Licenciatura em Engenharia Informática (LEI)

2024/2025

Análise Matemática (AMATA)

CAPÍTULO 3

Integral Definido.

EXERCÍCIOS

CÁLCULO DO INTEGRAL DEFINIDO

1. Calcule os seguintes integrais:

1.1 $\displaystyle\int_0^1 (1-3x)^2\,dx$ 1.2 $\displaystyle\int_{-2}^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

1.3 $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ 1.4 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}(x)\,dx$

1.5 $\displaystyle\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\,du$ 1.6 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(x)}}\,dx$

1.7 $\displaystyle\int_0^2 x\,e^{-x}\,dx$ 1.8 $\displaystyle\int_1^2 x^3\left(\ln(x)+\sqrt{x^3}\right)\,dx$

2. Calcule os seguintes integrais pelo método de integração por substituição:

2.1 $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx \quad (x = 4\operatorname{sen}(t))$

2.2 $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\,dx \quad (\sqrt{x-3} = t)$

2.3 $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}\,(\sqrt[3]{x}+3)}\,dx \quad (\sqrt[6]{x} = t)$

2.4 $\displaystyle\int_2^4 \frac{x+2}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad (t = \sqrt{x-1})$

3. Considere a função definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

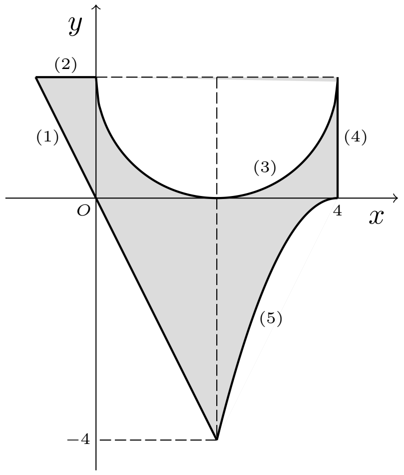
Calcule o valor de $a \in \mathbb{R}^-$ tal que $\displaystyle\int_a^3 f(x)\,dx = 25$.

Para o valor de a encontrado interprete e represente geometricamente o integral.

4. Resolva o seguinte integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{5}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$, fazendo a substituição $x = \operatorname{tg}(t)$.

APLICAÇÃO DO INTEGRAL DEFINIDO AO CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

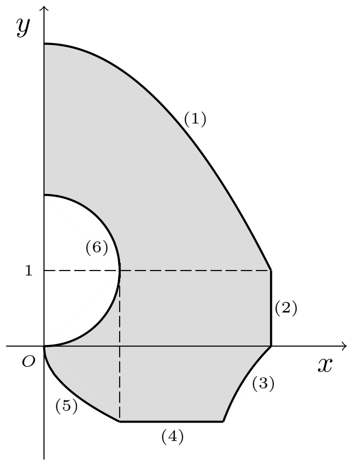
5. A região plana representada na figura é limitada por:



(1) $2x + y = 0$
(2) segmento de reta horizontal
(3) circunferência com $C(2,2)$ e $r = 2$
(4) segmento de reta vertical
(5) $y = -(x-4)^2$

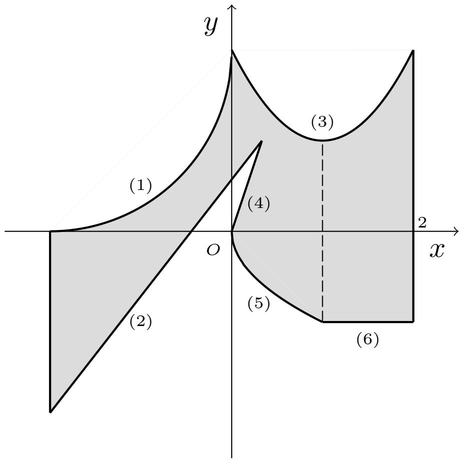
Escreva a expressão integral representativa da sua área.

6. Escreva a expressão integral representativa da área da região limitada pelas curvas assinaladas. (Apresente todos os cálculos justificativos).



(1) $3y = 12 - x^2$
(2) segmento paralelo a OY
(3) $x = 2 + e^y$
(4) $y = -1$
(5) $x = y^2$
(6) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

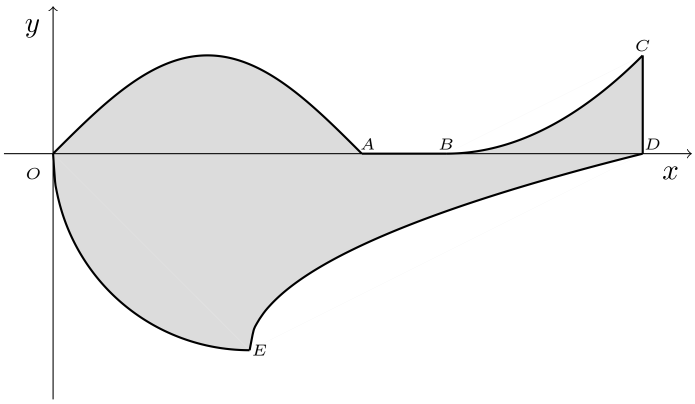
7. Considere a região plana representada na figura, onde:



(1) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$
(2) $y = \frac{9}{7}x + \frac{4}{7}$
(3) $y - 1 = (x-1)^2$
(4) $y = 3x$
(5) $x = y^2$
(6) $y = -1$

Escreva a expressão integral representativa da área da região assinalada.

8. Considere a região plana representada na figura, onde:



$\overset{\frown}{OA}$ é um arco da função $y = \operatorname{sen}(x)$

$\overset{\frown}{BC}$ é um arco da parábola $y = \dfrac{x^2}{4} - 2x + 4$

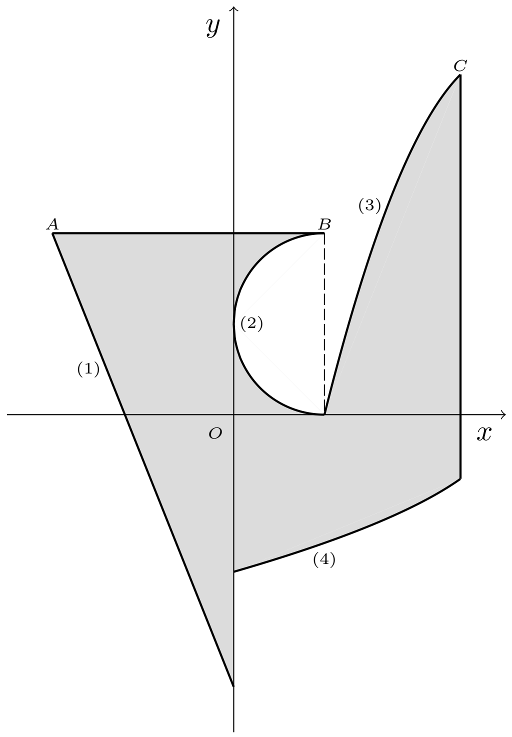
$\overset{\frown}{DE}$ é um arco da parábola $y = -2 + \sqrt{x-2}$

$\overset{\frown}{EO}$ é um quarto da circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 4$

Ponto: $D(6,0)$

Utilizando cálculo integral, escreva a expressão que permite calcular o valor da área da região, limitada pelas curvas e pelos segmentos $[AB]$ e $[CD]$ (vertical).

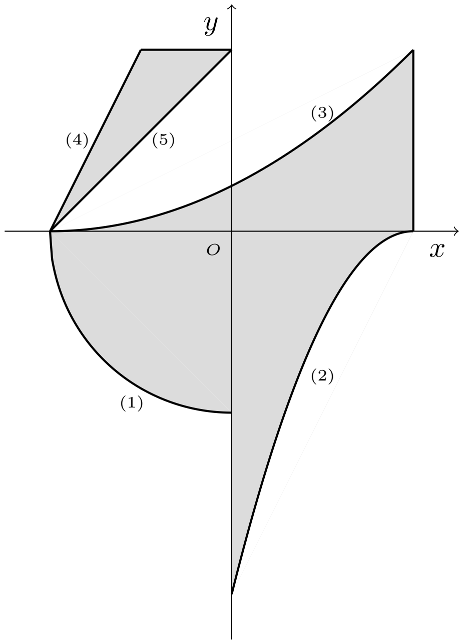
9. Considere a região plana representada na figura, onde:



(1) $5x + 2y + 6 = 0$
(2) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
(3) $y = 4 - (x-3)^2$
(4) $x = 3 - y^2$
$A(x_1, 2)$, $B(1, 2)$ e $C\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right)$

Utilizando cálculo integral, escreva a expressão que permite calcular o valor da área da região assinalada.

10. Considere a região abaixo limitada por ramos das curvas indicadas.



(1) $x^2 + y^2 = 4$

(2) $y = -(x-2)^2$

(3) $y = \dfrac{1}{8}(x+2)^2$

(4) $y = 2x + 4$

(5) $y = x + 2$

10.1 Escreva a expressão integral que permite calcular a área da região assinalada.

10.2 Aplicando cálculo integral, calcule a área da região do 4^oQ.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.1 1; **1.2** 0; **1.3** $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}$; **1.4** $\frac{1}{2}\ln(2)$; **1.5** $\ln(2)+\frac{3}{2}$; **1.6** $\frac{21}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{9}{8}$; **1.7** $1-3e^{-2}$; **1.8** $4\ln(2)+\frac{2^6\sqrt{2}}{11}-\frac{197}{176}$; **2.1** $\frac{4\pi}{3}$; **2.2** $\frac{144}{5}$; **2.3** $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$; **2.4** $2\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{3}$; **3.** $a=-4$; **4.** $5\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}\right)$;

5. $$\int_{-1}^{0} 2+2x\,dx+\int_{0}^{2} 2-\sqrt{4-(x-2)^2}+2x\,dx+ + \int_{2}^{4} 2-\sqrt{4-(x-2)^2}+(x-4)^2\,dx;$$

6. $$\int_{0}^{1} \frac{12-x^2}{3}-\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\,dx+\int_{0}^{1} 1-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}\,dx+ + \int_{1}^{2+1/e} \frac{12-x^2}{3}+1\,dx+\int_{2+1/e}^{3} \frac{12-x^2}{3}-\ln(x-2)\,dx;$$

7. $$\int_{-2}^{0} 2-\sqrt{4-(x+2)^2}-\frac{9}{7}x-\frac{4}{7}\,dx+ + \int_{0}^{1/3} (x-1)^2+1-\frac{9}{7}x-\frac{4}{7}\,dx+\int_{0}^{1/3} 3x+\sqrt{x}\,dx+ + \int_{1/3}^{1} (x-1)^2+1+\sqrt{x}\,dx+\int_{1}^{2} (x-1)^2+2\,dx;$$

8. $$\int_{0}^{2} \operatorname{sen} x+\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx+\int_{2}^{\pi} \operatorname{sen} x+2-\sqrt{x-2}\,dx+ + \int_{\pi}^{4} 2-\sqrt{x-2}\,dx+\int_{4}^{6} \frac{x^2}{4}-2x+6-\sqrt{x-2}\,dx;$$

9. $$\int_{-2}^{0} 5+\frac{5x}{2}\,dx+\int_{0}^{1} 2-\left(1+\sqrt{1-(x-1)^2}\right)\,dx+ + \int_{0}^{1} 1-\sqrt{1-(x-1)^2}+\sqrt{3-x}\,dx+ + \int_{1}^{5/2} 4-(x-3)^2+\sqrt{3-x}\,dx;$$

10.1 $$\int_{-2}^{-1} x+2\,dx+\int_{-1}^{0} (-x)\,dx+\int_{-2}^{0} \frac{1}{8}(x+2)^2+\sqrt{4-x^2}\,dx+$$

$+ \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{8}(x+2)^2 + (x-2)^2\,dx$; **10.2** $\frac{8}{3}$u.a..