Determinantes

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2023/2024

Instituto Superior de Engenharia do Porto

- Uma permutação no conjunto $\mathrm{P}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma função bijectiva de P_n em P_n.
- Representamos o conjunto das permutações, σ_i, P_n $i = 1, 2, \ldots, n!$, pelo simbolo Σ_n.
- O número de inversões, $\mathrm{N}(\sigma)$, de uma permutação $\sigma \in \Sigma_n$ é o número de pares $(x, y) \in \mathrm{P}_n^2$ que satisfazem a condição

$$x < y \quad \text{e} \quad \sigma(x) > \sigma(y).$$

Definição 1 (Determinante de ordem n)

Seja n um inteiro positivo. O determinante de ordem n é uma função

$$\det : \mathscr{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, dada uma matriz $\mathrm{A} = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$ tem-se

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{N(\sigma_i)} a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} \cdots a_{n,\sigma_i(n)} \tag{1}$$

☞

- *Na prática não se calculam determinantes usando a definição.*
- *o cálculo de determinantes de matrizes de ordens elevadas, usando a igualdade (1), implica um enorme esforço de cálculo. Por exemplo o cálculo de o determinante uma matriz de ordem* 15 *exige efectuar-se* $15! = 1307674368000$ *somas e em cada parcela tem-se* 15 *fatores...*
- *para ultrapassar este problema iremos encontrar fórmulas de cálculo para determinantes de ordem baixa (de ordem* 1, 2 *e* 3*) e encontrar algoritmos que calculam com esforço reduzido determinantes de ordens superiores.*

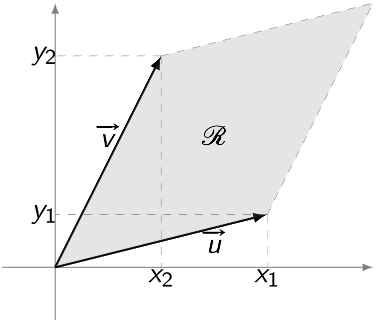
Propriedade 1 (determinantes de ordens 1 e 2)

1. O determinante de uma matriz $A = [a_{1,1}] \in \mathscr{M}_1$ coincide com a entrada da matriz A. Ou seja $\det(A) = a_{1,1}$.
2. Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_2$. Então

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

☞ *O determinante da matriz A é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.*

Interpretação geométrica: Podemos interpretar geometricamente, o módulo de um determinante de ordem 2, como sendo a área de um paralelogramo definido por dois vectores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.



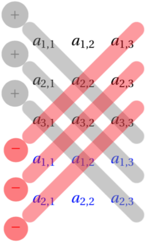
$$\boxed{\text{Área}(\mathscr{R}) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right|}$$

Propriedade 2 (Cálculo do determinante de ordem 3)

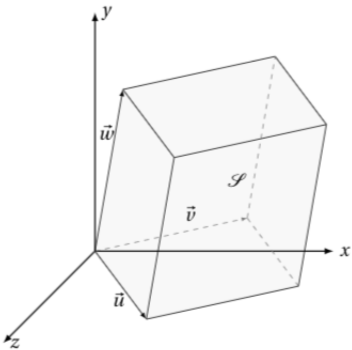
Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_3$. Então

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \left(a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}\right) - \left(a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} + a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1}\right)$$

☞ *Mnemónica, conhecida por **Regra de Sarrus**, para memorizar a fórmula de cálculo de um determinante de ordem 3.*



Interpretação geométrica: Podemos interpretar geometricamente, o módulo de um determinante de ordem 3, como sendo o volume de um paralelepípedo definido por três vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ em $\mathbb{R}^3$.



$$\boxed{\text{Volume}(\mathscr{S}) = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\right)\right|}$$

Propriedades 1

Seja $\mathsf{A} = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$. Tem-se

1. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{A}^\mathsf{T})$.
2. Se A é uma matriz triangular inferior ou triangular superior então,

$$\det(\mathsf{A}) = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}.$$

☞

- *As matrizes diagonais são casos particulares das matrizes triangulares e o seu determinante é o produto das entradas da diagonal principal.*
- $det(\mathsf{I}_n) = 1$.

Propriedades 2 (n-linear e anti-simétrica)

Seja $A = [L_1, L_2, \ldots, L_n] \in \mathscr{M}_n$. A função determinante de ordem n,

$$\det : \mathscr{M}_n \longrightarrow \mathbb{R},$$

diz-se n-**linear** sobre as linhas porque, para toda a linha i tem-se

$$\det([L_1, \ldots, L_{i-1}, \underbrace{\alpha L_i' + \beta L_i''}_{L_i}, L_{i+1}, \ldots, L_n]) =$$

$$\alpha \det([L_1, \ldots, L_{i-1}, L_i', L_{i+1}, \ldots, L_n]) + \beta \det\left([L_1, \ldots, L_{i-1}, L_i'', L_{i+1}, \ldots, L_n]\right)$$

para toda a linha i e para todos os escalares α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Por outro lado diz-se que a função determinante é **anti-simétrica** porque satisfaz a igualdade

$$\det([L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_j, \ldots, L_n]) = -\det([L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_i, \ldots, L_n])$$

Ou seja, se efectuarmos a troca de duas linhas i e j, $i \neq j$, então o determinante matriz resultante é o simétrico do determinante da matriz original.

Como casos particulares da *n*-linearidade tem-se que:

$$\det([L_1,\ldots,L_{i-1},\alpha L_i,L_{i+1},\ldots,L_n]) = \alpha\det([L_1\ldots,L_{i-1},L_i,L_{i+1},\ldots,L_n])$$

$$\det([L_1,\ldots,L_{i-1},\underbrace{L_i'+L_i''}_{L_i},L_{i+1},\ldots,L_n]) =$$

$$\det([L_1,\ldots,L_{i-1},L_i',L_{i+1},\ldots,L_n]) + \det([L_1,\ldots,L_{i-1},L_i'',L_{i+1},\ldots,L_n])$$

☞ *Como, para toda a matriz* $A \in \mathcal{M}_n$, $\det(A) = \det(A^T)$ *tem-se que a função determinante é igualmente uma função n-linear anti-simétrica sobre as colunas.*

Exemplos:

a)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d+2e \\ f & g & h & i+2j \\ l & m & n & o+2p \\ q & r & s & t+2e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ f & g & h & i \\ l & m & n & o \\ q & r & s & t \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & b & c & e \\ f & g & h & j \\ l & m & n & p \\ q & r & s & e \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0\times c & d \\ e & f & 0\times g & h \\ i & j & 0\times l & m \\ n & o & 0\times p & q \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & l & m \\ n & o & p & q \end{vmatrix} = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = 0$$

Propriedades 3

Seja $A \in \mathscr{M}_n$. Então

1. Se A tiver uma linha ou uma coluna nula então o seu determinante é zero.
2. Se A tiver duas linhas iguais ou duas colunas iguais então o seu determinante é zero.
3. Se A tiver uma linha múltipla de outra linha ou uma coluna múltipla de outra coluna então o seu determinante é zero.

A ideia chave de usar operações elementares no cálculo de determinantes, de qualquer ordem, é transformar uma matriz numa matriz triangular.

Propriedade 3 (O determinante é uma função anti-simétrica

$$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} A', \quad i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = -\det(A)$$

e,

$$A \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} A', \quad i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = -\det(A)$$

Ou seja, sempre que efectuamos uma troca de linhas ou de colunas o tem-se de trocar o sinal do determinante.

Propriedade 4 (O determinante é uma função *n*-linear)

$$A \xrightarrow{L_i \to \alpha L_i} A' \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = \alpha \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e,

$$A \xrightarrow{C_i \to \alpha C_i} A' \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = \alpha \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ou seja, se multiplicarmos uma linha, ou uma coluna, de uma matriz por um escalar α, o determinante da matriz resultante é o determinante da matriz original multiplicado por α.

Propriedade 5

$$A \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j} A' \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e,

$$A \xrightarrow{C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j} A' \quad \Longrightarrow \quad \det(A') = \det(A), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ou seja, se a uma linha (coluna) somarmos um múltiplo de outra linha (coluna) o determinante não se altera.

Exemplo 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 120$$

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 10 & 14 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{=\!=\!=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & -4 & 10 & 14 \end{vmatrix} \overset{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1}{=\!=\!=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=\!=\!=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=\!=\!=} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 = 6$$

Exemplo 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_5}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underline{\underline{C_2 \leftrightarrow C_4}} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Propriedades 4

Sejam A e B $\in \mathscr{M}_n$. Então

1. A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. Se A é invertível então,
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- *Outro modo de se calcular o determinante é através do* ***teorema de Laplace****.*
- *O teorema de Laplace reduz o cálculo de um determinante de ordem n ao cálculo de n determinantes de ordem $n-1$.*

Definição 2 (Menor complementar (de $a_{i,j}$))

Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$. Define-se o *menor complementar* de uma entrada $a_{k,\ell}$ de A como sendo o determinante da matriz obtida de A por supressão da linha k e da coluna ℓ. O menor complementar de $a_{k,\ell}$ é representado por $m_{k,\ell}$.

Definição 3 (Complemento algébrico (de $a_{i,j}$))

Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$. O complemento algébrico, $A_{k,\ell}$ de uma entrada $a_{k,\ell}$ de A é dado por

$$A_{k,\ell} = (-1)^{k+\ell}\, m_{k,\ell}.$$

Nota: Tem-se sempre $|A_{k,\ell}| = |m_{k,\ell}|$. No caso de $k+\ell$ ser um número par tem-se $A_{k,\ell} = m_{k,\ell}$ e no caso de $k+\ell$ ser um número impar $A_{k,\ell} = -m_{k,\ell}$.

Exemplo:
Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se,

$$m_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad m_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad m_{3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$m_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad m_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad m_{4,4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

e

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}\, m_{1,1} = -1; \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3}\, m_{2,3} = -3; \quad A_{3,4} = (-1)^{3+4} m_{3,4} = 4;$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2}\, m_{2,2} = 0; \quad A_{3,1} = (-1)^{3+1}\, m_{3,1} = 0; \quad A_{4,4} = (-1)^{4+4} m_{3,4} = -1.$$

Teorema 1 (de Laplace)

Seja $A = [a_{i,j}] \in \mathscr{M}_n$ e os inteiros k, ℓ tais que $1 \leq k, \ell \leq n$. Então tem-se

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} A_{k,i} \quad \text{Desenvolvimento de Laplace pela linha } k \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ell} A_{i,\ell} \quad \text{Desenvolvimento de Laplace pela coluna } \ell \end{aligned}$$

☞

- *Podemos calcular o desenvolvimento de Laplace por qualquer linha ou por qualquer coluna*
- *Na prática é conveniente optar, se possível, por uma linha ou uma coluna que tenha um número grande de entradas nulas.*
- *Pode-se aplicar operações elementares à matriz de modo a anular entradas de uma determinada linha (coluna) e desenvolver por essa linha (coluna).*

Exemplo: Pretende-se calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

usando o teorema de Laplace.
Podemos optar por uma fila qualquer no desenvolvimento de Laplace. Contudo, para efeito de cálculos, é conveniente optar por desenvolver a 2^a linha (porque a segunda linha de A possui duas entradas nulas). Neste caso temos

$$\det(A) = a_{2,1} A_{2,1} + \cancel{a_{2,2} A_{2,2}} + \cancel{a_{2,3} A_{2,3}} + a_{2,4} A_{2,4}$$

Como $a_{2,2} = a_{2,3} = 0$ poupámos o cálculo de dois complementos algébricos, $A_{2,2}$ e $A_{2,3}$. E o desenvolvimento de Laplace pela 2^a linha fica simplesmente

$$\det(A) = (-4) \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Usando, por exemplo, a regra de Sarrus concluímos que

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 19$$

Logo, tem-se $\det(A) = 4 \times 3 + 1 \times 19 = 31$

Exemplo (continuação) Por outro lado, pode-se combinar as propriedades dos determinantes com o desenvolvimento de Laplace para se calcular o determinante de uma matriz. Na realidade podemos anular uma das entradas da 2^a linha da matriz A. De facto tem-se

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \leftarrow C_1 + 4C_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Efectuando o desenvolvimento de Laplace pela 2^a linha tem-se

$$\det(A) = \cancel{a'_{2,1} A'_{2,1}} + \cancel{a'_{2,2} A'_{2,2}} + \cancel{a'_{2,3} A'_{2,3}} + a'_{2,4} A'_{2,4}$$

Consequentemente

$$\det(A) = 1 \times (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 31.$$

Cálculo da inversa de uma matriz usando a matriz adjunta

Definição 4 (Matriz adjunta)

Seja $A \in \mathscr{M}_n$. Define-se a matriz adjunta de A, e representa-se por adj(A), como sendo a transposta da matriz que se obtém de A substituindo os seus elementos pelos respectivos complementos algébricos.

Exemplo: Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{1,2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (-1)^2 \times 2 & (-1)^3 \times (-3) \\ (-1)^3 \times (-1) & (-1)^4 \times 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2

Seja Seja $A \in \mathscr{M}_n$. Então:

1. Tem-se
$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$
2. Se A é invertível então
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)$$

No exemplo anterior tem-se $\det(A) = -1$, logo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$