Licenciatura em Engenharia Informática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Instituto Superior de Engenharia do Porto

ANÁLISE MATEMÁTICA (2024/2025)
1ª PROVA DE AVALIAÇÃO

ISEP INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

26 de outubro de 2024

Aluno nº:____________________ **Nome:**____

NOTA:

- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Só poderá consultar os formulários validados no início da prova.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente justicados.
- Boa sorte!

Duração: 75 minutos

Cotações:

1.1 (10)	1.2 (10)	1.3 (10)	1.4 (15)	2.1 (10)	2.2 (5)	2.3 (10)	2.4 (15)	2.5 (15)	3.1 (25)	3.2 (25)	4.1 (25)	4.2 (25)	Total) (200)

1. Considere a função $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{1-\ln(x)}\right)$.

   1.1 Determine o domínio e o contradomínio da função f, sem recorrer à sua função inversa.

   1.2 Caracterize a função inversa da função f.

   1.3 Determine a equação da reta tangente à curva de f no ponto $x = e$.

   1.4 Para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, simplifique a seguinte expressão:

$$S(x) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) + \ln\left(e^{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}\right)}\right) + f(e).$$

.

2. Considere a função real de variáveis reais $f(x,y) = \dfrac{e^x}{y} + x\operatorname{arctg}(y) - \ln\left(x^2+1\right)\, y^3$.

   2.1 Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, no ponto $(0,1)$.

   2.2 Determine $df(0,1)$.

   2.3 Calcule a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

   2.4 Usando o conceito de diferencial, calcule o valor aproximado de $f(-0.01, 1.02)$.

   2.5 Usando a regra de derivação da função composta, determine $\left.\dfrac{df}{dy}\right|_{(0,1)}$, sabendo que $x = g(y)$ se define implicitamente pela equação $2^{xy} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$.

3. Resolva os integrais seguintes:

3.1 $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{sen}(x^2)+x\,\mathrm{sen}(2x^2)}{1+\cos^2(x^2)}\,dx.$

3.2 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx$, fazendo a substituição $\dfrac{1}{x}=t$.

4. Calcule os integrais seguintes:

4.1 $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3-3x\right)e^{x^2}\,dx.$

4.2 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)\sqrt{(\mathrm{cotg}(x)+2)^7}}\,dx.$

SOLUÇÕES: ($C\in\mathbb{R}$)

1.1 $D_f=\left]0,+\infty\right[$ e $D'_f=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; **1.2** $f^{-1}(x)=\frac{e}{\mathrm{tg}(x)}$, $D_{f^{-1}}=D'_f=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $D'_{f^{-1}}(x)=D_f=\left]0,+\infty\right[$; **1.3** $y-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2e}(x-e)$; **1.4** $S(x)=x$; **2.1** $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1+\dfrac{\pi}{4}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$; **2.2** $df(0,1)=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\,dx-dy$; **2.3** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\dfrac{e^x}{y^2}+\dfrac{1}{1+y^2}-\dfrac{6xy^2}{x^2+1}$, **2.4** $f(-0.01,1.02)\approx 1-\frac{12+\pi}{400}$; **2.5** $\left.\dfrac{df}{dy}\right|_{(0,1)}=-1$;
3.1 $-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\cos(x^2))-\frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2(x^2)\right)+C$; **3.2** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)+C$;
4.1 $2-\frac{3e}{2}$; **4.2** $\frac{2^{-\frac{3}{2}}-2\times 3^{-\frac{5}{2}}}{5}$.