

Aluno nº \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

- A duração da prova é de **1 hora** + 15 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva a prova em **5 grupos de folhas separadas**, como é indicado ao longo do enunciado.

1. Considere o conjunto  $A = \{a, b\}$ . Determine:
  - a) (0.5 val.) o conjunto  $A \times \mathcal{P}(A)$ .
  - b) (0.5 val.) o cardinal de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ .
2. Considere os seguintes predicados:  $P(x) : x$  é par e  $I(x) : x$  é ímpar.
  - a) (2 val.) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:
    - (i)  $\forall x, y \in \mathbb{Z}, [P(x) \wedge I(y)] \Rightarrow I(x \cdot y)$ .
    - (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{Z}, I(x \cdot y) \Rightarrow [I(x) \vee I(y)]$ .
  - b) (1 val.) Negue as proposições da alínea anterior, apresentando o resultado sem o símbolo  $\sim$ .

\*\*\*\*\* **Folha 2** \*\*\*\*\*

3. (4 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para verificar que a proposição

$$\left[ (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \right] \wedge \left[ p \vee (p \Rightarrow \sim q) \right] \Rightarrow q$$

é logicamente equivalente a  $q$ . Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

\*\*\*\*\* **Folha 3** \*\*\*\*\*

4. Seja  $A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9, 15, 27\}$  e considere a relação binária  $R$  em  $A$  definida por  $xRy$  se e só se  $x$  e  $y$  têm o mesmo número de divisores naturais.
  - a) (1 val.) Represente o grafo orientado da relação  $R$ .
  - b) (1.5 val.) Classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade, justificando a sua resposta.
  - c) (1 val.) Justifique se  $R$  é relação de ordem ou de equivalência. No caso de ser uma relação de ordem, diga se é de ordem total ou parcial. No caso de ser uma relação de equivalência, determine as classes de equivalência de  $A$  determinadas por  $R$ .
  - d) (1.5 val.) Considere a relação binária  $S$  de  $A$  em  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  definida por  $aSb$  se e só se  $a$  tem  $b$  divisores naturais. Apresente a relação  $S \circ R$  por extensão.  
Nota: Caso não tenha resolvido a alínea a), ou por opção, pode usar a relação  $R = \{(1, 1), (2, 5), (5, 7), (7, 7), (8, 15), (9, 9), (15, 27), (27, 27)\}$ .

\*\*\*\*\* **Folha 4** \*\*\*\*\*

5. (3 val.) Converta o argumento seguinte e construa uma prova simbólica, indicando quais as regras de inferência usadas em cada passo:

*Quando o José vai jogar Padle, a Maria vai ao cinema. Se a Manuela vai jogar futebol, então o João vai ao cinema. Se a Maria ou o João vão ao cinema, a Zélia é informada por SMS. A Zélia não recebeu SMS. Consequentemente o José e a Manuela não vão jogar.*

\*\*\*\*\* **Folha 5** \*\*\*\*\*

6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o inteiro não negativo,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$