Análise Matemática

Séries

Capítulo 5

Licenciatura em
Engenharia Informática / ISEP

(2024/2025)

Conteúdo

- Uma coleção de objectos ou acontecimentos está em sucessão, se estiver ordenada de acordo com um determinado critério.

- Uma sucessão de números reais é uma sequência de números escritos numa determinada ordem

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...; n \in \mathbb{N}.$$

Note-se:

  - O número a_1 denomina-se primeiro termo, a_2 denomina-se segundo termo, e em geral, a_n denomina-se o n-ésimo termo, ou termo de ordem n.
  - Trata-se de sequências infinitas, logo para cada a_n existe sempre um sucessor a_{n+1}.
  - Cada termo a_n da sucessão é obtido por um determinado critério dependente de n.

Por exemplo,

A sequência $2, 4, 6, 8, \ldots$ é uma sucessão tal que:

- o primeiro termo é $a_1 = 2$ obtido para $n = 1$;
- o segundo termo é $a_2 = 4$ obtido para $n = 2$;
- o terceiro termo é $a_3 = 6$ obtido para $n = 3$;
- qual será o termo de ordem $n = 100$?, ou seja $a_{100} =?$.

O critério aplicado para obter todos os termos da sucessão é

$$a_n = 2n,$$

logo $a_{100} = 2 \times 100 = 200$.

Sucessão: Definição

Uma sucessão é uma sequência ordenadas de números reais, ou seja, é uma função real de variável natural:

$$\begin{array}{rccc} a_n: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

em que a_n é o termo de ordem n.

- Esta relação indica que a cada valor natural n, corresponde um número real a_n que ocupa a posição n na sequência.
- A expressão que representa o termo genérico a_n, e que nos permite calcular qualquer termo da sucessão, sabendo a sua ordem, chama-se termo geral.
- A sucessão $\{a_1, a_2, a_3, a_4 ...\}$ pode representar-se por $\{a_n\}$.

Séries Numéricas: Definição

Seja dada uma sucessão numérica,

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4 ...\}.$$

A expressão

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

chama-se série numérica, sendo:

- os números $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ os termos da série;
- n o índice de cada termo na série;
- u_n chama-se termo geral da série.

Assim: Uma série (infinita) de números reais é a soma infinita dos termos de uma sucessão de números reais.

Será que faz sentido falar na soma de uma sucessão infinita de termos?

Por exemplo, consideremos a série,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Verifica-se:

- À medida que o n aumenta, os termos da série tornam-se cada vez maiores e assim,
- a soma torna-se infinitamente grande.

Neste caso dizemos que a série é divergente, ou seja não tem soma.

Será que faz sentido falar na soma de uma sucessão infinita de termos?

Por exemplo, consideremos a série,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Verifica-se:

- À medida que o *n* aumenta, os termos da série tornam-se cada vez menores e assim,
- a soma converge para um determinado valor (a partir de uma certa ordem, os termos da série são ”quase nulos”).

Neste caso dizemos que a série é convergente, ou seja tem soma. Para este exemplo a soma é 1.

A saber:

- Existem séries numéricas convergentes e séries numéricas divergentes.
- Existem alguns critérios que nos permitem concluir sobre a convergência/divergência de séries numéricas.
- Vamos estudar algumas séries particulares:
  - geométricas,
  - de Riemann,
  - alternadas,

  nomeadamente os critérios que nos permitem concluir sobre a convergência/divergência de cada uma delas.

Convergência de séries numéricas

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e S_n a sucessão das somas parciais.

- Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é *convergente*, se a sucessão S_n for convergente;
- Se a sucessão S_n for divergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diz-se *divergente*.

Soma de séries numéricas convergentes

No caso de a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ser convergente, existe um valor real S, tal que.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

O limite S designa-se por *soma da série* e escreve-se,

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$

Algumas Propriedades das Séries Numéricas

- Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ são convergentes com somas S_1 e S_2, respetivamente:
  - $\rightarrow$ A série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ é convergente e tem soma $S_1 + S_2$;
  - $\rightarrow$ A série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ é convergente e tem soma $S_1 - S_2$;
  - $\rightarrow$ A série $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ é convergente e tem soma kS_1.
- Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for convergente e a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ for divergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ é divergente.

Convergência de séries numéricas

- Condição necessária de convergência: Se a série numérica
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ é uma série convergente então } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
Sendo uma condição apenas necessária de convergência, este resultado é particularmente útil para decidir que uma série é divergente.

- Critério de Divergência: Se $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente.

Convergência de séries numéricas

- 1º Critério de Comparação: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Suponhamos que, a partir de certa ordem, $a_n \leq b_n$. Tem-se:

  $\rightarrow$ Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

  $\rightarrow$ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também é divergente.

Convergência de séries numéricas

- 2º Critério de Comparação: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Se a partir de certa ordem, $b_n > 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$, então, se $L \neq 0, +\infty$ as séries são da mesma natureza.

- Critério da Razão: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos não nulos e suponha-se que,

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

  - Se $\rho < 1$, a série é convergente;
  - Se $\rho > 1$, a série é divergente;
  - Se $\rho = 1$, o critério é inconclusivo.

Série Geométrica: Definição

A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é geométrica se se trata de uma série do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1},$$

em que:

- a é o primeiro termo da série ($a \neq 0$);
- r é a razão da série, $r = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ou seja, uma série geométrica é aquela em que o quociente entre cada termo e o anterior é uma constante.

Convergência da Série Geométrica

A série geométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$$

é convergente se $|r| < 1$ e a sua soma é

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, |r| < 1.$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Exercício 1: Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ é geométrica e indique o primeiro termo e a razão.

Exercício 2: Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ é geométrica e indique o primeiro termo e a razão.

Exercício 3: Estude a convergência da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^{n-2}}$ e, se que possível, calcule a sua soma.

Série de Riemann

Trata-se de uma série do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}.$$

Esta série é:

- convergente se e só se $p > 1$;
- divergente se e só se $p \leq 1$.

O caso particular de $p = 1$, a série toma o nome de série harmónica (divergente).

Exercício 4: Caracterize a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

Exercício 5: Prove que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} 5$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5n^2+1}$ são divergentes.

Exercício 6: Estude a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n^2+4n+3}$.

Exercício 7: Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercício 8: Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

Exercício 9: Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$.

Séries Alternadas

As séries cujos termos consecutivos têm sinais contrários são designadas por séries alternadas, podendo assumir uma das seguintes formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \qquad \text{OU} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n.$$

Observação: Na primeira forma, o 1^o termo da série é positivo, enquanto que na segunda é negativo.

Série dos Módulos de uma Série Alternada: Definição

Dada uma série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$, a série dos módulos é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n}u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|.$$

Estudar a Convergência de uma Série Alternada

- Se a série dos módulos for convergente, a série alternada diz-se absolutamente convergente (terminando o estudo da convergência).
- Se a série dos módulos for divergente deverá aplicar-se o Critério de Leibniz.

Série Alternada: Critério de Leibniz

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (u_n é sucessão decrescente);
- $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

- Caso as duas condições do critério de Leibniz sejam satisfeitas, a série alternada diz-se simplesmente convergente.
- Caso uma das condições do critério de Leibniz falhar, a série alternada diz-se divergente.

Exercício 10: Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercício 11: Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n}$.

Exercício 12: Considere as seguintes sucessões: $u_n = \dfrac{5^{-n}}{3^{-2n-1}}$, $v_n = (-1)^n w_n$ e $w_n = \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}$.

12.1 Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e calcule, se possível, a sua soma.

12.2 Determine α para que a serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ seja absolutamente convergente.

12.3 Seja $\alpha = 2$, analise o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} (w_n + 2)$, justifique convenientemente.

Exercício 13: Considere a seguinte sucessão: $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{(-5)^{2n-1}}$, $v_n = \sqrt[6]{n^{-5}}$ e $w_n = k$; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.1 Verifique se a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e calcule, se possível, a sua soma. Justifique.

13.2 Analise o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + w_n)$, justificando convenientemente a sua resposta.

13.3 Prove que a que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_n$ é simplesmente convergente. Justifique convenientemente a sua resposta.

Exercício 14: Considere as sucessões: $u_n = \dfrac{3^{1-2n}}{2^{-3n-2}}$ e $v_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^{1-3\alpha}}}$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

14.1 Estude a convergência da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e calcule, se possível, a sua soma. Justifique.

14.2 Determine α, de modo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, seja divergente. Justifique convenientemente a sua resposta.

14.3 Para $\alpha = 0$, prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ é simplesmente convergente. Justifique convenientemente a sua resposta.

Série de Funções: Definição

Uma série de funções é uma soma infinita de termos, dependentes de uma variável, cujo termo geral é representado por $u_n(x)$:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Por atribuição de valores à variável x, obtém-se diferentes séries numéricas, as quais, naturalmente podem convergir ou divergir.

Por exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

é uma série geométrica de razão $r = x$. Se $|x| < 1$, a série é convergente e se $|x| \geq 1$, a série é divergente.

Série de Potências: Definição

Designa-se por série de potências de $x - a$, centrado em a a série de funções do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

- $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots \in \mathbb{R}$ são os coeficientes da série;
- $a \in \mathbb{R}$ é o centro de convergência da série.

Interessa-nos estudar a convergência deste tipo de séries.

Nota: Relativamente às séries numéricas, a diferença é que as séries de potências podem convergir para determinados valores de x e divergir para outros.

Critério da Razão ou de D'Alembert para convergência absoluta

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos não nulos e suponha-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho.$$

- Se $\rho < 1$, a série é absolutamente convergente.
- Se $\rho > 1$, a série é divergente.
- Se $\rho = 1$, o critério é inconclusivo.

Convergência de uma série de potências

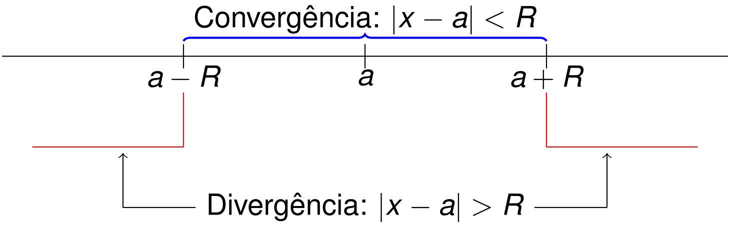
Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ verifica-se um dos casos:

(1) A série é convergente apenas para $x = a$;

(2) A série é convergente para todo o valor de x;

(3) Existe um número positiva R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

- O número R em (3) chama-se raio de convergência;
- Por convenção, tem-se $R = 0$ no caso (1) e $R = \infty$ no caso (2);
- O intervalo de convergência ($I.C.$), de uma série de potências é o intervalo de todos os valores de x para os quais a série converge.
  - No caso (1), $I.C. = \{a\}$;
  - No caso (2), $I.C. =]-\infty, +\infty[$;
  - No caso (3), $I.C. =]a-R, a+R[$. Dependendo das séries podemos ter as seguintes situações $I.C. =]a-R, a+R[$ ou $I.C. =]a-R, a+R]$ou $I.C. = [a-R, a+R[$ ou $I.C. = [a-R, a+R]$.



- $a \mapsto$ centro de convergência;
- $R \mapsto$ raio de convergência;
- $|x-a|<R \Rightarrow I.C. =]a-R, a+R[\mapsto$ intervalo de convergência.

Exercício 15: Indique o centro, o raio e o intervalo de convergência das séries seguintes:

15.1: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n.$

15.2: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}.$

15.3: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n}(n!)^2}.$

15.4: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$

15.5: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{3n}}(x+4)^n.$

- Nesta secção vamos aprender como representar certo tipo de funções como uma série de potências.
- Podemos perguntar o porquê de querermos representar uma função conhecida como uma soma infinita de termos...
- Estas aproximações são úteis para, por exemplo:
  - Integrar funções para as quais não se conhece uma primitiva;
  - Resolver equações diferenciais;
  - Aproximar funções por polinómios, muitas vezes útil em programação.

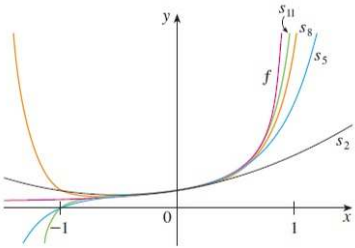
Por exemplo, tem-se:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

- A igualdade entre a função e a série de potência só é válida para os valores para os quais a série é convergente, ou seja, só é válida no intervalo de convergência da respetiva série.
- Neste caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ corresponde a uma série geométrica de razão $r = x$, que sabemos que só é convergente se $|x| < 1$.
- A igualdade entre a função e a série obtém-se se somarmos todos os termos da série (infinitos termos). Conseguimos aproximações da função quando somamos só alguns termos, calculando somas parciais da série.

Na figura está representada a função assim como a representação de algumas somas parciais da respetiva série:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$



Na figura S_2 representa a soma com 2 termos, S_5 representa a soma com 5 termos e assim sucessivamente. Notar que a aproximação só é válida no intervalo $]-1, 1[$.

Como determinar a representação em série de potências de funções?

Suponhamos que uma dada função f é representada por um desenvolvimento em série de potências, em torno a $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots; \; |x-a| < R$$

Nesta expressão, uma vez que a é conhecido, só os coeficientes

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$$

são desconhecidos.

Vejamos de seguida um método que nos permite determinar estes coeficientes, desde que a função tenha derivadas de qualquer ordem.

Cálculo dos coeficientes da série de potências

Coeficiente c_0: $f(a) = c_0$.

Coeficiente c_1:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \dots$$

$$f'(a) = c_1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = f'(a).$$

Coeficiente c_2:

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \times 2c_3(x-a) + 4 \times 3c_4(x-a)^2 + 5 \times 4c_5(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(a) = 2c_2 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Coeficiente c_3:

$$f'''(x) = 3 \times 2c_3 + 4 \times 3 \times 2c_4(x-a) + 5 \times 4 \times 3c_5(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(a) = 3 \times 2c_3 \quad \Longrightarrow \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \times 2} = \frac{f'''(a)}{3!}.$$

Cálculo dos coeficientes da série de potências

Coeficiente c_4:

$$f^{(4)}(x) = 4 \times 3 \times 2c_4 + 5 \times 4 \times 3 \times 2c_5(x-a) + ...$$

$$f^{(4)}(a) = 4 \times 3 \times 2c_4 \quad \Longrightarrow \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4 \times 3 \times 2} = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}.$$

Generalizando:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Teorema

Se uma função f é representada por uma série de potências,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n; \quad |x-a| < R,$$

então os coeficientes da série são definidos por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Substituindo a expressão de c_n na série de potências, vem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots. \end{aligned}$$

A série definida por:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \end{aligned}}$$

chama-se Série de Taylor da função f em torno a $x = a$.

No caso particular em que $a = 0$, a série definida por:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \end{aligned}}$$

chama-se Série de MacLaurin da função f.

Exercício 16: Encontre a série de MacLaurin da função $f(x) = e^x$ e o seu raio de convergência.

Exercício 17: Encontre a série de Taylor em torno a $a = 2$ da função $f(x) = \ln x$ e o seu raio de convergência.

Exercício 18: Determine a série de Maclaurin representativa da seguinte função, indicando o intervalo de convergência $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercício 19: Determine a série de Taylor representativa da função $f(x) = \ln(1+2x), \quad a = 1$, indicando o intervalo de convergência.

Polinónios de Taylor e de MacLaurin

Seja f uma função que possui derivadas até à ordem n no ponto a:

$$f'(a), f''(a), ..., f^{(n)}(a).$$

Define-se Polinómio de Taylor de grau n da função f no ponto $x = a$:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

- Note-se que o polinómio de Taylor não é mais do que a soma parcial de ordem $n+1$ da série de Taylor da função.
- Se o ponto em torno do qual se efetua o desenvolvimento é $a = 0$, dá-se-lhe o nome de Polinómio de MacLaurin.

Assim, os polinómios de Taylor representam aproximações da função f. À medida que se aumenta o grau do polinómio de Taylor melhor é essa aproximação em torno do ponto. Podemos escrever:

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Define-se Resto do Polinómio de Taylor de grau n da função f no ponto $x = a$ e representa-se por $R_n(x)$, como sendo a diferença entre $f(x)$ e $P_n(x)$, para cada valor de x, isto é

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Teorema

Se $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, sendo $P_n(x)$ o polinómio de Taylor de ordem n de f em a e

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma dos termos da série de Taylor, no intervalo $|x - a| < R$.

Exercício 20: Sendo dada a função $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$, representável por um desenvolvimento em série de MacLaurin, cujo intervalo de convergência é $]-1/2, 1/2[$, determine:

- O polinómio de MacLaurin de ordem $n = 3$.
- Um valor aproximado de $f\left(\frac{1}{4}\right)$.
- Com base no polinómio de MacLaurin associado a f é possível obter um valor aproximado de $f(2) = 1/25$? Justifique.