Análise Matemática

Integral Indefinido
Capítulo 2

Licenciatura em
Engenharia Informática / ISEP
(2024/2025)

Conteúdo

Haverá situações em que, sabendo a derivada de uma função, é necessário conhecer a função que lhe deu origem?

- Um físico que conhece a velocidade de uma dada particula pode querer saber a sua posição em cada instante.
- Um engenheiro que consegue medir a taxa de esvaziamento de um tanque poderá querer saber qual a quantidade de água que se esvazia durante um dado período de tempo.
- Um biólogo que sabe qual a taxa de crescimento de uma população de bactérias pode querer deduzir o tamanho da população no futuro.

Em cada um dos casos, o problema consiste em encontrar a função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se tal função F existir, é chamada primitiva de f.

Definição

Uma função F diz-se uma primitiva de f num intervalo I, sse

$$F'(x) = f(x),$$

$\forall x \in I$. Podendo-se escrever

$$\wp[f(x)] = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Exemplo 1: Considere-se a função $f(x) = x^2$.

Uma primitiva de f é $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, porque

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3\,x^2}{3} = x^2 = f(x).$$

Esta primitiva será a única??? Haverá mais primitivas?

Exemplo 1 (Cont.):

- A função $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$ também é uma primitiva de f, porque

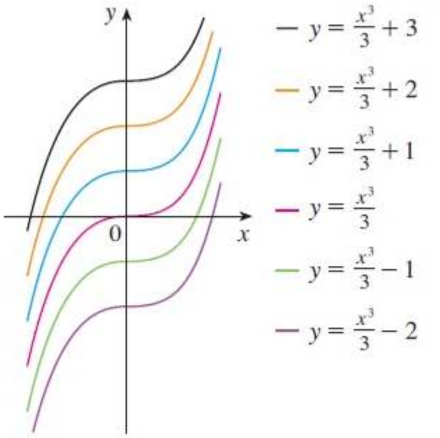
$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = \frac{3\,x^2}{3} = x^2 = f(x).$$

- A função $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2$ também é uma primitiva de f, porque

$$F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)' = \frac{3\,x^2}{3} = x^2 = f(x).$$

Assim, concluímos que existe uma família de primitivas da função f, dada pela expressão geral:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C; \qquad C \in \mathbb{R}.$$


y
0
x
$y = \frac{x^3}{3} + 3$
$y = \frac{x^3}{3} + 2$
$y = \frac{x^3}{3} + 1$
$y = \frac{x^3}{3}$
$y = \frac{x^3}{3} - 1$
$y = \frac{x^3}{3} - 2$

Integral Indefinido: Definição

Chama-se integral indefinido da função f e representa-se por

$$\int f(x)\,dx,$$

a toda expressão da forma $F(x)+C$, em que F é uma primitiva de f.

Assim, por definição,

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x)=f(x).$$

Onde

- $f(x)$ é a função integranda;
- C é a constante de integração;
- x é a variável de integração.

Integral Indefinido: Propriedades

Sejam $f(x)$ e $f_i(x)$, $i = 1, ..., n$ funções que admitem primitivas num dado intervalo I e k constante não nula.
Verifica-se

1. Propriedade da Linearidade da Integração

$$\int \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x)\,dx.$$

   Por exemplo, se $n = 2$ então:
   $\int (f_1(x) + f_2(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$.

2. $$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$$

Exercício 4: Resolva os integrais,

4.1: $\int x^2\,dx$ **4.2:** $\int (2x-1)^2\,dx$ **4.3:** $\int x\sqrt{1-3x^2}\,dx$

Exercício 5: Resolva os integrais,

5.1: $\int \frac{1}{x}\,dx$ **5.2:** $\int \frac{x}{2x^2-1}\,dx$ **5.3:** $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

Exercício 6: Resolva os integrais,

6.1: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **6.2:** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ **6.3:** $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\sec^2 x}}\,dx$

Exercício 7: Resolva os integrais,

7.1: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **7.2:** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ **7.3:** $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

Métodos de Integração: Decomposição

Este método consiste na aplicação da propriedade da Linearidade da Integração.

Aplica-se no cálculo de alguns tipos de integrais de funções trigonométricas:

- Se a função integranda é uma potência par de seno ou cosseno aplicam-se as fórmulas de bissecção, ou seja,

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$$

- Se a função integranda é uma potência ímpar de seno ou cosseno, destaca-se a potência unitária e transforma-se a parte restante, utilizando a fórmula fundamental da trigonometria,

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$$

Exercício 8: Resolva o seguinte integral: $\displaystyle\int \frac{5x - 7x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$.

Exercício 9: Resolva o seguinte integral: $\displaystyle\int \frac{\left(2^{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)\, x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

Exercício 10: Resolva integral $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Exercício 11: Resolva integral $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$.

Métodos de Integração: Partes

Vejamos como integrar o produto de duas funções. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Calcule-se a derivada do seu produto, ou seja,

$$[u\,v]' = u'\,v + u\,v'.$$

Aplique-se integral em ambos os membros:

$$\int [u\,v]'\;dx = \int u'\,v + u\,v'\,dx \Leftrightarrow u\,v = \int u'\,v\,dx + \int u\,v'\,dx.$$

Rearranjando a equação vem:

$$\boxed{\int u'v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx}$$

Que se chama fórmula de integração por partes.

Algumas orientações para a escolha da função a derivar e da função a integrar / primitivar na integração por partes

- Escolhe-se para derivar os polinómios desde que se conheça uma primitiva da outra função.
- Quando a função integranda consiste somente num logarítmo ou numa função trigonométrica inversa, deriva-se essa função e primitiva-se a função 1.
- Quando se aplica o método duas vezes, na segunda integração, tem que se escolher para derivar a derivada da função que inicialmente se escolheu para derivar.

Exercício 12: Resolva o integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Exercício 13: Resolva o integral $\int t^2 \, e^t \, dt$.

Exercício 14: Resolva o integral $\int \ln x \, dx$.

Por vezes resolve-se um integral recorrendo a uma **mudança de variável**, aplicando assim o método de integração por substituição.

Método de Integração por Substituição

Considere-se o integral $\int f(x)\,dx$. Proceda-se à substituição:

$$x = h(t),$$

em que h é uma função contínua que admite inversa e possui derivada contínua. Assim:

$$x = h(t) \Rightarrow dx = h'(t)\,dt.$$

Faz-se a substituição no integral:

$$\int f(x)\,dx = \int f(h(t))\,h'(t)\,dt.$$

Resolve-se o integral em t, apresentando o resultado em função de x.

Exercício 15: Resolver o integral $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$, fazendo a substituição $x = t^2$, $t > 0$.

Exercício 16: Resolver: $\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$, com a substituição $\sqrt{e^x - 1} = t$.

Exercício 17: Resolver: $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$, com a substituição $x = \sqrt{3}\,\text{sen}\,t$.