1. Considere os sistemas de equações lineares reais,

$$(\mathbf{S_1})\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 + 10x_3 &= 0 \end{cases} \quad (\mathbf{S_2})\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 &= 7 \\ x_4 + 7x_5 &= 3 \end{cases} \quad (\mathbf{S_3})\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 7 \\ x_3 &= 2 \end{cases}$$

a) Determine a matriz completa associada a cada um dos sistemas.

b) Identifique as matrizes, encontradas na alínea anterior, que estão em forma de escada por linhas.

c) Use o algoritmo de eliminação de Gauss para resolver os três sistemas.

2. Considere o SEL representado matricialmente pela equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são duas soluções do SEL.

b) Mostre $\mathbf{s}'' = \mathbf{s} - \mathbf{s}'$ é solução do SEL homogéneo associado.

c) Mostre que $\mathbf{s} + \lambda\mathbf{s}''$ é solução do SEL para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Com base nas alíneas anteriores encontre um argumento que fundamente a proposição (verdadeira), " Não existem sistemas de equações lineares com um número finito de soluções superior a 1".

3. Considere o SEL

$$\begin{cases} x + y - 3z + t &= 0 \\ y - 4z &= 1 \\ x + 2y - 7z + t &= 1 \\ x + z + t &= -1 \end{cases}.$$

a) Mostre que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = (-1 - \lambda, 1 + 4\lambda, \lambda, 0)$ é solução do SEL.

b) Averigúe se o conjunto $\mathcal{A} = \{(-1 - \lambda, 1 + 4\lambda, \lambda, 0)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

4. Discuta, em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, os seguintes sistemas de equações lineares.

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \end{cases} \quad \textbf{b)}\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 &= 2 \\ -3x_1 + \alpha x_2 &= -1 \end{cases} \quad \textbf{c)}\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= \alpha \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 3x_2 + x_3 &= \beta \end{cases}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 &= \alpha \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= \beta \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= \beta \end{cases} \quad \textbf{e)}\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= \beta \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \end{cases} \quad \textbf{f)}\ \begin{cases} \beta x_1 + \alpha x_3 &= 2 \\ 4x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 &= 4 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= \beta \end{cases}$$

jem@isep.ipp.pt

5. Seja $\mathbb{P}_3[x]$ o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes reais e grau não superior a 3. Determine, caso exista, um polinómio $p \in \mathbb{P}_3[x]$ que verifique as seguintes condições,

   a) $p(-2) = p(-1) = p(1) = 1$ e $p(2) = 2$.

   b) $p(1) = 1$, $p(-3) = \frac{1}{3}$, $p'(1) = \frac{1}{2}$ e $p'(-3) = \frac{7}{6}$.

   c) $p + \frac{dp}{dx} = x^3$.

6. Considere as matrizes,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 64 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

   a) Indique as matrizes que estão em forma de escada por linhas.

   b) Para cada matriz encontre uma forma de escada reduzida por linhas.

   c) Calcule as suas características.

   d) Supondo que as matrizes indicadas são matrizes completas associadas a um sistema de equações lineares, onde a última coluna representa o termo independente, classifique os sistemas e encontre os seus conjuntos solução.

7. **a)** Averigúe quais das seguintes matrizes são invertíveis.

   b) Determine, aplicando o algoritmo de Gauss-Jordan, as inversas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -7 & 14 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

8. Sejam α, β, δ, γ reais não nulos. Determine a inversa de cada uma das matrizes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

9. Considere os seguintes sistemas de equações lineares

$$(\mathbf{S_1})\ \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = -2 \\ 3x + 8y - 4z = 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{S_2})\ \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ x + 4y + 9z = -6 \\ x + 8y + 27z = -20 \end{cases}$$

$$(\mathbf{S_3})\ \begin{cases} x + 2y + 3z = -5 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ -x - 4z = 6 \end{cases} \qquad (\mathbf{S_4})\ \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + z + t = 5 \\ x + 2y + 3z + t = 7 \\ 4x + 3z = 7 \end{cases}$$

a) Mostre que são de Cramer.

b) Resolva os sistemas usando as fórmulas de Cramer.

10. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + y + bz = a \\ x + by + bz = b \end{cases}$ onde a e b são parâmetros reais.

a) Que condição devem os parâmetros satisfazer para que a característica da matriz simples do SEL seja máxima?

b) Classifique o SEL em função dos parâmetros a e b.

jem@isep.ipp.pt

Soluções 1.

a) Representando $[\mathbf{A_i}|\mathbf{b_i}]$ a matriz completa do sistema $(\mathbf{S_i})$, $i = 1, 2, 3$, temos:

$$[\mathbf{A_1}|\mathbf{b_1}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right] \qquad [\mathbf{A_2}|\mathbf{b_2}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right] \qquad [\mathbf{A_3}|\mathbf{b_3}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

b) $[\mathbf{A_2}|\mathbf{b_2}]$ e $[\mathbf{A_3}|\mathbf{b_3}]$.

c) $(\mathbf{S_1})$ possível e determinado com conjunto solução $CS_1 = \left\{\left(0, -5, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

$(\mathbf{S_2})$ possível e duplamente indeterminado (grau de indeterminação 2) com conjunto solução

$$CS_2 = \left\{\left(\frac{1}{3}(-2 + 2x_3 - 26x_5), \frac{1}{3}\left(7 - x_3 + x_5\right), x_3, 3 - 7x_5, x_5\right) \,:\, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$(\mathbf{S_3})$ possível e determinado com conjunto solução $CS_1 = \{(-15, 9, 2)\}$.

2.

3.

b) Não, porque o sistema é duplamente indeterminado. De facto, tem-se

$$CS = \{(-1 - \lambda - \mu, 1 + 4\lambda, \lambda, \mu) \,:\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Logo $\mathcal{A} \subsetneq CS$.

4.

a) $\begin{cases} \alpha \neq 1 \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \alpha = 1 \text{ Sist. impossível.} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \alpha = -12 \text{ Sist. impossível.} \\ \alpha \neq -12 \text{ Sist. possível e determinado.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \beta - 5\alpha \neq 0 \text{ Sist. impossível.} \\ \beta - 5\alpha = 0 \text{ Sist. possível e indeterminado.} \end{cases}$

d) Sist. possível e determinado, para todos os reais α, β.

e) $\begin{cases} \alpha = -5 \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}; \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \beta \neq -\frac{1}{2}; \text{ Sist. impossível.} \end{cases} \\ \\ \alpha \neq -5 \text{ Sist. possível e determinado, } \forall \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{Se } \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq \frac{2\alpha}{\alpha - 1}, (\alpha \neq 1) \text{ tem-se SPD} \\ \text{Se } \alpha = 0 \wedge \beta = 2 \text{ tem-se SPI, GI=1} \\ \text{Se } \alpha = 0 \wedge \beta \neq 2 \text{ tem-se SI} \\ \text{Se } \beta = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}, (\alpha \neq 1) \text{ tem-se SI} \\ (\text{Se } \alpha = 1 \text{ tem-se SPD } \forall \beta \in \mathbb{R}). \end{cases}$

5.

a) $p(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3$.

b) $p(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3$.

c) $p(x) = -6 + 6x - 3x^2 + x^3$.

6.

a) **B** e **C**.

 jem@isep.ipp.pt

b) Representando a forma de escada reduzida de uma matriz $\mathbf{M}$ por $\tilde{\mathbf{M}}$ temos,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3$; $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = 3$; $\mathrm{r}(\mathbf{C}) = 2$; $\mathrm{r}(\mathbf{D}) = 4$; $\mathrm{r}(\mathbf{E}) = 4$; $\mathrm{r}(\mathbf{F}) = 7$.

d)
- Sistema associado a **A**, possível e indeterminado, com

$$CS = \left\{(0, x_2, 0, -x_2, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \; x_2, x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **B**, impossível.
- Sistema associado a **C**, possível e indeterminado, com

$$CS = \left\{(19 + 13x_3, -(4 + 3x_3), x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **D**, possível e determinado, com $CS = \{(-4, 5, -1, 1)\}$.
- Sistema associado a **E**, possível e indeterminado, com

$$CS = \left\{\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_4, \frac{1}{2} - x_4, \frac{1}{10} - \frac{3}{5}x_4, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \; x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **F**, possível e determinado, com $CS = \{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.

7.

a) São todas invertíveis.

b)

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2/9 & 8/9 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E^{-1}} = \tfrac{1}{5}\mathbf{E} \quad \mathbf{F^{-1}} = \begin{bmatrix} 27 & -10 & 4 & -29 \\ -16 & 5 & -2 & 18 \\ -17 & 4 & -2 & 20 \\ -7 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

8.

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha^3} & -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^4} & \frac{1}{\alpha^3} & -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha\beta\delta} & -\frac{1}{\beta\delta} & \frac{1}{\delta} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta\delta\gamma} & \frac{1}{\beta\delta\gamma} & -\frac{1}{\delta\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$$

9.

b) $CS_1 = \left\{\left(\frac{29}{15}, -\frac{16}{15}, -\frac{14}{15}\right)\right\}$, $CS_2 = \{(-1, 1, -1)\}$, $CS_3 = \left\{\left(\frac{34}{35}, -\frac{13}{35}, -\frac{61}{35}\right)\right\}$ e $CS_4 = \{(1, 1, 1, 1)\}$.

9.

jem@isep.ipp.pt

a) $a \neq b \wedge b \neq 1$

b)
- Se $a \neq b \wedge b \neq 1$ SPD
- Se $a = b \neq 1$ SI
- Se $a = b = 1$ SPI, com GI=2
- Se $b = 1 \wedge a \neq 1$ SI

jem@isep.ipp.pt