

RIASSUNTO VARIABILI ALEATORIE

FRANCESCO BOZZO

27 aprile 2019

V.a. bernoulliana $X \sim \text{Ber}(p)$

Si utilizza per definire un singolo esperimento aleatorio. X rappresenta il successo o il fallimento, che possono rispettivamente avvenire con probabilità p e $1 - p$.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{per } x = 0 \\ p & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = p$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = p(1 - p)$

V.a. geometrica $X \sim \text{Geo}(p)$

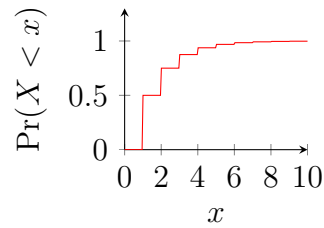
X descrive il numero totale di prove n necessarie prima che avvenga il primo successo. Ogni prova è stocasticamente indipendente dalle altre e la probabilità p che avvenga il singolo successo è costante.

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{per } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Funzione di distribuzione

$$\Pr(X < x) = 1 - (1-p)^{[x]}$$



Teorema (assenza di memoria). $\Pr(T = m + n | T > m) = \Pr(T = n)$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

V.a. binomiale $X \sim \text{Bin}(n, p)$

X rappresenta la variabile che descrive il numero di successi x su n prove totali, con probabilità p .

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = np$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = np(1-p)$

V.a. binomiale negativa $X \sim \text{NeBin}(r, p)$

X descrive il numero totale di prove affinché avvengano r successi, ciascuno con probabilità p .

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & \text{per } x = r, r+1, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema. $X \sim \text{NeBin}(r, p)$, $Z \sim \text{Bin}(n, p) \implies \Pr(Z \geq r) = \Pr(X \leq n)$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p}$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = n \frac{1-p}{p^2}$

V.a. di Poisson $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

X descrive il numero di successi di un evento, quando il numero prove m tende ad infinito ed il prodotto mp è una costante. Ovvero mediamente si verificano un numero di successi λ .

Funzione di probabilità

$$\Pr(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \lambda$

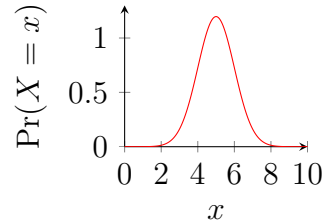
Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \lambda$

V.a. di Gauss o normale $X \sim \text{N}(\mu, \sigma)$

Si definisce μ il parametro di *posizione* e σ il parametro di *scala*. Si noti che non esiste un'espressione analitica per la funzione di distribuzione (si usino le *tavole di Sheppard*).

Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Teorema (standardizzazione delle variabili aleatorie). $X \sim N(\mu, \sigma) \implies z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Teorema. $Z \sim N(0, 1), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \implies X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma)$

Teorema. $X \sim N(\mu, \sigma) \implies Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma)$

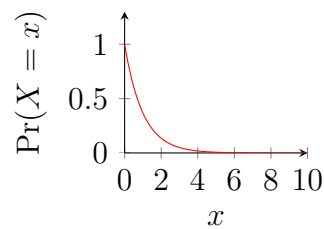
Speranza $\mathbb{E}(X) = \mu$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \sigma^2$

V.a. esponenziale $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

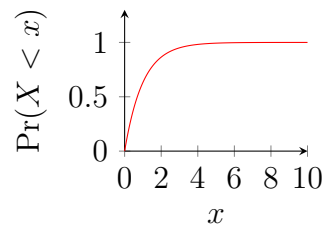
Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Funzione di distribuzione

$$\Pr(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Teorema (assenza di memoria). $\Pr(X > a + b | X > a) = \Pr(X > b)$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

V.a. uniforme $X \sim \text{Unif}(a, b)$

Funzione di densità

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } x \in (a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Speranza $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}$

Varianza $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$