Licenciatura em Engenharia Biomédica

MATEMÁTICA 1 (2023/2024)
ÉPOCA NORMAL: 1ª PROVA DE AVALIAÇÃO

26 de janeiro de 2024

Aluno nº:	**Nome:**

- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Só poderá consultar os formulários validados no início da prova.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente justicados.
- Boa sorte!

Duração: 75 minutos

Cotações:

1.1 (15)	1.2 (20)	1.3 (15)	1.4(i) (20)	1.4(ii) (15)	1.4(iii) (15)	2. (15)	3. (45)	4. (40)	Total) (200)

1. Considere as funções, f e g, reais de variável real, definidas por,

$$f(x) = \frac{2}{7^{\log_3\left(\sqrt{5-4x}\right)}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \pi + |\text{arcsen}(5-2x)|.$$

   1.1 Determine o domínio de f.

   1.2 Determine a expressão $f^{-1}(x)$.

   1.3 Calcule o domínio e o contradomínio da função g.

   1.4 Seja $h(x) = \text{arctg}(x-3)$.

   (i) Resolva a seguinte equação:

$$h^{-1}(0) + \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) - \text{cosec}\left(g(3)\right) = 3^{\left(\log_7\left(\frac{2}{f(x)}\right)\right)}.$$

   (ii) Escreva uma equação da reta tangente à curva de h, no ponto $(3,0)$.

   (iii) Aplicando o conceito de diferencial, e **usando a função** $h(x)$, determine o valor aproximado de $\text{arctg}(1.01)$.

2. Seja $h(x)$ tal que, $\int h(x)\,dx = \cos^2(x^3-3x^2) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Prove que $h(x) = (3x^2-6x)\text{sen}(2x^3-6x^2)$.

3. Aplicando o método de integração por partes, determine a expressão analítica da função real de variável real $f(x)$, tal que,

$$f'(x) = x^3\, 3^{2x^2-1},$$

   e que passa no ponto $(0,0)$.

4. Resolva o integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4-\sqrt{x^3}}}\,dx$, fazendo a substituição $t = \sqrt{x}$.

Licenciatura em Engenharia Biomédica

MATEMÁTICA 1 (2023/2024)

ÉPOCA NORMAL: 2ª PROVA DE AVALIAÇÃO

26 de janeiro de 2024

Aluno nº:	**Nome:**

- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Só poderá consultar os formulários validados no início da prova.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver deverão ser devidamente justificados.
- Boa sorte!

Duração: 1h15m

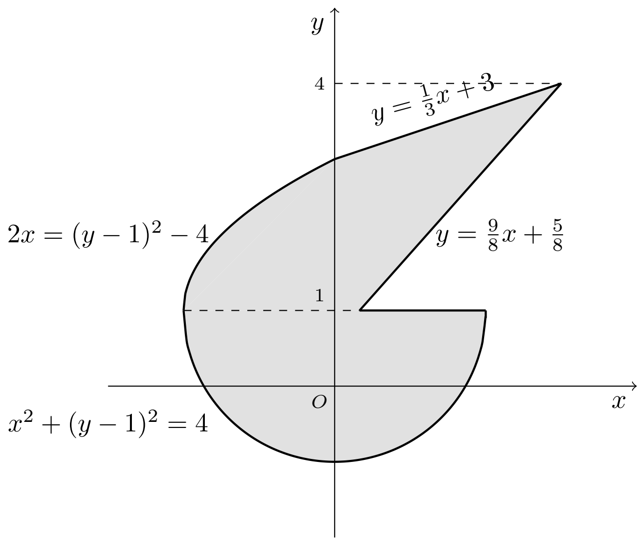
Cotações:

1. (30)	**2. (35)**	**3.1 (20)**	**3.2 (15)**	**3.3 (10)**	**3.4 (5)**	**4. (20)**	**5. (20)**	**6.1 (25)**	**6.2 (10)**	**6.3 (10)**	**Total) (200)**

1. Calcule o integral da função real de variável real, f, no intervalo $[1, +\infty[$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^2+x}} & \text{se} \quad 1 \le x \le e \\[2ex] \dfrac{1}{x\ln^3(x)} & \text{se} \quad x > e \end{cases}.$$

2. Considere a região abaixo limitada por ramos das curvas indicadas. Escreva a expressão integral que permite calcular a área da região assinalada.



3. Considere as sucessão $u_n = \dfrac{7^{5-n}\, 5^{\frac{n-3}{2}}}{9^{2n+2}}$, $v_n = \sqrt[4]{n^{-\frac{a+1}{2}}}$ $(a \in \mathbb{R})$ e a série desconhecida $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente $(b_n > 0)$:

3.1 Estude a convergência da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

3.2 Determine o valor de a para que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ seja divergente.

3.3 Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{\frac{n}{2}}}{1000^n}$.

3.4 Comente, **justificando**, o valor lógico da seguinte afirmação, "A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ é absolutamente convergente".

4. Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

5. Considere a série de potências, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n-1)!}{n^2} (x-5)^n$, representaiva de uma dada função f. Indique o centro de convergência e calcule o intervalo e o raio de convergência da série.

6. Seja dada a função $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)$, representável por um desenvolvimento em série de MacLaurin. Sabendo que o intervalo de convergência é $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, determine:

6.1 A expressão da referida série.

6.2 A expressão do polinómio de MacLaurin de ordem $n = 3$, da função $y = f(x)$.

6.3 Um valor aproximado de $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$, com base na expressão do polinómio obtida na alínea anterior.