Licenciatura em Engenharia Informática (LEI)

2024/2025

Matemática Computacional (MATCP)

CAPÍTULO 4

Distribuições amostrais e Intervalos de Confiança (IC).

EXERCÍCIOS

Fonte: Professora Hermínia Ferreira e livro recomendado na unidade curricular.

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL. DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS ENVOLVENDO VALORES ESPERADOS E PROPORÇÕES

1. Um comerciante abastece-se de laranjas em dois pomares, A e B. Em ambos os pomares as laranjas são acondicionadas em caixas iguais de dez unidades cada. O peso (em gramas) das laranjas e o peso das caixas vazias são normalmente distribuídas com os seguintes parâmetros:

	Média (g)	Desvio padrão (g)
Laranjas do pomar A	200	10
Laranjas do pomar B	180	15
Caixas vazias	500	5

1.1 Calcule a probabilidade do peso de caixas cheias com laranjas do pomar A, ser superior a 2490g.

1.2 Em remessas de 100 caixas de laranjas vindas de cada um dos pomares, calcule a probabilidade do peso médio de uma remessa do pomar A exceder o peso médio de uma remessa do pomar B, em mais de 205g.

Apresente os resultados com três casas decimais.

2. A nota de um exame final de determinada unidade curricular, pode considerar-se uma variável aleatória normal, com $\mu = 10.8$ e $\sigma = 2.02$.

2.1 Qual é a nota mínima que um estudante terá que ter, para ficar entre os primeiros 20%?

2.2 Determine a probabilidade de que a nota média de uma turma de 30 estudantes difira menos de um valor, da nota média de uma outra turma de 40 estudantes. Apresente o resultado com três casas decimais.

3. Uma calculadora, ao adicionar números, arredonda cada um deles para o inteiro mais próximo, por defeito ou por excesso. Considere 60 somas de 50 parcelas cada.

   3.1 Em quantas somas se espera obter um erro médio, por defeito ou por excesso, superior a 0.01?

   3.2 Para que os erros médios de duas somas com igual número de parcelas, difiram entre si menos de 0.05 em 80% dos casos, qual deve ser o número de parcelas de cada uma dessas somas?

4. O tempo de fabrico, em minutos, de um dado tipo de peças pode ser considerado uniformemente distribuído no intervalo $[5, 15]$.

   4.1 Qual é o tempo médio, em minutos, de fabrico de cada peça?

   4.2 Determine a probabilidade do tempo médio de fabrico de 100 dessas peças exceder o tempo médio de fabrico de 50 dessas peças, em pelo menos 15 segundos. Apresente o resultado com quatro casas decimais.

5. Uma empresa produz aspiradores de dois tipos, A e B, e garante a restituição da quantia paga, se qualquer aspirador apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos aspiradores do tipo A tem uma distribução normal com média de dez meses e desvio padrão de dois meses e do tipo B tem uma dis-

tribuição uniforme no intervalo $[5, 19]$.
Os aspiradores do tipo A e B dão um lucro de 1200u.m. e de 2100u.m., respetivamente, mas, caso haja restituição do valor pago pelo cliente, originam um prejuízo de 2500u.m. e 7000u.m., respetivamente.

5.1 Calcule a variância do lucro para os aspiradores do tipo B.

5.2 Qual é a probabilidade do lucro médio obtido com a venda de 50 aspiradores do tipo A exceder o lucro médio obtido com a venda de 40 aspiradores do tipo B? Apresente o resultado com duas casas decimais.

6. O tempo que um operário demora a reparar um dado tipo de motor é o resultado das seguintes fases:

	Tempo médio	Variância	Distribuição
Desmontar	40min.	100min^2	Normal
Reparar	50min.	100min^2	Normal
Montar	25min.	25min^2	Normal

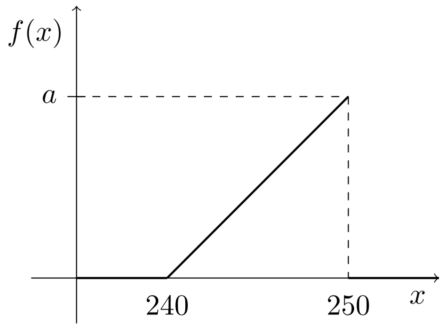
6.1 Calcule a probabilidade do tempo do processo completo de reparação de um qualquer motor, por aquele operário, ser inferior a uma hora e meia.

6.2 Em cada 50 motores reparados por aquele operário, qual é a probabilidade de mais de 95% deles demorarem mais de uma hora e meia a ser reparados?

Apresente os resultados com quatro casas decimais.

7. Admite-se que a quantidade de café que é depositado nas embalagens de 250 gramas é uma variável aleatória X cuja

função densidade de probabilidade está representada na figura seguinte ($a \in \mathbb{R}$):



7.1 Qual a percentagem de embalagens com peso inferior a 245g?

7.2 Em lotes de 50 destas embalagens, calcule a probabilidade de mais de 30% dessas embalagens terem peso inferior a 245g. Apresente o resultado com três casas decimais.

8. O exame de uma unidade curricular, em determinada época de avaliação, era constituída por dez questões de escolha múltipla com quatro alternativas cada, das quais só uma estava certa. Cada pergunta com resposta correta valia 20 pontos e não existiam descontos. Compareceram ao exame 100 estudantes sem qualquer preparação prévia, no entanto, acreditaram na "sorte" e responderam a todas as perguntas. Determine a probabiliddae de mais de 50% destes estudantes obterem pontuação superior a 50 pontos. Apresente o resultado com três casas decimais.

9. A duração, em minutos, de um determinado tipo de lâmpada pode ser considerado exponencialmente distribuída com valor médio de 10 minutos.

9.1 Qual a probabilidade da duração média de 50 daquelas lâmpadas não exceder 12 minutos?

9.2 Calcule a probabilidade de proporção de lâmpadas que duram mais que a duração média, em 50 que foram observadas, exceder 45%.

Apresente os resulados com quatro casas decimais.

10. Sabe-se que a proporção de clientes que optam pela marca de licor de café LC1 na loja ℓ_1 é de 0.35 e na loja ℓ_2 é de 0.29. Calcule a probabilidade de, recolhendo uma amostra de 200 clientes na loja ℓ_1 e de 150 clientes na loja ℓ_2, a proporção de clientes que optaram pela marca LC1 na loja ℓ_1 ser superior à da loja ℓ_2. Apresente o resultado com quatro casas decimais.

11. A câmara municipal, de uma determinada cidade, anunciou ter um orçamento para ser gasto na construção de novas escolas e em renovação de escolas já existentes. A construção de novas escolas vai ser realizadas numa zona periférica da cidade, enquanto que a renovação de escolas vai ser realizadas no centro da cidade. Um jornal local anunciou que 75% dos residentes da periferia da cidade e 60% dos residentes do centro da cidade, estão de acordo com o proposto pela câmara.
Realizou-se uma amostra aleatória de $n_1 = 50$ residentes na periferia e uma amostra aleatória de $n_2 = 100$ residentes no centro da cidade. Foi perguntado a todos os residentes se eram a favor ou contra à proposta da câmara. Qual é a probabilidade de que a diferença entre as duas proporções amostrais não exceda 10%? Apresente o resultado com quatro casas decimais.

INTERVALOS DE CONFIANÇA ENVOLVENDO VALORES ESPERADOS E PROPORÇÕES

Apresente os limites inferiores e limites superiores de todos os intervalos de confiança com três casas decimais.

12. No posto de venda A, a procura semanal de determinado artigo segue uma distribuição $Bi(n = 5, p = 0.4)$. No posto de venda B registou-se o número de vezes que o artigo foi procurado semanalmente, durante 100 semanas, tendo-se obtido os seguintes resultados:

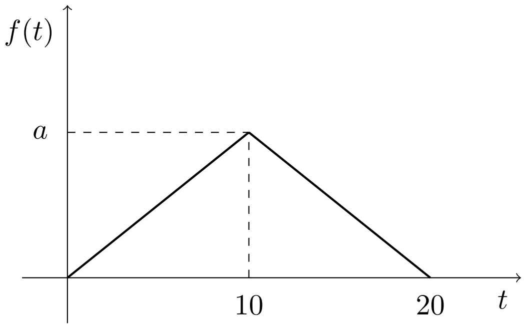
Número de procuras do artigo	0	1	2	3
Número de semanas	10	25	35	30

12.1 Poder-se-á concluir que, no posto de venda B, o número médio de procuras pelo artigo semalmente é significativamente diferente do número médio do posto de venda A? Indique a sua resposta com 90% de confiança.

12.2 Que tamanho mínimo de amostra deveria ser considerado para que a resposta dada na alínea 12.1 fosse contrária?

12.3 Que confiança máxima deveria ser considerada para que a resposta na alínea 12.1 fosse contrária?

13. O tempo de estudo, em horas, para o exame da unidade curricular de Estatística dos estudantes de um curso de licenciatura, pode considerar-se uma variável aleatória com a seguinte função densidade de probabilidade:



Pretende-se estudar o tempo de estudo, em horas, para o exame da unidade curricular de Estatística dos estudantes de um curso de mestrado.
Na tabela seguinte registou-se o resultado de um inquérito efetuado a 100 destes estudantes:

Tempo de estudo (h)	$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$
Número de estudantes	27	28	15	30

13.1 Com um grau de confiança de 96% será de aceitar que o tempo médio de estudo dos estudantes de mestrado é idêntico ao tempo médio de estudo dos estudantes de licenciatura?

13.2 Que tamanho mínimo da amostra deveria ser considerado, para que a resposta dada em 13.1 fosse contrária, admitindo que a média e desvio padrão da amostra se mantinham?

13.3 Que confiança máxima deveria ser considerada para que a resposta dada em 13.1 fosse contrária?

14. Uma empresa de segurança de serviço permanente pretende fazer uma análise estatística do número de alarmes, que recebe diariamente das habitações dos seus clientes. Pressume-se que a variável aleatória em causa tem distribuição de

Poisson de valor médio 0.5.
Com o aumento da insegurança, a empresa resolveu efetuar um estudo desta variável, registando o número de alarmes recebidos durante 60 dias:

Número de alarmes	0	1	2	3
Número de dias	25	30	3	2

14.1 Poderá aceitar-se que o número médio de alarmes recebidos diariamente se mantém? Responda com 96% de confiança e considere que a variância da população se manteve.

14.2 Que tamanho máximo da amostra deveria ser considerado para que a resposta dada em 14.1, fosse contrária, admitindo que a média e o desvio padrão da amostra se mantinham?

14.3 Que confiança mínima deveria ser considerada para que a resposta dada em 14.1 fosse contrária?

15. Pretende-se estudar a vida média de baterias, de certa marca. Basedado em estudos semelhantes, com outras marcas, é possível admitir que a vida dessas baterias segue uma distribuição normal com desvio padrão 4.5 meses.

15.1 Que tamanho deverá ter a amostra, para que a amplitude do intervalo, com 90% de confiança para a vida média, seja no mínimo três meses?

15.2 Que confiança deveria ser considerada para que a amplitude do intervalo para a vida média, seja menor que três meses, se utilizarmos amostras de tamanho 20?

16. Um taxista registou a extensão dos seus serviços, obtendo

os seguintes dados:

Distância (km)	Número de serviços
$0-10$	5
$10-20$	11
$20-30$	17
72	1

16.1 Defina um intervalo de confiança a 94% para a extensão média dos serviços do taxista.

16.2 Determine qual deveria ser o número de resgistos considerados pelo taxista, para que a amplitude do intervalo definido na alinea anterior, fosse reduzido em 10%? Comente o resultado obtido.

17. Uma empresa fabrica um produto cujo peso médio deve estar sempre compreendido entre 10kg e 11kg. Se tal não acontecer, o processo é considerado desafinado. Sabe-se que o desvio padrão do peso é de 0.7kg e que numa amostra de tamanho 30 o peso médio observado foi de 10.6kg.

17.1 O que pode concluir, com 95% de confiança, quanto à qualidade do processo?

17.2 Suponha que o desvio padrão é agora 2.0kg. Sabendo que numa segunda amostra, também de tamanho 30, se obteve uma média de 10.5kg, qual o grau de confiança de modo a que os limites da estimativa sejam iguais aos limites especificados pelo fabricante?

18. No quadro seguinte figuram os resultados de um inquérito sobre a concordância com o conteúdo de um determinado

Decreto-Lei, conforme o género masculino ou feminino da pessoa inquirida:

	Número de pessoas inquiridas	Número de respostas concordantes
Homens	200	75
Mulheres	300	120

Defina um intervalo de confiança a 94% para a proporção de homens, que, em toda a população, concordam com o Decreto-Lei.

19. Suponha que numa certa cidade se pretende ter uma estimativa da proporção de cidadãos a favor de uma dada medida camarária. Para tal, foi considerada uma amostra com 200 pessoas dessa cidade.

    19.1 Qual a probabilidade de que a maioria dos cidadãos dessa amostra estejam contra a medida se na realidade somente 45% de todos os cidadãos é contra a medida?

    19.2 Supondo que na amostra, 125 cidadãoes se manifestaram contra a medida, determine um intervalo de confiança a 98%, para a verdadeira percentagem de cidadãos que é contra a mesma.

20. O número de acidentes diários numa estrada foram registados durante 50 dias:

Número de acidentes	0	1	2	3	4
Número de dias	21	18	7	3	1

Determine um intervalo de confiança, a 95%, para a percentagem de dias com mais de dois acidentes diários.

21. Um fabricante afirma que as vendas do seu produto A, excendem em 8% as vendas de um outro produto B, existente no mercado. É feita uma sondagem que fornece os resultados seguintes: de 200 pessoas, 34 preferiram o produto A, de 150 pessoas, 18 preferiram o produto B. Concorda com a afirmação do fabricante do produto A? Responda com 95% de confiança.

22. Um construtor civil verificou que nos 205 dias em que a previsão metereológica admitia que chovesse, tal sucedeu em 151 dias. Nos restantes 380 dias, em que tal não estava previsto, choveu em 26.

    22.1 Que estimativa pode fazer para a probabilidade de chover se a previsão é de chuva? Considere um grau de confiança de 95%.

    22.2 Que confiança atribui à estimativa $[0.25, 0.32]$ para a probabilidade de chover, desconhecendo as previsões?

23. Pretende-se fazer um estudo de comparação da tensão suportada entre duas estruturas elétricas, usadas no fabrico de asas de um avião comercial. De acordo com estudos anteriores, sabe-se que os desvios padrão da tensão de cada estrutura são conhecidos e iguais a $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 1.5$. Foram realizados 100 e 120 testes, obtendo-se os valores $\overline{x_1} = 87.6$ e $\overline{x_2} = 74.5$, para a tensão média de cada uma das estruturas. Se μ_1 e μ_2 denotarem as tensões médias das estruturas, determine um intervalo de confiança de 90% para a diferença na tensão média $\mu_1 - \mu_2$.

24. A problema em estudo consiste na análise da quantidade de fio utilizado na instalação elétrica de diversas habitações de um determinado tipo. Os dados em consideração são os seguintes:

Classes (m)	Número de habitações
50 – 150	5
150 – 250	10
250 – 350	15
350 – 450	8
450 – 550	10

24.1 Calcule a média e a variância do comprimento do fio usado em cada habitação.

24.2 Estime, com base na amostra, a quantidade de média de fio, por habitação, com 95% de confiança.

24.3 Quantas habitações, no mínimo, deveriam ser estudadas para que o erro da estimativa da quantidade média de fio utilizado, seja inferior a 20m, com 95% de confiança?

25. Um determinado método de análise permite determinar o conteúdo de enxofre no petróleo bruto. Os ensaios efetuados em 10 e 8 amostras aleatórias de 1kg de petróleo bruto, provenientes de furos pertencentes respetivamente aos campos A e B, revelaram os seguintes resultados (em gramas):

Campo A	111	114	105	112	107	109	112	110	110	106
Campo B	109	103	101	105	106	108	110	104		

Construa um intervalo de confiança a 90% para a diferença entre os valores esperados da quantidade de enxofre por quilograma de petróleo proveniente de cada campo, considerando que populações são normais, com variâncias desconhecidas, mas iguais.

26. Uma companhia aérea pretende estimar o peso médio das bagagens dos seus passageiros, bem como a percentagem de faltas ao voo (de passageiros confirmados). Admite-se que o peso das bagagens apresenta um desvio padrão de 6kg.

    26.1 Dois aviões de 240 passageiros cada levam, respetivamente, 2940kg e 3010kg. Que estimativa pode ser feita para o peso médio das bagagens? Considere um grau de confiança de 95%.

    26.2 Para aqueles aviões com 420 passageiros confirmados, tendo comparecido apenas 368, estime a percentagem de faltas ao voo, quando confirmadas, com uma confiança de 95%.

    26.3 Quantos casos deveria incluir a amostra de modo que a estimativa da alínea anterior tivesse um erro de estimativa de 2%?

27. Para um estudo sobre a caracterização da altura da população portuguesa, foi recolhida uma amostra de 1860 pessoas, com as seguintes características:

	Amostra	Média	Desvio padrão
Masculino	853	168.46	7.617
Feminimo	1007	158.48	6.652

Supondo a normalidade das distribuições e assumindo que as variâncias populacionais são desconhecidas e diferentes, verifique se se pode considerar que as alturas médias dos homens e das mulheres são iguais, com 95% de confiança.

28. Pretende-se estimar o consumo médio de energia de um dado tipo de motor. Fizeram-se 400 ensaios em condições semelhantes, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Consumos (Watt/h)	$20-24$	$24-28$	$28-30$	$30-32$
Número de observações	50	100	200	50

28.1 Calcule um intervalo de confiança para o parâmetro em causa com um nível de confiança de 95%.

28.2 Desejando-se reduzir para metade a amplitude do intervalo de confiança calculado na alínea anterior, quantos ensaios adicionais deveriam ser realizados supondo que, após a inclusão desses novos dados, o desvio padrão da nova amostra baixa em 25% em relação ao da amostra de 400 observações.

29. Numa certa cidade, recolheu-se uma amostra aleatória de 150 jovens (com idade inferior a 23 anos), tendo 54 afirmado que viam o jornal da noite todos os dias.

29.1 Com 90% de confiança, será que se pode considerar que a proporção de jovens, daquela cidade, que veem o jornal da noite todos os dias é de 40%?

29.2 Mantendo-se os outros dados inalterados, qual deveria ser a dimensão da amostra, de forma a que o erro de estimativa do intervalo de confiança não ultrapasse 5%?

29.3 Suponha que foram recolhidas amostras em duas cidades diferentes. Numa, das cidades, recolheu-se uma amostra aleatória de 150 jovens tendo 54 afirmado que viam o jornal da noite todos os dias e, na outra cidade, 80 dos 200 jovens selecionados aleatoriamente responderam afirmativamente, à mesma questão. Com 95% de confiança, será de admitir que a proporção de jovens que vê o jornal da noite todos os dias é igual nas duas cidades?

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

1.1 X = peso, em gramas, de uma caixa cheia com laranjas do pomar A, $X \sim N(\mu = 2500, \sigma^2 = 32.02^2)$; $P(X > 2490) = 0.623$; **1.2** X = peso, em gramas, da diferença entre o peso médio de 100 caixas cheia com laranjas do pomar A e o peso médio de 100 caixas cheia com laranjas do pomar B, $X \sim N(\mu = 200, \sigma^2 = 5.7^2)$; $P(X > 205) = 0.192$;
2.1 X = nota do exame final de uma unidade curricular, 12.5;
2.2 X = diferença entre a nota média de uma amostra de 30 estudantes e a nota média de uma amostra de 40 estudantes, $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.49^2)$; $P(|X| < 1) = 0.960$;
3.1 X = número de somas, em 60, de 50 parcelas com erro médio superior a 0.01, $X \sim Bi(n = 60, p = 0.806)$, $E(X) \approx 48$;
3.2 $n \approx 110$; **4.1** dez minutos; **4.2** X = diferença entre o tempo médio de fabrico de uma amostra de 100 peças e o tempo médio de fabrico de uma amostra de 50 peças,
$X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 0.5^2)$; $P(X > 0.25) = 0.3085$; **5.1** 5492500;
5.2 X = diferença entre o lucro médio da venda de 50 aspiradores do tipo A e o lucro médio da venda de 40 aspiradores do tipo B, $X \sim N(\mu = -334.18, \sigma^2 = 378.68^2)$; $P(X > 0) = 0.19$;
6.1 X = tempo, em minutos, que o operário demora em todo o processo de reparação de um motor, $X \sim N(\mu = 115, \sigma^2 = 15^2)$; $P(X < 90) = 0.0478$; **6.2** $\hat{P}$ = proporção de motores, em 50, que demoram mais de 90 min. a serem reparados,
$\hat{P} \sim N(\mu = 0.9522, \sigma^2 = 0.03^2)$; $P(\hat{P} > 0.95) = 0.5292$;
7.1 25%; **7.2** $\hat{P}$ = proporção de embalagens, em 50, que têm peso inferior a 245g, $\hat{P} \sim N(\mu = 0.25, \sigma^2 = 0.06^2)$;
$P(\hat{P} > 0.30) = 0.207$; **8.** $\hat{P}$ = proporção de estudantes, em 100, com pontuação superior a 50 pontos,
$\hat{P} \sim N(\mu = 0.474, \sigma^2 = 0.05^2)$; $P(\hat{P} > 0.50) = 0.304$;
9.1 $\overline{X}$ = duração média de 50 lâmpadas, em minutos;

$P(\overline{X} \leq 12) = 0.9214$; **9.2** $\hat{P}$ = proporção de lâmpadas, em 50, que duram mais que a duração média,
$\hat{P} \sim N(\mu = 0.3679, \sigma^2 = 0.07^2)$, $P(\hat{P} > 0.45) = 0.1143$;
10. $\hat{P}$ = diferença entre a proporção de clientes que optaram pela marca LC1 na loja ℓ_1 e a proporção de clientes que optaram pela marca LC1 na loja ℓ_2, $P(\hat{P} > 0) = 0.8845$;
11. $\hat{P}$ = diferença entre a proporção de residentes na perifiria e a proporção de residentes no centro da cidade,
$P(|\hat{P}| < 0.10) = 0.2612$; **12.1** IC a 90% para a média do posto B é $[1.691, 2.009]$ (aproximação à normal);
12.2 $n = 113$; **12.3** 87.88%; **13.1** IC a 96% para a média de estudo dos estudantes de mestrado é $[8.683, 11.117]$ (aproximação à normal); **13.2** $n = 14801$; **13.3** 13.41%; **14.1** IC a 96% para o número médio de alarmes é $[0.513, 0.887]$; **14.2** $n = 52$;
14.3 97.15%; **15.1** $n = 25$; **15.2** 86.40%; **16.1** $[16.428, 23.984]$;
16.2 $n = 42$; **17.1** IC a 95% para o peso médio do produto é $[10.350, 10.850]$; **17.2** 82.91%; **18**. IC a 94% para a proporção de homens que concordam com a Decreto-Lei é $[0.120, 0.180]$;
19.1 $\hat{P}$ = proporção de cidadãos a favor da medida camarária, $\hat{P} \sim N(\mu = 0.45, \sigma^2 = 0.04^2)$, $P(\hat{P} > 0.5) = 0.078$; **19.2** IC a 98% para a proporção de cidadãos contra a medida camarária é $[0.545, 0.705]$; **20**. IC a 95% para a proporção de dias com mais de dois acidentes diários é $[0.005, 0.155]$; **21**. IC a 95% para a diferença entre a proporção das pessoas que preferem A e a proporção de pessoas que preferem o produto B é $[-0.024, 0.124]$;
22.1 IC a 95% para a proporção de dias que choveu, havendo previsão de chuva é $[0.676, 0.797]$; **22.2** Aproximadamente 81%;
23. IC a 90% para $\mu_1 - \mu_2$ é $[12.821, 13.379]$; **24.1** $\overline{x} = 316.67$m, $s^2 = 16312.06\text{m}^2$; **24.2** IC a 95% para a quantidade média de fio elétrico é $[280.536, 352.798]$; **24.3** $n = 157$; **25**. IC a 90% para a diferença das médias de enxofre é $[1.384, 6.316]$; **26.1** IC a 95% para o peso médio de bagagem por passageiro é $[11.859, 12.933]$;
26.2 IC a 95% para a proporção de passageiros confirmados que

faltam ao voo é $[0.092, 0.155]$; **26.3** $n = 1042$; **27**. IC a 95% para a diferença das médias das alturas dos homens, μ_M e mulheres, μ_F, $\mu_M - \mu_F$ é $[9.324, 10.636]$; **28.1** IC a 95% para o consumo médio de energia é $[27.366, 27.884]$; **28.2** Devemos realizar mais 500 observações; **29.1** IC a 90% para a proporção de jovens é $[0.296, 0.424]$; **29.2** $n = 250$; **29.3** IC a 95% para a diferença entre a proporção dos jovens das duas cidades é $[-0.143, 0.063]$.