Transformações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2023/2024

Definição 1 (Transformação Linear)

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais reais e T uma função de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Diz-se que T é uma **transformação linear** de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$ sse são satisfeitas as condições:

1. $\forall\ u, v \in \mathscr{E},\ T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\ u \in \mathscr{E},\ T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$

Exemplo:

A função (ou transformação)

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-2y, 3x) \end{array}.$$

é linear porque...

Propriedades 1

Seja T uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então tem-se:

1. A imagem do vector nulo do e.v. $\mathscr{E}$ é o vector nulo do e.v. $\mathscr{F}$. Ou seja, tem-se
$$T(0_{\mathscr{E}}) = 0_{\mathscr{F}}$$
2. $\forall u \in \mathscr{E},\ T(-u) = -T(u)$
3. $\forall u, v, \in \mathscr{E},\ T(u - v) = T(u) - T(v)$
4. Seja u uma combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_m$, $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$. Então a imagem de u escreve-se como combinação linear das imagens dos vectores $u_1, \ldots, u_m$ da forma,
$$T(u) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(u_i)$$

☞ ***Note que da propriedade 4 podemos concluir que uma transformação linear fica perfeitamente definida se conhecermos a imagem dos vectores que constituem uma base do e.v. $\mathscr{E}$.***

Exemplo: Pretende-se encontrar a expressão que define a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaz as seguintes condições:

$$T((1,0,0)) = (1,1,1), \ T((0,1,0)) = (1,0,1) \text{ e } T((0,1,2)) = (0,0,4).$$

Começamos por observar que conhecemos a imagem de 3 vectores que constituem uma base do espaço de partida, $\mathbb{R}^3$. Logo, pela observação anterior, a transformação linear T está bem definida.
Qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tem uma representação na base $\mathrm{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,2))$. De facto tem-se

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,1,2) \\ &= (a, b+c, 2c) \end{aligned}$$

Logo,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + (y - \frac{z}{2})(0,1,0) + \frac{z}{2}(0,1,2).$$

Consequentemente tem-se,

$$\begin{aligned} T\big((x,y,z)\big) &= T\Big(x(1,0,0) + (y - \frac{z}{2})(0,1,0) + \frac{z}{2}(0,1,2)\Big) \\ &= xT\big((1,0,0)\big) + (y - \frac{z}{2})T\big((0,1,0)\big) + \frac{z}{2}T\big((0,1,2)\big) \\ &= x(1,1,1) + (y - \frac{z}{2})(1,0,1) + \frac{z}{2}(0,0,4) \\ &= \Big(x + y - \frac{z}{2}, x, x + y + \frac{3}{2}z\Big) \end{aligned}$$

Definições 1

- Alternativamente, também se chamam **homomorfismos** às transformações lineares.
- Se um homomorfismo for injectivo chama-se **monomorfismo**.
- Se um homomorfismo for sobrejectivo chama-se **epimorfismo**.
- Se um homomorfismo for bijectivo diz-se um **isomorfismo**.
- Dois espaços vectoriais são **isomorfos**, e escrevemos $\mathscr{E} \cong \mathscr{F}$, se existir um isomorfismo entre os espaços vectoriais.
- Se o espaço de chegada for igual ao espaço de partida diremos que a transformação linear é um **endomorfismo**.
- Um endomorfismo bijectivo é denominado por **automorfismo**.

Definição 2 (Imagem e pré-imagem)

Seja T uma função de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$ e $\mathscr{E}'$, $\mathscr{F}'$ dois subconjuntos de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$, respectivamente ($\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ e $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$).

- A **imagem**, ou o **contra domínio**, de $\mathscr{E}'$, $T(\mathscr{E}')$, é o subconjunto de $\mathscr{F}$ definido por

$$T(\mathscr{E}') = \{v \in \mathscr{F} : \exists u \in \mathscr{E}' \wedge T(u) = v\}$$

- A **pré-imagem** de $\mathscr{F}'$, $T^{-1}(\mathscr{F}')$, é o subconjunto de $\mathscr{E}$ definido por

$$T^{-1}(\mathscr{F}') = \{u \in \mathscr{E} : T(u) \in \mathscr{F}'\}$$

Teorema 1

Seja T uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então,

1. Se $\mathscr{E}' \prec \mathscr{E}$ então, $T(\mathscr{E}') \prec \mathscr{F}$
2. Se $\mathscr{F}' \prec \mathscr{F}$ então, $T^{-1}(\mathscr{F}') \prec \mathscr{E}$

Definição 3 (Imagem e núcleo de uma transformação linear)

Seja T uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$.

- Chama-se **imagem** de T, $\mathrm{Im}(T)$, à imagem de $\mathscr{E}$ pela transformação T. Ou seja

$$\mathrm{Im}(T) = \{v \in \mathscr{F} : \exists u \in \mathscr{E} \wedge T(u) = v\}$$

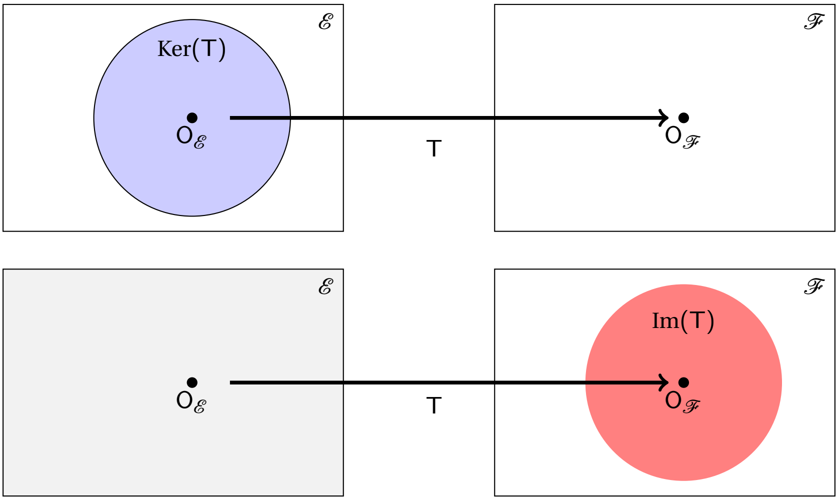
- Chama-se **núcleo** de T, $\mathrm{Ker}(T)$ ou $\mathrm{Nuc}(T)$, à pré-imagem de $\{0_{\mathscr{F}}\}$. Ou seja

$$\mathrm{Ker}(T) = \{u \in \mathscr{E} : T(u) = 0_{\mathscr{F}}\}$$

Propriedades 2

Seja T uma transformação linear de $\mathscr{E}$ em $\mathscr{F}$. Então tem-se:

1. $\mathrm{Im}(T) \prec \mathscr{F}$
2. $\mathrm{Ker}(T) \prec \mathscr{E}$



$\mathscr{E}$
Ker(T)
$0_{\mathscr{E}}$
T
$\mathscr{F}$
$0_{\mathscr{F}}$
$\mathscr{E}$
$0_{\mathscr{E}}$
T
$\mathscr{F}$
Im(T)
$0_{\mathscr{F}}$

Exemplo: Considere a seguinte transformação linear (verifique que de facto se trata de uma transformação linear!)

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) \end{array}$$

a) Determinar $\mathrm{Im}(T)$.
Por definição tem-se,

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) = (a,b,c)\}.$$

Logo, a determinação da imagem de T reduz-se a verificar para que valores dos parâmetros a, b e c o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+3y = a \\ 2x+6y = b \\ 3x+9y = c \end{cases}$$

é possível.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 6 & b \\ 3 & 9 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a \end{array}\right]$$

Deste modo, conclui-se que o sistema é possível sse $b-2a=0$ e $c-3a=0$. Ou seja tem-se

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b-2a=0 \wedge c-3a=0\}.$$

b) Determinar $\operatorname{Ker}(T)$. Por definição tem-se,

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3y, 2x + 6y, 3x + 9y) = (0, 0, 0)\}.$$

Logo, o núcleo de T é o conjunto solução do sistema de equações lineares homogéneo

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases}$$

Logo tem-se

$$\operatorname{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$$

Propriedades 3

Seja $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F}$ uma transformação linear. Então,

1. T é injectiva se e somente se $\mathrm{Ker}(T) = \{0_{\mathscr{E}}\}$.
2. seja $(u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores de $\mathscr{E}$ L.D.. Então a lista de vectores de $\mathscr{F}$, $(T(u_1), \ldots, T(u_n))$ é igualmente L.D..
3. tem-se

$$\boxed{\dim(\mathscr{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).} \tag{1}$$

Exemplo:
A transformação linear do exemplo anterior

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x+3y, 2x+6y, 3x+9y) \end{array}$$

- não é injectiva porque $\mathrm{Ker}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+3y = 0\} \neq \{(0,0)\}$ (propriedade 1).
- a equação 1 da propriedade 3 é satisfeita. De facto tem-se: $\dim(\mathscr{E}) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$ e $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

Teorema 2

Sejam $L:\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{F}$ e $T:\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{G}$ duas transformações lineares. Então a função $T\circ L$ (T após L) definida por

$$\begin{array}{rccc} T\circ L & : & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{G} \\ & & u & \longmapsto & T(L(u)) \end{array}.$$

é uma transformação linear.

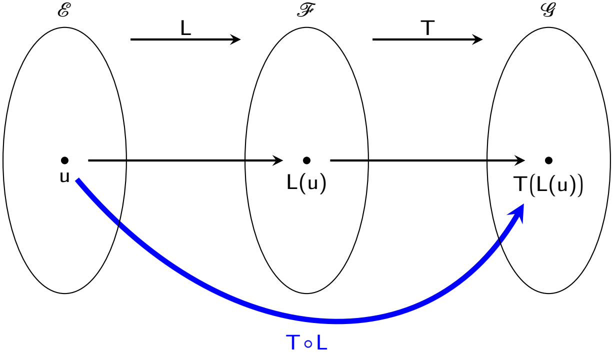


Diagrama da composição da transformação linear L com a transformação linear T.

Exemplo: Considere as transformações lineares

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{L} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y,z) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mathrm{T} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y,x+y) \end{array}.$$

Então tem-se que a transformação

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{T}\circ\mathrm{L} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \mathrm{T}\big((x+y,z)\big)=(x+y-z,x+y+z) \end{array}$$

é linear.

- *Note que* $\mathrm{L}\circ\mathrm{T}$ *não está definida porque o conjunto de chegada de* T *(*$\mathbb{R}^2$*) é diferente do conjunto de partida de* L *(*$\mathbb{R}^3$*).*
- *No caso de* T *ser um endomorfismo, i.e., o conjunto de partida é igual ao conjunto de chegada é possível definir os endomorfismos:* $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}$, $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}\circ\mathrm{T}$, ..., $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}\circ\mathrm{T}\circ\ldots\circ\mathrm{T}$, *que representaremos, respectivamente, por* T^2, T^3, ..., T^n.
- *Chamamos de* ***transformação identidade*** *num espaço vectorial* $\mathscr{E}$ *e representamos por* I *ao endomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{I} : & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ & \mathrm{u} & \mapsto & \mathrm{u} \end{array}$$

Definição 4

Dada uma transformação linear $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ bijectiva (ou seja, T é um automorfismo) definimos a **transformação linear inversa** de T à transformação linear $T^{-1} : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

Exemplo:
Mostre que a transformação linear

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y) \end{array}$$

é bijectiva e encontre a sua inversa.
sugestão:

$$T^{-1}\Big(T((1,0))\Big) = (1,0) \quad \text{e} \quad T^{-1}\Big(T((0,1))\Big) = (0,1)$$

Representação Matricial de Transformações Lineares

☞ *Iremos representar indistintamente vectores por matrizes coluna ou por matrizes linha. Por exemplo, identificamos o vector* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *com a matriz* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *ou com a matriz* $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ *e vice-versa.*

Exemplo introdutório:

- Sejam $\mathrm{B}=(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2)=(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix})$ e $\mathrm{B}'=(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\mathrm{d}_3)=(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente.
- Consideremos a transformação linear $\mathrm{T}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ que satisfaz

$$\mathrm{T}(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{T}(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo introdutório (cont.):

- Para se encontrar a representação da transformação linear T, nas bases B e B' começamos por determinar a representação dos vectores $T(b_1)$ e $T(b_2)$ na base B',

$$T(b_1)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \mathrm{Rep}_{B'}(T(b_1))=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}_{B'}$$

$$T(b_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad \mathrm{Rep}_{B'}(T(b_2))=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}_{B'}$$

- Para todo o vector $u=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2$ tem-se

$$\begin{aligned}
T(u) &= \lambda_1 T(b_1)+\lambda_2 T(b_2)\\
&= \lambda_1\left(0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)+\lambda_2\left(1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)\\
&= (0\lambda_1+1\lambda_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(-\tfrac{1}{2}\lambda_1-1\lambda_2)\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+(1\lambda_1+0\lambda_2)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Ou seja,

$$\text{se,}\quad \mathrm{Rep}_B(u)=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}\quad \text{então,}\quad \mathrm{Rep}_{B'}(T(u))=\begin{bmatrix}0\lambda_1+1\lambda_2\\-\frac{1}{2}\lambda_1-1\lambda_2\\1\lambda_1+0\lambda_2\end{bmatrix}.$$

Exemplo introdutório (cont.):

- De uma forma mais elegante usando multiplicação matricial tem-se,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}}_{\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{T})} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} 0\lambda_1 + 1\lambda_2 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 - 1\lambda_2 \\ 1\lambda_1 + 0\lambda_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}.$$

☞

Na prática podemos encontrar a matriz $\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(T)$ usando o algoritmo de Gauss-Jordan. De facto, para encontrar os coeficientes das combinações lineares, das imagens dos elementos da base B, na base B' temos de resolver dois sistemas de equações lineares que partilham a mesma matriz simples. Ou seja temos de resolver os sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ c_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,2} \\ c_{2,2} \\ c_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e tem-se

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{T}) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Exemplo introdutório (cont.):
aplicando o algoritmo de eliminação de Gauss-Jordan à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

tem-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow -1/2 L_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

obtendo-se a matriz

$$\mathrm{Rep}_{B,B'}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 5

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais e as bases, $\mathrm{B} = (\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_n)$ de $\mathscr{E}$ e $\mathrm{B}' = (\mathsf{d}_1, \mathsf{d}_2, \ldots, \mathsf{d}_m)$ de $\mathscr{F}$. Seja ainda $\mathsf{L} : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ uma transformação linear tal que

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathsf{L}(\mathsf{b}_1)) = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} \\ \ell_{2,1} \\ \vdots \\ \ell_{m,1} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}, \quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathsf{L}(\mathsf{b}_2)) = \begin{bmatrix} \ell_{1,2} \\ \ell_{2,2} \\ \vdots \\ \ell_{m,2} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'}, \quad \ldots \quad \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathsf{L}(\mathsf{b}_n)) = \begin{bmatrix} \ell_{1,n} \\ \ell_{2,n} \\ \vdots \\ \ell_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B}'},$$

Então

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{L}) = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{m,1} & \ell_{m,2} & \cdots & \ell_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$$

é a matriz que representa L relativamente às bases B, B'.

☞ *Frequentemente, quando não há ambiguidade, simplifica-se a notação e escrevemos* $\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{L})$, $\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$, $\mathsf{M}(\mathsf{L})$, *ou escrevemos simplesmente* M *para designar,* $\mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{L})$ *, a matriz que representa a transformação* L *onde* B *e* B' *são, respectivamente, as bases do espaço vectorial de partida e de chegada.*

Teorema 3

Sejam $\mathscr{E}$ e $\mathscr{F}$ espaços vectoriais e as bases, B de $\mathscr{E}$ e B' de $\mathscr{F}$, e que $\mathsf{L}:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ é uma transformação linear com representação matricial

$$\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{L}) = \begin{bmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & \cdots & \ell_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{m,1} & \ell_{m,2} & \cdots & \ell_{m,n} \end{bmatrix}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} .$$

Então, dado um vector qualquer $\mathrm{u}\in\mathscr{E}$ representado por

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$$

tem-se que a representação da imagem de u na base B' é dada por

$$\boxed{\mathrm{Rep}_{\mathrm{B}'}(\mathsf{L}(\mathrm{u})) = \mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{L}) \times \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}).}$$

Exemplo: Seja $R_\theta : \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja acção é efectuar uma rotação, a qualquer vector $u \in \mathbb{R}^2$, de θ radianos no sentido directo. Fixando a base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$, para ambos os espaços de partida e de chegada, tem-se

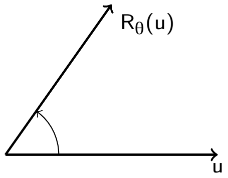
$$R_\theta((1,0)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \text{e} \quad R_\theta((0,1)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Logo, a matriz que representa R_θ relativamente às bases canónicas é

$$M(R_\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

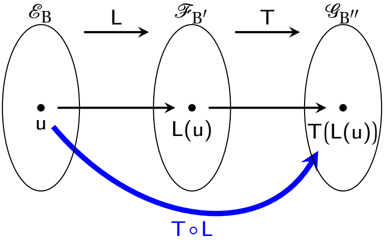
A imagem de um vector qualquer de $u \in \mathbb{R}^2$ com representação na base canónica (x, y) é dada por

$$R_\theta(x,y) = M(R_\theta) \times u = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$



Acção da transformação R_θ.

- Outra vantagem, de se usar matrizes para representarem transformações lineares, é o calculo da composta de duas transformações lineares.



Teorema 4

Sejam $L : \mathscr{E}_B \to \mathscr{F}_{B'}$ e $T : \mathscr{F}_{B'} \to \mathscr{G}_{B''}$ duas transformações lineares com representações matriciais $\mathrm{Rep}_{B,B'}(L)$ e $\mathrm{Rep}_{B',B''}(T)$, respectivamente.
Então a representação da transformação linear $T \circ L : \mathscr{E}_B \to \mathscr{G}_{B''}$ é

$$\boxed{\mathrm{Rep}_{B,B''}(T \circ L) = \mathrm{Rep}_{B',B''}(T) \times \mathrm{Rep}_{B,B'}(L)}$$

Nota: O índice inferior nos espaços de partida e de chegada indica a base que estamos a considerar no respectivo espaço.

Exemplo:
Sejam $T : \mathbb{R}^3_{B_c} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{B_c}$ e $L : \mathbb{R}^3_{B_c} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{B_c}$ duas transformações lineares definidas pelas expressões

$$\begin{aligned} T((x,y,z)) &= (2x, y+z, z) \\ L((x,y,z)) &= (x+y, y+z, x+z), \end{aligned}$$

onde B_c é a base canónica. Então,

$$M_{B_c,B_c}(L) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{B_c,B_c}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} M_{B_c,B_c}(T \circ L) &= M_{B_c,B_c}(T) \times M_{B_c,B_c}(L) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_{B_c,B_c}(L \circ T) &= M_{B_c,B_c}(L) \times M_{B_c,B_c}(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriz mudança de base

Seja $\mathrm{B} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ uma base de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Todo o vector $\mathrm{v} \in \mathscr{E}$ escreve-se como combinação linear dos elementos da base B,

$$\mathrm{v} = \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \ldots + \alpha_n \mathrm{u}_n.$$

Ou seja, na notação matricial tem-se

$$\mathrm{Rep}_B(\mathrm{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_B$$

Por outro lado, se escolhermos outra base $\mathrm{B}' = (\mathrm{u}'_1, \ldots, \mathrm{u}'_n)$ de $\mathscr{E}$ tem-se

$$\mathrm{v} = \alpha'_1 \mathrm{u}'_1 + \ldots + \alpha'_n \mathrm{u}'_n.$$

$$\mathrm{Rep}_{B'}(\mathrm{v}) = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}_{B'}$$

Teorema 5

Sejam B e B' as duas bases, consideradas acima, do espaço vectorial $\mathscr{E}$. Supondo que os elementos da base B escrevem-se na base B' da forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}_1 &= c_{1,1}\mathrm{u'}_1 + \ldots + c_{n,1}\mathrm{u'}_n \\
&\vdots \\
\mathrm{u}_i &= c_{1,i}\mathrm{u'}_1 + \ldots + c_{n,i}\mathrm{u'}_n \\
&\vdots \\
\mathrm{u}_n &= c_{1,n}\mathrm{u'}_1 + \ldots + c_{n,n}\mathrm{u'}_n
\end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}_{B'} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,i} & \ldots & c_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,i} & \ldots & c_{n,n} \end{bmatrix}}_{\mathrm{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{B}$$

☞

- *A matriz*

$$\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,i} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,i} & \cdots & c_{n,n} \end{bmatrix}$$

chama-se ***matriz mudança de base****, da base* B *para a base* B'*.*
- *A matriz mudança da base* B *para a base* B' *é a representação da transformação identidade em* $\mathscr{E}$ *da base* B *na base* B'*. Ou seja*

$$\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \mathrm{Rep}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(\mathsf{I}).$$

- *As matrizes mudança de base são invertíveis e tem-se*

$$\mathsf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \mathsf{M}^{-1}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}}.$$

Exemplo: Consideremos as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{B} = ((2,-1),(3,4))$ e $\mathrm{B}_c = ((1,0),(0,1))$ (base canónica). Pretende-se encontrar, $M_{\mathrm{B},\mathrm{B}_c}$, a matriz mudança da base canónica B_c para a base B. Determinamos as coordenadas dos elementos da base canónica B_c na base B,

$$\begin{array}{rcl} (1,0) & = & c_{1,1}(2,-1) + c_{2,1}(3,4) \\ (0,1) & = & c_{1,2}(2,-1) + c_{2,2}(3,4) \end{array}$$

logo, tem-se que resolver os SEL

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c_{1,1} + 3c_{2,1} = 1 \\ -c_{1,1} + 4c_{2,1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2c_{1,2} + 3c_{2,2} = 0 \\ -c_{1,2} + 4c_{2,2} = 1 \end{array} \right.$$

Uma vez resolvidos os sistemas tem-se imediatamente a matriz pedida

$$M_{\mathrm{B},\mathrm{B}_c} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Estes SEL podem ser resolvidos em simultâneo usando a eliminação de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right]$$

Definição 6 (valor e vector próprio)

Seja $\mathscr{E} \neq \{O_{\mathscr{E}}\}$ um espaço vectorial e $T : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ uma transformação linear (endomorfismo). Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ diz-se um **valor próprio** da transformação T se e somente se existir um vector u não nulo ($u \neq O_{\mathscr{E}}$) tal que

$$\boxed{T(u) = \lambda u} \tag{2}$$

Os vectores $u \neq O_{\mathscr{E}}$ que satisfazem a igualdade (2) dizem-se **vectores próprios** de T associados ao valor próprio λ.

☞ *A igualdade* (2) *é equivalente a*

$$(T - \lambda I)(u) = O_{\mathscr{E}}$$

onde, I *é o endomorfismo identidade. Logo* u *é um vector próprio associado de* T *associado ao valor próprio* λ *se e somente se*

$$u \neq O_{\mathscr{E}} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I).$$

Exemplo: Considere transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T((x,y)) = (x+3y, 3x+y).$$

Então $\lambda = -2$ é um valor próprio de T porque existe um vector não nulo $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$T((1,-1)) = (1+3\cdot(-1), 3\cdot 1 - 1) = (-2,2) = -2(1,-1).$$

Duas perguntas que se colocam:

1. como se calculam valores próprios?
2. será que a transformação T tem mais valores próprios?

Iremos ver as resposta mais à frente...

♣

Definição 7 (Subespaço próprio)

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de uma transformação linear $T:\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$. O subespaço próprio de T associado a λ, E_λ, é o núcleo da transformação linear $T - \lambda I$,

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{u \in \mathscr{E} : T(u) = \lambda u\}$$

Se fixarmos uma base qualquer, B, de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ podemos escrever a equação $(\mathsf{T}-\lambda\mathsf{I})(\mathsf{u})=\mathsf{O}_{\mathscr{E}}$ na forma matricial

$$(\mathrm{Rep}_{\mathrm{B,B}}(\mathsf{T})-\lambda\mathrm{Rep}_{\mathrm{B,B}}(\mathsf{I}))(\mathsf{u})=0. \tag{3}$$

☞ *Para simplificar a notação, escrevemos a equação (3) na forma,*

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{4}$$

Pode-se interpretar a equação matricial (4) como um sistema de equações lineares homogénio indeterminado (porque tem soluções não nulas) logo a matriz $A-\lambda I$ tem de ser singular, ou seja, os valores próprios são solução da equação

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0} \tag{5}$$

Teorema 6

Os valores próprios de um endomorfismo T (ou da matriz $A = \mathrm{Rep}_{B,B}(T)$) são as raizes reais do **polinómio característico**

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

☞ *O polinómio característico $p_A(\lambda)$ não depende da base B escolhida para $\mathscr{E}$.*

Exemplo:

No exemplo anterior, mostramos que -2 é valor próprio da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T((x,y)) = (x+3y, 3x+y)$.. Neste exemplo iremos calcular todos os valores próprios de T e determinar os seus subespaços próprios. A representação de T na base canónica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo o polinómio característico é dado por,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8.$$

Calculando os zeros, reais, do polinómio característico concluímos que a transformação T (ou a matriz A) tem dois valores próprios

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4$$

Exemplo (cont.) Para calcular os respectivos subespaços próprios E_{-2} e E_4
Temos:

$$\mathrm{A}-(-2)\mathrm{I}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{A}-(4)\mathrm{I}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathrm{E}_{-2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-y\right\}$$

$$\mathrm{E}_{4}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\right\}$$

♣