

Aluno nº \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

- A duração da prova é de **1 hora e 45 minutos** + 15 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.

1. (2 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para verificar se a proposição

$$a \wedge c \wedge [(a \vee b) \Rightarrow \sim c]$$

é uma tautologia, uma contradição, ou nenhuma das duas. Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

\*\*\*\*\* **Folha 2** \*\*\*\*\*

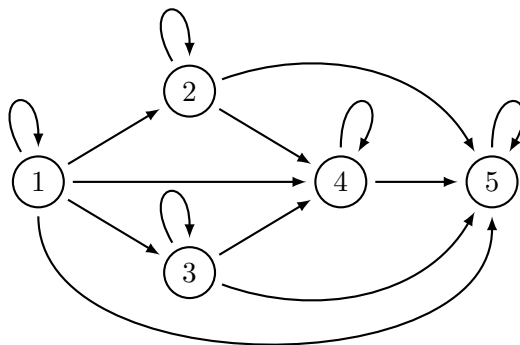
2. Considere os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  e  $C = \{\text{números naturais primos}\}$ . Justificando a sua resposta:

- (1 val.) Obtenha o cardinal de  $\mathcal{P}((A \cap C) \times B)$ .
- (1 val.) Diga qual o valor lógico da proposição

$$\forall S \in \mathcal{P}(A), \exists T \in \mathcal{P}(B), S \cap C = T$$

e apresente a sua negação sem o símbolo  $\sim$ .

3. Considere a relação binária  $R$  sobre o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  definida pelo digrafo seguinte:



- (1.5 val.) Classifique-a quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade, justificando a sua resposta.
- (0.5 val.) Comente a afirmação: " $R$  é uma relação de ordem total".

\*\*\*\*\* **Folha 3** \*\*\*\*\*

4. (2 val.) Converta o argumento seguinte e construa uma prova simbólica, indicando quais as regras de inferência usadas em cada passo:

*Este argumento é válido ou é inválido. Se este argumento é válido, então eu posso demonstrá-lo. Se este argumento é inválido, então eu posso refutá-lo. Eu não posso demonstrar este argumento. Então eu posso refutá-lo.*

5. (2 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que, para todo o inteiro positivo,

$$(2n - 1)^2 - 1 \text{ é divisível por } 8.$$

\*\*\*\*\* Folha 4 \*\*\*\*\*

6. Considere o algoritmo que se segue.

```

procedure Alg(n: positive integer)
  soma := 0
  sum := 0
  for i := 1 to 10:
    for j := 1 to n:
      soma := soma + 1
  k := 1
  while k < n:
    produto := 1
    for l := 1 to n:
      produto := produto * l
    sum := sum + produto
    k := 2 * k
  return soma + sum

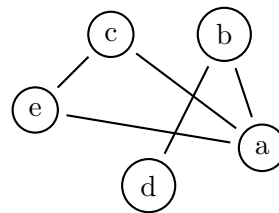
```

- a) (1 val.) Seja  $n = 4$ . Qual o valor que o algoritmo retorna?
- b) (2 val.) Apresente uma tabela com a estimativa  $O$  para o tempo de execução de cada linha do algoritmo em função do valor do input e conclua acerca da complexidade temporal no pior caso.

\*\*\*\*\* Folha 5 \*\*\*\*\*

7. Considere os grafos não orientados,  $G_1$  e  $G_2$ , apresentados, respetivamente, pela matriz de adjacências e pela representação gráfica:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$



- a) (1 val.) Faça a representação gráfica de  $G_1$  e verifique se ele admite uma orientação nas arestas de tal forma a que o digrafo obtido seja fortemente conexo. Justifique.
- b) (2 val.) Diga se o grafo  $G_1$  é Euleriano ou semi-Euleriano. Para cada uma das definições, no caso da resposta ser afirmativa, apresente um trajeto que o comprove; no caso da resposta ser negativa, adicione um número mínimo de arestas de modo a que o grafo resultante passe a ter essa propriedade; caso seja impossível, justifique.
- c) (1 val.) Diga se  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, justificando a sua resposta.

\*\*\*\*\* Folha 6 \*\*\*\*\*

8. (3 val.) Determine um caminho de menor custo, e o seu custo, do vértice  $A$  para o vértice  $I$  do grafo seguinte. Faça-o, simulando o procedimento de um algoritmo estudado em MDISC, dizendo qual o nome do algoritmo e usando a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova.

