1. Verifique se são espaços vectoriais reais (No caso de não ser um espaço vectorial real indique pelo menos um axioma que não seja satisfeito);

   a) $\mathcal{E} = \mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f$ é contínua$\}$, com a adição usual de funções e a multiplicação usual de um escalar por uma função.

   b) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^+$, com as operações adição e multiplicação dadas por:

   $$\begin{array}{rc} \oplus : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) \to \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \end{array} \qquad \begin{array}{rc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,\mathbf{u}) \to \alpha \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}^\alpha \end{array}$$

   c) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, com a multiplicação usual e a adição definida por

   $$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1 + 2y_1, x_2 + y_2)$$

   d) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, com a adição vectorial usual e com a multiplicação definida por

   $$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha,(x,y)) & \mapsto & \alpha \otimes (x,y) = (\alpha x, 0) \end{array}$$

   e) $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$, com a multiplicação usual e a adição definida por

   $$(x_1,y_1,z_1) \oplus (x_2,y_2,z_2) = (x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2)$$

   f) $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2$, com a adição vectorial usual e com a multiplicação definida por

   $$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2 \\ & \left(\alpha, \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right) & \mapsto & \alpha \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & y \\ z & \alpha t \end{bmatrix} \end{array}$$

   g) $\mathcal{E} = \overline{\mathcal{M}}_2 = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_2 \,:\, \det(\mathbf{X}) \neq 0\}$, com o produto usual e a adição

   $$\begin{array}{rccc} \oplus : & \overline{\mathcal{M}}_2 \times \overline{\mathcal{M}}_2 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_2 \\ & (\mathbf{X},\mathbf{Y}) & \mapsto & \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = \mathbf{XY} \end{array}$$

   h) $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ com a adição usual (de complexos) e a multiplicação usual

   $$\begin{array}{rccc} \bullet : & \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\alpha, a+ib) & \mapsto & \alpha \bullet (a+ib) = (\alpha a) + i(\alpha b) \end{array}$$

2. Diga quais dos subconjuntos dos espaços vectoriais indicados são subespaços vectoriais.

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 2y\}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 2y + 1\}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$.

   c) $\{(0,0,0),\; (0,1,0),\; (0,-1,0)\}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

   d) $\{(0,0,0)\}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

   e) $\{(a,0,0),\; a \in \mathbb{R}\}$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$.

jem@isep.ipp.pt

f) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3[x] : \; a_0 = a_2 - a_3 = 0\}$ de $\mathcal{E} = P_3[x]$.

3. Considere o e.v.r. $\mathcal{M}_2$ (operações usuais). Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_2$ são subespaços.

   a) $U = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \det(\mathbf{X}) = 0\}$.

   b) $U' = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \det(\mathbf{X}) \neq 0\}$.

   c) $S_A = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \mathbf{X}$ permuta com $\mathbf{A}\}$, onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   d) $S_Y = \{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \mathbf{X}$ permuta com $\mathbf{A}\}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz qualquer previamente escolhida em $\mathcal{M}_2$.

   e) $S = \left\{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \mathbf{X} = \mathbf{X}^\mathbf{T}\right\}$. (conjunto das matrizes simétricas)

   f) $S' = \left\{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \; : \; \mathbf{X} = -\mathbf{X}^\mathbf{T}\right\}$. (conjunto das matrizes anti simétricas)

4. Indique quais das seguintes listas geram $\mathbb{R}^3$.

   a) $\mathcal{L}_1 = ((1,0,0)\,,\,(0,-1,0)\,,\,(0,0,2))$.

   b) $\mathcal{L}_2 = ((1,0,2)\,,\,(1,-1,0)\,,\,(0,1,2))$.

   c) $\mathcal{L}_3 = ((1,1,2)\,,\,(1,-1,2)\,,\,(1,3,2))$.

   d) $\mathcal{L}_4 = ((1,1,0)\,,\,(1,-1,3))$.

   e) $\mathcal{L}_5 = ((1,1,2)\,,\,(2,-1,0)\,,\,(0,0,1)\,,\,(1,0,1))$.

   f) $\mathcal{L}_6 = ((1,1,2)\,,\,(2,-1,0)\,,\,(3,0,2)\,,\,(0,3,4))$.

5. Considere as seguinte listas de vectores de $\mathbb{R}^4$:

   $\mathcal{L}_1 = ((1,1,0,1)\,,\,(-1,-1,0,-1))$ $\quad$ $\mathcal{L}_2 = ((1,1,0,1)\,,\,(-1,-1,0,1))$

   $\mathcal{L}_3 = ((1,1,0,1)\,,\,(-1,-1,0,1)\,,\,(-2,-2,0,0))$ $\quad$ $\mathcal{L}_4 = ((1,1,0,1)\,,\,(-1,-1,0,1)\,,\,(-2,-2,1,0))$

   $\mathcal{L}_5 = ((1,1,0,1)\,,\,(-1,-1,0,1)\,,\,(-2,-2,1,0)\,,\,(0,0,0,4))$

   a) Averigúe se alguma lista gera $\mathbb{R}^4$.

   b) Verifique se:

   (i) $\overline{\mathcal{L}_1} \prec \overline{\mathcal{L}_2}$. **(ii)** $\overline{\mathcal{L}_2} \prec \overline{\mathcal{L}_1}$. **(iii)** $\overline{\mathcal{L}_1} \prec \overline{\mathcal{L}_3}$.

   (iv) $\overline{\mathcal{L}_2} \prec \overline{\mathcal{L}_3}$. **(v)** $\overline{\mathcal{L}_3} \prec \overline{\mathcal{L}_4}$. **(vi)** $\overline{\mathcal{L}_5} \prec \overline{\mathcal{L}_4}$.

   c) Encontre o subconjunto $S = \overline{\mathcal{L}_1} \cap \overline{\mathcal{L}_3} \cap \overline{\mathcal{L}_4}$. S é subespaço de $\mathbb{R}^4$?

6. a) Quando é que uma lista constituída por apenas um vector é L.I.?

   b) Quando é que uma lista constituída por dois vectores é L.I.?

7. Mostre que se uma lista $\mathcal{L} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é constituida por vectores L.I. então a lista $\mathcal{L}' = (\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$ também é constituída por vectores L.I.

8. Quais das seguintes listas, de vectores em $P_3[x]$, são constituídas por vectores L.I.?

   $\mathcal{L}_1 = \left(9x^2 + x - 3\,,\, 2x^2 - x + 3\,,\, -5x^2 + x + 1\right)$ $\quad$ $\mathcal{L}_2 = \left(x^2, -x^2 + 1\right)$

   $\mathcal{L}_3 = \left(7x^2 + x + 2\,,\, 2x^2 - x\,,\, 3x^2 + x\right)$ $\quad$ $\mathcal{L}_4 = \left(7x^2 + x + 2\,,\, 2x^2 - x\,,\, 9x^2 + 2\right)$.

9. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vectores linearmente independente de um e.v.r. $\mathcal{E}$. Determine para que valores de $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ os vectores $\alpha\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} - \mathbf{w}$ são linearmente dependentes.

jem@isep.ipp.pt

10. Considere os vectores $\mathbf{u}_1 = (1,1,a)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,b)$ de $\mathbb{R}^3$.

    a) Determine os valores de a e b de forma que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ seja uma base de $\mathbf{R}^3$.

    b) Considere $a = 0$ e $b = 1$. Exprima o vector $(1,2,0)$ na base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

11. Mostre que
$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 \,:\, a + 2b - 2d = 0 \right\}$$
é um subespaço de $\mathcal{M}_2$ e encontre uma base de $\mathcal{F}$.

12. Considere a lista $\mathcal{L} = (x-1\,,\,(x-1)^2)$.

    a) Encontre $\overline{\mathcal{L}}$. A lista $\mathcal{L}$ gera $P_2[x]$?

    b) Mostre que se $p(x) \in \overline{\mathcal{L}}$ então 1 é necessariamente uma raiz de $p(x)$.

    c) Mostre que se $p(x) = ax^2 + bx + c \in \overline{\mathcal{L}}$, com $a \neq 0$, então as raízes de $p(x)$ são 1 e $-\frac{a+b}{a}$

13. Encontre uma base para cada um dos seguintes subespaços

$$\mathcal{F}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = 2y\right\} \qquad \mathcal{F}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\right\}$$
$$\mathcal{F}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 2y + z\right\} \qquad \mathcal{F}_4 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = y - 3z \wedge z = 2t\right\}$$
$$\mathcal{F}_5 = \left\{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \,:\, \mathbf{X} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \quad \mathcal{F}_6 = \left\{\mathbf{X} \in \mathcal{M}_2 \,:\, \mathbf{X} \text{ comuta com } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

14. Considere os subespaços $\overline{\mathcal{L}_1}$ e $\overline{\mathcal{L}_2}$ de $\mathbb{R}^4$, onde
$$\mathcal{L}_1 = ((1,1,0,0), (-1,0,0,1)) \text{ e } \mathcal{L}_2 = ((1,1,0,0), (-1,0,3,1), (-1,2,3,1), (-1,3,6,2)).$$
Encontre uma base de $\overline{\mathcal{L}_1} \cap \overline{\mathcal{L}_2}$.

15. Considere o e.v.r. $\mathbb{R}^4$ e a lista $\mathcal{L} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, onde
$$\mathbf{u} = (2,1,0,0),\ \ \mathbf{v} = (0,4,3,1),\ \ \text{e}\, \mathbf{w} = (1,a,2,0),\ \ \text{onde } a \in \mathbb{R}.$$

    a) Escreva, se possível o vector $\mathbf{s} = (2,9,6,2)$ como combinação linear dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

    b) Determine para que valores de a o vector $\mathbf{s}' = (-4,0,-5,1)$ é combinação linear de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

    c) Faça $a = -1$. Verifique se os vectores da lista $\mathcal{L}$ são L.I.. e determine $\dim\left(\overline{\mathcal{L}}\right)$.

16. (exame)

    O conjunto
$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x - 4z - 2t = 0 \wedge x + 2y - t = 0\right\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$. Encontre uma base de $\mathcal{F}$.

17. (exame)

    Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido com a adição usual, $\oplus$, e com o produto de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por um par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definido por
$$\lambda \odot (x,y) = (\lambda y, \lambda x).$$

    a) Verifique se $(\alpha + \beta) \odot (x,y) = (\alpha \odot (x,y)) \oplus (\beta \odot (x,y))$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    b) Averigúe se $\mathbb{R}^2$ (munido com as operações acima referidas) é um espaço vectorial. **Justifique a sua resposta.**

18. (exame)

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ e o conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y + 3z + 4t = 0\right\}.$$

a) Mostre que $\mathcal{F} \prec \mathbb{R}^4$.

b) Encontre uma base de $\mathcal{F}$.

19. (exame)

Considere o espaço vectorial das matrizes $\mathcal{M}_{2,2}$ e a lista de vetores $\mathcal{L} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$.

a) **Justifique a seguinte afirmação.** “A lista $\mathcal{L}$ não é uma base de $\mathcal{M}_{2,2}$.”

b) Verifique se toda a matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2,2}$, tal que $\mathbf{A}$ é simétrica, pertence a $\overline{\mathcal{L}}$.

c) Encontre uma base do subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{2,2}$ constituído pelas matrizes simétricas.

Soluções

1.
As alíneas a) e h) são e.v.r. As restantes alíneas não são e.v.r.
2.
Os conjuntos indicados nas alíneas a), d), e) e f) são subespaços. Os conjuntos indicados nas restantes alíneas não são subespaços.
3.
Os conjuntos indicados nas alíneas a) e b) não são subespaços. Os conjuntos indicados nas restantes alíneas são subespaços.
4.
Tem-se $\overline{\mathcal{L}_1} = \mathbb{R}^3$ e $\overline{\mathcal{L}_5} = \mathbb{R}^3$. As restantes listas não geram $\mathbb{R}^3$.
5.

6.

7.

8.
São L.I. as listas: $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$. A lista $\mathcal{L}_4$ é L.D.
9.
$\alpha = -2$, $\beta = -1$.
10.

a) $b + 1 \neq a$.

b) $(1, 2, 0) = \frac{3}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_3$.

11.

12.

a) $\overline{\mathcal{L}} = \left\{ax^2 + bx + c \ : \ a + b + c = 0\right\}$, Não gera.

13.

Por exemplo: $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1} = ((2, 1))$, $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2} = ((-1, 1, 0),\ (-1, 0, 1))$, $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_3} = ((2, 1, 0),\ (1, 0, 1))$, $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_4} = ((1, 1, 0, 0),\ (-6, 0, 2, 1))$
$\mathcal{B}_{\mathcal{F}_5} = (\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right])$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_6} = (\left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right])$
14.
Por exemplo, $\mathcal{B} = ((1, 1, 0, 0))$.

15.

16.

Por exemplo, $\mathcal{B} = \big((-4, -2, 1, 0),\ (2, \frac{1}{2}, 0, 1)\big)$.
17.

18.

b) Por exemplo, $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0, 0),\ (-3, 0, 1, 0),\ (-4, 0, 0, 1))$.

19.

c) Por exemplo, $\mathcal{B} = (\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right])$.

jem@isep.ipp.pt