

Matrizes

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2023/2024



Definição 1 (Matriz real)

Sejam m e n dois inteiros positivos. Uma matriz real com m linhas e n colunas, é um quadro com $m \times n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas.



Utiliza-se a notação

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

onde os subíndices de cada entrada $a_{i,j}$ indicam que esta se encontra na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz A .

Ou na forma compacta

$$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz do tipo $m \times n$. Representa-se o conjunto formado por todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ pelo símbolo $\mathcal{M}_{m,n}$.
- Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ diz-se **rectangular** se $m \neq n$. Como casos particulares têm-se:
 - ▶ as *matrizes coluna* ($n = 1$)

$$c = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{m,1} \end{bmatrix}$$

- ▶ as *matrizes linha* ($m = 1$)

$$l = [l_{1,1} \quad l_{1,2} \quad \cdots \quad l_{1,n}]$$

- Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ diz-se **quadrada** se $m = n$. Frequentemente, por comodidade, dizemos que uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$) tem **ordem** n e escrevemos apenas $A \in \mathcal{M}_n$.
 - ▶ a **diagonal principal** da matriz A é constituída pelas entradas com os índices (i,j) tais que $i = j$, $i = 1, 2, \dots, n$
 - ▶ a **diagonal secundária** da matriz A é constituída pelas entradas com os índices (i,j) tais que $i + j = n + 1$.
 - ▶ Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n} = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ (não necessariamente quadrada), definimos a **diagonal principal** da matriz A como sendo o conjunto de índices $\{(1,1), (2,2), \dots, (\min(m,n), \min(m,n))\}$. **A diagonal secundária não está definida para matrizes não quadradas.**

Exemplos: Nos seguintes exemplos, assinalamos as entradas que pertencem às diagonais principais a vermelho e as entradas que pertencem às diagonais secundárias a azul.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \pi \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & \text{b)} \quad \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} & \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, de ordem n diz-se **triangular superior** se e somente se $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, de ordem n diz-se **triangular inferior** se e somente se $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

- Uma matriz quadrada $[a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, de ordem n , diz-se **diagonal** se e somente se for simultaneamente triangular superior e triangular inferior ($a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$).
- Se uma matriz diagonal possuir os elementos da diagonal principal todos iguais dizemos que é uma matriz **escalar**.



*Se os elementos da diagonal principal de uma matriz escalar forem iguais a 1 dizemos que a matriz é a matriz **identidade** ou **unitária** de ordem n e representamo-la por I_n .*

Exemplos:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes D , E e I_4 são todas diagonais. Em particular, as matrizes E e I_4 são matrizes escalares sendo que I_4 é a matriz unitária de ordem 4.

- Seja $a_{i,j}$ uma entrada de uma matriz A e $b_{\ell,k}$ uma entrada de uma matriz B , onde A e B são matrizes do mesmo tipo ($A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$). Dizemos que as entradas $a_{i,j}$ e $b_{\ell,k}$ são **homólogas** se e somente se $i = \ell$ e $j = k$.
- Dizemos que duas matrizes do mesmo tipo A e B são **iguais**, e escrevemos $A = B$, se todas as entradas homólogas forem iguais. Caso contrário, A e B dizem-se diferentes, e escrevemos $A \neq B$.
- Seja $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ e sejam k, ℓ dois inteiros positivos tais que $k \leq m$ e $\ell \leq n$. Dizemos que A' é uma **submatriz** de A se a matriz A' for constituída por entradas comuns a k linhas e ℓ colunas de A .

Definição 2 (Adição de matrizes)

Sejam $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ e $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ duas matrizes, do mesmo tipo $(m \times n)$. Definimos a *soma* da matriz A com a matriz B como sendo uma matriz C do tipo $m \times n$, cujas entradas são determinadas por

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

e escrevemos $C = A + B$



A adição de duas matrizes de diferentes tipos não está definida.

Exemplos: Se,

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & -1 & y \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} x+2 & -9 & y \\ -1 & -z & y \\ 0 & -1 & -x \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$A + D = \begin{bmatrix} 2x+2 & -9 & 1+y \\ -2 & -(1+z) & 2y \\ 0 & 1 & -(1+x) \end{bmatrix}; \quad C + B = \begin{bmatrix} a-1 \\ b \\ c+1 \end{bmatrix}$$

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades 1 (da adição de Matrizes)

- ① A adição é uma *operação fechada* no conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}, \exists C \in \mathcal{M}_{m,n} : A + B = C.$$

- ② A adição de matrizes é uma *operação associativa*

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}, (A + B) + C = A + (B + C).$$

- ③ Existe um elemento neutro, E , em $\mathcal{M}_{m,n}$, relativamente à operação adição.

$$\exists E \in \mathcal{M}_{m,n}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n} : A + E = E + A = A.$$

- ④ Todo a matriz A em $\mathcal{M}_{m,n}$, possui uma matriz *inversa aditiva* (ou *simétrica*) A'

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, \exists A' \in \mathcal{M}_{m,n} : A + A' = A' + A = E.$$

- ⑤ A adição de Matrizes é uma *operação comutativa*,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n} : A + B = B + A.$$

- O elemento neutro de $\mathcal{M}_{m,n}$ é a matriz $E = 0_{m,n}$, onde $0_{m,n}$ designa a matriz do tipo $m \times n$ com as entradas todas nulas. A matriz $0_{m,n}$ diz-se a matriz nula do tipo $m \times n$.
- A matriz inversa aditiva de uma matriz $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ representa-se com o símbolo $-A$ e tem-se $-A = [-a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Definição 3 (subtracção de Matrizes)

Dadas duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ define-se a subtracção $A - B$ como sendo a adição de A com a inversa aditiva de B .

Definição 4 (Produto de um escalar por uma matriz)

Sejam α um número real e $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. O *produto do escalar* α pela matriz A é uma matriz do mesmo tipo da matriz A , cujas entradas são iguais às entradas homólogas da matriz A multiplicadas pelo escalar α . Em notação matemática tem-se

$$\alpha A = [\alpha a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemplos:

$$\pi \begin{bmatrix} \pi & -1 & \alpha \\ 2 & \pi^{-1} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 & -\pi & \pi\alpha \\ 2\pi & 1 & -2\pi \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades 2

Para todas as matrizes A e B em $\mathcal{M}_{m,n}$ e para todos os escalares α e β , tem-se

① $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

② $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

③ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$

④ $1A = A.$

⑤ $(-1)A = -A.$

Definição 5 (Multiplicação de matrizes)

Sejam as matrizes $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq \ell}} \in \mathcal{M}_{m,\ell}$ e $B = [b_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{\ell,n}$.

Definimos o *produto* da matriz A pela matriz B como sendo a matriz $C = [c_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$, e escrevemos $C = A \times B$, ou simplesmente $C = AB$, sendo as entradas da matriz C dadas pela relação

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{i,k} b_{k,j}.$$



Apenas podemos efectuar a multiplicação $A \times B$ se o número de colunas da matriz à esquerda, A , for igual ao número das linhas da matriz à direita, B .

Exemplo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 & 1 \times 3 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}.$$



A multiplicação BA **não está definida**, dado que a matriz à esquerda tem 2 colunas e a matriz à direita tem 1 linha.



- Se as matrizes A e B forem ambas quadradas e de ordens iguais, os produtos AB e BA estão ambos definidos
- A multiplicação de matrizes quadradas não possui a propriedade comutativa. Ou seja, a propriedade

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n, AB = BA$$

é falsa.

Definição 6 (Matrizes permutáveis (ou comutáveis))

Dizemos que duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_n$ são *permutáveis* (ou *comutáveis*) se se verificar a igualdade

$$AB = BA.$$

Definição 7 (Centro de \mathcal{M}_n)

O *centro* de \mathcal{M}_n é o conjunto formado pelas matrizes quadradas de ordem n que permutam com todas as matrizes quadradas de ordem n . Ou seja

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n : AX = XA, \forall X \in \mathcal{M}_n \right\}.$$

Exemplos:

Considere as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- ❶ A matriz A não comuta com a matriz B porque se tem,

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ❷ A matriz A comuta com a matriz C porque se tem,

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } CA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- ❸ A matriz $A \notin \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$. De facto, se A pertencesse ao centro de \mathcal{M}_2 , teria de permutar com todas as matrizes quadradas de ordem 2 e verificámos atrás que ela não comuta com a matriz B.

- ❹ A matriz D comuta com todas as matrizes quadradas de ordem 2. De facto tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{bmatrix}$$

consequentemente $D \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$.

Propriedades 3

Considerem-se as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m,\ell}$, $C, D \in \mathcal{M}_{\ell,p}$ e $E \in \mathcal{M}_{p,n}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são válidas:

- ❶ $(A + B)D = AD + BD$
- ❷ $A(C + D) = AC + AD$
- ❸ $(AD)E = A(DE)$
- ❹ $0_{r,m}A = 0_{r,\ell}$ e $A0_{\ell,s} = 0_{m,s}$
- ❺ $I_m A = A$ e $A I_\ell = A$
- ❻ $\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C)$

Notas: A primeira propriedade chama-se propriedade distributiva à direita da multiplicação relativamente à adição.

A segunda propriedade chama-se propriedade distributiva à esquerda da multiplicação relativamente à adição. A

terceira propriedade chama-se propriedade associativa da multiplicação. As propriedades indicadas em 4.

chamam-se, respectivamente, existência de elemento absorvente à esquerda e à direita. E as propriedades indicadas em 5. chamam-se, respectivamente, existência de elemento neutro à esquerda e à direita.

Definição 8 (Matrizes invertíveis)

Dizemos que uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ é *invertível* (ou *regular*) se existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$AZ = ZA = I_n \quad (1)$$

Se não existir uma matriz $Z \in \mathcal{M}_n$ tal que se verifique a igualdade (1) então a matriz A diz-se não *invertível* (ou *singular*).



No caso de A ser invertível existe apenas uma matriz Z que satisfaz (1). Chamamos a essa matriz a matriz inversa de A e representamo-la por A^{-1} .

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, porque se tem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

E a matriz inversa da matriz A^{-1} é a matriz A . Ou seja, tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definição 9 (Potência de ordem $k \in \mathbb{Z}$)

Sejam $A \in \mathcal{M}_n$ e k um inteiro. A *potência* de ordem k da matriz A é a matriz $A^k \in \mathcal{M}_n$ tal que,

$$A^0 = I_n$$

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k > 0.$$

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1} \times A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k > 0 \quad (A \text{ invertível}).$$

Definição 10 (Transposta (de uma matriz))

Seja $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. A *transposta* da matriz A é uma matriz do tipo $n \times m$, e representa-se pelo símbolo $A^T = [a'_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, onde

$$a'_{i,j} = a_{j,i}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m.$$

Exemplos: Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem-se,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^T = [-1 \quad 0 \quad 1].$$

$$(A^T)^T = ?, \quad (B^T)^T = ?, \quad (C^T)^T = ?$$

Definição 11 (Matrizes simétricas e anti-simétricas)

Seja A uma matriz quadrada.

- Diz-se que A é uma **matriz simétrica** se $A = A^T$.
- Se $A = -A^T$, diz-se que a matriz A é uma **matriz anti-simétrica**.

Exemplos:

- ① As matrizes simétricas de ordem 3 têm a forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

- ② As matrizes anti-simétricas de ordem 3 têm a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Propriedades 4

- ❶ $(A^T)^T = A$
- ❷ $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- ❸ $(AC)^T = C^T A^T$
- ❹ $(A^k)^T = (A^T)^k, k \in \mathbb{N}_0$
- ❺ $(BC)^{-1} = C^{-1} B^{-1}$
- ❻ $(B^k)^T = (B^T)^k, k \in \mathbb{Z}$



As propriedades são válidas para todas as matrizes, desde, que as operações indicadas façam sentido.

Definição 12 (Coeficiente líder)

Seja E uma matriz. Em cada linha dizemos que a primeira entrada não nula é o **coeficiente líder** (dessa linha). Se uma linha contém apenas entradas nulas não possui coeficiente líder.

Definição 13 (Matriz em forma de escada por linhas (f.e.l.))

Dizemos que a matriz E está em **forma de escada por linhas** se:

- 1 Para toda a linha $i > 1$, da matriz E , o coeficiente líder encontra-se à direita do coeficiente da linha anterior (da linha $i - 1$)
- 2 Se uma linha tiver entradas todas nulas, então todas as linhas abaixo dela possuem igualmente entradas todas nulas.

Exemplos: Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- A única matriz que está em forma de escada é a matriz B.
- Na matriz A o coeficiente líder da linha 2 está à esquerda do coeficiente líder da linha anterior.
- Na matriz C o coeficiente líder da linha 3 não está à direita do coeficiente líder da linha 2 (encontram-se ambos na coluna 2).
- A matriz D possui uma linha nula (sem coeficientes líder) anterior a uma linha com coeficiente líder.

Definição 14 (Característica de uma matriz em f.e.l.)

A característica de uma matriz E em forma de escada por linhas, $r(E)$ é o número de linhas não nulas.

$$r(E) = \text{número de linhas não nulas de } E.$$



Note-se que o número de linhas não nulas apenas é a característica de matrizes em forma de escada por linhas.

Iremos ver à frente como se determina a característica de uma matriz qualquer (não necessariamente em f.e.l.)

Definição 15 (Operações elementares sobre linhas (colunas))

Considere uma matriz A . Designam-se *operações elementares sobre as linhas (colunas)* as operações:

- 1 Troca de linhas da matriz A . A troca das linhas L_i e L_j (das colunas C_i e C_j) representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$ ($C_i \leftrightarrow C_j$).
- 2 A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela linha αL_i (coluna βC_i), onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ou seja, a substituição de uma linha L_i (coluna C_i) por um seu múltiplo αL_i (βC_i) não nulo. Representamos esta operação elementar por

$$L_i \leftarrow \alpha L_i \quad (C_i \leftarrow \beta C_i)$$

- 3 A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela sua soma com um múltiplo de outra linha (coluna). Representamos esta operação elementar por

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad (C_i \leftarrow C_i + \beta C_j)$$

Definição 16 (Matrizes equivalentes)

Duas matrizes dizem-se **equivalentes** se uma resulta da outra através de uma sequência finita de operações elementares.

Teorema 1

Seja A uma matriz equivalente a uma matriz E que está em forma de escada. Então, tem-se

$$r(A) = r(E)$$



O teorema anterior permite encontrar a característica de uma matriz desde que encontremos a sua forma de escada ([Algoritmo de eliminação Gaussiana](#)).

Exemplo (introdutório): Encontrar uma forma de escada equivalente à matriz A.

$$\begin{array}{ccccc}
 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^A & \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^{A_1} & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-1)L_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{A_2} \rightarrow \\
 & & & & \\
 \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-2)L_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{A_3} & \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} & \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^E &
 \end{array}$$

As matrizes A , A_1 , A_2 , e E são todas equivalentes logo têm a mesma característica. A matriz E está em forma de escada por linhas. Como E possui 3 linhas não nulas tem-se

$$r(E) = r(A_3) = r(A_2) = r(A_1) = r(A) = 3.$$

Algoritmo 1 (de eliminação Gaussiana)

Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}$.

- 1 Seja $U = A$ e $r = 1$. Se $U = 0$, U está em forma de escada por linhas (**STOP**).
- 2 Se $U \neq 0$, procurar nas linhas r, \dots, m , da matriz U , a primeira coluna, k , não nula e primeira entrada $a_{i,k} \neq 0$. Se $i > r$, troque as linhas r e i em U (obtem-se uma entrada não nula na posição (r, k)). Seja U a matriz que resulta desta troca.
- 3 Adicionar múltiplos da linha r às linhas abaixo para anular todas as entradas localizadas na coluna k e nas linhas $r+1, \dots, m$. Seja U a matriz resultante.
- 4 Se $r = m-1$ ou as linhas $r+1, \dots, m$ são todas nulas, U está em forma de escada por linhas (**STOP**). Caso contrário faça $r = r+1$ e repita os passos 2, 3 e 4.



No passo 3, não explicitámos as operações elementares que permitem anular as entradas da coluna k e das linhas $r+1, \dots, m$. Contudo facilmente se verifica que efectuando a operação $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_\ell L_r$, com $m_\ell = a_{\ell,k}/a_{r,k}$ anulamos a entrada $a_{\ell,k}$.

Exemplo: Algoritmo de eliminação Gaussiana aplicado à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Passo 1. $U^{(1)} = A$ e $r = 1$.

Passo 2. Como $a_{1,1} \neq 0$, não é necessário troca de linhas.

Passo 3. Anular as entradas da primeira coluna abaixo da entrada $a_{1,1}$. Tem-se

$$m_2 = \frac{-4}{2}, \quad m_3 = \frac{0}{2}, \quad \text{e} \quad m_4 = \frac{1}{2},$$

Consequentemente, apenas temos de efectuar as operações $L_2 \leftarrow L_2 - (-2)L_1$ e $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_1$. Obtemos, desta forma, a matriz

$$U^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A submatriz, de $U^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4 não é a matriz nula, consequentemente incrementamos o valor de r , o valor de r passa a ser 2, e voltamos ao passo 2.

exemplo (cont.)

Passo 2. A primeira coluna não nula, da submatriz de $U^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4, é a terceira e a primeira entrada não nula da terceira coluna situa-se na terceira linha de $U^{(2)}$. Consequentemente efectuamos a troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$ em $U^{(2)}$. Desta forma tem-se

$$U^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 3. Anular as entradas da terceira coluna abaixo da entrada $a_{2,3}$. Tem-se $m_4 = -1/-1$ e efectua-se a operação elementar $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. Obtendo-se

$$U^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A matriz $U^{(4)}$ está em forma de escada por linhas e a eliminação Gaussiana terminada **STOP**.

exemplo (cont.)

Esquemáticamente escrevemos:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1/2L_1}} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

? Qual a característica da matriz A?

