Licenciatura em Engenharia Informática (LEI)

2024/2025

Análise Matemática (AMATA)

CAPÍTULO 5

Séries.

EXERCÍCIOS

SÉRIES NUMÉRICAS

1. Estude a natureza das seguintes séries geométricas e, em caso de convergência, calcule a respectiva soma:

   1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-2n+1}$ 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^{3n+1}}$

   1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$ 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n}$

2. Analise se as seguintes séries são convergentes:

   2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$ 2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5+7n}$

   2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} 7$ 2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ 2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n^6}} + \frac{5}{n^2} \right)$

3. Classifique as seguintes séries alternadas quanto à convergência:

   3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{2n-1}}$ 3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

4. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{k^n}{2^{2+2n}}$, $k \in \mathbb{R}$.

   Diga para que valores de k, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

5. Estude a natureza das seguintes séries:

5.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^3+1}$

5.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

5.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$

5.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n-2}$

5.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

5.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$

5.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$

5.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

6. Sejam $a_n = \dfrac{3^{2-2n}}{2^{2-n}}$ e $b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

6.1 Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$.

6.2 Calcule, se possível, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, justificando convenientemente a sua resposta.

6.3 Classifique a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Justifique convenientemente.

7. Sejam $u_n = \dfrac{5}{2^{2n-1}}$ e $v_n = (-1)^{n+1} 3n^{-2}$.

7.1 Caracterize a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e mostre que é convergente.

7.2 Analise o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Justifique convenientemente a sua resposta.

8. Sejam $u_n = \dfrac{2^{-3n-1}}{7^{-n+1}}$, $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^{\alpha-1}}}$ e $w_n = 9$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.1 Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e, se possível, calcule a sua soma.

8.2 Determine α de modo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ seja absolutamente convergente. Justifique convenientemente a sua resposta.

8.3 Analise o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)$ quanto à convergência. Justifique convenientemente a sua resposta.

9. Considere-se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série geométrica convergente. Sabe-se que o primeiro termo é $a = 5$ e que a sua soma é $S = 10$. Determine a expressão do termo geral u_n.

10. Considere as sucessões $u_n = \dfrac{7^{5-n} 5^{\frac{n-3}{2}}}{9^{2n+2}}$ e $v_n = \sqrt[4]{n^{-\frac{a+1}{2}}}$ ($a \in \mathbb{R}$) e a série convergente desconhecida $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n > 0$).

10.1 Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

10.2 Determine o valor de a para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ seja divergente.

10.3 Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação
"A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ é absolutamente convergente".

11. Estude a natureza das seguintes séries:

11.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2n^2+1}$

11.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n^3+4}}$

11.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3n-1}$

11.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$

12. Considere a sucessão $u_n = \frac{k^{2n-1}}{2^{1-n}}$, $k \in \mathbb{R}$. Determine o valor de k de modo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tenha soma.

CONVERGÊNCIA DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

13. Indique o centro de convergência e determine o raio e o intervalo de convergência para cada uma das séries de potências:

13.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

13.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)!}$

13.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^3}(x+2)^n$

13.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$

13.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^{3n}}(x+4)^n$

13.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$

13.7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n!}(x-4)^n$

13.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

DESENVOLVIMENTO de FUNÇÕES em SÉRIES de TAYLOR e de MACLAURIN. POLINÓMIOS de TAYLOR e de MACLAURIN

14. Determine a série de Maclaurin representativa de cada uma das seguintes funções. Para cada função está indicado o respetivo intervalo de convergência.

    14.1 $f(x) = e^{5x}$. $(\forall x \in \mathbb{R})$

    14.2 $f(x) = \ln(1 - 10x)$. $\left(x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[\right)$

15. Determine a série de Taylor representativa de cada uma das seguintes funções, no ponto a indicado. Para cada função está indicado o respetivo intervalo de convergência.

    15.1 $f(x) = e^{3x}$, $a = -2$. $(\forall x \in \mathbb{R})$

    15.2 $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $a = 1$. $(x \in]-1, 3[)$

16. Determine a expressão dos polinómios $P_n(x)$ para cada uma das seguintes funções, em torno dos pontos indicados:

    16.1 $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 2$ e $a = 4$.

    16.2 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $n = 5$ e $a = 0$.

17. Sendo dada a função $f(x) = \ln(3x - 2)$, representável por um desenvolvimento em série de Taylor para $a = 1$, cujo intervalo de convergência é $\left]\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$, determine:

    17.1 Determine a referida série de Taylor.

17.2 Determine um valor aproximado de $\ln(2)$ com base no polinómio de Taylor de 5^a ordem em torno a $a = 1$.

18. Sendo dada a função $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$, representável por um desenvolvimento em série de MacLaurin, cujo intervalo de convergência é $\left]-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right[$, determine:

18.1 A expressão da referida série.

18.2 A expressão do polinómio de MacLaurin relativo à função f, considerando $n = 3$.

18.3 Um valor aproximado de $\dfrac{2}{3}$, com base na alínea anterior.

19. Seja dada a função $f(x) = \ln(2x - 1)$. representável por um desenvolvimento em série de Taylor, em torno de $a = 1$. Cujo intervalo de convergência e $\left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$, determine:

19.1 A expressão da referida série.

19.2 A expressão do polinómio de Taylor relativo à função f, considerando $a = 1$ e $n = 3$.

19.3 $f\left(\dfrac{5}{4}\right)$, com base na expressão obtida na alínea anterior.

20. Seja dada a função $f(x) = 2^{2x}$, representável por um desenvolvimento em série de MacLaurin, $\forall x \in \mathbb{R}$, determine:

20.1 A expressão do polinómio de MacLaurin relativo à função f, considerando $n = 3$.

20.2 Um valor aproximado de $\sqrt{2}$, com base na expressão obtida na alínea anterior.

21. Seja dada a função $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$, representável por um desenvolvimento em série de MacLaurin, cujo intervalo de convergência é $]-2,2]$. Determine:

21.1 A expressão do polinómio de MacLaurin para $n = 3$.

21.2 Um valor aproximado de $f(1)$, com base na expressão obtida na alínea anterior.

22. Sendo dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, representável por um desenvolvimento em série de Taylor, em torno $a = 2$, cujo intervalo de convergência é $]0,4[$, determine:

22.1 A expressão da referida série.

22.2 A expressão do polinómio de Taylor relativo à função f, considerando $a = 2$ e $n = 4$.

22.3 Um valor aproximado de $\dfrac{1}{9}$, com base na alínea anterior.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.1 $r = \frac{1}{25}$, convergente, $S = \frac{5}{24}$; **1.2** $r = \frac{5}{8}$, convergente, $S = \frac{5}{6}$;
1.3 $r = \frac{16}{27}$, convergente, $S = \frac{4}{33}$; **1.4** Divergente;
2.1 Convergente; **2.2** Divergente; **2.3** Divergente;
2.4 Divergente; **2.5** Divergente; **2.6** Convergente;
3.1 Absolutamente convergente; **3.2** Simplesmente convergente;
4. $k \in \,]-4, 4[$;
5.1 Absolutamente convergente; **5.2** Convergente;
5.3 Convergente; **5.4** Divergente;
5.5 Divergente; **5.6** Convergente; **5.7** Divergente;
5.8 Convergente; **6.2** $S = \frac{9}{14}$; **6.3** Convergente;
7.1 Série Geométrica com $a = \frac{5}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$, convergente;
7.2 Absolutamente convergente; **8.1** $r = \frac{7}{8}$, convergente, $S = \frac{1}{2}$;
8.2 $\alpha > 3$; **8.3** Divergente;
9. $u_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; **10.1** $r = \frac{\sqrt{5}}{567}$, convergente; **10.2** $a \leq 7$;
10.3 Verdade; **11.1** Convergente; **11.2** Divergente; **11.3** Divergente; **11.4** Convergente; **12.** $k \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$;
13.1 $a = 0$, $R = 1$, $I.C. =]-1, 1]$;
13.2 $a = 0$, $R = \infty$, $I.C. =]-\infty, +\infty[$;
13.3 $a = -2$, $R = 0$, $I.C. = \{-2\}$;
13.4 $a = 4$, $R = 10$, $I.C. =]-6, 14[$;
13.5 $a = -4$, $R = 8$, $I.C. =]-12, 4[$;
13.6 $a = 0$, $R = 1$, $I.C. = [-1, 1]$;
13.7 $a = 4$, $R = \infty$, $I.C. =]-\infty, +\infty[$;
13.8 $a = 0$, $R = \frac{1}{2}$, $I.C. = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
14.1 $e^{5x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
14.2 $\ln(1-10x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n} x^n$, $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right[$;
15.1 $e^{3x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{e^6 n!} (x+2)^n$, $x \in \mathbb{R}$;

15.2 $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-1)^n$, $x \in \,]-1,3[$;
16.1 $P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$;
16.2 $P_5(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5$;
17.1 $\ln(3x-2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^n}{n}(x-1)^n$, $x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$;
17.2 $\ln(2) = f\left(\frac{4}{3}\right) \approx P_5\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{47}{60}$;
18.1 $\dfrac{1}{3x+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n x^n$, $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$;
18.2 $P_3(x) = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3$; **18.3** $\frac{2}{3} = f\left(\frac{1}{6}\right) \approx P_3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{8}$;
19.1 $\ln(2x-1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}(x-1)^n$, $x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$;
19.2 $P_3(x) = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3$;
19.3 $f\left(\frac{5}{4}\right) \approx P_3\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{12}$;
20.1 $P_3(x) = 1 + (2\ln 2)x + 2(\ln 2)^2 x^2 + \frac{4}{3}(\ln 2)^3 x^3$;
20.2 $\sqrt{2} = f\left(\frac{1}{4}\right) \approx P_3(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{8} + \frac{(\ln 2)^3}{48}$;
21.1 $P_3(x) = -\ln 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3$;
21.2 $f(1) \approx P_3(1) = -\ln 2 - \frac{5}{12}$;
22.1 $\frac{1}{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}(x-2)^n$, $x \in]0,4[$;
22.2 $P_4(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \frac{5}{64}(x-2)^4$;
22.3 $\frac{1}{9} = f(3) \simeq P_3\,(3) = \frac{9}{64}$.