DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Instituto Superior de Engenharia do Porto

Licenciatura em Engenharia Biomédica

isep
Instituto Superior de Engenharia do Porto

MATEMÁTICA 1 (2023/2024)
ÉPOCA DE RECURSO: 1ª PROVA DE AVALIAÇÃO

10 de fevereiro de 2024

Aluno nº:	**Nome:**

- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Só poderá consultar os formulários validados no início da prova.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente justicados.
- Boa sorte!

Duração: 75 minutos

Cotações:

1.1 (10)	1.2 (15)	1.3 (15)	2.1 (15)	2.2 (15)	3. (25)	4. (35)	5.1 (35)	5.2 (35)	Total) (200)

1. Considere a função f, real de variável real, definida por, $f(x) = \log_5\left(e^{x^2} - 1\right)$.

   1.1 Determine o domínio da função.

   1.2 Seja $z = -\frac{8}{9} + \left(\operatorname{cosec}^2\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)^{-1}$. Resolva a equação, $5^{f(x)} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3}\right)^{5\log_3\left(\frac{1}{2}\right)} = e^z$.

   1.3 Considerando $x \geq 0$, escreva uma equação da reta normal ao gráfico da curva f, no ponto de ordenada $y = 0$.

2. Considere a função g, real de variável real, definida por $g(x) = \pi \operatorname{arcsen}(e^x - 2) + \frac{\pi^2}{3}$.

   2.1 Determine o domínio e o contradomínio da função.

   2.2 Caracterize a função inversa de g.

3. Usando o conceito de diferencial, calcule um valor aproximado de $\frac{\sqrt{0.99+4}}{e^{0.99}}$.

4. Calcule a primitiva da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$ que passa no ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

5. Resolva os integrais seguintes:

   5.1 $\displaystyle\int x^3\sqrt[4]{x^2-1}\,dx$;

   5.2 $\displaystyle\int \sqrt{(e^{-2x})^5}\,\operatorname{sen}\left(e^{-5x}\right)\,dx$, fazendo a substituição $e^x = t$.

Licenciatura em Engenharia Biomédica

MATEMÁTICA 1 (2023/2024)

ÉPOCA DE RECURSO: 2ª PROVA DE AVALIAÇÃO

10 de fevereiro de 2024

Aluno nº:	**Nome:**

- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Só poderá consultar os formulários validados no início da prova.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver deverão ser devidamente justificados.
- Boa sorte!

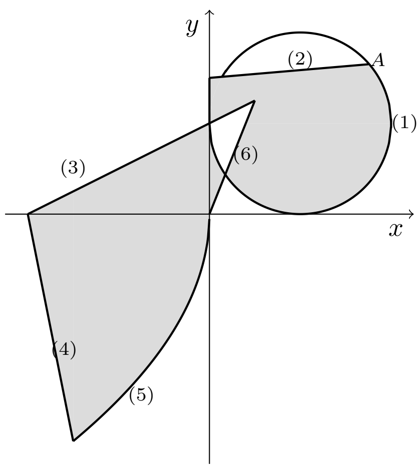
Duração: 1h15m

Cotações:

1. (22)	2.1 (33)	2.2 (15)	3.1 (20)	3.2 (20)	4. (15)	5.1 (30)	5.2 (10)	6. (35)	Total) (200)

1. Calcule o integral da função real de variável real, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{arctg}(x)$, definido em $[1, +\infty[$.

2. Considere a região abaixo limitada por ramos das curvas indicadas.



(1) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

(2) $y = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{7}x + 3$

(3) $y = \dfrac{1}{2}(x+4)$

(4) $y = -5(x+4)$

(5) $x = -\dfrac{3}{25}y^2$

(6) $y = \dfrac{5}{2}x$

$A = \left(\dfrac{7}{2}, 2 + \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

As curvas (1) e (6) intersetam-se nos pontos de abcissas $x \approx 0.35 \vee x \approx 1.58$.

2.1 Escreva a expressão integral que permite calcular a área da região assinalada.

2.2 Calcule a área da região localizada nos 2º e 3º quadrantes, restrita ao intervalo $[-4, -3]$.

3. Seja $a_n = f(n)\dfrac{2^{2n+1}}{4^{3n+1}}$, sendo $f(n)$ uma função real de variável natural.

   3.1 Seja $f(n) = 1$ e calcule, se possível, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   3.2 Seja $f(n) = (-1)^n \dfrac{2^{4n+1}}{n}$, estude a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quanto à sua convergência.

4. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$.

5. Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real, e considere o seu desenvolvimento em série de Taylor em torno de $a = -1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)!}(x+1)^n, \forall x \in \text{I.C.}$$

   5.1 Indique o centro de convergência e calcule o intervalo de convergência (I.C.) e o raio de convergência, da referida série.

   5.2 Aplicando o polinómio de Taylor em torno de $a = -1$ de ordem $n = 3$, da função $y = f(x)$, calcule um valor aproximado de $f(-2)$.

6. Determine a expressão da série de MacLaurin, para $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, representativa da função $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$.