Licenciatura em Engenharia Informática (LEI)

2024/2025

Matemática Computacional (MATCP)

CAPÍTULO 5

Testes de Hipóteses (TH).

EXERCÍCIOS

Fonte: Professora Hermínia Ferreira e livro recomendado na unidade curricular.

TESTES DE HIPÓTESES ENVOLVENDO VALORES ESPERADOS E PROPORÇÕES

1. Admita que o número de automóveis que saem do parque do ISEP no intervalo das 12:00h às 12:10h é uma v.a. com distribuição de Poisson de média 2.4 carros.
   Depois de efetuadas algumas alterações nas normas de acesso ao parque, o número de automóveis que saem, naquele intervalo de tempo, foi registado diariamente durante 100 dias.
   O resultado deste registo encontra-se no quadro seguinte:

Número de automóveis	0	1	2	3	4
Número de dias	15	25	30	25	5

   Pode concluir que a proporção de dias em que saem mais de dois automóveis, naquele intervalo de tempo, se mantém? Responda através da região crítica com 10% de significâcia.

2. O diretor de produção de uma fábrica de vestuário para jovens (idade maior ou igual a 12 anos e não superior a 35 anos) suspeita que o mercado para os seus produtos está a mudar. Em anos anteriores a distribuição dos compradores por idades era a seguinte:

% de compradores	Idade X
14	$X \leq 15$
40	$15 \leq X < 20$
26	$20 \leq X < 25$

   Numa amostra recente de tamanho 200, recolhida ao acaso, obtiveram-se os seguintes resultados:

Número de compradores	Idade X
22	$X \leq 15$
62	$15 \leq X < 20$
60	$20 \leq X < 25$

A partir destas informações, pode o diretor de produção concluir que a percentagem de compradores com 20 ou mais anos aumentou? Responda através da região crítica com 5% de significância.

3. Uma empresa de segurança de serviço permanente pretende fazer uma análise estatística do número de alarmes que recebe diaramente das habitações dos seus clientes. Presume-se que a variável em causa tem distribuição de Poisson com valor médio de 0.5.
   Com o aumento da insegurança, a empresa resolveu efetuar um estudo desta variável registando os alarmes recebidos durante 60 dias e obteve um valor médio e desvio padrão de 0.7 alarmes por dia.

   3.1 Podemos afirmar, com um nível de significância de 5% que o aumento de insegurança refletiu-se no número de alarmes recebidos?

   3.2 Calcule o valor de prova (valor-p) associado ao teste efetuado e conclua sobre a confirmação ou não da decisão da alínea anterior.

4. A investigação em medicina desenvolveu um novo coração artificial constituído principalmente por titânio e matéria plástica. O coração durará indefinidamente após ser implantado no corpo do paciente, mas a bateria precisa de ser recarregada a cada doze horas. Foi selecionada uma

amostra aleatória de 50 baterias e submetidas a uma prova de vida. A vida média dessas materias foi de 12.05 horas. Suponha que a vida util da bateria seja normalmente distribuída com desvio padrão de 0.2 horas.

4.1 Há evidência para sustentar a afirmação de que a vida útil da bateria excede 12 horas? Responda com um nível de significância de 5%.

4.2 Determine a potência do teste, se a verdadeira vida média dessas baterias for de 12.1 horas.

5. Um programa de computação deve gerar números pseudo-aleatórios, ou seja, concretizações da uma variável aleatória X com função de distribuição acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \; x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & \Leftarrow \; 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow \; x > 2 \end{cases}$$

Foram gerados e agrupados 100 números pseudo-aleatórios, tendo-se obtido a seguinte tabela:

Classe	0.0 − 0.5	0.5 − 1.0	1.0 − 1.5	1.5 − 2.0
Frequência	39	32	16	13

Está a percentagem de números pseudo-aleatórios inferiores a 1.0 de acordo com o esperado? Responda com uma significância de 5%.

6. O fabricante de certa marca de lubrificante informa que as embalagens do seu produto têm em média 500ml com desvio padrão 25ml. Tendo sido encontradas, no mercado, algumas embalagens com menos de 500ml, suspeita-se que

a informaçao do fabricante, no que respeita à média, seja falsa. Para verificar se isto ocorre, um fiscal analisa uma amostra de 200 a embalagens escolhidas aleatoriamente e constata que as mesmas contêm em média 498ml.

6.1 Podemos afirmar, com um nível de significância de 5% que a informação do fabricante é falsa?

6.2 Calcule o valor de prova (valor-p) associado ao teste efetuado e conclua sobre a confirmação ou não da decisão da alínea anterior.

7. A energia consumida por cada uma das máquinas de uma unidade de produção é, nos dias de trabalho, uma v.a. normal com uma média de 90kWh e desvio padrão 20kWh. Analisou-se o consumo de 30 dessas máquinas em que se tentou melhorar o sistema de funcionamento, encontrando-se uma média de 88kWh. Indique, com um nível de significância de 5%, se é legítimo afirmar que foi reduzido o consumo.

8. Em determinada localidade, os bombeiros não recebem chamadas em 5% dos dias. Admita a aplicabilidade da distribuição de Poisson.

8.1 Calcule a probabilidade de, numa semana, os bombeiros receberem, nos três primeiros dias, um total de chamadas inferior a sete e, nos quatro últimos, um total de chamadas superior a dez.

8.2 Em 100 dias verificou-se que os bombeiros receberam 250 chamadas. Acha que os bombeiros estão a ser menos solicitados? Responda com um nível de significância de 4%.

9. Um revendedor afirma que pelo menos 20% de pessoas prefere o seu produto. Com base no conhecimento de que numa amostra de 100 pessoas, 15 afirmaram preferir o produto. Poder-se-á aceitar a afirmação do revendendor usando um nível de significância de 4%?

10. Uma loja recebe do seu fornecedor um determinado produto alimentar perecível, com um prazo de consumo exponencialmente distribuído. Sabe-se que 49% dos produtos duram mais de 5 semanas.

    10.1 Entre os que ultrapassam o prazo médio, calcule percentagem dos que se podem consumir para além das oito semanas.

    10.2 O dono da loja verificou que em 50 produtos que recebeu, não conseguiu vender 14 dentro do prazo de validade. Estimativas anteriores, indicavam que 20% dos produtos não eram vendidos dentro do prazo de validade. Será que a procura está a diminuir? Justifique convenientemente a um nível de significância de 3%.

11. Num hipermercado, o nível de aceitação de um determinado produto da marca A é de 40%. Após ter sido mudada a embalagem do mesmo, verificou-se que em 400 compradores do produto, 180 escolheram a marca A.

    11.1 Poder-se-á concluir que a nova embalagem beneficia a compra da marca A? Responda com um nível de significância de 5%.

    11.2 O departamento comercial da empresa que fabrica o produto da marca A, estimou que o nível de aceitação do mesmo, após a mudança da embalagem, se situaria no intervalo de 42% a 50%, centrado no valor amostral, através de uma sondagem realizada a 300 clientes. Qual a confiança que atribui a esta estimativa?

12. O tempo de funcionamento de um dado tipo de motor, quando abastecido com 1 litro de gasóleo, distribui-se normalmente, com valor médio de 1 hora e 55 minutos e desvio padrão de 10 minutos. Após alguns meses de fabrico e, ao testar 12 motores, observou-se um tempo médio de funcionamento de 1 hora e 47 minutos. Haverá razão para suspeitar de um aumento no consumo médio desse tipo de motor? (Admita não haver razões para pôr em causa a anterior distribuição dos tempos de funcionamento e considere $\alpha = 0.05$).

13. A observação dos pesos dos 40 primeiros estudantes do género masculino que se matricularam este ano em determinado escola de Desposto, gerou os resultados seguintes:

Peso (kg)	Número de estudantes
53.5 – 58.5	3
58.5 – 63.5	5
63.5 – 68.5	9
68.5 – 73.5	12
73.5 – 78.5	5
78.5 – 83.5	4
83.5 – 88.5	2

13.1 Calcule a média e o desvio padrão da amostra. Apresente os resultados com duas casas decimais.

13.2 Suponha que durante os últimos cinco anos o peso médio dos estudantes do género masculino que entraram para a referida escola foi de 67kg com um desvio padrão de 6kg. Haverá razão para supor que os novos estudantes têm maior peso que os anteriores? Porquê? ($\alpha = 0.05$). Considere que o peso da população segue uma distribuição normal.

14. Em determinada unidade curricular e usando um método de ensino tradicional, 80% dos estudantes são aprovados. Ensaiado novo método de ensino, numa turma de 32 alunos, foram aprovados 29.

    14.1 Pode afirmar-se que o novo metodo de ensino melhora o aproveitamento escolar, com base naquela informação? ($\alpha = 0.05$).

    14.2 Qual deveria ser o número mínimo de estudantes na amostra, para que o conclusão fosse contrária à obtida na alínea anterior? E qual deveria ser o nível de significância para que a conclusão fosse contrária à obtida na alínea anterior ($n = 32$)?

15. O dono de um restaurante conhece o volume de vendas diário, que admite tratar-se de uma v.a. normal com média 20u.m. e variância 25u.m^2.. Algumas semanas depois da admissão de uma nova cozinheira, verifica-se que a média das vendas de 40 dias foi de 21.1u.m..

    15.1 Admitindo que todas as circunstâncias se mantiveram e considerando um nível de significância de 5%, diga se podemos concluir que a nova cozinheira é mais apreciada que a anterior.

    15.2 Nas condições descritas, qual o nível de significância que levaria a tirar uma conclusão contrária?

16. Numa fábrica de máquinas de lavar roupa, está em estudo um melhoramento para reduzir o consumo de água em cada operação de lavagem. Foram ensaiadas 30 máquinas com o melhoramento e outras tantas sem esse melhoramento. Os valores obtidos são os seguintes:

	Consumo médio	Desvio padrão
Com melhoramento	1.60m^3	0.40m^3
Sem melhoramento	1.80m^3	0.40m^3

Considere populações com distribuição normal e variâncias, desconhecidas e diferentes.

16.1 Com base nos valores encontrados nesta amostra, deve admitir-se que o melhoramento tem resultados significativos? Responda com um nível de significância de 5%.

16.2 Qual o nível mínimo de significância que, nas condições descritas, permite aceitar o melhoramento?

17. Uma empresa utiliza veículos das marcas *TurboA* e *TurboB*, admitindo-se características idênticas a todos os veículos da mesma marca. Verificou-se que, em 100km percorridos por cada veículo, os 30 veículos da marca *TurboA* gastaram, em média, 8.9l, enquanto que os 30 veículos da marca *TurboB* consumiram, em média, 8.8l. Para os veículos da marca *TurboA* tem-se $\sigma_A = 0.3\text{l}$ e para os veículos da marca *TurboB* tem-se $\sigma_B = 0.4\text{l}$ e considere populações normais.
Pode considerar-se que o consumo dos veículos da marca *TurboB* é inferior ao consumo dos veículos da marca *TurboA*? Responda com 5% de significância.

18. Depois de uma falha geral no sistema informático de uma empresa, o gerente deseja saber se daí resultou uma alteração no tempo médio de processamento de uma determinada tarefa. Antes da falha, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma v.a. normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a falha não tenha alterado a variabilidade do sistema.

    18.1 Quais seriam a hipótese nula e a hipóteses alternativa para o teste que estudasse este caso?

    18.2 Utilizando amostras de tamanho 60 e uma significânca de 4%, qual seria a região crítica?

19. O peso, em kg, de determinado tipo de animal é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade:

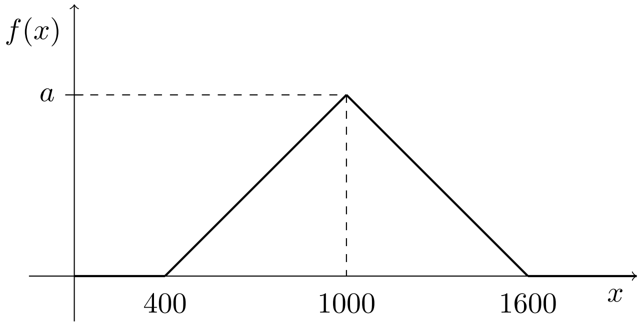
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < k \\ 3 - x & \text{se} \quad k < x < 3 \\ 0 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

    19.1 Pesaram-se, recentemente, 100 animais e encontrou-se um peso médio de 2.15kg. Poderá aceitar-se que o peso médio daqueles animais se mantém? (Responda com 4% de significância).

    19.2 Que tamanho da amostra deveria ser considerado para que a resposta dada na alínea anterior fosse contrária, admitindo que a média da amostra se mantinha?

20. O presidente da Associação dos Industriais de um dado setor alimentar afirma que o salário médio dos trabalhadores

desse setor é de 1000u.m. e que a sua distribuição está representa na figura seguinte:



A tabela abaixo, resulta de uma amostra representativa dos salários (em u.m.) de 80 trabalhadores de empresas desse setor alimentar.

Salário	$400-500$	$500-1000$	$1000-1200$	$1200-1600$
N^o de trab.	18	20	20	22

Poderá admitir-se, com base nos resultados desta amostra, que a percentagem de trabalhadores que ganham mais de 1000u.m. está de acordo com as afirmações do presidente da associação? ($\alpha = 0.10$).

21. Pretende-se comparar o aproveitamento de duas turmas, A e B, de 40 e 50 alunos, respetivamente, de uma unidade curricular do ISEP. No exame, a média e o desvio padrão das classificações foram, respetivamente, de 74% e 8%, na turma A, e de 78% e 7%, na turma B.
    Teste, com um nível de significância de 5%, se existe uma diferença de aproveitamento significativa entre as duas turmas.

22. Uma fábrica produz memórias de computador. No passado, essas memórias tinham a probabilidade 0.15 de avariarem nas primeiras 500 horas de funcionamento. Entretanto, devido ao forte investimento em nova tecnologia, a direção espera ter reduzido essa probabilidade. Para verificar esta suposição, testou-se 40 memórias e registou-se o número de avarias.

    22.1 Formule as hipóteses nula e alternativa.

    22.2 Determine a região de rejeição para um nível de significância $\alpha = 0.05$.

    22.3 Suponha que se decide não rejeitar H_0, se o número de avarias for maior ou igual a quatro. Qual seria o nível de significância?

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

1. $\hat{p} = 0.30 \in RR =]-\infty, 0.35] \cup [0.51, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 10%, para concluir que a proporção de dias em estudo se alterou; **2**. $\hat{p} = 0.58 \in RR = [0.52, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para concluir que a proporção de compradores em estudo aumentou;
3.1 $\bar{x} = 0.7 \in RR = [0.65, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para concluir que, em consequência do aumento de insegurança, o número médio de alarmes aumentou;
3.2 valor-p=0.01 $< \alpha = 0.05$, logo confirma-se a rejeição de H_0.
4.1 $\bar{x} = 12.05 \in RR = [12.05, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0. No entanto, neste caso, a evidência estatística não é forte, aconselhando-se a repetir a experiência com uma amostra com um maior número de observações; **4.2** $1 - \beta = 0.961$; **5**. $\hat{p} = 0.71 \notin RR =]-\infty, 0.67] \cup [0.83, +\infty[\Rightarrow$ não existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para rejeitar H_0;
6.1 $\bar{x} = 498 \notin RR =]-\infty, 497.09] \Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para concluir que a informação do fabricante é falsa; **6.2** valor-p=0.129 $> \alpha = 0.05$, logo confirma-se a não rejeição de H_0; **7**. $\bar{x} = 88 \notin RR =]-\infty, 83.99] \Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para afirmar que o consumo foi reduzido; **8.1** 0.135; **8.2** $\bar{x} = 2.5 \in RR =]+\infty, 2.70[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 4%, para concluir que os bombeiros estão a ser menos solicitados; **9**. $\hat{p} = 0.15 \notin RR =]-\infty, 0.13] \Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, com

um nível de significância de 4%, para não se aceitar a afirmação do revendedor; **10.1** 86.7%; **10.2** $\hat{p} = 0.28 \notin RR = [0.31, +\infty[\Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 3%, para afirmar que a procura está a diminuir; **11.1** $\hat{p} = 0.45 \in RR = [0.44, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para afirmar que a nova embalagem beneficia a compra da marca A; **11.2** 83.6%;
12. $\bar{x} = 107 \in RR =]-\infty, 110.25[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para desconfiar de um aumeno de consumo médio, dado que a hipótese de que o valor médio é 115 minutos não é aceitável, com base nos resultados encontados na amostra; **13.1** $\bar{x} = 69.88$kg, $s = 7.72$kg; **13.2** $\bar{x} = 69.88 \in RR = [68.6, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para desconfiar de um aumeno no peso médio dos novos estudantes; **14.1** $\hat{p} = 0.91 \notin RR = [0.92, +\infty[\Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, o valor observado não é estatisticamente significativo. Não se pode dizer, com um nível de significância de 5%, que o novo método melhora o aproveitamento; **14.2** $n = 35$, $\alpha = 0.06$; **15.1** $\bar{x} = 21.1 \notin RR = [21.3, +\infty[\Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 5%, para afirmar que a nova cozinheira é mais apreciada; **15.2** $\alpha = 0.08$; **16.1** $\bar{x_1} - \bar{x_2} = 0.20 \in RR = [0.17, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para afirmar que os melhoramentos originaram uma diminuição do consumo de energia; **16.2** 0.023; **17**. $\bar{x_B} - \bar{x_A} = -0.1 \notin RR =]-\infty, -0.15] \Rightarrow$ não rejeitamos H_0, ou seja, não há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, para se considerar que o consumo dos veículos de marca *TurmoB* seja inferior ao consumo dos veículos de marca *TurmoA*; **18.1** $H_0 : \mu = 100$, $H_1 : \mu \neq 100$; **18.2** $]-\infty, 97.35] \cup [102.65, +\infty[$;

19.1 $\bar{x} = 2.15 \in RR =]-\infty, 1.92] \cup [2.08, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja há evidência estatística, com um nível de significância de 4%, para não podermos aceitar que o peso de mantém; **19.2** $n = 32$; **20**. $\hat{p} = 0.525 \in RR =]-\infty, 0.17] \cup [0.33, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, existe evidência estatística suficiente, com um nível de significância de 10%, a percentagem de trabalhadores que ganha mais de 1000u.m. não está de acordo com as afirações do presidente; **21**. $\bar{x_A} - \bar{x_B} = -0.04 \in RR =]-\infty, -0.03] \cup [0.03, +\infty[\Rightarrow$ rejeitamos H_0, ou seja, há evidência estatística, com um nível de significância de 5%, de que existe diferença de aproveitamento entre as turmas; **22.1** $H_0 : p = 0.15$, $H_1 : p < 0.15$; **22.2** RR$=]-\infty, 0.057]$; **22.3** $\alpha = 18.8\%$.