

Aluno nº \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

- A duração da prova é de **1 hora** + 15 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva a prova em **4 grupos de folhas separadas**, como é indicado ao longo do enunciado.

1. Considere os conjuntos  $A = \{\{1, 3\}, 1, 3\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ . Determine:

- (1 val.)  $A \setminus B$ .
- (1 val.)  $A \cap \mathcal{P}(A)$ .

2. (1 val.) Definem-se os seguintes predicados:

- $F(x)$ :  $x$  é do sexo feminino
- $S(x)$ :  $x$  é estudante
- $B(x, y)$ :  $x$  sabe o nome de  $y$

Considere a afirmação: *A Joana sabe o nome de todas as alunas*. Indique, sem justificar, qual a proposição que traduz esta afirmação:

- $\forall x (B(\text{Joana}, x) \Rightarrow F(x) \vee S(x))$
- $\forall x ((F(x) \wedge S(x)) \Rightarrow B(\text{Joana}, x))$
- $\exists x ((F(x) \wedge S(x)) \Rightarrow B(\text{Joana}, x))$
- $\forall x (F(x) \vee S(x) \vee \sim B(\text{Joana}, x))$
- Nenhuma das anteriores.

\*\*\*\*\* **Folha 2** \*\*\*\*\*

3. (4 val.) Utilizando unicamente as propriedades das operações lógicas, verifique se a proposição composta

$$\left[ [(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \vee q)] \wedge [\sim p \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \right] \Rightarrow q$$

é logicamente equivalente à proposição composta  $q \vee p$ . Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

\*\*\*\*\* **Folha 3** \*\*\*\*\*

4. Considere os conjuntos  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$ , a relação  $R$  em  $A$  e a relação  $S$  de  $A$  para  $B$ , definidas, respetivamente, por

$$\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow |x - y| < 2$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1.5 val.) Apresente a relação  $R$  por extensão.
- (1.5 val.) Verifique se  $R$  é uma relação de equivalência, justificando convenientemente a sua resposta.
- (1.5 val.) Represente a matriz da menor relação de equivalência,  $\hat{R}$ , que contém  $R$ .
- (1.5 val.) Escreva a matriz  $T$  representativa da relação  $S \circ R$ .

\*\*\*\*\* **Folha 4** \*\*\*\*\*

5. (3 val.) Usando as regras de inferência (e indicando-as) e considerando as permissas:

$$\begin{cases} p \wedge q \\ p \Rightarrow \sim (q \wedge r) \\ s \Rightarrow r \end{cases}$$

prove  $\sim s$ .

6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o número natural,

$$\sum_{i=1}^n i5^i = \frac{5}{16}[(4n-1)5^n + 1].$$