Riassunto variabili aleatorie

Francesco Bozzo

26 aprile 2019

V.a. bernoulliana X $\sim$ Ber(p)

Si utilizza per definire un singolo esperimento aleatorio. X rappresenta il successo o il fallimento, che possono rispettivamente avvenire con probabilità p e $1-p$.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 1-p & \text{per } x = 0 \\ p & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = p$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = p(1-p)$

V.a. geometrica X $\sim$ Geo(p)

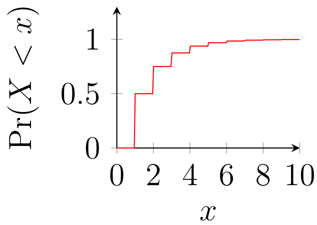
X descrive il numero totale di prove n necessarie prima che avvenga il primo successo. Ogni prova è stocasticamente indipendente dalle altre e la probabiltà p che avvenga il singolo successo è costante.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{per } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Funzione di distribuzione

$$\Pr(X < x) = 1 - (1-p)^{[x]}$$



Teorema (assenza di memoria)**.** *$Pr(T = m + n | T > m) = Pr(T = n)$*

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

Varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

V.a. binomiale X $\sim$ Bin(n, p)

X rappresenta la variabile che descrive il numero di successi x su n prove totali, con probabilità p.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = np$

Varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = np(1-p)$

V.a. binomiale negativa X $\sim$ NeBin(r, p)

X descrive il numero totale di prove affinché avvengano r successi, ciascuno con probabilità p.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & \text{per } x = r, r+1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema. *$X \sim NeBin(r, p)$, $Z \sim Bin(n, p)$ $\implies$ $Pr(Z \geqslant r) = Pr(X \leqslant n)$*

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p} - n$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = n\frac{1-p}{p^2}$

V.a. di Poisson X $\sim$ Poisson(λ)

X descrive il numero di successi di un evento, quando il numero prove m tende ad infinito ed il prodotto mp è una costante. Ovvero mediamente si verificano un numero di successi λ.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \lambda$

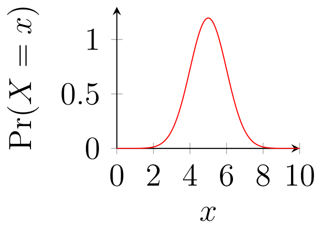
Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda$

V.a. di Gauss o normale X $\sim$ N(μ, σ)

Si definisce μ il parametro di *posizione* e σ il parametro di *scala*. Si noti che non esiste un'espressione analitica per la funzione di distribuzione (si usino le *tavole di Sheppard*).

Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Teorema (standardizzazione delle variabili aleatorie). $X \sim N(\mu, \sigma) \implies z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Teorema. $Z \sim N(0,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+ \implies X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma)$

Teorema. $X \sim N(\mu, \sigma) \implies Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma)$

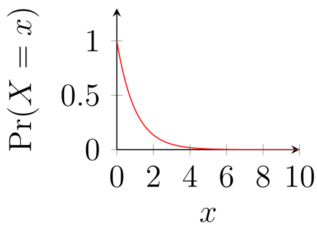
Speranza $\mathbb{E}(X) = \mu$

Varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2$

V.a. esponenziale X $\sim$ Exp(λ)

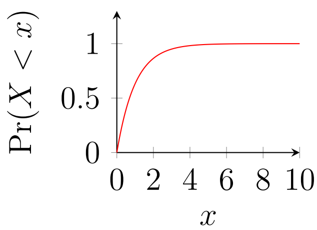
Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{per } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Funzione di distribuzione

$$\Pr(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{per } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Teorema (assenza di memoria). $Pr(X > a + b | X > a) = Pr(X > b)$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

V.a. uniforme X $\sim$ Unif(a, b)

Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } x \in (a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}$

Varianza $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$