

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Departamento de Engenharia Informática



Princípios de Computação

ALGEBRA DE BOOLE

WX \ YZ		YZ			
		00	01	11	10
W \ X	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	1
	11	1	1	0	1
	10	1	1	0	0

Licenciatura Em Engenharia Informática

Ano Lectivo 2006/2007

Álgebra de Boole

B1. GENERALIDADES

A álgebra de Boole deve o seu nome ao matemático inglês George Boole (1815-64), pela sua contribuição para a lógica simbólica. Boole defendeu que a lógica deveria ser aliada à matemática e não à filosofia, como até então era habitual.

Boole desenvolveu várias regras e propriedades da lógica simbólica como a propriedade associativa, propriedade distributiva, propriedade associativa.

Os primeiros computadores fabricados, como o ENIAC, trabalhavam na base decimal. No entanto, a utilização de circuitos electrónicos que operassem com 10 diferentes níveis de tensão (para possibilitar a detecção das 10 diferentes grandezas representadas no sistema decimal), acarretava uma grande complexidade ao projecto e construção dos computadores, tendo por consequência um custo muito elevado. Surgiu então a ideia de aplicar a Álgebra de Boole, simplificando extremamente o projecto e construção dos computadores.

Como já foi referido, Boole desenvolveu a sua álgebra a partir de duas grandezas: falso e verdadeiro. Também os computadores digitais fazem uso de sinais binários (0 e 1). Estes sinais pretendem representar os níveis de tensão, isto é, o 0 significa que não há passagem de corrente eléctrica e 1 significa passagem de corrente eléctrica. Daqui, podemos fazer a analogia entre a linguagem dos computadores e a álgebra de boole da seguinte forma:

- 0/Falso - Não passa corrente eléctrica,
- 1/Verdadeiro - Passa corrente eléctrica

Operações booleanas são operações realizadas sobre valores (operandos) binários. Ou seja, operandos que tomam apenas dois valores mutuamente complementares, por exemplo Verdadeiro/Falso, 0/1, Existente/Inexistente.

A Álgebra de Boole trabalha apenas com duas grandezas: falso e verdadeiro. Assim sendo, podemos definir:

- Variável Booleana, Lógica ou Binária como a variável que apenas pode assumir dois valores: sim/não, verdade/falso, 1/0.

- Proposição como todo o enunciado do qual se pode afirmar que é verdadeiro ou falso (ou sim ou não!).

Assim sendo:

- "Amanhã vai chover?" - **não constitui** uma proposição pois as respostas possíveis são, por exemplo: "Sim", "Não", "Talvez...", "Não sei..."

A = "Lisboa é a capital de Portugal"

B = "Bélgica é um país da América Latina"

- A e B são, neste contexto variáveis booleanas. Aqui, podemos associar a A o valor lógico verdade e a B o valor lógico falso e, como tal, são proposições.

- "Lisboa é a capital de Portugal e Bélgica não é um país da América Latina" é também uma proposição à qual podemos associar o valor lógico verdade.

B2. OPERAÇÕES BOOLEANAS

Existem 4 operações lógicas binárias simples através das quais se constroem sistemas lógicos complexos:

- AND (e);
- OR (ou);
- XOR (ou exclusivo);
- NOT (complemento).

AND (e)

A operação booleana AND (e) é representada pelos símbolos, . , * , \wedge e &&, e em terminologia informática pelo operador **AND**.

Tem 2 operandos e caracteriza-se pelas seguintes relações:

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Só se as duas condições (preposições) a e b forem simultaneamente 1 (verdadeiras) é que o resultado é 1 (verdadeiro).

- Sempre que um dos operandos tem valor 0 (falso), o resultado é 0 (falso), o que significa que o 0 (falso) é o elemento absorvente do AND;
- Sempre que um dos operadores tem valor 1 (verdadeiro), o resultado é igual ao outro operando, o que significa que o 1 (verdadeiro) é o elemento neutro do AND.

OR (ou)

A operação booleana OR (ou) é representada pelos símbolos $+$, \vee e \parallel , e em terminologia informática pelo operador **OR**.

Tem 2 operandos e caracteriza-se pelas seguintes relações:

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Basta que uma das (preposições) a ou b seja 1 (verdadeira) para que o resultado seja 1 (verdadeiro).

- Sempre que um dos operandos tem valor 1 (verdadeiro), o resultado é 1 (verdadeiro), o que significa que o 1 (verdadeiro) é o elemento absorvente do Ou;
- Sempre que um dos operadores tem valor 0 (falso), o resultado é igual ao operando, o que significa que o 0 (falso) é o elemento neutro do Ou.

XOR (Ou exclusivo)

A operação booleana XOR (Ou Exclusivo) é representada pelos símbolos $\dot{\vee}$ e em terminologia informática pelo operador **XOR**.

Tem 2 operandos e caracteriza-se pelas seguintes relações:

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

O resultado é 1 (verdadeiro) se apenas uma das preposições a ou b for 1 (verdadeira).

- Não existe elemento neutro nem absorvente na operação lógica **XOR**;

NOT (Complemento)

A operação booleana NOT é representada pelos símbolos \sim e $!$ (coloca-se antes do operando) ou $\bar{}$ (coloca-se sobre o operando), e em terminologia informática pelo operador **NOT**.

Tem 1 operando e caracteriza-se pelas seguintes relações:

A	NOT A
0	1
1	0

O resultado é o complemento do valor do operando.

- Não existe elemento neutro nem absorvente na operação lógica Not;
- not not a = a;
- Não confundir com a operação Neg (Negação). A Negação não é uma operação booleana mas realiza-se sobre número binários. Corresponde ao complemento para 2.

George Boole estabeleceu dois princípios fundamentais em que assenta a lógica booleana, e que são:

Princípio da não contradição: "Uma proposição não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa"

Princípio do terceiro excluído: "Uma proposição só pode tomar um dos dois valores possíveis - ou é verdadeira ou é falsa - não sendo possível terceira hipótese"

Assim como na matemática clássica, com os valores e variáveis numéricas, é possível definir operações e funções numéricas, também na lógica booleana são definidas operações lógicas e estabelecidas funções (expressões) booleanas, como iremos ver.

B3. AXIOMAS DA ÁLGEBRA DE BOOLE

Designados também por Axiomas de Huntington (1904)

1. O conjunto B contém pelo menos dois elementos a, b sendo que $a \neq b$

2. Oclusão (encerramento)

$$a.b \in B$$

$$a+b \in B$$

3. Propriedade comutativa

$$a+b = b+a$$

$$a.b = b.a$$

4. Identidade

$$a+0 = a$$

$$a.1 = a$$

5. Propriedade Distributiva

$$a+(b.c) = (a+b).(a+c)$$

$$a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$$

6. Propriedade Associativa

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

7. Complemento

$$a+\bar{a} = 1$$

$$a.\bar{a} = 0$$

B4. TEOREMAS DA ÁLGEBRA DE BOOLE**1. Elemento Neutro**

$$a+0 = a$$

$$a.1 = a$$

2. Elemento absorvente

$$a+1 = 1$$

$$a.0 = 0$$

3. Idempotência

$$a+a = a$$

$$a.a = a$$

4. Dupla negação

$$\overline{(\bar{a})} = a$$

5. Teoremas de Simplificação:

$$a.b+a.\bar{b} = a$$

$$a+a.b = a$$

$$(a+\bar{b}).b = a.b$$

$$(a+b).(a+\bar{b}) = a$$

$$a.(a+b) = a$$

$$(a.\bar{b})+b = a+b$$

6. Teorema de De Morgan

$$\overline{(a+b+c+\dots)} = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\dots$$

$$\overline{(a.b.c.\dots)} = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\dots$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

- **$a.b + a.\bar{b} = a$?**

$$a.(b + \bar{b}) = a \quad \text{Prop. distributiva}$$

$$a.(1) = a \quad \text{Teorema da complementaridade}$$

$$a = a \quad \text{Identidade}$$

- **$a + a.b = a$?**

$$a.1 + a.b = a \quad \text{Identidade}$$

$$a.(1+b) = a \quad \text{Prop. distributiva}$$

$$a.(1) = a \quad \text{Identidade}$$

$$a = a \quad \text{Identidade}$$