

Aluno nº _____ Nome _____

- A duração da prova é de **2 horas** + 15 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva a prova em **4 grupos de folhas separadas**, como é indicado ao longo do enunciado.

1. Definem-se os seguintes predicados:

- $P(x)$: x é primo;
- $Q(x, y)$: $x = y^2$;
- $R(x, y)$: $x = y$.

a) (2 val.) Indique, justificando, o valor lógico das proposições:

- (i) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, Q(x, y) \vee P(x)$;
- (ii) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, P(x) \wedge P(y) \wedge \sim R(x, y)$.

b) (1 val.) Para as proposições da alínea anterior, apresente a sua negação sem o símbolo \sim .

2. (2 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para simplificar a proposição

$$[(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q \wedge \sim r \wedge \sim (p \wedge q))] \Rightarrow p$$

e justifique a sua resposta indicando todas as propriedades usadas na simplificação.

***** Folha 2 *****

3. Considere os conjuntos $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, a relação R , de A para B , definida por $R = \{(x, y) : x \text{ divide } y\}$ e a relação S em B dada por xSy se e só se $2y - x$ é ímpar.

- a) (1 val.) Represente o grafo orientado da relação S e classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade, justificando devidamente a sua resposta.
- b) (1 val.) Determine o fecho simétrico de S .
- c) (1 val.) Escreva a matriz M representativa da relação $S \circ R$.

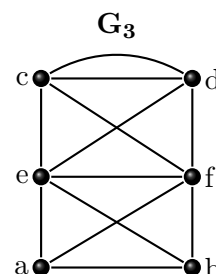
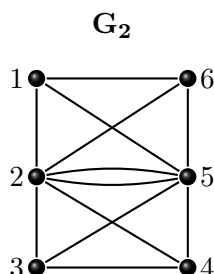
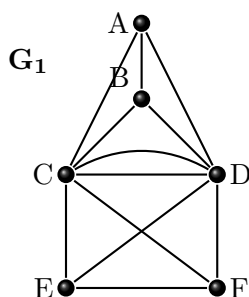
4. (2 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

***** Folha 3 *****

5. Considere os grafos não orientados do conjunto $G = \{G_1, G_2, G_3\}$, representados na figura seguinte.

- a) (1 val.) Verifique, sem ter de desenhar, se é possível reproduzir integralmente o grafo G_1 , sem levantar a caneta/lápis do papel, nem desenhar duas vezes a mesma aresta. Traduza o problema proposto, bem como a conclusão obtida, como um problema de Teoria de Grafos.
- b) (2 val.) Sabendo que a relação de isomorfismo em G é uma relação de equivalência, escreva a partição de G das classes de equivalência da relação de isomorfismo, justificando convenientemente a sua resposta.



6. Considere os três algoritmos que se seguem.

```

procedure Algoritmo1( $n$ : positive integer)
   $s := 0$ 
  for  $i := 1$  to  $n$ :
    for  $j := 1$  to  $n$ :
       $s := s + i + j$ 
  return  $s$ 

procedure Algoritmo2( $n$ : positive integer)
   $s := 0$ 
  for  $i := 1$  to  $n^2$ :
     $s := s + 1$ 
  return  $s$ 

```

```

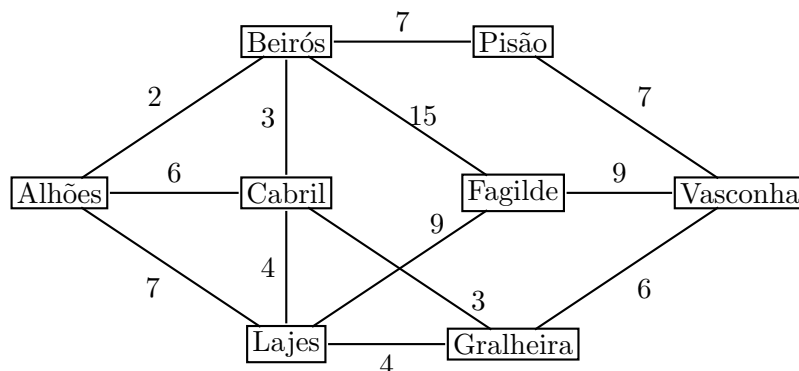
procedure Algoritmo3( $n$ : positive integer)
   $s := 1$ 
  for  $i := 1$  to  $n^2$ :
    for  $j := 1$  to  $i$ :
       $s := s * i$ 
  for  $k := 1$  to 100:
     $s := s + k$ 
  return  $s$ 

```

- (1 val.) Calcule, em função de n , o valor s que cada algoritmo retorna.
- (1 val.) Quantas adições (excluindo incrementações de variáveis iterativas) são efetuadas em cada algoritmo?
- (1 val.) Indique, justificando, uma estimativa O para o tempo de execução de cada um dos algoritmos em função do valor do input.

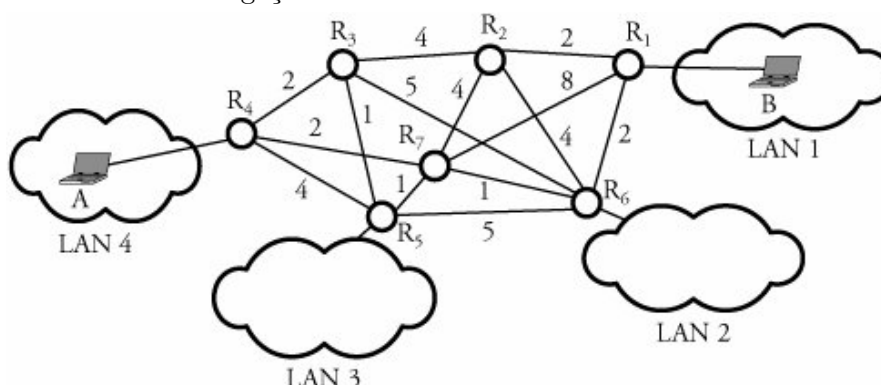
***** Folha 4 (tabelas) *****

7. (2 val.) O grafo seguinte apresenta o mapa de estradas entre algumas aldeias do distrito de Viseu, não pavimentadas, onde as etiquetas das arestas indicam os comprimentos das estradas entre duas aldeias. Quais deverão ser as estradas a pavimentar de modo a que exista um caminho pavimentado entre quaisquer duas aldeias e que o comprimento de estrada a pavimentar seja mínimo?



Resolva o problema aplicando um algoritmo estudado na U.C.. Complete a tabela da folha disponibilizada no Moodle e apresente o resultado (estradas e comprimento total a pavimentar) no final.

8. (2 val.) A rede apresentada na figura seguinte é uma WAN que consiste em sete routers R_1 a R_7 que conectam quatro LAN. A carga (nível de utilização e possível estado de congestionamento) de cada ligação é estimada no valor indicado nessa ligação.



Encontre o caminho de menor custo/carga, e o seu custo, entre os routers R_4 e R_1 , que conectam os utilizadores A e B , simulando um algoritmo estudado na U.C. (fuse uma tabela disponibilizada no Moodle).