Sebenta de ALGAN

João Carrilho de Matos

9 de janeiro de 2024

Conteúdo

Capítulo 1

Matrizes

1.1 Definição e representação

Definição 1.1 (Matriz real)**.**

Sejam m e n dois inteiros positivos. Uma matriz real com m linhas e n colunas, é um quadro com $m\,n$ números reais dispostos em m linhas e n colunas.

Dependendo das circunstâncias, existem várias formas de se representar uma matriz. Iremos introduzir as diferentes versões de representação de uma matriz ao logo deste capítulo. Usaremos, geralmente, letras maiúsculas a negrito para designar matrizes. Como excepção, usaremos letras minúsculas a negrito no caso de uma matriz possuir apenas uma coluna ou uma linha. No caso de pretendermos realçar as dimensões ou a estrutura de uma matriz utilizaremos a notação

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

onde os subíndices de cada entrada $a_{i,j}$ indicam que esta se encontra na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$.

Alternativamente, podemos usar parêntesis curvos em vez parêntesis rectos para delimitar as entradas de uma matriz.

Notamos que, geralmente, representamos as entradas de uma matriz usando a mesma letra (não assinalada a negrito) com que representamos a matriz. Por vezes, também se representa uma matriz da forma

$$\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Definição 1.2.

Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz do tipo $m \times n$. Representa-se o conjunto formado por todas as matrizes reais do tipo $m \times n$ pelo símbolo $\mathscr{M}_{m,n}$.

Definição 1.3.

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$ diz-se *rectangular* se $m \neq n$. Como casos particulares têm-se: as *matrizes coluna* ($n = 1$)

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{m,1} \end{bmatrix}$$

e as *matrizes linha* (m=1)

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \cdots & l_{1,n} \end{bmatrix}$$

Definição 1.4 (Matriz quadrada)**.**

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$ diz-se *quadrada* se $m = n$. Frequentemente, por comodidade, dizemos que uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$) tem *ordem* n e escrevemos apenas $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$.

Definição 1.5 (Diagonais, principal e secundária)**.**

Seja $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, uma matriz quadrada de ordem n. A *diagonal principal* da matriz $\mathbf{A}$ é constituída pelas entradas com os índices índices (i, j) tais que $i = j$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e a diagonal secundária da matriz $\mathbf{A}$ é constituída pelas entradas com os índices (i, j) tais que $i + j = n + 1$.
Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ (não necessariamente quadrada), definimos a *diagonal principal* da matriz $\mathbf{A}$ como sendo o conjunto de índices $\{(1,1), (2,2), \ldots, (\min(m,n), \min(m,n))\}$.

Exemplos: Nos seguintes exemplos, assinalamos as entradas que pertencem às diagonais principais a vermelho e as entradas que pertencem às diagonais secundárias a azul. Note que apenas definimos diagonais secundárias de matrizes quadradas.

$$a)\ \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \pi \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

♣

Dentro das matrizes quadradas, destacamos as: matrizes triangulares (inferiores e superiores) e diagonais.

Definição 1.6 (Matriz triangular superior)**.**

Uma matriz quadrada $\left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, de ordem n diz-se *triangular superior* se e somente se $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. Ou seja, uma matriz triangular superior tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

A definição de matriz triangular inferior é análoga,

Definição 1.7 (Matriz triangular inferior)**.**

Uma matriz quadrada $\left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, de ordem n diz-se *triangular inferior* se e somente se $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. Ou seja, uma matriz triangular inferior tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Outras matrizes quadradas que iremos referir ao longo do curso são as matrizes diagonais.

Definição 1.8 (Matriz diagonal, escalar e identidade)**.**

Uma matriz quadrada $\left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, de ordem n, diz-se *diagonal* se e somente se for simultaneamente triangular superior e triangular inferior. Ou seja, as suas entradas satisfazem a condição $a_{i,j}=0$ para todo $i\neq j$. As matrizes diagonais possuem forma geral

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Por vezes, por comodidade, também se escreve $\operatorname{diag}\{a_{1,1},a_{2,2},\ldots,a_{n,n}\}$.
Se uma matriz diagonal possuir os elementos da diagonal principal todos iguais dizemos que é uma matriz *escalar* e se os elementos da diagonal principal de uma matriz forem iguais a 1 dizemos que a matriz é a matriz *identidade* ou *unitária* de ordem n e representamo-la por $\mathbf{I_n}$ ou, se não houver ambiguidades relativamente à sua ordem, simplesmente por $\mathbf{I}$.

Exemplos: As matrizes $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{I_4}$ são todas diagonais. Em particular, as matrizes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{I_4}$ são matrizes escalares sendo que $\mathbf{I_4}$ é a matriz unitária de ordem 4.

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{I_4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

♣

Observação: *No caso de se ter uma matriz de ordem* 1*, identificamos a matriz com o escalar que constitui a sua única entrada. Ou seja, identifica-se a matriz* $[a]$ *com o escalar* $a\in\mathbb{R}$.

Definição 1.9 (Entradas homólogas)**.**

Seja $a_{i,j}$ uma entrada de uma matriz $\mathbf{A}$ e $b_{\ell,k}$ uma entrada de uma matriz $\mathbf{B}$, onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes do mesmo tipo ($\mathbf{A},\ \mathbf{B}\in\mathscr{M}_{m,n}$). Dizemos que as entradas $a_{i,j}$ e $b_{\ell,k}$ são *homólogas* se e somente se $i=\ell$ e $j=k$.

Definição 1.10 (Igualdade de duas matrizes)**.**

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$. Dizemos que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são iguais, e escrevemos $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se todas as entradas homólogas forem iguais. Caso contrário, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se diferentes, e escrevemos $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Observação:

- *Matrizes que não sejam do mesmo tipo são necessariamente diferentes,*
- *Matrizes que sejam do mesmo tipo e que tenham, pelo menos, um par de entradas homólogas diferentes são diferentes.*

Definição 1.11 (Submatriz)**.**

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$ e sejam k, ℓ dois inteiros positivos tais que $k \leq m$ e $\ell \leq n$. Dizemos que $\mathbf{A}'$ é uma *submatriz* de $\mathbf{A}$ se a matriz $\mathbf{A}'$ for constituida por entradas comuns a k linhas e ℓ colunas de $\mathbf{A}$.

Nota: Quando suprimimos $m-k$ linhas e $n-\ell$ colunas de $\mathbf{A}$ obtém-se uma submatriz $\mathbf{A}' \in \mathrm{M}_{k,\ell}$ de $\mathbf{A}$.

1.2 Operações com matrizes

Definição 1.12 (Adição de matrizes)**.**

Sejam $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ e $\mathbf{B} = \left[b_{i,j}\right]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ duas matrizes, do mesmo tipo $(m \times n)$. Definimos a *soma* da matriz $\mathbf{A}$ com a matriz $\mathbf{B}$ como sendo uma matriz $\mathbf{C}$ do tipo $m \times n$, cujas entradas são determinadas por

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

e escrevemos $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

Observação: *A adição de duas matrizes de diferentes tipos não está definida.*

Por exemplo, se

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x & 0 & 1\\ -1 & -1 & y\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\ \text{ e }\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix} x+2 & -9 & y\\ -1 & -z & y\\ 0 & -1 & -x\end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\mathbf{A}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 2x+2 & -9 & 1+y\\ -2 & -(1+z) & 2y\\ 0 & 1 & -(1+x)\end{bmatrix};\ \mathbf{C}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a-1\\ b\\ c+1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{I_3}=\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & y\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Sejam m e n dois inteiros positivos quaisquer. A adição de matrizes pertencentes ao conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$ possui as seguintes propriedades.

Propriedades 1.1 (da adição de matrizes)**.**

1. A adição é uma *operação fechada* no conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$, ou seja, tem-se

$$\forall\, \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{m,n}\ ,\ \exists\, \mathbf{C}\in\mathcal{M}_{m,n}\ :\ \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}.$$

2. A adição de matrizes é uma *operação associativa*, ou seja, tem-se

$$\forall\, \mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathcal{M}_{m,n}\ ,\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}).$$

3. Existe um elemento neutro, **E**, em $\mathcal{M}_{m,n}$, relativamente à operação adição.

$$\exists\, \mathbf{E}\in\mathcal{M}_{m,n}\ ,\ \forall\, \mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m,n}\ :\ \mathbf{A}+\mathbf{E}=\mathbf{E}+\mathbf{A}=\mathbf{A}.$$

4. Todo a matriz **A** em $\mathcal{M}_{m,n}$, possui uma matriz *inversa aditiva* (ou *simétrica*) $\mathbf{A}'$ [a] . Ou seja,

$$\forall\, \mathbf{A}\in\mathcal{M}_{m,n}\ ,\ \exists\, \mathbf{A}'\in\mathcal{M}_{m,n}:\ \mathbf{A}+\mathbf{A}'=\mathbf{A}'+\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

5. A adição de Matrizes é uma *operação comutativa*,

$$\forall\, \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{m,n}\ :\ \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

[a] Para evitar confusão com o conceito de *matriz simétrica*, que iremos falar à frente, usaremos neste contexto o termo “inversa aditiva” em vez de “simétrica”.

As demonstrações destas propriedades não oferecem quaisquer dificuldades visto que o conjunto $\mathbb{R}$, munido com a adição usual, possui propriedades similares.

É fácil de verificar que, para cada conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$, apenas existe um elemento neutro, e que se tem $\mathbf{E} = \mathbf{0_{m,n}}$, onde $\mathbf{0_{m,n}}$ designa a matriz do tipo $m \times n$ com as entradas todas nulas. A matriz $\mathbf{0_{m,n}}$ diz-se a matriz nula do tipo $m \times n$.

É igualmente fácil de verificar que existe apenas uma matriz inversa aditiva de uma matriz $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. Frequentemente, representa-se a matriz inversa aditiva de $\mathbf{A}$ com o símbolo $-\mathbf{A}$ e tem-se $-\mathbf{A} = [-a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. Usando a noção de inversa aditiva pode-se definir a subtracção de matrizes sendo que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ *menos* $\mathbf{B}$) representa a soma da matriz $\mathbf{A}$ com a matriz inversa aditiva da matriz $\mathbf{B}$, ou seja $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

Definição 1.13 (Produto de um escalar por uma matriz)**.**

Sejam α um número real e $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. O *produto do escalar* α pela matriz $\mathbf{A}$ é uma matriz do mesmo tipo da matriz $\mathbf{A}$, cujas entradas são iguais às entradas homólogas da matriz $\mathbf{A}$ multiplicadas pelo escalar α. Em notação matemática tem-se

$$\alpha\mathbf{A} = [\alpha a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}.$$

Exemplos: Tem-se

$$\pi \begin{bmatrix} \pi & -1 & \alpha \\ 2 & \pi^{-1} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi^2 & -\pi & \pi\alpha \\ 2\pi & 1 & -2\pi \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

♣

Propriedades 1.2.

Para todas as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em $\mathcal{M}_{m,n}$ e para todos os escalares α e β, tem-se

1. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$.
3. $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$.
4. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
5. $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Definição 1.14 (Multiplicação de matrizes)**.**

Sejam as matrizes $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le \ell}} \in \mathcal{M}_{m,\ell}$ e $\mathbf{B} = \left[b_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le \ell\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{\ell,n}$. Definimos o *produto* da matriz **A** pela matriz **B** como sendo a matriz $\mathbf{C} = \left[c_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$, e escrevemos $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$, ou simplesmente $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, sendo as entradas da matriz **C** dadas pela relação

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exemplos e observações: Notamos que apenas podemos efectuar a multiplicação $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ se o número de colunas da matriz à esquerda, **A**, for igual ao número das linhas da matriz à direita, **B**. Por exemplo, considerando as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 + 3\times 2 & 1\times 3 + 2\times(-1) + 3\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mas, a multiplicação **BA não está definida**, dado que a matriz à esquerda tem 2 colunas e a matriz à direita tem 1 linha. Contudo, se as matrizes **A** e **B** forem ambas quadradas e de ordens iguais, os produtos **AB** e **BA** estão ambos definidos. Salientamos que, neste caso, a multiplicação de matrizes não possui a propriedade comutativa. Ou seja, a propriedade

$$\forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n,\ \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

é falsa. Evidentemente esta propriedade não implica que não existam matrizes **A** e **B** quadradas tais que, se verifica a igualdade $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ e tem-se a seguinte

Definição 1.15 (Matrizes permutáveis (ou comutáveis))**.**

Dizemos que duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ são *permutáveis* (ou *comutáveis*) se se verificar a igualdade

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$$

Pode ainda ocorrer, que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ permute com todas as matrizes de $\mathcal{M}_n$. Neste caso diremos que a matriz $\mathbf{A}$ pertence ao centro de $\mathcal{M}_n$, que denotamos por $\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n)$. Logo tem-se a seguinte

Definição 1.16 (Centro de $\mathcal{M}_n$)**.**

O *centro* de $\mathcal{M}_n$ é o conjunto formado pelas matrizes quadradas de ordem n que permutam com todas as matrizes quadradas de ordem n. Ou seja

$$\mathcal{Z}(\mathcal{M}_n) = \left\{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n : \mathbf{AX} = \mathbf{XA},\ \forall \mathbf{X} \in \mathcal{M}_n\right\}.$$

Observação: A matriz $\mathrm{I}_n \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_n)$

Exemplos: Considere as seguintes matrizes quadradas de ordem 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se o seguinte:

1. A matriz $\mathbf{A}$ não comuta com a matriz $\mathbf{B}$ porque se tem,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. A matriz $\mathbf{A}$ comuta com a matriz $\mathbf{C}$ porque se tem,

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. A matriz $\mathbf{A} \notin \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$. De facto, se $\mathbf{A}$ pertencesse ao centro de $\mathcal{M}_2$, teria de permutar com todas as matrizes quadradas de ordem 2 e verificámos atrás que ela não comuta com a matriz $\mathbf{B}$.

4. A matriz $\mathbf{D}$ comuta com todas as matrizes quadradas de ordem 2. De facto tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{bmatrix}$$

consequentemente $\mathbf{D} \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}_2)$.

♣

Propriedades 1.3.

Considerem-se as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m,\ell}$, $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathcal{M}_{\ell,p}$ e $\mathbf{E} \in \mathcal{M}_{p,n}$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são válidas:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{D}+\mathbf{B}\mathbf{D}$
2. $\mathbf{A}\,(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{A}\mathbf{D}$
3. $(\mathbf{A}\mathbf{D})\,\mathbf{E} = \mathbf{A}\,(\mathbf{D}\mathbf{E})$
4. $\mathbf{0}_{\mathbf{r},\mathbf{m}}\mathbf{A} = \mathbf{0}_{\mathbf{r},\ell}$ e $\mathbf{A}\mathbf{0}_{\ell,\mathbf{s}} = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{s}}$
5. $\mathbf{I}_{\mathbf{m}}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}\mathbf{I}_{\ell} = \mathbf{A}$
6. $\alpha\,(\mathbf{A}\mathbf{C}) = (\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\alpha\mathbf{C})$

Notas: A primeira propriedade chama-se propriedade distributiva à direita da multiplicação relativamente à adição. A segunda propriedade chama-se propriedade distributiva à esquerda da multiplicação relativamente à adição. A terceira propriedade chama-se propriedade associativa da multiplicação. As propriedades indicadas em 4. chamam-se, respectivamente, existência de elemento absorvente à esquerda e à direita. E as propriedades indicadas em 5. chamam-se, respectivamente, existência de elemento neutro à esquerda e à direita.

Definição 1.17 (Matrizes invertíveis)**.**

Dizemos que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ é *invertível* (ou *regular*) se existir uma matriz $\mathbf{Z} \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\mathbf{A} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}} \tag{1.1}$$

Se não existir uma matriz $\mathbf{Z} \in \mathcal{M}_n$ tal que se verifique a igualdade 1.1 então a matriz $\mathbf{A}$ diz-se não *invertível* (ou *singular*).

☞ *No caso de* $\mathbf{A}$ *ser invertível existe apenas uma matriz* $\mathbf{Z}$ *que satisfaz 1.1. Chamamos a essa matriz a matriz inversa de* $\mathbf{A}$ *e representamo-la por* $\mathbf{A}^{-1}$.

Observação: Existem critérios para decidir se uma matriz é invertível ou não é invertível. Estes critérios usam o conceito de característica de uma matriz ou de determinante de uma matriz e irão ser abordados mais à frente. No caso de uma matriz ser invertível iremos, igualmente, abordar técnicas para calcular a sua inversa.

Exemplo: A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, porque se tem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

logo tem-se

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

E a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz $\mathbf{A}$. Ou seja, tem-se $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

♣

Definição 1.18 (Potência de ordem $k \in \mathbb{Z}$)**.**

Sejam $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ e k um inteiro. A *potência* de ordem k da matriz $\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{A}^k \in \mathscr{M}_n$ tal que,

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^0 = \mathbf{I_n} \\ &\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k > 0. \\ &\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A}^{-1} \times \ldots \times \mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ vezes}} \quad \text{se } k < 0 \quad (\mathbf{A} \text{ invertível}). \end{aligned}$$

Definição 1.19 (Transposta (de uma matriz))**.**

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ uma matriz do tipo $m \times n$. A *transposta* da matriz $\mathbf{A}$ é uma matriz do tipo $n \times m$, e representa-se pelo símbolo $\mathbf{A^T} = [a'_{i,j}]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$, onde

$$a'_{i,j} = a_{j,i}, \quad 1 \le i \le n \text{ e } 1 \le j \le m.$$

Exemplos: Considerando as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tem-se,

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{C}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deixamos ao leitor o exercício de determinar as matrizes $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}}$, $(\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}}$ e $(\mathbf{C}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}}$.

♣

Definição 1.20 (Matrizes simétricas e anti-simétricas)**.**

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Diz-se que $\mathbf{A}$ é uma *matriz simétrica* se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Se $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, diz-se que a matriz $\mathbf{A}$ é uma *matriz anti-simétrica* .

Notas: Se uma matriz quadrada $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ for simétrica existe uma simetria das entradas relativamente à diagonal principal de $\mathbf{A}$, dado que a condição $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ impõe as igualdades $a_{i,j} = a_{j,i}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Se uma matriz quadrada $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ for anti-simétrica, tem-se que as entradas da diagonal principal são necessariamente nulas.

Por exemplo, todas as matrizes simétricas de ordem 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

e todas as matrizes anti-simétricas de ordem 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

♣

Propriedades 1.4.

Considere as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_{m,\ell}$ e $\mathbf{C} \in \mathscr{M}_{\ell,n}$. Tem-se

1. $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \pm \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathbf{A}\,\mathbf{C})^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Propriedades 1.5.

Considere: a matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_m$ e as matrizes invertíveis $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathscr{M}_n$. Então verificam-se as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A}^k)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.
2. $(\mathbf{B}\,\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C^{-1}}\,\mathbf{B^{-1}}$.
3. $(\mathbf{B}^k)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Característica de uma matriz

1.3.1 Dependência e independência linear de filas de uma matriz

Ao longo desta sebenta usaremos o termo "filas" para designar indistintamente linhas ou colunas de uma matriz. Seja $\mathbf{A} = \left[a_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathscr{M}_{m,n}$. Iremos considerar as seguintes submatrizes de $\mathbf{A}$:

- As matrizes linhas da matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A_{i,*}} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{bmatrix}, \;\; i = 1,2,\dots,m$$

- As matrizes coluna da matriz $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A_{*,j}} = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}, \;\; j = 1,2,\dots,n$$

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$, $\mathscr{L} = \{\mathbf{A_{1,*}}, \mathbf{A_{2,*}}, \dots, \mathbf{A_{m,*}}\}$ o conjunto constituído pelas matrizes linhas de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathscr{C} = \{\mathbf{A_{*,1}}, \mathbf{A_{*,2}}, \dots, \mathbf{A_{*,n}}\}$ o conjunto constituído pelas matrizes coluna de $\mathbf{A}$. Considere os conjuntos de índices $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1,2,\dots,m\}$, com $1 \le k \le m$ e $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} \subset \{1,2,\dots,n\}$, com $1 \le \ell \le n$. Note que o conjunto $\{\mathbf{A_{i_1,*}}, \mathbf{A_{i_2,*}}, \dots, \mathbf{A_{i_k,*}}\}$ ($\{\mathbf{A_{*,i_1}}, \mathbf{A_{*,i_2}}, \dots, \mathbf{A_{*,i_\ell}}\}$) é um subconjunto não vazio de $\mathscr{L}$ ($\mathscr{C}$), respectivamente.

Definição 1.21 (Combinação linear de filas de uma matriz)**.**

Uma *combinação linear das k matrizes linha* $\mathbf{A_{i_1,*}}, \mathbf{A_{i_2,*}}, \ldots, \mathbf{A_{i_k,*}}$ é uma expressão da forma

$$\alpha_1 \mathbf{A_{i_1,*}} + \alpha_2 \mathbf{A_{i_2,*}} + \cdots + \alpha_k \mathbf{A_{i_k,*}}$$

e a expressão

$$\beta_1 \mathbf{A_{*,j_1}} + \beta_2 \mathbf{A_{*,j_2}} + \cdots + \beta_\ell \mathbf{A_{*,j_\ell}}$$

é uma *combinação linear das ℓ matrizes coluna* $\mathbf{A_{*,j_1}}, \mathbf{A_{*,j_2}}, \ldots, \mathbf{A_{*,j_\ell}}$, onde, os coeficientes α_i e β_j são números reais quaisquer.

Definição 1.22 (Independência e dependência linear)**.**

Dizemos que as matrizes linha em $\mathscr{L}$ da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes (L.I.) se

$$\alpha_1 \mathbf{L_{i_1}} + \alpha_2 \mathbf{L_{i_2}} + \cdots + \alpha_k \mathbf{L_{i_k}} = \mathbf{0_{1,k}} \implies \alpha_i = 0,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}. \tag{1.2}$$

A negação da condição (1.2) é

$$\exists \alpha_p \neq 0,\ 1 \leq p \leq k,\ \wedge\ \alpha_1 \mathbf{L_{i_1}} + \alpha_2 \mathbf{L_{i_2}} + \cdots + \alpha_k \mathbf{L_{i_k}} = \mathbf{0_{1,k}}. \tag{1.3}$$

No caso de as matrizes linha em $\mathscr{L}$ satisfazerem a condição (1.3) dizemos que são *linearmente dependentes* (L.D.).
Análogamente se definem conjuntos L.I. (e L.D.) de matrizes coluna da matriz **A**.

Exemplo: Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

O conjunto das matrizes linha de **A** é o conjunto

$$\mathscr{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

e o conjunto das matrizes coluna de **A** é o conjunto

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Considerando a combinação linear das duas primeiras colunas de **A** e igualando à matriz $\mathbf{0_{3,1}}$ tem-se,

$$\beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 \\ 2\beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A última igualdade verifica-se se e somente se β_1 e β_2 satisfizerem simultaneamente as seguintes 3 equações

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 = 0 \end{cases}$$

Analisando a 3^a equação concluímos que β_1 é necessariamente nulo, e substituindo nas restantes equações β_1 por zero, concluímos que β_2 é necessariamente nulo. Ou seja, o sistema apenas possui uma solução (a solução nula). Logo as duas primeiras colunas da matriz **A** são L.I..

Considerando a combinação linear das 1^a, 2^a e 4^a colunas e igualando à matriz $\mathbf{0_{3,1}}$ tem-se

$$\beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ \beta_1 - \beta_2 \\ 2\beta_1 + 2\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A última igualdade verifica-se se e somente se β_1, β_2 e β_3 satisfizerem simultaneamente as seguintes 3 equações

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0 \\ \beta_1 - \beta_2 = 0 \\ 2\beta_1 + 2\beta_3 = 0 \end{cases}$$

Analisando a 2^a equação concluímos que β_1 é necessariamente igual a β_2. Substituindo β_1 por β_2 na primeira equação tem-se $\beta_2 = -\beta_3$ e substituindo, na 3^a equação β_1 por $-\beta_3$ obtemos a condição, universal, $0 = 0$. Concluímos, deste modo, que este sistema de equações tem infinitas soluções. Obviamente possui a solução nula, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, mas também possui soluções não nulas, por exemplo, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$. Logo, podemos concluir que estas 3 colunas são L.D..

♣

Definição 1.23 (Característica por linhas e por colunas)**.**

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$. Definimos

- A *característica por linhas* da matriz $\mathbf{A}$ e representamos por $r_\ell(\mathbf{A})$ como sendo o número máximo de matrizes linha de $\mathbf{A}$ L.I..

- A *característica por colunas* da matriz $\mathbf{A}$ e representamos por $r_c(\mathbf{A})$ como sendo o número máximo de matrizes coluna de $\mathbf{A}$ L.I..

Observação: A matriz $\mathbf{A}$ possui m linhas logo tem-se $r_\ell(\mathbf{A}) \leq m$. Aplicando raciocinio idêntico às colunas, concluímos que $r_c(\mathbf{A}) \leq n$.

Exercício: Verifique que tem $r_\ell(\mathbf{A}) = r_c(\mathbf{A}) = 2$, onde a matriz $\mathbf{A}$ está definida em 1.4.

Nota: O facto da característica por linhas da matriz $\mathbf{A}$ no exercício anterior ser igual à sua característica por colunas não é coincidência. De facto, tem-se o seguinte

Teorema 1.1.

Para toda a matriz $\mathbf{A}$ tem-se $r_\ell(\mathbf{A}) = r_c(\mathbf{A})$.

Este resultado faz com que a seguinte definição seja consistente,

Definição 1.24 (Característica uma matriz)**.**

Definimos a característica de $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$, e representamos por $r(\mathbf{A})$, como sendo o número máximo de matrizes linha (ou de matrizes coluna) da matriz $\mathbf{A}$ L.I.. Ou seja,

$$r(\mathbf{A}) = r_\ell(\mathbf{A}) = r_c(\mathbf{A}).$$

☞ *Tem-se sempre* $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

A primeira aplicação da característica de uma matriz é o seguinte critério de invertibilidade de uma matriz (quadrada).

Teorema 1.2.

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ uma matriz quadrada de ordem n. Então a matriz $\mathbf{A}$ é invertível se $\mathbf{A}$ tem característica máxima. Ou, por outras palavras, a matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ tem matriz inversa sse $r(\mathbf{A}) = n$.

Para matrizes de dimensões consideráveis não é viável o uso da definição para calcular a característica de uma matriz. Em problemas reais é frequente usar-se um método, baseado no algoritmo de eliminação Gaussiana, que permite calcular a característica de uma matriz com muito menos esforço computacional. Tendo em vista estudar este método, começamos com a seguinte definição.

Definição 1.25 (Matriz em forma de escada por linhas)**.**

Seja $\mathbf{E}$ uma matriz. Em cada linha dizemos que a primeira entrada não nula é o *coeficiente líder* (dessa linha). Se uma linha contém apenas entradas nulas não possui coeficiente líder.
Dizemos que a matriz $\mathbf{E}$ está em *forma de escada por linhas* se:

1. Para toda a linha $i > 1$, da matriz $\mathbf{E}$, o coeficiente líder encontra-se à direita do coeficiente da linha anterior (da linha $i-1$)

2. Se uma linha tiver entradas todas nulas, então todas as linhas abaixo dela possuem igualmente entradas todas nulas.

Exemplos: Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A única matriz que está em forma de escada é a matriz $\mathbf{B}$. Na matriz $\mathbf{A}$ o coeficiente líder da linha 2 está à esquerda do coeficiente líder da linha anterior. Na matriz $\mathbf{C}$ o coeficiente líder da linha 3 não está à direita do coeficiente líder da linha 2 (encontram-se ambos na coluna 2). A matriz $\mathbf{D}$ possui uma linha nula (sem coeficientes líder) anterior a uma linha com coeficiente líder.

♣

Se uma matriz $\mathbf{A}$ estiver em forma de escada, o cálculo da sua característica é imediato. De facto, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.3.

Seja $\mathbf{E}$ uma matriz em forma de escada. Então tem-se

$$r(\mathbf{E}) = \text{número de linhas não nulas de } \mathbf{E}.$$

Este teorema é crucial para calcularmos a característica de uma matriz qualquer, esteja ou não em forma de escada. A ideia é transformar uma matriz **A**, usando operações que não alteram a característica da matriz original, numa matriz **E** em forma de escada. Desta forma, usando o Teorema 1.4, facilmente calculamos a característica da matriz **A**, visto ser igual à característica da matriz **E**.

Definição 1.26 (Operações elementares sobre linhas (colunas))**.**

Considere uma matriz **A**. Designam-se *operações elementares sobre as linhas (colunas)* as operações:

1. Troca de linhas da matriz **A**. A troca das linhas L_i e L_j (das colunas C_i e C_j) representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$[a].

2. A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela linha αL_i (coluna βC_i), onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ou seja, a substituição de uma linha L_i (coluna C_i) por um seu múltiplo αL_i (βC_i) não nulo. Representamos esta operação elementar por

$$L_i \leftarrow \alpha L_i \quad \left(C_i \leftarrow \beta C_i \right)$$

3. A substituição de uma linha L_i (coluna C_i) pela sua soma com um múltiplo de outra linha (coluna). Representamos esta operação elementar por

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad \left(C_i \leftarrow C_i + \beta C_j \right)$$

[a]Por comodidade representamos nas operações elementares a i-ésima linha de uma matriz **A** por L_i, em vez de $\mathbf{A_{i,*}}$, e a j-ésima coluna de uma matriz **A** por C_i, em vez de $\mathbf{A_{*,j}}$.

Definição 1.27 (Matrizes equivalentes)**.**

Duas matrizes dizem-se *equivalentes* se uma resulta da outra através de uma sequência finita de operações elementares.

Teorema 1.4.

Matrizes equivalentes têm características iguais.

Exemplo: Considere a matriz **A** (que não está em forma de escada). Iremos efectuar algumas operações elementares de forma a obtermos uma matriz **E** em forma de escada.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A_1}} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-1)L_1} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A_2}} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + (-2)L_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A_3}} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{E}}$$

O teorema 1.4 garante que as matrizes **A**, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, e **E** têm todas a mesma característica. A matriz **E** está em forma de escada por linhas. Como **E** possui 3 linhas não nulas tem-se

$$r(\mathbf{E}) = r(\mathbf{A_3}) = r(\mathbf{A_2}) = r(\mathbf{A_1}) = r(\mathbf{A}) = 3.$$

Note que uma matriz pode ter mais do que uma matriz equivalente em forma de escada por linhas. Por exemplo se trocássemos na matriz **E** a terceira coluna com a quarta coluna obteríamos uma matriz $\mathbf{E}'$ equivalente à matriz **A** e a matriz $\mathbf{E}'$ encontra-se também em forma de escada por linhas.

♣

No exercício anterior encontrámos uma matriz **E** em forma de escada equivalente à matriz **A** aplicando sucessivamente operações elementares. Contudo não indicámos um procedimento geral, na escolha das operações elementares, que resulte para uma matriz qualquer. Iremos de seguida abordar uma versão do algoritmo de eliminação de Gauss.

Algoritmo 1 (de eliminação Gaussiana)**.**

Considere a matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$.

1. Seja $\mathbf{U} = \mathbf{A}$ e $r = 1$. Se $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, $\mathbf{U}$ está em forma de escada por linhas (**STOP**).
2. Se $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$, procurar nas linhas $r, \ldots, m$, da matriz $\mathbf{U}$, a primeira coluna, k, não nula e primeira entrada $a_{i,k} \neq 0$. Se $i > r$, troque as linhas r e i em $\mathbf{U}$ (obtém-se uma entrada não nula na posição (r, k)). Seja $\mathbf{U}$ a matriz que resulta desta troca.
3. Adicionar múltiplos da linha r às linhas abaixo para anular todas as entradas localizadas na coluna k e nas linhas $r + 1, \ldots, m$. Seja $\mathbf{U}$ a matriz resultante.
4. Se $r = m-1$ ou as linhas $r+1, \ldots, m$ são todas nulas, $\mathbf{U}$ está em forma de escada por linhas (**STOP**). Caso contrário faça $r = r + 1$ e repita os passos 2, 3 e 4.

No passo 3*, não explicitámos as operações elementares que permitem anular as entradas da coluna k e das linhas $r + 1, \ldots, k$. Contudo facilmente se verifica que efectuando a operação $\mathrm{L}_\ell \leftarrow \mathrm{L}_\ell - m_\ell \mathrm{L}_r$, com $m_\ell = a_{\ell,k} / a_{r,k}$ anulamos a entrada $a_{\ell,k}$.*

Exemplo: Algoritmo de eliminação Gaussiana aplicado à matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Passo 1. $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{A}$ e $r = 1$.

Passo 2. Como $a_{1,1} \neq 0$, não é necessário troca de linhas.

Passo 3. Anular as entradas da primeira coluna abaixo da entrada $a_{1,1}$. Tem-se

$$m_2 = \frac{-4}{2}, \quad m_3 = \frac{0}{2}, \quad \text{e} \quad m_4 = \frac{1}{2},$$

Consequentemente, apenas temos de efectuar as operações $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - (-2)\mathrm{L}_1$ e $\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_1$. Obtemos, desta forma, a matriz

$$\mathbf{U}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A submatriz, de $\mathbf{U}^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4 não é a matriz nula, consequentemente incrementamos o valor de r, o valor de r passa a ser 2, e voltamos ao passo 2.

Passo 2. A primeira coluna não nula, da submatriz de $\mathbf{U}^{(2)}$, constituída pelas linhas 2, 3 e 4, é a terceira e a primeira entrada não nula da terceira coluna situa-se na terceira linha de $\mathbf{U}^{(2)}$. Consequentemente efectuamos a troca de linhas $L_2 \leftrightarrow L_3$ em $\mathbf{U}^{(2)}$. Desta forma tem-se

$$\mathbf{U}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passo 3. Anular as entradas da terceira coluna abaixo da entrada $a_{2,3}$. Tem-se $m_4 = -1/-1$ e efectua-se a operação elementar $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$. Obtendo-se

$$\mathbf{U}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. A matriz $\mathbf{U}^{(4)}$ está em forma de escada por linhas e a eliminação Gaussiana terminada.

Esquematicamente escrevemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ -4 & -12 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 1/2 L_4]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

♣

1.4 Exercícios

1.1 *Considere as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule se possível as seguintes matrizes:

a) $\mathbf{AB}$	***b)*** $\mathbf{BA}$	***c)*** $\mathbf{AB^T}$	***d)*** $\mathbf{BB^T}$	***e)*** $\mathbf{BI_2}$
f) $\mathbf{C} + 2\mathbf{D^T}$	***g)*** $\mathbf{B}(\mathbf{C}+\mathbf{F})$	***h)*** $(\mathbf{C}+\mathbf{F})\mathbf{B}$	***i)*** $(\mathbf{C}+\mathbf{F})\mathbf{B^T}$	***j)*** $\mathbf{I_2}(\mathbf{B}-3\mathbf{E})$
k) $4\mathbf{A^T}+\mathbf{D}$	***l)*** $\mathbf{CA^T}$	***m)*** $(\mathbf{CA})^{\mathrm{T}}$	***n)*** $(\mathbf{C}-\mathbf{F})^2$	***o)*** $(\mathbf{BE})^2$
p) $(\mathbf{EB})^2$	***q)*** $\mathbf{BCFD}$	***r)*** $\mathbf{AA^T}$	***s)*** $\mathbf{EB}+\mathbf{C}$	***t)*** $(\mathbf{C}(\mathbf{D}+\mathbf{A^T}))^{\mathrm{T}}\mathbf{E}$

1.2 *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$. *Em que condições se verifica a relação,*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$$

1.3 *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ *simétricas. Em que condições se verifica a propriedade, "a matriz* $\mathbf{AB}$ *é simétrica".*

1.4 *Resolva as seguintes equações matriciais em ordem à matriz* $\mathbf{X}$.

a) $\mathbf{AX}+\mathbf{XB} = \mathrm{C}$, *onde* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *é invertível e* $\mathbf{X}$ *permuta com* $\mathbf{A}$.

b) $\mathbf{AX}+\mathbf{XB} = \mathrm{C}$, *onde* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *é invertível e* $\mathbf{X}$ *permuta com* $\mathbf{B}$.

c) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{\mathrm{T}} - \mathbf{I}^5 = \mathbf{0}$, *onde* $\mathbf{A}$ *é invertível.*

d) $((\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$, *onde* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *são invertíveis e* $\mathbf{A}^{-1}$ *é simétrica.*

e) $(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} + (\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$, *onde* $\mathbf{C}$ *é invertível.*

1.5 *Determine o conjunto formado pelas matrizes que comutam com a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.6 *Considere a matriz* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) *Determine a matriz* $\mathbf{A}$ *que satisfaz a relação* $\mathbf{AB} = \mathbf{I_2}$.

b) *Sabendo que* $\mathbf{B}^{20} = \begin{bmatrix} 1 & -349525 \\ 0 & 1048576 \end{bmatrix}$, *determine* $\mathbf{B}^{19}$.

1.7 *Considere a matriz* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) *Mostre que* $\mathbf{A^n} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) *Encontre a matriz inversa,* $\mathbf{A^{-1}}$.

c) *Mostre que* $\mathbf{A^n} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

1.8 *Considere as seguintes matrizes:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada matriz acima referida,

a) *Encontre uma matriz equivalente em forma de escada por linhas,* $\mathrm{E}(*)$.

b) *Calcule a característica.*

1.9 *Determine, se possível duas matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \neq -\mathbf{B}$) *invertíveis tais que* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *não é invertível.*

1.10 *Seja* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ *invertível.*

a) *Mostra que a matriz* $\alpha\mathbf{A}$ *é invertível.*

b) *Determine* $(\alpha\mathbf{A})^{-1}$.

1.11 *Considere a matriz* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Determine a matriz* $\mathbf{X}$ *que satisfaz a equação* $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^{-1}\right]^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Capítulo 2

Determinantes

2.1 Permutações

Recordamos a noção de permutação, para mais detalhes ver apêndice B. Em particular, uma permutação no conjunto $P_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma função bijectiva de P_n em P_n. Representamos o conjunto das permutações, σ_i, P_n $i = 1, 2, \ldots, n!$, pelo simbolo Σ_n. Por comodidade identificamos uma permutação σ_i com uma matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_i(1) & \sigma_i(2) & \ldots & \sigma_i(n) \end{bmatrix}.$$

O número de inversões, $N(\sigma)$, de uma permutação $\sigma \in \Sigma_n$ é o número de pares $(x, y) \in P_n^2$ que satisfazem a condição

$$x < y \text{ e } \sigma(x) > \sigma(y).$$

Por exemplo, o conjunto Σ_2 é formado pelas permutações:

$$\sigma_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

e o número de inversões de cada permutação é: $N(\sigma_1) = 0$, $N(\sigma_2) = 1$.
O conjunto Σ_3 é formado pelas permutações:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \\ \sigma_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_5 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_6 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O número de inversões de cada permutação é: $N(\sigma_1) = 0$, $N(\sigma_2) = 1$, $N(\sigma_3) = 1$, $N(\sigma_4) = 2$, $N(\sigma_5) = 2$ e $N(\sigma_6) = 3$.

2.2 Definição de determinante

Definição 2.1 (Determinante de ordem n).

Seja n um inteiro positivo. O determinante de ordem n é uma função

$$\det : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n$ tem-se

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{\mathrm{N}(\sigma_i)} a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} \dots a_{n,\sigma_i(n)} \tag{2.1}$$

Notamos que o cálculo de determinantes de matrizes de ordens elevadas, usando a igualdade (2.1), implica um enorme esforço de cálculo. Por exemplo o cálculo de o determinante uma matriz de ordem 15 exige efectuar-se $15! = 1307674368000$ somas e em cada parcela tem-se 15 fatores! (este último sinal "!" é mesmo o sinal de exclamação...). Para ultrapassar este problema iremos encontrar fórmulas de cálculo para determinantes de ordem baixa (de ordem 1, 2 e 3) e encontrar algoritmos que calculam determinantes de ordens superiores sem o esforço de cálculo da igualdade (2.1).

Propriedade 2.1 (Cálculo do determinante de ordem 1).

O determinante de uma matriz $\mathbf{A} = [a_{1,1}] \in \mathcal{M}_1$ coincide com a entrada da matriz $\mathbf{A}$. Ou seja $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1}$.

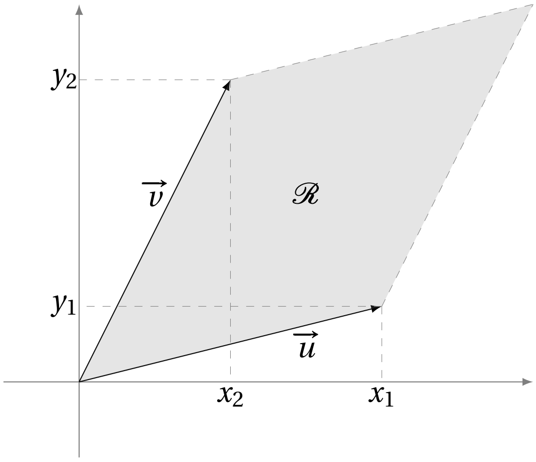
Propriedade 2.2 (Cálculo do determinante de ordem 2).

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_2$. Então

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

☞ *O determinante da matriz* $\mathbf{A}$ *é o produto dos elementos da diagonal principal de* $\mathbf{A}$ *menos o produto dos elementos da diagonal secundária de* $\mathbf{A}$.

Interpretação geométrica: Podemos interpretar geometricamente, o módulo de um determinante de ordem 2, como sendo a área de um paralelogramo definido por dois vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.



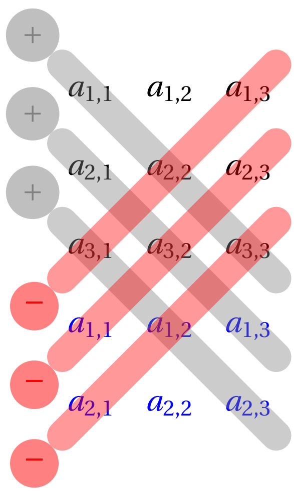
$$\boxed{\text{Área}(\mathscr{R}) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right|}$$

Definição 2.2 (Cálculo do determinante de ordem 3)**.**

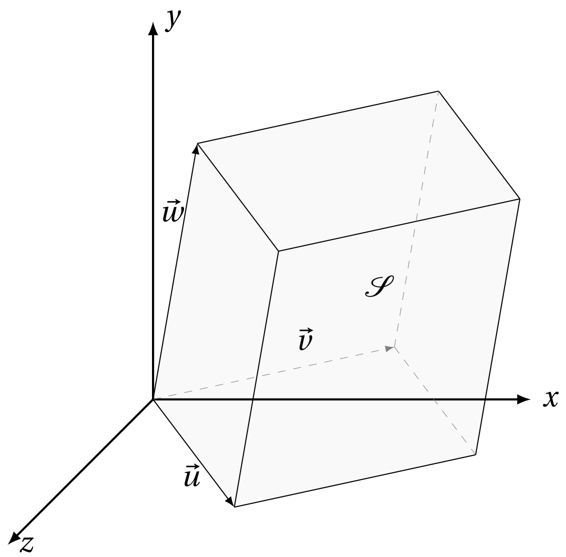
Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_3$. Então

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \big(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}\big) - \big(a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} + a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1}\big)$$

Mnemónica, conhecida por **Regra de Sarrus**, para memorizar a fórmula de cálculo de um determinante de ordem 3.



Interpretação geométrica: Podemos interpretar geometricamente, o módulo de um determinante de ordem 3, como sendo o volume de um paralelepípedo definido por três vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$.



$$\text{Volume}(\mathscr{S}) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Propriedades 2.3.

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$. Tem-se

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathbf{T})$.
2. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular inferior ou triangular superior então,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}.$$

Notas:

i) As matrizes diagonais são casos particulares das matrizes triangulares e o seu determinante é o produto das entradas da diagonal principal.

ii) Da observação anterior concluímos que $\det(\mathbf{I}_n) = 1$.

As propriedades seguintes traduzem o facto da função determinante ser uma função n-*linear* e *anti-simétrica* sobre as linhas (e sobre as colunas). Por comodidade iremos representar uma matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ por $\mathbf{A} = [\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n]$, onde L_i representa a i-ésima linha da matriz $\mathbf{A}$

ou caso pretendamos representar a matriz **A** enfatizando as suas colunas $\mathbf{A} = [C_1, C_2, \ldots, C_n]$, onde C_j representa a j-ésima linha da matriz **A**.

Propriedades 2.4.

Seja $\mathbf{A} = [L_1, L_2, \ldots, L_n] \in \mathcal{M}_n$. A função determinante de ordem n,

$$\det : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{R},$$

diz-se **n-linear** sobre as linhas porque, para toda a linha i tem-se

$$\mathbf{det}([L_1, \ldots, L_{i-1}, \underbrace{\alpha L_i' + \beta L_i''}_{L_i}, L_{i+1}, \ldots, L_n]) =$$

$$\alpha\mathbf{det}([L_1, \ldots, L_{i-1}, L_i', L_{i+1}, \ldots, L_n]) + \beta\mathbf{det}\left([L_1, \ldots, L_{i-1}, L_i'', L_{i+1}, \ldots, L_n]\right)$$

para toda a linha i e para todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Por outro lado diz-se que a função determinante é **anti-simétrica** porque satisfaz a igualdade

$$\mathbf{det}([L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_j, \ldots, L_n]) = -\mathbf{det}([L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_i, \ldots, L_n])$$

Ou seja, se efectuarmos a troca de duas linhas i e j, $i \neq j$, então o determinante matriz resultante é o simétrico do determinante da matriz original.

Nota: Como, para toda a matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \mathbf{det}(\mathbf{A}^T)$ tem-se que a função determinante é igualmente uma função n-linear anti-simétrica sobre as colunas. Ou seja, tem-se:

1.
$$\mathbf{det}([C_1, \ldots, C_{i-1}, \underbrace{\alpha C_i' + \beta C_i''}_{C_i}, C_{i+1}, \ldots, C_n]) =$$

$$\alpha\mathbf{det}([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \ldots, C_n]) + \beta\mathbf{det}\left([C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i'', C_{i+1}, \ldots, C_n]\right)$$

para toda a coluna i e para todos os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2.
$$\mathbf{det}([C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n]) = -\mathbf{det}([C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n])$$

Exercícios: Justifique as seguintes igualdades:

a)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d+2e \\ f & g & h & i+2j \\ l & m & n & o+2p \\ q & r & s & t+2e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & i \\ l & m & n & o \\ q & r & s & t \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & b & c & e \\ f & g & h & j \\ l & m & n & p \\ q & r & s & e \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0\times c & d \\ e & f & 0\times g & h \\ i & j & 0\times l & m \\ n & o & 0\times p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & d \\ e & f & 0 & h \\ i & j & 0 & m \\ n & o & 0 & q \end{vmatrix} = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = 0$$

Resolução:

a) O determinante é linear relativamente à 4^a coluna ($\alpha = 1$ e $\beta = 2$).

b) O determinante é linear relativamente à 3^a coluna ($\alpha = 0$ e $\beta = 0$).

c) Primeira igualdade justificada pela linearidade da 3^a linha. A segunda igualdade é justificada pela alternância de sinal (troca da primeira linha com a terceira linha). A terceira igualdade é justificada pelo facto de

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = -\mathbf{det}(\mathbf{A}) \Longrightarrow \mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0.$$

♣

2.3 Cálculo do determinante via operações elementares

O cálculo do determinante de uma matriz pode ser efectuado utilizando as operações elementares sobre filas. Contudo deve-se ter em atenção as seguintes propriedades, que resultam directamente do facto de a função determinante de ordem n ser uma função n-linear e alternada.

Propriedades 2.5.

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. Então

1. $$\mathbf{A} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \mathbf{A}', \quad i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = -\det(\mathbf{A})$$

   e,

   $$\mathbf{A} \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} \mathbf{A}', \quad i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = -\det(\mathbf{A})$$

   Ou seja, sempre que efectuamos uma troca de linhas ou de colunas o tem-se de trocar o sinal do determinante.

2. $$\mathbf{A} \xrightarrow{L_i \to \alpha L_i} \mathbf{A}' \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = \alpha \det(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   e,

   $$\mathbf{A} \xrightarrow{C_i \to \alpha C_i} \mathbf{A}' \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = \alpha \det(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   Ou seja, se multiplicarmos uma linha, ou uma coluna, de uma matriz por um escalar α, o determinante da matriz resultante é o determinante da matriz original multiplicado por α.

3. $$\mathbf{A} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} \mathbf{A}' \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   e,

   $$\mathbf{A} \xrightarrow{C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j} \mathbf{A}' \quad \Longrightarrow \quad \det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

   Ou seja, se a uma linha (coluna) somarmos um múltiplo de uma linha (coluna) o determinante não se altera.

A ideia chave de usar operações elementares no cálculo de determinantes, é transformar uma matriz numa matriz triangular, tendo em conta as propriedades 2.5. Para o efeito, podemos usar o algoritmo de eliminação Gaussiana ou uma sua versão, que permite o uso de operações elementares sobre colunas. Finalmente, recordamos que o determinante de uma matriz triangular é dado, simplesmente, pelo produto das entradas da diagonal principal.

Exemplos:

1. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=}} - \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 120$$

2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 10 & 14 \end{vmatrix} \xlongequal{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 10 & 14 \end{vmatrix} \xlongequal{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal{L_2 \leftrightarrow L_4} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{L_3 \leftrightarrow L_4} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 = 6$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_5} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_2 \leftrightarrow C_4} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

♣

Outras propriedades dos determinantes são,

Propriedades 2.6.

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$. Então

1. $\mathbf{A}$ é invertível se e só se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
2. $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
3. $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. Se $\mathbf{A}$ é invertível então,
$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

2.4 Teorema de Laplace

Outro modo de se calcular o determinante de uma matriz quadrada é através do teorema de Laplace. Basicamente, este resultado permite reduzir o cálculo de um determinante de ordem n ao cálculo de n determinantes de ordem $n-1$. Antes de descrevermos este teorema necessitamos das seguintes definições.

Definição 2.3 (Menor complementar (de $a_{k,\ell}$)).

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n$. Define-se o *menor complementar* de uma entrada $a_{k,\ell}$ de $\mathbf{A}$ como sendo o determinante da matriz obtida de $\mathbf{A}$ por supressão da linha k e da coluna ℓ. O menor complementar de $a_{k,\ell}$ é representado por $m_{k,\ell}$.

Definição 2.4 (Complemento algébrico (de $a_{k,\ell}$)).

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n$. O complemento algébrico, $\mathrm{A}_{k,\ell}$ de uma entrada $a_{k,\ell}$ de $\mathbf{A}$ é dado por

$$\mathrm{A}_{k,\ell} = (-1)^{k+\ell}\, m_{k,\ell}.$$

Nota: Tem-se sempre $|\mathrm{A}_{k,\ell}| = |m_{k,\ell}|$. No caso de $k+\ell$ ser um número par tem-se $\mathrm{A}_{k,\ell} = m_{k,\ell}$ e no caso de $k+\ell$ ser um número impar $\mathrm{A}_{k,\ell} = -m_{k,\ell}$.

Exemplo: Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se, por exemplo

$$m_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad m_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad m_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$m_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad m_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad m_{4,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

e

$$\mathrm{A}_{1,1} = (-1)^{1+1}\, m_{1,1} = -1; \quad \mathrm{A}_{2,3} = (-1)^{2+3}\, m_{2,3} = -3; \quad \mathrm{A}_{3,4} = (-1)^{3+4} m_{3,4} = 4;$$

$$\mathrm{A}_{2,2} = (-1)^{2+2}\, m_{2,2} = 0; \quad \mathrm{A}_{3,1} = (-1)^{3+1}\, m_{3,1} = 0; \quad \mathrm{A}_{4,4} = (-1)^{4+4} m_{3,4} = -1.$$

♣

Estamos agora em condições de enunciar o seguinte

Teorema 2.1 (de Laplace)**.**

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$ e os inteiros k, ℓ tais que $1 \leq k, \ell \leq n$. Então tem-se

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}\mathrm{A}_{k,i} \quad \text{Desenvolvimento de Laplace pela linha } k \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ell}\mathrm{A}_{i,\ell} \quad \text{Desenvolvimento de Laplace pela coluna } \ell \end{aligned}$$

☞ *Podemos calcular o desenvolvimento de Laplace por qualquer linha ou por qualquer coluna que o resultado dá sempre o valor do determinante da matriz* **A**. *Na prática é conveniente optar, se possível, por uma linha ou uma coluna que tenha um número grande de entradas nulas. Deste modo, obtemos cálculos menos penosos. Podemos igualmente aplicar operações elementares à matriz* **A** *de modo a eliminarmos entradas de uma determinada linha (coluna) e calcularmos o desenvolvimento de Laplace por essa linha (coluna).*

Exemplo 1**.** Pretende-se calcular o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

usando o teorema de Laplace.

Podemos optar por uma fila qualquer no desenvolvimento de Laplace. Contudo, para efeito de cálculos, é conveniente optar por desenvolver a 2^a linha (porque a segunda linha de **A** possui duas entradas nulas). Neste caso temos

$$\det(\mathbf{A}) = a_{2,1}\,\mathrm{A}_{2,1} + \cancel{a_{2,2}\,\mathrm{A}_{2,2}} + \cancel{a_{2,3}\,\mathrm{A}_{2,3}} + a_{2,4}\,\mathrm{A}_{2,4}$$

Como $a_{2,2} = a_{2,3} = 0$ poupámos o cálculo de dois complementos algébricos, $\mathrm{A}_{2,2}$ e $\mathrm{A}_{2,3}$. E o desenvolvimento de Laplace pela 2^a linha fica simplesmente

$$\det(\mathbf{A}) = (-4) \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Usando, por exemplo, a regra de Sarrus concluímos que

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 19$$

Logo, tem-se $\det(\mathbf{A}) = 4\times 3 + 1\times 19 = 31$.

Por outro lado, pode-se combinar as propriedades dos determinantes com o desenvolvimento de Laplace para se calcular o determinante de uma matriz. Na realidade podemos anular uma das entradas da 2^a linha da matriz $\mathbf{A}$. De facto tem-se

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + 4C_4}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Efectuando o desenvolvimento de Laplace pela 2^a linha tem-se

$$\det(\mathbf{A}) = \cancel{a'_{2,1}\mathrm{A}'_{2,1}} + \cancel{a'_{2,2}\mathrm{A}'_{2,2}} + \cancel{a'_{2,3}\mathrm{A}'_{2,3}} + a'_{2,4}\mathrm{A}'_{2,4}$$

Consequentemente

$$\det(\mathbf{A}) = 1\times(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 31.$$

♣

2.5 Exercícios

2.1 *Considere as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}.$$

Calcule:

a) $\det(\mathbf{A})$; **b**) $\det(\mathbf{B})$; **c**) $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_3)$; **d**) $\det(\mathbf{C})$; **e**) $\det(\mathbf{D})$;

f) $\det(\mathbf{C}\mathbf{D})$ **g**) $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{D})$ **h**) $\det(\mathbf{D}\mathbf{C})$ **i**) $\det(\mathbf{C}^T)$ **j**) $\det(\mathbf{B} - \mathbf{C})$;

k) $\det(\mathbf{C}^2)$ **l**) $\det(\lambda\mathbf{A})$ **m**) $\det(\lambda\mathbf{D})$ **n**) $\det((\mathbf{C}\mathbf{D})^4)$ **o**) $\det(\mathbf{C} + \mathbf{D})$

p) $\det((\mathbf{C}\mathbf{D})^{-3})$ **q**) $\det(\mathbf{C}^{-1}) + \det(\mathbf{D}^{-1})$ **r**) $\det(\mathbf{E})$ **s**) $\det(\mathbf{F})$

2.2 *Considere a matriz* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Verifique que se tem:*

a) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

b) $\det(\mathbf{A}^2) = \det^2(\mathbf{A})$.

2.3 *Resolva as equações*

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.4 *Resolva a equação*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & x \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

2.5 *Sem calcular o determinante do lado direito da igualdade abaixo indicada, encontre uma matriz* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_5$ *tal que,*

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

e verifique:

a) *a sub-matriz formada pelas entradas da segunda linha de* $\mathbf{A}$ *é*

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) *A matriz* $\mathbf{A}$ *está em forma de escada por linhas.*

c) *A matriz* $\mathbf{A}$ *não possui entradas nulas.*

2.6 *Use determinantes para encontrar condições (sobre os parâmetros) para que sejam invertíveis as seguintes matrizes.*

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} a & 1 \\ ab & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ a & \lambda - b \end{bmatrix} \quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix} \quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} a & ab & 0 \\ ab & a & 0 \\ a & b & a \end{bmatrix}$$

2.7 *Mostre que a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

é invertível sse $a \neq -3b \wedge a \neq b$.

Capítulo 3

Sistemas de Equações Lineares

3.1 Definições

Definição 3.1 (Equação linear)**.**

Uma *equação linear* a n incógnitas é uma expressão da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b. \tag{3.1}$$

Os escalares a_i, $i = 1, \dots, n$, dizem-se *coeficientes da equação*, o escalar b diz-se o *termo independentes* e os termos x_i, $i = 1, \dots, n$, são as *incógnitas* (ou variáveis).
Se na equação (3.1) fizermos $b = 0$ obtemos a equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0, \tag{3.2}$$

que se diz *equação homogénea associada* da equação (3.1).

Notas: Uma solução da equação (3.1), é um n-uplo

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n)$$

tal que, se substituirmos em (3.1), cada variável x_i por s_i, $i = 1, \dots, n$, obtém-se uma proposição verdadeira.

A designação de "equação linear" está relacionado com algumas propriedades das suas soluções. De facto, se **s'** e **s"** forem duas soluções quaisquer da equação (3.1) tem-se que a sua diferença **s** = **s'** − **s"** é solução da equação homogénea associada (3.2) e todo o múltiplo de **s** é igualmente solução da equação homogénea associada (3.2). Estas propriedades caracterizam as equações lineares. Informalmente, verifica-se que uma equação linear é uma equação em que as variáveis envolvidas são variáveis do primeiro grau. As restantes equações dizem-se não lineares.

Exemplos: A equação $3x - y = 1$, nas incógnitas x e y, é linear. A sua equação homogénea associada é a equação $3x - y = 0$. Tem-se que, **s'** $= (1,2)$ e **s"** $= (0,-1)$ são duas soluções da equação $3x - y = 1$ porque $3\times 1 - 2 = 1$ e $3 \times 0 - (-1) = 1$. Além disso, $\mathbf{s} = \mathbf{s'} - \mathbf{s''} = (1,3)$ é solução da equação homogénea associada (porque $3 \times 1 - 3 = 0$) e para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\mathbf{s} = (\lambda, 3\lambda)$ é igualmente solução da equação homogénea associada.

As equações $x - y^2 = 4$, $x + 2^y = 3$, $\cos(x) - y = 2$, e $xy + 2x = 1$ não são equações lineares. Verificamos informalmente este facto notando que a expressão, onde ocorrem as variáveis, não é constituída apenas por somas algébricas de uma variável de grau um.

Definição 3.2 (Sistema de equações lineares (SEL))**.**

Um sistema de m equações lineares a n-incógnitas é um conjunto de m equações lineares da forma

$$\{a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Habitualmente representamos um SEL da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Se, no SEL (3.3) fizermos em todas as m equações $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$ obtemos um SEL homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Analogamente às equações lineares chamamos, aos coeficientes $a_{i,j}$, $i = 1 \ldots m$, $j = 1 \ldots n$ de coeficientes do SEL, aos termos x_j, $j = 1 \ldots n$ chamamos de incógnitas ou variáveis do SEL e aos coeficientes b_i, $i = 1 \ldots m$ de coeficientes independentes.

Definição 3.3 (Solução e conjunto solução (de um SEL))**.**

1. Uma *solução* **s** do SEL (3.3) é um n-uplo $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ que é solução **de todas** as equações que formam o SEL (3.3).

2. O *Conjunto Solução* (CS) de um SEL é o conjunto formado por todas as soluções do SEL. Ou seja, caso o SEL tenha soluções é um conjunto de n-uplos, caso o SEL não possua soluções o conjunto solução é o conjunto vazio.

Exemplos:

1. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \tag{3.5}$$

apenas possui uma solução $s = (1,0)$. Deste modo escrevemos $\mathrm{CS} = \{(1,0)\}$ ou alternativamente $\mathrm{CS} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x = 1 \wedge y = 0\}$.

2. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

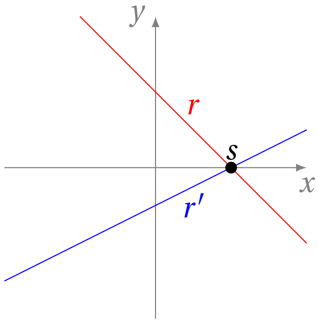
não possui soluções. Neste caso escrevemos $\mathrm{CS} = \emptyset$.

3. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

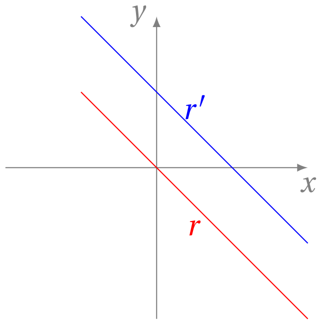
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \tag{3.7}$$

possui infinitas soluções. De facto, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(\alpha, 1-\alpha)$ é solução de (3.7). Neste caso escrevemos $\mathrm{CS} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ y = 1 - x\}$ (aqui x é uma variável livre e y é uma variável ligada). Alternativamente podemos escrever $\mathrm{CS} = \{(x, 1-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

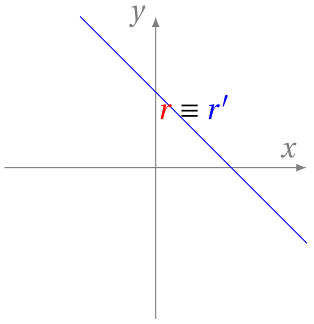
Geometricamente os conjuntos soluções destes SEL são formados pelos pontos de intersecção de duas rectas r e r' em R^2.



SEL (3.5), rectas concorrentes.



SEL (3.6), rectas paralelas.



SEL (3.6), rectas coincidentes.

♣

Os três exemplos anteriores revelam os três tipos possíveis de conjuntos solução de um SEL. ou seja, tem-se

Propriedade 3.1.

O conjunto solução de um SEL possui sempre uma das seguintes formas,

1. É o conjunto vazio. Neste caso, dizemos que o SEL é *impossível.*

2. Apenas tem uma solução. Neste caso, dizemos que o SEL é *possível e determinado.*

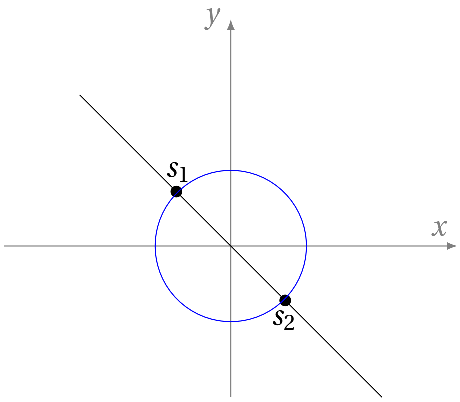
3. Tem infinitas soluções. Dizemos, neste caso que o SEL é *possível e indeterminado.*

Nota: Observe que um conjunto de soluções de um SEL não pode ter um número de soluções finito superior a um.

Se considerarmos o sistema de 2 equações nas 2 variáveis x e y

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

verificamos que geometricamente o conjunto solução é formado pelos pontos de intersecção, $s_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $s_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, da recta de equação $y=-x$ com a circunferência centrada na origem e raio unitário.



Este sistema de equações não verifica a propriedade 3.1 porque o conjunto solução tem exactamente dois elementos. Esta situação apenas ocorre porque este sistema de equações não é um SEL (a segunda equação não é linear).

Definição 3.4 (Sistemas de equações lineares equivalentes)**.**

Sejam S_1 e S_2 dois sistemas (com o mesmo número de equações lineares e de incógnitas) com conjuntos solução CS_1 e CS_2, respectivamente. Dizemos que os sistemas S_1 e S_2 são *equivalentes* se e somente se

$$CS_1 = CS_2.$$

3.2 Forma matricial de um SEL

Considere o SEL

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{3.8}$$

Definição 3.5.

Define-se forma matricial do SEL (3.8) como sendo a equação matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

é a *matriz dos coeficientes* (ou a *matriz simples do sistema*), a matriz coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a *matriz das incógnitas* e a matriz coluna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é a *matriz dos termos independentes.*

Definição 3.6 (Matriz completa de um SEL)**.**

À matriz simples **A** do SEL (3.8) aumentada com a matriz dos termos independentes **b** na última coluna.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

chamamos *matriz completa* do SEL (3.8).

Nota: A matriz simples de um SEL com m equações a n incógnitas é uma matriz do tipo $m \times n$ e a matriz completa é do tipo $m \times (n+1)$.

Exemplo: A forma matricial do SEL

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4t = 2 \\ 6x - 7z - t = 5 \\ -3y + 9t = \frac{5}{3} \end{cases}$$

é a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

A matriz completa do sistema é

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -9 & \frac{5}{3} \end{array}\right]$$

♣

Teorema 3.1 (de classificação de SEL)**.**

Sejam $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{m,n}$ a matriz simples e $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ a matriz completa de um SEL (de m equações a n incógnitas. Então tem-se

$$
\text{SEL:}\begin{cases}
\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) \implies \text{Possível}\begin{cases}
\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = n \implies \text{Determinado} \\[2ex]
\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) < n \implies \begin{array}{l}\text{Indeterminado} \\ \text{de grau } n-\mathrm{r}(\mathbf{A})\end{array}
\end{cases} \\[6ex]
\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) \implies \text{Impossível}
\end{cases}
$$

Notas:

1. O número n (número de colunas da matriz simples do sistema) representa o número de incógnitas do SEL. O *grau de indeterminação* $n-\mathrm{r}(\mathbf{A})$ de um SEL possível e indeterminado é necessariamente um número positivo que indica o número de variáveis livres que ocorrem na descrição do conjunto solução do SEL.

2. Se um SEL for possível e determinado, o grau de indeterminação é 0. Obviamente não ocorrem variáveis livres no conjunto solução (existe apenas uma solução).

3. Se um SEL for impossível, pode-se substituir a condição $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ pela condição $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) - 1$. Porquê?

3.3 Resolução de SEL via eliminação Gaussiana

O processo de classificação de um SEL indicado no teorema 3.1 exige o cálculo da característica das matrizes simples e completa do SEL. Este cálculo pode ser efectuado usando o algoritmo de eliminação Gaussiana 1. Contudo, como iremos verificar, este algoritmo também será útil para a resolução do SEL, caso se trate de um SEL possível.

Teorema 3.2.

Seja S um SEL com matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Se a matriz $[\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ resulta de $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ por aplicação de uma sequência finita de operações elementares por linhas 1.26 então, o SEL $\hat{S}$ com matriz completa $[\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ é equivalente a S.

Nota: Ou seja os SEL S e $\hat{S}$ possuem o mesmo conjunto solução.

O teorema 3.2 implica o seguinte resultado.

Teorema 3.3.

Seja S um SEL com matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ e seja $E([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ uma matriz em forma de escada equivalente a $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Então o SEL S' associado à matriz completa $E([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ é equivalente ao SEL S.

A resolução de um SEL, S', cuja matriz completa esteja em forma de escada por linhas pode facilmente resolver-se usando o algoritmo de resolução por substituição para trás. Consequentemente ao resolvermos S' estamos a resolver S, porque o teorema 3.3 garante que eles têm o mesmo conjunto solução. Os exemplos seguintes descrevem a resolução de sistemas de equações lineares via eliminação Gaussiana.

Exemplo I (sistema possível e determinado): Considere o sistema de 4 equações lineares nas 3 incógnitas x, y e z

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 3z & = & -4 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Começamos por aplicar o algoritmo de eliminação Gaussiana à matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \text{(troca apenas} \\ \text{para simplificar} \\ \text{os cálculos)}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 8L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{9}{17} L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Analisando a última matriz (que está em forma de escada) tem-se

$$\mathrm{r}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}'}\right) = \mathrm{r}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']}\right) = \text{número de incógnitas (3)}$$

Logo o sistema é possível e determinado. Para resolver o sistema encontramos o sistema de equações lineares associado à matriz completa $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ ignorando a linha nula[1]

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & -1 \\ & & & & 17z & = & -17 \end{array}\right.$$

E este sistema resolve-se por substituição para trás. Da terceira equação determinamos o valor de $z = -1$. Substituímos na segunda equação o valor de z encontrado na resolução da equação da terceira linha e encontramos o valor de $y = 1$. Finalmente encontramos o valor de $x = 2$, substituindo na primeira equação as incógnitas y e z pelos valores encontrados na resolução das últimas equações. E tem-se que o conjunto solução é

$$\mathrm{CS} = \{(2, 1, -1)\}.$$

♣

Exemplo II (sistema possível e indeterminado): Considere o sistema de 5 equações nas 4 incógnitas x, y, z e t

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ & & -y & - & z & + & t & = & 2 \\ 2x & & & + & 2z & + & 4t & = & 6 \\ & & y & & & + & t & = & 2 \end{array}\right. .$$

Aplicando a eliminação Gaussiana à matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ de forma a obter uma matriz equivalente em forma de escada $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ tem-se

[1] a linha nula corresponde à equação $0 = 0$ que é uma condição universal.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_5} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo tem-se $\mathrm{r}(\mathbf{A}') = \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 3 < n(= 4)$. Consequentemente o sistema é *simplesmente* indeterminado. Dizemos *simplesmente*, porque o grau de indeterminação é $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}') = 1$. Deste modo teremos uma variável livre na descrição do conjunto solução.

O SEL associado à matriz completa $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ ignorando as linhas nulas é

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ & & -y & - & z & + & t & = & 2 \\ & & & & -z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right. .$$

O processo de resolução para trás inicia resolvendo a última linha em ordem à variável associada ao coeficiente líder. Deste modo temos $z = 2t - 4$ e a variável t ficará livre. Substituindo na segunda equação a variável z por $2t - 4$ concluímos que $y = -t + 2$. E a variável x é obtida da primeira equação, onde substituímos a variável z por $2t - 4$ e a variável y por $-t + 2$. Efectuando os cálculos obtemos $x = -4t + 7$. Podemos apresentar o conjunto solução na forma

$$\mathrm{CS} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -4t + 7 \wedge y = -t + 2 \wedge z = 2t - 4\right\}$$

ou na forma equivalente

$$\mathrm{CS} = \left\{(-4t + 7, -t + 2, 2t - 4, t) \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Note que, neste exemplo, também podíamos resolver a última equação em ordem à variável z. Neste caso z seria a variável livre e as restantes variáveis ficariam a depender de z.

♣

Exemplo III (sistema Impossível): Considere o sistema de 3 equações nas 3 incógnitas x, y e z

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Aplicando a eliminação Gaussiana à matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ de forma a obter uma matriz equivalente em forma de escada $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \to$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Como se tem

$$2 = \mathrm{r}(\mathbf{A}') < \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 3$$

então o SEL é impossível e tem-se $\mathrm{CS} = \emptyset$.

♣

Exemplo IV (Classificação de SEL em função de parâmetros): Por vezes, em aplicações práticas, temos de analisar sistemas de equações lineares onde ocorrem parâmetros nos coeficientes das equações do sistema e (ou) nos coeficientes independentes. Vulgarmente chama-se a este processo de "discutir o sistema". Este exemplo ilustra o procedimento de discussão de um SEL.

Considere o seguinte sistema de 3 equações lineares nas 3 incógnitas x, y e z, que dependem dos parâmetros reais a e b.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & b \\ & & 3y & - & z & = & b-1 \end{array}\right. .$$

Aplicando a eliminação Gaussiana à matriz completa do SEL tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & b \\ 0 & 3 & -1 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 3 & -1 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & -3a+2 & -2(b-1) \end{array}\right]}_{[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']}$$

Os passos seguintes consistem em

1. Averiguar em que condições, sobre os parâmetros a e b, a característica da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}'$ toma o valor máximo (3 neste exemplo).

   É fácil de ver que o valor do parâmetro b não afecta a característica da matriz $\mathbf{A}'$ e que se tem $\mathrm{r}(\mathbf{A}') = 3$ se e somente se $-3a+2 \neq 0$. Ou seja a característica de $\mathbf{A}'$ atinge o seu valor máximo se e somente se $a \neq \frac{2}{3}$. Sob a condição $a \neq \frac{2}{3}$ tem-se que a característica da matriz $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ é igualmente 3, independentemente do valor do parâmetro b. Logo tem-se

   $$\mathrm{r}(\mathbf{A}') = \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = \text{número de incógnitas}(=3); \quad a \neq \frac{2}{3} \wedge \forall\, b \in \mathbb{R}$$

2. Averiguar em que condições, sobre os parâmetros a e b, a característica da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}'$ não é máxima.

   Basta negar a condição para a qual a característica de $\mathbf{A}'$ é máxima. Logo temos que a característica de $\mathbf{A}'$ é inferior a 3 se e somente se $a = \frac{2}{3}$. E tem-se $\mathrm{r}(\mathbf{A}') = 2$, independentemente do valor do parâmetro b.

   Impondo este condição à matriz $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ tem-se

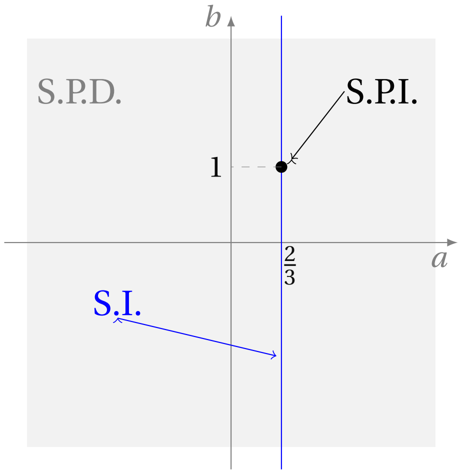
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(b-1) \end{array}\right]$$

   Resta-nos verificar qual é a característica da matriz completa, que depende do valor do parâmetro b. Fácilmente verificamos que $\mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}'])$, pode tomar dois valores

   i) Se $-2(b-1) \neq 0$ (ou $b \neq 1$), tem-se $\mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 3$. Logo o sistema é impossível.

   ii) Se $-2(b-1) = 0$ (ou $b = 1$), tem-se $\mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 2$. Consequentemente o sistema é possível e simplesmente indeterminado.

Resumimos esta discussão na seguinte figura



O sistema é possível e determinado em todo o plano com a excepção da recta $a = 2/3$ assinalada na figura com cor azul. Na recta $a = 2/3$ o sistema é impossível com a excepção do ponto de coordenadas $a = 2/3$ e $b = 1$ onde o sistema é impossível.

♣

3.4 Resolução de SEL via eliminação de Gauss-Jordan

Outro processo utilizado na resolução de SEL é o recurso ao algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan. Os primeiros passos do algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan coincidem com os passos do algoritmo de eliminação Gaussiana 1. Depois de obtermos uma matriz em forma de escada por linhas efectuamos mais umas operações elementares de forma a obtermos uma *matriz em forma de escada reduzida sobre linhas.* Apesar de na eliminação de Gauss-Jordan serem efectuadas mais operações elementares do que na eliminação Gaussiana, a eliminação de Gauss-Jordan evita a substituição para trás necessária na resolução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação Gaussiana.

Definição 3.7 (Matriz em forma de escada reduzida por linhas)**.**

Seja $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ está em *forma de escada reduzida por linhas* se satisfizer as propriedades:

1. $\mathbf{A}$ está em forma de escada por linhas 1.25;
2. Todos os coeficientes líder de $\mathbf{A}$ são unitários;
3. Se uma coluna de $\mathbf{A}$ posse um coeficiente líder então o coeficiente líder é a única entrada dessa coluna não nula.

Exemplos: As matrizes seguintes estão todas em forma de escada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

♣

Algoritmo 2 (de eliminação Gauss-Jordan)**.**

Considere a matriz $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{m,n}$.

1. Aplique o algoritmo de eliminação Gaussiana 1. Obtém-se uma matriz $\mathbf{E}$ em forma de escada por linhas.
2. Normalizamos todos os coeficientes líder. Isto forçamos o coeficiente líder c_ℓ de toda a linha ℓ não nula a ser unitário multiplicando essa linha por $\dfrac{1}{c_\ell}$.
3. Eliminamos todos as entradas $e_{i,j}$ que estão acima de cada coeficiente líder c_ℓ efectuando a operação elementar $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - e_{i,j} c_\ell$.

Exemplo: Pretende-se resolver o seguinte SEL com 4 equações lineares nas 5 incógnitas x_i, $i = 1,2,\ldots,6$ usando a eliminação de Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}\right. .$$

1^o **Passo:** Aplicar o algoritmo de Gauss à matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -1 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -9 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} {\color{blue}x_1} & {\color{blue}x_2} & x_3 & {\color{blue}x_4} & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} {\color{blue}2} & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & {\color{blue}-2} & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & {\color{blue}1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{2^o \text{ passo}}$$

Desta última matriz $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ conclui-se que o SEL é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2. Visto ter-se

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}') = \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 3 < n = 5.$$

Consequentemente irão ocorrer duas variáveis livres e três variáveis dependentes no conjunto solução CS. Existem várias opções de escolha. Por exemplo, podemos escolher para variáveis dependentes as variáveis, x_1, x_2 e x_4, que estão relacionadas com os coeficientes líder (assinaladas a azul) e as restantes variáveis x_3 e x_5 ficam livres.

2^0 **Passo:** Normalizar os coeficientes líder (colocar os coeficientes líder unitários).

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3^o \text{ passo} \ldots}$$

3^0 **Passo:** Para todo o coeficiente líder eliminar as entradas que partilham a mesma coluna (como previamente, aplicámos a eliminação Gaussiana apenas teremos de eliminar as entradas que se encontram na mesma coluna e acima de cada coeficiente líder).

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Encontrada a matriz em forma de escada reduzida por linhas encontramos imediatamente o conjunto solução. Tem-se,

$$\begin{aligned} \text{Da 3}^{\text{a}} \text{ linha resulta,} \quad & x_4 = 1 + 3x_5. \\ \text{Da 2}^{\text{a}} \text{ linha resulta,} \quad & x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7x_5}{2}. \\ \text{Da 1}^{\text{a}} \text{ linha resulta,} \quad & x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3x_3}{2} + 3x_5 \end{aligned}$$

E o conjunto solução do SEL toma a forma,

$$\mathrm{CS} = \left\{ \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3x_3}{2} + 3x_5, -\tfrac{3}{2} - \tfrac{7x_5}{2}, x_3, 1 + 3x_5, x_5 \right) \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\},$$

ou alternativamente a forma

$$\mathrm{CS} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3x_3}{2} + 3x_5 \wedge x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7x_5}{2} \wedge x_4 = 1 + 3x_5 \right\}.$$

♣

3.5 Cálculo da matriz inversa por eliminação de Gauss-Jordan

Seja $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n$ uma matriz invertível. Então a inversa de $\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{A}^{-1} = [a'_{i,j}]$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Então toda a coluna k, $1 \leq k \leq n$ da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ é solução do sistema de n equações em n incógnitas

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha k} \\ \\ \\ \end{array}$$

Deste modo, para encontrar a matriz inversa de uma matriz de ordem n, é necessário resolver n sistemas de equações lineares. Onde todos os n sistemas de equações lineares partilham a mesma matriz simples e apenas possuem a matriz dos termos independentes diferentes (apenas altera a linha da entrada unitária). Deste modo podemos resolver simultaneamente estes n sistema de equações lineares usando eliminação de Gauss-Jordan da seguinte forma.

1. Dada uma matriz invertível $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ construímos a matriz estendida

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}_n] \in \mathscr{M}_{n,2n}$$

2. Aplicamos o algoritmo de Gauss-Jordan à matriz atrás construída. Obtendo, deste modo, a sua forma de escada reduzida por linhas

$$\left[\mathbf{I}_n|\mathbf{A}^{-1}\right].$$

   A matriz inversa de $\mathbf{A}$ é bloco do lado direito.

Exemplo: Determine a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Logo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

♣

3.6 Sistemas de Cramer

Definição 3.8 (Sistema de Cramer)**.**

Um sistema de equações lineares diz-se um *sistema de Cramer* se e somente se

1. O número de equações é igual ao número de incógnitas.
2. O determinante da matriz do sistema é não nulo.

Nota: Num sistema de Cramer a matriz do sistema é sempre uma matriz quadrada. Logo faz sentido considerar o determinante da matriz do sistema.

Propriedade 3.2.

Um sistema de Cramer é sempre possível e determinado.

O algoritmo de eliminação Gaussiana ou o algoritmo de Gauss-Jordan são algoritmos gerais. Ou seja, permitem resolver um sistema de equações lineares qualquer. Em particular também podem ser usados para resolver sistemas de Cramer. Contudo há situações, geralmente em problemas mais teóricos, em que é conveniente usar outros métodos na resolução de sistemas de Cramer.

1. Escrevendo um sistema de Cramer na sua forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem-se que a matriz do sistema é invertível. Logo a solução é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

☞ *Evidentemente, este método, só se deve aplicar em problemas teóricos visto o cálculo da inversa de uma matriz exigir, geralmente, a resolução de n sistemas de equações lineares!*

2. Outro método para resolver sistemas de Cramer é usar as *fórmulas de Cramer*. Escrevendo um sistema de Cramer na sua forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tem-se que a k-ésima incógnita x_k, $1 \le k \le n$, é dada por

$$x_k = \frac{\det(\hat{\mathbf{A}}_k)}{\det(\mathbf{A})},$$

onde a matriz $\hat{\mathbf{A}}_k$ resulta por substituição da k-ésima coluna da matriz do sistema $\mathbf{A}$ pela coluna $\mathbf{b}$ dos termos independentes.

☞ *Este método é apenas usado em problemas teóricos ou problemas de dimensão reduzida uma vez que exige o cálculo de $n+1$ determinantes de ordem n.*

Exemplo: Pretende-se resolver o seguinte sistema de Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_3 = 9 \end{cases}.$$

A matriz do sistema $\mathbf{A}$ e a matriz $\mathbf{b}$ dos termos independentes são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Como $\det(\mathbf{A}) = -1 \neq 0$ tem-se que o sistema é de Cramer e as incógnitas são dadas por

$$x_1 = \frac{\det(\hat{\mathbf{A}}_1)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{\det(\hat{\mathbf{A}}_2)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$x_3 = \frac{\det(\hat{\mathbf{A}}_3)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$

♣

3.7 Exercícios

3.1 *Considere os sistemas de equações lineares reais,*

$$(\mathbf{S_1}) \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad (\mathbf{S_2}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 7 \\ x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases} \quad (\mathbf{S_3}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 7 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

a) *Determine a matriz completa associada a cada um dos sistemas.*

b) *Identifique as matrizes, encontradas na alínea anterior, que estão em forma de escada por linhas.*

c) *Use o algoritmo de eliminação de Gauss para resolver os três sistemas.*

3.2 *Considere o SEL representado matricialmente pela equação*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) *Mostre que*

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \ \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são duas soluções do SEL.

b) *Mostre* $\mathbf{s}'' = \mathbf{s} - \mathbf{s}'$ *é solução do SEL homogéneo associado.*

c) *Mostre que* $\mathbf{s} + \lambda\mathbf{s}''$ *é solução do SEL para todo o* $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) *Com base nas alíneas anteriores encontre um argumento que fundamente a proposição (verdadeira), "Não existem sistemas de equações lineares com um número finito de soluções superior a* 1*".*

3.3 *Considere o SEL*

$$\begin{cases} x + y - 3z + t & = 0 \\ y - 4z & = 1 \\ x + 2y - 7z + t & = 1 \\ x + z + t & = -1 \end{cases}.$$

a) *Mostre que para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} = (-1-\lambda, 1+4\lambda, \lambda, 0)$ *é solução do SEL.*

b) *Averigúe se o conjunto* $\mathscr{A} = \{(-1-\lambda, 1+4\lambda, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *é o conjunto solução do sistema.*

3.4 *Discuta, em função dos parâmetros* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, os seguintes sistemas de equações lineares.*

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ -3x_1 + \alpha x_2 & = & -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 & = & \alpha \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ -6x_1 - 3x_2 + x_3 & = & \beta \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & \alpha \\ -x_1 - x_2 + x_3 & = & \beta \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 & = & \beta \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & \beta \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 & = & -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \beta x_1 + \alpha x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + x_3 & = & \beta \end{cases}$

3.5 *Seja* $\mathbb{P}_3[x]$ *o conjunto de todos os polinómios na variável* x*, com coeficientes reais e grau não superior a* 3. *Determine, caso exista, um polinómio* $p \in \mathbb{P}_3[x]$ *que verifique as seguintes condições,*

a) $p(-2) = p(-1) = p(1) = 1$ *e* $p(2) = 2$.

b) $p(1) = 1$, $p(-3) = \frac{1}{3}$, $p'(1) = \frac{1}{2}$ *e* $p'(-3) = \frac{7}{6}$.

c) $p + \frac{dp}{dx} = x^3$.

3.6 *Considere as matrizes,*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 64 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

a) *Indique as matrizes que estão em forma de escada por linhas.*

b) *Para cada matriz encontre uma forma de escada reduzida por linhas.*

c) *Calcule as suas características.*

d) *Supondo que as matrizes indicadas são matrizes completas associadas a um sistema de equações lineares, onde a última coluna representa o termo independente, classifique os sistemas e encontre os seus conjuntos solução.*

3.7

a) *Averigúe quais das seguintes matrizes são invertíveis.*

b) *Determine, aplicando o algoritmo de Gauss-Jordan, as inversas.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -7 & 14 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

3.8 *Sejam* $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ *reais não nulos. Determine a inversa de cada uma das matrizes.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$$

3.9 *Considere os seguintes sistemas de equações lineares*

$$(\mathbf{S_1}) \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = -2 \\ 3x + 8y - 4z = 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{S_2}) \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ x + 4y + 9z = -6 \\ x + 8y + 27z = -20 \end{cases}$$

$$(\mathbf{S_3}) \begin{cases} x + 2y + 3z = -5 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ -x - 4z = 6 \end{cases} \qquad (\mathbf{S_4}) \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + z + t = 5 \\ x + 2y + 3z + t = 7 \\ 4x + 3z = 7 \end{cases}$$

a) *Mostre que são de Cramer.*

b) *Resolva os sistemas usando as fórmulas de Cramer.*

Capítulo 4

Espaços vectoriais reais

4.1 Introdução

Existem muitos objectos na Matemática que aparentemente são distintos mas que partilham certas propriedades. Por exemplo, que propriedades partilham as identidades: o conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^n$, o conjunto das matrizes em $\mathcal{M}_{m,n}$, o conjunto dos polinómios, o conjunto das funções contínuas ou o conjunto das funções deriváveis? Aparentemente são identidades sem quaisquer propriedades em comum. Contudo, se considerarmos as operações usuais de adição definidas nesses conjuntos e o produto escalar verifica-se que formam "estruturas" com propriedades idênticas. É pois natural estudar as propriedades comuns destas identidades de uma forma abstracta em vez de as estudarmos isoladamente. Este processo baseia-se na definição axiomática de estruturas algébricas e torna o estudo da Matemática mais eficiente dado que, todas as identidades que partilhem as mesmas propriedades básicas (axiomas) que uma estrutura abstracta "herdarão" todas as propriedades da estrutura abstracta. A identidade de *espaço vectorial* é uma destas estruturas abstractas definidas por axiomas. A lista de identidades acima referidas (a lista está longe de ser exaustiva) satisfazem todas os axiomas que definem os *espaços vectoriais.* Consequentemente, dizemos que possuem a estrutura de um espaço vectorial [1] e herdam todas as características deduzidas da estrutura abstracta.

Embora não faça parte do programa desta disciplina entendeu-se incluir na próxima secção algumas estruturas algébricas envolvidas na definição axiomática de espaço vectorial. Deste modo, a próxima secção apenas servirá para clarificar o conceito de espaço vectorial real e o aluno poderá salta-la.

4.2 Estruturas algébricas, Grupos e Corpos

Começamos com a definição de *operação binária* definida num conjunto não vazio

[1] Vulgarmente dizemos apenas que são um espaço vectorial.

Definição 4.1 (Operação binária)**.**

Seja $\mathscr{A}$ um conjunto não vazio. Uma *operação binária* θ definida no conjunto $\mathscr{A}$ é uma função

$$\theta : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}.$$

tal que o seu domínio coincide com o conjunto de partida $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$.
Usualmente em vez de escrevermos $\theta(a,b)$ escrevemos $a\theta b$
Em linguagem Matemática esta condição traduz-se pela proposição

$$\forall (x, y) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A},\ \exists z \in \mathscr{A} : z = x\theta y. \tag{4.1}$$

Nota: Uma função cujo domínio coincide com o conjunto de partida diz-se uma aplicação. Frequentemente também dizemos que uma função $\theta : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ é uma *operação* em $\mathscr{A}$ e que θ é uma *operação fechada* em $\mathscr{A}$ se verifica a condição (4.1).

Exemplos:

1. A subtracção não é fechada no conjunto $\mathbb{N}$ porque, por exemplo, $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$ e $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.

2. A subtracção é uma operação binária no conjunto $\mathbb{Z}$, porque para todo o par de números inteiros x e y existe um número inteiro z tal que $z = x - y$.

3. A subtracção é uma operação binária no conjunto $\mathbb{Q}$ porque para todo o par de números racional $x = p_1/q_1$ e $y = p_2/q_2$ (onde p_1, p_2, q_1 e q_2 são inteiros e $q_1, q_2 \neq 0$), existe um número racional $z = (p_1q_2 - p_2q_1)/(q_1q_2) \in$ tal que $z = x - y$

4. A operação $\odot$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $x \odot y = x + \ln(xy)$ é uma operação binária em $\mathbb{R}^+$.

5. A operação $\odot$ em $\mathbb{R}^+$ definida por $x \odot y = x + \ln(x - y)$ não é uma operação binária em $\mathbb{R}^+$. Porquê?

♣

As primeiras estruturas algébricas que iremos definir são as estruturas de grupo e de grupo comutativo.

Definição 4.2 (Grupo e grupo comutativo)**.**

Seja $\mathbb{G}$ um conjunto não vazio e θ uma operação definida em $\mathbb{G}$. Dizemos que o par ordenado $(\mathbb{G},\theta)$ tem a estrutura de um grupo (caso a operação θ esteja subentendida diremos simplesmente que $\mathbb{G}$ é um grupo) se e somente se

1. $\forall (x,y)\in\mathbb{G}\times\mathbb{G},\ \exists z\in\mathbb{G} : z = x\theta y$. Ou seja, θ é uma operação binária em $\mathbb{G}$.

2. $\forall x,y,z\in\mathbb{G},\ (x\theta y)\theta z = x\theta(y\theta z)$. Ou seja, θ é associativa

3. $\exists e\in\mathbb{G}, \forall x\in\mathbb{G},\ e\theta x = x\theta e = x$. Ou seja, existe em $\mathbb{G}$ um elemento neutro da operação binária θ.

4. $\forall x\in\mathbb{G},\ \exists x'\in\mathbb{G}, x\theta x' = x'\theta x = e$. Ou seja, todo o elemento x de $\mathbb{G}$ possui um elemento inverso x' (relativamente à operação binária θ).

Se $(\mathbb{G},\theta)$ tiver a estrutura de um grupo e θ é uma operação binária comutativa em $\mathbb{G}$, ou seja

5. $\forall x,y\in\mathbb{G},\ x\theta y = y\theta x$

dizemos que $(\mathbb{G},\theta)$ tem a estrutura de um *grupo comutativo* (caso a operação θ esteja subentendida diremos simplesmente que $\mathbb{G}$ é um grupo comutativo).

Exemplos:

1. O conjunto $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ munido com a operação multiplicação usual, possui a estrutura de um grupo comutativo. O elemento neutro deste grupo é $e = 1$.

2. Os conjuntos, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ munidos com a operação adição usual possuem a estrutura de um grupo comutativo.

3. O conjunto das matrizes invertíveis de ordem n munido da multiplicação usual (de matrizes) possui a estrutura de um grupo não comutativo. Neste caso tem-se que o elemento neutro é $e = \mathbf{I_n}$ e o inverso de uma matriz $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n$ é a matriz $\mathbf{A}^{-1}$.

4. O conjunto Σ_n das permutações onde θ é a operação de composição de funções, é um grupo não comutativo.

♣

Os seguintes pares $(\mathbb{G},\theta)$ não possuem a estrutura de um grupo:

1. O conjunto das matrizes de ordem n munido da multiplicação usual (de matrizes). Possui elemento neutro $e = \mathbf{I_n}$ mas existem matrizes que não possuem inversa.

2. O conjunto $\mathbb{N}$ munido da operação adição usual.

As próximas estruturas algébricas que iremos abordar, estrutura de corpo e estrutura de corpo comutativo, exige que um dado conjunto não vazio possua duas operações. Sendo que usualmente chamamos à primeira operação de "adição" e à segunda de "multiplicação". O nome das operações estão entre aspas porque estas operações não são necessariamente as operações de adição e de multiplicação usuais. Notamos que demos o mesmo nome (e usamos a mesma notação), de adição e de multiplicação, para operações de matrizes e para números reais. Embora sejam homónimas estas operações são na realidade bem distintas.

Definição 4.3 (Corpo e corpo comutativo)**.**

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio e duas operações, θ (a "soma") e ϕ (a "multiplicação") definidas em $\mathbb{K}$ Dizemos que o terno ordenado $(\mathbb{K}, \theta, \phi)$ tem a estrutura de um *corpo* (caso a operação soma e a operação produto estejam ambas subentendidas diremos apenas que $\mathbb{K}$ é um corpo) se e somente se

1. $(\mathbb{K}, \theta)$ é um grupo comutativo (com elemento neutro $e = 0_\theta$.

2. $(\mathbb{K} \setminus \{0_\theta\}, \phi)$ é um grupo.

3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K},\ x\phi(y\theta z) = (x\phi y)\,\theta\,(x\phi z)$. Distributividade à direita.

4. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K},\ (y\theta z)\phi x = (y\phi x)\,\theta\,(z\phi x)$. Distributividade à esquerda.

Se $(\mathbb{K}, \theta, \phi)$ for um corpo e se o produto ϕ for comutativo em $\mathbb{K}$ dizemos que $(\mathbb{K}, \theta, \phi)$ tem a estrutura de um *corpo comutativo*.

Exemplos:

1. Os seguintes conjuntos, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ munidos pelas respectivas adições e produtos usuais são corpos comutativos

2. O conjunto $\mathbb{Z}$ munida da soma e produto usual não é um corpo. De facto, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ não é um grupo. Por exemplo os únicos elementos de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ que possuem inverso multiplicativo são o 1 e o -1.

♣

Na próxima secção iremos abordar a estrutura algébrica de *espaço vectorial real*. Aqui, o adjectivo "real" significa que os espaços vectoriais, que iremos estudar, utilizam a estrutura do corpo dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ onde as operações "$+$" e "$\cdot$" são, respectivamente, as operações de adição e de produto usuais definidas em $\mathbb{R}$. Convém no entanto salientar que existem espaços vectoriais sobre outros corpos. Por exemplo, existem espaços vectoriais complexos, ou seja, espaços vectoriais sobre o corpo $(\mathbb{C},+,\cdot)$. A axiomática de espaços vectoriais sobre um corpo qualquer $(\mathbb{K},\theta,\phi)$ é similar à axiomática, que iremos abordar na secção seguinte, dos espaços vectoriais sobre o corpo dos números reais $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Apenas necessitamos de alterar o conceito de escalar (em vez de número real passa a ser um elemento de $\mathbb{K}$ e as operações "+" e "·" passam a ser as operações θ e ϕ. Por este motivo, apenas iremos referir a axiomática de espaço vectorial real.

4.3 Definição de espaço vectorial real

Definição 4.4 (Espaço vectorial)**.**

1. Um espaço vectorial real consiste em dois conjuntos $\mathscr{E}$ e $\mathbb{R}$. Aos elementos de $\mathscr{E}$ chamamos de *vectores* e aos elementos de $\mathbb{R}$ chamamos de escalares.

2. Para distinguirmos escalares de vectores usaremos frequentemente letras minúsculas gregas para representarmos escalares e letras minúsculas romanas a negrito ou com uma seta superior, para representarmos vectores.

3. O conjunto $\mathbb{R}$ está munido com as operações binárias usuais de adição e produto "+" e "·".

4. O conjunto $\mathscr{E}$ está munido com uma *operação binária* que representaremos por $\oplus$. 0u seja,
$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{E}, \exists \mathbf{w} \in \mathscr{E} \;:\; \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}.$$
Chamamos a esta operação *adição de vectores.*

5. Existe uma operação "externa" $\odot$ tal que
$$\odot : \mathbb{R} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$$
tal que a todo o escalar α e a todo o vector $\mathbf{u}$ faz corresponder um vector $\mathbf{v} = \alpha \odot \mathbf{u}$. Chamamos a esta operação *produto de um escalar por um vector.*

6. A operação $\oplus$ satisfaz os seguintes axiomas
$$\begin{aligned}
\mathbf{A_1}: &\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{E},\ (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}).\\
\mathbf{A_2}: &\ \exists \mathbf{o}_{\oplus} \in \mathscr{E},\ \forall\, \mathbf{u} \in \mathscr{E}, \mathbf{u} \oplus \mathbf{o}_{\oplus} = \mathbf{o}_{\oplus} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}.\\
\mathbf{A_3}: &\ \forall\, \mathbf{u} \in \mathscr{E},\ \exists \mathbf{u}' \in \mathscr{E},\ \mathbf{u} \oplus \mathbf{u}' = \mathbf{u}' \oplus \mathbf{u} = \mathbf{o}_{\oplus}.\\
\mathbf{A_4}: &\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{E},\ \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

7. As operaçãos $\oplus$, $\odot$, $+$ e $\cdot$ satisfazem os seguintes axiomas
$$\begin{aligned}
\mathbf{M_1}: &\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{u} \in \mathscr{E},\ (\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u}).\\
\mathbf{M_2}: &\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{E},\ \alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v}).\\
\mathbf{M_3}: &\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{u} \in \mathscr{E},\ (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}).\\
\mathbf{M_4}: &\ \forall \mathbf{u} \in \mathscr{E},\ 1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Observações:

(i) Os quatro primeiros axiomas, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{A_4}$, dizem respeito à adição de vectores e são, respectivamente, a associatividade, a existência de elemento neutro $\mathbf{o}_{\oplus}$, a existência de inverso para cada vector e a comutatividade[2]

(ii) Os axiomas, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ e $\mathbf{M_4}$, estabelecem o comportamento das quatro operações envolvidas na estrutura de um espaço vectorial real. $\mathbf{M_1}$ é a distributividade relativamente à adição escalar, $\mathbf{M_2}$ a distributividade relativamente à adição vectorial, $\mathbf{M_3}$ a associatividade mista e $\mathbf{M_4}$ exige que o elemento neutro da multiplicação escalar, 1, seja elemento neutro à esquerda de $\odot$.

(iii) Sempre que não haja ambiguidades iremos simplificar a notação das operações, adição de vectores "$\oplus$" e produto de um escalar por um vector "$\odot$". Neste caso, Usaremos o mesmo símbolo '$+$" para representar indistintamente a soma de escalares ou a adição de vectores e o mesmo símbolo "$\cdot$" para representar indistintamente o produto de escalares ou o produto de um escalar por um vector.

Exemplos de espaços vectoriais:

1. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da operação adição usual de n-tuplos em $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) \oplus (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e pelo produto usual de um escalar por um n-tuplo em $\mathbb{R}^n$

$$\alpha \odot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

satisfaz todos os axiomas da definição de espaço vectorial. Neste caso, por simplificação, diremos apenas que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial. Além disso, como já foi observado atrás, usamos a notação corrente para a adição vectorial "$+$" e o produto de um escalar por um vector "$\cdot$" em vez dos símbolos usados na axiomática $\oplus$ e $\odot$.

2. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\mathcal{M}_{m,n}$ das matrizes do tipo $m \times n$ munido com a soma usual e com o produto usual de um escalar por uma matriz satisfaz todos os axiomas da definição de espaço vectorial.

3. O conjunto $\mathrm{P}_n[x]$, constituído por todos os polinómios com coeficientes reais de grau não superior a n munido da operação adição usual e do produto usual de um escalar por um polinómio é um espaço vectorial.

4. O conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^+$ munido da operação adição

$$x \oplus y = x \cdot y$$

[2] Ou seja, para quem leu a secção 4.2, tem-se que $(\mathscr{E}, \oplus)$ é um grupo comutativo.

e do produto escalar por um vector

$$\alpha \odot x = x^{\alpha}$$

é um espaço vectorial onde, o vector nulo é $\mathbf{o}_{\oplus} = 1$ e o elemento inverso de um vector x é $x' = \frac{1}{x}$.

♣

Propriedades 4.1 (algébricas dos espaços vectoriais)**.**

Seja $\mathscr{E}$, munido com a adição $\oplus$ e com o produto de um escalar por um vector $\odot$, um espaço vectorial real com vector nulo $\mathbf{o}_{\oplus}$ e o inverso de um vector $\mathbf{u}$ é representado por $\mathbf{u}'$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{E}$. Então tem-se,

1. O vector nulo $\mathbf{o}_{\oplus}$ é único.
2. Todo o vector $\mathbf{u}$ possui um único inverso $\mathbf{u}'$.
3. $0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{o}_{\oplus}$.
4. $\alpha \odot \mathbf{o}_{\oplus} = \mathbf{o}_{\oplus}$.
5. $(-\alpha) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u})' = \alpha \odot (\mathbf{u}')$.
6. $(\alpha - \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})'$.
7. $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}') = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})'$.
8. $\alpha \odot \mathbf{u} = \mathbf{o}_{\oplus} \implies \alpha = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}_{\oplus}$.

Exercício 1. Verifique que as propriedades algébricas dos espaços vectoriais são satisfeitas no espaço vectorial indicado no ponto 4. do exemplo anterior.

Exercício 2. Mostre as propriedades algébricas dos espaços vectoriais, 4.1.

4.4 Subspaços vectoriais

Definição 4.5 (Subespaço).

Seja $\mathscr{E}$ um espaço vectorial real (munido com uma operação binária adição $\oplus$ e com um produto de um escalar por um vector $\odot$) e $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ um subconjunto de $\mathscr{E}$. Dizemos que $\mathscr{F}$ é um *subespaço* de $\mathscr{E}$ se e somente se:

$$\mathbf{S_1}: \ \mathscr{F} \neq \emptyset$$
$$\mathbf{S_2}: \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{F}, \ \ \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in \mathscr{F}$$
$$\mathbf{S_3}: \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in \mathscr{F}, \ \ \alpha \odot \mathbf{u} \in \mathscr{F}$$

Notação: Escrevemos $\mathscr{F} \prec E$ para indicar que $\mathscr{F}$ é um subespaço de E. Caso $\mathscr{F}$ não seja subespaço de $\mathscr{E}$ escrevemos, $\mathscr{F} \not\prec E$.

Exemplo: Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ e os subconjuntos

$$\mathscr{F}_1 = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}, \quad \mathscr{F}_2 = \{(x, y) : xy \geq 0\}, \ \text{e} \ \mathscr{F}_3 = \{(x, y) : x = y\}.$$

1. Tem-se $\mathscr{F}_1 \not\prec \mathbb{R}^2$ porque, por exemplo, $(1, 1) \in \mathscr{F}_1$ e $-1 \cdot (1, 1) = (-1, 1) \notin \mathscr{F}_1$. Ou seja, a condição $\mathbf{S_3}$ não é satisfeita.

2. Tem-se $\mathscr{F}_2 \not\prec \mathbb{R}^2$ porque, por exemplo, $(2, 1) \in \mathscr{F}_2$, $(-1, -2) \in \mathscr{F}_2$ e a sua soma $(1, -1) \notin \mathscr{F}_2$. Ou seja a condição $\mathbf{S_2}$: não é satisfeita.

3. Já $\mathscr{F}_3$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ porque satisfaz todas as condições $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ e $\mathbf{S_3}$. De facto, $\mathscr{F}_3 \neq \emptyset$ porque por exemplo $(0, 0) \in \mathscr{F}_3$ (logo $\mathbf{S_1}$ é satisfeita). Para todo o par de vectores (x_1, x_1) e (x_2, x_2) em $\mathscr{F}_3$ tem-se que a sua soma $(x_1 + x_2, x_1 + x_2)$ pertence a $\mathscr{F}_3$ (consequentemente $\mathbf{S_2}$ é satisfeita). E, $\mathbf{S_2}$ é igualmente satisfeita porque dado um real qualquer α e um elemento qualquer (x, x) de $\mathscr{F}_3$ tem-se que $\alpha(x, x) = (\alpha x, \alpha x) \in \mathscr{F}_3$.

♣

Teorema 4.1.

Se o conjunto $\mathscr{F}$ é um subespaço de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$ então, o conjunto $\mathscr{F}$ munido com a restrição da adição vectorial em $\mathscr{E}$ a $\mathscr{F}^2$ e da restrição da multiplicação de um escalar por um vector em $\mathscr{E}$ a $\mathbb{R} \times \mathscr{F}$ é um espaço vectorial real.

☞ *Se $\mathscr{F} \prec \mathscr{E}$ então, o vector nulo $\mathbf{0}_\oplus$ de $\mathscr{E}$ pertence necessariamente a $\mathscr{F}$ e é igualmente o vector nulo do espaço vectorial $\mathscr{F}$.*

Propriedades 4.2.

1. Para todo o espaço vectorial $\mathscr{E}$ tem-se $\{\mathbf{0}_\oplus\} \prec \mathscr{E}$ e $\mathscr{E} \prec \mathscr{E}$.
2. Se $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ e $\mathbf{0}_\oplus \notin \mathscr{F}$ então, $\mathscr{F} \not\prec \mathscr{E}$.
3. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$ e se $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ então, $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$
4. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$ e se $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ então,
$$\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E} \Leftrightarrow (\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \vee \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1)$$
5. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$, $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ e $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ então, tem-se
$$\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$$

☞

1. *Os subespaços $\{\mathbf{0}_\oplus\}$ e $\mathscr{E}$ do espaço vectorial $\mathscr{E}$ dizem-se subespaços triviais de $\mathscr{E}$. Os restantes subespaços de $\mathscr{E}$ dizem-se subespaços próprios de $\mathscr{E}$.*
2. *A segunda propriedade revela-nos que se um subconjunto qualquer de $\mathscr{E}$ não tiver o vector nulo $\mathbf{0}_\oplus$ como elemento então não é subespaço vectorial de $\mathscr{E}$.*

4.5 Combinações lineares

Definição 4.6 (Combinação linear)**.**

Seja $\mathscr{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de n vectores (de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$ com a adição vectorial $\oplus$ e com produto de um escalar por um vector $\odot$) e seja $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uma lista de n escalares. Uma *combinação linear* da lista de vectores $\mathscr{U}$ com *coeficientes lineares* α_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ é a soma vectorial

$$\alpha_1 \odot \mathbf{u}_1 \oplus \alpha_2 \odot \mathbf{u}_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot \mathbf{u}_n. \tag{4.2}$$

Nota: Se não houver ambiguidades escrevemos simplesmente

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

ou de forma compacta

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i.$$

Exemplo : Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ [3].

a) A soma (ou o vector $(6,-5,4)$)

$$2\,(2,-2,1)+(-1)\,(1,1,1)+3\,(1,0,1)=(6,-5,4)$$

é a combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(1,1,1),(1,0,1))$ com *coeficientes lineares* $(2,-1,3)$.

Neste exemplo, podemos verificar que o vector $(6,-5,4)$ escreve-se de forma única como combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(1,1,1),(1,0,1))$. Ou seja, por outras palavras, se

$$x\,(2,-2,1)+y\,(1,1,1)+z\,(1,0,1)=(6,-5,4)$$

então tem-se $x=2$, $y=-1$ e $z=3$. De facto, esta condição é equivalente a afirmar que o SEL

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ -2x + y = -5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

é possível e determinado. Note que se trata de um sistema de Cramer e consequentemente $(2,-1,3)$ é o único elemento do seu conjunto solução.

b) A soma (ou o vector $(2,-2,1)$)

$$2\,(2,-2,1)+(-1)\,(3,-2,2)+1\,(1,0,1)=(2,-2,1)$$

é uma combinação linear da sequência vectores $((2,-2,1),(3,-2,2),(1,0,1))$ com coeficientes lineares $(2,-1,1)$. Contudo, neste caso, esta combinação linear não é única. Ou seja, existem outros coeficientes lineares $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ tais que o vector $(2,-2,1)$ é combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(3,-2,2),(1,0,1))$. De facto, basta verificar que o SEL

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ -2x - 2y = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

é possível e indeterminado. Consequentemente toda a solução $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ do sistema “fornece” coeficientes lineares para os quais se tem

$$\alpha_1\,(2,-2,1)+\alpha_2\,(3,-2,2)+\alpha_3\,(1,0,1)=(2,-2,1).$$

resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução

$$CS=\{(1+z,-z,z)\,:\,z\in\mathbb{R}\}$$

e temos

$$(1+z)\,(2,-2,1)-z\,(3,-2,2)+z\,(1,0,1)=(2,-2,1),\quad \forall z\in\mathbb{R}.$$

[3] Sempre que não especificarmos as operações de adição vectorial e o produto de um escalar por um vector consideramos o adição e o produto usual.

♣

Definição 4.7 (Conjunto gerado por uma lista de vectores)**.**

Seja $\mathscr{E}$ um espaço vectorial real e seja $\mathscr{L} = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$ uma lista de n vectores em $\mathscr{E}$. Ao conjunto (de vectores) formado por todas as combinações lineares da lista $\mathscr{L}$ chamamos *conjunto gerado* pela lista de vectores $\mathscr{L}$ e escrevemos $\overline{\mathscr{L}}$. Ou seja,

$$\overline{(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathscr{E} : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u_i}, \ \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

4.6 Conjuntos gerados por uma lista de vectores

exemplos

1. Considere a lista $\mathscr{L} = ((1,0,-1,\frac{1}{3}))$ constituída por um vector do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$. Então o conjunto gerado por $\mathscr{L}$ é

$$\overline{((1,0,-1,\tfrac{1}{3}))} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{v} = \alpha\,(1,0,-1,\tfrac{1}{3}), \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (\alpha, 0, -\alpha, \tfrac{\alpha}{3}) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Considere a lista $\mathscr{L} = ((1,0,-1,\frac{1}{3}), (0,1,1,1))$ constituída por dois vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$. O conjunto gerado por $\mathscr{L}$ é o conjunto formado pelos vectores

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

para os quais existe uma lista (α, β) de coeficientes lineares tal que

$$(a,b,c,d) = \alpha(1,0,-1,\tfrac{1}{3}) + \beta(0,1,1,1).$$

ou seja, os elementos de $\overline{\mathscr{L}}$ são os vectores (a,b,c,d) para os quais o SEL nas duas incógnitas α e β,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & & & = & a \\ & & \beta & = & b \\ -\alpha & + & \beta & = & c \\ \frac{1}{3}\alpha & + & \beta & = & d \end{array} \right.$$

tem solução. Então teremos que transformar a matriz completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ deste SEL em forma de escada por linhas $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$ e impor condições a (a,b,c,d) tal que se verifique

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}') = \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']).$$

Note que não interessa se o SEL seja determinado ou indeterminado. Apenas estamos interessados nos vectores (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$ que são combinações lineares dos elementos da lista $\mathscr{L}$. Usando a eliminação Gaussiana temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \\ \frac{1}{3} & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & -\frac{a}{3}+d \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a+c-b \\ 0 & 0 & -\frac{a}{3}+d-b \end{array}\right]$$

Facilmente se reconhece que o SEL é possível sse

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}') = \mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 2.$$

Ou seja, o sistema é possível sse $\mathrm{r}([\mathbf{A}'|\mathbf{b}']) = 2$, ou equivalentemente, se as entradas assinaladas a cor azul forem nulas. Deste modo, temos

$$\overline{((1,0,-1,\tfrac{1}{3}),(0,1,1,1))} = \left\{(a,b,c,d) : a+c-b=0 \wedge -\tfrac{a}{3}+d-b=0\right\}.$$

Por vezes é conveniente enfatizar o número de variáveis livres (e as variáveis ligadas) que ocorrem na descrição de um conjunto gerador. Neste exemplo procedíamos da seguinte forma. As condições $a+c-b=0$ e $-\frac{a}{3}+d-b=0$ formam um sistema de duas equações lineares nas 4 incógnitas a, b, c e d. Verifica-se imediatamente que este SEL é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2 e, o seu conjunto solução CS coincide com o conjunto gerado pela lista $\mathscr{L}$. Logo, tem-se

$$\overline{((1,0,-1,\tfrac{1}{3}),(0,1,1,1))} = \left\{\left(\tfrac{3}{4}(-c+d),\tfrac{1}{4}(-c+3d),c,d\right) : c,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

♣

O seguinte resultado relaciona subespaços vectoriais com conjuntos gerados por listas de vectores.

Teorema 4.2.

Seja $\mathscr{L}$ uma lista não vazia de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Então, o conjunto gerado $\overline{\mathscr{L}}$ pela lista $\mathscr{L}$ é um subespaço vectorial de $\mathscr{E}$.

Propriedade 4.3.

Sejam $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ duas listas de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$, constituídas exactamente pelos mesmos vectores mas, dispostos por diferente ordem. Então, tem-se

$$\overline{\mathscr{L}_1} = \overline{\mathscr{L}_2}.$$

Propriedade 4.4.

Sejam $\mathscr{L}_n$ e $\mathscr{L}_{n+1}$ duas listas de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ tais que

$$\mathscr{L}_n = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n})$$
$$\mathscr{L}_{n+1} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}, \mathbf{u_{n+1}})$$

Então tem-se

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{L}_n} = \overline{\mathscr{L}_{n+1}}, & \text{se } \mathbf{u_{n+1}} \in \overline{\mathscr{L}_n} \\ \\ \overline{\mathscr{L}_n} \subsetneq \overline{\mathscr{L}_{n+1}}, & \text{se } \mathbf{u_{n+1}} \notin \overline{\mathscr{L}_n} \end{cases}$$

Definição 4.8 (Espaço vectorial finitamente gerado)**.**

Um espaço vectorial $\mathscr{E}$ diz-se *finitamente gerado* sse existir uma lista $\mathscr{L}$ formada por um número finito de vectores que gere o conjunto $\mathscr{E}$. Ou seja,

$$\exists n \in \mathbb{N} : \mathscr{L} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n}) \quad \text{e} \quad \overline{\mathscr{L}} = \mathscr{E}.$$

Caso contrário dizemos que o espaço vectorial $\mathscr{E}$ *não é finitamente gerado*.

Note que, se uma lista $\mathscr{L}$ com n elementos gera um espaço vectorial $\mathscr{E}$ então toda a lista que contenha os n elementos de $\mathscr{L}$ gera igualmente $\mathscr{E}$.

Um problema que se coloca é o de encontrar uma lista com o número mínimo de vectores possível e que gere o espaço vectorial $\mathscr{E}$. Além disso, pretendemos averiguar para que listas $\mathscr{L}$ todo o vector de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ se escreve de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathscr{L}$. Estes problemas são relevantes se pretendermos representar vectores usando uma lista de escalares a que chamamos de coordenadas de um vector. De facto, se uma lista $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ gerar "todo" o espaço $\mathscr{E}$ e se, todo o vector $\mathbf{u}$ de $\mathscr{E}$ possuir uma única lista de coeficientes lineares $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ da lista de vectores $\mathscr{L}$ então, podemos representar, sem ambiguidades, todo o vector $\mathbf{u}$ pelas suas "coordenadas" (ou coeficientes lineares) $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ onde, $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$.

Os problemas acima descritos levam-nos à generalização do conceito de matrizes linearmente independentes, abordada na subsecção 1.3.1, ao conceito de vectores linearmente independentes.

4.7 Independência e dependência linear

Definição 4.9 (Lista de vectores linearmente / dependentes)**.**

Seja $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Dizemos que os vectores da lista $\mathscr{L}$ são *linearmente independentes* (L.I.) se

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}_\oplus \implies (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0).$$

caso contrario, ou seja, se

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}_\oplus \wedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

dizemos que os vectores da lista $\mathscr{L}$ são *linearmente dependentes* (L.D.).

Propriedade 4.5.

Seja $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores L.I. então, toda a lista $\mathscr{L}'$ que contenha apenas vectores de $\mathscr{L}$ é uma lista de vectores L.I.

Propriedade 4.6.

Seja $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores L.D. então, toda a lista $\mathscr{L}'$ que contenha todos os elementos de $\mathscr{L}$ é uma lista de vectores L.D.

Propriedade 4.7.

Seja $\mathscr{L}_n = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores. Então, se existe em $\mathscr{L}$ um vector $\mathbf{u}_k$ combinação linear da lista $\mathscr{L}_{n-1} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$ então, os vectores de $\mathscr{L}_n$ são L.D.

Propriedade 4.8.

Seja $\mathscr{L}_n = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores L.I. e $\mathscr{L}_{n+1} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1})$, onde o vector $\mathbf{u}_{n+1} \notin \overline{\mathscr{L}_n}$. Então os vectores da lista $\mathscr{L}_{n+1}$ são L.I.

Propriedade 4.9.

Seja $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores e seja $\mathbf{v} \in \overline{\mathscr{L}}$ então, a lista de coeficientes lineares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ da combinação linear $\mathbf{v}$ (de vectores de $\mathscr{L}$) é única se e somente se os vectores da lista $\mathscr{L}$ são linearmente independentes.

Estas propriedades ajudam a dar uma resposta ao problema acima descrito. Dado um espaço vectorial $\mathscr{E}$ finitamente gerado, pretendemos encontrar uma lista de vectores $\mathscr{L}$ tal que

1. O espaço $\mathscr{E}$ é gerado pela lista $\mathscr{L}$. Ou seja

$$\mathscr{E} = \overline{\mathscr{L}} \tag{4.3}$$

2. Todo o vector $\mathbf{v}$ de $\mathscr{E}$ possui uma combinação linear única de elementos de $\mathscr{L} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Ou seja

$$\begin{matrix} \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n \\ \text{e} \\ \mathbf{v} = \alpha'_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha'_n \mathbf{u}_n \end{matrix} \implies (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) \ . \tag{4.4}$$

4.8 Base e dimensão de um espaço vectorial

Definição 4.10 (Base de um espaço vectorial)**.**

Uma lista $\mathscr{L}$ de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ diz-se uma *base* de $\mathscr{E}$ se e somente se

1. $\mathscr{E} = \overline{\mathscr{L}}$
2. Os vectores de $\mathscr{L}$ são LI

A propriedade 4.9 exige que os elementos de uma lista que verifique 4.4 terá necessariamente constituída por vectores linearmente independentes. Consequentemente todo o vector de $\mathscr{E}$ possui coeficientes lineares únicos dos vectores de uma base.

Teorema 4.3.

Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ duas bases de um mesmo espaço vectorial. Então $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ possuem o mesmo número de vectores.

este resultado permite a seguinte definição

Definição 4.11 (Dimensão um espaço vectorial finitamente gerado)**.**

Dizemos que a dimensão de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ é n, e escrevemos

$$\dim(\mathscr{E}) = n$$

se e somente se uma base de $\mathscr{E}$ for constituida por n vectores.

Exemplos:

1. A lista $\mathscr{B}_c = ((1,0),(0,1))$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Consequentemente toda a base de $\mathbb{R}^2$ é uma lista constituída por dois vectores L.I. e tem-se $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Chamamos a $\mathscr{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

2. A lista $\mathscr{B}_c = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é a base canónica do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Consequentemente toda a base de $\mathbb{R}^3$ é uma lista constituída por três vectores L.I. e tem-se $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

3. Dado um número natural n tem-se que a lista $\mathscr{B}_c = ((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e tem-se $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

4. A lista
$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
do espaço vectorial das matrizes quadradas de ordem $\mathscr{M}_2$. Consequentemente este espaço tem dimensão 4.

5. A lista de polinómios $\mathscr{B}_c = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ é a base canónica do espaço $\mathrm{P}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente tem-se $\dim(\mathrm{P}_n[x]) = n + 1$.

6. A lista $\mathscr{B}_c = (1)$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^+$ munido da operação adição
$$x \oplus y = x \cdot y$$
e do produto escalar por um vector
$$\alpha \odot x = x^\alpha$$
e tem-se, $\dim(\mathbb{R}^+) = 1$.

7. Dado um espaço vectorial $\mathscr{E}$ tem-se que $\mathscr{B}_c = \emptyset$ (aqui usamos o símbolo $\emptyset$ para representar a lista vazia) é uma base do subespaço trivial $\{\mathbf{o}_\oplus\}$. Logo, $\dim(\{\mathbf{o}_\oplus\}) = 0$.

♣

As propriedades 4.8 e 4.4 permitem a construção de bases de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ finitamente gerado. Este processo de construção consiste em partir de uma lista $\mathscr{B}_1$ que é uma base subespaço vectorial $\overline{\mathscr{B}_1}$ e encontrar sucessivamente listas

$$\mathscr{B}_1,\ \mathscr{B}_2,\ \ldots\ \mathscr{B}_{n-1},\ \mathscr{B}_n$$

tais que a lista $\mathscr{B}_{i+1}$ é constituída por todos os vectores da lista $\mathscr{B}_i$ e por um vector que não pertence a $\overline{\mathscr{B}_i}$, para todo $i = 1,2,\ldots,n$. deve modo construímos uma sequência de subespaços de $\mathscr{E}$ onde o último, $\mathscr{B}_n$, coincide com $\mathscr{E}$

$$\overline{\mathscr{B}_1} \prec \overline{\mathscr{B}_2} \prec \ldots \prec \overline{\mathscr{B}_{n-1}} \prec \overline{\mathscr{B}_n} \equiv \mathscr{E}$$

e

$$\dim\left(\overline{\mathscr{B}_{i+1}}\right) = \dim\left(\overline{\mathscr{B}_i}\right) + 1,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Exemplo: Pretendermos encontrar uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha o vector $\mathbf{u_1} = (1,2,0,-1)$. Então procedemos do seguinte modo:

1. $\mathscr{B}_1 = (\mathbf{u_1})$ é uma base do subespaço $\overline{\mathscr{B}_1}$ de $\mathbb{R}^4$ onde

$$\overline{\mathscr{B}_1} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \exists \alpha \in \mathbb{R} \wedge (a,b,c,d) = \alpha \mathbf{u_1}\right\}$$

   ou equivalentemente

$$\overline{\mathscr{B}_1} = \{(x,2x,0,-x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

   Note que $\dim(\overline{\mathscr{B}_1}) = 1$.

2. Escolhemos um vector $\mathbf{u_2}$ qualquer de $\mathbb{R}^4$ que não pertença ao subespaço $\overline{\mathscr{B}_1}$. Por exemplo, escolhemos $\mathbf{u_2} = (0,0,1,0)$. Determinamos o subespaço $\overline{\mathscr{B}_2}$ de dimensão 2, onde $\mathscr{B}_2 = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$.

   Tendo em conta que

$$\overline{\mathscr{B}_2} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \exists (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge (a,b,c,d) = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2}\right\}$$

   tem-se que um vector (a,b,c,d) pertence a $\overline{\mathscr{B}_2}$ sse o SEL

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \alpha_1 & & = & a \\ 2\alpha_1 & & = & b \\ & \alpha_2 & = & c \\ -\alpha_1 & & = & d \end{array}\right.$$

   for possível (determinado ou indeterminado). Como

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & a \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a+d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & a+d \end{array}\right]$$

tem-se que que o SEL é possível sse a característica da matriz completa for 2, ou seja,

$$(a,b,c,d)\in\overline{\mathscr{B}_2} \iff b-2a=0 \wedge a+d=0,\ \forall c\in\mathbb{R}.$$

Logo,

$$\overline{\mathscr{B}_2}=\left\{(x,2x,y,-x)\,:\,x,y\in\mathbb{R}\ \right\}.$$

Note que $\dim(\overline{\mathscr{B}_2})=2$.

3. Encontrado o subespaço $\overline{\mathscr{B}_2}$ procedemos de modo análogo. Ou seja, encontramos um vector qualquer $\mathbf{u_3}$ de $\mathbb{R}^4$ que não esteja em $\overline{\mathscr{B}_2}$ e determinamos o subespaço $\overline{\mathscr{B}_3}$ de dimensão 3 onde $\mathscr{B}_3=(\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3})$. Por exemplo, escolhendo $\mathbf{u_3}=(1,0,0,1)$ tem-se

$$\overline{\mathscr{B}_3}=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\,:\,\exists\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3 \wedge (a,b,c,d)=\alpha_1\,\mathbf{u_1}+\alpha_2\,\mathbf{u_2}+\alpha_3\,\mathbf{u_3}\right\}.$$

Um vector (a,b,c,d) pertence a $\overline{\mathscr{B}_3}$ sse o SEL

$$\begin{cases}\alpha_1 & & +\ \alpha_3 & = a\\ 2\alpha_1 & & & = b\\ & \alpha_2 & & = c\\ -\alpha_1 & & +\ \alpha_3 & = d\end{cases}$$

for possível (determinado ou indeterminado). Como

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\2&0&0&b\\0&1&0&c\\-1&0&1&d\end{array}\right]\longrightarrow\cdots\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&0&c\\0&0&-2&-2a+b\\0&0&1&-a+b+d\end{array}\right]$$

tem-se que um vector (a,b,c,d) pertence a $\overline{\mathscr{B}_3}$ sse

$$-a+b+d=0\quad\forall c\in\mathbb{R}.$$

Deste modo tem-se

$$\overline{\mathscr{B}_3}=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\,:\,-a+b+d=0\right\}.$$

Se pretendermos destacar as variáveis livres que ocorrem em $\overline{\mathscr{B}_3}$, resolvemos a equação $-a+b+d=0$ em ordem a uma das variáveis. Por exemplo, resolvendo em ordem à variável d tem-se $d=a-b$ e podemos escrever

$$\overline{\mathscr{B}_3}=\left\{(x,y,z,x-y)\,:\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

4. Escolhemos um vector $\mathbf{u}_4$ qualquer de $\mathbb{R}^4$ que não pertença ao subespaço $\overline{\mathscr{B}_3}$. Por exemplo, considerando o vector $\mathbf{u}_4 = (1,2,0,0)$ temos a lista

$$\mathscr{B}_4 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = ((1,2,0,-1),(0,0,1,0),(1,0,0,1),(1,2,0,0)),$$

e

$$\overline{\mathscr{B}_4} = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \exists (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \wedge (a,b,c,d) = \alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \alpha_3 \mathbf{u_3} + \alpha_4 \mathbf{u_4}\right\}.$$

Deste modo, $(a,b,c,d) \in \overline{\mathscr{B}_4}$ sse o seguinte sistema for possível

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & a \\ 2\alpha_1 & & & & & + & \alpha_4 & = & b \\ & & \alpha_2 & & & & & = & c \\ -\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & & & = & d \end{array}\right. .$$

Observamos que, os vectores da lista $\mathscr{B}_4$ são linearmente independentes sse as matrizes coluna da matriz simples deste sistema forem linearmente independentes (esta observação é igualmente válida nos passos anteriores). Ou seja, se a característica da matriz simples do sistema for 4 o sistema é de Cramer. Logo o sistema é sempre possível (e determinado) independentemente do valor dos parâmetros a, b, c e d. Consequentemente temos

- $\overline{\mathscr{B}_4} = \mathbb{R}^4$
- Os vectores de $\mathscr{B}_4$ são L.I.

Concluímos deste modo que a lista $\mathscr{B}_4$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ (que contém $\mathbf{u}_1$).

♣

Terminamos este capítulo com a seguinte

Definição 4.12 (Representação de um vector)**.**

Seja $\mathscr{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ uma base de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$. A *representação* de um vector $\mathbf{v} \in \mathscr{E}$ é o n-tuplo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dos coeficientes lineares do vector $\mathbf{v}$ escrito como combinação linear dos elementos da base $\mathscr{B}$. Aos coeficientes lineares chamamos de coordenadas do vector $\mathbf{v}$ na base $\mathscr{B}$.
Ou seja, escrevemos

$$\mathrm{Rep}_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathscr{B}}$$

onde $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$.

4.9 Exercícios

4.1 *Verifique se são espaços vectoriais reais (No caso de não ser um espaço vectorial real indique pelo menos um axioma que não seja satisfeito);*

a) $\mathscr{E} = \mathscr{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ *é contínua*$\}$*, com a adição usual de funções e a multiplicação usual de um escalar por uma função.*

b) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^+$*, com as operações adição e multiplicação dadas por:*

$$\begin{array}{rcc} \oplus : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) \to \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \end{array} \qquad \begin{array}{rc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,\mathbf{u}) \to \alpha \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}^\alpha \end{array}$$

c) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$*, com a multiplicação usual e a adição definida por*

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = \big(x_1 + 2y_1, x_2 + y_2\big)$$

d) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$*, com a adição vectorial usual e com a multiplicação definida por*

$$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha,(x,y)) & \longmapsto & \alpha \otimes (x,y) = (\alpha x, 0) \end{array}$$

e) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$*, com a multiplicação usual e a adição definida por*

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2, z_1 z_2)$$

f) $\mathscr{E} = \mathscr{M}_2$*, com a adição vectorial usual e com a multiplicação definida por*

$$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathscr{M}_2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2 \\ & \left(\alpha, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) & \longmapsto & \alpha \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & y \\ z & \alpha t \end{bmatrix} \end{array}$$

g) $\mathscr{E} = \overline{\mathscr{M}}_2 = \{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2 : \det(\mathbf{X}) \neq 0\}$*, com o produto usual e a adição*

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \overline{\mathscr{M}}_2 \times \overline{\mathscr{M}}_2 & \longrightarrow & \overline{\mathscr{M}}_2 \\ & (\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \longmapsto & \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = \mathbf{XY} \end{array}$$

h) $\mathscr{E} = \mathbb{C}$ *com a adição usual (de complexos) e a multiplicação usual*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\alpha, a+ib) & \longmapsto & \alpha\cdot(a+ib) = (\alpha a) + i(\alpha b) \end{array}$$

4.2 *Diga quais dos subconjuntos dos espaços vectoriais indicados são subespaços vectoriais.*

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 2y\}$ *de* $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$.

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=2y+1\}$ *de* $\mathscr{E}=\mathbb{R}^2$.

c) $\{(0,0,0),\ (0,1,0),\ (0,-1,0)\}$ *de* $\mathscr{E}=\mathbb{R}^3$.

d) $\{(0,0,0)\}$ *de* $\mathscr{E}=\mathbb{R}^3$.

e) $\{(a,0,0),\ a\in\mathbb{R}\}$ *de* $\mathscr{E}=\mathbb{R}^3$.

f) $\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in \mathrm{P}_3[x] : a_0=a_2-a_3=0\}$ *de* $\mathscr{E}=\mathrm{P}_3[x]$.

4.3 *Considere o e.v.r.* $\mathscr{M}_2$ *(operações usuais). Verifique se os seguintes subconjuntos de* $\mathscr{M}_2$ *são subespaços.*

a) $\mathrm{U}=\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \det(\mathbf{X})=0\}$.

b) $\mathrm{U}'=\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \det(\mathbf{X})\neq 0\}$.

c) $\mathrm{S}_\mathrm{A}=\left\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \mathbf{X}\ \textit{permuta com}\ \mathbf{A}\right\}$, *onde* $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

d) $\mathrm{S}_\mathrm{Y}=\left\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \mathbf{X}\ \textit{permuta com}\ \mathbf{A}\right\}$, *onde* $\mathbf{A}$ *é uma matriz qualquer previamente escolhida em* $\mathscr{M}_2$.

e) $\mathrm{S}=\left\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \mathbf{X}=\mathbf{X}^\mathbf{T}\right\}$. *(conjunto das matrizes simétricas)*

f) $\mathrm{S}'=\left\{\mathbf{X}\in\mathscr{M}_2 : \mathbf{X}=-\mathbf{X}^\mathbf{T}\right\}$. *(conjunto das matrizes anti simétricas)*

4.4 *Indique quais das seguintes listas geram* $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathscr{L}_1=((1,0,0),(0,-1,0),(0,0,2))$.

b) $\mathscr{L}_2=((1,0,2),(1,-1,0),(0,1,2))$.

c) $\mathscr{L}_3=((1,1,2),(1,-1,2),(1,3,2))$.

d) $\mathscr{L}_4=((1,1,0),(1,-1,3))$.

e) $\mathscr{L}_5=((1,1,2),(2,-1,0),(0,0,1),(1,0,1))$.

f) $\mathscr{L}_6=((1,1,2),(2,-1,0),(3,0,2),(0,3,4))$.

4.5 *Considere as seguinte listas de vectores de* $\mathbb{R}^4$*:*

$\mathscr{L}_1=((1,1,0,1),(-1,-1,0,-1))$

$\mathscr{L}_2=((1,1,0,1),(-1,-1,0,1))$

$\mathscr{L}_3=((1,1,0,1),(-1,-1,0,1),(-2,-2,0,0))$

$\mathscr{L}_4=((1,1,0,1),(-1,-1,0,1),(-2,-2,1,0))$

$\mathscr{L}_5=((1,1,0,1),(-1,-1,0,1),(-2,-2,1,0),(0,0,0,4))$

a) *Averigúe se alguma lista gera* $\mathbb{R}^4$.

b) Verifique se:

$$\textbf{(i)}\ \overline{\mathscr{L}_1} \prec \overline{\mathscr{L}_2}. \quad \textbf{(ii)}\ \overline{\mathscr{L}_2} \prec \overline{\mathscr{L}_1}. \quad \textbf{(iii)}\ \overline{\mathscr{L}_1} \prec \overline{\mathscr{L}_3}.$$
$$\textbf{(iv)}\ \overline{\mathscr{L}_2} \prec \overline{\mathscr{L}_3}. \quad \textbf{(v)}\ \overline{\mathscr{L}_3} \prec \overline{\mathscr{L}_4}. \quad \textbf{(vi)}\ \overline{\mathscr{L}_5} \prec \overline{\mathscr{L}_4}.$$

c) Encontre o subconjunto $\mathrm{S} = \overline{\mathscr{L}_1} \cap \overline{\mathscr{L}_3} \cap \overline{\mathscr{L}_4}$. S *é subespaço de* $\mathbb{R}^4$*?*

4.6 *Quando é que uma lista constituída por apenas um vector é L.I.?*

4.7 *Quando é que uma lista constituída por dois vectores é L.I.?*

4.8 *Mostre que se uma lista* $\mathscr{L} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *é constituida por vectores L.I. então a lista* $\mathscr{L}' = (\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$ *também é constituída por vectores L.I.*

4.9 *Quais das seguintes listas, de vectores em* $\mathrm{P}_3[x]$*, são constituídas por vectores L.I.?*

$$\mathscr{L}_1 = \left(9x^2+x-3\,,\, 2x^2-x+3\,,\, -5x^2+x+1\right) \quad \mathscr{L}_2 = \left(x^2, -x^2+1\right)$$
$$\mathscr{L}_3 = \left(7x^2+x+2\,,\, 2x^2-x\,,\, 3x^2+x\right) \quad \mathscr{L}_4 = \left(7x^2+x+2\,,\, 2x^2-x\,,\, 9x^2+2\right).$$

4.10 *Sejam* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vectores linearmente independente de um e.v.r.* $\mathscr{E}$. *Determine para que valores de* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *os vectores* $\alpha\mathbf{u}+2\mathbf{v}+2\mathbf{w}$ *e* $\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}-\mathbf{w}$ *são linearmente dependentes.*

4.11 *Considere os vectores* $\mathbf{u}_1 = (1,1,a)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,b)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

a) Determine os valores de a e b de forma que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *seja uma base de* $\mathbf{R}^3$.

b) Considere $a = 0$ *e* $b = 1$*. Exprima o vector* $(1,2,0)$ *na base* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

4.12 *Mostre que*

$$\mathscr{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2 \,:\, a+2b-2d = 0 \right\}$$

é um subespaço de $\mathscr{M}_2$ *e encontre uma base de* $\mathscr{F}$.

4.13 *Considere a lista* $\mathscr{L} = (x-1\,,\,(x-1)^2)$.

a) Encontre $\overline{\mathscr{L}}$*. A lista* $\mathscr{L}$ *gera* $\mathrm{P}_2[x]$*?*

b) Mostre que se $p(x) \in \overline{\mathscr{L}}$ *então* 1 *é necessariamente uma raiz de* $p(x)$.

c) Mostre que se $p(x) = ax^2+bx+c \in \overline{\mathscr{L}}$*, com* $a \neq 0$*, então as raízes de* $p(x)$ *são* 1 *e* $\frac{a-b}{a}$

4.14 *Encontre uma base para cada um dos seguintes subespaços*

$$\mathscr{F}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 2y\right\} \qquad \mathscr{F}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z = 0\right\}$$
$$\mathscr{F}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 2y+z\right\} \qquad \mathscr{F}_4 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = y-3z \wedge z = 2t\right\}$$
$$\mathscr{F}_5 = \left\{\mathbf{X} \in \mathscr{M}_2 : \mathbf{X} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \quad \mathscr{F}_6 = \left\{\mathbf{X} \in \mathscr{M}_2 : \mathbf{X} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

4.15 *Considere os subespaços* $\overline{\mathscr{L}_1}$ *e* $\overline{\mathscr{L}_2}$ *de* $\mathbb{R}^4$*, onde*

$$\mathscr{L}_1 = ((1,1,0,0),(-1,0,0,1)) \text{ e } \mathscr{L}_2 = ((1,1,0,0),(-1,0,3,1),(-1,2,3,1),(-1,3,6,2)).$$

Encontre uma base de $\overline{\mathscr{L}_1} \cap \overline{\mathscr{L}_2}$.

4.16 *Considere o e.v.r.* $\mathbb{R}^4$ *e a lista* $\mathscr{L} = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$*, onde*

$$\mathbf{u} = (2,1,0,0),\ \mathbf{v} = (0,4,3,1),\ e\mathbf{w} = (1,a,2,0),\ \text{onde } a \in \mathbb{R}.$$

a) *Escreva, se possível o vector* $\mathbf{s} = (2,9,6,2)$ *como combinação linear dos vectores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

b) *Determine para que valores de a o vector* $\mathbf{s}' = (-4,0,-5,1)$ *é combinação linear de* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

c) *Faça* $a = -1$. *Verifique se os vectores da lista* $\mathscr{L}$ *são L.I.. e determine* $\dim\left(\overline{\mathscr{L}}\right)$.

Capítulo 5

Transformações Lineares

Um dos principais temas da matemática é o estudo de funções. Uma função, de um conjunto X num conjunto Y, é uma regra que a cada elemento do conjunto de partida X associa um e um só elemento do conjunto de chegada Y. Neste capítulo, iremos estudar funções onde os conjuntos X e Y possuem estrutura de espaço vectorial real. Neste caso, é usual chamar a estas funções de **transformações**. Mais, estamos interessados em estudar apenas as transformações que preservam as estruturas existentes nos espaços vectoriais. Nomeadamente as transformações que enviam subespaços vectoriais de X em subespaços vectoriais de Y. A estas transformações chamamos de transformações lineares.

5.1 Definição e Propriedades

Definição 5.1 (Transformação Linear)**.**

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais reais e $\mathbf{T}$ uma função de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Diz-se que $\mathbf{T}$ é uma **transformação linear** de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$ sse são satisfeitas as condições:

1. $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathscr{E}, \mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v})$
2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ \mathbf{u} \in \mathscr{E}, \mathbf{T}(\lambda\cdot\mathbf{u}) = \lambda\cdot\mathbf{T}(\mathbf{u})$

Exemplo: Considere a função (ou transformação)

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{T} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-2y, 3x) \end{array}.$$

Para que a transformação $\mathbf{T}$ seja linear terá que verificar as condições 1 e 2.
Dados $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\Big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\Big) &= \mathbf{T}\Big((x_1+x_2,y_1+y_2)\Big)\\
&= \Big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,,\,(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)\,,\,3(x_1+x_2)\Big)\\
&= \Big(x_1+y_1,x_1-2y_1,3x_1\Big)+\Big(x_2+y_2,x_2-2y_2,3x_2\Big)\\
&= \mathbf{T}\Big((x_1,y_1)\Big)+\mathbf{T}\Big((x_2,y_2)\Big)
\end{aligned}
$$

Logo a condição 1 é satisfeita. É fácil de ver que a segunda condição também é satisfeita. De facto tem-se

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\Big(\lambda(x_1,y_1)\Big) &= \mathbf{T}\Big((\lambda x_1,\lambda y_1)\Big)\\
&= \Big(\lambda x_1+\lambda y_1\,,\,\lambda x_1-2\lambda y_1\,,\,3\lambda y_1\Big)\\
&= \Big(\lambda(x_1+y_1\,,\,x_1-2y_1\,,\,3y_1)\Big)\\
&= \lambda\mathbf{T}\Big((x_1,y_1)\Big).
\end{aligned}
$$

Consequentemente concluímos que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear.

♣

Propriedades 5.1.

Seja $\mathbf{T}$ uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então tem-se:

1. A imagem do vector nulo do e.v. $\mathscr{E}$ é o vector nulo do e.v. $\mathscr{F}$. Ou seja, tem-se

$$\mathbf{T}(\mathbf{O}_{\mathscr{E}})=\mathbf{O}_{\mathscr{F}}$$

2. $\forall \mathbf{u}\in\mathscr{E}, \mathbf{T}(-\mathbf{u})=-\mathbf{T}(\mathbf{u})$

3. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\in\mathscr{E}, \mathbf{T}(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\mathbf{T}(\mathbf{u})-\mathbf{T}(\mathbf{v})$

4. Seja $\mathbf{u}\in\mathscr{E}$ uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\in\mathscr{E}$, $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^m\lambda_i\mathbf{u}_i$. Então a imagem de $\mathbf{u}$ escreve-se como combinação linear das imagens dos vectores $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m$ da forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})=\sum_{i=1}^m\lambda_i\mathbf{T}(\mathbf{u}_i)$$

Note que, da propriedade 4, podemos concluir que uma transformação linear fica perfeitamente definida, se conhecermos a imagem dos vectores que constituem uma base do e.v. $\mathscr{E}$. De facto, se $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m)$ for uma base de $\mathscr{E}$, todo o vector de $\mathscr{E}$ é combinação linear dos vectores desta base e se as imagens $\mathbf{T}(\mathbf{u}_1),\ldots,\mathbf{T}(\mathbf{u}_m)$ forem conhecidas, então conhecemos a imagem de qualquer vector de $\mathscr{E}$.

Exemplo: Pretende-se encontrar a expressão que define a transformação linear $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz as seguintes condições:

$$\mathbf{T}((1,0,0)) = (1,1,1),\ \mathbf{T}((0,1,0)) = (1,0,1) \text{ e } \mathbf{T}((0,1,2)) = (0,0,4).$$

Começamos por observar que conhecemos a imagem de 3 vectores que constituem uma base do espaço de partida, $\mathbb{R}^3$ [1]. Logo, pela observação anterior, a transformação linear **T** está bem definida.

Qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tem uma representação na base $\mathrm{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,2))$. De facto tem-se

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,1,2)\\ &= (a,b+c,2c)\end{aligned}$$

Logo,

$$(x,y,z) = x(1,0,0)+(y-\frac{z}{2})(0,1,0)+\frac{z}{2}(0,1,2).$$

Consequentemente tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\big((x,y,z)\big) &= \mathbf{T}\Big(x(1,0,0)+(y-\frac{z}{2})(0,1,0)+\frac{z}{2}(0,1,2)\Big)\\ &= x\mathbf{T}\big((1,0,0)\big)+(y-\frac{z}{2})\mathbf{T}\big((0,1,0)\big)+\frac{z}{2}\mathbf{T}\big((0,1,2)\big)\\ &= x(1,1,1)+(y-\frac{z}{2})(1,0,1)+\frac{z}{2}(0,0,4)\\ &= \Big(x+y-\frac{z}{2},\,x,\,x+y+\frac{3}{2}z\Big)\end{aligned}$$

♣

Alternativamente, também se chamam **homomorfismos** às transformações lineares. Se um homomorfismo for injectivo chama-se **monomorfismo**, se for sobrejectivo chama-se **epimorfismo** e dizemos que é um **isomorfismo** caso seja bijectivo. Diremos ainda que dois espaços vectoriais são **isomorfos**, e escrevemos $\mathscr{E}\cong\mathscr{F}$, se existir um isomorfismo entre os espaços vectoriais. Se o espaço de chegada for igual ao espaço de partida diremos que a

[1] Verifique que $\mathrm{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,2))$ é uma base de R^3

transformação linear é um **endomorfismo**. Um endomorfismo bijectivo é denominado por **automorfismo**.

O conjunto formado por todos os homomorfismos de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$ é representado por $\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ e o conjunto de todos os endomorfismos de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{E}$ por $\mathrm{End}(\mathscr{E})$, ou seja, $\mathrm{End}(\mathscr{E}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})$.

5.2 Núcleo e imagem de uma transformação linear

Definição 5.2 (Imagem e pré-imagem)**.**

Seja $\mathbf{T}$ uma função de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$ e $\mathscr{E}'$, $\mathscr{F}'$ dois subconjuntos de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$, respectivamente ($\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ e $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$).

- A **imagem**, ou o **contra domínio**, de $\mathscr{E}'$, $\mathbf{T}(\mathscr{E}')$, é o subconjunto de $\mathscr{F}$ definido por
$$\mathbf{T}(\mathscr{E}') = \{\mathbf{v} \in \mathscr{F} : \exists \mathbf{u} \in \mathscr{E}' \wedge \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}$$
- A **pré-imagem** de $\mathscr{F}'$, $\mathbf{T}^{-1}(\mathscr{F}')$, é o subconjunto de $\mathscr{E}$ definido por
$$\mathbf{T}^{-1}(\mathscr{F}') = \{\mathbf{u} \in \mathscr{E} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) \in \mathscr{F}'\}$$

Note que o uso da notação $\mathbf{T}^{-1}(\mathscr{F}')$ não implica que $\mathbf{T}$ seja uma função invertível. Caso $\mathbf{T}$ seja invertível então a pré-imagem de $\mathscr{F}'$ é a imagem de $\mathscr{F}'$ pela função $\mathbf{T}^{-1}$.

A preservação de estruturas por parte das transformações lineares justifica o uso da nomenclatura alternativa de homomorfismo. De facto mostra-se que a imagem de um subespaço vectorial, do domínio $\mathscr{E}$, por transformações lineares é um subespaço vectorial do contra domínio $\mathscr{F}$, e, a pré-imagem de um subespaço vectorial do contra domínio $\mathscr{F}$ é um subespaço vectorial, do domínio $\mathscr{E}$.

Teorema 5.1.

Seja $\mathbf{T}$ uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então

1. Se $\mathscr{E}' \prec \mathscr{E}$, então $\mathbf{T}(\mathscr{E}') \prec \mathscr{F}$
2. Se $\mathscr{F}' \prec \mathscr{F}$, então $\mathbf{T}^{-1}(\mathscr{F}') \prec \mathscr{E}$

Definição 5.3 (Imagem e núcleo de uma transformação linear)**.**

Seja $\mathbf{T}$ uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$.

- Chama-se **imagem** de $\mathbf{T}$, $\mathrm{Im}(\mathbf{T})$, à imagem de $\mathscr{E}$ pela transformação $\mathbf{T}$. Ou seja

$$\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{F} : \exists \mathbf{u} \in \mathscr{E} \wedge \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}$$

- Chama-se **núcleo** de $\mathbf{T}$, $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ ou $\mathrm{Nuc}(\mathbf{T})$, à pré-imagem de $\{\mathbf{O}_{\mathscr{F}}\}$. Ou seja

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{u} \in \mathscr{E} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_{\mathscr{F}}\}$$

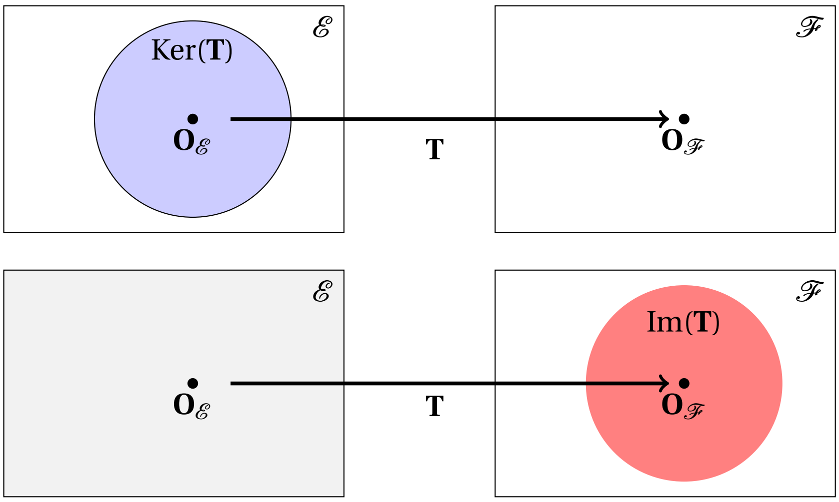
Como consequência do teorema 5.1 tem-se as seguintes

Propriedades 5.2.

Seja $\mathbf{T}$ uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então tem-se:

1. $\mathrm{Im}(\mathbf{T}) \prec \mathscr{F}$
2. $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) \prec \mathscr{E}$

Representa-se na figura abaixo o núcleo e a imagem de uma transformação linear $\mathbf{T}$. O núcleo (a azul) é a pré-imagem do vector nulo de $\mathscr{F}$ e a imagem é o contradomínio de $\mathbf{T}$.



Exemplo: Considere a seguinte transformação linear (verifique que de facto se trata de uma transformação linear!)

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{T} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) \end{array}$$

a) Determinar Im(**T**).

Por definição tem-se,

$$\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) = (a,b,c)\}.$$

Logo, a determinação da imagem de **T** reduz-se a verificar para que valores dos parâmetros a, b e c o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+3y=a \\ 2x+6y=b \\ 3x+9y=c \end{cases}$$

é possível.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 6 & b \\ 3 & 9 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a \end{array}\right]$$

Deste modo, conclui-se que o sistema é possível sse $b-2a=0$ e $c-3a=0$. Ou seja tem-se

$$\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b-2a=0 \wedge c-3a=0\}.$$

b) Determinar Ker(**T**). Por definição tem-se,

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) = (0,0,0)\}.$$

Logo, o núcleo de **T** é o conjunto solução do sistema de equações lineares homogéneo

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+6y=0 \\ 3x+9y=0 \end{cases}$$

Logo tem-se

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y=0\}$$

♣

Propriedades 5.3.

Seja $\mathbf{T}:\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ uma transformação linear. Então,

1. $\mathbf{T}$ é injectiva se e somente se $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})=\{\mathbf{O}_{\mathscr{E}}\}$.
2. seja $(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ uma lista de vectores de $\mathscr{E}$ L.D.. Então a lista de vectores de $\mathscr{F}$, $(\mathbf{T}(\mathbf{u}_1),\ldots,\mathbf{T}(\mathbf{u}_n))$ é igualmente L.D..
3. tem-se

$$\boxed{\dim(\mathscr{E})=\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{T}))+\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{T})).} \tag{5.1}$$

Note que podemos concluir, da propriedade 1 e da equação 5.1, que $\mathbf{T}$ é injectiva se e só se

$$\dim(\mathscr{E})=\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{T})).$$

Exemplo: No exemplo anterior a transformação linear não é injectiva porque $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+3y=0\}\neq\{(0,0)\}$ (propriedade 1).

A equação 5.1 da propriedade 3 é satisfeita. De facto tem-se: $\dim(\mathscr{E})=\dim(\mathbb{R}^2)=2$, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{T}))=1$ e $\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{T}))=1$.

♣

5.3 Composição de Transformações Lineares

Teorema 5.2.

Sejam $\mathbf{L}:\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ e $\mathbf{T}:\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{G}$ duas transformações lineares. Então a função $\mathbf{T}\circ\mathbf{L}$ ($\mathbf{T}$ após $\mathbf{L}$) definida por

$$\begin{array}{rcccc}\mathbf{T}\circ\mathbf{L} & : & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{G}\\ & & \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{T}\big(\mathbf{L}(\mathbf{u})\big)\end{array}.$$

é uma transformação linear.

Exemplo: Considere as transformações lineares

$$\begin{array}{rcccc}\mathbf{L} & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,z)\end{array}\qquad \begin{array}{rcccc}\mathbf{T} & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & & (x,y) & \longmapsto & (x-y,x+y)\end{array}.$$

Então tem-se que a transformação

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{T}\circ\mathbf{L} & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & \mathbf{T}\big((x+y,z)\big)=(x+y-z,x+y+z) \end{array}$$

é linear.

Note que $\mathbf{L}\circ\mathbf{T}$ não está definida porque o conjunto de chegada de $\mathbf{T}$ ($\mathbb{R}^2$) é diferente do conjunto de partida de $\mathbf{L}$ ($\mathbb{R}^3$).

♣

No caso de $\mathbf{T}$ ser um endomorfismo, i.e., o conjunto de partida é igual ao conjunto de chegada é possível definir os endomorfismos: $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}$, $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{T}$, ..., $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\ldots\circ\mathbf{T}$, que representaremos, respectivamente, por $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{T}^3$, ..., $\mathbf{T}^n$.

Chamamos de **transformação identidade** num espaço vectorial $\mathscr{E}$ e representamos por $\mathbf{I}$ ao endomorfismo

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{I} & : & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ & & \mathbf{u} & \longmapsto & \mathbf{u} \end{array}$$

Definição 5.4.

Dada uma transformação linear $\mathbf{T}:\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}$ bijectiva (ou seja, $\mathbf{T}$ é um automorfismo) definimos a **transformação linear inversa** de $\mathbf{T}$ à transformação linear $\mathbf{T}^{-1}:\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{E}$ tal que $\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}^{-1}\circ\mathbf{T}=\mathbf{I}$.

5.4 Representação Matricial de Transformações Lineares

Aqui, iremos usar matrizes para representar e efectuar cálculos com transformações lineares. Iremos representar indistintamente vectores por matrizes coluna ou por matrizes linha. Por exemplo, identificamos o vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ com a matriz $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ ou com a matriz $\begin{bmatrix} x & y & z\end{bmatrix}$ e vice-versa.

Começamos esta secção com o seguinte exemplo introdutório.

Exemplo: Começamos por recordar que uma transformação linear fica "completamente"definida pela imagens de uma base do espaço de partida. Sejam $\mathrm{B}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)=\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right)$ e $\mathrm{B}'=(\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,\mathbf{d}_3)=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente[2].

[2] Estamos a usar a identificação matrizes $\leftrightarrow$ vectores coluna. Daqui em diante deixamos de referir esta identificação

Consideremos a transformação linear $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$\mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Para se encontrar a representação da transformação linear $\mathbf{T}$ nas bases B e B′ começamos por determinar a representação dos vectores $\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)$ e $\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)$ na base B′

$$\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B'}}(\mathbf{T}(\mathbf{b}_1))=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}_{\mathrm{B'}}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B'}}(\mathbf{T}(\mathbf{b}_2))=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}_{\mathrm{B'}}$$

Para todo o vector $\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{b}_1+\lambda_2\mathbf{b}_2$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{u}) &= \lambda_1\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)+\lambda_2\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)\\ &= \lambda_1\left(0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)+\lambda_2\left(1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\ &= \left(0\lambda_1+1\lambda_2\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\left(-\tfrac{1}{2}\lambda_1-1\lambda_2\right)\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+\left(1\lambda_1+0\lambda_2\right)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\text{se, } \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}\ \text{ então, } \mathrm{Rep}_{\mathrm{B'}}(\mathbf{T}(\mathbf{u}))=\begin{bmatrix}0\lambda_1+1\lambda_2\\-\frac{1}{2}\lambda_1-1\lambda_2\\1\lambda_1+0\lambda_2\end{bmatrix}_{\mathrm{B'}}.$$

Estes cálculos podem efectuar-se de uma forma mais elegante usando multiplicação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&-1\\1&0\end{bmatrix}_{\mathrm{B,B'}}}_{\mathrm{Rep}_{\mathrm{B,B'}}(\mathbf{T})}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix}0\lambda_1+1\lambda_2\\-\frac{1}{2}\lambda_1-1\lambda_2\\1\lambda_1+0\lambda_2\end{bmatrix}_{\mathrm{B'}}.$$

Na prática podemos encontrar a matriz $\mathrm{Rep}_{B,B'}(T)$ *usando o algoritmo de Gauss-Jordan. De facto, para encontrar os coeficientes das combinações lineares, das imagens dos elementos da base* B*, na base* B'*, temos de resolver dois sistemas de equações lineares que partilham a mesma matriz simples. Ou seja temos de resolver os sistemas*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ c_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e tem-se

$$\mathrm{Rep}_{B,B'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \end{bmatrix}.$$

aplicando o algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

tem-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -1/2L_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

obtendo-se a matriz

$$\mathrm{Rep}_{B,B'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

♣

Resumindo, fixamos duas bases, uma para o espaço de partida e outra para o espaço de chegada. A matriz, $\mathrm{Rep}_{B,B'}(\mathbf{T})$, que representa uma transformação linear é a matriz em que as colunas são constituídas pelas representações das imagens dos elementos da base do espaço de partida escritas na base do espaço de chegada.

Genericamente temos a seguinte

Definição 5.5.

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais e as bases, $\mathrm{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ de $\mathscr{E}$ e $\mathrm{B}' = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m)$ de $\mathscr{F}$. Seja ainda $\mathbf{T} : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ uma transformação linear tal que

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathbf{T}(\mathbf{b}_1)) = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{m,1} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}, \quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathbf{T}(\mathbf{b}_2)) = \begin{bmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ \vdots \\ c_{m,2} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}, \quad \ldots \quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathbf{T}(\mathbf{b}_n)) = \begin{bmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ \vdots \\ c_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'},$$

Então

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \ldots & c_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$$

é a matriz que representa $\mathbf{T}$ relativamente às bases B, B'.

☞ *Frequentemente, quando não há ambiguidade, simplifica-se a notação e escrevemos* $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T})$, $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$, $\mathbf{M}(\mathbf{T})$, *ou escrevemos simplesmente* $\mathbf{M}$ *para designar,* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T})$ *, a matriz que representa a transformação* $\mathbf{T}$ *onde* B *e* B' *são, respectivamente, as bases do espaço vectorial de partida e de chegada.*

Seguindo a generalização do exemplo acima temos o seguinte

Teorema 5.3.

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais e as bases, B de $\mathscr{E}$ e B$'$ de $\mathscr{F}$ e $\mathbf{T}: \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ uma transformação linear com representação matricial

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}.$$

Então, dado um vector qualquer $\mathbf{u} \in \mathscr{E}$ representado por

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$$

tem-se que a representação da imagem de $\mathbf{u}$ na base B$'$ é dada por

$$\boxed{\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathbf{T}(\mathbf{u})) = \mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T}) \times \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}).}$$

Exemplo: Seja $\mathbf{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja acção é efectuar uma rotação, a qualquer vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, de θ radianos no sentido directo. Fixando a base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$, para ambos os espaços de partida e de chegada, tem-se

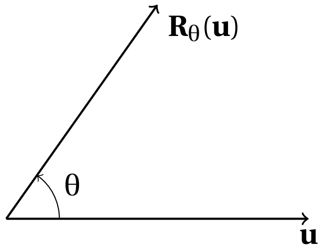
$$\mathbf{R}_\theta((1,0)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \;\text{ e }\; \mathbf{R}_\theta((0,1)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Logo, a matriz que representa $\mathbf{R}_\theta$ relativamente às bases canónicas é

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

A imagem de um vector qualquer de $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ com representação na base canónica (x, y) é dada por

$$\mathbf{R}_\theta(x,y) = \mathbf{M}(\mathbf{R}_\theta) \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Acção da transformação $\mathbf{R}_\theta$.

Nota: Neste exemplo foi usada a simplificação de notação dado que não há ambiguidades relativamente à base usada (base canónica no espaço de partida e no espaço de chegada).

♣

Outra vantagem de se usar matrizes para representarem transformações lineares, é o calculo da composta de duas transformações lineares. Este facto é traduzido pelo seguinte

Teorema 5.4.

Sejam $\mathbf{L} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ e $\mathbf{T} : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ duas transformações lineares com representações matriciais $\mathrm{Rep}_{B,B'}(\mathbf{L})$ e $\mathrm{Rep}_{B',B''}(\mathbf{T})$, respectivamente.
Então a representação da transformação linear $\mathbf{T} \circ \mathbf{L} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{G}$ nas bases B e B$''$ é

$$\boxed{\mathrm{Rep}_{B,B''}(\mathbf{T} \circ \mathbf{L}) = \mathrm{Rep}_{B',B''}(\mathbf{T}) \times \mathrm{Rep}_{B,B'}(\mathbf{L})}$$

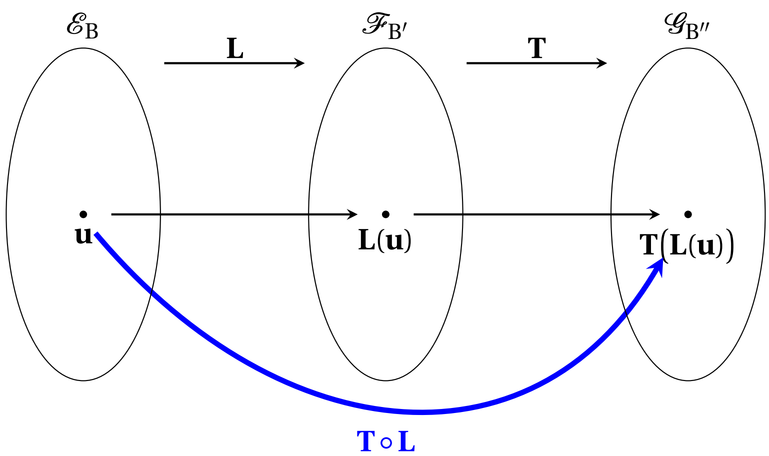


Diagrama da composição da transformação linear $\mathbf{L}$ com a transformação linear $\mathbf{T}$. O índice inferior nos espaços de partida e de chegada indica a base que estamos a considerar no respectivo espaço.

Exemplo: Sejam $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3_{\mathrm{B}_c}\longrightarrow\mathbb{R}^3_{\mathrm{B}_c}$ e $\mathbf{L}:\mathbb{R}^3_{\mathrm{B}_c}\longrightarrow\mathbb{R}^3_{\mathrm{B}_c}$ duas transformações lineares definidas pelas expressões

$$\begin{aligned}\mathbf{T}((x,y,z)) &= (2x, y+z, z)\\ \mathbf{L}((x,y,z)) &= (x+y, y+z, x+z),\end{aligned}$$

onde B_c é a base canónica. Então,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{T}\circ\mathbf{L}) &= \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{T})\times\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{L}\circ\mathbf{T}) &= \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{L})\times\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

♣

5.5 Matriz mudança de base

Seja $\mathrm{B} = (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ uma base de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Todo o vector $\mathbf{v}\in\mathscr{E}$ escreve-se como combinação linear dos elementos da base B,

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

Ou seja, na notação matricial tem-se

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$$

Por outro lado, se escolhermos outra base $\mathrm{B}' = (\mathbf{u}'_1,\ldots,\mathbf{u}'_n)$ de $\mathscr{E}$ tem-se

$$\mathbf{v} = \alpha'_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + \alpha'_n\mathbf{u}'_n.$$

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\alpha'_1\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}$$

Teorema 5.5.

Sejam B e B' as duas bases, consideradas acima, do espaço vectorial $\mathscr{E}$. Supondo que os elementos da base B se escrevem na base B' da forma

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1 &=& c_{1,1}\mathbf{u}'_1 + \ldots + c_{n,1}\mathbf{u}'_n \\ &\vdots& \\ \mathbf{u}_i &=& c_{1,i}\mathbf{u}'_1 + \ldots + c_{n,i}\mathbf{u}'_n \\ &\vdots& \\ \mathbf{u}_n &=& c_{1,n}\mathbf{u}'_1 + \ldots + c_{n,n}\mathbf{u}'_n \end{array}$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,i} & \ldots & c_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,i} & \ldots & c_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$$

☞

- *A matriz*

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,i} & \ldots & c_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,i} & \ldots & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

  chama-se ***matriz mudança de base****, da base* B *para a base* B'.

- *A matriz mudança da base* B *para a base* B' *é a representação da transformação identidade em* $\mathscr{E}$ *da base* B *na base* B'*. Ou seja*

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{I}).$$

- *As matrizes mudança de base são invertíveis e tem-se*

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}.$$

Exemplo: Consideremos as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{B} = ((2,-1),(3,4))$ e $\mathrm{B}_c = ((1,0),(0,1))$ (base canónica). Pretende-se encontrar $\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}}$, a matriz mudança da base canónica B_c para a base B.

Determinamos as coordenadas dos elementos da base canónica B_c na base B,

$$\begin{aligned}(1,0) &= c_{1,1}(2,-1)+c_{2,1}(3,4)\\(0,1) &= c_{1,2}(2,-1)+c_{2,2}(3,4)\end{aligned}$$

logo, tem que se resolver os SEL

$$\begin{cases}2c_{1,1}+3c_{2,1}=1\\-c_{1,1}+4c_{2,1}=0\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases}2c_{1,2}+3c_{2,2}=0\\-c_{1,2}+4c_{2,2}=1\end{cases}$$

Uma vez resolvidos os sistemas tem-se imediatamente a matriz pedida

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}_c}=\begin{bmatrix}c_{1,1} & c_{1,2}\\ c_{2,1} & c_{2,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & -\frac{3}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}$$

Estes SEL podem ser resolvidos em simultâneo usando a eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\cdots\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11}\\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{2}{11}\end{array}\right]$$

♣

Exemplo: Considere as bases de $\mathrm{P}_3[x]$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_c &= (\mathbf{p}_0(x),\mathbf{p}_1(x),\mathbf{p}_2(x),\mathbf{p}_3(x))=(1,x,x^2,x^3)\\ \mathrm{U} &= (\mathbf{u}_0(x),\mathbf{u}_1(x),\mathbf{u}_2(x),\mathbf{u}_3(x))=(1,2x,4x^2-1,8x^3-4x).\end{aligned}$$

Dado um polinómio $\mathbf{p}(x)\in\mathrm{P}_3[x]$ escrito na base U

$$\mathbf{p}(x)=a_0\cdot1+a_1\cdot2x+a_2\cdot(4x^2-1)+a_3\cdot(8x^3-4x)$$

pretende-se determinar o polinómio $\mathbf{p}'(x)\in\mathrm{P}_3[x]$ escrito igualmente na base U

$$\mathbf{p}'(x)=a'_0\cdot1+a'_1\cdot2x+a'_2\cdot(4x^2-1)+a'_3\cdot(8x^3-4x)$$

onde $\mathbf{p}'(x)$ é o polinómio derivada de $\mathbf{p}(x)$.

Para resolver este problema começamos por observar:

- A derivação, definida em P_3[x], é uma transformação linear

$$\mathbf{D}:\mathrm{P}_3[x]\longrightarrow\mathrm{P}_3[x],\quad \mathbf{D}(p(x))=\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}$$

- Sabemos derivar polinómios na base canónica

$$\mathbf{D}(a\cdot1+b\cdot x+c\cdot x^2+d\cdot x^3)=b\cdot1+2c\cdot x+3d\cdot x^2+0\cdot x3$$

Em face destas observações iremos resolver o problema da seguinte forma:

1. Dado um polinómio $\mathbf{p}(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2x + a_2 \cdot (4x^2 - 1) + a_3 \cdot (8x^3 - 4x)$ usamos a matriz, $\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c}$, mudança da base U para a base canónica B_c.

2. Derivamos o polinómio na base canónica. Ou seja, usamos a matriz derivação $\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{D})$.

3. Escrevemos a derivada do polinómio na base U. Ou seja, usamos a matriz mudança da base B_c para a base U, $\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}}$.

4. A matriz que resolve o problema, $\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{D})$, é dada por

$$\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{D}) \quad = \quad \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}} \times \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{D}) \times \mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c}$$

Ilustramos este procedimento com o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \overset{\mathrm{B}_c}{\mathrm{P}_3[x]} \arrow[rr, "\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{D})"] & & \overset{\mathrm{B}_c}{\mathrm{P}_3[x]} \arrow[dr, "\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}}"] & \\
\overset{\mathrm{U}}{\mathrm{P}_3[x]} \arrow[ur, "\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c}"] \arrow[rrrr, "\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}} \times \mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{D}) \times \mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c}"'] & & & & \overset{\mathrm{U}}{\mathrm{P}_3[x]}
\end{tikzcd}$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{D}(x) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{D}(x^2) &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{D}(x^3) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3
\end{aligned}$$

tem-se

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{B}_c}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_0 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{u}_1 &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{u}_2 &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\
\mathbf{u}_3 &= 0 \cdot 1 + -4 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3
\end{aligned}$$

tem-se

$$\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

e como $\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}} = \mathbf{M}^{-1}{}_{\mathrm{U},\mathrm{B}_c}$ obtemos

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}_c,\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, dado o vector $\mathbf{p}(x) = a_0{\cdot}1 + a_1{\cdot}2x + a_2{\cdot}(4x^2-1) + a_3{\cdot}(8x^3-4x)$
tem-se

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{D}(\mathbf{p}(x))) = \mathbf{M}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{D}) \times \mathrm{Rep}_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(\mathbf{p}(x))$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 + 2a_3 \\ 4a_2 \\ 6a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\mathbf{p}'(x) = (2a_1 + 2a_3){\cdot}1 + 4a_2{\cdot}2x + 6a_3{\cdot}(4x^2-1) + 0{\cdot}(8x^3-4x)$$

♣

5.6 Valores e vectores próprios

Definição 5.6 (valor e vector próprio)**.**

Seja $\mathscr{E} \neq \{\mathbf{O}_{\mathscr{E}}\}$ um espaço vectorial e $\mathbf{T} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ uma transformação linear (endomorfismo).
Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ diz-se um **valor próprio** da transformação $\mathbf{T}$ se e somente se existir um vector $\mathbf{u}$ não nulo ($\mathbf{u} \neq \mathbf{O}_{\mathscr{E}}$) tal que

$$\boxed{\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}} \tag{5.2}$$

Os vectores $\mathbf{u} \neq \mathbf{O}_{\mathscr{E}}$ que satisfazem a igualdade (5.2) dizem-se **vectores próprios** de $\mathbf{T}$ associados ao valor próprio λ.

A igualdade (5.2) é equivalente a

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_{\mathscr{E}}$$

onde $\mathbf{I}$ é o endomorfismo identidade. Logo $\mathbf{u}$ é um vector próprio de $\mathbf{T}$ associado ao valor próprio λ se e somente se

$$\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{O}_{\mathscr{E}}\}.$$

Exemplo: Considere transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{T}((x, y)) = (x + 3y, 3x + y).$$

Então $\lambda = -2$ é um valor próprio de $\mathbf{T}$ porque existe um vector não nulo $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathbf{T}(-2 \cdot (1, -1)) = \mathbf{T}((-2, 2)) = (-2 + 3 \cdot 2, 3 \cdot (-2) + 2) = (4, -4) = -2(-2, 2) = -2 \cdot \mathbf{T}((-1, 1)).$$

Duas perguntas que se colocam:

1. como se calculam valores e vectores próprios?
2. será que a transformação $\mathbf{T}$ tem mais valores próprios?

Iremos responder à primeira pergunta recorrendo à representação matricial de uma transformação linear. A segunda pergunta será respondida no próximo exemplo.

♣

Definição 5.7 (Subespaço próprio)**.**

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de uma transformação linear $\mathbf{T} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$. O subespaço próprio de $\mathbf{T}$ associado a λ, E_λ, é o núcleo da transformação linear $\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}$,

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \{\mathbf{u} \in \mathscr{E} : \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}\}$$

Se fixarmos uma base qualquer, B, de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ podemos escrever a equação $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{u}) = \mathbf{O}_{\mathscr{E}}$ na forma matricial

$$(\mathrm{Rep}_{B,B}(\mathbf{T}) - \lambda \mathrm{Rep}_{B,B}(\mathbf{I}))(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

☞ *Para simplificar a notação, escrevemos a equação* (5.3) *na forma,*

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathrm{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.4}$$

Pode-se interpretar a equação matricial (5.4) como um sistema de equações lineares homogénio indeterminado (porque tem soluções não nulas) logo a matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathrm{I}$ tem de ser singular, ou seja, os valores próprios são solução da equação

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathrm{I}) = 0} \tag{5.5}$$

Consequentemente tem-se,

Teorema 5.6.

Os valores próprios de um endomorfismo $\mathbf{T}$ (ou da matriz $\mathbf{A} = \mathrm{Rep}_{B,B}(\mathbf{T})$) são as raizes reais do **polinómio característico**

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathrm{I}).$$

☞ *O polinómio característico* $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ *não depende da base* B *escolhida para* $\mathscr{E}$.

Exemplo: No exemplo anterior, mostramos que -2 é valor próprio da transformação linear $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{T}((x,y)) = (x+3y, 3x+y)$.. Neste exemplo iremos calcular todos os valores próprios de $\mathbf{T}$ e determinar os seus subespaços próprios. A representação de $\mathbf{T}$ na base canónica é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinómio característico é dado por,

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\bigl(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\bigr) = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Calculando os zeros, reais, do polinómio característico concluímos que a transformação $\mathbf{T}$ (ou a matriz $\mathbf{A}$) tem dois valores próprios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

Para calcular os respectivos subespaços próprios E_{-2} e E_4
Temos:

$$\mathbf{A} - (-\mathbf{2})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} - (\mathbf{4})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathrm{E}_{-2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\right\}$$

$$\mathrm{E}_{4} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$$

♣

5.7 Exercícios

5.1 *Verifique se as seguintes transformações são lineares:*

a) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T}\bigl((x,y)\bigr) = (x-y, 0, x+y).$

b) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\bigl((x,y,z)\bigr) = (0, z).$

c) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{T}\bigl((x,y,z,t)\bigr) = (t, z, x, y).$

d) $\mathbf{T}:\mathrm{P}_3[x] \longrightarrow \mathrm{P}_3[x], \quad \mathbf{T}\bigl(p(x)\bigr) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$

e) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\big((x,y)\big) = (x-2xy, 0).$

f) $\mathbf{T}:\mathcal{M}_{3,3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,3}, \quad \mathbf{T}\big(\mathbf{A}\big) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$

5.2 *Para cada transformação linear do exercício anterior determine:* $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ *e* $\mathrm{Im}(\mathbf{T})$ *e verifique o teorema das dimensões.*

5.3 *Determine uma expressão que define as transformações lineares:*

a) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *onde* $\mathbf{T}\big((1,0)\big) = (1,1,1)$ *e* $\mathbf{T}\big((0,1)\big) = (1,-1,-2)$.

b) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *onde* $\mathbf{T}\big((1,0,0)\big) = (1,1)$, $\mathbf{T}\big((0,1,0)\big) = (2,1)$ *e* $\mathbf{T}\big((0,0,1)\big) = (-1,0)$.

c) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *onde* $\mathbf{T}\big((1,1)\big) = (2,1)$ *e* $\mathbf{T}\big((-1,1)\big) = (0,1)$.

d) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *onde* $\mathbf{T}\big((1,1,0)\big) = (1,1,1)$, $\mathbf{T}\big((2,0,2)\big) = (-1,-1,-1)$ *e* $\mathbf{T}\big((1,0,0)\big) = (0,0,1)$.

5.4 *Encontre, se possível, uma transformação linear* $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *que satisfaça as seguintes condições:*

a) $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x,y,x+y):\ x,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{(x,x,x):\ x \in \mathbb{R}\}$.

b) $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x,2x,x)\}$ *e* $\mathrm{Im}(\mathbf{T}) = \{(x,x,x):\ x \in \mathbb{R}\}$.

c) $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,x,0):\ x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}\circ\mathbf{T}) = \{(x,y,0):\ x,y \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{T}) = \mathbb{R}^3$.

5.5 *Determine a matriz que que representa a transformação linear* $\mathrm{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\mathrm{T}(x,y,z) = (x-2y, y-z)$$

relativamente às bases $\mathrm{B}_3 = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(0,0,1)\}$ *e* $\mathrm{B}_2 = \{(1,1),(0,-1)\}$

5.6 *Encontre a matriz que representa a transformação linear,* $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $\mathbf{T}((x,y,z)) = (x-y-z, x+2y+3z)$, *relativamente às bases* B *e* B' *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$ *respectivamente.*

a) *Onde,* B *e* B' *são as bases canónicas.*

b) *Onde,* $\mathrm{B} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\big)$ *e* $\mathrm{B}' = \big((1,1),(0,1)\big)$

5.7 *Considere as transformações lineares* $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{T}(x,y) = (x+y, x-y, 2x)$ *e* $\mathbf{L}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *definida por* $\mathbf{L}(x,y,z) = (x+y+z, z-y-x)$.

a) *Determine as expressões de:*

(i) $\mathbf{L}\circ\mathbf{T}$.

(ii) $\mathbf{T}\circ\mathbf{L}$.

b) *Suponha que, para cada espaço, fixamos a base canónica. Verifique que:*

(i) $\mathbf{M}(\mathbf{L}\circ\mathbf{T}) = \mathbf{M}(\mathbf{L}) \times \mathbf{M}(\mathbf{T})$

(ii) $\mathbf{M}(\mathbf{T}\circ\mathbf{L}) = \mathbf{M}(\mathbf{T}) \times \mathbf{M}(\mathbf{L})$

5.8 *Considere as bases* $\mathrm{B} = \big((1,2,0),(1,1,0),(1,3,1)\big)$ *e* $\mathrm{B}' = \big((1,-1,0),(-1,0,0),(0,0,1)\big)$ *do espaço vectorial* $\mathbb{R}^3$.

a) *Determine a matriz* $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$*, mudança da base* B *para a base* B'.

b) *Determine a matriz* $\mathbf{M}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}$*, mudança da base* B' *para a base* B.

c) *Mostre que* $\mathbf{M}^{-1}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \mathbf{M}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}$.

5.9 *Considere as bases* $\mathrm{B} = \big(1, 1-x, x-x^2\big)$ *e* $\mathrm{B}' = \big(1+x^2, 1+x, 1+x+x^2\big)$ *do espaço vectorial* $\mathrm{P}_2[x]$.

a) *Determine a matriz* $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$*, mudança da base* B *para a base* B'.

b) *Determine a matriz* $\mathbf{M}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}$*, mudança da base* B' *para a base* B.

c) *Escreva o polinómio* $a + b(1-x) + c(x-x^2)$*,* $a,b,c \in \mathbb{R}$*, como combinação linear dos elementos da base* B'.

5.10 *Considere a transformação* $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\mathbf{T}(x,y,z) = (3x, 3y-x, z+2y)$.

a) *Determine* $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$.

b) $\mathbf{T}$ *é um isomorfismo (bijectiva)?*

c) *Escreva a matriz de* $\mathbf{T}$ *na base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

d) *Encontre os valores próprios de* $\mathbf{T}$.

e) *Encontre os subespaços próprios de* $\mathbf{T}$.

5.11 *Sejam* $\mathrm{B} = \big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ *e* $\mathrm{B}' = \big((2,0,6),(0,3,4),(0,1,0)\big)$ *duas bases de* $\mathbb{R}^3$.

a) *Mostre que* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}\big((1,2,3)\big) = (-1,-1,3)_{\mathrm{B}}$ *e que* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}\big((1,2,3)\big) = (\frac{1}{2},0,2)_{\mathrm{B}'}$.

b) *Encontre,* $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$*, a matriz mudança da base* B *para a base* B'.

c) *Use a matriz* $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$ *para verificar que se tem*

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}\big((1,2,3)\big) = \mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} \times \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}\big((1,2,3)\big).$$

5.12 *Encontre os valores próprios e os respectivos subespaços próprios das seguintes matrizes.*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ***b)*** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ***c)*** $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ***d)*** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$ ***f)*** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ***g)*** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ***h)*** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5.13 *considere a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) *Mostre que o seu polinómio característico é* $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10.$

b) *Sabendo que* $p_{\mathrm{A}}(1) = 0$ *determine os valores próprios de* $\mathbf{A}$.

c) *Encontre uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por valores próprios de* $\mathbf{A}$.

5.14 ***a)*** *Mostre que se* λ *é valor próprio de* $\mathbf{A}$ *então* λ^n *é um valor próprio de* $\mathbf{A}^n$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

b) *Mostre que se* λ *é valor próprio de uma matriz invertível* $\mathbf{A}$ *então* $\frac{1}{\lambda}$ *é um valor próprio de* $\mathbf{A}^{-1}$

c) *Mostre que se* $\mathbf{A}$ *é invertível e que se* λ *é valor próprio de* $\mathbf{A}$ *então* λ^n *é um valor próprio de* $\mathbf{A}^n$ *para todo o* $n \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 6

Geometria Analítica

No último capítulo estudámos a estrutura algébrica dos espaços vectoriais reais. Aqui iremos começar por introduzir, nos espaços vectoriais reais, os conceitos métricos que permitem o cálculo de: ângulos, comprimentos, áreas e volumes.

6.1 Espaços euclidianos

A noção elementar que permite definir uma métrica num espaço vectorial é o conceito de produto interno.

Definição 6.1 (Produto interno)**.**

Seja $\mathscr{E}$ um e.v.r.. Um *produto interno* definido em $\mathscr{E}$ é uma função de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ no conjunto dos reais $\mathbb{R}$ cujo valor de $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ representamos por

$$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v}$$

tal que para todos os reais α e β e para todos os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathscr{E}$ tem-se

(A1) $(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}) \,|\, \mathbf{w} = \alpha\,(\mathbf{u}|\mathbf{w}) + \beta\,(\mathbf{v}|\mathbf{w})$

(A2) $\mathbf{u}|\mathbf{v} = \mathbf{v}|\mathbf{u}$

(A3) $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}_{\oplus} \implies \mathbf{u}|\mathbf{u} > 0$

Nota: Na literatura encontramos outras notações para indicar o produto interno de dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tais como, $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ ou ainda $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

Definição 6.2 (Espaço euclidiano)**.**

Um espaço vectorial real diz-se um *espaço euclidiano* se estiver munido com um produto interno.

Propriedades 6.1.

para todos os reais α e β e para todos os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathscr{E}$ tem-se

- $\mathbf{o}_{\oplus}|\mathbf{u} = 0$
- $\mathbf{u}\,|\,(\alpha\,\mathbf{v} + \beta\,\mathbf{w}) \;=\; \alpha\,(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \beta\,(\mathbf{u}|\mathbf{w})$

Embora possamos definir produtos internos em todos os espaços vectoriais iremos apenas estudar o produto interno usual definido nos espaços vectoriais $\mathbb{R}^n$. E, entre estes, estudaremos com mais detalhe o produto interno usual definido em $\mathbb{R}^3$.

Definição 6.3 (Produto interno usual em $\mathbb{R}^n$)**.**

O *produto interno usual* definido em $\mathbb{R}^n$ é a função de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida para todo o par de vectores

$$\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_2) \;\text{ e }\; \mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_2)$$

por,

$$\mathbf{u}|\mathbf{v} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemplos em $\mathbb{R}^3$ Dados os vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ tem-se,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}|\mathbf{v} &= 1 \times 0 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = -1 \\
\mathbf{u}|\mathbf{w} &= 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 3 \times 1 = 1 \\
\mathbf{v}|\mathbf{w} &= 0 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3 \\
\mathbf{v}|(\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{v}|\mathbf{u}) + (\mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\mathbf{u}|\mathbf{v}) + (\mathbf{v}|\mathbf{w}) = -1 + 3 = 2 \\
\mathbf{u}|(2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}) &= (2\mathbf{v} + 3\mathbf{w})|\mathbf{u} = 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + 3(\mathbf{u}|\mathbf{w}) = -2 + 3 = 1
\end{aligned}$$

♣

Definição 6.4 (Vectores ortogonais)**.**

Dado um espaço euclidiano $\mathscr{E}$ dizemos que dois vectores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* e escrevemos $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ se o seu produto interno for nulo. Ou seja

$$\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \implies \mathbf{u}|\mathbf{v} = 0$$

Definição 6.5 (Norma euclidiana de um vector)**.**

Dado um espaço euclidiano $\mathscr{E}$ define-se a *norma euclidiana* de um vector $\mathbf{u}$ como sendo o número não negativo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}|\mathbf{u}}$$

Propriedades 6.2 (da norma euclidiana)**.**

Para todo o real α e para todos os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in \mathscr{E}$ tem-se

(i) $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_{\oplus} \implies \|\mathbf{u}\| > 0$

(ii) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{u}\|$

(iii) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade triangular)

(iv) Se $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ então $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ (teorema de Pitágoras)

(v) $|\mathbf{u}|\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Definição 6.6 (Ângulo entre dois vectores)**.**

Dizemos que o ângulo entre dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é θ e escrevemos

$$\operatorname{ang}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \theta$$

se e somente se

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}|\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}\right) \tag{6.1}$$

Observações: Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u}|\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

logo a expressão (6.1) que define o ângulo entre dois vectores faz sentido. Além disso o ângulo θ entre dois vectores pertence ao intervalo $[0,\pi] = \arccos([-1,1])$. Deste modo, podemos dizer que o ângulo entre dois vectores é θ sse $\theta \in [0,\pi]$ e

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u}|\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}.$$

Ou seja tem-se

$$\mathbf{u}|\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cos(\theta).$$

Definição 6.7 (Vector normado ou unitário)**.**

Um vector $\mathbf{u}$ de um espaço euclidiano diz-se *normado* ou *unitário* sse

$$\|\mathbf{u}\| = 1$$

Nota: Se um vector $\mathbf{u}$ é não nulo então os vectores

$$\lambda\mathbf{u}, \quad \text{onde} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$$

são unitários.

Definição 6.8 (Versor)**.**

Seja $\mathbf{u}$ um vector não nulo de um espaço euclidiano. O *versor* de $\mathbf{u}$ é o vector unitário

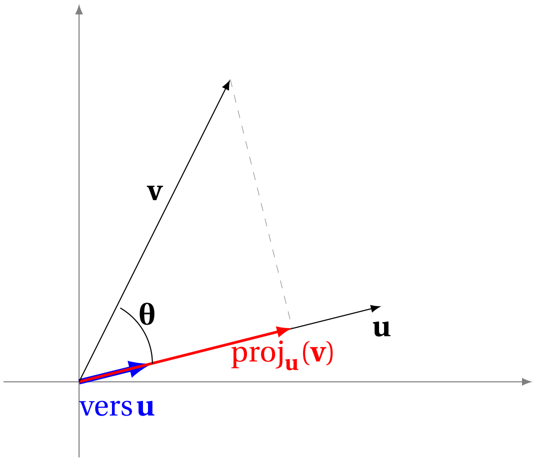
$$\operatorname{vers}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Nota: Em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ o vector $\operatorname{vers}\mathbf{u}$ é um vector com com a mesma direcção e o mesmo sentido que o vector $\mathbf{u}$ mas com norma 1.

Definição 6.9 (Projecção ortogonal)**.**

Dado um vector não nulo $\mathbf{u}$ chamamos *projecção ortogonal* de um vector $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ ao vector definido por

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}|\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$$



$$\boxed{\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}|\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \|v\|\cos(\theta)\,\mathrm{vers}\,\mathbf{u}}$$

6.2 Produto vectorial

Definição 6.10 (Produto vectorial em $\mathbb{R}^3$).

Considere-se o e.v.r. $\mathbb{R}^3$ e a sua base canónica $\mathrm{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$[a] onde

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \text{ e } \mathbf{e}_3 = (0,0,1).$$

O *produto vectorial* é uma aplicação de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ onde a imagem de um par de vectores $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \text{ e } \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

é representada por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e definida por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2\,,\ u_3 v_1 - u_1 v_3\,,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

[a] Aqui supomos igualmente que os vectores da base canónica formam um triedro directo.

Regra pratica:

O cálculo de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ pode efectuar-se usando o “determinante”

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} \overset{\text{T. L.}}{=\!=} \mathbf{e}_1\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix} - \mathbf{e}_2\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix} + \mathbf{e}_3\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\\ &= (u_2v_3 - u_3v_2\,,\, u_3v_1 - u_1v_3\,,\, u_1v_2 - u_2v_1)\end{aligned}$$

Exemplo: Considerando $\mathbf{u} = (1,-2,0)$ e $\mathbf{v} = (2,-1,3)$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix} = \mathbf{e}_1\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix} - \mathbf{e}_2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} + \mathbf{e}_3\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ &= -6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = (-6,-3,3)\end{aligned}$$

♣

Para todos os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e para todos os escalares α e β são válidas as seguintes propriedades

Propriedades 6.3 (Produto vectorial)**.**

(6.2) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ (anti simetria)

(6.3) $\big(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}\big)\times\mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ (linearidade)

(6.4) $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ linearmente dependentes $\Longleftrightarrow \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{o}_\oplus$

(6.5) $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ linearmente independentes $\Longleftrightarrow \mathbf{u}\times\mathbf{v} \neq \mathbf{o}_\oplus$

(6.6) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\sin(\theta)$, onde $\theta = \operatorname{ang}(\mathbf{u},\mathbf{v})$

(6.7) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$, $\forall\,\mathbf{w}\in\overline{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$

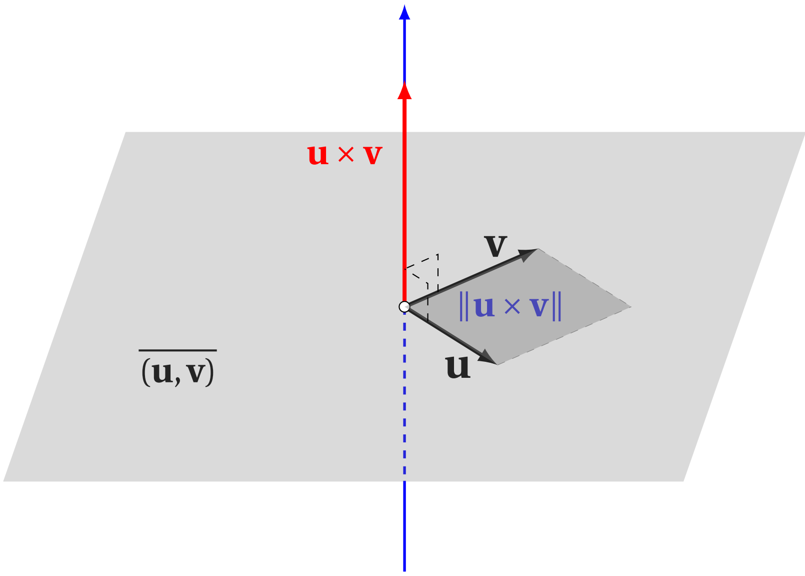


Ilustração o produto vectorial de dois vectores linearmente independentes.

6.3 Espaços afim

Em geometria analítica necessitamos de dois tipos de objectos, vectores e pontos. Já vimos que os vectores são elementos de uma estrutura. Mais exactamente os vectores são elementos de um conjunto $\mathscr{E}$ que possui uma estrutura de espaço vectorial. Relativamente aos pontos iremos considerar que são elementos de um conjunto que possui uma nova estrutura, a estrutura de um espaço afim associado ao espaço vectorial $\mathscr{E}$.

Nesta disciplina apenas iremos considerar a geometria no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Neste caso o conjunto de pontos do espaço afim, associado ao espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, coincide com o conjunto $\mathbb{R}^3$. Ou seja, os elementos do conjunto $\mathbb{R}^3$ podem ser vectores, caso consideremos $\mathbb{R}^3$ como tendo uma estrutura de espaço vectorial ou podem ser pontos, caso consideremos $\mathbb{R}^3$ como tendo uma estrutura de espaço de espaço afim. Para evitar ambiguidades iremos representar pontos por letras maiúsculas P, Q, ...

Definição 6.11 (Espaço afim).

Seja $\mathscr{E}$ um espaço vectorial e seja $\mathscr{E}'$ um conjunto cujos elementos designaremos por pontos. dizemos que o conjunto $\mathscr{E}'$ possui a estrutura de um *espaço afim* associado ao espaço vectorial $\mathscr{E}$ sse existe uma função

$$\varphi : \mathscr{E}' \times \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$$

que a cada par de pontos (P, Q) associa um vector $\overrightarrow{PQ} \in \mathscr{E}$ e verifica-se

1. $\forall P, Q, R \in \mathscr{E}'$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (relação de Chasles)
2. $\forall O \in \mathscr{E}'$ a aplicação
$$\begin{array}{rccc} \varphi_O : & \mathscr{E}' & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ & P & \longmapsto & \overrightarrow{OP} \end{array}$$
é uma bijecção.

Note que na definição anterior introduzimos uma nova notação para os vectores. Iremos usar ambas notações, a notação introduzida no capítulo dos espaços vectoriais e a nova notação, onde usualmente dizemos que o vector $\overrightarrow{PQ}$ tem origem no ponto P e extremidade no ponto Q.

Propriedades 6.4.

Seja $\mathscr{E}'$ um espaço afim associado ao espaço vectorial $\mathscr{E}$ (com vector nulo $\mathbf{o}_\oplus$). Então tem-se,

1. $\forall P \in \mathscr{E}'$, $\overrightarrow{PP} = \mathbf{o}_\oplus$
2. $\forall P, Q \in \mathscr{E}'$, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$
3. $\forall O \in \mathscr{E}'\ \forall \mathbf{u} \in \mathscr{E}, \exists^1 P \in \mathscr{E}' : \overrightarrow{OP} = \mathbf{u}$
4. $\forall P, Q, R \in \mathscr{E}'$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Longrightarrow Q = R$
5. $\forall O \in \mathscr{E}'\ \forall \mathbf{u} \in \mathscr{E}, \exists^1 P \in \mathscr{E}' : \overrightarrow{PO} = \mathbf{u}$

Definição 6.12 (Adição de um ponto com um vector)**.**

Seja $P \in \mathscr{E}'$ um ponto e $\mathbf{u} \in \mathscr{E}$ um vector. Definimos a soma do ponto P com o vector $\mathbf{u}$ como sendo o (único) ponto Q que verifica $\overrightarrow{PQ} = u$ e escrevemos

$$Q = P + \mathbf{u}, \quad \text{ou alternativamente} \quad Q - P = \mathbf{u}.$$

Definição 6.13 (Referencial de um espaço afim)**.**

Seja $\mathscr{E}'$ um espaço afim associado a um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Um *referencial* de $\mathscr{E}'$ é um par $(O, \mathscr{B})$ formado por um ponto O, chamado de origem do referencial afim, e por uma base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$.

Note que a cada ponto $P \in \mathscr{E}'$ corresponde uma e uma só representação de um vector $\mathbf{u} \in \mathscr{E}$.

O caso que nos interessa considerar, neste curso, é o espaço afim $\mathbb{R}^3$,associado ao espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ (Neste caso tem-se $\mathscr{E}' = \mathscr{E} = \mathbb{R}^3$) onde a função $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por $\varphi(P, Q) = Q - P$. Neste espaço afim apenas iremos considerar o referencial canónico.

Definição 6.14 (Referencial afim canónico de $\mathbb{R}^3$)**.**

O referencial afim canónico de $\mathbb{R}^3$ com origem no ponto $O \in \mathbb{R}^3$ consiste no par $(O, \mathscr{B}_c)$ onde $\mathscr{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é a base canónica do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

6.4 Estudo da recta

Dado um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ e um vector $\mathbf{u}_r$ não nulo (chamado de *vector director* da recta) existe apenas uma recta r tal que todo o ponto $P \in r$ satisfaz a condição $\overrightarrow{P_0P} \in \overline{(\mathbf{u})}$. Esta condição é equivalente à condição

$$\forall P \in r,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} : P - P_0 = \lambda \mathbf{u}_r$$

Ou seja, dados: um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tem-se

$$r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3)\right\}.$$

Chamamos à condição que define o conjunto (ou a recta) r a *equação vectorial da recta.*

Equação vectorial da recta r

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Escrevendo a equação vectorial em termos de coordenadas obtêm-se as equações paramétricas da recta r

Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$$

A forma das equações cartesianas ou equações normais da recta r depende das coordenadas do vector director $\mathbf{u}_r$ da recta.

Caso I: O vector director $\mathbf{u}_r$ da recta tem as três coordenadas não nulas, ou seja, tem-se

$$u_1 \neq 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0.$$

Neste caso resolvendo as equações paramétricas em ordem a λ obtemos

Equações cartesianas ($u_1 \neq 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0$.)

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Caso II: O vector director $\mathbf{u}_r$ da recta tem uma coordenada nula. Por exemplo, se a primeira coordenada for nula, ou seja, tem-se

$$u_1 = 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0.$$

neste acaso as equações cartesianas assumem a forma

Equações cartesianas ($u_1 = 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0.$)

$$x = x_0 \ \wedge \ \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

os casos $u_1 \neq 0 \ \wedge \ u_2 = 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0.$ e $u_1 \neq 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 = 0$ são análogos.

Caso III: O vector director $\mathbf{u}_r$ da recta tem duas coordenadas nulas. Por exemplo, se as duas primeiras coordenadas forem nulas, ou seja, tem-se

$$u_1 = 0 \ \wedge \ u_2 = 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0.$$

neste acaso as equações cartesianas assumem a forma

Equações cartesianas ($u_1 = 0 \ \wedge \ u_2 = 0 \ \wedge \ u_3 \neq 0$)

$$x = x_0 \ \wedge y = y_0$$

os casos $u_1 \neq 0 \ \wedge \ u_2 = 0 \ \wedge \ u_3 = 0$ e $u_1 = 0 \ \wedge \ u_2 \neq 0 \ \wedge \ u_3 = 0$ são análogos.

Usando duas das igualdades das equações cartesianas da recta r obtemos as *equações reduzidas* da recta r que assumem, por exemplo, uma das seguintes formas

Equações reduzidas

$$\text{Se } u_1 \neq 0 \text{ então } \begin{cases} y = mx + p \\ z = m'x + p' \end{cases}$$

$$\text{Se } u_2 \neq 0 \text{ então } \begin{cases} x = my + p \\ z = m'y + p' \end{cases}$$

$$\text{Se } u_3 \neq 0 \text{ então } \begin{cases} x = mz + p \\ y = m'z + p' \end{cases}$$

onde, m, m', p e $p' \in \mathbb{R}$.

Nota: Independentemente do caso que consideramos podemos sempre escrever as equações reduzidas de uma recta na "forma generalizada"

Forma generalizada das equações reduzidas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Exemplo I: Considere a recta r tal que $P_0 = (-1, 1, -1) \in r$ e é paralela ao vector $\mathbf{u}_r = (1, 0, -2)$ (ou seja, o vector $\mathbf{u}_r$ é um vector director da recta r). Então, a equação vectorial da recta r possui a forma

$$(x, y, z) = (-1, 1, -1) + \lambda\,(1, 0, -2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

As equações paramétricas escrevem-se

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

eliminando λ nas equações paramétricas obtém-se as equações cartesianas (ou normais)

$$y = 1 \ \wedge \ \frac{x+1}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

e as equações reduzidas escrevem-se na forma

$$\begin{cases} y = 1 \\ z + 2x = -3 \end{cases}$$

♣

Exemplo II: Considerando a recta r que passa nos pontos $P_0 = (-1,-1,2)$ e $Q_0 = (2,3,3)$. Podemos reduzir este problema observando que r passa, por exemplo, em P_0, e que o vector

$$\mathbf{u}_r = \overrightarrow{P_0Q_0} = Q_0 - P_0 = (3,4,1)$$

é um vector director da recta r. Deste modo, obtém-se:

$$(x, y, z) = (-1,-1,2) + \lambda(3,4,1),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{(equação vectorial)}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{(equações paramétricas)}$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{1}, \qquad \text{(equações cartesianas)}$$

$$\begin{cases} x - 3z = -7 \\ y - 4z = -9 \end{cases}. \qquad \text{(equações reduzidas)}$$

♣

6.5 Estudo do plano

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, y_0)$ e dois vectores $\mathbf{u}_\alpha = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}_\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ existe apenas um plano α tal que, todo o ponto $P \in \alpha$ satisfaz a condição

$$\overrightarrow{P_0P} \in \overline{\langle \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \rangle}. \tag{6.8}$$

Esta condição é equivalente à condição

$$\forall P \in \alpha,\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ P - P_0 = \lambda \mathbf{u}_\alpha + \mu \mathbf{v}_\alpha.$$

ou seja,

$$\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (x, y, z) = (x_0, y_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)\right\}.$$

As condições que os pontos que pertencem a α satisfazem originam a *equação vectorial* do plano α

Equação vectorial do plano α

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\,(u_1,u_2,u_3)+\mu\,(v_1,v_2,v_3),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Escrevendo a equação vectorial em termos de coordenadas obtém-se as equações paramétricas do plano α

Equações paramétricas do plano α

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases},\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Resolvendo as equações paramétricas em ordem a λ e μ chegamos à equação cartesiana do plano que possui a seguinte forma

Equação cartesiana do plano α

$$ax+by+cz=d$$

Um modo prático para se determinar os coeficientes a,b,c,d que ocorrem na equação cartesiana de um plano α consiste na seguinte observação. Como os vectores $\mathbf{u}_\alpha$ e $\mathbf{v}_\alpha$ são linearmente independentes tem-se que o vector $\mathbf{n}_\alpha=\mathbf{u}_\alpha\times\mathbf{v}_\alpha$ é não nulo e perpendicular a todo o vector em $\overline{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)}$. Consequentemente a condição (6.8) é equivalente à condição

$$\overrightarrow{P_0P} \mid (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha) = 0.$$

Ou seja,

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.} \tag{6.9}$$

se usarmos o teorema de Laplace para o cálculo do determinante tem-se

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

e obtemos a equação cartesiana do plano $ax + by + cx = d$ com

$$\underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{a} x + \underbrace{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}}_{b} y + \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{c} z = \underbrace{x_0 a + y_0 b + z_0 c}_{d}.$$

Uma consequência imediata é o seguinte

Teorema 6.1.

Seja α um plano com equações cartesianas $ax + by + cz = d$ então o vector

$$\mathbf{n}_\alpha = (a, b, c)$$

é perpendicular a todo o vector $\overrightarrow{P_0P}$, onde P_0 e P são pontos do plano α. Dizemos neste caso que $\mathbf{n}_\alpha \perp \alpha$.

Exemplo I: Pretende-se encontrar as equações do plano α que contém o ponto $P_0 = (0, -1, 2)$ e que é paralelo aos vectores $\mathbf{u}_\alpha = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_\alpha = (1, 1, 0)$. A equação vectorial de α toma a forma

$$(x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 1, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

e as equações paramétricas ficam

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -1 + \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Para se obter as equações cartesianas podemos eliminar λ e μ das equações paramétricas. Por exemplo, das duas últimas equações tem-se

$$\begin{cases} \mu = y - z + 3 \\ \lambda = z - 2 \end{cases}$$

e substituindo na primeira equação obtemos a equação cartesiana de α

$$x - y = 1.$$

Ou, alternativamente, pode-se usar a equação (6.9)

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x - y = 1.$$

♣

Exemplo II: Pretende-se encontrar a equação cartesiana do plano α que passa no ponto $P_0 = (-3, 4, -2)$ e é perpendicular à recta r com equações cartesianas

$$\frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Sabemos que $\mathbf{u}_r = (1, 2, 3)$ é um vector director da recta r. Consequentemente a equação cartesiana de α tem a forma

$$x + 2y + 3z = d$$

e apenas temos de determinar o parâmetro d de modo ao plano conter o ponto P_0 ou seja tem-se $d = -3 + 2 \times 4 + 3 \times (-2) = -1$. Alternativamente podia-se resolver o problema usando a condição de ortogonalidade

$$(x+3) \times 1 + (y-4) \times 2 + (z+2) \times 3 = 0.$$

Obtém-se, em ambos os métodos a a equação cartesiana de α

$$x + 2y + 3z = -1.$$

♣

6.6 Problemas não métricos

6.6.1 Posição relativa entre dois planos

Sejam α e β dois planos com equações

$$\alpha \quad : \quad a_\alpha x + b_\alpha y + c_\alpha z = d_\alpha$$

$$\beta \quad : \quad a_\beta x + b_\beta y + c_\beta z = d_\beta$$

O estudo da posição relativa entre α e β resume-se ao estudo da intersecção entre os dois planos $\alpha\cap\beta$. Ou seja ao estudo do sistema de duas equações lineares nas três incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} a_\alpha x + b_\alpha y + c_\alpha z = d_\alpha \\ \\ a_\beta x + b_\beta y + c_\beta z = d_\beta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ & & \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_\alpha \\ \\ d_\beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Existem três possibilidades para as posições relativas.

A. Se $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 1$, então os planos são coincidentes ($\alpha = \beta$).

B. Se $r(\mathbf{A}) = 1 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$, então os planos são paralelos ($\alpha\cap\beta = \emptyset$).

C. Se $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$, então os planos são concorrentes ($\alpha\cap\beta = \{\text{recta}\}$).

6.6.2 Posição relativa entre uma recta e um plano

Seja r uma recta e α um plano com equações

$$r \ : \ \begin{cases} a_{r_1} x + b_{r_1} y + c_{r_1} z = d_{r_1} \\ a_{r_2} x + b_{r_2} y + c_{r_2} z = d_{r_2} \end{cases}$$

$$\alpha \ : \quad a_\alpha x + b_\alpha y + c_\alpha z = d_\alpha$$

Para estudarmos a intersecção $r\cap\alpha$ construímos o sistema de três equações lineares na três incógnitas x, y e z (duas equações relativas à recta r e uma relativa ao plano α)

$$\begin{cases} a_{r_1} x + b_{r_1} y + c_{r_1} z = d_{r_1} \\ a_{r_2} x + b_{r_2} y + c_{r_2} z = d_{r_2} \\ a_\alpha x + b_\alpha y + c_\alpha z = d_\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{r_1} & b_{r_1} & c_{r_1} \\ a_{r_2} & b_{r_2} & c_{r_2} \\ a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{r_1} \\ d_{r_2} \\ d_\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Existem três possibilidades para as posições relativas.

A. Se $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$ então, r está contida em α ($\alpha \subset r$).

B. Se $r(\mathbf{A}) = 2 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$ então, r é paralela a α ($\alpha || r$).

C. Se $r(\mathbf{A}) = 3 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$ então, r e α intersectam-se ($\alpha\cap\beta = \{\text{ponto}\}$).

6.6.3 Posição relativa entre duas rectas

Sejam r e s duas rectas com equações

$$r \quad : \quad \begin{cases} a_{r_1}x + b_{r_1}y + c_{r_1}z = d_{r_1} \\ a_{r_2}x + b_{r_2}y + c_{r_2}z = d_{r_2} \end{cases}$$

$$s \quad : \quad \begin{cases} a_{s_1}x + b_{s_1}y + c_{s_1}z = d_{s_1} \\ a_{s_2}x + b_{s_2}y + c_{s_2}z = d_{s_2} \end{cases}$$

Para estudarmos a intersecção $r \cap s$ construímos o sistema de quatro equações lineares na três incógnitas x, y e z (duas equações relativas a cada recta)

$$\begin{cases} a_{r_1}x + b_{r_1}y + c_{r_1}z = d_{r_1} \\ a_{r_2}x + b_{r_2}y + c_{r_2}z = d_{r_2} \\ a_{s_1}x + b_{s_1}y + c_{s_1}z = d_{s_1} \\ a_{s_2}x + b_{s_2}y + c_{s_2}z = d_{s_2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{r_1} & b_{r_1} & c_{r_1} \\ a_{r_2} & b_{r_2} & c_{r_2} \\ a_{s_1} & b_{s_1} & c_{s_1} \\ a_{s_2} & b_{s_2} & c_{s_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{r_1} \\ d_{r_2} \\ d_{s_1} \\ d_{s_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Neste caso, existem quatro possibilidades para as posições relativas.

A. Se $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$, então as rectas r e s são coincidentes ($r = s$).

B. Se $r(\mathbf{A}) = 2 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$, então r e s são paralelas ($r \cap s = \emptyset$ e os vectores directores são linearmente dependentes).

C. Se $r(\mathbf{A}) = 3 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$, então r e s são concorrentes ($\alpha \cap \beta = \{\text{ponto}\}$).

D. Se $r(\mathbf{A}) = 3 \ \wedge \ r([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 4$, então as rectas são r e s são enviesadas ($r \cap s = \emptyset$ e os vectores directores são linearmente independentes)

6.7 Problemas métricos

Nesta secção iremos estudar o cálculo de distâncias entre os conjuntos acima referidos. Recordamos que a distância entre dois pontos $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $Q = (x_1, y_1, z_1)$ é representada por $d(P, Q)$ e é definida por

Definição 6.15 (distância entre dois pontos)**.**

$$d(P, Q) = \sqrt{\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

De um modo geral, define-se a distância entre dois subconjuntos A e B de R^3 como sendo

$$d(A, B) = \inf_{\substack{P \in A \\ Q \in B}} \{d(P, Q)\}$$

Nota: No caso dos conjuntos A e B serem conjuntos fechados podemos substituir na definição o ínfimo pelo mínimo.

6.7.1 Distância de um ponto P a um plano α

Iremos dar dois métodos para calcular $d(P, \alpha)$.

método A:

1. Encontrar a recta r_α tal que, $r_\alpha \perp \alpha$ e que passa em P.
2. Encontrar o ponto Q de intersecção da recta r_α com o plano α.
3. Tem-se que $d(P, \alpha) = d(P, Q)$.

método B: A distância de P a α é igual à norma do vector projecção ortogonal de um vector $\overrightarrow{P'P}$, onde P' é um ponto qualquer no plano α, sobre um vector qualquer normal ao plano α. Ou seja, se $\mathbf{n}_\alpha$ for um vector perpendicular a α tem-se

$$\begin{aligned} d(P, \alpha) &= \left\| \mathrm{proj}_{\mathbf{n}_\alpha}\left(\overrightarrow{PP'}\right) \right\| \\ &= \left\| \frac{\overrightarrow{PP'} | \mathbf{n}_\alpha}{\|\mathbf{n}_\alpha\|^2} \mathbf{n}_\alpha \right\| \\ &= \frac{\left| \overrightarrow{PP'} | \mathbf{n}_\alpha \right|}{\|\mathbf{n}_\alpha\|} \end{aligned}$$

Deste modo tem-se

$$d(P, \alpha) = \frac{\left| \overrightarrow{PP'} | \mathbf{n}_\alpha \right|}{\|\mathbf{n}_\alpha\|}, \quad \text{onde } P' \in \alpha,\ \mathbf{n}_\alpha \perp \alpha. \tag{6.10}$$

Exemplo: Pretende-se determinar a distância do ponto $P = (2, 0, 4)$ ao plano $\alpha: x + y - 2z = 0$. Tem-se

1. O vector $\mathbf{n}_\alpha = (1, 1, -2)$ é perpendicular ao plano α e o ponto $P' = (1, 1, 1) \in \alpha$.
2. $\overrightarrow{PP'} = P' - P = (0, 0, -3)$.

3. Usando a relação (6.10) tem-se

$$\mathrm{d}(\mathrm{P},\alpha) = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}|\mathbf{n}_\alpha|}{\|\mathbf{n}_\alpha\|} = \frac{|(0,0,-3)|(1,1,-2)|}{\|(1,1,-2)\|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

♣

6.7.2 Distância de um ponto a uma recta

método A: Para se calcular a distância de um ponto P a uma recta r, $\mathrm{d}(\mathrm{P},r)$ procede-se do seguinte modo,

1. Encontrar o plano α_r perpendicular à recta r que contém o ponto P.
2. Encontrar o ponto Qde intersecção do plano α_r com a recta r.
3. Tem-se que $\mathrm{d}(\mathrm{P},r) = \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{Q})$.

método B: A distância de um ponto P a uma recta r é igual a $\|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\|\sin(\theta)$, onde o ponto $\mathrm{P}' \in r$ ($\mathrm{P}' \neq \mathrm{P}$) e θ é o ângulo entre o vector $\overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ e um vector director $\mathbf{u}_r$ da recta. Consequentemente tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{P},r) &= \|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\|\sin(\theta) \\
&= \|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\|\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\times\mathbf{u}_r\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\|\,\|\mathbf{u}_r\|} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\times\mathbf{u}_r\|}{\|\mathbf{u}_r\|}.
\end{aligned}$$

Deste modo tem-se

$$\mathrm{d}(\mathrm{P},r) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{PP}'}\times\mathbf{u}_r\|}{\|\mathbf{u}_r\|}, \quad \text{onde } \mathrm{P}' \in r, \text{ e } \mathbf{u}_r \text{ é um vector director de } r. \tag{6.11}$$

Exemplo: Pretende-se determinar a distância do ponto $\mathrm{P} = (2,0,1)$ à recta

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{1-z}{2}.$$

Tem-se, por exemplo

1. $P' = (2,-1,1)$ e $\overrightarrow{PP'} = P' - P = (0,-1,0)$.
2. $\mathbf{u}_r = (3,4,-2)$.
3. Usando a relação (6.12) obtem-se

$$d(P,r) = \frac{\|(0,-1,0)\times(3,4,-2)\|}{\|(3,4,-2)\|} = \frac{\|(2,0,3)\|}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{13}{29}}$$

♣

6.7.3 Distância entre dois planos paralelos

A distância entre dois planosα e β paralelos pode-se calcular encontrando um ponto P que pertence a um dos planos, por exemplo $P \in \beta$, e tem-se $d(\alpha,\beta) = d(P,\alpha)$. Ou seja reduzimos o problema de encontrar a distância de dois planos paralelos ao problema, já abordado, de encontrar a distância de um ponto a um plano.

6.7.4 Distância entre um plano e uma recta paralela

Este problema também se pode reduzir ao problema de encontrar a distância de um ponto P a um plano α. para tal escolhemos um ponto P da recta r e a distância pretendida $d(r,\alpha)$ é igual à distância $d(P,\alpha)$.

6.7.5 Distância entre duas rectas paralelas

O problema de encontrar a distância entre duas rectas r e s paralelas reduz-se ao problema, já abordado, de encontrar a distância de um ponto a uma recta. Para o efeito escolhe-se um ponto P pertencente a uma das rectas, por exemplo $P \in s$, tem-se $d(r,s) = d(P,r)$.

6.7.6 Distância entre duas rectas enviesadas

O problema de encontrar a distância entre duas rectas r e s paralelas reduz-se ao problema, já abordado, de encontrar a distância de um ponto a um plano. De facto, Se $\mathbf{u}_r$, e $\mathbf{u}_s$ forem vectores das rectas r e s, respectivamente, tem-se que a lista $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_s)$ é linearmente independente. Se escolhermos um ponto P pertencente a uma das rectas, por exemplo $P \in s$, tem-se que

$$d(r,s) = d(P,\gamma)$$

onde o plano γ passa por um ponto P' da recta r e tem vectores directores $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$. Observando que o vector $\mathbf{n}_\gamma = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_s$ é perpendicular ao plano γ tem-se

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{PP'}|\mathbf{n}_\gamma\right|}{\|\mathbf{n}_\gamma\|}, \quad \text{onde } P' \in r,\ P \in s \text{ e } \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_s. \tag{6.12}$$

Exemplo: Encontrar a distância entre as rectas r e s enviesadas (verifique!) de equações

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{array} \right.$$

Tem-se,

1. $P=(0,0,1)\in s$, $P'=(0,1,0)\in r$. Logo $\overrightarrow{PP'}=(0,1,-1)$.

2. $\mathbf{u}_r=(1,1,2)$, $\mathbf{u}_s=(1,1,0)$. Logo $\mathbf{n}_\gamma=\mathbf{u}_r\times\mathbf{u}_s=(-2,2,0)$.

Consequentemente,

$$d(r,s)=\frac{\|\overrightarrow{PP'}|\mathbf{n}_\gamma\|}{\|\mathbf{n}_\gamma\|}=\frac{|(0,1,-1)|(-2,2,0)|}{\|(-2,2,0)\|}=\frac{|2|}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

♣

6.8 Exercícios

6.1 *Considere os vectores* $\mathbf{u}=(2,-2,3)$ *e* $\mathbf{v}=(1,-3,4)$. *Calcule*

a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$; ***b)*** $\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$; ***c)*** $\left\|\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right\|$; ***d)*** $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$; ***e)*** $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$; ***f)*** $\|(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{v}\|$; ***g)*** $\|(\mathbf{u}|\mathbf{v})\mathbf{v}\|$.

6.2 *Sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. *Sabendo que* $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|=1$ *e que* $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|=5$ *calcule* $\mathbf{u}|\mathbf{v}$.

6.3 *Sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *dois vectores não nulos. Mostre que:*

a) $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ *sse* $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

b) $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ *sse* $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$.

6.4 *Mostre que para todo* $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ *tem-se:*

a) $\mathbf{u}|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$.

b) $(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\lambda-\mu)(\mathbf{u}\times\mathbf{v}),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

c) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=2(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)$.

6.5 *A área de um triângulo* $\triangle$ *com vértices em três pontos* P_0, P_1 *e* P_2 *é dada por*

$$\textit{área}(\triangle)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_0}\times\overrightarrow{P_2P_0}\right\|.$$

a) *Calcule a área do triângulo* $\triangle_1$ *com vértices nos pontos* $\mathrm{P}_0 = (1,0,0)$, $\mathrm{P}_1 = (0,1,0)$ *e* $\mathrm{P}_2 = (0,0,1)$.

b) *Calcule a área do triângulo* $\triangle_2$ *com vértices nos pontos médios dos lados do triângulo* $\triangle_1$.

6.6 *Encontre todos os vectores com norma unitária perpendiculares a* $\mathbf{u} = (1,1,1)$ *e a* $\mathbf{v} = (2,1,-1)$.

6.7 *Considere as rectas* r_1 *e* r_2 *definidas pelas equações*

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases} \qquad r_2 : \ x = y - 1 = z - 2.$$

a) *Mostre que* r_1 *e* r_2 *são paralelas.*

b) *Determine a equação do plano* α *que contém as rectas* r_1 *e* r_2.

c) *Calcule* $\mathrm{d}(r_1, r_2)$.

6.8 *Determine* $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \alpha)$*, onde:*

a) $\mathrm{P} = (3,1,-2)$ *e* $\alpha : \ x + 2y - 2z = 4$.

b) $\mathrm{P} = (0,3,-2)$ *e* $\alpha : \ x - y - z = 3$.

6.9 *Sejam* α *e* β *dois planos. Determine* $\mathrm{d}(\alpha, \beta)$*, onde:*

a) $\alpha : \ 3x - 4y + z = 1$ *e* $\beta : \ 6x - 8y + 2z = 3$.

b) $\alpha : \ ax - by + cz = d_1$ *e* $\beta : \ ax - by + cz = d_2$, *onde* $a, b, c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$.

6.10 *Considere os pontos* $\mathrm{P}_0 = (1,2,1)$ *e* $\mathrm{P}_1 = (3,4,3)$ *e o plano* $\alpha : \ x - y + z = 1$.

a) *Determine o conjunto dos pontos* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3$ *equidistantes de* P_0 *e* P_1.

b) *Determine o ponto* $\mathrm{P}_2 = (x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ *tal que*

$$\|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_0}| = \|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1}| = \sqrt{11} \text{ e } x_0 + y_0 - 2z_0 < 0.$$

c) *Determine a área do triângulo com vértices nos pontos* P_0, P_1 *e* P_2 *(ver exercício 6.5) e a equação cartesiana do plano* γ *que contém o triângulo.*

6.11 *Considere o ponto* $\mathrm{P} = (a, 2a, a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e as rectas*

$$r_1 : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = \lambda + 1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ r_2 : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 3\mu + 1 \\ z = \mu + 1 \end{cases} ; \mu \in \mathbb{R}$$

a) *determine* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e um ponto* $\mathrm{P}_0 \in r_1$ *tal que*

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}_0} \perp r_2 \ \text{ e } \ \|\overrightarrow{\mathrm{PP}_0}\| = \sqrt{2}.$$

b) *Mostre que os pontos* P, P_0 *e a recta* r_2 *não são complanares.*

Apêndice A

Lógica Matemática

A Matemática usa a Lógica Matemática de forma a evitar ambiguidades e raciocínios falaciosos que surgem frequentemente quando recorremos à linguagem corrente. Quando se pretende definir com rigor conceitos, ou quando se pretende determinar se um dado raciocínio está correto, recorremos à Lógica Matemática. Deste modo, a Lógica Matemática é a linguagem "natural" usada na Matemática e na Ciência da Computação.

Foi a pensar em colmatar as dificuldades observadas na apreensão de certos conceitos da Álgebra Linear e em raciocínios pouco claros na resolução de certos problemas, que decidimos introduzir em apêndice, de um modo informal, um breve resumo da Lógica Matemática. Esperamos que os alunos recorram a este apêndice quando sentirem dificuldades na apreensão de certos conceitos introduzidos nesta disciplina, bem como na resolução de certos problemas.

A.1 Lógica proposicional

As expressões mais simples da lógica proposicional são as expressões que nomeiam, ou que designam, objectos. A estas expressões chamamos de **designações**. A uma expressão que traduz uma frase declarativa e à qual podemos inferir um dos valores de verdade ("verdadeiro" ou "falso") chamamos de **proposição**. Por exemplo, as seguintes expressões são designações

1. 2,
2. azul,
3. $\frac{2}{3}$,
4. $2+\sqrt{3}$,

e as seguintes expressões são proposições

1. $2>2+\sqrt{3}$,

2. a minha caneta tem tinta azul,

3. $\frac{2}{3}$ é um número inteiro,

4. $2 \neq \sqrt{3}$.

Dadas duas proposições quaisquer, p e q, podemos construir proposições compostas usando conectivos lógicos. Alguns dos conectivos mais frequentes são: de **conjunção** $p \wedge q$, de **disjunção** $p \vee q$, de **negação** $\sim p$ e de **implicação** $p \Rightarrow q$.

As quatro proposições compostas, acima indicadas, tomam os valores de verdade indicados nas tabelas

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Em linguagem corrente, a conjunção de duas proposições efectua-se unindo duas proposições com a palavra “e”, a disjunção de duas proposições efectua-se unindo duas proposições com a palavra “ou”, a negação de uma proposição efectua-se precedendo a proposição com a palavra “não”. A implicação, em linguagem corrente, toma essencialmente duas formas. Por exemplo, dizemos “*Se* chover *então* levo guarda chuva” ou “O aumento da produção *implica* o aumento do consumo de energia”. Convém no entanto salientar que, na linguagem corrente, o sentido das palavras que unem proposições podem originar ambiguidades. Um exemplo paradigmático é o uso da palavra “ou”. Por exemplo, a palavra “ou” na frase “Hoje à noite vou ao cinema ou à ópera” não representa o conectivo disjunção. Na realidade a frase revela que, vou passar a noite a ver um filme ou a ouvir uma ópera mas se vir o filme não ouço ópera e, se ouvir ópera, não vou ao cinema. Na Lógica Matemática a palavra “ou”, no contexto da frase atrás referida, representa o conectivo **disjunção exclusiva** que é representado usualmente pelo símbolo $\dot\vee$. A proposição resultante da disjunção exclusiva de duas proposições toma os valores de verdade indicados na seguinte tabela

Disjunção exclusiva

p	**q**	$\mathbf{p \dot\vee q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O conectivo negação também costuma gerar algumas ambiguidades, pelo que o iremos abordar com especial cuidado. Por exemplo a proposição $\sim (\pi \leq 3)$ pode-se traduzir em linguagem corrente pela frase "pi não é menor ou igual do que três". Esta proposição é verdadeira, porque é a negação de uma proposição falsa. De facto a proposição $\pi \leq 3$ é uma abreviatura da proposição $\pi < 3 \vee \pi = 3$, consequentemente $\pi \leq 3$ é falsa (porque é a disjunção de duas proposições falsas). Podíamos chegar à mesma conclusão usando uma das **leis de de Morgan**. Ou seja, a proposição $\sim (\pi \leq 3)$ é uma abreviatura da proposição $\sim (\pi < 3 \vee \pi = 3)$ que, por uma das leis de de Morgan, tem o mesmo valor de verdade que a proposição $\sim (\pi < 3) \wedge \sim (\pi = 3)$, que é verdadeira por ser a conjunção de duas proposições verdadeiras. Recordamos que as leis de de Morgan, que permitem negar proposições conectadas pela disjunção e pela conjunção, escrevem-se na seguinte forma,

Leis de de Morgan

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$
$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$$

onde o símbolo "$\equiv$" significa que as duas proposições por ele ligadas são equivalentes. Ou seja, as duas proposições possuem o mesmo valor de verdade, independentemente do valor de verdade que atribuímos às proposições p e q.

A negação da implicação também costuma originar algumas ambiguidades/dificuldades. Por exemplo a negação da proposição "Se eu canto então o meu cão uiva" é a proposição "Eu canto e o meu cão não uiva". De facto é fácil de mostrar que as proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são equivalentes, logo a negação da primeira proposição é equivalente à negação da segunda, ou seja, tem-se

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q).$$

Usando uma das leis de de Morgan e a conhecida propriedade da dupla negação $(\sim (\sim p) \equiv p)$ tem-se a seguinte regra para a negação da implicação

Negação da implicação

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

A proposição, escrita na linguagem da Lógica Matemática, $p \Leftrightarrow q$, é uma abreviatura da proposição

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

e lê-se em linguagem corrente "p se e somente se q" ou "p é equivalente a q". Note que a proposição $p \Leftrightarrow q$ assume o valor de falso quando p e q possuem valores de verdade diferentes e assume o valor de verdade verdade quando p e q possuírem o mesmo valor de verdade.

A.2 Lógica de predicados

Na Lógica Matemática existem expressões que contêm variáveis e que se transformam em proposições quer por *substituição* das variáveis por termos, quer por *quantificação*. Por exemplo, as expressões "$x < \pi$" ou "$y^2 + x = 0$" não são proposições, porque não é possível atribuir um valor de verdade. Contudo, se substituirmos a variável "x" pelo termo "1" na primeira expressão, obtemos a proposição "$1 < \pi$" (proposição verdadeira). Se substituirmos na segunda expressão a variável "y" pelo termo -2, não se obtém uma proposição, pois não é possível atribuir um valor de verdade à expressão "$(-2)^2 + x = 0$". Para transformarmos a expressão "$y^2 + x = 0$" numa proposição é necessário substituir ambas a variáveis por termos. Por exemplo, se substituirmos a variável "y" pelo termo -2 e a variável "x" pelo termo -2 (podemos substituir variáveis diferentes por termos iguais), obtemos a proposição (falsa) $(-2)^2 + (-2) = 0$. Se substituirmos as variáveis x e y, respectivamente, pelos termos -9 e -3, obtém-se a proposição verdadeira $(-3)^2 + (-9) = 0$. Estas expressões designam-se de **predicados**, ou de expressões designatórias, e também podem transformar-se em proposições se forem devidamente *quantificadas*. Por exemplo, a proposição "todo o número real é menor que pi" resulta da quantificação do predicado "$x < \pi$". Em Lógica Matemática escrevemos a última proposição da forma

$$\forall x \in \mathbb{R}, x < \pi,$$

onde o símbolo $\forall$, designado de **quantificador universal**, lê-se em linguagem corrente "para todo" ou "qualquer". A proposição "$x < \pi$" também pode ser quantificada usando o **quantificador existencial**, que representamos pelo símbolo $\exists$, na seguinte forma

$$\exists x \in \mathbb{R}, x < \pi,$$

e que, na linguagem corrente, significa a proposição "Existe um número real menor do que π".

Notamos que, no processo de quantificação de um predicado, é crucial indicar o *domínio* das variáveis que ocorrem nos predicados para se determinar o valor de verdade da proposição resultante. Por exemplo a proposição “todo o número real é menor do que π” é falsa, enquanto a proposição “todo o número real negativo é menor do que π” é uma proposição verdadeira.

No caso geral, consideremos o predicado $\mathrm{P}(x)$. Então tem-se que a proposição $\forall x \in \mathrm{D}, \mathrm{P}(x)$ é verdadeira se e somente se a proposição $\mathrm{P}(e)$ for verdadeira para todo o elemento e do domínio D (onde $\mathrm{P}(e)$ é a proposição formada por substituição da variável x por um elemento e do domínio D). Relativamente ao quantificador existencial, tem-se que a proposição $\exists x \in \mathrm{D}, \mathrm{P}(x)$ é verdadeira se e somente se existir (pelo menos) um elemento e' do domínio D tal que $\mathrm{P}(e')$ é uma proposição verdadeira.

O processo de *quantificação* de predicados com mais do que uma variável é análogo. Tal como no processo de substituição, ou seja substituir cada variável que ocorre num predicado por um termo, teremos que *quantificar* todas as variáveis que ocorrem no predicado. Por exemplo, $\forall x \in \mathbb{R}, y^2 + x = 0$ não é uma proposição porque a variável y não está quantificada (dizemos que a variável y está livre e que a variável x está ligada pelo quantificador universal). No entanto

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, y^2 + x = 0$$

já é uma proposição. De facto é uma proposição falsa porque se substituirmos a variável x por um número real positivo não existe nenhum número real que substituído na variável y torne o predicado $y^2 + x = 0$ numa proposição verdadeira. Por outro lado a proposição

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}, y^2 + x = 0$$

é verdadeira, dado que se substituirmos a variável y por um número real qualquer é sempre possível encontrar um número real $(-y^2)$ que substituído na variável x torna o predicado $y^2 + x = 0$ numa proposição verdadeira.

Um erro que se comete, frequentemente, é ignorar a ordem dos quantificadores. Por exemplo, a proposição “todos os alunos possuem um computador” não é equivalente à proposição “existe um computador para todos os alunos”. Em lógica matemática esta diferença traduz-se no facto de que a ordem dos quantificadores não é indiferente. De facto a proposição

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

é verdadeira (traduz o facto de que todo o número real possui um elemento simétrico), enquanto a proposição

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

significa em linguagem corrente que existe um número real que somado a qualquer número real dá zero (o que é falso).

Por vezes quando o domínio das variáveis está definido no contexto ou quando pretendemos escrever propriedades que não dependem do domínio das variáveis é costume não escrevermos o domínio das variáveis. Neste caso, se estivesse subentendido que as variáveis x e y pertenciam aos números reais as duas últimas proposições escreviam-se na forma $\forall x \exists y, x + y = 0$ e $\exists x \forall y, x + y = 0$, respectivamente.

A negação das proposições *quantificadas*:

- $\forall x \, P(x)$
- $\exists x \, P(x)$
- $\forall x \forall y \, Q(x, y)$
- $\exists x \exists y \, Q(x, y)$
- $\forall x \exists y \, Q(x, y)$
- $\exists x \forall y \, Q(x, y)$

pode ser efectuada seguindo as regras indicadas no seguinte quadro.

Negação de predicados quantificados

$$\begin{aligned}
\sim (\forall x \, P(x)) &\equiv \exists x \sim P(x) \\
\sim (\exists x \, P(x)) &\equiv \forall x \sim P(x) \\
\sim (\forall x \forall y \, Q(x, y)) &\equiv \exists x \exists y \sim Q(x, y) \\
\sim (\exists x \exists y \, Q(x, y)) &\equiv \forall x \forall y \sim Q(x, y) \\
\sim (\forall x \exists y \, Q(x, y)) &\equiv \exists x \forall y \sim Q(x, y) \\
\sim (\exists x \forall y \, Q(x, y)) &\equiv \forall x \exists y \sim Q(x, y)
\end{aligned}$$

A negação de proposições com mais do que duas variáveis faz-se de modo análogo. Informalmente, os quantificadores universais passam a quantificadores existenciais e vice-versa e nega-se o predicado. Alguns exemplos:

$$\begin{aligned}
\sim (\forall x,\, x^2 \geq 0) &\equiv \exists x,\, x^2 < 0 \\
\sim (\exists x,\, x + 1 = x) &\equiv \forall x,\, x + 1 \neq x \\
\sim (\exists x,\, \forall y \, xy = 0) &\equiv \forall, x \exists y \, xy \neq 0.
\end{aligned}$$

Apêndice B

Teoria dos conjuntos

Informalmente um *conjunto* é uma coleção de termos, os quais se dizem *elementos* do conjunto. A proposição representada em linguagem corrente por "x é elemento de A" (ou por "x pertence ao conjunto A"), representa-se, em linguagem Matemática, na forma $x \in \mathrm{A}$. E a sua negação "x não pertence ao conjunto A" representa-se simbolicamente $x \notin \mathrm{A}$.

Para representar um conjunto, dispomos os elementos desse conjunto separados por vírgulas entre chavetas, ou colocamos entre chavetas um predicado (ou propriedade) que é verdadeiro se e somente se substituirmos a variável (ou as variáveis) pelos elementos que pertencem ao conjunto. Por exemplo, para representarmos o conjunto, que designamos por A, constituído exactamente pelos cinco termos 1, 2, 3, 4, 5 por $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5\}$ ou através de uma propriedade, escrevemos $\mathrm{A} = \{x, \text{inteiro positivo} : x \,\text{é menor do que}\, 6\}$.

Os símbolos $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ representam os seguintes conjuntos de números, frequentemente usados nesta disciplina:

a) $\emptyset$ representa o conjunto vazio, ou seja, o conjunto que não possui elementos.

b) $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números inteiros positivos,

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\cdots\}.$$

c) $\mathbb{N}_0$ representa o conjunto dos números inteiros não negativos,

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\cdots\}.$$

d) $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

e) $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais.

f) $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais.

Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A *está contido em* B (ou que B contém A) se e somente se todo o elemento de A for elemento de B e escrevemos $A \subset B$, ou seja, em linguagem Matemática escreve-se

$$A \subset B \equiv \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

A negação da proposição $A \subset B$, escreve-se $\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$, ver apêndice A, e escrevemos abreviadamente $A \not\subset B$.

Diz-se que dois conjuntos, A e B, *são iguais* se e somente se A e B tiverem exactamente os mesmos elementos e escrevemos $A = B$. Formalmente, dois conjuntos, A e B, são iguais se e somente se $(A \subset B)$ e $(B \subset A)$. A negação da proposição $A = B$ é representada por $A \neq B$ e neste caso tem-se $(A \not\subset B)$ ou $(B \not\subset A)$.

Observações:

i) *Note que, para todo o conjunto* A, *tem-se* $A \subset A$ *e* $\emptyset \subset A$.

ii) *Existe na literatura uma notação diferente da usada nesta sebenta. De facto, certos autores preferem escrever* $A \subseteq B$ *em vez da notação usada nesta sebenta* $A \subset B$.

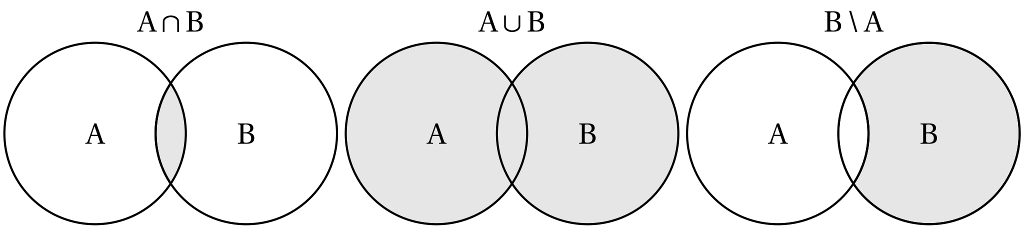
iii) *Se* $A \subset B$ *e* $A \neq B$ *dizemos que* A *é um subconjunto próprio de* B *e escrevemos* $A \subsetneq B$.

Dados dois conjuntos, A e B, define-se o *conjunto intersecção* de A e B, e representamo-lo por $A \cap B$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B. Os conjuntos dizem-se disjuntos se e somente se não têm elementos comuns, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$,

Dados dois conjuntos, A e B, define-se o *conjunto reunião* de A e B, simbolicamente $A \cup B$, como sendo o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Dados dois conjuntos, A e B, define-se o conjunto diferença e representamo-lo por $B \setminus A$ como sendo o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a A. Também podíamos encontrar o conjunto "A menos B" $(A \setminus B)$ constituído pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

Os três conjuntos acima definidos encontram-se representados a sombreado na figura seguinte.



Na linguagem da Lógica Matemática tem-se:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \cap \mathrm{B} &\equiv \{x : x \in \mathrm{A} \wedge x \in \mathrm{B}\} \\ \mathrm{A} \cup \mathrm{B} &\equiv \{x : x \in \mathrm{A} \vee x \in \mathrm{B}\} \\ \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} &\equiv \{x : x \in \mathrm{B} \wedge x \notin \mathrm{A}\} \end{aligned}$$

Frequentemente, todos os conjuntos que consideramos estão contidos num conjunto $\mathscr{U}$. Neste caso chamamos a $\mathscr{U}$ de *conjunto universal.* Dado um conjunto A, $\mathrm{A} \subset \mathscr{U}$, definimos o conjunto complementar de A em $\mathscr{U}$ como sendo o conjunto $\mathscr{C}(\mathrm{A})$ formado pelos elementos que pertencem a $\mathscr{U}$ e não pertencem a A, ou seja,

$$\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \mathscr{U} \setminus \mathrm{A}.$$

Observações:

i) *a ordem com que colocamos entre chavetas os elementos de um dado conjunto é irrelevante. Por exemplo tem-se* $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$.

ii) *Tem-se que* $\{1, 2, 5\} = \{1, 2, 5, 3+2\}$. *Ou seja, os termos que representam um mesmo objecto (ou objetos repetidos) apenas contam uma vez.*

Por vezes há a necessidade de considerar listas de termos onde é conveniente considerar a ordem dos elementos que a constituem ou mesmo considerar a hipótese de que a repetição de elementos é relevante. Um exemplo já estudado é o das coordenadas cartesianas de pontos no plano, constituídas por dois elementos (números) que se podem repetir e onde a ordem é relevante. Neste caso, todo o ponto do plano é representado por um *par ordenado* (a, b). Deste modo convém distinguir os símbolos $\{a, b\}$, (a, b) que representam termos distintos. Note-se que igualdade de dois pares ordenados $(a, b) = (c, d)$ é equivalente à proposição $a = c$ e $b = d$.

A noção de par ordenado pode-se generalizar a listas de termos constituídas por mais do que dois elementos. Chamaremos a uma lista ordenada constituída por 3 elementos (a, b, c) um *terno ordenado* ou, no caso geral, chamamos de *n-uplo* a uma lista ordenada constituída por $n \in \mathbb{N}$ elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A igualdade de dois n-uplos define-se de forma análoga à igualdade de dois pares ordenados. Ou seja, tem-se

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \equiv x_1 = x'_1 \wedge x_2 = x'_2 \wedge \ldots \wedge x_n = x'_n.$$

Produto cartesiano: Dados dois conjuntos, A e B, definimos o conjunto definido pelo produto cartesiano de A por B, e escrevemos $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, como sendo o conjunto constituído por todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Em linguagem Matemática escreve-se

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Geralmente tem-se $A \times B \neq B \times A$. Por exemplo, se $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,2,3\}$ tem-se,

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \\ B \times A &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}. \end{aligned}$$

Note-se que se tem

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

No caso de efectuarmos o produto cartesiano de um conjunto X por ele próprio escrevemos X^2 em vez de $X \times X$. Usando o exemplo anterior, tem-se

$$\begin{aligned} A^2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \\ B^2 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}. \end{aligned}$$

O produto cartesiano é um operador, de conjuntos, *associativo*. Ou seja para todos os conjuntos A, B e C tem-se

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Consequentemente, faz sentido representarmos este conjunto por $A \times B \times C$, que é o conjunto cujos elementos são ternos ordenados,

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}.$$

No caso de $A = B = C$ representamos este conjunto, constituído por ternos ordenados, por A^3. Voltando ao exemplo anterior tem-se

$$A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}.$$

Pode-se generalizar o produto cartesiano de n conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Naturalmente, o conjunto resultante será constituído por todos os n-uplos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais que

$$x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n.$$

Também no caso dos n conjuntos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, serem todos iguais escrevemos A_1^n em vez de escrevermos $\underbrace{A_1 \times A_1 \ldots \times A_1}_{n \text{ vezes}}$.

Relações binárias: Uma *relação binária* entre dois conjuntos A e B é um subconjunto $R \neq \emptyset$ de $A \times B$. Se um par ordenado (a, b) pertencer a R dizemos que "*a* está em relação com *b* em R" e escrevemos aRb. Se $A = B$ e R for uma relação de A em A dizemos que R é uma relação binária definida em A.

Dada uma relação binária $R \subset A \times B$ define-se:

- o *domínio* de R, e escrevemos Dom(R), como sendo o seguinte subconjunto de A

$$\mathrm{Dom(R)} = \{x \in A : \exists y \in B, (x, y) \in B\}$$

- a *imagem de* R, e escrevemos Im(R), como sendo o seguinte subconjunto de B

$$\mathrm{Im(R)} = \{y \in B : \exists x \in A, (x, y) \in B\}$$

- a *imagem de um elemento,* $a \in A$, representa-se por $R(a)$ e tem-se,

$$R(a) = \{y \in B : (a, y) \in B\}$$

- a *imagem recíproca* de um elemento $b \in B$, representa-se por $R^{-1}(b)$ e tem-se,

$$R^{-1}(b) = \{x \in A : (x, b) \in B\}$$

- a *relação inversa* de R é uma relação de B em A (ou um subconjunto não vazio de $B \times A$) é representada por R^{-1}, e define-se por

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R\}$$

Seja R uma relação entre os conjuntos A e B, e S uma relação entre os conjuntos B e C. Define-se a composição R com S, e representamos por $S o R$ (lê-se "S após R"), como sendo o subconjunto de $A \times C$ definido por

$$S o R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Seja R uma relação entre os conjuntos A e B. Dizemos que R é uma *função* se e somente se verificar a seguinte propriedade

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \forall c \in B, ((a, b) \in R \wedge (a, c) \in R) \Rightarrow b = c. \tag{B.1}$$

Ou seja, por outras palavras, uma função é uma relação binária onde o conjunto imagem de de todos os elementos de A tem no máximo um elemento.

Note-se que, formalmente, uma função é um conjunto. Mais exactamente, uma função é um subconjunto de $A \times B$ que satisfaz a condição (B.1). Informalmente, é frequente representarmos uma função f do conjunto de partida A no conjunto de chegada B pelo símbolo

$$f : A \longrightarrow B.$$

No caso da imagem de todos os elementos do domínio de uma função $f : A \longrightarrow B$ poderem ser determinados por uma expressão $f(x)$ escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Esta será a notação usada ao longo deste curso. Outra notação, que se encontra frequentemente, para se representar uma função é escrevermos simplesmente $y = f(x)$ e chamarmos a x de variável independente e a y de variável dependente. Contudo, é essencial garantir que os conjuntos de partida e de chegada da função sejam perceptíveis.

Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se *injectiva* se e somente se quaisquer dois elementos distintos, do seu domínio $A = \mathrm{Dom}(f)$, têm imagens distintas. Ou, em linguagem simbólica

$$\forall x \in A \, \forall y \in A, \, (x \neq y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)),$$

A negação da proposição anterior lê-se “f é uma função *não injectiva*” e significa que existem (pelo menos) dois elementos distintos do domínio de f que possuem imagens iguais. Em linguagem simbólica tem-se

$$\exists x \in A \, \exists y \in A, \, (x \neq y) \wedge (f(x) = f(y)),$$

Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se *sobrejectiva* se e somente se todo o elemento do conjunto de chegada B é imagem de algum elemento do domínio de f. Em linguagem simbólica tem-se

$$\forall y \in B \, \exists x \in A, \, f(x) = y.$$

A negação da proposição anterior lê-se “f é uma função *não sobrejectiva*” e significa que existe (pelo menos) um elemento do conjunto de chegada que não é imagem de nenhum elemento do domínio de f. Em linguagem simbólica tem-se

$$\exists y \in B \, \forall x \in A (f(x) \neq y).$$

Considerando as funções:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

notamos que a função f não é injectiva porque existem pelo menos dois números reais com a mesma imagem (p.ex. 1 e -1), e também não é sobrejectiva porque não existem elementos do conjunto de chegada cuja imagem seja um número real negativo. Já a função g é injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque $x \neq y$ implica $x^3 \neq y^3$, para todos os números reais x e y, e é sobrejectiva porque todo o número real y é imagem de $x = \sqrt[3]{y}$.

Uma função bijectiva $f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$, com o conjunto de chegada igual ao conjunto de partida, diz-se uma *permutação*. Como caso particular, de especial interesse neste curso, tem-se que existem $p!$ permutações do conjunto N_p nele próprio, onde $\mathrm{N}_p = \{1, 2, \ldots, p\}$ com $p \in \mathbb{N}$. Por exemplo, considerando $p = 3$, existem exactamente 6 permutações $\sigma_i : \mathrm{N}_3 \longrightarrow \mathrm{N}_3$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Apêndice C

Soluções:

1.1 Não é possível efectuar as operações indicadas nas alíneas: **a)**, **b)**, **e)**, **f)**, **h)**, **j)** e **m)**. As restantes alíneas são possíveis e tem-se:

c) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **g)** $\begin{bmatrix} -4 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 9 & 8 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ **k)** $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **l)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

n) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **o)** $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ **p)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ -4 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

q) $\begin{bmatrix} -9 \\ -11 \end{bmatrix}$ **r)** $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$ **s)** $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

t) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix}$

1.2 Quando **A** e **B** forem permutáveis.

1.3 Quando **A** e **B** forem permutáveis.

1.4 **a)** $\mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$.

b) $\mathbf{X} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}$.

c) $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

d) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{-1}$.

e) $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

1.5 $\left\{ \begin{bmatrix} t-z & -2z \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

1.6 **a)** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. **b)** $\mathbf{B}^{19} = \begin{bmatrix} -1 & -174763 \\ 0 & 524288 \end{bmatrix}$.

1.7 **b)** $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.8 **a)**

$$\mathbf{E}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{D}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $r(\mathbf{A}) = 3$. $r(\mathbf{B}) = 2$. $r(\mathbf{C}) = 3$. $r(\mathbf{D}) = 3$. $r(\mathbf{E}) = 3$. $r(\mathbf{F}) = 2$.

1.9 Por exemplo, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1.10 **b)** $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$

1.11 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.1

a) -2.	**b)** 0.	**c)** $-\lambda^3$.	**d)** -2.	**e)** -2.
f) 4.	**g)** 4.	**h)** 4.	**i)** -2.	**j)** -7.
k) 4.	**l)** $-2\lambda^2$.	**m)** $-2\lambda^3$.	**n)** 256.	**o)** -1.
p) $\frac{1}{64}$.	**q)** -1.	**r)** $a(a^2-c^2)+2b^2(c-a)$	**s)** $(z-x)(y-x)(z-y)$	

2.2

2.3 **a**) $x = 0 \vee x = -2$. **b**) $x = \frac{2}{3} \vee x = 1$.

2.4 $x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.5 Por exemplo (existem outras respostas igualmente válidas):

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.6 **a**) $a \neq 0 \wedge b \neq 1$. **b**) $a \neq 1$. **c**) $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \wedge \lambda \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **d**) $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq b - a$. **e**) $a \neq 0$. **f**) $a \neq 0 \wedge b \neq 1 \wedge b \neq -1$.

2.7

3.1

a) Representando $[\mathbf{A_i}|\mathbf{b_i}]$ a matriz completa do sistema $(\mathbf{S_i})$, $i = 1,2,3$, temos:

$$[\mathbf{A_1}|\mathbf{b_1}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right] \quad [\mathbf{A_2}|\mathbf{b_2}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right] \quad [\mathrm{A}_3|b_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

b) $[\mathbf{A_2}|\mathbf{b_2}]$ e $[\mathbf{A_3}|\mathbf{b_3}]$.

c) $(\mathbf{S_1})$ possível e determinado com conjunto solução $CS_1 = \left\{\left(0,-5,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

$(\mathbf{S_2})$ possível e duplamente indeterminado (grau de indeterminação 2) com conjunto solução

$$CS_2 = \left\{\left(\frac{1}{3}(-2+2x_3-26x_5), \frac{1}{3}(7-x_3+x_5), x_3, 3-7x_5, x_5\right) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$(\mathbf{S_3})$ possível e determinado com conjunto solução $CS_1 = \{(-15,9,2)\}$.

3.2

3.3 b) Não, porque o sistema é duplamente indeterminado. De facto, tem-se

$$CS = \left\{\left(-1-\lambda-\mu, 1+4\lambda, \lambda, \mu\right) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Logo $\mathscr{A} \subsetneq CS$.

3.4

a) $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \alpha \neq 1 \text{ Sist. impossível.} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \alpha = -12 \text{ Sist. impossível.} \\ \alpha \neq -12 \text{ Sist. possível e determinado.} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \beta - 5\alpha \neq 0 \text{ Sist. impossível.} \\ \beta - 5\alpha = 0 \text{ Sist. possível e indeterminado.} \end{cases}$

d) Sist. possível e determinado, para todos os reais α, β.

e) $\begin{cases} \alpha = -5 \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2}; \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \beta \neq -\frac{1}{2}; \text{ Sist. impossível.} \end{cases} \\ \\ \alpha \neq -5 \text{ Sist. possível e determinado, } \forall \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \alpha = 0 \begin{cases} \beta = 2; \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \beta \neq 2; \text{ Sist. impossível.} \end{cases} \\ \\ \alpha \neq 0 \begin{cases} \beta = 2; \text{ Sist. possível e indeterminado.} \\ \beta \neq 2; \text{ Sist. possível e determinado.} \end{cases} \end{cases}$

3.5

a) $p(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{12}x + 1/6x^2 + \frac{1}{12}x^3$.

b) $p(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{12}x + 1/6x^2 + \frac{1}{12}x^3$.

c) $p(x) = -6 + 6x - 3x^2 + x^3$.

3.6

a) **B** e **C**.

b) Representando a forma de escada reduzida de uma matriz **M** por $\tilde{\mathbf{M}}$ temos,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) r(**A**) = 3; r(**B**) = 3; r(**C**) = 2; r(**D**) = 4; r(**E**) = 4; r(**F**) = 7.

d)
- Sistema associado a **A**, possível e indeterminado, com

$$\text{CS} = \left\{(0, x_2, 0, -x_2, x_5) \in \mathbb{R}^5 : \ x_2, x_5 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **B**, impossível.
- Sistema associado a **C**, possível e indeterminado, com

$$\text{CS} = \left\{(19 + 13x_3, -(4 + 3x_3), x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **D**, possível e determinado, com CS = $\{(-4, 5, -1, 1)\}$.
- Sistema associado a **E**, possível e indeterminado, com

$$\text{CS} = \left\{\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_4, \frac{1}{2} - x_4, \frac{1}{10} - \frac{3}{5}x_4, x_4\right) \in \mathbb{R}^4 : \ x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

- Sistema associado a **F**, possível e determinado, com CS = $\{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$.

3.7

a) São todas invertíveis.

b)

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2/9 & 8/9 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E^{-1}} = \tfrac{1}{5}\mathbf{E} \quad \mathbf{F^{-1}} = \begin{bmatrix} 27 & -10 & 4 & -29 \\ -16 & 5 & -2 & 18 \\ -17 & 4 & -2 & 20 \\ -7 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

3.8

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha^3} & -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^4} & \frac{1}{\alpha^3} & -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha\beta\delta} & -\frac{1}{\beta\delta} & \frac{1}{\delta} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha\beta\delta\gamma} & \frac{1}{\beta\delta\gamma} & -\frac{1}{\delta\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$$

3.9 **b)** $CS_1 = \{(1,-2,1)\}$, $CS_2 = \{(-1,1,-1)\}$, $CS_3 = \{(-5,1,6)\}$ e $CS_4 = \{(1,1,1,1)\}$.

4.1 As alíneas a) e h) são e.v.r. As restantes alíneas não são e.v.r.

4.2 Os conjuntos indicados nas alíneas a), d), e) e f) são subespaços. Os conjuntos indicados nas restantes alíneas não são subespaços.

4.3 Os conjuntos indicados nas alíneas a) e b) não são subespaços. Os conjuntos indicados nas restantes alíneas são subespaços.

4.4 Tem-se $\overline{\mathscr{L}_1} = \mathbb{R}^3$, $\overline{\mathscr{L}_2} = \mathbb{R}^3$ e $\overline{\mathscr{L}_2} = \mathbb{R}^3$. As restantes listas não geram $\mathbb{R}^3$.

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10 $\alpha = -2, \beta = -1$.

4.11 a) $b + 1 \neq a$.

b) $(1, 2, 0) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3$.

4.12

4.13

4.14

4.15

4.16

5.1 A única transformação que não é linear é a da alínea **e)**.

5.2 **a)** $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0)\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{(x, 0, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x, y, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{(0, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

c) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0,0,0)\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \mathbb{R}^4$.

d) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathrm{P}_3[x] : b = d = c = d = 0,\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathrm{P}_3[x] : d = 0,\}$.

f) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \mathbf{O}_{3,3}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \mathscr{M}_{3,3}$.

5.3 **a)** $\mathbf{T}\big((x, y)\big) = (x + y, x - y, x - 2y)$.

b) $\mathbf{T}\big((x, y, z)\big) = (x + 2y - z, x + y)$.

c) $\mathbf{T}\big((x,y)\big) = (x+y, \frac{1}{2}(x+y))$.

d) $\mathbf{T}\big((x,y,z)\big) = (\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z, x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z)$.

5.4

a) Por exemplo, $\mathbf{T}$ definida por: $\mathbf{T}\big((1,0,1)\big) = \mathbf{T}\big((0,1,1)\big) = (0,0,0)$ e $\mathbf{T}\big((0,1,0)\big) = (1,1,1)$.

b) Não é possível porque $\dim(\mathbb{R}^3) > \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{T})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathbf{T}))$.

c) Por exemplo, $\mathbf{T}$ definida por: $\mathbf{T}\big((0,1,0)\big) = (0,0,0)$, $\mathbf{T}\big((1,0,0)\big) = (0,1,0)$ e $\mathbf{T}\big((0,0,1)\big) = (1,0,0)$.

5.5 $\mathbf{M}_{\mathrm{B}_3,\mathrm{B}_2}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

5.6

a) $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

5.7

a) **(i)** $(\mathbf{L}\circ\mathbf{T})(x,y) = (4x, 2y)$.

(ii) $(\mathbf{T}\circ\mathbf{L})(x,y,z) = (2z, 2x+2y, 2x+2y+2z)$.

b)

5.8 **a)** $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.9 **a)** $\mathbf{M}_{B,B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{B,B'} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $(a+2b-c)(1+x^2)+(a+b+c)(1+x)+(-a-2b)(1+x+x^2)$.

5.10 **a)** $\mathrm{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0,0)\}$.

b) Sim.

c) $\mathbf{M}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ (com multiplicidade 2).

e) $E_1 = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(0,x,x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$.

5.11 **a)**

b) $\mathbf{M}_{B,B'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/4 & -3/4 & -1/2 \\ 9/4 & 13/4 & 5/2 \end{bmatrix}$.

c)

5.12 **a)** 2 e −5; $E_2 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_{-5} = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

b) 3, 4 e 7; $E_3 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}$, $E_4 = \{(0,x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_7 = \{(0,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

c) 3 e 7; $E_3 = \{(x,-2x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_7 = \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

d) −2 e 6; $E_{-2} = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_6 = \{(x, \frac{3}{5}x) : x \in \mathbb{R}\}$

e) 0, 2 e −3; $E_0 = \{(0,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_{-3} = \{(0,x,-2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

f) 0 (multiplicidade 2) e 3; $E_0 = \{(0,x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(x,4/3x,3x) : x \in \mathbb{R}\}$.

g) 2 (multiplicidade 2) e 9; $E_2 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$ e $E_9 = \{(x,x/2,7x/6) : x \in \mathbb{R}\}$.

h) 0, 1, 2 e 3; $E_0 = \{(0,0,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$, $E_1 = \{(x,0,x/2,-5x) : x \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{(x,x/4,-23x/8,-69x/8) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E_3 = \{(0,0,x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$.

5.13 **a)**

b) $1, 2$ e 5.

c) Por exemplo, $\mathrm{B} = \big((1,-1,1),(1,0,1),(1,1,2)\big)$.

5.14

6.1 **a)** $\sqrt{83}$; **b)** $\sqrt{17}+\sqrt{26}$; **c)** 1; **d)** $(40/17,-40/17,60/17)$; **e)** $(10/13,-30/13,40/13)$; **f)** $\sqrt{42}$; **g)** $20\sqrt{26}$.

6.2 -6.

6.3

6.4

6.5 **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

6.6 existem duas soluções $\mathbf{n}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.

6.7 **b)** $x-6y+5z=4$; **c)** $\frac{\sqrt{186}}{3}$.

6.8 **a)** $\frac{5}{3}$; **b)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6.9 **a)** $\frac{\sqrt{26}}{52}$; **b)** $\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6.10 **a)** Plano de equação $x+y+z=7$; **b)** $\mathrm{P}_2=(0,3,4)$; **c)** $2\sqrt{6}$ e $\gamma\ :\ x-2y+z=-2$.

6.11

a) $a=4$ e $\mathrm{P}_0=(4,7,3)$.