ALGA	**1º Teste**	
Curso. LECIV	**Data: 2016 – 11 – 14**	**90 ± 15 minutos**

Nome: ______________________ **Número**: __________ **Turma**: _____

Parte I (15 valores)

1. (**2 val.**) Uma matriz quadrada $\mathbf{X}$ diz-se ortogonal sse $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}^{-1}$. Verifique se a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

é ortogonal.

2. (**2 val.**) Use o algoritmo de Gauss-Jordan para determinar a matriz $\mathbf{A}^{-1}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (**3 val.**) Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 9 & 27 & 3 \\ -8 & 0 & a^2-1 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & a & 1 & 2 \\ -32 & 0 & a & 1 & a^2 \end{bmatrix}$ onde a é um parâmetro real.

   a) Calcule $\det(\mathbf{A})$.

   b) Para que valores do parâmetro a a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

4. (**2 val.**) Encontre todas as matrizes não invertíveis que permutam com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. (**3 val.**) Discuta o seguinte SEL em função dos parâmetros reais a e b

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + by + bz = a \\ x - by + az = b \end{cases}$$

6. (**3 val.**) Considere o SEL

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 5y - z = 7 \end{cases}$$

   a) Verifique que todo o elemento do conjunto $S = \{(-1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é solução do SEL.

   b) Encontre, <u>se possível</u>, uma solução do SEL que não pertença a S. <u>Justifique a sua resposta</u>.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	7	8	9	10	11	SR	E	C	Total
Respostas									

. . . .

7. Considere as matrizes $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{n,1}$, onde $\mathbf{b} \neq \mathbf{0_{n,1}}$. Sabendo que $\mathbf{s}'$ e $\mathbf{s}''$, $\mathbf{s}' \neq \mathbf{s}''$, são soluções da equação $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ então podemos concluir que:

   A. $\mathbf{s}' + \mathbf{s}''$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$; C. $\mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$; D. $\mathbf{s}' - \mathbf{s}''$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0_{n,1}}$;

8. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$, uma matriz que satisfaz a relação $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{I}_n$. Então pode-se concluir,

   A. $\mathbf{A}$ não é invertível;

   B. $\mathbf{A}$ é invertível e tem-se $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n - 2\mathbf{A}$;

   C. $\mathbf{A}$ é invertível e tem-se $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_n)$;

   D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & b & e \\ f & b & g \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{A} \text{ invertível, } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Então, para todo α e $\beta \in \mathbb{R}$ tem-se:

   A. $\det(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}) = 0$; B. $\det(\mathbf{A} + \beta\mathbf{C}) = 0$; C. $\det(\mathbf{A} + \beta\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

10. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ invertível tal que $\det(\mathbf{A}) + \det(-\mathbf{A}) = 0$. Então,

   A. n é par; B. n é impar; C. $\det(\mathbf{A}) + \det(-\mathbf{A}) \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;
   D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

11. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a forma matricial de um SEL com conjunto solução

$$\mathrm{CS} = \{(x, -2x+1, 2x-y, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

   Então pode-se concluir,

   A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 1$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$; C. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$; D. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 4$;

ALGA	**1º Teste**	
Curso. LECIV	**Data: 2017 – 11 – 13**	**90 ± 15 minutos**

Nome: ______________________________ **Número**: __________ **Turma**: _____

Parte I (15 valores)

1. (**2 val.**) Considere as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule, se possível, a matriz $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T\mathbf{B})^2$.

2. (**2,5 val.**) Para que valores de a e b a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 2 \\ a^2 & a & 1 & -1 \\ 0 & b & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (**2,5 val.**) Resolva a seguinte equação matricial em ordem à matriz $\mathbf{X}$
$$(\mathbf{A}^T)^2(\mathbf{X}^T + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^2 = (\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{-1}.$$
Suponha todas as matrizes envolvidas invertíveis.

4. (**2,5 val.**) Encontre todas as matrizes anti-simétricas que permutam com
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (**3 val.**) Discuta o seguinte SEL em função dos parâmetros reais a e b
$$\begin{cases} -x + y + z = a \\ a\,x + 2y - z = 2 \\ a\,x - a\,y = b \end{cases}$$

6. (**2,5 val.**) Considere o SEL
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & 2 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ & - & y & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

   a) Averigúe se o SEL é de Cramer.

   b) Resolva o sistema por eliminação Gaussiana.

ALGAN	**1º Teste**	
Curso. LECIV	**Data: 2020 – 12 – 18**	**90 minutos**

Nome: ______________________ **Número**: __________ **Turma**: ______

<u>**Parte I**</u> (15 valores)

1. (**1,5+1,5+1,5+1,5 val.**) Considere as matrizes,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule $\mathbf{A^2}$.

   b) Calcule, $\det(\mathbf{A})$.

   c) Supondo que os coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são todos não nulos, calcule $\mathbf{B^{-1}}$.

   d) Que relação deve existir sobre os pârametros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutem?

2. (**3 val.**) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2a+1 & 2a & 2a+1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. (**2,5**) Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Sabendo que $\left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\right)^{-1}\right)^T = \mathbf{X}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}$, calcule, se possível $\det(\mathbf{X})$.

4. (**2+1,5 val.**) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

   a) Discuta o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em função dos parâmetros reais a e b.

   b) Considere $a = 0$ e $b = 9$. Determine o valor de x_2 que satisfaz o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ <u>usando a fórmula de Cramer</u>.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	5	6	7	8	9	SR	E	C	Total
Respostas									

. . . .

5. Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b+c & e+f & h+i \\ a+b & d+e & g+h \\ 2c & 2f & 2i \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\det(\mathbf{A}) = 1$, podemos concluir que

A. $\det(\mathbf{B}) = -1$; B. $\det(\mathbf{B}) = -2$; C. $\det(\mathbf{B}) = -4$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

6. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_3$. Se $\det(\mathbf{A}) = 2$ e $\det(\mathbf{B}) = -4$ então tem-se

A. $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = -8$; B. $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = 4$; C. $\det(-2\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}) = -\frac{1}{8}$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

7. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_3$ uma matriz tal que: $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Então, podemos concluir;

A. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$; B. $\mathbf{A}$ não é invertível; C. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

8. Seja $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a forma matricial de um sistema de equações lineares com conjunto solução

$$CS = \{(x, y, 2x+3y, x+2y, 4x-y) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Então, podemos concluir;

A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 5$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$; C. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$. Supondo que: $(\mathbf{AX} - \mathbf{XB})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 3$ e que $\mathbf{B}$ permuta com $\mathbf{X}$, então tem-se;

   A. $\det(\mathbf{X}) = 3^n$;

   B. $\det(\mathbf{X}) = (-3)^n$;

   C. $\det(\mathbf{X}) = (-1)^n$;

   D. Nenhuma das opções anteriores está correta.

ALGAN	**1º Teste**	
Curso. LECIV	**Data: 2020 – 11 – 21**	**90 minutos**

Nome: ______________________ **Número**: __________ **Turma**: _____

Parte I (15 valores)

1. (**1+2+2 val.**) Considere a matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcule $\mathbf{A^2}$.

   b) Calcule, $\det(\mathbf{A})$.

   c) Se possível, calcule $\mathbf{A^{-1}}$.

2. (**3 val.**) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2 & 1 & 1 \\ 3a & 2 & 2 & 1 \\ 4a & a & a & a+1 \end{bmatrix}.$$

3. (**1+2,5**) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

   a) Verifique se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ permutam.

   b) Encontre, se possível, uma matriz $\mathbf{X}$ tal que

$$\mathbf{ABX^TA^{-1}} = \mathbf{BA}$$

   .

4. (**2,5+1 val.**) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2\alpha+1 \end{bmatrix}.$$

   a) Discuta o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em função do parâmetro α.

   b) Considere $\alpha = -1$. Determine o valor de x_3 que satisfaz o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando a fórmula de Cramer.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	5	6	7	8	9	SR	E	C	Total
Respostas									

. . . .

5. Considere as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 6d & g \\ 2b & 12e & 2h \\ c & 6f & i \end{bmatrix}$$

Sabendo que $\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}$, podemos concluir que

A. $\det(\mathbf{B}) = 6$; B. $\det(\mathbf{B}) = 2$; C. $\det(\mathbf{B}) = 4$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

6. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_6$. Se $\det(\mathbf{A}) = 2$ e $\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}$ então tem-se

A. $\det(-\mathbf{AB}) = -1$; B. $\det(-\mathbf{AB}) = -2$; C. $\det(-\mathbf{AB}) = 1$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

7. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{20}$ uma matriz tal que: $\mathbf{A}^{12} = \mathbf{I}_{20}$. Então, podemos concluir;

A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 12$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 8$; C. $\mathbf{A}^{-6} = \mathbf{A}^6$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores.

8. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a forma matricial de um sistema de equações lineares com conjunto solução

$$CS = \{(x, x, x, x-1, x, x) \in \mathbb{R}^6 \,:\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Então, uma solução do sistema homogénio associado é;

A. $(2, 2, 2, 3, 2, 2)$; B. $(2, 2, 2, 1, 2, 2)$; C. $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere a matriz $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   A. Todas as matrizes que permutam com $\mathbf{J}$ são simétricas;

   B. Todas as matrizes que permutam com $\mathbf{J}$ são anti-simétricas;

   C. Todas as matrizes que permutam com $\mathbf{J}$ têm todas as entradas no conjunto $\{0, 1\}$;

   D. Nenhuma das opções anteriores é válida.

ALGAN	**1º Teste**	
Curso. LECIV	**Data: 2019 – 11 – 25**	**90 ± 15 minutos**

Nome: ______________________ **Número**: __________ **Turma**: ______

Parte I (15 valores)

1. (**2,5 val.**) Considere as matrizes,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Calcule a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$.

2. (**2,5 val.**) Para que valores de a e b a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \\ \pi & 0 & a & 2 \\ -\pi & 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

3. (**2,5 val.**) Resolva a seguinte equação matricial em ordem à matriz $\mathbf{X}$

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{X}\mathbf{A})^T)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}.$$

   Onde todas as matrizes envolvidas são invertíveis.

   N.B. Indique todas as propriedades usadas na resolução.

4. (**3+2,5+2 val.**) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Discuta o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em função do parâmetro α.

   b) Considere $\alpha = 1$. Determine $\mathbf{A}^{-1}$, <u>usando o algoritmo de Gauss-Jordan</u>.

   c) Considere $\alpha = -1$. Determine o valor de x_2 que satisfaz o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ <u>usando a fórmula de Cramer</u>.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	5	6	7	8	9	SR	E	C	Total
Respostas									

. . . .

5. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ a & b & c & d \\ 1 & a & 2 & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3a & 3 \\ 2 & 3 & b & a \\ 2 & 1 & c & 2 \\ 4 & 4 & d & a \end{bmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Então tem-se

A. $\det(\mathbf{B}) = 6\det(\mathbf{A})$; B. $\det(\mathbf{B}) = 2\det(\mathbf{A})$; C. $\det(\mathbf{B}) = -2\det(\mathbf{A})$; D. Nenhuma das opções anteriores está correta;

6. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a forma matricial de um SEL com n equações em n incógnitas. Então,

   A. Se o SEL é possível e indeterminado então $\mathbf{A}$ é invertível;

   B. Se o SEL é impossível então pode-se concluir que $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$;

   C. Se $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ então pode-se concluir que o SEL é possível e determinado;

   D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

7. Considere as matrizes $\mathbf{A},\ \mathbf{B}, \in \mathcal{M}_n$. Supondo que $\mathbf{A}^3\mathbf{B}^2(\mathbf{A}^T)^{-3} = 4\mathbf{I}_n$, e que $\det(\mathbf{A}) = 2$, então tem-se,

   A. $\det(\mathbf{B}) = \pm 1$; B. $\det(\mathbf{B}) = \frac{1}{2^n}$; C. $\det(\mathbf{B}) = 2^n$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

8. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a forma matricial de um sistema de equações lineares com conjunto solução

$$CS = \{(x, x+2y, x-y+3z, y, y) \in \mathbb{R}^5 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Então, pode-se concluir que

A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$; C. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. O conjunto de todas as matrizes que permutam com a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ têm a forma,

   A. $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & y & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

   B. $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & t & u \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, $x, y, z, t, u \in \mathbb{R}$;

   C. $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$; $x, y, z, t \in \mathbb{R}$;

   D. Nenhuma das opções anteriores é válida;

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	7	8	9	10	11	SR	E	C	Total
Respostas									

....

7. Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ a+b & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ ab+b^2 & 2b & b \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Então tem-se

A. $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$; B. $\det(\mathbf{B}) = 2b\det(\mathbf{A})$; C. $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$; D. $\det(\mathbf{B}) = -b\det(\mathbf{A})$;

8. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a forma matricial de um SEL com conjunto solução

$$\text{CS} = \{(a, a-b, 1, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Então pode-se concluir,

A. $\text{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 4$; B. $\text{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3$; C. $\text{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$; D. $\text{r}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) > \text{r}(\mathbf{A})$;

9. Considere as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_n$. Supondo que $(\mathbf{AB^2C}^3)^T + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{O}_n$, $\det(\mathbf{B}) = 3$ e que $\det(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}$, então tem-se,

A. $\det(\mathbf{A}) = (-1)^n\,\frac{16}{9}$; B. $\det(\mathbf{A}) = (-1)^n\,\frac{16}{3}$; C. $\det(\mathbf{A}) = \frac{16}{9}$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

10. Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ tal que $\mathbf{A}^9 \neq \mathbf{O}_n$ e $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{O}_n$. Então, pode-se concluir que

A. $\det(\mathbf{A}) = 0$; B. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^9$; C. $\det(\mathbf{A})^9 \neq 0$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

11. Considere as matrizes $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ e $\mathbf{s} \in \mathcal{M}_{n,1}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{O}_{n,1}$. Se $\mathbf{As} = 2\mathbf{s}$ então pode-se concluir que

A. $\text{r}(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{I}_n) = n$; B. $\text{r}(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{I}_n) < n$; C. $\text{r}(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{I}_n) > n$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores;

ALGA	$1^{\underline{o}}$ Teste	
Curso. LECIV	Data: 2018 – 11 – 19	90 ± 15 minutos

Nome: ______________________ **Número:** __________ **Turma:** ______

Parte I (15 valores)

1. (**2 val.**) Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ diz-se ortogonal se $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

   a) Mostre que se uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ é ortogonal então $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

   b) Verifique se a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ é ortogonal.

2. (**2 val.**) Para que valores de a e b a matriz $\mathbf{A}$ é invertível?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

3. (**2 val.**) Resolva a seguinte equação matricial em ordem à matriz $\mathbf{X}$

$$2\mathbf{X}^{-1} + (\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

   Suponha todas as matrizes envolvidas invertíveis.

4. (**6 val.**) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha-1 \\ \alpha-1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha-1 \end{bmatrix}.$$

   a) Discuta o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em função do parâmetro α.

   b) Considere $\alpha = 2$. Determine $\mathbf{A}^{-1}$, <u>usando o algoritmo de Gauss-Jordan</u>.

   c) Considere $\alpha = -1$. Determine o valor de x_2 que satisfaz o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando a fórmula de Cramer.

5. (**1,5 val.**) Considere o conjunto $\mathbb{R}^3$ munido com a adição usual e com o produto de um escalar por um vector definido por

$$\begin{array}{cccc} \otimes : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\alpha, (x, y, z)) & \mapsto & \alpha \otimes (x, y, z) = (\alpha^2 x, \alpha y, \alpha z) \end{array}$$

   a) Verifique se o axioma $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3,\quad (\alpha\beta) \otimes \mathbf{u} = \alpha \otimes (\beta \otimes \mathbf{u})$ é satisfeito.

   b) Mostre que $\mathbb{R}^3$ munido com as operações acima definidas **não é** um espaço vectorial real.

6. (**1,5 val.**) Encontre uma base do subespaço $\mathcal{F} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0 \wedge\ x - 2y + 3z + t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Parte II (5 valores)

A cada questão corresponde uma única resposta correta. As respostas têm que ser apresentadas na grelha seguinte com uma das opções (A,B,C ou D). Se não responder ou der mais do que uma resposta a uma questão, terá cotação **zero**. Cada resposta certa vale **1 valor** e cada resposta errada terá uma penalização de **1/3 de valor.**

Questão	7	8	9	10	11	SR	E	C	Total
Respostas									

....

7. Considere as matrizes
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & c+2 \\ 2 & 1 & c+4 \\ a & b & c+2a \end{bmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Então tem-se
A. $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$; B. $\det(\mathbf{B}) = 2\det(\mathbf{A})$; C. $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$; D. $\det(\mathbf{B}) = c\det(\mathbf{A})$;

8. Seja $\mathcal{L} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ uma lista de vectores de um espaço vectorial $\mathcal{E}$ tal que $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{E}$. Então pode-se concluir,
A. $\dim(\mathcal{E}) = 3$; B. $\dim(\mathcal{E}) \leq 3$; C. $\dim(\mathcal{E}) \geq 3$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

9. Considere as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_n$. Supondo que $(2\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BC} = \mathbf{I}_n$, $\det(\mathbf{B}) = 2$ e que $\det(\mathbf{C}) = 3$, então tem-se,
A. $\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{2^{n-1}}$; B. $\det(\mathbf{A}) = \frac{3^{n-1}}{2}$; C. $\det(\mathbf{A}) = \frac{3}{2^{n-1}}$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

10. Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a forma matricial de um sistema de equações lineares com conjunto solução
$$CS = \{(x, x, x, x, x) \in \mathbb{R}^5 : x \in \mathbb{R}\}.$$
Então, pode-se concluir que
A. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$; B. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$; C. $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3$; D. Nenhuma das opções anteriores está correcta.

11. Seja $\mathcal{L} = \left(x+1, (x+1)^2\right)$ uma lista de $P_2[x]$. Então se $p(x) \in \overline{P_2[x]}$ podemos concluir,
A. $\mathcal{L}$ é linearmente dependente; B. $\mathcal{L}$ gera $P_2[x]$; C. $p(-1) = 0$; D. Não se pode concluir nenhuma das opções anteriores;