Licenciatura em Engenharia Informática (LEI)

2024/2025

Análise Matemática (AMATA)

CAPÍTULO 4

Equações diferenciais ordinárias (EDO) de 1^a ordem.

EXERCÍCIOS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos(y)}$

   1.2 $y'\cos(x) + y\cos(x)\,\mathrm{tg}(x) = 0$

   1.3 $e^y y' - xe^{-x}(1 + e^y) = 0$

   1.4 $2y\,dx + \left(x - 2xy^2\right) dy = 0$

   1.5 $(x^3 + 1)(y + 2)dy + (x^2y^2 + x^2)dx = 0$

   1.6 $\left(xy^2 + x\right) x' + y(x + 8) = 0$, para $y(0) = 0$

   1.7 $e^x yy' = e^{x+2y}\mathrm{sen}^2(x)$,
   sabendo que a curva passa na origem das coordenadas.

   1.8 $\cos(x)\cos(y) = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)\,x'$, tal que $y(0) = \dfrac{\pi}{3}$.

2. Determine a curva $y = y(x)$ que verifica a condição
$$xy\ln\,y + \sqrt{1 + 4x^2}\,y' = 0$$
tal que $y(0) = e$.

3. Determine a solução particular da equação
$$\left(e^x + 2e^{y+x}\right)\,dy + 2e^{y+x}\,dx = -ye^x\,dx$$
tal que $y(1) = 0$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

4. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   4.1 $y' - 2xy = x$

   4.2 $y' + \dfrac{5}{x}y = -3x^2$

   4.3 $yx^3dx - x^2dy = e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

   4.4 $y' = 3x^2y + x^5 + x^8$

   4.5 $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$

   4.6 $\left(1 + y^2\right)dx + \left(2xy - y^3\right)dy = 0$

   4.7 $\dfrac{y'}{y} = \operatorname{sen}(x)\left(\dfrac{e^{\sec(x)}}{y} + \sec^2(x)\right)$

5. Considere a equação diferencial
   $\cos(x) + \left(y\operatorname{sen}(x) - e^{\operatorname{tg}(x)}\right)x' = 0$

   5.1 Prove que a equação diferencial pode tomar a forma
   $$y' + f(x)y = g(x).$$

   5.2 Encontre a solução geral da equação.

   5.3 Encontre a solução particular da equação que verifica $y(0) = 0$.

6. Considere a equação diferencial $1 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{x+1}}\right)x' = 0$

   6.1 Prove que a equação diferencial pode tomar a forma $y' + f(x)y = g(x)$.

   6.2 Encontre a solução geral da equação.

MISCELÂNEA DE EDO's

7. Resolva as equações diferenciais seguintes:

   7.1 $y^2 \ln(x)\, dx + 2xy(\ln^2(x) - 1)\, dy = 0$

   7.2 $(y' + y)x = 3x^2 e^{-x} + y$

   7.3 $xy + y'\sqrt{xy} - y'\sqrt{x}\, y = 0.$

8. Resolva a equação deferencial de 1^a ordem dada por $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{xx'}{y^2}$ que verifica $x(1) = 1$.

9. Encontre a curva que verifica as condições $xy' = y + x^2\text{sen}(x)$, $x > 0$ e $y(\pi) = 0$.

10. Determine a equação da curva que verifica a equação diferencial $(1 + e^x)yy' = e^x$, que passa no ponto $(0, 1)$.

11. Considere a equação diferencial definida por $y'\cos(x) - y = (1 + \text{sen}(x))\cos(x)$.

    11.1 Mostre que a equação anterior é linear.

    11.2 Resolva a equação.

12. Resolva as equações diferenciais seguintes:

    12.1 $\cos^2(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = 2x\, dx.$

    12.2 $(1 + \text{sen}(y))\cos(y)\, y' = \cos(y) - xy'.$

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS ($C \in \mathbb{R}$)

1.1 $\operatorname{sen}(y) + y^2 = 2x^3 + C$; **1.2** $y = C\cos(x)$;
1.3 $\ln(1+e^y) + (x+1)e^{-x} = C$; **1.4** $\ln|y| - y^2 = C - 2\ln|x|$;
1.5 $3\ln(y^2+1) + 12\operatorname{arctg}(y) + 2\ln(x^3+1) = C$;
1.6 $x - 8\ln|x+8| + \ln\left(\sqrt{y^2+1}\right) = -8\ln(8)$;
1.7 $(2y+1)e^{-2y} + 2x = \operatorname{sen}(2x) + 1$; **1.8** $2\cos(x)\operatorname{sen}(y) = \sqrt{3}$;
2. $\sqrt{1+4x^2} + 4\ln|\ln y| = 1$; **3.** $\ln(2e^y + y) + x = \ln(2) + 1$;
4.1 $y = e^{x^2}\left(C - \dfrac{e^{-x^2}}{2}\right)$; **4.2** $yx^5 = C - \dfrac{3x^8}{8}$;
4.3 $y = \left(\dfrac{1}{x} + C\right)e^{x^2/2}$; **4.4** $y = \left(-e^{-x^3}\left(\dfrac{x^6+3x^3+3}{3}\right) + C\right)e^{x^3}$;
4.5 $x = \left(y^2 + C\right)e^y$; **4.6** $x = \left(\dfrac{y^4}{4} + C\right)\left(1+y^2\right)^{-1}$;
4.7 $y = e^{\sec x}(C - \cos x)$; **5.1** $y' + \operatorname{tg}(x)\,y = \frac{e^{\operatorname{tg}(x)}}{\cos(x)}$;
5.2 $y = (e^{\operatorname{tg}(x)} + C)\cos(x)$; **5.3** $y = (e^{\operatorname{tg}(x)} - 1)\cos(x)$;
6.1 $y' + \frac{1}{\sqrt{x+1}}y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; **6.2** $y = 1 + Ce^{-2\sqrt{x+1}}$;
7.1 $y^2\sqrt{\ln^2(x) - 1} = C$; **7.2** $y = x(3x+C)e^{-x}$;
7.4 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{y} - y = C$; **8.** $\frac{y^3}{3} - \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{3} - \sqrt{2}$;
9. $y = -x(\cos(x) + 1)$;
10. $y^2 = 2\ln(e^x + 1) - 2\ln(2) + 1$;
11.2 $y = (\operatorname{sen}(x)+C)(\sec(x)+\operatorname{tg}(x))$; **12.1** $y = e^{-\operatorname{tg}(x^2+1)}(e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} + C)$; **12.2** $x = (\operatorname{sen}(y) + C)(\sec(y) + \operatorname{tg}(y))$.