

Aluno nº _____ Nome _____

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.

1. (1 val.) Seja $X = \{0\}$. Escreva por extensão o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

2. (4 val.) Use as propriedades das operações lógicas para verificar se a proposição

$$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim q)] \Rightarrow (p \wedge q)$$

é uma tautologia, uma contradição, ou nenhuma das duas. Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

3. a) (2 val.) Diga quais das seguintes expressões são proposições e indique, **justificando**, o seu valor lógico:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}$.

(ii) $\forall b \in \mathbb{Z}, \exists a \in \mathbb{Z}, a = b^2$.

b) (1 val.) Para as proposições da alínea anterior, apresente a sua negação sem o símbolo \sim .

4. Considere a relação binária R sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ cuja matriz de adjacências é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (3 val.) Classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

b) (2 val.) Será possível acrescentar elementos a R de modo a tornar-se uma relação de ordem? Justifique.

5. (3 val.) Construa uma prova simbólica, usando as regras de inferência, para mostrar que as hipóteses

H1: *Se houver trânsito ou for sexta-feira, então eu vou de metro e saio em Campanhã.*

H2: *Se eu for de metro, então chego a horas ao comboio.*

H3: *Não cheguei a horas ao comboio.*

implicam que *não é sexta-feira*.

6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que

$$n^2(n+1)^2 \text{ é divisível por 4, para todo o } n \in \mathbb{N}.$$