Análise Matemática

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de 1ª Ordem
Capítulo 4

Licenciatura em
Engenharia Informática / ISEP
(2024/2025)

Conteúdo

Equações Diferenciais Ordinárias de 1^a ordem: Generalidades.

- Muitos problemas do mundo real envolvem o conceito de derivada. Em alguns casos apenas se conhece uma igualdade que envolve uma função (variável dependente), as suas variáveis (independentes) e as derivadas da função.
- A este tipo de relação chama-se **equação diferencial**.
- Pretende-se, em geral, resolver a equação, ou seja, obter a função.
- Exemplo:
  - A equação $y' - 2x = 0$ é uma equação diferencial.

    Como resolver esta equação? (objetivo: determinar a função $y(x)$)
  - Faça-se $y' = 2x$ ...
  - A solução (geral) é $y = x^2 + C$.
  - Verifiquemos... $y' = (x^2 + C)' = 2x$, substituindo na equação obtemos $2x = 2x$.

- As equações diferenciais surgem naturalmente em vários ramos das ciências. A maioria dos fenómenos estudados nas ciências físicas, biológicas e sociais tem um comportamento variável. A sua modelação é efetuada recorrendo a diferenciais, representativos de **taxas de variação**.

- Em Física, Engenharia, Biologia, Sociologia:
  - circuitos elétricos;
  - fenómenos na mecânica dos fluídos;
  - propagação de ondas;
  - reações químicas e nucleares;
  - desenvolvimento de tecidos e orgãos em biologia;
  - dinâmica de populações;
  - propagação de doenças.

São fenómenos que são modelados por equações diferenciais.

Definição

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) a uma equação que estabelece uma relação entre uma variável independente x, a função desconhecida $y(x)$, e as suas derivadas $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}$:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Chama-se ordem de uma equação diferencial à ordem mais elevada da derivada da função desconhecida.

Exemplos:

- $y' - 5 = 0$ é uma EDO de 1^a ordem.
- $y'' + x^2(y')^3 - 15y = 0$ é uma EDO de 2^a ordem.
- $\left(y^{(4)}\right)^2 - 1 = x^3 \dfrac{dy}{dx}$ é uma EDO de 4^a ordem.

- Solução Geral (SG) de uma **EDO** de ordem (n) é toda a função $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ ou $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ que satisfaz a equação diferencial onde $C_1, C_2, ..., C_n$ são constantes arbitrárias.
- Solução Particular (SP) de uma **EDO** é a função $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$, da família de funções que constitui a solução geral da equação diferencial, obtida para valores particulares da função.
- Condições Iniciais são as condições impostas à função incógnita e suas derivadas para um mesmo valor da variável independente.
- Condições Fronteira são as condições impostas à função incógnita e suas derivadas para dois ou mais valores da variável independente.
- As constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ são calculadas com base em n condições iniciais ou condições fronteira impostas à função solução da equação diferencial.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de 1^a Ordem pode apresentar-se sob uma das seguintes formas:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y' = f(x, y),$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

"Resolver" ou "integrar" uma equação diferencial, significa determinar a solução geral ou, caso seja dada uma condição inicial, determinar a solução particular.

- A solução geral representa uma família de curvas, dependente de uma constante arbitrária C;
- A solução particular representa a curva dessa família que satisfaz à condição $y(x_0) = y_0$, o que em termos geométricos equivale a dizer, que passa no ponto (x_0, y_0);
- Ao gráfico de cada uma das soluções de uma equação diferencial chama-se curva integral.

EDO de Variáveis Separadas ou Separáveis.

Uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem $y' = f(x, y)$ diz-se de variáveis separáveis se e só se for possível decompor a função $f(x, y)$ num produto de duas funções, uma função só de x e outra função só de y, isto é, a equação for da forma:

$$y' = f_1(x).f_2(y).$$

Neste caso, resolve-se a equação:

- transformando a equação numa equação de variáveis separadas,

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x).f_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, f_2(y) \neq 0.$$

- integrando um dos membros em ordem a x e o outro em ordem a y:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)\, dx + C.$$

Exemplo 1: Resolver a equação $2(y-1)y' = 3x^2 + 4x + 2$.

Resolução: Podemos escrever a equação na forma:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

Verifica-se que se trata de uma equação de variáveis separáveis pois já está na forma na forma $y' = f_1(x).f_2(y) = (3x^2 + 4x + 2)\dfrac{1}{2(y-1)}$.

De seguida:

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4x + 2)\frac{1}{2(y-1)} \Leftrightarrow 2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx.$$

Integrando ambos os membros vem:

$$\int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dx + C \Leftrightarrow y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C.$$

Exemplo 2: Determine a solução particular da equação $(1+2y^2)y' = y\cos(x)$ que verifica a condição inicial $y(0)=1$.

Resolução: Podemos escrever a equação na forma:

$$y' = \frac{y\cos(x)}{1+2y^2}.$$

Escreva-se a equação na forma $y' = f_1(x).f_2(y) = \cos(x)\dfrac{y}{1+2y^2}$.

De seguida:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)\frac{y}{1+2y^2} \Leftrightarrow \frac{1+2y^2}{y}dy = \cos(x)\,dx.$$

Integrando ambos os membros vem:

$$\int \frac{1+2y^2}{y}dy = \int \cos(x)\,dx + C \Leftrightarrow \ln|y| + y^2 = \mathrm{sen}(x) + C.$$

Exemplo 2 (Cont.):

A solução geral é então:

$$\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + C.$$

Vejamos qual a curva integral que passa no ponto $(0, 1)$, ou seja, encontremos a solução particular para a condição inicial $y(0) = 1$:

$$\ln|1| + 1^2 = \operatorname{sen}(0) + C \Leftrightarrow C = 1.$$

Assim a solução particular é:

$$\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen}(x) + 1.$$

Nota:

Caso a equação diferencial seja dada na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

diz-se de variáveis separáveis se for possível escrever as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$, definidas no conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, na forma:

$$M(x,y) = M_1(x).M_2(y);$$

$$N(x,y) = N_1(x).N_2(y).$$

Por exemplo a equação

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,$$

é deste tipo.

Exemplo 3: Resolva a equação $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0$.

Resolução:

Podemos escrever a equação na forma:

$$x(y^2+1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

Resolvendo:

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2+1}dy=0.$$

Aplicando integrais:

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2+1}dy=C.$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln C\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}=C.$$

EDO Lineares

Definição

Uma equação diferencial de 1^a ordem $y' = h(x, y)$ diz-se linear em y e y' sse a equação for escrita na forma:

$$y' + f(x)y = g(x),$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em $D \subset \mathbb{R}$.

- Se $g(x) \neq 0$, a equação diz-se linear não homogénea.
- Se $g(x) = 0$, a equação diz-se linear homogénea. A equação $y' + f(x)y = 0$, é sempre de variáveis separáveis.

Se na relação estabelecida pela equação diferencial a função incógnita for $x = x(y)$, passa a fazer sentido definir:

$$x' + f(y)x = g(y),$$

como uma equação linear em x e em x' em que $f(y)$ e $g(y)$ são funções contínuas em $D \subset \mathbb{R}$.

Resolução das Equações Lineares: Método da variação da constante arbitrária

Sejam

- $y' + f(x)y = g(x)$ - equação linear não homogénea;
- $y' + f(x)y = 0$ - equação linear homogénea associada.

Passo I:

Resolver a equação homogénea associada à equação dada (equação de variáveis separáveis):

$$y' + f(x)y = 0 \Longleftrightarrow \boxed{y = Ce^{-F(x)}}$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Passo II:

Determinação da função $k(x)$, de tal forma que a solução da equação linear não homogénea seja o produto assim definido:

$$y = k(x)e^{-F(x)} \quad (1)$$

O procedimento a adoptar para se obter a função $k(x)$ é o seguinte:

1. Determinar a derivada y';
2. Substituir y e y' na equação linear não homogénea;
3. Obter por integração a função $k(x)$;
4. Substituir a expressão de $k(x)$ em (1).

Exemplo 4: Resolva a equação linear $y' - 2xy = x$.

Resolução:

Passo I: Como $f(x) = -2x$, uma primitiva é $F(x) = -x^2$.

Assim o solução da equação homegénea correspondente é

$$y = Ce^{+x^2}$$

Passo II:

Considere-se $y = k(x)e^{x^2}$.

Deriva-se a expressão anterior,

$$y' = k'(x)e^{x^2} + k(x)2xe^{x^2}.$$

Substitui-se y e y' na equação diferencial inicial. Logo,

$$k'(x)e^{x^2} + k(x)2xe^{x^2} - 2xk(x)e^{x^2} = x.$$

Exemplo 4 (cont.):

Simplificando, vem,

$$k'(x)e^{x^2} = x \Leftrightarrow k'(x) = xe^{-x^2}.$$

Para determinar a função $k(x)$, integra-se a expressão da sua derivada:

$$k(x) = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Substituindo na solução da equação homogénea, vem,

$$y = \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right) e^{x^2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}.$$

Exemplo 5: Resolva a equação liner, $y' = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\left(1 + \frac{e^x y}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right)$, sabendo que o gráfico passa origem das coordenadas.

Resolução:

Antes de começar a resolver, temos de escrever a equação na forma linear, ou seja, na forma $y' + f(x)y = g(x)$.

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} + \frac{e^{2x}y}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow y' - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}y = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

Passo I: Como $f(x) = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$, uma primitiva é $F(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)$.

Assim o solução da equação homegénea correspondente é

$$y = Ce^{-F(x)} \Leftrightarrow y = C\sqrt{e^{2x}+1}.$$

Exemplo 5 (Cont.):

Passo II:

Considere-se $y = K(x)\sqrt{e^{2x}+1}$.

Deriva-se a expressão anterior,

$$y' = k'(x)\sqrt{e^{2x}+1} + K(x)\frac{2\,e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

Substitui-se y e y' na equação diferencial na forma $y' + f(x)y = g(x)$. Logo,

$$k'(x)\sqrt{e^{2x}+1}+K(x)\frac{2\,e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+1}}-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\times K(x)\sqrt{e^{2x}+1} = \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

Nota importante: As parcelas com $K(x)$ cortam sempre!!

Exemplo 5 (cont.): Simplificando,

$$k'(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

Para determinar a função $k(x)$, integra-se a expressão da sua derivada:

$$k(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$$

Substituindo na solução da equação homogénea, obtemos a **solução geral** da equação diferencial,

$$y = (\operatorname{arctg}(e^x) + C)\sqrt{e^{2x}+1}, C \in \mathbb{R}.$$

Para obter a solução particular, aplica-se a informação de que a curva passa na origem das coordendas. Assim, na solução geral, substituimos $x = 0$ e $y = 0$ resultando, $C = -\frac{\pi}{4}$. A **solução particular** é,

$$y = \left(\operatorname{arctg}(e^x) - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{e^{2x}+1}.$$

Exemplo 6: Resolva a equação diferencial linear, $y = xy' + y' \ln y$.

Resolução:

Antes de começar a resolver, temos de escrever a equação na forma linear, ou seja, na forma $y' + f(x)y = g(x)$ (equação linear em y).

$$y = xy' + y' \ln y \Leftrightarrow y = (x + \ln y)\ y' \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x + \ln y}.$$

Facilmente concluímos que não é possível dar a forma atrás. Logo, tentamos dar a forma $x' + f(y)\,x = g(y)$ (equação linear em x).

$$x' = \frac{x + \ln y}{y} \Leftrightarrow x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}.$$

Nota: Não esquecer que $y' = \dfrac{1}{x'}$ e $x' = \dfrac{1}{y'}$.

Exemplo 6 (Cont.):

Passo I: Como $f(y) = -\dfrac{1}{y}$, uma primitiva é $F(y) = -\ln|y|$.

Assim o solução da equação homegénea correspondente é

$$x = Ce^{-F(y)} \Rightarrow x = Ce^{\ln y} \Leftrightarrow x = C\,y.$$

Passo II:

Considere-se $x = K(y)y$.

Deriva-se a expressão anterior

$$x' = k'(y)y + K(y).$$

Substitui-se x e x' na equação diferencial na forma $x' + f(y)x = g(y)$,

$$k'(y)y + K(y) - \frac{1}{y}K(y)y = \frac{\ln y}{y}.$$

Nota importante: As parcelas com $K(y)$ cortam sempre!!

Exemplo 6 (cont.): Simplificando,

$$k'(y) = \frac{\ln y}{y^2}.$$

Para determinar a função $k(y)$, integra-se a expressão da sua derivada:

$$k(y) = \int \frac{\ln y}{y^2}\, dy = \int \ln y\, y^{-2}\, dy.$$

Aplica-se o método de integração por partes em que $v = \ln y$ e $u' = y^{-2}$,

$$k(y) = -\frac{1}{y}\ln y - \int -\frac{1}{y} \times \frac{1}{y}\, dy = -\frac{1}{y}\ln y - \frac{1}{y} + C.$$

Substituindo na solução da equação homogénea, obtemos a **solução geral** da equação diferencial,

$$x = \left(-\frac{1}{y}\ln y - \frac{1}{y} + C\right) y, C \in \mathbb{R}.$$

Miscelânea de EDO.

Exemplo 7: Considere a equação diferencial

$$(1+\operatorname{tg}(x))y' = y\sec^2(x).$$

- Considerando que $yC = 1+\operatorname{tg}(x)$ é a solução geral da equação diferencial dada, determine a solução da equação dada que passa no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.
- Confirme a solução apresentada, resolvendo a equação diferencial.

Resolução:

- Como já temos a solução geral da equação diferencial, $yC = 1+\operatorname{tg}(x)$, basta subtituir nesta solução geral, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = 2$ e determinar a constante C.

$$2 \times C = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow C = 1.$$

A solução particular pedida é,

$$y = 1+\operatorname{tg}(x).$$

Exemplo 7 (Cont.):

- Pretende-se resolver a equação, $(1+\operatorname{tg}(x))y' = y\sec^2(x)$.

  Facilmente se verifica que se trata de uma equação diferencial de **variáveis separáveis.**

$$(1+\operatorname{tg}(x))\,dy - y\sec^2(x)\,dx = 0.$$

Resolvendo,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy - \frac{\sec^2(x)}{1+\operatorname{tg}(x)}\,dx = 0 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{\sec^2(x)}{1+\operatorname{tg}(x)}\,dx = \ln C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|1+\operatorname{tg}(x)| = -\ln C \Leftrightarrow \frac{y}{1+\operatorname{tg}(x)} = \frac{1}{C} \Leftrightarrow yC = 1+\operatorname{tg}(x).$$

Nota:

Não esquecer $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e $x' = \dfrac{dx}{dy}$.

Podem-se fazer manipulações com a constante C, só alterando o aspeto da função solução.

Exemplo 8: Determine a solução geral da equação diferencial,

$$(x-1)\,dy + (x^2-1)y\,dx = e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\,dx.$$

Resolução: Para podermos identificar o tipo de equação diferencial, devemos proceder por tentativas.

- Vejamos se se trata de equação de **variáveis separáveis.** Escreva-se a equação na forma,

$$(x-1)\,dy + \left[(x^2-1)y - e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\right]\,dx = 0.$$

  Facilmente concluímos que a equação **não é** de variáveis separáveis, porque não é possível escrever a expressão $(x^2-1)y - e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$ como um produto de uma função em x por uma função em y.

Exemplo 8 (Cont.):

- Vejamos se se trata de uma equação **linear**
  - em $y \implies y' + f(x)y = g(x)$ ou
  - em $x \implies x' + f(y)x = g(y)$.

Escreva-se a equação na forma,

$$(x-1)\,y' + (x^2-1)y = e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{x^2-1}{x-1}\,y = \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' + (x+1)\,y = \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{x-1}.$$

Facilmente concluímos que a equação é linear em y.

Exemplo 8 (Cont.):

Passo I: Como $f(x) = x + 1$, uma primitiva é $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

Assim a solução da equação homegénea correspondente é

$$y = Ce^{-F(x)} \Leftrightarrow y = C\,e^{-\frac{x^2}{2}-x}.$$

Passo II:

Considere-se $y = K(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}-x}$ e deriva-se esta expressão.

$$y' = k'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}-x} + K(x)(-x-1)e^{-\frac{x^2}{2}-x}.$$

Substitui-se y e y' na equação diferencial na forma $y' + f(x)y = g(y)$,

$$k'(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}-x} + K(x)(-x-1)e^{-\frac{x^2}{2}-x} + (x+1)K(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}-x} = \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{x-1}.$$

Nota importante: As parcelas com $K(x)$ cortam sempre!!

Exemplo 8 (cont.): Simplificando,

$$k'(x) = \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}}{(x-1)\, e^{-\frac{x^2}{2}-x}} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{x-1}$$

Para determinar a função $k(x)$, integra-se a expressão da sua derivada:

$$k(x) = \int \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{x-1}\, dx = e^{-\frac{1}{2}} \ln|x-1| + C$$

Substituindo na solução da equação homogénea, obtemos a **solução geral** da equação diferencial,

$$y = \left(e^{-\frac{1}{2}} \ln|x-1| + C\right) e^{-\frac{x^2}{2}-x}, C \in \mathbb{R}$$

Nota: Poderíamos fazer $F(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$, e para este caso a solução teria um aspeto ligeiramente diferente, $y = (\ln|x-1| + C)\, e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 9: Determine a expressão da curva integral que interseta a curva $y = e^x$ num ponto do eixo das ordenadas e é solução da equação diferencial

$$(1 + y^3)(yx' + x) = y^2.$$

Resolução: Para podermos identificar o tipo de equação diferencial, devemos proceder por tentativas.

- Vejamos se se trata de equação de **variáveis separáveis**. Escreva-se a equação na forma,

  $$yx' + x + y^4x' + y^3x = y^2 \Leftrightarrow (y + y^4)x' + x + y^3x - y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow (y + y^4)\,dx + (x + y^3x - y^2)\,dy = 0.$$

  Facilmente concluímos que a equação **não é** de variáveis separáveis, porque não é possível escrever a expressão $x + y^3x - y^2$ como um produto de uma função em x por uma função em y.

Exemplo 9 (Cont.):

- Vejamos se se trata de uma equação **linear**
  - em $y \implies y' + f(x)y = g(x)$ ou
  - em $x \implies x' + f(y)x = g(y)$.

Escreva-se a equação na forma,

$$(y + y^4)x' + x + y^3x - y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x' + \frac{x + y^3x - y^2}{y + y^4} \Leftrightarrow x' + \frac{x + y^3x}{y + y^4} = \frac{y^2}{y + y^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x' + \frac{1 + y^3}{y + y^4}x = \frac{y}{1 + y^3} \Leftrightarrow x' + \frac{1}{y}x = \frac{y^2}{y + y^4}.$$

Facilmente concluímos que a equação é linear em x.

Exemplo 9 (Cont.):

Passo I: Como $f(y) = \frac{1}{y}$, uma primitiva é $F(y) = \ln|y|$.

Assim a solução da equação homegénea correspondente é

$$x = Ce^{-F(y)} \Rightarrow x = Ce^{-\ln y} \Leftrightarrow x = \frac{C}{y}.$$

Passo II:

Considere-se $x = \frac{K(y)}{y}$ e deriva-se esta expressão,

$$x' = \frac{k'(y)y - K(y)}{y^2}.$$

Substitui-se x e x' na equação diferencial na forma $x' + f(y)x = g(y)$,

$$\frac{k'(y)}{y} - \frac{K(y)}{y^2} + \frac{1}{y}\frac{K(y)}{y} = \frac{y}{1+y^3}.$$

Exemplo 9 (cont.): Simplificando,

$$k'(y) = \frac{y^2}{1+y^3}.$$

Para determinar a função $k(y)$, integra-se a expressão da sua derivada:

$$k(y) = \int \frac{y^2}{1+y^3}\, dy = \frac{1}{3}\ln(1+y^3) + C.$$

Substituindo na solução da equação linear, obtemos a **solução geral** da equação diferencial,

$$x = \left(\frac{1}{3}\ln(1+y^3) + C\right)\frac{1}{y},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 9 (cont.): Como o exercício pede a expressão da curva integral que interseta a curva $y = e^x$ num ponto do eixo das ordenadas, temos que encontrar a solução particular que obedece à condição inicial.

O ponto do eixo das ordenadas tem $x = 0$ e $x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$.

Assim, na solução geral fazemos $x = 0$ e $y = 1$ e calculamos a constante C,

$$0 = \frac{1}{3}\ln(2) + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}\ln(2).$$

Na solução particular pedida é,

$$x = \left(\frac{1}{3}\ln(1 + y^3) - \frac{1}{3}\ln(2)\right)\frac{1}{y}.$$

Exemplo 10: Resolva a equação diferencial de 1ª ordem dada por $e^y y' = xe^{x+y}$ que verifica a condição $y(0) = 0$.

Resolução: Para podermos identificar o tipo de equação diferencial, devemos proceder por tentativas.

- Vejamos se se trata de equação de **variáveis separáveis**. Escreva-se a equação na forma,

$$e^y y' = xe^{x+y} \Leftrightarrow e^y y' = xe^x e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = xe^x \Leftrightarrow dy - xe^x\, dx = 0.$$

Facilmente concluímos que a equação **é** de variáveis separáveis.

Exemplo 10 (Cont.):

- Aplicando integrais a ambos os termos,

$$\int dy - \int xe^x \, dx = C.$$

O integral $\int xe^x$ resolve-se pelo método de integração por partes, no qual derivamos x e primitivamos e^x.

$$\Leftrightarrow y - xe^x + e^x = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = xe^x - e^x + C.$$

Pretende-se encontrar a solução particular que obedece à condição $y(0) = 0$, logo

$$0 = 0e^0 + e^0 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

A solução particular pedida é,

$$y = xe^x - e^x + 1.$$

Exemplo 17: Identifique e resolva a equação diferencial

$$(1+y^2)\,dx + (2xy - \operatorname{tg}(y))\,dy = 0.$$

Resolução:

- Facilmente concluímos que a equação **não é** de variáveis separáveis, porque não é possível escrever a expressão $2xy - \operatorname{tg}(y)$ como um produto de uma função em x por uma função em y.
- Vejamos se se trata de uma equação **linear**
  - em $y \implies y' + f(x)y = g(x)$ ou
  - em $x \implies x' + f(y)x = g(y)$.

  Escreva-se a equação na forma,

$$(1+y^2)\,x' + (2xy - \operatorname{tg}(y)) = 0 \Leftrightarrow x' + \frac{2y}{1+y^2}x = \frac{\operatorname{tg}(y)}{1+y^2}.$$

Exemplo 17 (Cont.):

- Facilmente concluímos que se trata de uma equação linear em x.

Passo I: Como $f(y) = \dfrac{2y}{1+y^2}$, uma primitiva é $F(y) = \ln(1+y^2)$.

Assim a solução da equação homegénea correspondente é

$$x = Ce^{-F(y)} \Rightarrow x = Ce^{-\ln(1+y^2)} \Leftrightarrow x = \frac{C}{1+y^2}.$$

Passo II:

Considere-se $x = \dfrac{K(y)}{1+y^2}$ e deriva-se esta expressão,

$$x' = \frac{k'(y)(1+y^2) - K(y)2y}{(1+y^2)^2}.$$

Exemplo 17 (Cont.):

- Substitui-se x e x' na equação diferencial na forma $x' + f(y)x = g(y)$,
$$\frac{k'(y)}{1+y^2} - \frac{K(y)2y}{(1+y^2)^2} + \frac{2y}{1+y^2}\frac{K(y)}{1+y^2} = \frac{\operatorname{tg} y}{1+y^2}.$$
Simplificando,
$$K'(y) = \operatorname{tg}(y).$$
Determinar $k(y)$:
$$K(y) = \int \operatorname{tg}(y)\, dy \Leftrightarrow K(y) = \int \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}\, dy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K(y) = -\ln(\cos(y)) + C.$$
A solução geral é,
$$x = \frac{-\ln(\cos(y)) + C}{1+y^2}, C \in \mathbb{R}.$$