Licenciatura em Engenharia Informática
Matemática Discreta 2024/2025
Teórico-Prática 1: Linguagem Matemática e Lógica

1. Descreva os conjuntos seguintes por extensão:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$.
   b) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\}$.
   c) $C = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 5\}$.
   d) $D = \{x \in \mathbb{Z} : x$ é divisível por 3 e $x \in [-5, 16[\}$.
   e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x$ é o quadrado de um número inteiro e $x \leq 100\}$.
   f) $F = \{x \in \mathbb{R} : x$ é um número primo e é par$\}$.

2. Descreva os conjuntos seguintes por compreensão:
   a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.
   b) $B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.
   c) $C = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\}$.

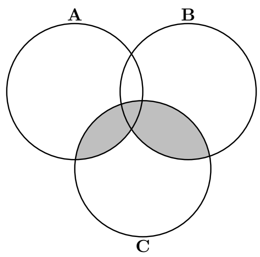
3. Considere os conjuntos seguintes:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é um número par}\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é múltiplo de } 6\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é múltiplo de } 3\}, \\ D &= \{x \in \mathbb{N} : 2x \leq 11\}, \\ E &= \{x \in \mathbb{N} : x^2 < 30\}. \end{aligned}$$

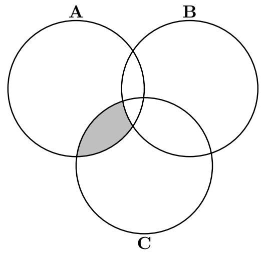
   Complete as afirmações seguintes, usando os símbolos $=$, $\subsetneq$ e $\supsetneq$:
   a) $A \ldots B$.
   b) $B \ldots C$.
   c) $D \ldots E$.

4. Determine a união e a interseção dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\{x \in \mathbb{Z} : x$ é par$\}$.

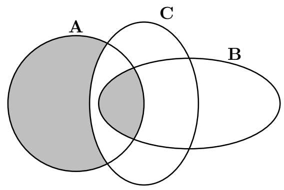
5. Para cada um dos conjuntos sombreados, escolha a expressão que o representa:

a) 

(i) $(A \cap B) \cap C$.
(ii) $A \cup (B \cup C)$.
(iii) $(A \cap B) \cup C$.
(iv) $(A \cup B) \cap C$.

b) 

(i) $A \cap (B \backslash C)$.
(ii) $A \backslash (A \cap C)$.
(iii) $C \backslash (A \cup B)$.
(iv) $(A \cap C) \backslash B$.

c) 

(i) $(A \backslash C) \cup (A \cap B)$.
(ii) $A \backslash C$.
(iii) $(A \backslash C) \cup B$.
(iv) $(A \cup B) \backslash C$.

6. Em 415 alunos inscritos nas unidades curriculares de Matemática Discreta (MDISC) e de Linguagens e Programação (LPROG), 275 alunos frequentam as aulas de MDISC, 110 alunos frequentam as aulas de LPROG e 55 alunos não frequentam nenhuma delas. Determine quantos alunos frequentam:
   a) só Matemática Discreta.
   b) Matemática Discreta ou Linguagens e Programação, mas não as duas.
   c) Matemática Discreta e Linguagens e Programação.
   d) pelo menos uma das duas.
   e) só Linguagens e Programação.

7. Escreva a expressão $|A \cup B|$ em termos de $|A|$, $|B|$ e $|A \cap B|$. E para $|A \cup B \cup C|$?

8. Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = 50$, $|B| = 30$, $|C| = 85$, $|A \cap B| = 22$, $|A \cap B \cap C| = 18$, $|B \cap C| = 20$ e $|A \cup C| = 100$. Determine as cardinalidades seguintes:
   a) $|A \cap C|$.
   b) $|C \backslash B|$.
   c) $|(B \cap C) \backslash (A \cap B \cap C)|$.
   d) $|A \cup B \cup C|$.

9. Sejam $X = \{$André, Bernardo, Cecília$\}$, $Y = \{$ananás, banana, cereja, damasco$\}$ e $Z = \{$iogurte, leite, sumo$\}$.
   a) Descreva o conjunto $X \times Y$ por extensão.
   b) O Bernardo lancha sempre uma bebida e uma peça de fruta. Se, em casa dele, existirem exatamente os alimentos do conjunto $Y \cup Z$, de quantas formas diferentes o Bernardo poderá elaborar o lanche? Justifique, usando o conceito de cardinal de um conjunto.

10. Sejam A e B conjuntos tais que $A \times B = \emptyset$. O que pode concluir acerca dos conjuntos A e B?

11. Para cada um dos conjuntos seguintes, calcule o conjunto das suas partes:
    a) $\{a, b\}$.
    b) $\emptyset$.
    c) $\{\emptyset, A\}$.

12. Sem descrever os conjuntos por extensão, calcule o número de elementos de cada um dos conjuntos seguintes:
    a) $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$.
    b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$.
    c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

13. Usando as propriedades das operações sobre os conjuntos, mostre que $(A \cup B) \cap (A \cup \emptyset) = A$.

14. Sejam $A = \{1, 2, 8, 9\}$ e $B = \{1, 2\}$. Calcule $\left|\mathcal{P}\big((A \times B) \setminus (B \times A)\big)\right|$.

15. Seja A um conjunto tal que $|A| = 4$. Sabendo que $\big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{\emptyset\}\big\} \subset \mathcal{P}(A)$, determine o conjunto A.

16. Determine, se possível, um conjunto A tal que: $|\mathcal{P}(A)| = 16$ e $A \cap \mathbb{N} = \{2, 3, 5\}$. Se responder que não existe um tal conjunto, justifique a sua resposta.

17. Considere as expressões seguintes:
    (i) $(-1)^2$;
    (ii) O Rio Douro nasce em Espanha;
    (iii) $|1 - 5| = 6$;
    (iv) O Sol gira à volta da Terra;
    (v) $7 + 2 \times (-3)$;
    (vi) $x^2 = 1$;
    (vii) Se n é primo ímpar, então n é divisível por 2;
    (viii) Cuidado!;
    (ix) Vinho do Porto;
    (x) $|-5|$.
    a) Distinga as designações, das proposições e das expressões ambíguas. Indique o valor lógico das proposições.
    b) Determine se existem designações ou proposições equivalentes e, em caso afirmativo, indique-as.

18. Sejam p, q e r as proposições seguintes:

$$\begin{aligned} p = &\quad \text{Eu recebi o louvor na disciplina} \\ q = &\quad \text{Eu resolvi todos os exercícios} \\ r = &\quad \text{Eu obtive uma classificação excelente a Matemática Discreta} \end{aligned}$$

Escreva as proposições seguintes em linguagem simbólica, ou seja, usando p, q, r e os conetivos lógicos.

a) Eu obtive uma classificação excelente a Matemática Discreta, mas eu não resolvi todos os exercícios.

b) Eu resolvi todos os exercícios, recebi o louvor na disciplina e obtive uma classificação excelente a Matemática Discreta.

c) Para eu receber o louvor na disciplina é necessário que obtenha uma classificação excelente a Matemática Discreta.

d) Eu recebi o louvor na disciplina, mas eu não resolvi todos os exercícios; mesmo assim, eu obtive uma classificação excelente a Matemática Discreta.

e) Obter uma classificação excelente a Matemática Discreta e resolver todos os exercícios é suficiente para eu receber o louvor na disciplina.

f) Eu receberei o louvor na disciplina se e só se resolver todos os exercícios ou obtiver uma classificação excelente a Matemática Discreta.

19. Sejam p, q e r as proposições seguintes:

$$\begin{aligned} p = &\quad \text{Eu não estudo} \\ q = &\quad \text{A Matemática é fácil} \\ r = &\quad \text{A Matemática é interessante} \end{aligned}$$

Escreva as proposições seguintes em linguagem corrente.

a) $q \wedge r$.

b) $\sim p \Rightarrow q$.

c) $(r \wedge q) \Rightarrow \sim p$.

20. Negue cada uma das proposições seguintes e simplifique:

a) $\sim p \wedge q$.

b) $\sim\sim p \vee \sim q$.

c) $p \Rightarrow \sim q$.

21. Sejam p, q e r proposições com valores lógicos, respetivamente, V, F e V. Determine o valor lógico das proposições seguintes:

a) $(\sim p \wedge q) \wedge r$.

b) $(\sim p \wedge \sim r) \wedge (\sim (q \vee r) \wedge \sim (r \wedge p))$.

c) $\sim (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow \sim p)$.

22. Sabendo que a proposição
$$\sim (p \vee q) \Rightarrow r$$
é falsa, determine, se possível, o valor lógico de cada uma das proposições:
    a) $p \Leftrightarrow q$.
    b) $r \Rightarrow \sim q$.
    c) $p \wedge r$.

23. Sabendo que as proposições
$$\sim a \vee b, \quad c \Rightarrow \sim b, \quad \sim c \Rightarrow d, \quad a$$
são simultaneamente verdadeiras, determine, se possível, os valores lógicos das proposições b, c e d.

24. Sabendo que a proposição q tem valor lógico *verdade*, determine, se possível, os valores lógicos de p, r e s que tornam a expressão
$$\Big[q \Rightarrow \big((\sim p \vee r) \wedge \sim s\big)\Big] \wedge [\sim s \Rightarrow (\sim r \wedge q)]$$
numa proposição verdadeira.

25. Construa uma tabela de verdade para cada uma das proposições:
    a) $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee q)$.
    b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \vee q)]$.
    c) $(p \vee q) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$.
    d) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow [(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)]$.

26. Utilizando as propriedades das operações lógicas, simplifique as proposições compostas seguintes:
    a) $\sim [\sim (q \Rightarrow \sim p) \vee ((p \vee q) \wedge p)]$.
    b) $\sim [[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \wedge q)]$.
    c) $(p \vee q) \Rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$.

27. Utilizando as propriedades das operações lógicas, mostre que as proposições compostas são logicamente equivalentes.
    a) $p \Leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.
    b) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ e $q \vee \sim p$.
    c) $(\sim p \vee q) \wedge \sim [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \vee q)]$ e $\sim p \wedge \sim q$.

28. Verifique se as proposições compostas seguintes são tautologias ou contradições. No caso de não ser nenhuma delas, justifique-o apresentando uma combinação de valores lógicos a atribuir a cada uma das proposições simples que contrarie cada um dos conceitos.
    a) $[(p \wedge q) \vee (p \vee \sim q)] \Rightarrow q$.
    b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$.

c) $[p \vee (q \wedge r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow r]$.

d) $[(p \vee q) \wedge \sim (p \vee r)] \wedge \sim q$.

29. Sejam $P(x, y)$ o predicado x *gosta de* y e o domínio das variáveis o conjunto de todas as pessoas do mundo. Usando quantificadores, escreva em linguagem matemática cada uma das proposições seguintes:
    a) Toda a gente gosta da Maria.
    b) Toda a gente gosta de alguém.
    c) Existe alguém de quem toda a gente gosta.
    d) Ninguém gosta de toda a gente.

30. Usando quantificadores, escreva em linguagem matemática cada uma das proposições seguintes e determine o seu valor lógico:
    a) Há pelo menos um número inteiro que é igual ao seu triplo.
    b) Todos os números naturais são não negativos.
    c) Todo o número real, se é menor do que 3, então é menor do que π.
    d) A cada número real corresponde outro que é o seu dobro.

31. Sejam $P(x)$ o predicado x *estuda mais de* 10 *horas semanais* e o domínio da variável o universo de todos os estudantes da Licenciatura em Engenharia Informática. Traduza para linguagem corrente as proposições seguintes:
    a) $\exists x,\ P(x)$.
    b) $\forall x,\ P(x)$.
    c) $\exists x, \sim P(x)$.
    d) $\forall x, \sim P(x)$.

32. Considere o predicado $x \leq x^2$. Quantifique-o e defina um domínio das variáveis de modo a transformá-lo numa proposição:
    a) verdadeira.
    b) falsa.

33. Negue cada uma das proposições seguintes, apresentando o resultado sem o símbolo$\sim$:
    a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n > 1 \wedge n \leq 4$.
    b) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 2 \wedge x < 4) \vee x > 3$.
    c) $\forall z \in \mathbb{Z},\ z \geq -2 \wedge z < 3 \Rightarrow |z| < 3$.
    d) $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x + y \leq 2$.

34. Indique, justificando, o valor lógico das proposições seguintes:
    a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 > n$.
    b) $\exists n \in \mathbb{N},\ 2n = 3n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N},\ n^2 < m$.

d) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N},\ n < m^2$.

e) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N},\ nm = m$.

f) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N},\ n^2 + m^2 = 5$.

35. Considere os predicados seguintes:

$$\begin{aligned} &P(x) : x^2 - x - 2 = 0;\\ &Q(x) : x \text{ é par};\\ &R(x) : x > 0. \end{aligned}$$

Determine o valor lógico das proposições que se seguem.

a) $\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \Rightarrow Q(x)$.

b) $\exists x \in \mathbb{Z},\ R(x) \wedge P(x)$.

c) $\exists x \in \mathbb{Z},\ P(x) \wedge Q(x)$.

d) $\forall x \in \mathbb{Z},\ Q(x) \Rightarrow P(x)$.

36. a) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1$;

(ii) $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = z$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ xy \leq 0$.

b) Negue as proposições da alínea anterior, apresentando o resultado sem o símbolo $\sim$.

37. Indique os pares ordenados pertencentes à relação R entre $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, onde R é definida por:

a) $(a, b) \in R$ se e só se $a = b$.

b) $(a, b) \in R$ se e só se $a + b = 2$.

c) $(a, b) \in R$ se e só se $a + b > 3$.

d) $(a, b) \in R$ se e só se $a \leq b$.

e) $(a, b) \in R$ se e só se b é múltiplo de a.

38. Indique os pares ordenados da relação R entre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, 1, h, 3\}$ representada na forma matricial pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

39. Represente as relações no conjunto $\{a, b, c, d\}$ que se seguem sob a forma matricial e por grafos:
    a) $R = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$.
    b) $S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.
    c) $T = \{(b, d), (d, b)\}$.
    d) $U = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.

40. Das relações do exercício anterior, indique as que são:
    a) Reflexivas.
    b) Simétricas.
    c) Anti-simétricas.
    d) Transitivas.

41. Considere as relações sobre o conjunto dos estudantes do ISEP:

$$\begin{aligned} R &= \{(a, b) : a \text{ é mais alto que } b\} \\ S &= \{(a, b) : a \text{ nasceu no mesmo dia que } b\} \\ T &= \{(a, b) : a \text{ tem o mesmo nome que } b\} \\ U &= \{(a, b) : a \text{ tem um avô comum a } b\} \end{aligned}$$

Diga quais das relações são:
    a) Reflexivas.
    b) Simétricas.
    c) Transitivas.

42. Para cada uma das matrizes seguintes que representam a relação R sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, classifique a relação quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. Considere a relação binária R sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por xRy *se e só se* $xy \geq 3$.
    a) Represente a matriz da relação R.
    b) Represente o grafo orientado da relação R.
    c) Usando o grafo orientado da alínea anterior, classifique a relação quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

44. Considere cada uma das relações binárias R que se seguem sobre o conjunto dos números naturais e classifique-as quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade:
    a) $(x, y) \in R$ se e só se $x \neq y$.
    b) $(x, y) \in R$ se e só se $x = y + 1 \vee x = y - 1$.
    c) $(x, y) \in R$ se e só se x é múltiplo de y.
    d) $(x, y) \in R$ se e só se $x = y^2$.
    e) $(x, y) \in R$ se e só se $x \geq y^2$.

45. Dê exemplo de relações binárias que sejam:
    a) Simétrica e anti-simétrica.
    b) Simétrica e não anti-simétrica.
    c) Não simétrica e anti-simétrica.
    d) Nem simétrica nem anti-simétrica.

46. Quantas relações simétricas e anti-simétricas sobre um conjunto A de cardinal 4 existem?

47. Determine o número de relações:
    a) Reflexivas de cardinal n, para $n = 1, 2, 3$.
    b) Simétricas de cardinal n, para $n = 1, 2, 3$.
    c) Anti-simétricas de cardinal n, para $n = 1, 2, 3$.
    d) Generalize os resultados anteriores (n arbitrário).

48. Determine quais das seguintes relações sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ são relações de equivalência e/ou de ordem. Caso não o sejam, indique as propriedades que não são verificadas:
    a) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.
    b) $R = \{(a, a), (a, c), (c, a), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$.
    c) $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$.
    d) $R = \{(a, a), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$.
    e) $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c), (d, d)\}$.

49. Para as relações de equivalência do exercício anterior, construa o grafo orientado e calcule as classes de equivalência.

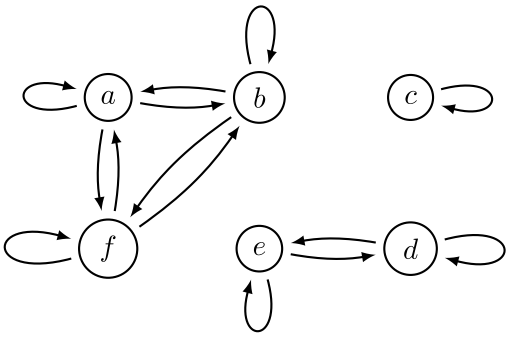
50. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a partição $P = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ de A. Determine a relação de equivalência sobre A cujas classes de equivalência formam a partição P.

51. Considere a relação $R = \{(m, n) : m$ é múltiplo de $n\}$, definida no conjunto dos números naturais. Verifique se R é uma relação de ordem total.

52. Considere a relação R, definida no conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, representada pelo digrafo abaixo indicado.
    a) Determine a matriz representativa de R.

    b) Mostre que R é uma relação de equivalência.

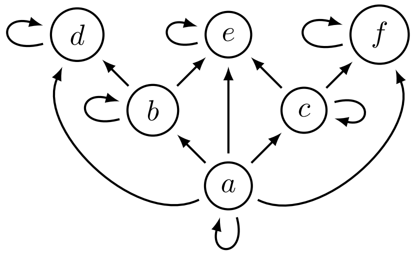
    c) Determine a partição de A formada pelas classes de equivalência de R.



53. Considere a relação R, definida no conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, representada pelo digrafo abaixo indicado.
    a) Determine a matriz representativa de R.

    b) Mostre que R é uma relação de ordem.

    c) Diga, justificando convenientemente, se R é uma relação de ordem parcial ou total.



54. Sejam R a relação binária em $\{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$, e S a relação binária de $\{1, 2, 3, 4\}$ para $\{0, 1, 2\}$, $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Determine a relação $S \circ R$.

55. Seja R a relação binária representada pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Escreva a matriz representativa da relação:
    a) R^{-1}.

    b) R^2.

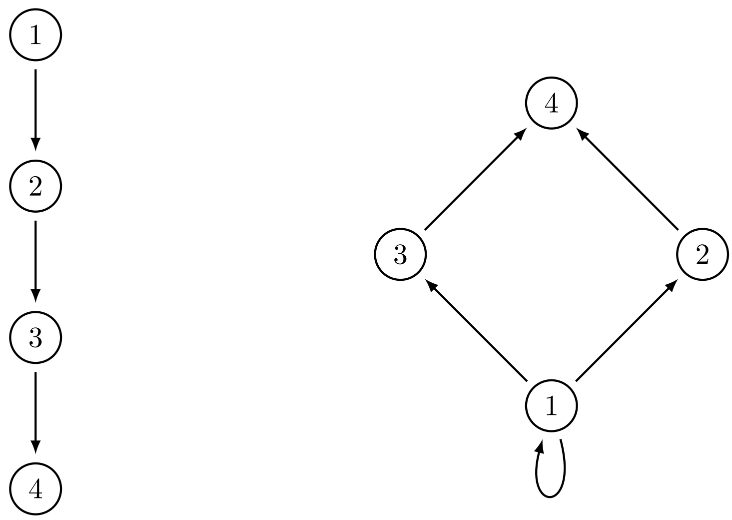
56. Sejam R e S as relações binárias no conjunto das pessoas definidas por:

$$R = \{(a, b)|\ a \text{ é progenitor de } b\};$$

$$S = \{(a, b)|\ a \text{ e } b \text{ são irmãos}\}.$$

Escreva as relações $S \circ R$ e $R \circ S$.

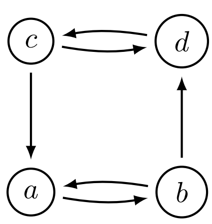
57. Considere as relações R e S definidas no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e representadas, respetivamente, pelos digrafos abaixo. Represente o digrafo da relação $S \circ R$.

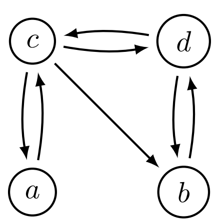


58. Seja R a relação no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$. Determine:
   a) O fecho reflexivo de R.

   b) O fecho simétrico de R.

59. Desenhe o digrafo do fecho reflexivo e do fecho simétrico de cada uma das relações binárias representadas pelos digrafos seguintes:

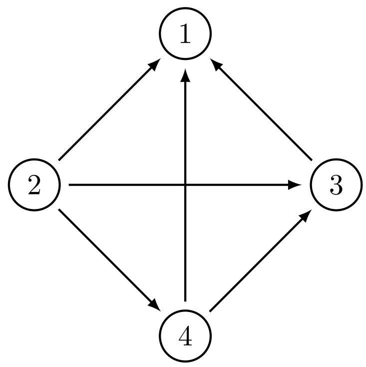
a) 

b) 

60. Determine o fecho transitivo das relações em $\{1, 2, 3, 4\}$ seguintes:
   a) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

   b) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

61. Considere a relação R definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e representada pelo digrafo abaixo. Represente o digrafo do fecho transitivo, $\hat{R}$, de R.



Soluções dos exercícios propostos

1. a) $A = \{-1, 1\}$
   b) $B = \emptyset$
   c) $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   d) $D = \{-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15\}$
   e) $E = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$
   f) $F = \{2\}$

2. a) $A = \{$números pares positivos inferiores a $11\}$
   b) $B = \{$números primos ímpares inferiores a $20\}$
   c) $C = \{$múltiplos de 7 positivos e inferiores a $70\}$

3. a) $\supsetneq$ b) $\subsetneq$ c) $=$

4. $\mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par}\} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
   $\mathbb{N} \cap \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

5. a) (iv) b) (iv) c) (i)

6. a) 250
   b) 335
   c) 25
   d) 360
   e) 85

7. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ e
   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

8. a) 35 b) 65 c) 2 d) 106

9. a) $X \times Y = \{$(André,ananás),(André,banana),(André,cereja),(André,damasco), (Bernardo,ananás),(Bernardo,banana),(Bernardo,cereja),(Bernardo,damasco), (Cecília,ananás),(Cecília,banana),(Cecília,cereja),(Cecília,damasco)$\}$
   b) $|Y \times Z| = 12$

10. Ou $A = \emptyset$, ou $B = \emptyset$, ou ambos.

11. a) $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, A\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{A\}, \{\emptyset, A\}\}$

12. a) 8 b) 16 c) 2

14. 16

15. $A = \{1, 2, 5, \emptyset\}$

16. $A = \{2, 3, 5, \sqrt{2}\}$, por exemplo.

17. a) designações: (i), (v), (ix), (x)
proposições: (ii) V, (iii) F, (iv) F, (vii) F
expressões ambíguas: (vi), (viii)

b) designações equivalentes: (i) e (v)
proposições equivalentes: (iii), (iv) e (vii)

18. a) $r \wedge \sim q$ c) $p \Rightarrow r$ e) $r \wedge q \Rightarrow p$

b) $q \wedge p \wedge r$ d) $p \wedge \sim q \wedge r$ f) $p \Leftrightarrow q \vee r$

19. a) A Matemática é fácil e interessante.

b) Se eu estudo, então a Matemática é fácil.

c) Se a Matemática é interessante e fácil, então eu estudo.

20. a) $p \vee \sim q$ b) $\sim p \wedge q$ c) $p \wedge q$

21. a) F b) F c) V

22. a) V b) V c) F

23. $V(b) = V(d) = V$ e $V(c) = F$.

24. $V(p) = V(r) = V(s) = F$

25. a)

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \vee q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

b)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee \sim q$	$p \vee q$	$(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \vee q)]$
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

c)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$q \wedge \sim p$	$p \Rightarrow (q \wedge \sim p)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge \sim p)]$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F

d)

p	q	r	$\sim p$	$q \wedge r$	$P \equiv p \vee (q \wedge r)$	$Q \equiv \sim p \Rightarrow q$	$R \equiv \sim p \Rightarrow r$	$S \equiv Q \wedge R$	$P \Leftrightarrow S$
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	V	F	F	F	F	F	V

26. a) $\sim p$ b) F c) V

28. a) Não é tautologia nem contradição ($\equiv q$). Fazendo $V(p) = V$ e, respetivamente $V(q) = F$ e $V(q) = V$, temos um contra-exemplo de que não é tautologia, nem é contradição, respetivamente.
    b) É tautologia.
    c) Não é tautologia nem contradição ($\equiv \sim p \vee r$). Fazendo $V(q) = V = V(p)$ e, respetivamente $V(r) = F$ e $V(r) = V$, temos um contra-exemplo de que não é tautologia, nem é contradição, respetivamente.
    d) É contradição.

29. a) $\forall x,\ P(x, \text{Maria})$
    b) $\forall x \exists y,\ P(x, y)$
    c) $\exists y \forall x,\ P(x, y)$
    d) $\sim (\exists x \forall y,\ P(x, y))$

30. a) $\exists x \in \mathbb{Z},\ x = 3x$, verdadeira.
    b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geq 0$, verdadeira.
    c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x < 3 \Rightarrow x < \pi$, verdadeira.
    d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R},\ y = 2x$, verdadeira.

31. a) Há pelo menos um estudante de Engenharia Informática que estuda mais de 10 horas semanais.
    b) Todos os estudantes de Engenharia Informática estudam mais de 10 horas semanais.
    c) Há pelo menos um estudante de Engenharia Informática que não estuda mais de 10 horas semanais.
    d) Nenhum estudante de Engenharia Informática estuda mais de 10 horas semanais.

32. a) $\forall x \in \mathbb{N},\, x \leq x^2$ b) $\forall x \in \mathbb{R},\, x \leq x^2$

33. a) $\forall n \in \mathbb{N},\, n \leq 1 \lor n > 4$ c) $\exists z \in \mathbb{Z},\, (z \geq -2 \land z < 3) \land |z| \geq 3$
    b) $\exists x \in \mathbb{R},\, (x \leq 2 \lor x \geq 4) \land x \leq 3$ d) $\forall x, y \in \mathbb{R},\, x > 2 \land x + y > 2$

34. a) F, não se verifica para $n = 0$ e $n = 1$.
    b) V, $n = 0$.
    c) V, basta fazer $m = n^2 + 1$, por exemplo.
    d) F, fazendo $m = 0$ não existe n que satisfaça a condição.
    e) V, $n = 1$ é o elemento neutro da multiplicação.
    f) F, basta fazer $m = 3$.

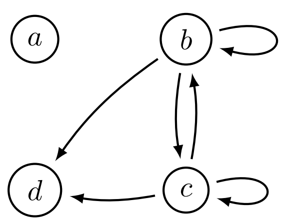
35. a) F b) V c) V d) F

36. a) (i) F (ii) F (iii) V (iv) V
    b) (i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\; xy \neq 1$
    (ii) $\forall z \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R},\; x + y \neq z$
    (iii) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\; x + y \leq 0$
    (iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\; xy > 0$

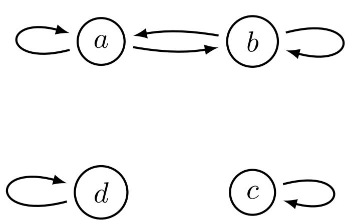
37. a) $R = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$
    b) $R = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$
    c) $R = \{(2,2), (3,1), (3,2)\}$
    d) $R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$
    e) $R = \{(0,0), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,0)\}$

38. $R = \{(1,a), (1,1), (1,3), (2,1), (2,h), (3,a), (3,3), (4,1), (4,h), (4,3)\}$

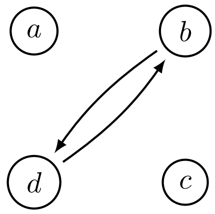
39. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



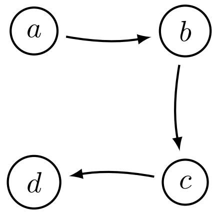
b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



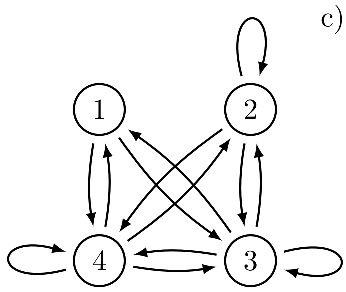
d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



40. a) S b) S e T c) U d) R e S

41. a) S, T e U b) S, T e U c) R, S e T

42. a) simétrica
    b) reflexiva e anti-simétrica
    c) simétrica

43. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
    b) 

    c) Não é reflexiva, é simétrica, não é anti-simétrica e não é transitiva.

44. a) simétrica
    b) simétrica
    c) reflexiva, anti-simétrica e transitiva
    d) anti-simétrica
    e) anti-simétrica e transitiva

46. 15

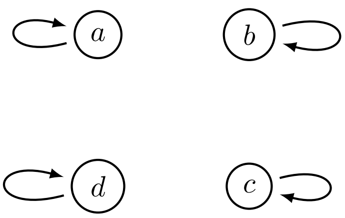
47. a) 1, 4, 64.
    b) 1, 7, 63.
    c) 1, 11, 215.
    d) 2^{n^2-n}, $2^{\binom{n+1}{2}} - 1$, $2^n 3^{\binom{n}{2}} - 1$.

48. a) relação de equivalência e de ordem
    b) não é uma relação de equivalência porque não é reflexiva nem transitiva, nem é uma relação de ordem porque para além de não verificar as duas propriedades anteriores também não é anti-simétrica

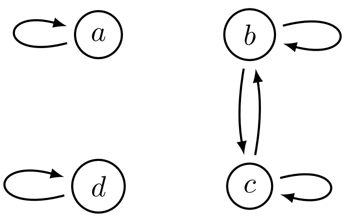
c) relação de equivalência, mas não de ordem porque não é anti-simétrica

d) não é uma relação de equivalência porque não é transitiva nem é uma relação de ordem porque não é anti-simétrica nem transitiva

e) não é uma relação de equivalência porque não é simétrica nem transitiva, nem é uma relação de ordem porque não é anti-simétrica nem transitiva

49. a) 

Classes de equivalência: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ e $\{d\}$.

c) 

Classes de equivalência: $\{a\}$, $\{b, c\}$ e $\{d\}$.

50. $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4)\}$

51. Não. Por exemplo, os elementos 2 e 3 não estão relacionados.

52. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{P}(A) = \{\{a,b,f\},\{c\},\{d,e\}\}$

53. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Ordem parcial.

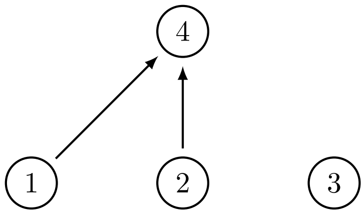
54. $S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$

55. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

56. $S \circ R = \{(a,c)|$ existe b tal que a é progenitor de b e b é irmão de $c\}$;
$R \circ S = \{(a,b)|\ a$ é tio(a) de $b\}$.

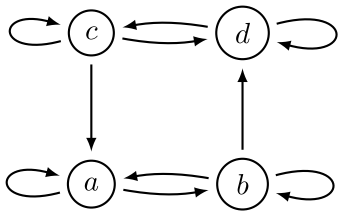
57.



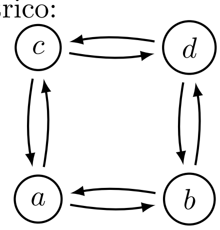
58. a) $R = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3)\}$

b) $R = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0)\}$

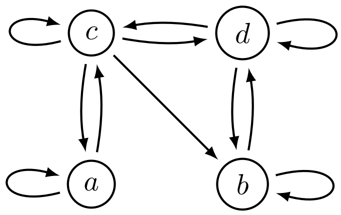
59. a) Fecho reflexivo:



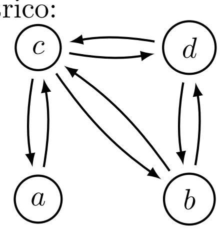
Fecho simétrico:



b) Fecho reflexivo:



Fecho simétrico:



60. a) $\{(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$.

b) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

61.