Licenciatura em Engenharia Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

Exame - 1ª Parte **4 de julho de 2019**

Aluno nº________________ Nome____

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.

1. (1 val.) Sejam $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{a, b\}$ dois conjuntos. Obtenha o cardinal de $\mathcal{P}((X \times Y) \setminus (Y \times X))$.

2. (4 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para verificar se a proposição
$$[(\sim a \wedge b) \wedge (a \Rightarrow b) \wedge \sim c] \Rightarrow \sim a$$
é uma tautologia, uma contradição, ou nenhuma das duas. Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

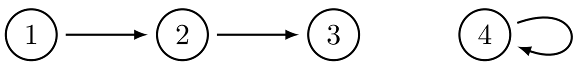
3. a) (2 val.) Diga quais das seguintes expressões são proposições e indique, **justificando**, o seu valor lógico:
   (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow (x < \frac{x+y}{2} \wedge \frac{x+y}{2} < y)$.
   (ii) $\forall a \in \mathbb{N},\ a + |b| > 0$.

   b) (1 val.) Para as proposições da alínea anterior, apresente a sua negação sem o símbolo $\sim$.

4. Considere a relação binária R sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por extensão como se segue
$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}.$$
   a) (2 val.) Classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

   b) (2 val.) Comente a afirmação: "O fecho transitivo de R é uma relação de equivalência".

   c) (2 val.) Seja S a relação binária sobre o conjunto A representada pelo digrafo abaixo. Represente o digrafo da relação $S \circ R$. Justifique a sua resposta.



5. (2 val.) Usando as regras de inferência, e sabendo que
   i. *Se a Ana é magra, então o Carlos não é loiro ou o Bernardo não é alto.*
   ii. *Se o Bernardo é alto, então a Sandra é boa pessoa.*
   iii. *Se a Sandra é boa pessoa ou o Carlos é loiro, então a Ana é magra.*
   iv. *O Carlos é loiro.*

   podemos concluir que *O Bernardo não é alto.*? Justifique a sua resposta construindo uma prova simbólica.

6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que
$$\sum_{i=1}^{n-1}(2i+3) = n^2 + 2n - 3, \text{ para todo o inteiro } n \geq 2.$$

Licenciatura em Engenharia Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

Exame - 2ª Parte   4 de julho de 2019

Aluno nº________________ Nome____

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (telemóvel, smartwatch, etc.). Não é necessária máquina de calcular!
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva as questões em 4 folhas separadas, da forma seguinte: Q1 — Q2.a)b)c) — Q2.d) — Q2.e).

1. Considere os dois algoritmos que se seguem.

```
procedure Alg1(n: positive integer)
    soma := 0
    i := 1
    while i ≤ n:
        for j := 1 to 100:
            soma := soma + 1
        i := 2 * i
    return soma
```

```
procedure Alg2(n: positive integer)
    soma := 0
    i := 1
    while i ≤ 10:
        for j := 1 to n:
            soma := soma + 1
        i := i + 2
    return soma
```

a) (2 val.) Seja $n = 8$. Qual o valor que cada algoritmo retorna?

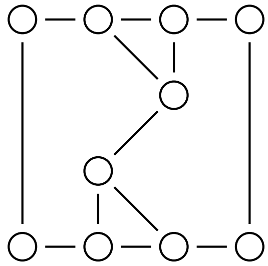
b) (3 val.) Apresente uma estimativa O para o tempo de execução de cada um dos algoritmos em função do valor do input e conclua qual dos algoritmos tem menor complexidade temporal no pior caso. Justifique.

2. Considere o mapa abaixo, de uma zona da cidade delimitada pelos nós indicados a negro.

a) (1.5 val.) Construa um grafo não-orientado G, cujas arestas representam as ruas inseridas nessa zona da cidade e os vértices representam os cruzamentos entre essas ruas.

b) (2.5 val.) Um fiscal dos Serviços Municipais terá de inspecionar todos os candeeiros de iluminação pública dessa zona. Existe alguma forma de o fazer, sem passar duas vezes numa mesma rua? Justifique a sua resposta, traduzindo o problema proposto, bem como a conclusão obtida, como um problema de Teoria de Grafos.

c) (2 val.) Um ex-colaborador da empresa que exercia a mesma função deixou este desenho na documentação de trabalho. Poderá este grafo representar o mapa da figura acima, como descrito na alínea a)? Justifique.



d) (4.5 val.) Nesta zona da cidade, será instalada brevemente uma rede de fibra óptica, que chegue a cada um dos nós indicados no mapa. Sabendo que o custo (em M€) entre nós é dado pela matriz seguinte (o número da linha/coluna corresponde ao número do nó), determine uma das soluções mais económicas para a instalação da rede (desenhe a solução e indique o seu custo).
Traduza o problema proposto como um problema de Teoria de Grafos e implemente um algoritmo dado nas aulas, identificando-o e construindo a tabela com os cálculos efetuados pelo algoritmo (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).

$$\begin{pmatrix}
\infty & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
1 & \infty & 8 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\
1 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty \\
\infty & 1 & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 3 & \infty & 4 & \infty \\
\infty & \infty & 5 & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 3 \\
\infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & 1 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 1 & \infty
\end{pmatrix}.$$

e) (4.5 val.) Se, em vez do problema anterior, se pretendesse ligar apenas o nó 1 ao cruzamento entre a Rua Soares Passos e a Rua Felicidade Brown, qual a forma mais económica de o fazer? (Apresente o caminho e o seu custo.)
Mais uma vez, traduza o problema proposto como um problema de Teoria de Grafos e implemente um algoritmo dado nas aulas, identificando-o e construindo a tabela com os cálculos efetuados pelo algoritmo (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).