

Aluno nº _____ Nome _____

- A duração da prova é de **2 horas** + 30 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva a prova em **9 grupos de folhas separadas**, como é indicado ao longo do enunciado.
- A prova está cotada para uma escala de $[0,40]$ valores, que será convertida na escala $[0,20]$ valores.

1. (0,25 valores cada alínea) Considere o conjunto $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Indique, sem justificar, o valor lógico de cada uma das proposições.
- a) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ é o conjunto das partes de A .
 - b) $A \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
 - c) $A \cup \{\emptyset\} = A$.
 - d) $A \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
 - e) $A \cap \{\emptyset\} = A$.
 - f) Seja $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Então $B \in A$ e $B \subseteq A$.
2. Seja p a proposição $\exists y \in A, \forall x \in A, [x \neq y \Rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)]$.
- a) (1 val.) Dê exemplo de um conjunto A não vazio onde a proposição p é verdadeira;
 - b) (1 val.) Dê exemplo de um conjunto A não vazio onde a proposição p é falsa;
 - c) (1 val.) Escreva, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição equivalente a $\sim p$.

***** **Folha 2** *****

3. (3 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para simplificar a proposição

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$$

e verificar se é uma proposição satisfazível, se é uma tautologia, ou se é uma contradição. Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

***** **Folha 3** *****

4. Considere a relação R no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por $R = \{(1, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 3), (5, 5)\}$.
- a) (1 val.) Represente o grafo orientado da relação R .
 - b) (3 val.) Diga, justificando, se R é uma relação de equivalência. Caso não o seja, determine a menor relação de equivalência \hat{R} que contém a relação dada, justificando porque é de equivalência, e apresente a partição de A constituída pelas classes de equivalência da relação \hat{R} .
 - c) (2 val.) Considere a relação binária S de A em $B = \{0, 1, 2, 3\}$ definida por aSb se e só se a tem exatamente b divisores naturais. Apresente a relação $S \circ R$ por extensão.

***** **Folha 4** *****

5. (2,5 val.) Justifique se o argumento seguinte é válido:

r é uma condição suficiente para q . Verifica-se r ou a negação de p . Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p .

***** **Folha 5** *****

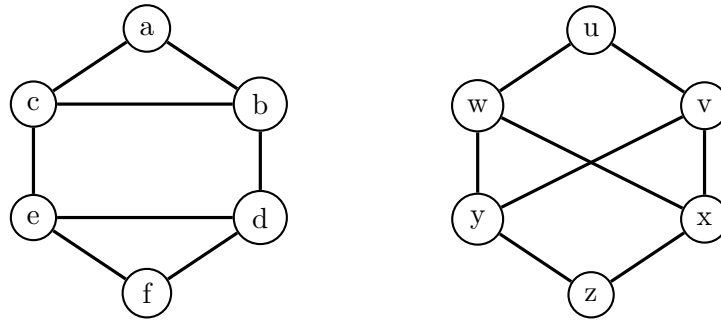
6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x), \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

Sugestões: $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\cos(\pi) = -1$ e $\sin(\pi) = 0$.

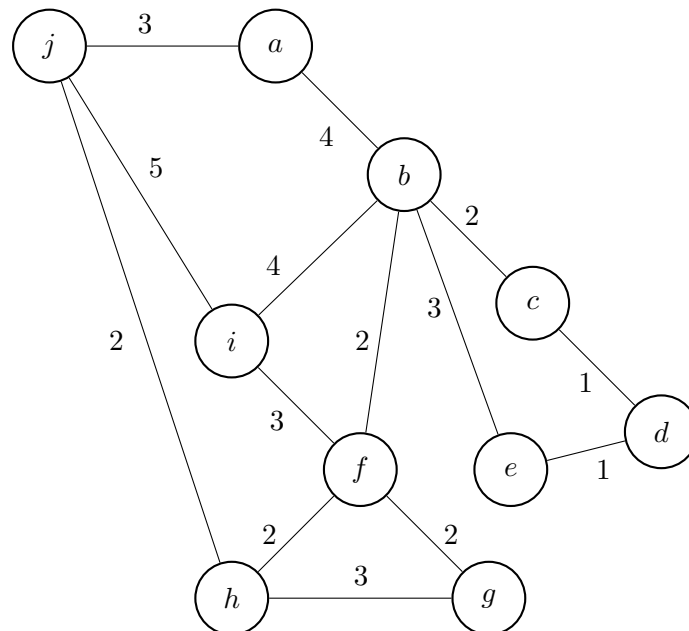
***** Folha 6 *****

7. (1 val.) Diga, justificando, qual o valor lógico da afirmação seguinte:
 "É possível construir uma grafo não orientado de 4 vértices cujos graus são, respetivamente, 1, 2, 3 e 3."
8. (2,5 val.) Verifique se os grafos seguintes são isomorfos. Justifique convenientemente a sua resposta.



***** Folha 7 *****

9. Considere o grafo não orientado e ponderado seguinte:

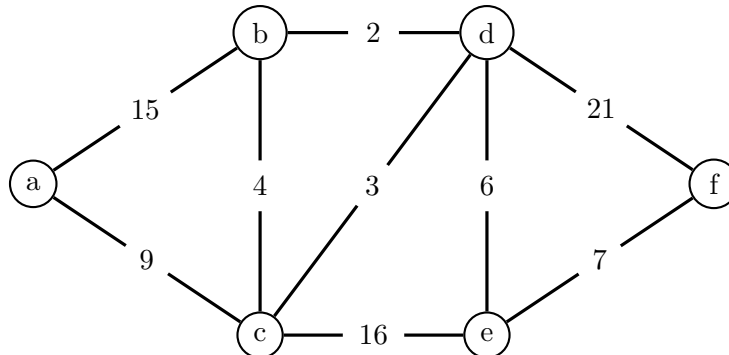


- a) (2,5 val.) Diga se o grafo é Euleriano ou semi-Euleriano. Para cada uma das definições, no caso da resposta ser afirmativa, apresente um trajeto que o comprove; no caso da resposta ser negativa, adicione um número mínimo de arestas de modo a que o grafo resultante passe a ter essa propriedade (indique as arestas a adicionar na folha de resolução e não no enunciado, usando as etiquetas dos vértices, por exemplo, (a, b) ; não necessita de desenhar o grafo); caso seja impossível, justifique.
- Nota:** Não considere os pesos atribuídos às arestas do grafo.

***** Folha 8 (tabelas) *****

- b) (4 val.) Determine uma árvore geradora de custo mínimo (desenhe-a), e o respetivo custo, identificando e usando um dos algoritmo aprendidos na UC. Para a simulação desse algoritmo, preencha a tabela correspondente (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).

10. Considere o grafo seguinte:



- a) (3 val.) Determine um caminho de menor custo, e o seu custo, do vértice a para o vértice f . Faça-o, simulando o procedimento de um algoritmo estudado em MDISC, dizendo qual o nome do algoritmo e usando a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova.
- b) (0,5 val.) Indique, se for possível com base nos cálculos da alínea a), a distância mínima do vértice a ao vértice d . Justifique a sua resposta.
- c) (0,5 val.) Indique, se for possível com base nos cálculos da alínea a), a distância mínima do vértice b ao vértice f . Justifique a sua resposta.

Nota: Use o verso da folha das tabelas para responder às alíneas b) e c).

***** Folha 9 *****

11. Considere o algoritmo que se segue.

```

procedure IS( $A = [a(1), \dots, a(n)]$ ): array
  for  $i := 2$  to  $n$ :
     $key := A[i]$ 
     $j := i - 1$ 
    while  $j \geq 1$  and  $A[j] > key$ :
       $A[j+1] := A[j]$ 
       $j := j - 1$ 
     $A[j+1] := key$ 
  return  $A$ 

```

- a) (2 val.) Apresente os passos efetuados pelo algoritmo, considerando o input $A = [6, 5, 7, 2, 3]$.
- b) (4 val.) Apresente uma tabela com as três colunas seguintes: nº da linha do algoritmo, nº de vezes que a linha é executada e a estimativa O para o tempo de execução de cada linha do algoritmo em função do input, o número de entradas do vetor. Conclua acerca da complexidade temporal no pior caso do algoritmo.