Sistemas de Equações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2024/2025

Definição 1 (Equação linear)

Uma **equação linear** a n incógnitas é uma expressão da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b. \tag{1}$$

Os escalares a_i, $i = 1, \ldots, n$, dizem-se **coeficientes da equação**, o escalar b diz-se o *termo independente* e os termos x_i, $i = 1, \ldots, n$, são as **incógnitas** (ou variáveis).
Se na equação (1) fizermos $b = 0$ obtemos a equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0, \tag{2}$$

que se diz **equação homogénea associada** da equação (1).

☞

- *Uma solução da equação (1), é um n-uplo*

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)$$

  tal que, se substituirmos em (1), cada variável x_i por s_i, $i = 1, \ldots, n$, obtém-se uma proposição verdadeira.
- *Se **s'** e **s''** forem duas soluções quaisquer da equação (1) tem-se que a sua diferença $\mathbf{s} = \mathbf{s'} - \mathbf{s''}$ é solução da equação homogénea associada (2) e todo o múltiplo de **s** é igualmente solução da equação homogénea associada (2).*

Exemplos:

- A equação $3x - y = 1$, nas incógnitas x e y, é linear.
- A sua equação homogénea associada é a equação $3x - y = 0$.
- Tem-se que, $\mathbf{s'} = (1, 2)$ e $\mathbf{s''} = (0, -1)$ são duas soluções da equação $3x - y = 1$.
- $\mathbf{s} = \mathbf{s'} - \mathbf{s''} = (1, 3)$ é solução da equação homogénea associada e para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\mathbf{s} = (\lambda, 3\lambda)$ é igualmente solução da equação homogénea associada.
- As equações $x - y^2 = 4$, $x + 2^y = 3$, $\cos(x) - y = 2$, e $xy + 2x = 1$ não são equações lineares.

Definição 2 (Sistema de equações lineares (SEL))

Um sistema de m equações lineares a n-incógnitas é um conjunto de m equações lineares da forma

$$\{a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

Habitualmente representamos um SEL da forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{3}$$

Se, no SEL (3) fizermos em todas as m equações $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$ obtemos um SEL homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

☞ *Analogamente às equações lineares chamamos, aos coeficientes $a_{i,j}$, $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$ de coeficientes do SEL, aos termos x_j, $j = 1 \dots n$ chamamos de incógnitas ou variáveis do SEL e aos coeficientes b_i, $i = 1 \dots m$ de coeficientes independentes.*

Definição 3 (Solução e conjunto solução (de um SEL))

1. Uma **solução** s do SEL (3) é um n-uplo $\mathrm{s} = (s_1, \dots, s_n)$ que é solução **de todas** as equações que formam o SEL (3).
2. O **Conjunto Solução** (CS) de um SEL é o conjunto formado por todas as soluções do SEL. Ou seja, caso o SEL tenha soluções é um conjunto de n-uplos, caso o SEL não possua soluções o conjunto solução é o conjunto vazio.

Exemplos:

1. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ -x+2y=-1 \end{array}\right. \tag{5}$$

apenas possui uma solução $s=(1,0)$. Deste modo escrevemos $CS=\{(1,0)\}$ ou alternativamente $CS=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ x=1\wedge y=0\}$.

2. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right. \tag{6}$$

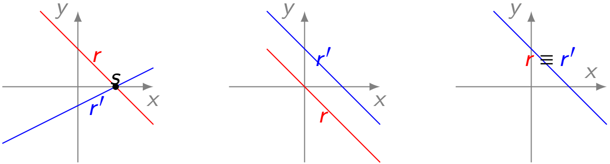
não possui soluções. Neste caso escrevemos $CS=\emptyset$.

3. O SEL de duas equações a duas incógnitas x e y

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right. \tag{7}$$

possui infinitas soluções. De facto, para todo o $\alpha\in\mathbb{R}$ o par ordenado $(\alpha,1-\alpha)$ é solução de (7). Neste caso escrevemos $CS=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1-x\}$ (aqui x é uma variável livre e y é uma variável ligada). Alternativamente podemos escrever $CS=\{(x,1-x)\in\mathbb{R}^2\ \ x\in\mathbb{R}\}$.

Geometricamente os conjuntos soluções destes SEL são formados pelos pontos de intersecção de duas rectas r e r' em R^2.



SEL (5), concorrentes. SEL (6), paralelas. SEL (6), coincidentes.

Propriedade 1

O conjunto solução de um SEL possui sempre uma das seguintes formas,

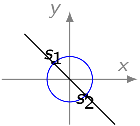
1. É o conjunto vazio. Neste caso, dizemos que o SEL é *impossível*.
2. Apenas tem uma solução. Neste caso, dizemos que o SEL é *possível e determinado*.
3. Tem infinitas soluções. Dizemos, neste caso que o SEL é *possível e indeterminado*.

   ☞ *Observe que um conjunto de soluções de um SEL não pode ter um número de soluções finito superior a um.*

Se considerarmos o sistema de 2 equações nas 2 variáveis x e y

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

verificamos que geometricamente o conjunto solução é formado pelos pontos de intersecção, $s_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $s_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, da recta de equação $y=-x$ com a circunferência centrada na origem e raio unitário.



Este sistema de equações não verifica a propriedade 1 porque o conjunto solução tem exactamente dois elementos. Esta situação apenas ocorre porque este sistema de equações não é um SEL (a segunda equação não é linear).

Definição 4 (Sistemas de equações lineares equivalentes)

Sejam S_1 e S_2 dois sistemas (com o mesmo número de equações lineares e de incógnitas) com conjuntos solução CS_1 e CS_2, respectivamente. Dizemos que os sistemas S_1 e S_2 são *equivalentes* se e somente se

$$CS_1 = CS_2.$$

Considere o SEL

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. . \tag{8}$$

Definição 5 (Forma Matricial de um SEL)

Define-se forma matricial do SEL (8) como sendo a equação matricial

$$\mathrm{A}\mathrm{x} = \mathrm{b},$$

onde

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- A é a **matriz dos coeficientes** (ou a **matriz simples do sistema**)
- x é a **matriz das incógnitas**
- b é a **matriz dos termos independentes**.

Definição 6 (Matriz completa de um SEL)

À matriz simples A do SEL (8) aumentada com a matriz dos termos independentes b na última coluna.

$$[\mathrm{A}|\mathrm{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

chamamos *matriz completa* do SEL (8).

☞ *A matriz simples de um SEL com m equações a n incógnitas é uma matriz do tipo $m \times n$ e a matriz completa é do tipo $m \times (n+1)$.*

Exemplo: A forma matricial do SEL

$$\begin{cases} 2x-3y+4t=2 \\ 6x-7z-t=5 \\ -3y+9t=\frac{5}{3} \end{cases}$$

é a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

A matriz completa do sistema é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -7 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 9 & \frac{5}{3} \end{array}\right].$$

Teorema 1 (de classificação de SEL)

Sejam $A \in M_{m,n}$ a matriz simples e $[A|b]$ a matriz completa de um SEL (de m equações a n incógnitas. Então tem-se

$$\text{SEL:}\begin{cases} r(A) = r([A|b]) \implies \text{Possível}\begin{cases} r(A) = r([A|b]) = n \implies \text{Determinado} \\ r(A) = r([A|b]) < n \implies \begin{array}{l}\text{Indeterminado} \\ \text{de grau } n - r(A)\end{array} \end{cases} \\ r(A) < r([A|b]) \implies \text{Impossível} \end{cases}$$

☞ *O processo de classificação de um SEL indicado no teorema 1 exige o cálculo da característica das matrizes simples e completa do SEL. Este cálculo pode ser efectuado usando o algoritmo de eliminação Gaussiana. Contudo, como iremos verificar, este algoritmo também será útil para a resolução do SEL.*

Teorema 2

Seja S um SEL com matriz completa $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$. Se a matriz $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ resulta de $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$ por aplicação de uma sequência finita de operações elementares por linhas então, o SEL S' com matriz completa $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ é equivalente a S.

Nota: Ou seja, os SEL S e S' possuem o mesmo conjunto solução.

Corolário 1

Seja S um SEL com matriz completa $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$ e seja $E([\mathrm{A}|\mathrm{b}])$ uma matriz em forma de escada equivalente a $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$. Então o SEL S' associado à matriz completa $E([\mathrm{A}|\mathrm{b}])$ é equivalente ao SEL S.

☞ *A resolução de um SEL, S', cuja matriz completa esteja em forma de escada por linhas pode facilmente resolver-se usando o algoritmo de resolução por substituição para trás. Consequentemente ao resolvermos S' estamos a resolver S, porque o teorema 1 garante que eles têm o mesmo conjunto solução. Os exemplos seguintes descrevem a resolução de sistemas de equações lineares via eliminação Gaussiana.*

Exemplo I (sistema possível e determinado): Considere o SEL

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}.$$

Começamos por aplicar o algoritmo de eliminação Gaussiana à matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \text{(troca apenas} \\ \text{para simplificar} \\ \text{os cálculos)}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 8L_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{9}{17} L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Analisando a última matriz (que está em forma de escada) tem-se

$$\mathrm{r}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A'}\right) = \mathrm{r}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[A'|b']}\right) = \text{número de incógnitas } (3)$$

Logo o sistema é **possível e determinado**. Para resolver o sistema encontramos o sistema de equações lineares associado à matriz completa $[A'|b']$ ignorando a linha nula[1]

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ \quad\;\; y + 2z = -1 \\ \qquad\;\; 17z = -17 \end{cases}$$

E este sistema resolve-se por **substituição para trás**. Da terceira equação determinamos o valor de $z = -1$. Substituímos na segunda equação o valor de z encontrado na resolução da equação da terceira linha e encontramos o valor de $y = 1$. Finalmente encontramos o valor de $x = 2$, substituindo na primeira equação as incógnitas y e z pelos valores encontrados na resolução das últimas equações. E tem-se que o conjunto solução é

$$CS = \{(2, 1, -1)\}.$$

[1] a linha nula corresponde à equação $0 = 0$ que é uma condição universal.

Exemplo II (sistema possível e indeterminado):
Considere o sistema de 5 equações nas 4 incógnitas x, y, z e t

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & 2t & = & 3 \\ & & -y & - & z & + & t & = & 2 \\ 2x & & & + & 2z & + & 4t & = & 6 \\ & & y & & & + & t & = & 2 \end{array}\right. .$$

Aplicando a eliminação Gaussiana à matriz completa $[A|b]$ de forma a obter uma matriz equivalente em forma de escada $[A'|b']$ tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_5} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Logo tem-se $\mathrm{r}(\mathrm{A}') = \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 3 < n(=4)$. Consequentemente o sistema é **simplesmente indeterminado**.
- Dizemos **simplesmente**, porque o **grau de indeterminação** é $n - \mathrm{r}(\mathrm{A}') = 1$. Deste modo teremos **uma variável livre** na descrição do conjunto solução.

O SEL associado à matriz completa $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ ignorando as linhas nulas é

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ & & -y & - & z & + & t & = & 2 \\ & & & & -z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right. .$$

1. O processo de resolução para trás inicia resolvendo a última linha em **ordem à variável associada ao coeficiente líder** (variável z).
2. Deste modo temos $z = 2t - 4$ e a variável t ficará livre.
3. Substituindo na segunda equação a variável z por $2t - 4$ concluímos que $y = -t + 2$.
4. A variável x é obtida da primeira equação, onde substituímos a variável z por $2t - 4$ e a variável y por $-t + 2$. Efectuando os cálculos obtemos $x = -4t + 7$.

☞ *O conjunto solução é:*

$$CS = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -4t + 7 \wedge y = -t + 2 \wedge z = 2t - 4\right\}$$

*ou na **forma paramétrica***

$$CS = \left\{(-4t + 7, -t + 2, 2t - 4, t) \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exemplo III (sistema Impossível): Considere o sistema de 3 equações nas 3 incógnitas x, y e z

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right. .$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Como se tem

$$2 = \mathrm{r}(\mathrm{A}') < \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 3$$

então o SEL **é impossível** e tem-se

$$CS = \emptyset.$$

☞ *Note que a última linha dá origem à equação $0x + 0y + 0z = -2$, que não possui solução.*

Exemplo IV (Classificação de SEL em função de parâmetros):

Considere o seguinte sistema de 3 equações lineares nas 3 incógnitas x, y e z, que dependem dos parâmetros reais a e b.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & b \\ & & 3y & - & z & = & b-1 \end{array}\right. .$$

Aplicando a eliminação Gaussiana à matriz completa do SEL tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & b \\ 0 & 3 & -1 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 3 & -1 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & b-1 \\ 0 & 0 & -3a+2 & -2(b-1) \end{array}\right]}_{[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']}$$

Os passos seguintes consistem em:

(1) Averiguar em que condições, sobre os parâmetros a e b, a característica da matriz dos coeficientes A' **toma o valor máximo** (3 neste exemplo).

- Tem-se $\mathrm{r}(\mathrm{A}') = 3$ se e somente se $-3a+2 \neq 0$. Ou seja a característica de A' atinge o seu valor máximo se e somente se $a \neq \frac{2}{3}$.
- Sob a condição $a \neq \frac{2}{3}$ tem-se que a característica da matriz $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ é igualmente 3, independentemente do valor do parâmetro b.

Logo tem-se

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}') = \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = \text{número de incógnitas}(=3); \qquad a \neq \frac{2}{3} \wedge \forall\, b \in \mathbb{R}$$

(2) Averiguar em que condições, sobre os parâmetros a e b, a característica da matriz dos coeficientes A' não é máxima.

- Basta negar a condição para a qual a característica de A' é máxima. Logo temos que a característica de A' é inferior a 3 se e somente se $a = \frac{2}{3}$. E tem-se $\mathrm{r}(\mathrm{A}') = 2$, independentemente do valor do parâmetro b.
- Impondo este condição à matriz $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ tem-se

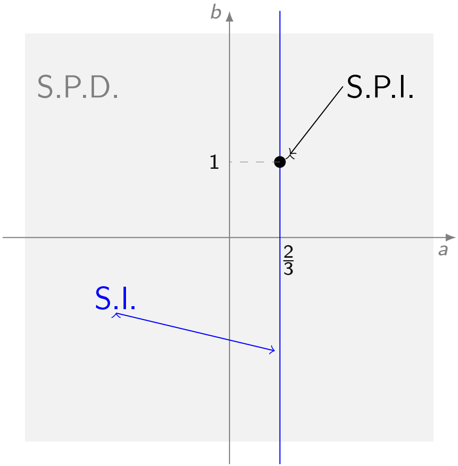
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(b-1) \end{array}\right]$$

Resta-nos verificar qual é a característica da matriz completa, que depende do valor do parâmetro b. Fácilmente verificamos que $\mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}'])$, pode tomar dois valores

i) Se $-2(b-1) \neq 0$ (ou $b \neq 1$), tem-se $\mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 3$. Logo o sistema é impossível.

ii) Se $-2(b-1) = 0$ (ou $b = 1$), tem-se $\mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 2$. Consequentemente o sistema é possível e simplesmente indeterminado.

Resumimos esta discussão na seguinte figura



O sistema é possível e determinado em todo o plano com a excepção da recta $a = 2/3$ assinalada na figura com cor azul. Na recta $a = 2/3$ o sistema é impossível com a excepção do ponto de coordenadas $a = 2/3$ e $b = 1$ onde o sistema é possível e indeterminado.

Definição 7 (Matriz em forma de escada reduzida por linhas

Seja $A \in \mathcal{M}_{m,n}$. Dizemos que A está em **forma de escada reduzida por linhas** se satisfizer as propriedades:

1. A está em forma de escada por linhas;
2. Todos os coeficientes líder de A são unitários;
3. Se uma coluna de A posse um coeficiente líder então o coeficiente líder é a única entrada dessa coluna não nula.

Exemplos: As matrizes seguintes estão todas em forma de escada reduzida por linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 1 (de eliminação Gauss-Jordan)

Considere a matriz $A \in \mathscr{M}_{m,n}$.

1. Aplique o algoritmo de eliminação Gaussiana. Obtém-se uma matriz E em forma de escada por linhas.
2. Normalizamos todos os coeficientes líder. Isto forçamos o coeficiente líder c_ℓ de toda a linha ℓ não nula a ser unitário multiplicando essa linha por $\dfrac{1}{c_\ell}$.
3. Eliminamos todos as entradas $e_{i,j}$ que estão acima de cada coeficiente líder c_ℓ efectuando a operação elementar $L_i \leftarrow L_i - e_{i,j} L_\ell$.

Exemplo: Pretende-se resolver o seguinte SEL com 4 equações lineares nas 5 incógnitas x_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ usando a eliminação de Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 4x_2 & - & 9x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \end{array}\right. .$$

1^{o} **Passo**: Aplicar o algoritmo de Gauss à matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -1 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -9 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{2^{o}\ \text{passo}}$$

- Tem-se que o SEL é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}') = \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 3 < n = 5$$

- Consequentemente irão ocorrer duas variáveis livres e três variáveis dependentes no conjunto solução CS.
- Podemos escolher para **variáveis dependentes** as variáveis, x_1, x_2 e x_4, **que estão relacionadas com os coeficientes líder** (assinaladas a azul) e as restantes variáveis x_3 e x_5 ficam **livres**.

2º Passo: Normalizar os coeficientes líder (colocar os coeficientes líder unitários).

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3^o \text{ passo } \ldots}$$

3º Passo: Para todo o coeficiente líder eliminar as entradas que partilham a mesma coluna.

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \phantom{-\frac{3}{2}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Encontrada a matriz em forma de escada reduzida por linhas encontramos imediatamente o conjunto solução. Tem-se,

Da 3ª linha resulta, $x_4 = 1 + 3x_5$.

Da 2ª linha resulta, $x_2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{7x_5}{2}$.

Da 1ª linha resulta, $x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3x_3}{2} + 3x_5$

E o conjunto solução do SEL toma a forma,

$$CS = \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{3x_3}{2} + 3x_5, -\frac{3}{2} - \frac{7x_5}{2}, x_3, 1 + 3x_5, x_5 \right) \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\},$$

ou alternativamente a forma

$$CS = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3x_3}{2} + 3x_5 \wedge x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7x_5}{2} \wedge x_4 = 1 + 3x_5 \right\}.$$

Algoritmo 2 (Cálculo da matriz inversa via eliminação de Gauss-Jordan)

1. Dada uma matriz invertível $A \in \mathcal{M}_n$ construímos a matriz estendida

$$[A|I_n] \in \mathcal{M}_{n,2n}$$

2. Aplicamos o algoritmo de Gauss-Jordan à matriz atrás construída. Obtendo, deste modo, a sua forma de escada reduzida por linhas

$$\left[I_n|A^{-1}\right].$$

A matriz inversa de A é o bloco do lado direito.

Exemplo: Determinar a inversa da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 8 (Sistema de Cramer)

Um sistema de equações lineares diz-se um *sistema de Cramer* se e somente se

1. O número de equações é igual ao número de incógnitas.
2. O determinante da matriz do sistema é não nulo.

☞ *Num sistema de Cramer a matriz do sistema é sempre uma matriz quadrada. Logo faz sentido considerar o determinante da matriz do sistema.*

Propriedade 2

Um sistema de Cramer é sempre possível e determinado.

Métodos de resolução de sistemas de Cramer:

(1) Escrevendo um sistema de Cramer na sua forma matricial $Ax = b$ tem-se que a matriz do sistema é invertível. Logo a solução é dada por

$$x = A^{-1}b.$$

☞ *Este método, só se deve aplicar em problemas teóricos.*

(2) O segundo método para resolver sistemas de Cramer é usar as **fórmulas de Cramer**. Escrevendo um sistema de Cramer na sua forma matricial $\mathrm{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$, onde

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

tem-se que a k-ésima incógnita x_k, $1 \leq k \leq n$, é dada por

$$x_k = \frac{\det(\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{k}})}{\det(\mathrm{A})},$$

onde a matriz $\boldsymbol{A'}_{\boldsymbol{k}}$ resulta por substituição da k-ésima coluna da matriz do sistema A pela coluna b dos termos independentes.

Exemplo: Pretende-se resolver o seguinte sistema de Cramer

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 5 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 9 \end{array} \right. .$$

A matriz do sistema A e a matriz b dos termos independentes são

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = -1 \neq 0$ tem-se que o sistema é de Cramer e as incógnitas são dadas por

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{A'}_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x_2 = \frac{\det(\boldsymbol{A'}_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$x_3 = \frac{\det(\boldsymbol{A'}_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-10}{-1} = 10.$$