del sistema. La parte reale guida lo sviluppo della risposta oscillatoria.

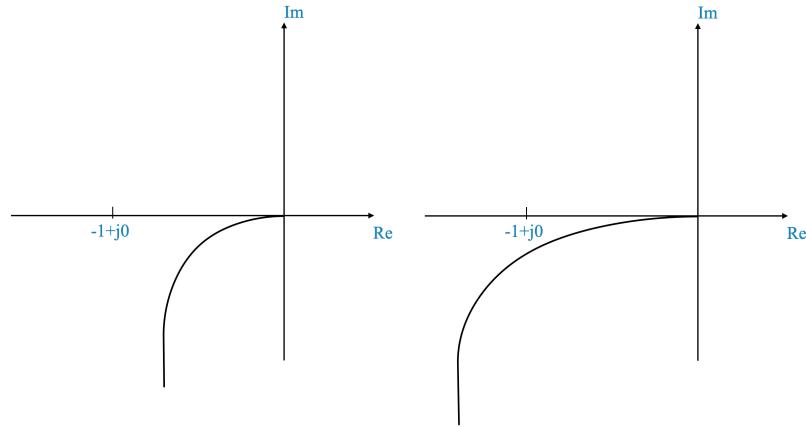


### Concetto chiave

- **Polí dominanti:** sono quelli che hanno il maggiore effetto sul comportamento del sistema
- **Risposta transitoria:** più questi poli sono vicini all'asse  $j\omega$  più lentamente la risposta transitoria decadrà, indicando minore stabilità relativa.

### Transizione al dominio della frequenza

Diagrammi di Nyquist (dominio della frequenza) corrispondenti ai precedenti esempi nel piano s

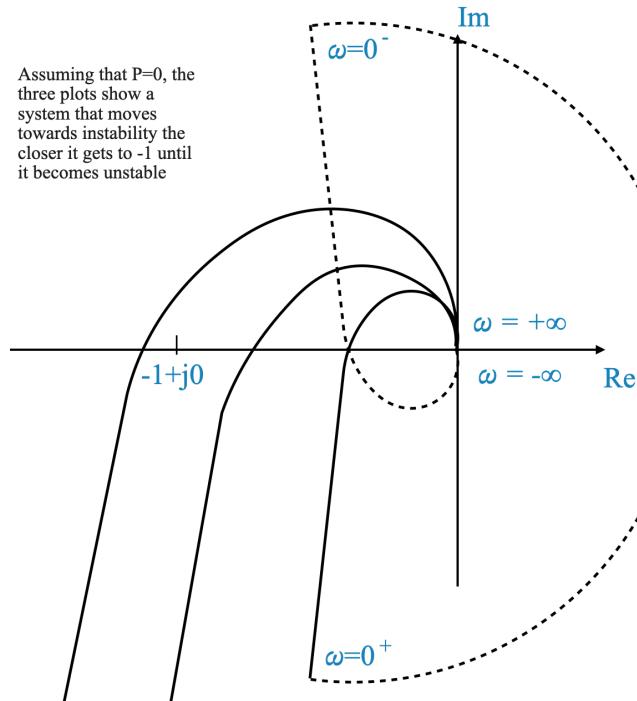


1. Un diagramma mostra una risposta più vicina al punto  $(-1, j0)$  indicando un sistema più vicino all'instabilità
2. L'altro mostra una risposta più lontana a quel punto indicando un sistema più stabile

#### Interpretare diagrammi di Nyquist per la stabilità relativa

La prossimità del diagramma di Nyquist al punto  $(-1, j0)$  ci dà un'indicazione della stabilità relativa del sistema.

- Racchiudere il punto indica stabilità assoluta.
- Più il diagramma è vicino al punto più alto è il rischio di instabilità.

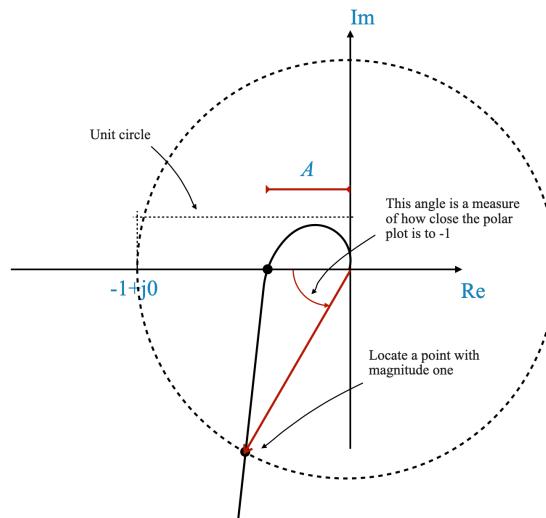


## Osservare l'impatto del guadagno incrementale attraverso il diagramma polare

In questo esempio si vede come incrementando il guadagno del sistema tende a spostare il diagramma polare più vicino al punto critico, dal momento che poi il diagramma circonda il punto si ha il segnale che il sistema si sta muovendo verso l'instabilità.

**Asserire la stabilità relativa con il diagramma polare** Per farlo bisogna misurare 2 parametri:

- La magnitudine all'intersezione: più è bassa più il sistema è considerato stabile.
- La fase dell'angolo nel punto in cui la magnitudine è unitaria fornisce una misura della stabilità relativa.



## Margini di guadagno e di fase

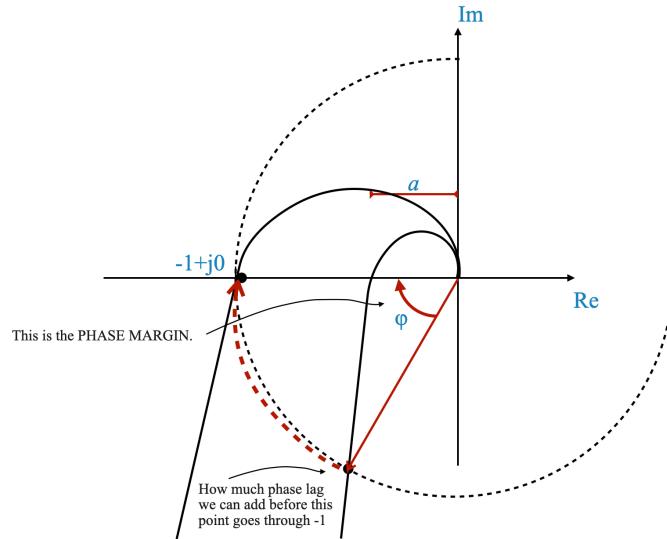
**Margine di guadagno** Per determinare il preciso incremento di guadagno per intersecare il punto  $(-1, j0)$  usiamo il fattore  $\frac{1}{a}$  dove  $a$  è la distanza dall'asse reale (mi sa che intendeva immaginario) nello stato iniziale.

Il margine di guadagno è dato da:

$$GM = \frac{1}{a}$$

Questo valore rappresenta la soglia prima della quale il sistema raggiunge lo stato di stabilità o instabilità marginale.

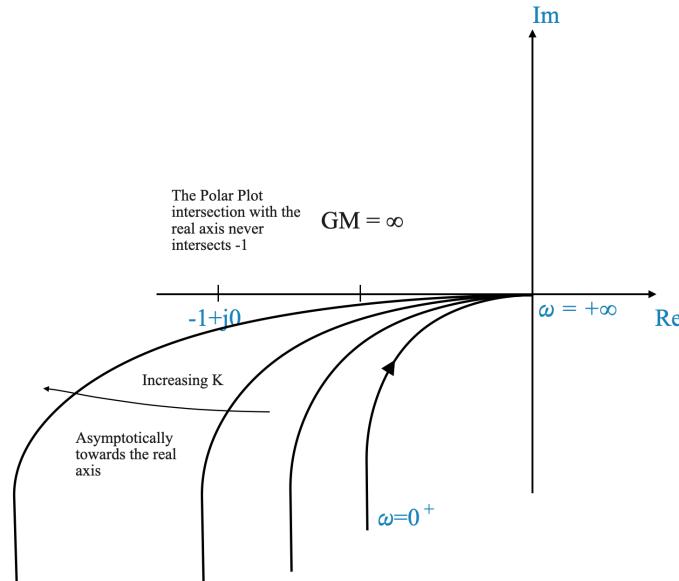
**Margine di fase** Rappresenta il ritardo di fase aggiuntivo che può essere introdotto nel sistema senza causare intersezione con il punto critico, essenzialmente quantifica la capacità del sistema di gestire cambiamenti di fase senza cadere nell'instabilità.



### 1.27.2 Margine di guadagno infinito

Il diagramma di Nyquist non interseca mai il punto.

Prendiamo per esempio la fdt:  $G(s) = \frac{K}{s(1+sT)}$



Questa funzione si avvicina asintoticamente all'asse reale all'aumentare di K. Guadagno infinito  $\rightarrow$  stabilità??? Anche se sembrerebbe una situazione ideale si va verso una margine di fase molto piccolo.

### Capire margini di fase e guadagno in sistemi stabili ad anello aperto

Per sistemi ad anello aperto instabili gli scopi dei margini di guadagno e di fase vengono a mancare.

## Sistemi tipo-0

Analizzando le fdt ci si rende conto che le definizioni tradizionali di guadagno e margine di fase hanno meno significato.

### 1.27.3 Affrontare i sistemi ad anello aperto instabili

Sono quei sistemi con uno o più poli ad anello aperto nella metà destra del piano s.

In questi sistemi le interpretazioni convenzionali di margine di guadagno e di fase non sono applicabili direttamente.

Un aspetto chiave di questi sistemi è che il diagramma polare deve circondare il punto critico un numero specifico di volte per ottenere la stabilità ad anello chiuso.

### 1.27.4 Capire le frequenze crossover

#### Frequenza di guadagno crossover

$$\omega_{gc}$$

Si ottiene dal diagramma di Nyquist (o polare) dove  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ .

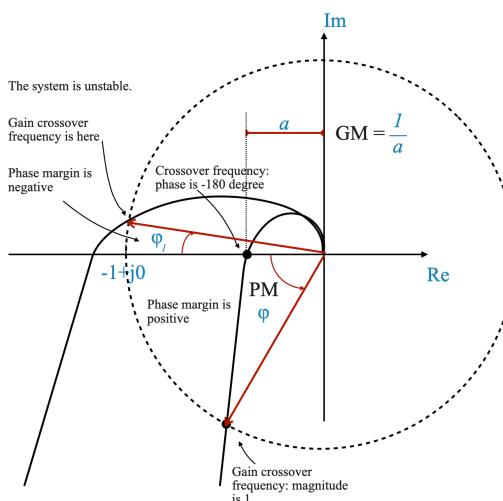
È la frequenza alla quale la magnitudine della fdt ad anello aperto è uguale a 1, è quindi la frequenza alla quale il guadagno del sistema è unitario.

#### Frequenza di fase crossover

$$\omega_{pc}$$

Si ottiene dal diagramma di Nyquist (o polare) dove la fase dell'angolo di  $G(j\omega)H(j\omega)$  è  $-180^\circ$ .

Indica la frequenza alla quale la fase del sistema passa a poter portare instabilità.



## 1.28 Analisi del diagramma di Bode

### 1.28.1 Il diagramma di Nyquist e la sua intensità computazionale

Visualizza la risposta in frequenza di un sistema disegnando:  $G(j\omega)H(j\omega)$ .

### 1.28.2 Metodo di semplificazione di Bode

Per alleviare il carico computazionale associato al diagramma di N. il signor Bode ha introdotto un metodo più efficiente trasformando il complesso diagramma in semplici linee asintotiche tramite il ridimensionamento logaritmico della grandezza e della fase della fdt.

#### L'essenza dell'analisi di Bode

Prendiamo una fdt generica:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_1)\dots}{j\omega(1 + j\omega T_2)\dots}$$

**Nota:** Questo è un sistema tipo-1 ma possiamo generalizzare al tipo-n.

Per prima cosa prendiamo il logaritmo di entrambe le parti:

$$\log_{10}(G(j\omega)H(j\omega)) = \log_{10}K + \log_{10}(1 + j\omega T_1) - \log_{10}j\omega - \log_{10}(1 + j\omega T_2)\dots$$

Questo approccio riduce la fdt in semplici componenti addizionate.

**Nota:**  $G(j\omega)H(j\omega)$  era un termine moltiplicato.

Queste componenti quando disegnate appaiono (quasi) come linee rette (l'asse della frequenza è in scala logaritmica).

**Nota:** Essendo in scala logaritmica manca la nozione di frequenza zero.

La scala logaritmica è funzionale dell'analisi sia delle basse frequenze (comportamento del sistema) che di quelle alte (disturbi).

#### Calcolo di grandezza e fase

**Magnitudine:**

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \implies \log_{10}|(G(j\omega)H(j\omega))| = \log_{10}K + \log_{10}|(1 + j\omega T_1)| - \log_{10}|j\omega| - \log_{10}|(1 + j\omega T_2)|\dots$$

Che possiamo convertire in decibel:

$$20\log_{10}|(G(j\omega)H(j\omega))| = 20\log_{10}K + 20\log_{10}|(1 + j\omega T_1)| - 20\log_{10}|j\omega| - 20\log_{10}|(1 + j\omega T_2)|\dots$$

**Fase:** sommare i contributi di fase da ogni termine nella fdt.

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \tan^{-1}\omega T_1 - 90^\circ - \tan^{-1}\omega T_2\dots$$

### 1.28.3 Sidebar - Decibel nei sistemi di controllo

È l'unità di misura usata per la grandezza (magnitudine) di una fdt nei sistemi di controllo.

Per convertire una magnitudine pura in una in decibel si fa  $20\log_{10}(M)$ .

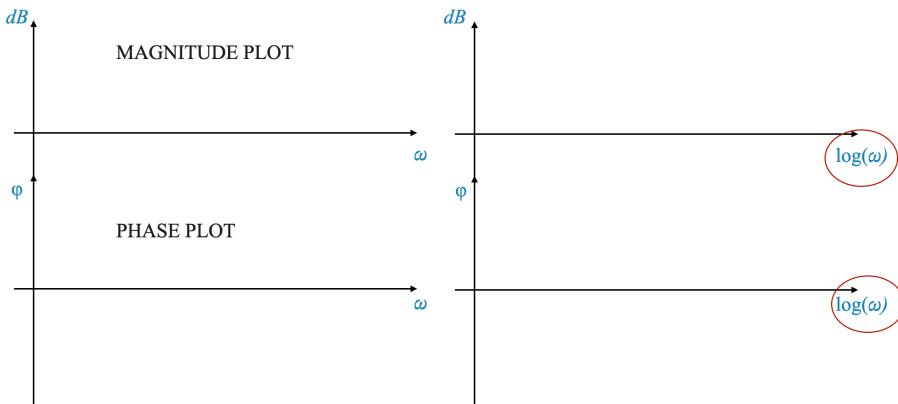
**Nota:**  $M$  sta per grandezza senza unità.

#### 1.28.4 Struttura dei diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode consistono in due diagrammi separati:

1. **Diagramma della grandezza:**  $\omega$  sull'asse x e magnitudine in dB sull'asse y. Questo mostra come il guadagno del sistema cambia con la frequenza.
2. **Diagramma della fase:**  $\omega$  sull'asse x e angolo di fase  $\phi$  sull'asse y. Dimostra come la fase cambia con la frequenza.
- 3.

**Nota:** Entrambi gli assi x sono in scala logaritmica.



#### 1.28.5 Elementi costitutivi dei diagrammi di Bode

Per fare un diagramma di Bode bisogna considerare i seguenti elementi di una fdt:

1. Costante del fattore di guadagno K.
2. Zeri e poli all'origine  $(j\omega)^{\pm N}$ .
3. Fattori del primo ordine  $(1 \pm j\omega T)^{\pm m}$ .
4. Fattori del secondo ordine  $\left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1\right)^{\pm r}$
5. Fattore di ritardo del tempo  $e^{-j\omega\tau_D}$ .
6. Altri fattori rappresentanti zeri e poli in entrambe le metà del piano s.

**Nota:** Il caso 3 include sia zeri  $(1 - j\omega T)$  che poli  $(\frac{1}{(1 - j\omega T)})$  della metà destra del piano ( $\pm$  all'esponente in ordine).

#### 1.28.6 Diagramma di Bode

**Nota:** In Nyquist il range delle frequenze basse era compresso per permettere il disegnare fino a infinito.

## Elementi costitutivi dei diagrammi di Bode

**1. Guadano K**  $K$  in una fdt può essere rappresentato in un diagramma di Bode come:

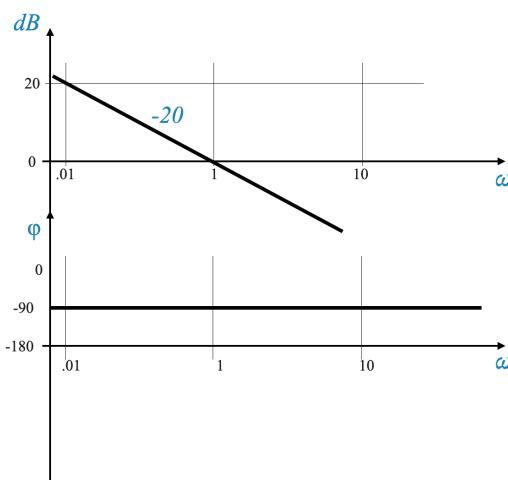
- Grandezza:  $20\log(K)$  dB. Questo valore è costante in tutte le frequenze.
- fase:  $0^\circ$  dato che il guadagno non ha effetto sulla fase

**Nota:**  $K$ , a seconda se è maggiore o minore di 1, indica la posizione della linea di grandezza sopra o sotto l'asse dB.

**2. Zeri e poli nell'origine** Partiamo valutando come  $\frac{1}{j\omega}$  ha effetto sul diagramma e poi lo generalizziamo:

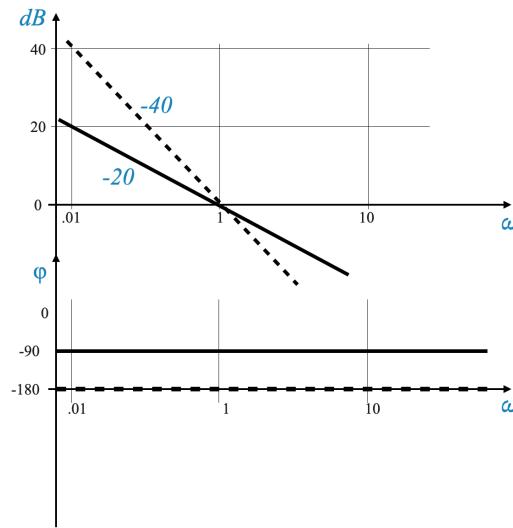
- Grandezza:  $-20\log(\omega)$  dB
- Fase:  $-90^\circ$  per tutte le frequenze

Il diagramma della grandezza è una linea dritta con una pendenza di -20 dB/decade (un cambiamento di una decade (10) risulta in un cambiamento della g. di -20 dB). Una decade si riferisce a un incremento di 10 volte nella frequenza (es da 1Hz a 10Hz).



Possiamo ora generalizzare e considerare  $\frac{1}{(j\omega)^2}$ :

- Grandezza:  $-40\log(\omega)$  dB
- Fase:  $-180^\circ$  per tutte le frequenze



**Nota:** Se abbiamo uno zero (o più zeri nell'origine) la forma è la solita ma la pendenza diventa positiva.

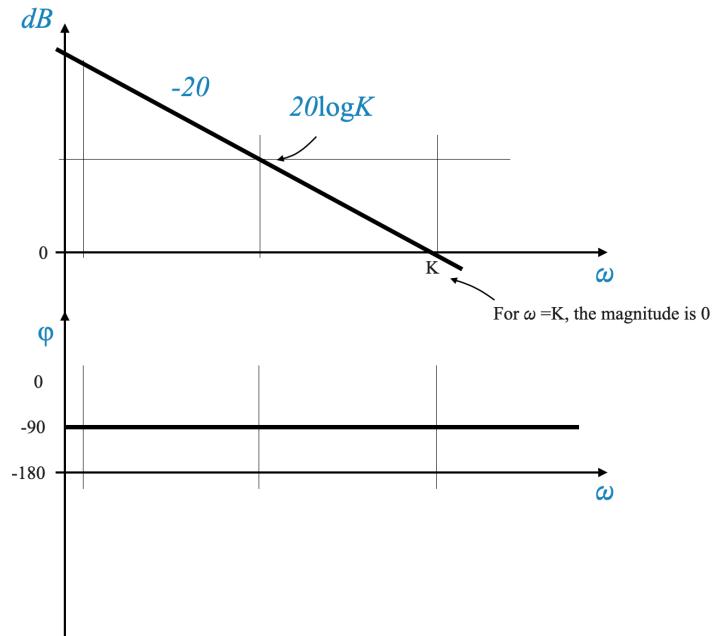
### Combinazione di guadagno e polo nell'origine

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

Il diagramma di Bode si ottiene sommando quello di  $K$  e quello di  $\frac{1}{s}$ .

- Effetti combinati: combinando un fattore di guadagno con un termine  $1/j\omega$  il diagramma della grandezza si sposta e la fase è  $-90^\circ$
- Equazione della grandezza: per  $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$  la g. in dB è  $-20\log(\omega) + 20\log(K)$

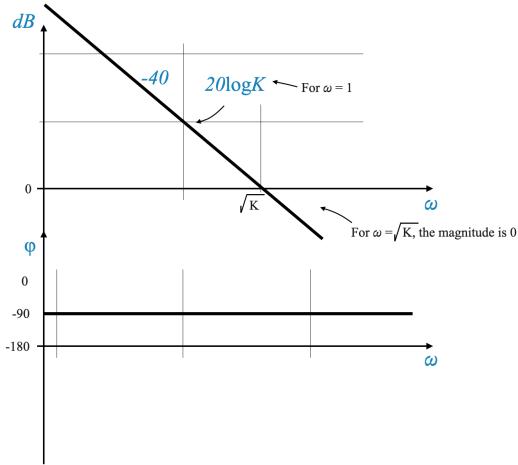
Questa è una linea dritta della forma  $y = mx + c$



Con due poli invece:

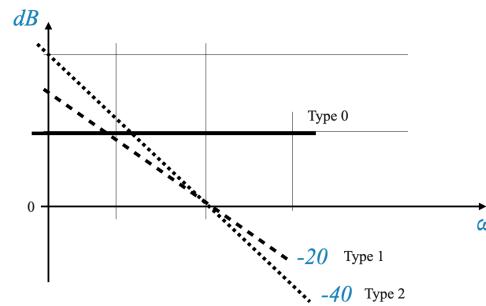
$$G(s) = \frac{K}{s^2}$$

La eq. di grandezza è  $dB = -40\log(\omega) + 20\log(K)$



**Identificare il tipo del sistema dal diagramma di Bode** Il tipo si evince dalla regione a bassa frequenza:

- Tipo-0: caratterizzati da una linea orizzontale nella regione a bassa frequenza, indicando un costante guadagno.
- Tipo-1: linea con una pendenza di  $-20$  dB/decade, indicando un sistema del primo ordine.
- Tipo-2: pendenza di  $-40$  dB/decade, sistema del secondo ordine.



### 3. Ritardo del primo ordine con costante di tempo

Polo semplice o ritardo semplice.  
Per  $G(s) = \frac{1}{1+j\omega T}$  la grandezza è espressa come

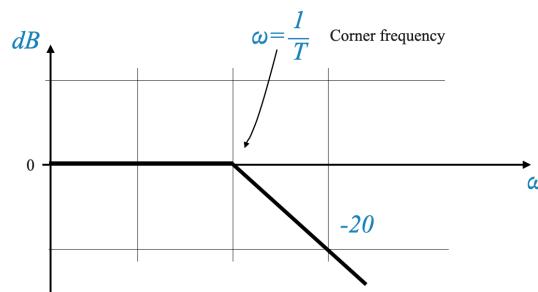
$$|G(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \Rightarrow -10\log(1 + \omega^2 T^2)$$

e la fase è

$$\angle G(s) = -\tan^{-1}(\omega t)$$

Disegno:

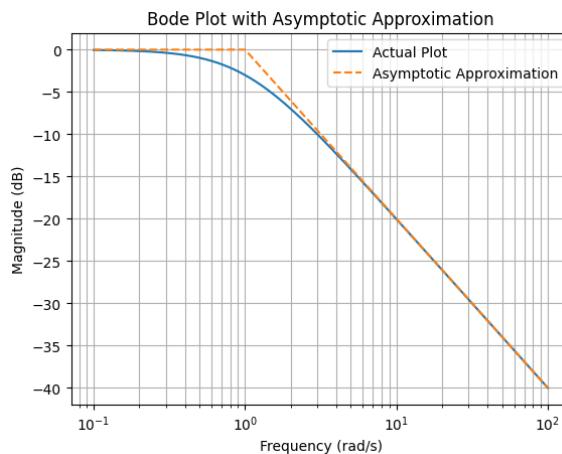
- Per gli  $\omega T \ll 1$ : si ottiene  $dB \approx 0$  (spettro delle basse frequenze)
- Per  $\omega T \gg 1$  si ottiene  $dB = -20\log(\omega T)$  (spettro delle alte frequenze)
- Frequenza di angolo: è il punto in cui  $\omega|T| = 1$  ovvero il punto in cui si passa da una linea orizzontale a una inclinata.



Data quindi l'equazione di prima:  $|G(s)| \Rightarrow -10 \log(1 + \omega^2 T^2)$

- Caso 1:  $|G(s)| = 0$
- Caso 2:  $|G(s)| = -20 \log(\omega) - 20 \log(T)$
- Caso 3: a  $\omega T = 1$  l'equazione della magnitudine diventa  $dB = -10 \log \sqrt{2} = -3$  dB.  
In questo caso la fase è  $\tan^{-1}(1) = -45^\circ$

Possiamo dunque verificare la differenza tra la funzione reale e l'approssimazione:



### Errore di analisi nei diagrammi di Bode

$$|G(s)| = -10 \log(1 + \omega^2 T^2)$$

Nell'analisi con i diagrammi di Bode l'uso di approssimazioni asintotiche semplifica il processo di disegno, questo però introduce errori (specialmente nel punto di frequenza di angolo).

Gli errori nel diagramma di Bode sono algebricamente aggiunti a specifiche frequenze per creare rappresentazioni più accurate. Per esempio all'frequenza di angolo l'errore dovrebbe tipicamente essere di -3 dB. Inoltre possiamo calcolare gli errori in punti un ottava più alta o bassa l'frequenza di angolo (un ottava vuol dire raddoppiare o dimezzare la frequenza).

Per una rappresentazione più accurata possiamo prendere punti addizionali alle frequenze  $\omega = \frac{1}{2T}$  e  $\omega = \frac{2}{T}$ :

$$err_{dB} = -10 \log(1) - \left( -10 \log \left( 1 + \left( \frac{1}{2T} \right)^2 T^2 \right) \right) \approx -1 \text{ dB}$$

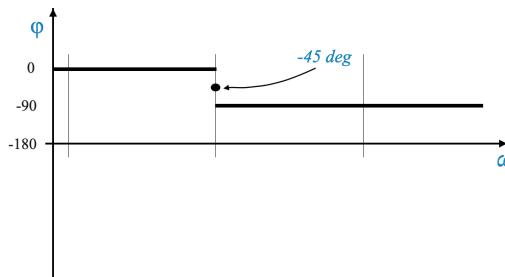
$$err_{dB} = -10 \log \left( \left( \frac{2}{T} \right)^2 T^2 \right) - \left( -10 \log \left( 1 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 T^2 \right) \right) \approx -1 \text{ dB}$$

Il calcolo di questi errori aiuta a rifinire il diagramma di Bode rendendolo più vicino all'effettiva risposta in frequenza del sistema.

**Analisi del diagramma della fase** L'equazione per l'analisi del diagramma di fase in Bode è data da:

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega t)$$

Questa equazione implica che a  $\omega = 0$  si ha  $\angle G(s) = 0^\circ$  ovvero che la fase inizia a 0 gradi alle basse frequenze e, con  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$ , approccia -90 gradi alle alte frequenze. Alla frequenza specifica di  $\omega = \frac{1}{T}$  si ha il punto di mezzo della transizione di fase ovvero  $\angle G(s) = -45^\circ$ .



aggiungere qualcosa su come si fa quel grafico

### 1.28.7 Margine di fase e margine di guadagno nei diagrammi di Bode

- **Frequenza crossover del guadagno:** è la frequenza alla quale l'ampiezza della risposta del sistema è pari a 1 (o 0 dB). È fondamentale per l'analisi della stabilità.
- **Margine di fase:** è lo spostamento di fase aggiuntivo necessario per portare il sistema sull'orlo dell'instabilità. Viene calcolato dal diagramma di fase alla frequenza di crossover del guadagno.
- **Analisi del margine di fase:**

- esso rappresenta l'angolo di fase aggiuntivo che può essere aggiunto al sistema prima che raggiunga un angolo di fase di -180 gradi.
- **Margine di fase positivo:** se il grafico è al di sopra della linea di -180 gradi in corrispondenza della frequenza di crossover del guadagno, il margine di fase è positivo, indicando un sistema stabile.
- **Margine di fase negativo:** Al contrario, se il grafico è al di sotto della linea di -180 gradi, si tratta di un margine di fase negativo, suggerendo una potenziale instabilità.
- **Definizione della frequenza di crossover di fase:** La frequenza di crossover di fase è il punto in cui l'angolo di fase della risposta del sistema diventa -180 gradi. Questa frequenza è fondamentale nel determinare la stabilità del sistema.

### 1.28.8 Costruzione di grafici di Bode per funzioni di trasferimento specifiche

Esempio:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

- **Costruzione del grafico della magnitudine:** Inizia tracciando il grafico a bassa frequenza per  $K = 10$ . Quindi, aggiungi grafici per ciascun fattore ( $1/s, 1+sT_1, 1+sT_2$ ) e regola la pendenza a ciascuna frequenza d'angolo.
- **Approccio:** Ad ogni frequenza d'angolo, aggiungi o sottrai livelli dB in base al cambiamento netto della pendenza. Ad esempio, a una frequenza d'angolo in cui la pendenza diminuisce, sottrarre i livelli dB per correggere il grafico.

## 1.29 Feedback System Performance Based On Frequency Response

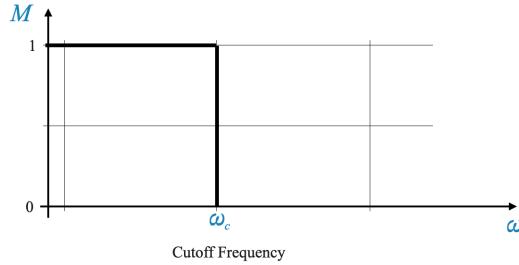
### 1.29.1 Rappresentazione e caratterizzazione di un sistema nel dominio della frequenza

Ripasso: anello aperto e chiuso, passaggio da anello aperto a chiuso.

### 1.29.2 Caratteristiche ideali del filtro passa basso nei sistemi di controllo

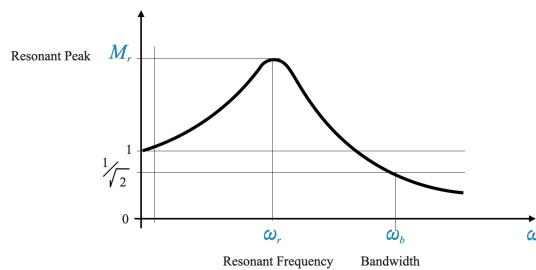
Il filtro passa basso è un tipo di sistema che permette ai segnali con frequenze sotto una certa soglia (frequenza di taglio, nota come  $\omega_c$ ) di passare attraverso senza attenuazioni.

In un filtro pb ideale la transizione tra guadagno unitario e guadagno nullo è repentino e distinto ed avviene a una specifica frequenza detta **frequenza di taglio**.



### Tipica frequenza di risposta di un sistema di controllo in feedback

In pratica un filtro passa basso ideale non è realizzabile: i sistemi di controllo hanno un declino più graduale.



Curva caratteristica di un sistema in feedback:

- Frequenza e picco di risonanza  $\omega_r$ :** frequenza alla quale la risposta (o guadagno) del sistema è massimo (implica il picco di risonanza ovvero l'effettiva magnitudine della massima risposta).
- Graduale declino oltre la frequenza di risonanza:** diversamente dal filtro ideale quello reale mostra un graduale declino nel guadagno da dopo la frequenza di risonanza.

### Capire la larghezza di banda nei sistemi di controllo

La larghezza di banda  $\omega_b$  fa riferimento all'intervallo di frequenze oltre il quale un sistema di controllo mantiene un guadagno costante vicino al suo massimo valore (range in cui il sistema lavora in maniera più efficacie).

**Nota:** *Nel pratico si progettano sistemi di controllo che hanno una larghezza di banda allineata con lo stesso range di frequenze del segnale che si intende controllare in modo da assicurarsi una risposta accurata.*

**Nota:** *Tecnicamente è la frequenza alla quale il guadagno del sistema scende a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  del guadagno massimo o unitario. Questo punto è cruciale perché definisce l'inizio dell'attenuazione del sistema per le frequenze più alte.*

### Quantificazione delle performance di sistema

- Grande larghezza di banda:** significa che il guadagno del sistema è il più grande possibile per un ampio raggio di frequenze, migliorando performance di tracciamento e velocità di risposta.

2. **Picco di risonanza non troppo alto:** per assicurare un guadagno piatto.
3. **Limitazioni:** fattori come il rumore caratteristico e il rischio di saturazione limitano la larghezza di banda.

## Quantificazione del comportamento dei sistemi di controllo

intro

### Caratterizzazione dei parametri di risposta in frequenza

1. Frequenza di risonanza ( $\omega_r$ ):
2. Picco di risonanza ( $M_r$ ): è la grandezza della risposta del sistema alla freq. di risonanza.
3. Larghezza di banda
4. Tempo di salita e larghezza di banda: sia  $\omega_r$  che  $\omega_b$  sono collegate al tempo di salita del sistema, più breve è quest'ultimo più larghi saranno gli omega.

### Indici di performance chiave (lista di 7 picco di risonanza ecc.).

Questi parametri sono derivati dai dati dalla risposta ad anello aperto ma riflettono il comportamento ad anello chiuso (offrono insights nella stabilità relativa del sistema).

## Visualizzazione del comportamento del sistema nel dominio del tempo

- Il dominio del tempo è utile per vedere come un sistema si comporta in risposta a certi input.
- In esso possiamo vedere facilmente come un sistema traccia un input e identifica gli errori del transitorio.
- Il comportamento dinamico del sistema (ad esempio come cambia la risposta nel tempo) è ben capibile.

## Semplificazione con il dominio della frequenza

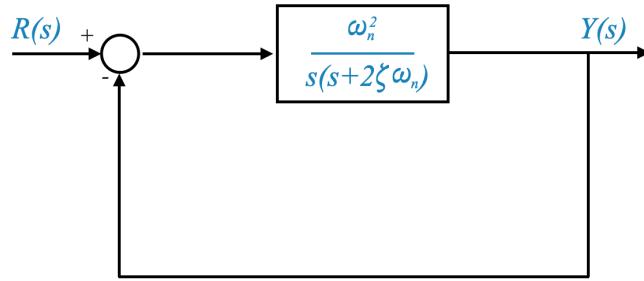
- Progettare in questo dominio è più facile.
- Per sfruttare i vantaggi va stabilita una connessione con il dominio del tempo: farlo coinvolge correlare parametri come  $M_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_b$ , margine di fase e margine di guadagno tra i due domini.

### 1.29.3 Approssimare il comportamento di un sistema del secondo ordine

Una approssimazione comune nell'analisi dei sistemi di controllo è assumere che il sistema si comporti come un sistema del secondo ordine con due poli dominanti (semplificazione spesso valida).

Un sistema del secondo ordine standard è rappresentato dalla fdt:

$$\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$



**Derivare frequenza e picco di risonanza in un sistema del secondo ordine.**

1. **Fdt ad anello chiuso** Consideriamo la fdt ad anello chiuso per un sistema del secondo ordine:

$$M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

2. **Esprimere la fdt con la frequenza complessa**

$$M(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

3. **Utilizzare la frequenza normalizzata** È definita come  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$   
Semplifica i calcoli e aiuta a comparare sistemi con frequenze naturali differenti.

$$M(ju) = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u}$$

4. **Determinare picco e frequenza di risonanza** Per trovare la frequenza di risonanza bisogna determinare il punto in cui la grandezza di  $M(ju)$  raggiunge il massimo. Data quindi la grandezza:

$$|M(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2}}$$

ponendo  $\frac{dM}{du} = 0$  troviamo  $u_r$ , ovvero la frequenza normalizzata alla quale occorre il picco di risonanza. Sostituendo questo valore nell'eq della magnitudine si ottiene il picco di risonanza.

$$\begin{aligned} u_r &= \sqrt{1 - 2\zeta^2} \\ \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \\ M_r &= \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned}$$

### Relazione tra rateo di smorzamento e picco di risonanza

Gli indici del dominio della frequenza picco di risonanza e frequenza di risonanza sono direttamente relazionati con il parametro del dominio del tempo rateo di smorzamento.

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{for } 0 < \zeta < 0.707$$

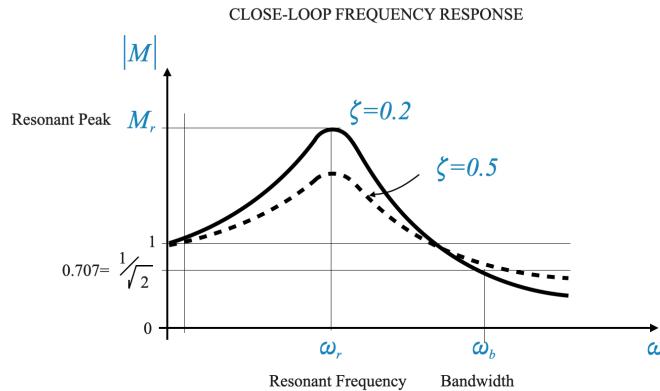


Figura 1.2: Grafico del picco di risonanza al variare del rateo di smorzamento

Quando  $\zeta > 0.707$  il comportamento del sistema diventa molto simile a quello di uno criticamente smorzato e quindi in pratica senza picco di overshoot (roba dell'ordine del 2-5%).

### Calcolo della larghezza di banda per sistemi del secondo ordine

Per calcolare la larghezza di banda torniamo indietro alla nostra equazione per la grandezza:

$$|M(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2}}$$

e poniamo  $|M(ju)| = 0.707$  per trovare  $u_b = \frac{\omega_b}{\omega_n}$  e possiamo quindi calcolarla per un sistema del secondo ordine come segue:

$$\text{Bandwidth, } \omega_b = \omega_n \left[ (1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

**Nota:** La larghezza di banda, nel dominio del tempo, è legata al tempo di salita, nel dominio della frequenza, è legata alle caratteristiche di filtraggio dei rumori.

## 1.30 Principles of Automatic Control: Lead and Lag Compensation

### 1.30.1 Il concetto di compensatori di anticipo e ritardo

- In un compensatore di anticipo uno zero precede un polo, migliorando quindi la risposta transitoria del sistema introducendo un anticipo di fase.
- In un compensatore di ritardo un polo precede uno zero, è quindi principalmente usato per migliorare l'accuratezza allo stato stabile senza modificare in modo significativo la risposta al transitorio.

**Nota:** Con "precede" si intende dire che è più vicino all'origine dell'altro.

### Definizione 19 - Compensatore di anticipo

È caratterizzato dalla fdt:

$$D(s) = \frac{\omega_p}{\omega_z} \cdot \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p}$$

con  $\omega_z < \omega_p$ .

□

### Caratteristiche di magnitudine e fase

Il grafico della grandezza di un compensatore di anticipo inizia a 0, aumenta a  $+20dB/decade$  dopo la frequenza di angolo  $\omega_z$ , per poi appiattirsi alla frequenza di angolo  $\omega_p$ . Per quanto riguarda la fase essa viene aggiunta tra frequenza 0 e la frequenza di angolo del polo.

La fase può quindi essere espressa come:

$$\Phi = \tan^{-1} \left( \omega \cdot \frac{1}{\omega_z} \right) - \tan^{-1} \left( \omega \cdot \frac{1}{\omega_p} \right)$$

### Calcolo della massima fase in un compensatore di anticipo

Vogliamo trovare la frequenza  $\omega_m$  alla quale si ha la massima fase  $\phi_m$ . Si ottiene questa tramite la derivata dell'equazione della fase posta uguale a 0.

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 0$$

Da cui alla fine otteniamo che

$$\omega_m = \sqrt{\omega_z \cdot \omega_p}$$

Andando a sostituire questo valore di frequenza nell'equazione di  $\phi$  si ottiene  $\phi_m$  ovvero la massima fase di anticipo.

### Determinare la magnitudine del compensatore

$$\text{Magnitude}(dB) = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \left( \frac{1}{\omega_z} \right)}$$

#### 1.30.2 Progettazione con requisiti specifici

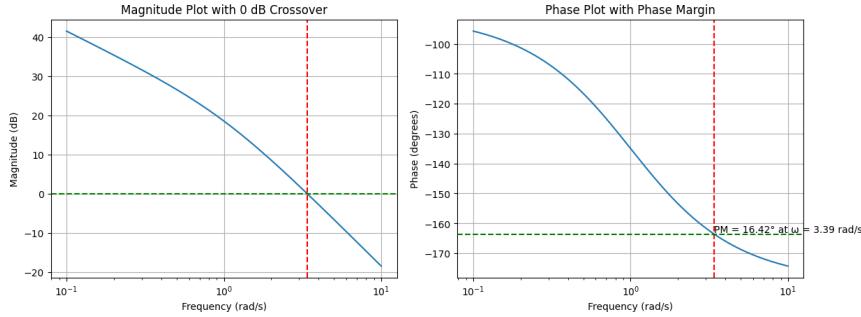
Immaginiamo di avere un sistema non compensato rappresentato da

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

con requisiti di progettazione:

- $K_v = 12$
- $\phi_m = 40^\circ$

**Nota:**  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)$  è la costante di errore di velocità



## Passo 1

Determinare  $K$  per soddisfare  $K_v$ , per  $K_v = 12$  deduciamo che  $K$  deve essere uguale 12 data la diretta relazione con l'impostazione del sistema.

Data la definizione della costante di velocità calcoliamo:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{K}{s(s+1)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s+1}$$

che dati i requisiti diventa:

$$K_v = \frac{K}{0+1} = K = 12$$

## Passo 2

Poniamo ora attenzione al margine di fase. Consideriamo quindi il sistema rappresentato dalla fdt nel dominio della frequenza:

$$G(j\omega) = \frac{12}{j\omega(j\omega + 1)}$$

Come vediamo dal diagramma di fase ci mancano  $25^\circ$  di fase per soddisfare i requisiti.

Per raggiungere il requisito potremmo pensare di allineare il picco di massima fase del compensatore ( $\phi_m$ ) con il punto critico.

Questo si traduce con il modificare i parametri del compensatore in modo tale che  $\omega_m$  sia allineato con la frequenza alla quale il sistema ha bisogno di supporto di fase.

**Nota :** Problema: *integrando un compensatore di anticipo al sistema intendiamo aumentare il margine di fase ma allo stesso tempo abbiamo effetti sul guadagno del sistema, i quali, spostano la frequenza di guadagno di crossover.*

La soluzione al problema proposto nell'ultima nota è quella di introdurre un margine di sicurezza: ad esempio invece di mirare ad un aumento di  $25^\circ$  miriamo a uno di  $30^\circ$  in modo da avere 5 gradi di margine di sicurezza.

Il calcolo di  $\phi_m$  sarà quindi dato da:

$$\phi_m = \phi_{pm} - \phi_{uncompensated} + \epsilon = 40^\circ - 15^\circ + 5^\circ$$

Questo ci guida nel settaggio dei parametri del compensatore. Data quindi una fdt del compensatore nella forma:

$$D(s) = \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}}$$

con  $\tau > 0$  e  $\alpha < 1$  si ha che:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(30)}{1 + \sin(30)} = 0.334$$

**Determinare la costante di tempo** Calcoliamo il guadagno del compensatore a  $\omega_m$ :

$$gain = 10 \log \frac{1}{\alpha} = 4.8dB$$

Per ovviare a questo anticipiamo la nuova frequenza di guadagno ( $\omega'_{gc}$ ) crossover che sarà dove il sistema non compensato sarà di  $-4.8dB$ .

Si calcola quindi, trovata la frequenza (nel nostro caso 4.6 radianti/s), la costante di tempo dalla formula:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{1}{\alpha \tau}} = 4.6$$

Il controllore finale sarà quindi:

$$D(s) = \frac{0.376s + 1}{0.128s + 1}$$

### Ottimizzazioni e verifiche

È importante verificare che il compensatori incontri i requisiti di margine di fase senza sacrificare la larghezza di banda del sistema.

Altro...

### 1.30.3 Compensatori di ritardo

Sono usati principalmente per aumentare l'accuratezza allo stato stabile di un sistema di controllo senza diminuire significativamente le performance del transitorio.

#### Principi dei compensatori di ritardo

Sono caratterizzati da fdt del tipo

$$D(s) = \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

dove il polo è più vicino all'origine dello zero ( $\tau > 0$  e  $\beta > 1$ )

#### Grandezza

Il primo angolo si ha in  $\omega = \frac{1}{\beta \tau}$  (in corrispondenza del polo) e risulta in una diminuzione di magnitudine. Il secondo angolo si ha in  $\omega = \frac{1}{\tau}$  (in corrispondenza dello zero) che compensa la diminuzione

#### Fase

Questo controllore introduce un ritardo di fase (toglie fase) in un intervallo che va dal polo allo zero (intervallo di frequenze).

## Progettazione

**Considerazione:** dato che vogliamo aumentare il guadagno del sistema a basse frequenze (in modo da aumentare l'accuratezza ss), mantenendo un margine di fase accettabile, non ci usiamo la parte di ritardo in modo che sia importante per il nostro sistema, per questo quindi non abbiamo bisogno di capire esattamente quando occorre il massimo lag.

Consideriamo per esempio un sistema con una fdt del tipo:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

che possiamo riscrivere come

$$G(j\omega) = \frac{K/4}{j\omega(j\omega+1)(0.25j\omega+1)}$$

e consideriamo i requisiti:

- $\phi_m = 43^\circ$
- $\omega_b = 1.02 \text{ rad/s}$
- $K_v \geq 5$

**Passo 1** Per soddisfare  $K_v = 5$  dobbiamo avere  $K = 20$ , quindi la fdt diventa:

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.25j\omega+1)}$$

**Passo 2** Disegniamo il diagramma di Bode tramite le frequenze di angolo  $\omega = 1$  e  $\omega = 4$

Si ottiene  $\phi_m = 0^\circ$  a  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .

La curva di angolo di fase è quindi:

$$\phi = -90 - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(0.25\omega)$$

per raggiungere i 43 gradi richiesti possiamo considerare di traslare la regione di bassa frequenza del diagramma di Bode verso il basso.

**Passo 3** ...

### Scelta della frequenza di angolo

La linea guida è quella di impostare la frequenza di angolo approssimativamente due ottime sotto la frequenza associata con il desiderato margine di fase (sempre considerando un margine di sicurezza).

Nel nostro esempio un margine di fase di 55 gradi ( $43 + 12$ ) porta a identificare  $0.52 \text{ rad/s}$  come la frequenza critica. Di conseguenza la frequenza di angolo è  $\frac{1}{\tau} = \frac{0.52}{4} = 0.13 \text{ rad/s}$

### Scelta di beta

Una volta stabilita la frequenza di angolo, va trovato  $\beta$ . Nel nostro contesto trovare un'attenuazione di 20dB indica che  $\beta = 10$  dato che  $20 \log \beta$

Quindi infine avremo, trovati  $\tau$  e  $\beta$

$$D(s) = \frac{7.7s + 1}{77s + 1}$$

# Capitolo 2

## Costanzi

### 2.1 Lezione 1 (pagina 1)

Trattiamo ora la rappresentazione in forma di stato (prima la trattavamo tramite la funzione di trasferimento).

#### **Definizione 20 - Sistema in forma normale**

Si definisce in forma normale un sistema descritto, esplicitando la  $y^{(n)}(t)$ , dall'equazione:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F} \left( y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t \right)$$

**Nota:** *Le  $y$  sono le uscite del sistema mentre le  $u$  sono gli ingressi.*

□

Essendo una equazione differenziale di grado  $n$  è difficile da risolvere, preferiamo quindi scrivere  $n$  equazioni di primo grado. Questa forma prende il nome di:

#### **Definizione 21 - Forma di stato**

Rappresentazione equivalente alla forma normale del tipo:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

dove le funzioni sono in realtà vettori di funzioni.

□

#### **Definizione 22 - Stato del sistema**

È dato da  $x(t)$  ed è un vettore di variabili necessarie e sufficienti a descrivere il sistema in ogni istante nel tempo.

□

#### 2.1.1 Proprietà di un sistema dinamico

1. **Causalità:** Un sistema dinamico è detto causale (o proprio) se l'uscita all'istante  $t$  dipende solo dagli ingressi  $x(\tau)$  con  $\tau \leq t$

**Nota:** se  $\tau < t$  allora è **strettamente causale**.

**Nota:** *Un sistema in forma normale è causale se  $n \geq p$  (strettamente se  $>$ ).*

**Nota:** *Un sistema in forma di stato è sempre causale (strettamente se  $y$  non dipende da  $u$ ).*

2. **Stazionarietà o tempo-invarianza:** un sistema dinamico è detto stazionario se a fronte delle stesse condizioni iniziali e degli stessi ingressi le uscite sono invarianti rispetto a traslazioni temporali (=le uscite sono sempre uguali oggi e per sempre per gli stessi ingressi).

**Nota:** *Un sistema in forma normale è stazionario se  $\hat{F}$  non dipende da  $t$ .*

**Nota:** *Un sistema in forma di stato è stazionario se  $f$  e  $g$  non dipendono da  $t$ .*

3. **Linearità:** Un sistema dinamico è detto lineare se  $\hat{F}$  dipende linearmente da  $y$  con le sue derivate e da  $u$  con le sue derivate.

**Nota:** *Un sistema in forma normale è lineare se si può scrivere come:*

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^P \beta_j(t) u^{(j)}(t)$$

*dove  $p$  e  $n$  sono gli ordini, rispettivamente, di ingressi e uscite.*

**Nota:** *Un sistema in forma di stato è lineare se si può scrivere come:*

$$\begin{cases} \dot{X} = f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ y = g(x, u, t) = C(t)x + D(t)u & C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{\ell \times m} \end{cases}$$

**Nota:** *Un sistema è SISO se  $m = \ell = 1$ .*

I sistemi lineari inoltre godono delle proprietà:

1. Omogeneità

2. Sovrapposizione

**Nota:** *Trattando equazioni differenziali notiamo come vale anche il principio di sovrapposizione degli effetti.*

## 2.2 Lezione 2: Passaggio da forma normale a forma di stato e viceversa (pagina 7)

Vogliamo effettuare il passaggio da forma normale a forma di stato (e da forma di stato a forma normale).

### 2.2.1 Caso $p=0$

Scegliendo come stato  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$

Per ogni sistema:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(y, \dots, y^{(n-1)}, u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = f(x, u, t) \\ y = x_1 = g(x, u, t) \end{cases}$$

Per sistemi lineari:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + u(t) \quad \text{con } p=0$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & Id & & \\ 0 & & & \\ -\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

Inoltre le condizioni iniziali sulle  $y$  diventano sulle  $x$ . (?)

### Esempi

Esempio (del Pendolo)

Sistema non lineare

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2} (u - c\dot{\theta} - mgL \sin \theta)$$

$\downarrow \mu=0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{bmatrix} \\ y = x_1 \rightarrow \text{perché } y \text{ ossia l'usita è } \theta \text{ dunque } x_1 \end{cases} = \text{CI: } x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

Esempio (dei carrellini)

Distanze delle pos. di origine

$$m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = F_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = F_2$$

Forme normale

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} (F_1 - c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2)) \\ \frac{1}{m_2} (F_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1)) \end{bmatrix}$$

In questo caso:

$p=0 \quad m=2 \rightarrow \text{ordine max esiste}$

---

$m=2 \quad l=2 \quad n=4$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\text{dim } u \quad \text{dim } y \quad \text{dim } x$

### 2.2.2 Caso $0 < p < n$ per sistemi lineari

Si usa un'equazione ausiliaria:

$$Z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) Z^{(i)}(t) + u(t)$$

Allora per linearità (y cerca la risposta a una combinazione lineare delle derivate di u, Z è la risposta a u) si ha:

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^p \beta_j(t) Z^{(j)}(t)$$

quindi un buono stato potrebbe essere  $X = \begin{bmatrix} Z \\ \vdots \\ Z^{(n-1)} \end{bmatrix}$  in quanto descrive bene l'evoluzione dello stato stesso e dell'uscita.

Si ha quindi:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & Id & & \\ 0 & & & \\ -\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1} & \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} X_i = \begin{bmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

### 2.2.3 Caso $p=n$ per sistemi lineari

...

Quindi le matrici A e B rimangono uguali mentre:

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_n \alpha_0 & \dots & \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_n \end{bmatrix} u$$

#### Esempi

$$\text{1) } \ddot{y} + y = 2u + \dot{u} \rightarrow \ddot{y} = -y + 2u + \dot{u}$$

$m=2 \quad p=1$   
 $m=2 \quad R=1 \quad m=1$

Siamo nel caso  $p < m$  per sistemi lineari

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + [0]u$$

$\downarrow \alpha_0 u \quad \uparrow \alpha_1 u$

Figura 2.1: le alpha in realtà sono, in ordine, 0 e 1

**Nota:** Per realizzare questo esempio vedi equazioni 2.2.2

$m=3$	$p=3$
3) $\ddot{y} = -2\ddot{y} - 3\dot{y} - y + 2u + \dot{u} + 3\ddot{u}$	
$m=3$	$l=1$
$m=1$	
Siamo nel caso $p=m$ per sistemi lineari	
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$	
$y = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$ $\beta_0 - \beta_2 x_0 \quad \beta_1 - \beta_3 x_2 \quad \beta_m u^m$	

### 2.3 Lezione 3: Utilizzo di uno stato arbitrario (pagina 13)

Dobbiamo trovare un modo per poter usare le trasformazioni studiate con qualsiasi stato.

Se  $X$  è lo stato di un sistema allora  $\hat{X} = \phi(x)$  è una rappresentazione equivalente  $\iff \phi$  è biettiva ( $= \exists! \phi_{-1}$ ).

**Nota:** Studiamo solo il caso di  $\phi$  lineari, dunque esprimibili in forma matriciale  $\hat{X} = \phi(x) = Tx$  con  $T \in \mathbb{R}_{n \times n} : \det(T) \neq 0$ .

Vogliamo sapere come cambiano le matrici della forma di stato:

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} = Ax + Bu & \rightsquigarrow & \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = Cx + Du & & y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{array}$$

Per fare questo basta usare la definizione  $\hat{x} = Tx$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= T\dot{x} = TAx + TBu = \underbrace{TAT^{-1}\hat{x}}_{\hat{A}\hat{x}} + \underbrace{TBu}_{\hat{B}u} \implies \hat{A} = TAT^{-1} & \hat{B} = TB \\ y &= Cx + Du = \underbrace{(CT^{-1})\hat{x}}_{\hat{C}\hat{x}} + \underbrace{Du}_{\hat{D}u} \implies \hat{C} = CT^{-1} & \hat{D} = D \end{aligned}$$

## 2.4 Lezione 4: Linearizzazione di un sistema (pagina 16)

Dato un sistema  $\begin{cases} \dot{x} \\ y \end{cases}$  e dati  $\begin{cases} t = t_0 \text{ un istante iniziale} \\ u = \bar{u} \text{ un particolare ingresso} \\ x(0) = x_0 \text{ dalle condizioni iniziali} \end{cases}$  allora  $\tilde{x}$  che soddisfa

$\dot{\tilde{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t_0)$  e  $\tilde{x}(0) = x_0$  è detto **movimento dello stato** e rappresenta come questo varia al fronte della terna di valori specificati sopra,  $\tilde{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t_0)$  è invece il corrispondente movimento dell'uscita.

**Nota:** Nel caso non lineare non è detto che esista che sia unico un  $\tilde{x}$  che soddisfi una terna arbitraria.

**Nota:** Nel caso di sistemi tempo invarianti se  $u = \bar{u}$  è un ingresso costante allora  $\tilde{x}$  che soddisfa le condizioni (come prima) è detto **movimento o stato di equilibrio**.

In particolare perturbando lo stato di equilibrio  $x(t) = \bar{x}(t) + dx(t)$  ottengo

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + d\dot{x} = d\dot{x}(t)$$

dunque la dinamica del movimento perturbato dipende solo dalla dinamica della perturbazione. Allora per Taylor:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u - \bar{u}) \\ &\quad A \quad B \quad \text{sono matrici Jacobiane} \\ y &= g(x, u) \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u - \bar{u}) \\ &\quad C \quad D \end{aligned}$$

La dinamica di un sistema tempo invariante attorno ad uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  per  $\bar{u}$  può essere approssimata con il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = \dot{x} - \dot{\bar{x}} \approx \dot{\bar{x}} + A dx + B du + \dot{\bar{x}} = A \delta x + B \delta u \\ \delta y = y - \bar{y} \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + C dx + D du - g(\bar{x}, \bar{u}) = C \delta x + D \delta u \end{cases}$$

Esempio del pendolo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dare le condizioni di equilibrio eranno:

$$\text{se } u=0 \quad \begin{cases} x_2=0 \\ x_1=0 \vee x_1=\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{se } \frac{u}{mgL} > 1 \quad \begin{cases} x_2=0 \\ 2 \text{ soluzioni} \end{cases}$$

$$\text{Supponiamo: } m=1 \text{ kg} \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2 \quad L=1 \text{ m} \quad c=1 \quad \frac{Nms}{rad}$$

$\bar{u}=5N/m$  è un ingresso di equilibrio? se si linearizzolo

$$\frac{u}{mgL} = \frac{1}{2} \quad \bar{x} = \arcsin\left(\frac{u}{mgL}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{devo trovare le } A, B, C \text{ e } D \text{ di } \begin{cases} dx = Adx + Bdu \\ dy = Cdx + Ddu \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} \cos(x_1) & -\frac{c}{mL^2} \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_1 = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10\sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10\sqrt{3}/2 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (1 \ 0) \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (1 \ 0)$$

$$D = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (0) \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (0)$$

Figura 2.2: Piccolo errore di calcolo nelle due soluzioni di A occhio

## 2.5 Lezione 5: Soluzioni delle equazioni in forma di stato (pagina 20)

Esempio: studio delle soluzioni di equilibrio per il pendolo.

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2} (u - c\dot{\theta} - mgL \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{bmatrix} \\ y = x_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Per trovare le soluzioni di equilibrio si deve imporre  $\dot{X} = 0$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{1}{mL^2}(u - mgL \sin x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \arcsin\left(\frac{u}{gL}\right) \end{cases}$$

Abbiamo dunque vari casi:

- Se  $u = 0$   $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \vee x_1 = \pi \end{cases}$
- se  $\frac{u}{mgL} < 1$   $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2 \text{ soluzioni} \end{cases}$
- se  $\frac{u}{mgL} > 1$  nessuna soluzione

**Nota:** Per sistemi lineari: ...

### 2.5.1 Studio delle soluzioni generiche per sistemi lineari

Dobbiamo risolvere equazioni del tipo:

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

**Caso sistemi SISO con  $\dim(x) = 1$**

$\dot{X} = ax + bu$  è detta forma di Lagrange e ha come soluzione:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + b \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Dimostrazione:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} + b e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} u(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x_0 \alpha e^{\alpha t} + b \alpha e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau} u(\tau) d\tau + b e^{\alpha t} e^{-\alpha t} u(t) \\ &= \alpha (x_0 e^{\alpha t} + b \int_0^t e^{\alpha t - \tau} u(\tau) d\tau) + b u(t) \\ &= \alpha x(t) + b u(t)\end{aligned}$$

Caso sistemi MIMO con  $\dim(x) > 1$

$$X(t) = X_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} \dots$$

Proprietà:

- $(e^M)^{-1}$  esiste sempre e coincide con  $e^{-M}$
- $e^{T^{-1}MT} = T^{-1}e^M T$
- $\frac{\partial e^{Mt}}{\partial t} = M e^{Mt}$

## 2.6 Lezione 6: Concetto di stabilità interna (pagina 24)

**Nota:** Riprende concetti di 2.4

$\tilde{x}(t)$  è un movimento stabile (o marginalmente stabile) per il sistema se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta \implies \|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

ovvero se esiste sempre un range di incertezza sulle condizioni iniziali tale che i movimenti generati da condizioni iniziali appartenenti a questo range restano vicini quanto voglio al movimento  $\tilde{x}$

- $\tilde{X}(t)$  è instabile se non è stabile
- è asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

### 2.6.1 Studio della stabilità di sistemi LTI

Prendiamo un sistema LTI  $\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$  sia  $\tilde{X}$  un suo movimento dello stato per  $\bar{u}$  e  $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$  perturbiamo le sue condizioni iniziali di un certo  $\delta x = x_0 - \tilde{x}_0$  studiando la dinamica del movimento originale  $\tilde{x}$  e di quello perturbato.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{u} \implies \delta\dot{x} = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = Ax - A\tilde{x} = A\delta x \implies \delta x(t) = e^{At}\delta x_0 \\ \dot{x} &= Ax + Bu \end{aligned}$$

Riscrivendo la condizione di stabilità (vedi sopra) si evince che essa dipende solo da  $\delta x(t) = e^{At}\delta x_0$  a prescindere dal movimento  $\tilde{x}$ , dunque per sistemi LTI la stabilità è una proprietà dell'intero sistema (e non del movimento) e dipende solo dalla matrice A.

#### Studio della matrice A

Se A diagonalizzabile  $\iff A = T\Lambda T^{-1} \iff ma = mg \quad \forall \Lambda$  allora  $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$

**Nota:** Con  $\Lambda$  stiamo indicando la matrice (diagonale) degli autovalori di A, con T la matrice degli autovettori (colonne), ma e mg sono le molteplicità.

$$\text{dove } e^{\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \frac{t^k}{k!} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

Dunque  $\delta x(t)$  è una combinazione delle sole funzioni  $e^{\lambda_i t}$ .

Se gli autovalori fossero complessi (e dunque coniugati perché  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ) questo non sarebbe un problema perché le funzioni  $e^{(\sigma+j\omega)t}$  ed  $e^{(\sigma-j\omega)t}$  si combinerebbero come funzioni sinusoidali del tipo  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$  e  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ .

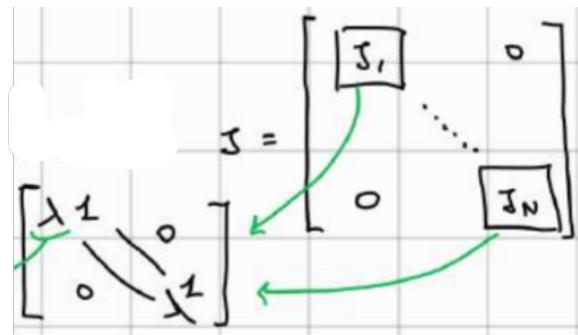
**Nota:** Utile per gli esercizi:

$$\begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \text{ È SIMILE ALLA FORMA REALE } \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Se invece A non è diagonalizzabile (matrice difettiva<sup>1</sup>) si sfrutta il fatto che esiste sempre la scomposizione  $A = QJQ^{-1}$  dove:

- Q è la matrice degli autovettori generalizzati (non ci interessa)
- J è una matrice di forma di Jordan, ossia una matrice diagonalizzabile a blocchi (quadrati) tale che ogni blocco  $\varsigma_i$  è del tipo:

<sup>1</sup>  $ma > mg$  per almeno un  $\lambda$

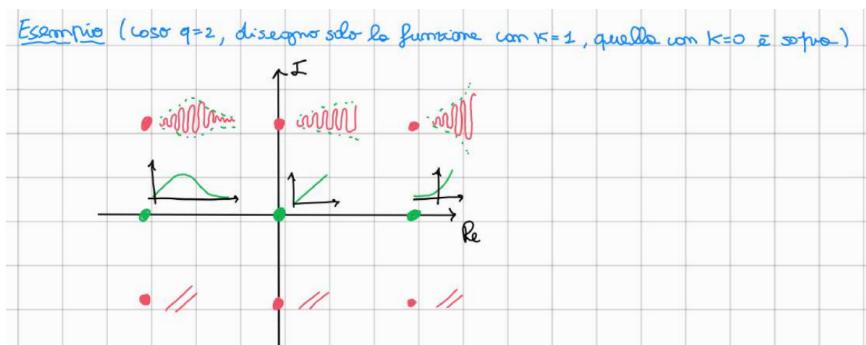
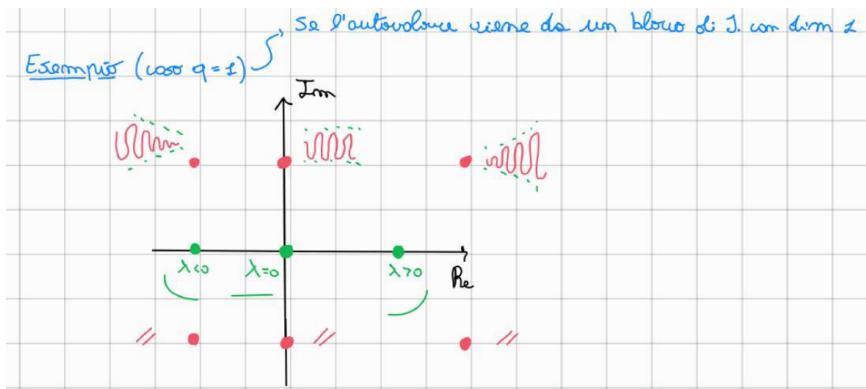


Gli autovalori di  $A$  sono proprio gli elementi diagonali dei vari blocchi di Jordan, la loro ma è uguale al numero di volte che compaiono sulle diagonali e la loro  $mg$  è uguale al numero di blocchi di Jordan in cui compaiono.

Esempi.

### 2.6.2 Criterio di stabilità per sistemi LTI

Dato che sappiamo, a seconda degli autovalori di  $A$ , quali funzioni (modi) si combinano linearmente in  $e^{At}$  possiamo esprimere questi criteri:



STABILITÀ  $\longleftrightarrow$  MODI  $\longleftrightarrow$  AUTOVALORI

Ovvero che questi 3 elementi sono strettamente collegati secondo la seguente tabella:

Stabilità	Modi	Autovalori
Asintotica	$\rightarrow 0$	$Re < 0$
Semplice o Marginale	No $\rightarrow \infty$	No $Re > 0$
	Almeno uno $\neq 0$	Almeno uno $Re = 0$ Tutti quelli con $Re = 0$ hanno $ma = mg$
Instabile	Almeno uno $\rightarrow \infty$	Almeno uno con $Re > 0$ o Almeno uno con $Re = 0$ con $ma \neq mg$

### Esempi

(1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$m\alpha = 5$$

$$mg = 3$$

Modi:

Possiamo pure togliere il K!

$$\text{Blocco 1: } q=3 \quad e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}$$

$$\text{Blocco 2: } q=1 \quad e^{-t}$$

$$\text{Blocco 3: } q=1 \quad e^{-t}$$

$$\Rightarrow \{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$$

$\Rightarrow$  Sistema asintoticamente stabile

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Blocco simile a:

$$\lambda_1 = -1 + 2j \quad m\alpha = mg = 1$$

$$\lambda_2 = -1 - 2j \quad m\alpha = mg = 1$$

$$\lambda_3 = 0 \quad m\alpha = mg = 1$$

Modi:

$$\text{Blocco 1: } e^{-t} \sin(2t), e^{-t} \cos(2t)$$

$$\text{Blocco 2: } 1$$

$\Rightarrow$  Sistema marginalmente stabile

**Nota:**  $q$  indica la dimensione del blocco di Jordan.

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Blocco simile a:

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 0 \\ 0 & -2-J \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$

$\lambda_2 = -2 + J \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_3 = -2 - J \quad m\omega = mg = 1$

Modi:

Blocco 1:  $e^{-2t}, te^{-2t}$

Blocco 2:  $e^{-2t} \sin(t), e^{-2t} \cos(t)$

$\Rightarrow$  Sistema asintoticamente stabile

$$\textcircled{4} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_2 = J \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_3 = -J \quad m\omega = mg = 1$

Modi:

Blocco 1: 1

Blocco 2:  $\sin(t) \cos(t)$

Figura 2.3: Il 4 è marginalmente stabile

$$\textcircled{5} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

simile a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & J \\ 0 & -3 \\ -3 & 1 \\ 0 & -J \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 0 \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$

$\lambda_2 = J \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$

$\lambda_3 = -J \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$

Modi:

Blocco 1:  $1, t$

Blocco 2:  $\text{cost} \sin t$

$t \text{cost} t \sin t$

$\Rightarrow$  Sistema instabile (pseudomarginalmente)

$$\textcircled{6} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & \\ & & -2 & 1 & & \\ & & & -2 & 0 & \\ & & & 0 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 5 \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_2 = 1 + 2J \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_3 = 1 - 2J \quad m\omega = mg = 1$

$\lambda_4 = -2 \quad m\omega = 3 \quad mg = 1$

Modi:

Blocco 1:  $e^{st}$

Blocco 2:  $e^t \sin(2t) e^t \cos(2t)$

Blocco 3:  $e^{-2t} t e^{-2t} t^2 e^{-2t}$

$\Rightarrow$  Sistema instabile (esponenzialmente)

## 2.7 Lezione 7: Stabilità di un movimento per un sistema non lineare (pagina 32)

Studiamo il sistema linearizzato (detto LTI associato):

Dato  $\bar{x}$  stato di equilibrio corrispondente all'ingresso  $\bar{u}$  per il sistema non lineare tempo invariante  $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$  allora:

- LTI associato asintoticamente stabile  $\Rightarrow \bar{x}$  asint. stab.
- LTI associato instabile  $\Rightarrow \bar{x}$  instabile
- (marginalmente stabile non implica nulla)

**Esempio del pendolo** Le condizioni di equilibrio erano:

- $(\frac{\pi}{6}, 0)$ : Dal sistema linearizzato con A trovato 2.4 ci interessa solo il segno della parte reale delle radici del polinomio caratteristico di A. Troviamo che è  $< 0$  quindi il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e dunque anche il movimento lo è.
- $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ : solito ragionamento: troviamo che sono una  $> 0$  e una  $< 0$  dunque il sistema linearizzato è instabile e quindi anche il movimento.

### 2.7.1 Criterio di Lyapunov

Serve per studiare la stabilità di uno stato di un sistema non lineare il cui sistema LTI associato è marginalmente stabile.

**Definizione 23 - Criterio di Lyapunov**

Sia  $V$  una funzione :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua, questa è definita *positiva* (o *negativa*) in  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  se  $V(\tilde{x}) = 0$  ed inoltre

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in B(\tilde{x}, \delta), x \neq \tilde{x} \quad V(x) > 0 \quad (\text{o } V(x) < 0)$$

valgono i seguenti risultati:

- se esiste  $V(x)$  definito positivo in  $\bar{x}$  tale che  $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x)$  semi definita positiva in  $\bar{x}$  allora  $\bar{x}$  è un punto di **equilibrio stabile** del sistema.
- se esiste  $V(x)$  definito positivo in  $\bar{x}$  tale che  $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x)$  definita negativa in  $\bar{x}$  allora  $\bar{x}$  è un punto di **equilibrio asintoticamente stabile** del sistema.
- se esiste  $V(x)$  definito positivo in  $\bar{x}$  tale che  $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x)$  definita positiva in  $\bar{x}$  allora  $\bar{x}$  è un punto di **equilibrio instabile** del sistema.

□

Per scegliere quale  $V(x)$  usare non c'è uno standard, di solito si usano funz. che descrivono l'energia di un sistema o forme quadratiche:  $V(x) = x^T M x$ .

**Nota:** Equazione definita positiva (o negativa) in  $x = 0$  se e solo se  $M = M^T$  definita positiva (o negativa)

**Nota:** Una matrice è definita positiva se tutti i minori principali di testa sono  $> 0$  (criterio di Sylvester)

### Esempio Definizione Wikipedia di forma quadratica definita

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + u \end{bmatrix} \quad \text{Studiare l'equilibrio per } \bar{u}=0$$

$f(x, \bar{u}) = 0$  sicuramente ha come soluzione  $\bar{x} = (0, 0)$

Studiando la stabilità del movimento di equilibrio  $\bar{x}$  corrispondente all'ingresso  $\bar{u}$  (ci interessa A della linearizzazione)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + x_2^2 & -2x_2 + 2K_2 \\ x_2 - 2x_1 x_2 & x_1 - 3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 0 \quad m_\lambda = 2 \quad m_f = 2$$

questa è marginalmente stabile, dunque non possiamo dire nulla su  $\bar{x}$ , proviamo allora ad applicare Lyapunov:

Figura 2.4: Studio della stabilità del movimento di equilibrio corrispondente all'ingresso

Supponiamo  $V(x) = x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$  → è una scelta casuale (DP)

$M$  è DP dunque  $V(x)$  è DP in  $x=(0,0)$

$V(x) = \frac{1}{2} x^T J x = \frac{1}{2} x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  Sappiamo che dim=2

$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} (V(x)) = \frac{1}{2} (2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2)$   $x_1 = x_1(t)$  f. composta

$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} (V(x)) = \frac{1}{2} (2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2)$  le sostituisco dello stato  $\dot{x}$

$$\begin{aligned} &= x_1 (-x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2) + x_2 (x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2) \xrightarrow{u=0} \\ &= -x_1^4 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^2 - x_2^4 - x_1^2 x_2^2 \\ &= -x_1^4 - x_2^4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  È definita negativa in  $\bar{x}$  in  $(0,0)$

$\Rightarrow \bar{x}$  è un punto asintoticamente stabile per il sistema NL

Se mi usivo marginalmente stabile potevo solo dire che non è instabile perché magari con un'altra funzione di Lyapunov veniva asintoticamente stabile

#### 2.7.2 Criterio di Lyapunov per sistemi lineari

Alternativa allo studio di  $e^{At}$  nel caso in cui  $u = 0$ .

Data  $\dot{x} = Ax + Bu$  dato  $u = 0$  si ha  $\dot{x} = Ax$ . Un movimento di equilibrio sicuramente è  $x = (0, \dots, 0)$ : studiare la stabilità di questo movimento equivale a studiare la stabilità del sistema.

Scegliamo  $P = P^T$  definita positiva, allora  $V(x) = x^T Px$  e

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx$$

### Teorema 2

Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se  $\forall Q = Q^T$  definita positiva  $\exists P = P^T$  definita positiva :  $A^T P + PA = -Q$   $\square$

### Esempio .

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2\end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Bprendo una qualsiasi  $Q = Q^T$  DP e ricavo  $P$  da  $A^T P + PA = -Q$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

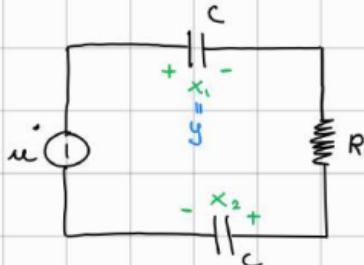
$$\begin{bmatrix} -2a + 4b & -2b + 4c \\ -3a - 2b & -3b - 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a + 4b & -3a - 2b \\ -2b + 4c & -3b - 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a + 4b - 2a + 4b = -1 \\ -2b + 4c - 3a - 2b = 0 \\ -3a - 2b - 2b + 4c = 0 \\ -3b - 2c - 3b - 2c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -4a + 8b = -1 \\ -3a - 4b + 4c = 0 \\ -3a - 4b + 4c = 0 \\ -6b - 4c = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1+8b}{4} = \frac{9}{32} \\ c = \frac{1-6b}{4} = \frac{29}{128} \\ b = \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{128} \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & 29 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{è def. positiva} \Rightarrow \text{sistema asintoticamente stabile}$$

## 2.8 Lezione 8 (pagina 39)

Dato il sistema:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{CR} (x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{CR} (x_1 + x_2 - u) \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_1 = x_1 + x_2$$

Supponiamo di fare un cambio di stato  $\hat{x}_2 = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\frac{2}{RC} (x_1 + x_2 - u) = -\frac{2}{RC} (\hat{x}_1 - u) \rightsquigarrow \text{è influenzabile} \\ \dot{\hat{x}}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0 \rightsquigarrow \text{Non è influenzabile direttamente da } u! \end{cases}$$

$$y = x_1 = \frac{1}{2} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

Manipolando  $u$  possiamo sempre raggiungere lo stato desiderato? (spoiler no lol)

Vogliamo trovare un modo di sapere quali variabili di stato sono influenzabili da  $u$  e quali no. Questa viene detta la proprietà di **raggiungibilità**.

**Definizione 24 - Sistema raggiungibile**

Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato  $\tilde{x}$  si dice raggiungibile se esistono:  $t^* > 0$ ,  $\tilde{u}(t)$  definito per  $0 \leq t \leq t^*$  tali che se  $\tilde{x}_f(t)$  definito per  $0 \leq t \leq t^*$  è il movimento forzato generato da  $\tilde{u}(t)$  allora  $\tilde{x}_f(t^*) = \tilde{x}$ .

**Nota:** In altre parole la capacità di portare un sistema dall'origine ad uno stato qualsiasi in tempo finito.

□

Questa proprietà divide gli stati in due categorie:

- Stati raggiungibili:  $X_R$
- Stati non raggiungibili  $X_{NR}$

**Nota:** Questa proprietà non dipende dall'uscita, si parla infatti anche di "raggiungibilità della coppia  $AB$ ".

**Definizione 25 - Sistema completamente raggiungibile**

Sistema per il quale  $X_{NR} = \emptyset$

□

**Teorema 3**

Un sistema lineare in forma di stato è completamente raggiungibile se e solo se  $M_r = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  è tale che  $\text{rank}(M_r) = n = \max$  dove  $M_r$  è la matrice di raggiungibilità.

□

Se il sistema non è completamente raggiungibile isoliamo le porte non raggiungibili:

- chiamo  $n_r = \text{rank}(M_r)$  e dato che il sistema non è completamente raggiungibile sicuramente  $n_r < n$
- effettuo un cambio di variabili tramite la matrice  $T_r$ :

$$\hat{x} = T_r x \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

tale che le matrici  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  vengano della seguente forma:

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \hat{B} = T_r B = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Può anche essere zero*

*Borsa sottospazio di raggiungibilità*

$\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{m_n \times m_m}$   
 $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{m_n \times m_n}$

- $T_r$  viene scelta selezionando  $n_r$  colonne linearmente indipendenti dalla matrice  $M_r$  (ogni stato raggiunto è infatti combinazione lineare di queste colonne).
- $T_r^{-1}$  è invece composta dai multipli delle colonne selezionate affiancate da  $n - n_r$  colonne linearmente indipendenti.

Allora posso partizionare anche  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b + \hat{B}_a u \\ \dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b \end{cases}$$

**Nota:** Nel secondo membro del sistema non compare  $u$  quindi è la parte non raggiungibile.

**Nota:**  $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$  è triangolare a blocchi:

$$\text{autov}(\hat{A}) = \text{autov}(A) = \text{autoval}(\hat{A}_a) + \text{autoval}(\hat{A}_b)$$

**Esempio** .

### Esempio (riprendiamo il circuito)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$y = x_1$

$(A, B)$  è completamente raggiungibile?

$$M_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \end{bmatrix} \quad \text{rank}(M_R) = 1 \Rightarrow \text{sistema non completamente raggiungibile}$$

Quale/parti dello stato non sono raggiunte?

$$T_R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Salvi: io, non endip} \\ \text{e facili per fare i valori} \end{array} \rightarrow T_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{stessa trasf. dell'origine} \\ \hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \end{array}$$

Moltiplici scalari di  $\frac{1}{RC}$

Allora  $\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - u) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

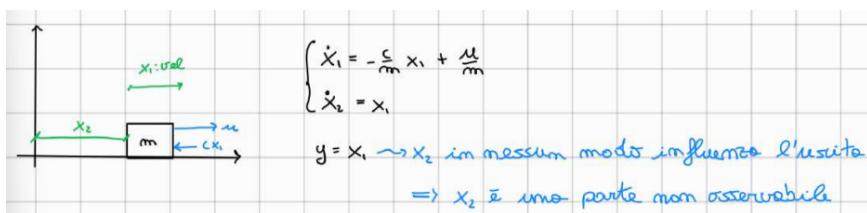
$A_a \sim -\frac{2}{RC}$  outav. parte raggiungibile  
 $A_b$  outav. parte non raggiungibile  
 Lo spazio grigio

Per sistemi LTI il concetto di raggiungibilità coincide con quello di **controllabilità** ovvero la capacità di portare il sistema da uno stato qualsiasi all'origine.

Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile (ovvero che si verifica che  $\text{Re}\{\lambda \text{ non controllabile}\} < 0$ ) il sistema si dice **stabilizzabile**.

Per un sistema **completamente controllabile** esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di spostarsi da uno stato ad un altro.

## 2.9 Lezione 9: Osservabilità (pagina 44)



Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato  $\tilde{x} \neq \vec{0}$  si dice **non osservabile** se:  $\forall t^* > 0$  finito l'evoluzione libera dell'uscita  $y_e$  generata da  $\tilde{x}$  è tale che  $y_e(t) = 0 \forall t \in \{0, t^*\}$

**Nota:** In altre parole uno stato è non osservabile se analizzando un qualsiasi tratto dell'uscita libera  $y_e(t)$  generata da  $\tilde{x}$  non riesco a distinguerlo dall'uscita libera generata dall'origine  $x = \vec{0}$

Visto che  $y_e(t) = Ce^{At}x_0$  ci rendiamo conto che B e D non hanno alcun ruolo rispetto all'osservabilità. Questa proprietà divide gli stati in due categorie:

- Osservabili:  $X_O$
- Non osservabili:  $X_{NO}$

**Nota:** Questa proprietà non dipende dall'ingresso, si parla infatti anche di osservabilità della coppia  $AC$ .

### Definizione 26 - Completamente osservabile

Un sistema per il quale  $X_{NO} = \emptyset$ . □

#### Teorema 4

Un sistema lineare in forma di stato è completamente osservabile **se e solo se**

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

è tale che  $\text{rank}(M_o) = n = \max$  □

Se il sistema non è completamente osservabile si può pensare di isolare la parte non osservabile

- chiamo  $n_r = \text{rank}(M_o)$  e dato che il sistema non è completamente osservabile sicuramente  $n_o < n$
- effettuo un cambio di variabili tramite la matrice  $T_r$ :

$$\hat{x} = T_r x \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

tale che le matrici  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$  vengano della seguente forma:

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ob} & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{C} = T_r C = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{C}_a \in \mathbb{R}^{l \times m_o}$   
 $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{m_o \times m_o}$

- $T_r^{-1}$  viene scelta in questo modo:

$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ob} & \hat{A}_b \end{bmatrix}$	
Base sottospazio di osservabil.	
$m_o$ vettori lin. indipendent.	$m - m_o$ vettori che compongono una base del $\text{Ker}(M_o)$ (o loro multipli scalari)

Allora posso partizionare anche  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_n}$$

$\hat{y} = \hat{C}_a \hat{x}_a \Rightarrow \hat{x}_b$  non influenza su  $y$ : è la parte non osservabile

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a \\ \hat{x}_b = \hat{A}_{ob} \hat{x}_a + \hat{A}_b \hat{x}_b \end{array} \right.$$

**Nota:**  $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix}$  è triangolare a blocchi:

$$\text{autov}(\hat{A}) = \text{autov}(A) = \text{autoval}(\hat{A}_a) + \text{autoval}(\hat{A}_b)$$

dove gli  $\text{autoval}(\hat{A}_a)$  sono detti **autovalori parte osservabile** mentre  $\text{autoval}(\hat{A}_b)$  sono detti **autovalori parte non osservabile**

Riprendendo l'esempio iniziale .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m}x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  già in forma giusta  
 $\Rightarrow$  sicuramente  $M_0$  non è di rango massimo

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_0) = 0 \rightarrow \text{rank}(M_0) = 1 \neq 2 (\text{max})$$

## 2.10 Lezione 10: Legame tra la forma di stato e la funzione di trasferimento (pagina 47)

Ricordando che la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

allora il sistema in forma di stato diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \dots sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s)(sI - A) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Ricordando che

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

C.I. Evoluzione forzata

L'unico che mi interessa per calcolare  $G(s)$  ( $x(0)=0$ )

$$(2) \dots Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$\text{Allora } Y(s) = \left( C(sI - A)^{-1}B + D \right) U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\text{Ri-writemolo che } M^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det(M)} \sim \text{cof}^T(M) : (\text{cof}(M))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

*Tengo niente c e u i*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)B + D}{\det(sI - A)} = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D \pi_A(s)}{\pi_A(s) \sim \text{Pd. costanti di 1}}$$

Ha elementi di grado  $m-1$

$\downarrow$   
max grado  
 $m-1$

grado esattamente  $m$

$$\text{dove } C \text{adj}(sI - A)B + D \pi_A(s), \text{ allora: } \begin{aligned} &(\text{Ricordo che la f. di traz.} \\ &\text{può essere una matrice}) \end{aligned}$$

- Il sistema è causale se  $\deg(\text{denom}) \geq \deg(\text{num})$

- Se  $D \neq 0$  allora  $\text{grado}(\text{num}) = \text{grado}(\text{den})$  infatti  $D \neq 0$  è equivalente a dire che il sistema è proprio ma **non** strettamente.

- In generale i poli della funzione di trasferimento sono un sottinsieme degli autovalori di  $A$  (eventuali cancellazioni (?)

## 2.11 Lezione 11 (pagina 50)

Un sistema può essere sia non completamente osservabile sia non completamente raggiungibile, è possibile dimostrare che esiste sempre una scomposizione, detta **scomposizione di Kalman**, che porta il sistema in una forma che evidenzia tutte le parti raggiungibili e non, osservabili e non, detta **forma canonica**:

$$\hat{x} = T_k x$$

Kilmann

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u \\ \hat{y} = \hat{C} \hat{x} + D u \end{cases}$$

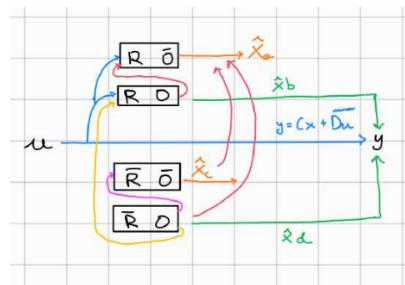
Parte raggiungibile

con  $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}$      $\hat{A} = \begin{bmatrix} A_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & \hat{A}_{ca} & \hat{A}_{cb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{dd} \end{bmatrix}$      $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$      $\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$

Parte osservabile

Nota che gli autovettori sono separati si può studiare la stabilità delle singole parti.

- $\hat{x}_b$  parte completamente osservabile e raggiungibile
- $\hat{x}_a$  parte raggiungibile ma non osservabile
- $\hat{x}_d$  parte osservabile ma non raggiungibile
- $\hat{x}_c$  parte né osservabile né raggiungibile



Riprendiamo la soluzione  $y(t)$  scritta con  $\hat{x}$  in forma canonica:

$$y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$\downarrow$$

$$Y(s) = \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{x}_0 + [\hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} + D] U(s)$$

*L. di trasferimento  $G(s)$*

Come diventa  $G(s)$  usando le matrici che abbiamo ricavato prima?

Innanzitutto  $\hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} = [0 \ \hat{C}_b \ 0 \ \hat{C}_d] \begin{bmatrix} e^{\hat{A}_a(t-\tau)} & * \\ * & e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \\ 0 & e^{\hat{A}_c(t-\tau)} \\ 0 & e^{\hat{A}_d(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= [0 \ \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \ * \ *] \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b$$

$$\Rightarrow \hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b$$

Allora  $y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau) d\tau + D u(t)$

dunque  $G(s) = \hat{C}_b (sI - \hat{A}_b)^{-1} \hat{B}_b + D$

$\rightarrow$  Dipende solo dalla parte completamente osservabile e raggiungibile!

$\Rightarrow$  I famosi poli di  $G(s)$  sono proprio gli autovetori di  $\hat{A}_b$

Studiare le proprietà del sistema (IMPORTANTE)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- Stabilità:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$  asintoticamente stabile (vedi tabella 2.6.2, possiamo quindi già dire che è anche BIBO stabile).
- Raggiungibilità:

$$M_r = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\text{rank}(M_r) = 1 \neq 2$  (max) e quindi è non completamente raggiungibile ( $\lambda = -1$  porta raggiungibile,  $\lambda = -2$  porta non raggiungibile).

- Osservabilità:

$$M_o = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

dove  $\text{rank}(M_o) = 2$  (max) e quindi è completamente osservabile.

- Funzione di trasferimento: possiamo subito dire che

$$G(s) = \frac{\deg(\text{Num}) = 0}{\deg(\text{Den}) = 1 \rightarrow (s+1)}$$

**Nota:** Grado del denominatore dato dalla dimensione porte completamente osservabili e raggiungibili

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D^{\circ} \\ (sI - A) &= \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cof}^T(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \\ \det(sI - A) &= (s+1)(s+2) \rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ \rightarrow C(sI - A)^{-1} &= \left[ \frac{2}{s+1} \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)} \right] \rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2}{s+1} \end{aligned}$$

## 2.12 Lezione 12: Ispezione diretta della completa raggiungibilità (pagina 54)

Vogliamo capire se ci sono alcuni casi in cui la completa raggiungibilità può essere valutata per ispezione diretta delle matrici  $A$  e  $B$ .

Partiamo dal caso di un sistema SISO con  $A$  diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_r = \left[ \begin{array}{c|cc|c} b_1 & \lambda_1 b_1 & & \lambda_m b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & \lambda_m b_m & \cdots & \lambda_m b_m \end{array} \right]$$

$$\text{rank}(M_r) = \text{max} \iff \begin{cases} B \text{ non ha elementi nulli} \\ \lambda \text{ sono tutti diversi} \end{cases}$$

Generalizziamo ora al caso di un sistema MIMO con  $A$  in forma di Jordan.

### Teorema 5 Lemma PBH per la raggiungibilità

La coppia  $A, B$  è completamente raggiungibile se e solo se  $\text{rank}(P(\lambda)) = \max \forall \lambda \in \mathbb{C}$   
dove  $P(\lambda) := [\lambda I - A \mid B]$   $\square$

**Nota :** Osservazione: Per  $\lambda_i$  non autovalore di  $A$   $\text{rank}(\lambda I - A) = \max$ , per  $\lambda_i$  autovalore di  $A$   $\text{rank}(\lambda I - A) \neq \max$

Dimostrazione .

Dimostrazione  $\Leftarrow$

Supponiamo che esista  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ :  $\text{rank}(P(\lambda_i)) < \max$  (cm)

Allora  $\exists q \neq 0 \in \mathbb{C}^m$ :  $q^T P(\lambda_i) = q^T [\lambda_i I - A \mid B] = 0 \quad | q \in \text{Ker}(P(\lambda_i))$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^T B = 0 \\ q^T A = \lambda_i q^T \end{cases}$$

dunque, post-moltiplicando iterativamente la seconda eq. per  $A^k B$  ottengo:

$$q^T A B = \lambda_i q^T B = 0 \quad k=0$$

$$q^T A^2 B = \dots = q^T B = \dots$$

$$q^T A^k B = \dots = q^T B = \dots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$q^T A^{m-1} B = \lambda_i q^T A^m B = 0 \quad k=m-1$$

$$\Rightarrow q^T [B \mid AB \dots A^{m-1} B] = q^T M_n = 0 \quad \text{con } q \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(M_n) < \max$$

Riprendiamo il caso che stavamo studiando:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{di Jordan comp block}} B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & & & \\ B_{1,2} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_{1,m_1} & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dim blocco 1}}$$

f di Jordan comp block

Allora:

- Per  $\lambda_i$  max autovalore  $\text{rank}(M_n) = \max$
- Per  $\lambda_i$  autovalore si ottengono tutte righe nulle (in  $\lambda_i I - A$ )  
quanti sono i blocchi di Jordan corrispondenti a  $\lambda_i$  ( $= mg$ )  
[sono quelli con solo il  $\lambda$  senza  $I + \epsilon$  a fianco]

Affinché  $P(\lambda_i) = [\lambda_i I - A \mid B]$  abbia rango massimo  $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}$  allora  
tutti i  $B_{j,m_j}$  dei blocchi di Jordan devono essere  
linearmente indipendenti.  
 $\Rightarrow$  Se un sistema SISO ha un  $\lambda$  con  $mg > 1$  non è comp. raggiung.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & -1 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 2 & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 2 & 1 & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 3 & 2 & \\ 0 & 1 & \\ 3 & 2 & \\ 3 & 1 & \end{bmatrix}$$

✓                    X

### 2.12.1 Ispezione diretta della completa osservabilità

#### Teorema 6 Lemma PBH per l'ossevabilità

La coppia  $A, C$  è completamente osservabile se e solo se  $\text{rank}(P(\lambda)) = \max \forall \lambda \in \mathbb{C}$  dove

$$P(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

□

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

$$C = [C_{1,1} \dots C_{1,m_1} \mid \dots \mid C_{p,1} \dots C_{p,m_p}]$$

Allora affinché  $P(\lambda_i) = \left[ \frac{\lambda_i I - A}{C} \right]$  abbia rango massimo  $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}$  tutte le colonne  $C_{i,1}$  dei blocchi corrispondenti a  $\lambda_i$  devono essere linearmente indipendenti. Se quindi un sistema SISO ha un  $\lambda$  con  $mg > 1$  non è completamente osservabile.

### 2.13 Lezione 13: Legame tra la funzione di trasferimento e la forma di stato (passaggio inverso) (pagina 58)

Ci aspettiamo di ottenere infinite soluzioni (infinte scelte equivalenti delle variabili di stato).

Li aspettiamo di ottenere infinite soluzioni (infinte scelte equivalenti delle variabili di stato)

$$G(s) = \frac{N_{G(s)}}{D_{G(s)}} = \frac{\overset{\text{tendo con } s^m \text{ (dopo tutto il resto)}}{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}}{s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0} \quad \begin{array}{l} \text{Forma più generale} \\ (\text{consideriamo } N_{G(s)} \leq D_{G(s)}) \end{array}$$

$$= \frac{\hat{B}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \hat{B}_0}{s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0} + \hat{B}_m \quad \text{dare } \hat{B}_i = B_i - B_m d_i$$

### 2.13.1 Prima rappresentazione possibile: forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -d_0 & \dots & -d_{m-1} & 0 & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 & \dots & \hat{B}_{m-1} \end{bmatrix} \quad D = \hat{B}_m$$

$\Rightarrow$  La complete assorribilità dipende solo dai polinomi o filtri comuni tra  $D$  e  $N$

### 2.13.2 Seconda rappresentazione possibile: forma canonica di osservabilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_{m-1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \hat{B}_m$$

$\Rightarrow$  La complete raggiungibilità dipende solo dai polinomi o filtri comuni tra  $D$  e  $N$

Esempio .

$$M\ddot{y} = -c\dot{y} - Ky + u \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Forma normale}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 & x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} u \end{bmatrix} \\ \dot{x}_2 &= 1 & y = [1 \ 0] x + 0u \end{aligned} \right\} \text{Forma di stato}$$

$$s^2 M Y(s) + sC Y(s) + K Y(s) = U(s) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Funzione di trasferimento}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \zeta_K s + K_M}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Forme canoniche raggiungibili}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{M} \\ 1 & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Forme canoniche osservabili}$$

### 2.13.3 Forma minima

Un sistema completamente raggiungibile ed osservabile è detto in forma minima; ossia non è possibile utilizzare un numero inferiore di variabili di stato per descrivere la stessa relazione tra ingresso e uscita.

**Nota:** Se avessi parti non raggiungibili o osservabili potrei buttarle via nello studio della relazione tra ingresso e uscita.

Per sistemi in forma minima la BIBO stabilità implica la stabilità interna asintotica.