Licenciatura em Engenharia Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

Exame de Recurso 15 de julho de 2022

Aluno nº_______________ Nome____

- A duração da prova é de **2 horas** + 10 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva a prova em **6 grupos de folhas separadas**, como é indicado ao longo do enunciado.

1. a) (2 val.) Indique, justificando, o valor lógico das proposições:
   (i) $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a$ é divisor de $\left(3b+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$;
   (ii) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, (n-m)$ é par $\Rightarrow (n^2 - m^2)$ é par.

   b) (1 val.) Para as proposições da alínea anterior, apresente a sua negação sem o símbolo $\sim$.

2. (2 val.) Sejam $A \equiv [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ e $B \equiv [\sim p \wedge \ \sim (q \vee \sim p)]$ duas proposições compostas. Verifique se a proposição $A \Rightarrow B$ é uma contradição, uma tautologia, ou se é satisfazível.

   Use unicamente as propriedades das operações lógicas para simplificar as proposições e justifique a sua resposta indicando as propriedades usadas na simplificação.

*********** **Folha 2** ***********

3. Considere os conjuntos $A = \{1,3,4\}$, $B = \{2,3,4\}$, a relação R, de A para B, definida por $R = \{(x,y) : x \text{ divide } y\}$ e a relação S em A dada por xSy se e só se $3y - x$ é ímpar.

   a) (1 val.) Represente o grafo orientado da relação S e classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade, justificando devidamente a sua resposta.

   b) (1 val.) Determine o fecho transitivo de S.

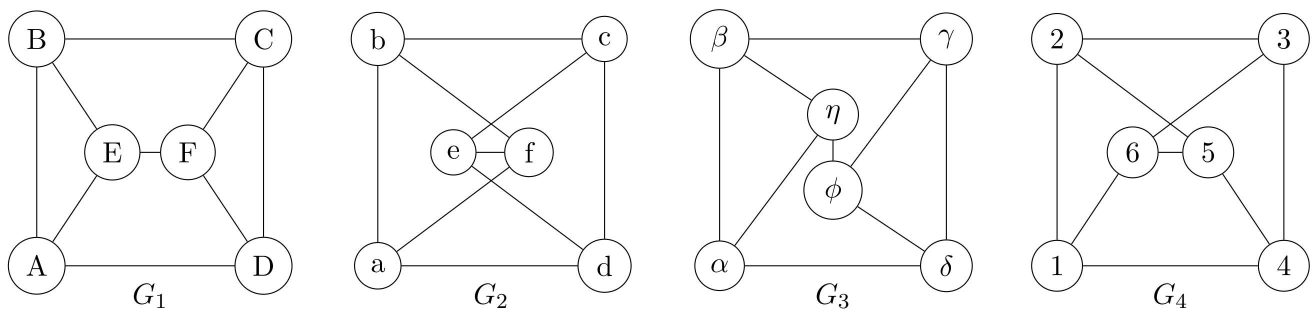
   c) (1 val.) Escreva a matriz M representativa da relação $R \circ S$.

4. (2 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} (4k+1) = 2n^2 + 3n.$$

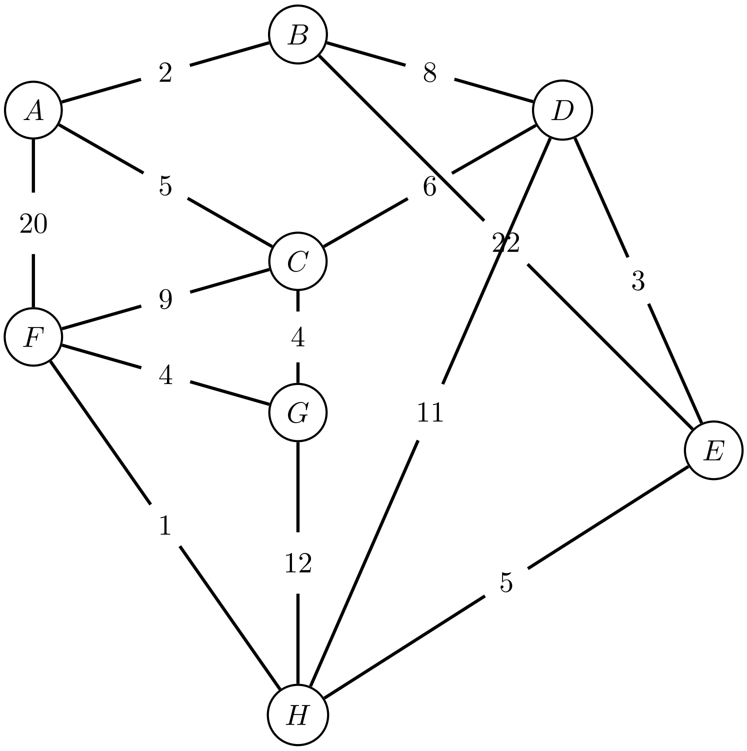
*********** **Folha 3** ***********

5. (2 val.) Considere os grafos do conjunto $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$. Sabendo que a relação de isomorfismo em G é uma relação de equivalência, escreva a partição de G das classes de equivalência da relação de isomorfismo, justificando convenientemente a sua resposta.



************* Folha 4 (tabela) *************

6. Uma rede rodoviária ligando 8 cidades, A, B, C, D, E, F, G e H, é constituída pelas estradas representadas no grafo seguinte (distâncias em centenas de Km).

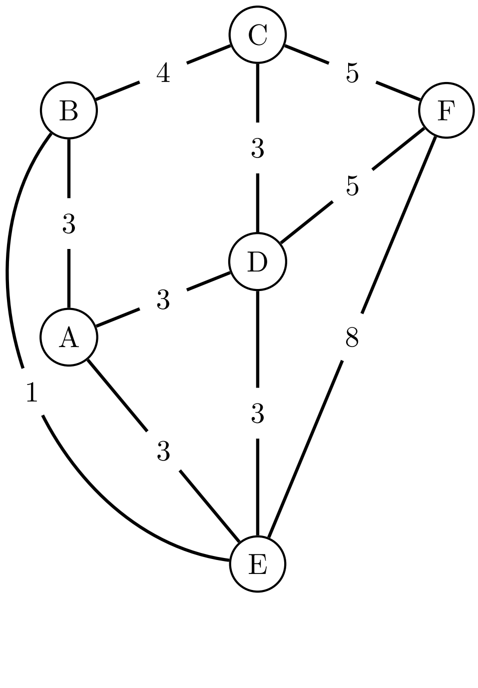


   a) (2,5 val.) Use o Algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho mais curto da cidade A para a cidade H, indicando a respetiva distância.
   Faça-o simulando o procedimento usando uma das folhas com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova.

   b) (1 val.) Será possível percorrer todas as estradas desta rede rodoviária, cada uma exatamente uma vez, iniciando e acabando o percurso numa mesma cidade? Justifique a sua resposta.

************* Folha 5 (tabela) *************

7. (2,5 val.) Determine uma árvore geradora de custo mínimo (desenhe-a) do grafo seguinte, e o respetivo custo, simulando o Algoritmo de Kruskal, por preenchimento da tabela correspondente (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).



*********** **Folha 6** ***********

8. Considere o algoritmo que se segue.

```
procedure Compare(A = [a(1), ..., a(n)]: array)
   for i := 1 to n:
       for j := i+1 to n:
         if A[i] = A[j]:
           print (A[i], i, j)
```

a) (1 val.) Determine uma fórmula, em função do tamanho da lista de input, n, para o número de comparações efetuadas na terceira linha do algoritmo, justificando devidamente a sua resposta.

b) (1 val.) Determine uma estimativa $\mathcal{O}$ para a complexidade temporal no pior caso do algoritmo, justificando a sua resposta.