



Elaborato finale per il conseguimento  
della Laurea in Ingegneria aerospaziale

## Analisi del problema di Lambert e applicazione ai trasferimenti interplanetari: studio di una missione Terra-Marte

Candidato: Francesco Caroletta  
Matricola: 2064179

Relatore: prof. Alessandro Zavoli  
SSD: ING-IND/03

**Abstract.** In questo lavoro si analizza il problema di Lambert e la sua applicazione nei trasferimenti interplanetari, con focus al trasferimento Terra - Marte. Dopo un'introduzione teorica e una sintesi dei principali algoritmi risolutivi, è stato sviluppato un modello numerico basato sul toolkit SPICE e sul risolutore di Lambert della libreria pykep, utilizzato per analizzare il costo e le finestre di lancio ottimali. I risultati, confrontati con i dati in letteratura relativi alla finestra di lancio del 2005 e con dati reali della missione NASA Perseverance, mostrano un buon accordo e confermano l'efficacia del metodo come strumento di mission design preliminare.

### 1. Introduzione

Il problema di Lambert è un problema storicamente e applicativamente rilevante nell'ambito spaziale. Consiste nel determinare l'orbita kepleriana necessaria per collegare due punti in un tempo prefissato, consentendo di ricavare la traiettoria e le velocità iniziali e finali per il trasferimento. È nato sotto il nome di *problema di Gauss* nel primo Ottocento come modo per determinare l'orbita di Ceres conoscendo solo l'ascensione retta e la declinazione per tre osservazioni. Il problema è poi diventato famoso attrattendo grandi matematici come Lagrange e riveste un ruolo cru-

ciale nell'ambito dell'astrodinamica poichè ha diretta applicazione nei problemi di intercetta e di rendezvous, di determinazione dell'orbita, di mission design e la correlazione di detriti spaziali.

### 2. Teorema di Lambert

Si consideri il problema schematizzato in Figura 1. L'enunciato del teorema di Lambert afferma che il tempo di trasferimento da una posizione  $r_1$  a una  $r_2$  è funzione solo del semiasse maggiore dell'orbita  $a$ , della corda  $c$  e della somma delle distanze della posizione iniziale e finale del

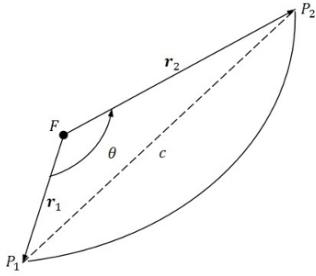


Figura 1: Geometria del problema di Lambert, da [1].

trasferimento  $r_1 + r_2$ .

$$\Delta t = f(a, c, r_1 + r_2) \quad (1)$$

In particolare si nota che il  $\Delta t$  è indipendente dall'eccentricità  $e$  dell'orbita di trasferimento.

## 2.1. Dimostrazione

Come mostrato in [2], partendo dall'equazione del tempo di volo

$$\Delta t = \frac{a^3}{\mu} (E - e \sin E) \quad (2)$$

si sostituiscono i parametri orbitali come l'anomalia eccentrica  $E$  (che in questa trattazione è intesa come l'anomalia eccentrica ridotta  $E_r \in [0, 2\pi]$  definita come  $E = E_r + 2\tilde{M}\pi$ , dove  $\tilde{M}$  è il numero di rivoluzioni complete. Per semplicità di notazione, nel seguito si omette il pedice  $r$ ).

In questo modo si ottiene l'identità:

$$(t_2 - t_1) = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (E_2 - E_1 + e \cos E_1 - e \cos E_2 + 2M\pi) \quad (3)$$

dove  $M = \tilde{M}_2 - \tilde{M}_1$  è il numero di rivoluzioni complete effettuate durante il trasferimento.

Si procede poi per sostituzione di variabile andando a definire due variabili ausiliarie  $\psi$  e  $\varphi$  come

$$\psi = \frac{E_2 - E_1}{2} \quad \cos \varphi = e \cos \frac{E_2 + E_1}{2} \quad (4)$$

Per costruzione si ha che  $\psi \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Sostituendo in (3) si ottiene:

$$(t_2 - t_1) = 2 \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (\psi - \cos \varphi \sin \psi + M\pi) \quad (5)$$

Si nota in questa forma che i parametri  $\psi$  e  $\varphi$  sono dipendenti esclusivamente dalla geometria del problema, quindi  $\Delta t$  è esclusivamente una funzione di  $a$ ,  $c$  e  $r_1 + r_2$ .

Si effettua successivamente un ulteriore cambio di variabile in  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha = \varphi + \psi, \beta = \varphi - \psi \quad (6)$$

il cui dominio è  $\alpha \in [0, 2\pi]$  e  $\beta \in [-\pi, \pi]$ .

Sostituendo in (5):

$$(t_2 - t_1) = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} ((\alpha - \sin \alpha) - (\beta - \sin \beta) + 2M\pi) \quad (7)$$

Sono inoltre verificabili le seguenti relazioni

$$\frac{s}{2a} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

$$\frac{s - c}{2a} = \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (9)$$

dove  $s = \frac{1}{2}(c + r_1 + r_2)$  rappresenta il semiperimetro del triangolo formato di vertici  $F$ ,  $P_1$  e  $P_2$ .

Un aspetto fondamentale da notare è che i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  non possono essere univocamente calcolati dato che non è definito il loro quadrante.

La strategia da adottare nel dimostrare il caso di orbita iperbolica è analogo.

## 2.2. Criterio di Prussing

Al fine di rimuovere l'ambiguità che si ha sul calcolo di  $\alpha$  e  $\beta$ , si ricorre al criterio di Prussing, come descritto in [3]. Indicando con il pedice '0' il valore ottenuto dalla semplice applicazione della funzione arcsin, si ha che:

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{cases} \beta_0, & 0 \leq \Delta\nu \leq \pi, \\ -\beta_0, & \pi \leq \Delta\nu \leq 2\pi, \end{cases} \\ \alpha &= \begin{cases} \alpha_0, & \Delta t \leq t_m, \\ 2\pi - \alpha_0, & \Delta t > t_m. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

dove  $t_m = \sqrt{\frac{s^3}{8\mu}}(\pi - \beta_m + \sin \beta_m)$  è il tempo di trasferimento relativo all'ellisse di minima energia e  $\beta_m$  è calcolato dall'equazione  $\sin \frac{\beta_m}{2} = \sqrt{\frac{s-c}{s}}$  applicando il criterio in (10).



### 2.3. Calcolo delle velocità

Il metodo più immediato per il calcolo della velocità iniziale  $v_1$  e della velocità finale  $v_2$  del trasferimento è quello dato dai parametri di Lagrange (tratto da [4]).

Si procede nel seguente modo:

$$e = 1 - \frac{4(s - r_1)(s - r_2)}{c^2} \sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (11)$$

$$h = \sqrt{\mu_{\text{sun}} a (1 - e^2)} \quad (12)$$

$$f = 1 - \frac{\mu_{\text{sun}} r_2}{h^2} (1 - \cos \theta) \quad (13)$$

$$g = \frac{r_1 r_2}{h} \sin \theta \quad (14)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\mu_{\text{sun}} r_1}{h^2} (1 - \cos \theta) \quad (15)$$

$$v_1 = \frac{1}{g} (\mathbf{r}_2 - f \mathbf{r}_1) \quad v_2 = \frac{1}{g} (\dot{g} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (16)$$

### 3. Algoritmi risolutivi

La complessità del problema risiede nella sua natura non lineare che rende necessario l'utilizzo di algoritmi numerici iterativi per ottenere soluzioni accurate. L'obiettivo è garantire risultati robusti ed efficienti, validi in diverse configurazioni, fra cui trasferimenti diretti e multi-rivoluzione.

Gli algoritmi risolutivi del problema sono diversi ma hanno tutti lo stesso procedimento generale:

- calcolare i parametri geometrici del trasferimento;
- ottenere un'approssimazione iniziale del parametro libero;
- iterare nell'equazione del tempo di trasferimento fino alla convergenza;
- calcolare i vettori delle velocità.

In [2] vengono distinti sulla base di 4 caratteristiche principali:

- (a) la variabile di iterazione

- (b) l'algoritmo di iterazione

- (c) l'approssimazione iniziale

- (d) la ricostruzione delle velocità terminali.

Fra gli algoritmi notevoli riportati in Ref. [1] si riportano alcuni esempi:

- **Bate** (1971): (a) variabile universale  $z$ , (b) metodo di Newton - Rapshon, (c)  $z = 0$  (coincidente con l'orbita parabolica), (d) funzioni di Gauss  $f, g, \dot{g}$ ;
- **Battin & Vaughan** (1984): (a) rapporto aera di settore/area di triangolo  $y$ , (b) sostituzioni successive, (c)  $x = 0$ , (d) metodo degli elementi orbitali;
- **Gooding** (1990): (a) variabile universale di Lancaster - Blanchard  $x$  ( $x^2 = 1 - \frac{a}{a_m}$ ), (b) metodo di Halley (una formula di Householder del 2° ordine), (c) starter analitico basato su approssimazioni bilineari del tempo di volo, (d) ricostruzione scrivendo la velocità radiale  $v_r$  e la velocità tangenziale  $v_t$  in funzione di  $x$ ;
- **Izzo** (2015): (a) variabile universale di Lancaster - Blanchard  $x$ , (b) metodo di Householder di 3° ordine (converge in 2-3 iterazioni), (c) approssimazione lineare a tratti dell'equazione del tempo di volo invertita per fornire lo starter, (d) segue il metodo di Gooding;
- **Simó** (1973): (a) variabile universale  $z$  definita tramite regolarizzazione Levi-Civita delle curve ellittiche e iperboliche, (b) metodo di bisezione, (c)  $z = 0$  per orbite iperboliche e  $z = (\frac{\theta}{2})^2$  per orbite ellittiche e si definisce un intervallo di bisezione  $[z_{\text{low}}, z_{\text{up}}]$ , (d) metodo degli elementi orbitali.

### 4. Caso studio: trasferimento Terra - Marte

In questa sezione si analizza il problema del trasferimento Terra - Marte. L'obiettivo è valutare la data ottimale di lancio attraverso il diagramma delle opportunità di lancio (porkchop plot).



## 4.1. Porkchop plot

I porkchop plot sono uno strumento fondamentale nell'astrodinamica e nella pianificazione di missioni spaziali interplanetarie, utilizzati per ottimizzare le traiettorie di trasferimento tra due corpi celesti. Sono grafici che raffigurano le curve di livello di  $\Delta V$  o dell'energia caratteristica  $C_3 = v_\infty^2$  in funzione della data di lancio (asse orizzontale) e arrivo (asse verticale). La denominazione "porkchop" deriva dal fatto che la forma tipica di queste curve ricorda quella della cotoletta di maiale. Questi grafici consentono di identificare immediatamente le finestre di lancio migliori.

## 4.2. Procedimento

**Ipotesi** Come dati per il caso studio ipotizzeremo un'orbita LEO iniziale di raggio 300 km sopra la superficie terrestre e un'orbita circolare obiettivo di raggio 200 km sopra la superficie di Marte.

**Definizione intervallo di partenza/arrivo** Si sceglie un range di possibili date di partenza e arrivo. Ogni coppia di (data di partenza, data di arrivo) è un punto da valutare.

**Calcolo delle posizioni planetarie** Per ogni possibile data di lancio e arrivo è necessario conoscere la posizione di Terra e Marte nel sistema di riferimento eliocentrico e a partire da queste si calcola il vettore posizione della Terra  $r_{Earth}$  e il vettore posizione di Marte  $r_{Mars}$ .

**Risoluzione del trasferimento** Per ogni coppia di date di partenza e arrivo e per il tempo di volo  $TOF = t_{arr} - t_{dep}$  si risolve il problema di Lambert. Si ottengono in questo modo le due velocità  $v_1$  e  $v_2$ , ossia le velocità di partenza e arrivo nel sistema eliocentrico necessarie al trasferimento.

**Calcolo del  $\Delta V$  totale** Dal vettore velocità di partenza  $v_1$  si determina l'eccesso di velocità iperbolica rispetto all'orbita terrestre  $v_{\infty,dep}$ . Partendo da un'orbita LEO

per passare all'orbita di trasferimento, il  $\Delta V_{dep}$

$$\Delta V_{dep} = \sqrt{v_{\infty,dep}^2 + v_{esc}^2} - v_{orb\ LEO} \quad (17)$$

dove  $v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu_{Earth}}{r_{LEO}}}$  è la velocità di fuga dalla Terra e  $v_{orb\ LEO}$  è la velocità orbitale iniziale. In modo analogo si calcola il  $\Delta V_{arr}$ . Andando a sommare i due contributi si ottiene una stima del  $\Delta V$  totale del trasferimento. In alternativa nel porkchop plot si può rappresentare direttamente il  $C_3 = v_{\infty,dep}^2$ , ossia l'energia caratteristica all'inizio della manovra, e il  $v_{\infty,arr}$ .

**Generazione del porkchop plot** Dopo aver calcolato il  $\Delta V$  per ogni coppia di date nella griglia, si procede alla visualizzazione. Si crea una matrice 2D di valori di  $\Delta V$  con ascisse DATA DI PARTENZA e ordinate DATA DI ARRIVO. Con una libreria grafica si disegnano linee di colore che corrispondono a valori costanti di  $\Delta V$ . I minimi che rappresentano le date di lancio preferenziali si trovano nelle zone centrali.

## 4.3. Implementazione

Per il calcolo delle posizioni di Terra e Marte nei giorni indicati di lancio e arrivo si è utilizzato il toolkit **SPICE** (Space Planetary Instrument C-matrix Events), sviluppato da Nasa per la navigazione e il mission planning. Consiste in un insieme di librerie, file e strumenti che permettono di ottenere informazioni precise su pianeti e satelliti. SPICE funziona tramite kernel. Caricando nello script i kernel LSK (Leap-seconds Kernel) e SPK (Spacecraft and Planet Kernel) si possono ricavare i vettori posizione  $r$  e velocità  $v$  di ogni corpo celeste nel sistema di riferimento specificato in input. Il solutore di Lambert utilizzato è quello implementato nella libreria **pykep**, sviluppata dall'ESA dedicata all'ottimizzazione di traiettorie. L'algoritmo risolutivo è spiegato nel dettaglio in [2].

## 4.4. Risultati

Al fine di validare il codice e il modello utilizzato si è deciso di confrontare i risultati ottenuti con i dati di letteratura relativi a una missione Terra - Marte con finestra di lancio nel

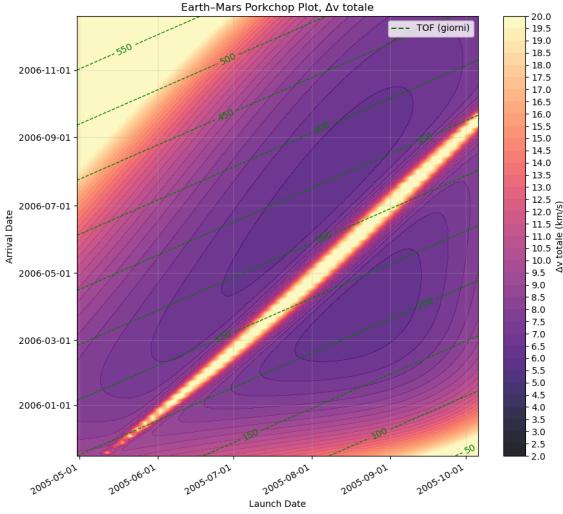


Figura 2: Porkchop plot per una missione Terra - Marte con la data di lancio sull'asse x, la data di arrivo sull'asse y. I colori indicano i valori di  $\Delta V$  totale, mentre le linee tratteggiate in verde rappresentano i punti con lo stesso TOF.

2005 [5]. Nonostante i dati originali siano stati pubblicati negli anni '80 è comunque utile a scopo accademico verificare la forma delle curve di  $C_3$ , di  $v_\infty$  e dei tempi di volo TOF calcolati dal modello.

Il Porkchop plot in Figura 2 e 3 sono quelli ottenuti dal modello implementato nel corso di questa tesi. In particolare la Figura 2 illustra il  $\Delta V$  totale in riferimento alle date di lancio e arrivo e al TOF. Il grafico esibisce la forma caratteristica dei porckhop plot, ossia linee di isolivello che decrescono verso il centro delle curve, dove si individua la soluzione ottimale, ossia la combinazione di data di lancio e data di arrivo che minimizza il  $\Delta V$ , che in questo caso si attesta attorno ai 7 km/s. Degno di nota è che il grafico presenta una divisione centrale, con le curve inferiori che indicano una soluzione ad arco corto ( $\Delta\nu < 180$  deg) e quelle superiori corrispondono a una soluzione ad arco lungo ( $\Delta\nu > 180$  deg). Tale distinzione riflette altresì un incremento del TOF.

Il grafico in Figura 3 invece indica in funzione della data di lancio e della data di arrivo i valori dell'energia caratteristica

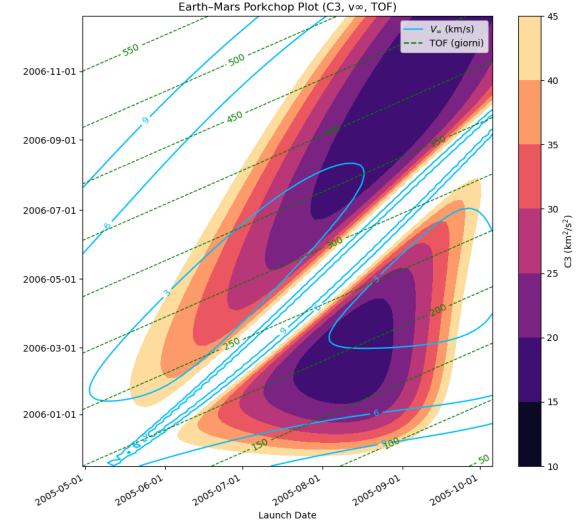


Figura 3: Porkchop plot per una missione Terra - Marte con la data di lancio sull'asse x, la data di arrivo sull'asse y. I colori indicano i valori di  $C_3$  richiesto per il trasferimento, le linee azzurre rappresentano le curve di isolivello di  $v_{\infty, arr}$ , mentre le linee tratteggiate in verde rappresentano i punti con lo stesso TOF.

$C_3$  e della velocità di eccesso iperbolico all'arrivo sull'orbita obiettivo  $v_{\infty, arr}$ .

Dai grafici in Fig. 2 e 3 è quindi immediato dedurre la finestra di lancio ottimale sia per il caso di arco lungo che arco corto (distinzione che dipende dai vincoli della missione). In particolare si ha che per il caso di arco corto il  $\Delta V_{min} = 6.06$  km/s la coppia ( DATA DI LANCIO, DATA DI ARRIVO) è (22-08-2005, 27-03-2006). Quella in figura 4 è la traiettoria di trasferimento individuata in questa configurazione.

I dati ottenuti dal modello proposto risultano in linea con quelli riportati in letteratura (Figs. 5 e 6). Tale corrispondenza si evince dalla similitudine delle forme dei porkchop plot, che presentano curve di isolivello con simile distribuzione. Inoltre i valori numerici sono equivalenti, confermando la validità del metodo utilizzato, nonostante l'utilizzo di effemeridi e strumenti più moderni come i kernel SPICE.

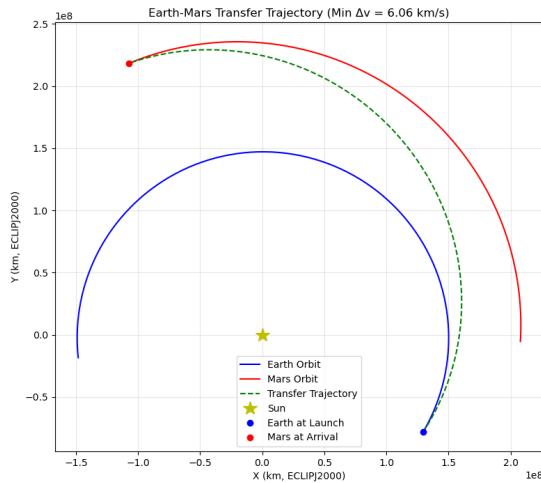


Figura 4: Traiettoria che soddisfa la condizione di  $\Delta V_{min}$  con data di lancio 22-08-2005 e data di arrivo 27-03-2006.

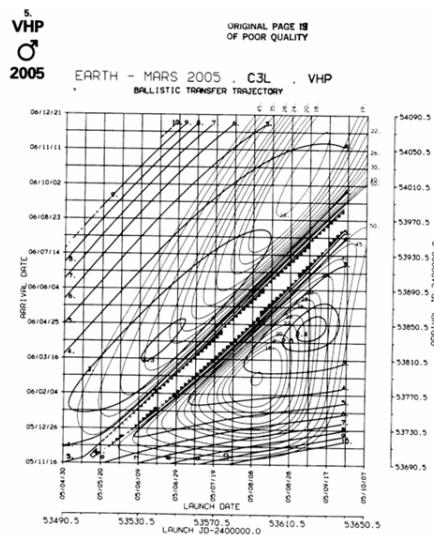


Figura 5: Porkchop plot per una missione Terra - Marte con la data di lancio sull'asse x, la data di arrivo sull'asse y. Le curve di isolivello chiare indicano gli stessi valori di  $C_3$ , mentre le curve di isolivello più marcate sono i valori di  $v_\infty$  (tratto da[5])

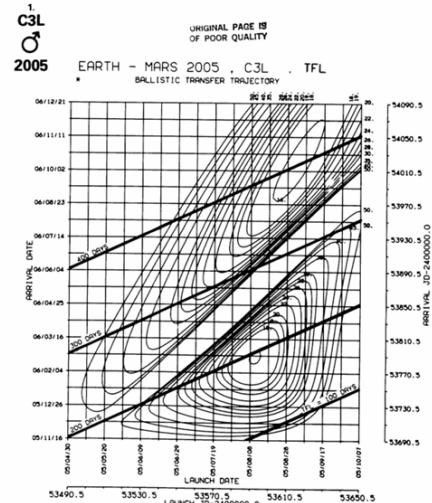


Figura 6: Porkchop plot per una missione Terra - Marte con la data di lancio sull'asse x, la data di arrivo sull'asse y. Le curve di isolivello indicano i valori di  $C_3$ , mentre le rette più marcate sono le combinazioni con stesso  $TOF$  (tratto da[5])

#### 4.5. Analisi della missione Perseverance

Un altro modo per validare il modello scelto è quello di valutare la finestra di lancio ottimale per la missione Perseverance e andare a confrontare i dati ottenuti con i dati reali. Per Perseverance la data di lancio si è avuta il 30 Luglio 2020 alle 11:50:00 UTC e l'arrivo si è avuto il 18 Febbraio 2021 alle 20:55:00 UTC dopo circa 203 giorni di volo.

Andando a definire le finestre di lancio e arrivo all'interno del codice di calcolo si ottiene il porkchop plot in Fig. 7, che grafica i valori di  $\Delta V$  in funzione sia della coppia (DATA DI LANCIO, DATA DI ARRIVO) che del  $TOF$ . Si nota che il  $\Delta V_{min} = 5.89 km/s$  si ha per una coppia (DATA DI LANCIO, DATA DI ARRIVO) che è (27-07-2020, 19-02-2021) con un  $TOF$  di 207 giorni, risultati molto vicini alle date reali scelte per la missione. La traiettoria corrispondente è mostrata in Figura 8.

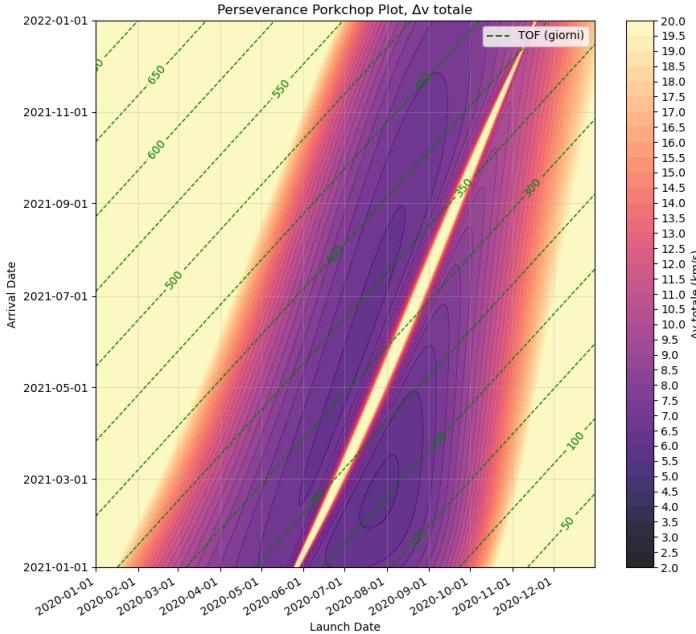


Figura 7: Porkchop plot per la missione Perseverance. I colori indicano i vari valori di  $\Delta V$  in funzione della data di lancio e arrivo.

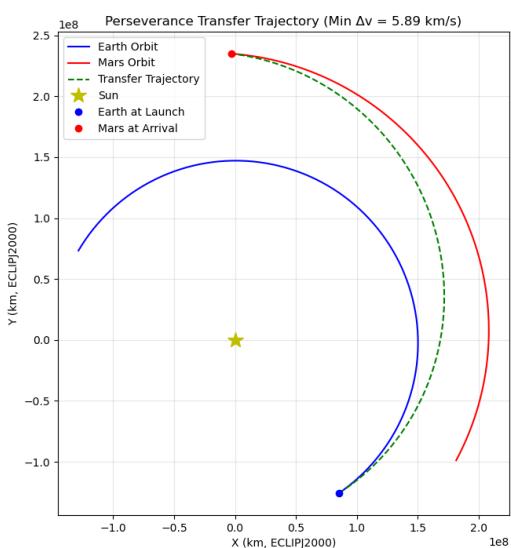


Figura 8: Traiettoria di Perseverance che soddisfa la condizione di  $\Delta V_{min}$ .

## 5. Conclusioni

In questo lavoro è stato affrontato il problema di Lambert e la sua applicazione per i trasferimenti interplanetari. Dopo una trattazione teorica del problema e dei vari algoritmi risolutivi, è stato proposto un metodo per la generazione di porkchop plot utilizzando il toolkit SPICE per il calcolo delle effemeridi planetarie e il solutore di Lambert della libreria pykep. Il confronto con i dati in letteratura relativi alla finestra del 2005 [5] ha mostrato una buona similitudine sia in termini di distribuzione che dei valori ottenuti. L'ulteriore confronto con i dati reali della missione Perseverance ha portato a risultati molto vicini. Il lavoro evidenzia dunque l'importanza del problema di Lambert nella progettazione preliminare di missioni interplanetarie. Va tenuto conto però dei limiti del modello, che, basandosi su ipotesi kepleriane, non tiene conto degli effetti perturbativi o di manovre di gravity assist necessarie per missioni più complesse. In conclusione i dati ottenuti confermano la validità del metodo adottato e mostrano come il problema di Lambert mantenga comunque un ruolo centrale nella pianificazione e ottimizzazione delle traiettorie spaziali.

## Bibliografia

- [1] Fantino, E. e de la Torre Sangrà, D., Review of Lambert's Problem, Proceedings of the 25th Int. Symp. on Space Flight Dynamics (ISSFD), 2015.
- [2] Izzo, D., Revisiting Lambert's Problem, Celest. Mech. Dyn. Astron., vol. 121, pp. 1-15, 2015.
- [3] Toglia, C., Tesi di Laurea Magistrale, Politecnico di Torino, 2006.
- [4] Qadir, K., Multi Gravity Assist Trajectory Design Tool, Master's Thesis, University of Southampton, 2010.
- [5] Sergeyevsky, A.B., Snyder, G.C. e Cunniff, R.A., Interplanetary Mission Design Handbook, Volume I, Part 2: Earth to Mars Ballistic Mission Opportunities, 1990-2005, Jet Propulsion Laboratory, JPL Publication 82-43, 1983.