Análise Matemática

Integral Definido

Capítulo 3

Licenciatura em
Engenharia Informática / ISEP

(2024/2025)

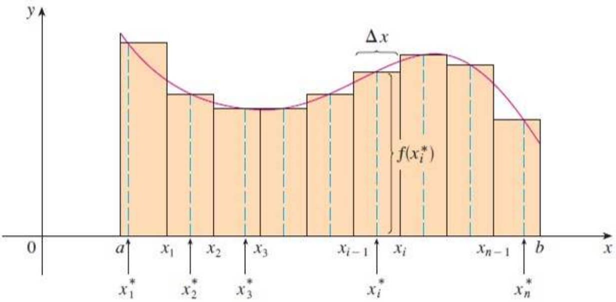
Conteúdo

Definição do integral definido.

Considere-se uma função

$$y = f(x)$$

positiva e definida num intervalo $[a, b]$ e seja R a região plana limitada pelo gráfico de f pelo eixo Ox e pelas retas $x = a$ e $x = b$.



Somas de Riemann

Dado o intervalo real $[a, b]$, seja $\Delta = \{x_0, ..., x_n\}$ ($n \geq 1$ um número inteiro) tal que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a, b]$ e considere-se

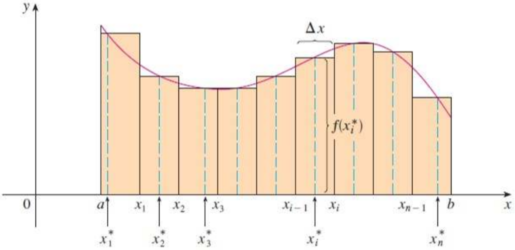
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

a amplitude de cada um dos sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $1 \leq i \leq n$.

Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada em $[a, b]$, se $x_1^*, \ldots, x_n^* \in \mathbb{R}$ são valores que satisfaçam a condição $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para $1 \leq i \leq n$, então

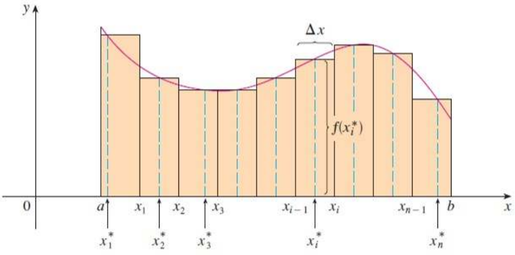
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \tag{1}$$

chama-se a **Soma de Riemann** de f associada à partição Δ.



Para cada i e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, a expressão $f(x_i^*)\Delta x$:

- representa a área do retângulo de base Δx e altura $f(x_i^*)$;
- é um valor aproximado da área da região limitada pela função, o eixo das abcissas Ox e as retas $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$.



Fazendo variar o i e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, a expressão $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$:

- representa a soma das áreas dos n retângulos de base Δx e altura $f(x_i^*)$;
- é um valor aproximado da área da região R limitada pelo gráfico de f e o eixo Ox em $[a, b]$.

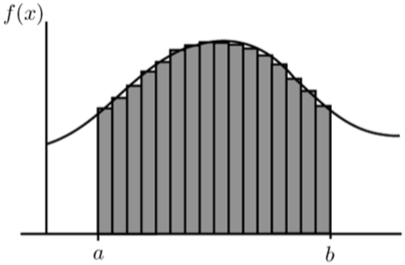
Assim, quanto mais fina for a partição (maior número de pontos), ou seja, quanto maior for n

$$\Downarrow$$

menor é a amplitude, dos sub-intervalos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$\Downarrow$$

a soma das áreas dos n retângulos aproxima-se da área da região R.



Resumindo, para uma função positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

a soma de Riemann representa uma aproximação do valor da

área da região R do plano xOy limitada pelo gráfico da função f,

o eixo das abcissas Ox e pelas retas verticias $x = a$ e $x = b$.

Quanto maior for o número de pontos n, na partição Δ

$\Downarrow$

Menor é Δx (amplitude de cada sub-intervalo)

$\Downarrow$

Melhor é a aproximação.

Integral de Riemann

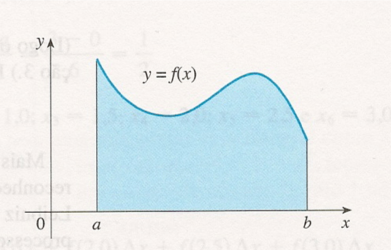
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada em $[a, b]$ e se existir o limite da soma de Riemann, então dizemos que f é integrável em $[a, b]$ e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Chama-se Integral Definido de f entre a e b ao valor deste limite.

- $a < b$;
- O número **a** designa-se **limite inferior de integração**;
- o número **b** designa-se **limite superior de integração**;
- f designa-se a **função integranda.**

O Integral Definido $\int_a^b f(x)\,dx$ de uma função positiva f é igual à área da região limitada pelo gráfico de f e o eixo Ox sobre o intervalo $[a, b]$.

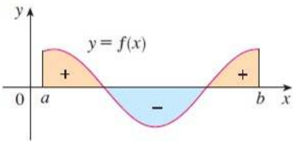


Algumas Observações Importantes

Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo $[a, b]$ e seja A a área da região plana limitada pelo gráfico de f, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$:

- Se $f(x) \geq 0$ então o valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é positivo e é numericamente igual ao valor de A;
- Se $f(x) \leq 0$ então o valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é negativo e é o simétrico do valor de A;

- Se f toma valores positivos e negativos em $[a, b]$ não existe relação direta entre o valor de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e o valor de A.



Cálculo do integral definido.

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b]$, então

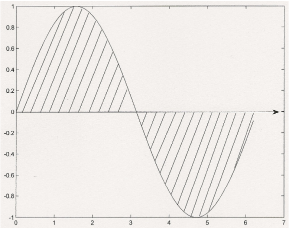
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

onde F é uma primitiva de f, ou seja, é uma função tal que $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Exemplo 1: Considere-se a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ definida em $[0, 2\pi]$. Calcular o valor do integral definido da função entre $[0, 2\pi]$.

Resolução:

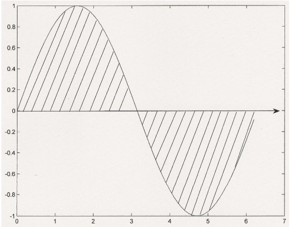
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$



Porque é que o integral deu zero?
(Ver gráfico)

Exemplo 1 (Cont.): Seja A a área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Note-se:



- A função $\text{sen}(x)$ é positiva no intervalo $[0, \pi]$ e é negativa no intervalo $[\pi, 2\pi]$,
- No intervalo $[0, \pi]$, o valor do integral é igual ao valor de $A/2$.
- No entanto, no intervalo $[\pi, 2\pi]$, o valor do integral é o simétrico do valor de $A/2$.

Assim, deve-se dividir o intervalo em dois sub-intervalos nos quais a função mantém o sinal. Ou seja,

$$A = \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\, dx = \int_0^{\pi} \text{sen}(x)\, dx + \left[-\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x)\right] dx =$$
$$= [-\cos(x)]_0^{\pi} + [\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = (1+1) + (1+1) = 4$$

Propriedades do integral definido.

Propriedade 1

Se f está definida em $x = a$, então $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Propriedade 2

Se f é integrável em $[a, b]$ ($a < b$), então

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedade 3

Se f é integrável em $[a, b]$ e k é uma constante, então

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedade 4: Integral definido de uma soma de funções

Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

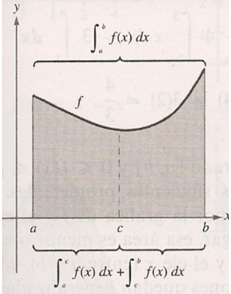
Generalizando, se f_k ($k = 1, ..., n$) for um número finito de funções integráveis em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

Propriedade 5

Se f é integrável no intervalo $[a, b]$ e se $c \in [a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Propriedade 6: Conservação de Desigualdades

1. Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

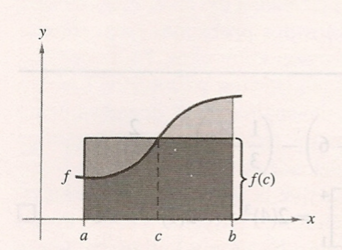
2. Se f e g são integráveis no intervalo $[a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para $\forall x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Propriedade 7: Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo $[a, b]$, existe um número c nesse intervalo tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



Propriedade 8: Integração de Funções Simétricas

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo $[-a, a]$.

- Se f for par $[f(-x) = f(x)]$, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

(Porquê?)

- Se f for ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

(Porquê?)

Exercício 1: Considere a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 1 \\ |5x-10| & \text{se} \quad 1 \leq x < 3 \\ 5 & \text{se} \quad 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

1.1 Represente graficamente a função f.

1.2 Sem resolver o integral, indique o sinal de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, justifique adequadamente.

1.3 Calcule o valor de $I = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

Métodos de integração do integral definido.

- Método de Integração por Partes

$$\boxed{\int_a^b u'\,v\,dx = [u\,v]_a^b - \int_a^b u\,v'\,dx}$$

- Método de Integração por Substituição Considere-se o integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Proceda-se à substituição:

$$x = h(t)$$

em que h é uma função contínua que admite inversa e possui derivada contínua. Faz-se a substituição no integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))\,h'(t)\,dt}$$

onde $\alpha = h^{-1}(a)$ e $\beta = h^{-1}(b)$.

Exercício 2: Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$.

Exercício 3: Resolver o seguinte integral $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}\,dx$, fazendo a substituição $e^{2x}=t$.

Exercício 4: Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$.

Exercício 5: Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_{1}^{2^6} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, fazendo a substituição $\sqrt[6]{x}=t$.

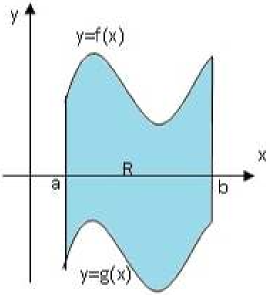
Exercício 6: Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}\,dx$, fazendo a substituição $x=\sec(t)$.

Exercício 7: Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$, fazendo a substituição $x=2\,\mathrm{tg}(t)$.

Aplicação do integral definido ao cálculo de áreas planas.

Área de uma região R limitada por duas curvas

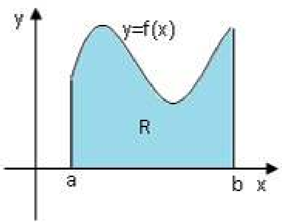
Seja R a região plana limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e as retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$:



A área A da região R é dada por:

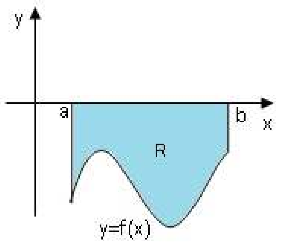
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Alguns Casos Particulares



A área A da região R é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - 0]\, dx$$

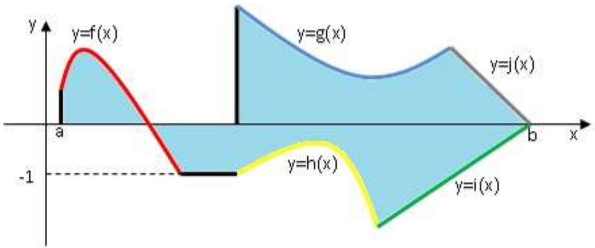


A área A da região R é dada por:

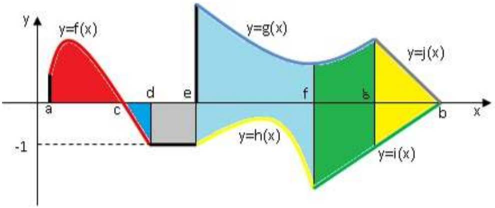
$$A = \int_a^b [0 - f(x)]\, dx$$

Alguns Casos Particulares

Para calcular a área de uma região cuja fronteira é constítuida por várias funções, é necessário decompôr o região em várias sub-regiões de modo a que em cada sub-região haja uma só função a limitar superiormente e uma só função a limitar inferiormente a região. Por exemplo, considere-se a região representada na figura.

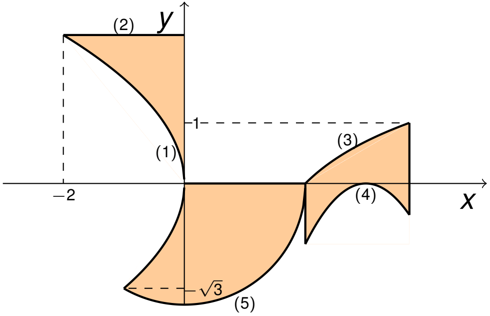


Decompomos a região em 6 sub-regiões e podemos (propriedade 5) escrever os integrais que calculam a área da região assinalada:



$$\int_a^c [f(x) - 0]\,dx + \int_c^d [0 - f(x)]\,dx + \int_d^e [0 - (-1)]\,dx +$$
$$+ \int_e^f [g(x) - h(x)]\,dx + \int_f^g [g(x) - i(x)]\,dx + \int_g^b [j(x) - i(x)]\,dx$$

Exercício 8: Escreva a expressão integral representativa da área da região limitada pelas curvas assinaladas.



(1) $3x + y^2 = 0$

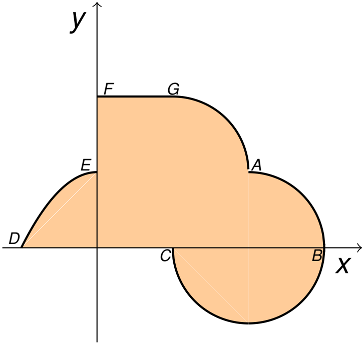
(2) $y = \sqrt{6}$

(3) $y = \ln(x - 1)$

(4) $y = -(x - 3)^2$

(5) $x^2 + y^2 = 4$

Exercício 9: Utilizando cálculo integral, escreva a expressão que permite calcular o valor da área da região limitada pelas curvas e pelos segmentos $[EF]$, $[FG]$ (horizontal) e $[DC]$.



(ABC) é um arco da circunferência
$(x-4)^2 + y^2 = 4$

(DE) é um arco da parábola
$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$

(GA) é um quarto da circunferência
$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

Pontos: $F(0,4)$ e $A(4,2)$