

1) Escreva as matrizes definidas por:

(a)  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$  com  $a_{ij} = 2i - 3j$

(b)  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$  com  $b_{ij} = \frac{1}{i+j}$

(c)  $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$  com  $c_{ij} = 5 - i^j$

(d)  $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$  com  $d_{ij} = \sqrt{ij}$

(e)  $\mathbf{E} = [e_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ j=1}}$  com  $e_{ij} = (-2)^i(j - 3)$

(f)  $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$  com  $f_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ i - j & \text{se } i \neq j \end{cases}$

2) Considerando as matrizes do exercício anterior, caso seja possível, efetue as seguintes operações de matrizes. Justifique a impossibilidade.

(a)  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$

(b)  $\mathbf{C} - 2\mathbf{F}$

(c)  $\mathbf{A}^T \mathbf{D}$

(d)  $\mathbf{CA}$

(e)  $\mathbf{CD} + \mathbf{A}$

3) Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz quadrada de ordem 3 cujos elementos  $a_{ij}$  são obtidos através da relação  $a_{ij} = i^2 - j$ . O valor numérico resultante do produto dos elementos da diagonal secundária da matriz  $\mathbf{A}$  é:

a) 0

b) 16

c) -32

d) 32

4) Se  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$  com  $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ i - j & \text{se } i \neq j \end{cases}$  então:

a)  $\mathbf{B}$  é simétrica

b)  $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = \mathbf{I}_4$

c)  $\mathbf{B}$  é antissimétrica

d)  $\mathbf{B} - \mathbf{B}^T = \mathbf{0}_4$

5) A matriz  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4+a & a+b \\ 2(a-1)-b & b \end{bmatrix}$  é uma matriz diagonal se:

a)  $a = b = \frac{2}{3}$

b)  $a = b = -\frac{2}{3}$

c)  $a = \frac{2}{3}$  e  $b = -\frac{2}{3}$

d)  $a = -\frac{2}{3}$  e  $b = \frac{2}{3}$

6) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule se possível as seguintes matrizes:

- a)  $\mathbf{A}\mathbf{B}$       b)  $\mathbf{B}\mathbf{A}$       c)  $\mathbf{A}\mathbf{B}^T$       d)  $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$       e)  $\mathbf{B}\mathbf{I}_2$   
f)  $\mathbf{C} + 2\mathbf{D}^T$       g)  $\mathbf{B}(\mathbf{C} + \mathbf{F})$       h)  $(\mathbf{C} + \mathbf{F})\mathbf{B}$       i)  $(\mathbf{C} + \mathbf{F})\mathbf{B}^T$       j)  $\mathbf{I}_2(\mathbf{B} - 3\mathbf{E})$   
k)  $4\mathbf{A}^T + \mathbf{D}$       l)  $\mathbf{C}\mathbf{A}^T$       m)  $(\mathbf{C}\mathbf{A})^T$       n)  $(\mathbf{C} - \mathbf{F})^2$       o)  $(\mathbf{B}\mathbf{E})^2$   
p)  $(\mathbf{E}\mathbf{B})^2$       q)  $\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{D}$       r)  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$       s)  $\mathbf{E}\mathbf{B} + \mathbf{C}$       t)  $(\mathbf{C}(\mathbf{D} + \mathbf{A}^T))^T\mathbf{E}$

7) Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ . Em que condições se verifica a relação,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$$

8) Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$  simétricas. Em que condições se verifica a propriedade, “a matriz  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  é simétrica”.

9) Resolva as seguintes equações matriciais em ordem à matriz  $\mathbf{X}$ .

- a)  $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ , onde  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  é invertível e  $\mathbf{X}$  permuta com  $\mathbf{A}$ .  
b)  $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ , onde  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  é invertível e  $\mathbf{X}$  permuta com  $\mathbf{B}$ .  
c)  $(\mathbf{A}^T\mathbf{X})^T - \mathbf{I}^5 = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{A}$  é invertível.  
d)  $((\mathbf{A}^T\mathbf{X})\mathbf{B})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ , onde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  são invertíveis e  $\mathbf{A}^{-1}$  é simétrica.  
e)  $(\mathbf{B}^T\mathbf{X}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{C} + (\mathbf{C}^T\mathbf{B}^{-1})^T = \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{C}$  é invertível.  
f)  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{X})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$  onde as matrizes envolvidas são invertíveis.  
g)  $[\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{X})]^T = \mathbf{I}$ , onde as matrizes envolvidas são invertíveis.

10) Determine o conjunto formado pelas matrizes que comutam com a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

11) Considere a matriz  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- a) Determine a matriz  $\mathbf{A}$  que satisfaz a relação  $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ .  
b) Sabendo que  $\mathbf{B}^{20} = \begin{bmatrix} 1 & -349525 \\ 0 & 1048576 \end{bmatrix}$ , determine  $\mathbf{B}^{19}$ .

12) Considere a matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

a) Mostre que  $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Encontre a matriz inversa,  $\mathbf{A}^{-1}$ .

c) Mostre que  $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

13) Considere as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \end{bmatrix}$$

Para cada matriz acima referida,

a) Encontre uma matriz equivalente em forma de escada por linhas,  $E(*)$ .

b) Calcule a característica.

14) Determine, se possível duas matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{A} \neq -\mathbf{B}$ ) invertíveis tais que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  não é invertível.

15) Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$  invertível.

a) Mostra que a matriz  $\alpha \mathbf{A}$  é invertível.

b) Determine  $(\alpha \mathbf{A})^{-1}$ .

16) Considere a matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Determine a matriz  $\mathbf{X}$  que satisfaz a equação

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{X}^{-1}]^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}.$$

## Soluções

1.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (c) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & 3 \end{bmatrix} \quad (e) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \\ -32 \end{bmatrix} \quad (f) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.

(a) Não é possível efetuar a operação

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3} & 2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{6} & 9 - \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ -4 - 2\sqrt{2} & -4(\sqrt{2} + 1) & -4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 12 & -24 \\ -11 & -14 \end{bmatrix}$$

(e) Não é possível efetuar a operação

3. c) 4.c) 5.c)

6.

Não é possível efectuar as operações indicadas nas alíneas: **a)**, **b)**, **e)**, **f)**, **h)**, **j)** e **m)**. As restantes alíneas são possíveis e tem-se:

$$\begin{array}{lll} c) \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} & d) \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} & g) \begin{bmatrix} -4 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ i) \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 9 & 8 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} & k) \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & l) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ n) \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} & o) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} & p) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ -4 & 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \\ q) \begin{bmatrix} -9 \\ -11 \end{bmatrix} & r) \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} & s) \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ t) \begin{bmatrix} 5 & 10 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

7. e 8.

Quando **A** e **B** forem permutáveis.

9.

$$a) \mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}.$$

$$b) \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}.$$

$$c) \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T)^{-1}.$$

d)  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{-1}$ .

e)  $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{B}^{-1})^T$ .

f)  $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{B}$ .

g)  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}$ .

10.  $\left\{ \begin{bmatrix} t-z & -2z \\ z & t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2 : z, t \in \mathbb{R} \right\}$ .

11. a)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ .      b)  $\mathbf{B}^{19} = \begin{bmatrix} -1 & -174763 \\ 0 & 524288 \end{bmatrix}$ .

12. b)  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

13.

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{E}(\mathbf{B}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{E}(\mathbf{C}) &= \mathbf{C} \\ \mathbf{E}(\mathbf{D}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{E}(\mathbf{E}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{E}(\mathbf{F}) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 24 & 1 \\ 0 & 0 & 24 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)  $r(\mathbf{A}) = 3$ .  $r(\mathbf{B}) = 2$ .  $r(\mathbf{C}) = 3$ .  $r(\mathbf{D}) = 3$ .  $r(\mathbf{E}) = 3$ .  $r(\mathbf{F}) = 2$ .

14.

Por exemplo,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

15.

b)  $(\alpha \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}^{-1}$ .

16.

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .