1. Verifique se as aplicações seguintes são transformações lineares:

   a) $\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y,y) \end{array}$

   b) $\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x-2z,z-y) \end{array}$

   c) $\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (1+x,y) \end{array}$

   d) $\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & M_{1\times 3} & \rightarrow & M_{2\times 2} \\ & [a_1\ a_2\ a_3] & \mapsto & \begin{bmatrix} a_1 & a_1-a_3 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

2. Verifique se as seguintes transformações são lineares:

   a) $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T}\big((x,y)\big) = (x-y, 0, x+y).$
   b) $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\big((x,y,z)\big) = (0, z).$
   c) $\mathbf{T}: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{T}\big((x,y,z,t)\big) = (t,z,x,y).$
   d) $\mathbf{T}: \mathrm{P}_3[x] \longrightarrow \mathrm{P}_3[x], \quad \mathbf{T}\big(p(x)\big) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$
   e) $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\big((x,y)\big) = (x-2xy, 0).$
   f) $\mathbf{T}: \mathcal{M}_{3,3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,3}, \quad \mathbf{T}\big(\mathbf{A}\big) = \mathbf{A}^T.$

3. Para cada transformação linear do exercício anterior determine: $\mathrm{Ker}(\mathbf{T})$ e $\mathrm{Im}(\mathbf{T})$ e verifique que $\dim(\mathcal{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{T})) + \dim(\mathrm{Im}(\mathbf{T}))$, onde $\mathcal{E}$ é o espaço de partida de $\mathbf{T}$.

4. Seja $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$\mathbf{T}(1,0,0) = (2,-1) \quad \mathbf{T}(0,1,0) = (-1,3) \quad \mathbf{T}(0,0,1) = (0,1)$$

   a) Determine $\mathbf{T}(1,-1,3)$
   b) Determine os vetores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $\mathbf{T}(x,y,z) = (2,1)$
   c) Escreva a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

5. Determine a matriz que que representa a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z) = (x-2y, y-z)$$

   relativamente às bases $\mathrm{B}_3 = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(0,0,1)\}$ e $\mathrm{B}_2 = \{(1,1),(0,-1)\}$

6. Encontre a matriz que representa a transformação linear, $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\mathbf{T}((x,y,z)) = (x-y-z, x+2y+3z)$, relativamente às bases B e B$'$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

   a) Onde, B e B$'$ são as bases canónicas.
   b) Onde, $\mathrm{B} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,0,1)\big)$ e $\mathrm{B}' = \big((1,1),(0,1)\big)$

jem@isep.ipp.pt

7. Considere as transformações lineares $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{T}(x,y)=(x+y,x-y,2x)$ e $\mathbf{L}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\mathbf{L}(x,y,z)=(x+y+z,z-y-x)$.

   a) Determine as expressões de:

   (i) $\mathbf{L}\circ\mathbf{T}$.

   (ii) $\mathbf{T}\circ\mathbf{L}$.

   b) Suponha que, para cada espaço, fixamos a base canónica. Verifique que:

   (i) $\mathbf{M}(\mathbf{L}\circ\mathbf{T})=\mathbf{M}(\mathbf{L})\times\mathbf{M}(\mathbf{T})$

   (ii) $\mathbf{M}(\mathbf{T}\circ\mathbf{L})=\mathbf{M}(\mathbf{T})\times\mathbf{M}(\mathbf{L})$

8. Encontre, se possível, uma transformação linear $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaça as seguintes condições:

   a) $\text{Ker}(\mathbf{T})=\{(x,y,x+y)\in\mathbb{R}^3 : x,y\in\mathbb{R}\}$ e $\text{Im}(\mathbf{T})=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\}$.

   b) $\text{Ker}(\mathbf{T})=\{(x,2x,x)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\}$ e $\text{Im}(\mathbf{T})=\{(x,x,x): x\in\mathbb{R}\}$.

   c) $\text{Ker}(\mathbf{T})=\{(0,x,0)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\}$, $\text{Ker}(\mathbf{T}\circ\mathbf{T})=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x,y\in\mathbb{R}\}$ e $\text{Ker}(\mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{T})=\mathbb{R}^3$.

   d) $\text{Ker}(\mathbf{T})=\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\}$ e $\mathbf{T}$ é bijectiva

   e) $\mathbf{T}$ é bijectiva (isomorfismo) e $\mathbf{T}(A)=B$, onde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ e $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y+2z=0\}$.

9. Considere as bases $\text{B}=\big((1,2,0),(1,1,0),(1,3,1)\big)$ e $\text{B}'=\big((1,-1,0),(-1,0,0),(0,0,1)\big)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

   a) Determine a matriz $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'}$, mudança da base B para a base B′.

   b) Determine a matriz $\mathbf{M}_{\text{B}',\text{B}}$, mudança da base B′ para a base B.

   c) Mostre que $\mathbf{M}^{-1}_{\text{B},\text{B}'}=\mathbf{M}_{\text{B}',\text{B}}$.

10. Considere as bases $\text{B}=\big(1,1-x,x-x^2\big)$ e $\text{B}'=\big(1+x^2,1+x,1+x+x^2\big)$ do espaço vectorial $\text{P}_2[x]$.

    a) Determine a matriz $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'}$, mudança da base B para a base B′.

    b) Determine a matriz $\mathbf{M}_{\text{B}',\text{B}}$, mudança da base B′ para a base B.

    c) Escreva o polinómio $a+b(1-x)+c(x-x^2)$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, como combinação linear dos elementos da base B′.

11. Considere a transformação $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{T}(x,y,z)=(3x,3y-x,z+2y)$.

    a) Determine $\text{Ker}(\mathbf{T})$.

    b) $\mathbf{T}$ é um isomorfismo (bijectiva)?

    c) Escreva a matriz de $\mathbf{T}$ na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    d) Encontre os valores próprios de $\mathbf{T}$.

    e) Encontre os subespaços próprios de $\mathbf{T}$.

12. Sejam $\text{B}=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ e $\text{B}'=\big((2,0,6),(0,3,4),(0,1,0)\big)$ duas bases de $\mathbb{R}^3$.

    a) Mostre que $\text{Rep}_{\text{B}}\big((1,2,3)\big)=(-1,-1,3)_{\text{B}}$ e que $\text{Rep}_{\text{B}'}\big((1,2,3)\big)=(\frac{1}{2},0,2)_{\text{B}'}$.

    b) Encontre, $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'}$, a matriz mudança da base B para a base B′.

jem@isep.ipp.pt

c) Use a matriz $\mathbf{M}_{\mathrm{B,B'}}$ para verificar que se tem

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{B'}}\big((1,2,3)\big) = \mathbf{M}_{\mathrm{B,B'}} \times \mathrm{Rep}_{\mathrm{B}}\big((1,2,3)\big).$$

13. Encontre os valores próprios e os respectivos subespaços próprios das seguintes matrizes.

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{c)} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \textbf{d)} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{e)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \quad \textbf{f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{g)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \textbf{h)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

14. considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que o seu polinómio característico é $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$.

b) Sabendo que $p_A(1) = 0$ determine os valores próprios de $\mathbf{A}$.

c) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por valores próprios de $\mathbf{A}$.

15. **a)** Mostre que se λ é valor próprio de $\mathbf{A}$ então λ^n é um valor próprio de $\mathbf{A}^n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que se λ é valor próprio de uma matriz invertível $\mathbf{A}$ então $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de $\mathbf{A}^{-1}$

c) Mostre que se $\mathbf{A}$ é invertível e que se λ é valor próprio de $\mathbf{A}$ então λ^n é um valor próprio de $\mathbf{A}^n$ para todo o $n \in \mathbb{Z}$.

jem@isep.ipp.pt

Soluções

1.

2.

A única transformação que não é linear é a da alínea **e)**.

3.

a) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0)\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{(x,0,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$.

b) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(x,y,0) : \ \ x,y \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{(0,x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

c) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0,0,0)\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \mathbb{R}^4$.

d) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \text{P}_3[x] : b = d = c = d = 0, \}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \text{P}_3[x] : d = 0, \}$.

f) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{O}_{3,3}\}$, $\text{Im}(\mathbf{T}) = \mathcal{M}_{3,3}$.

4.

a) $(3,-1)$.

b) $(7/5 - 1/5z, 4/5 - 2/5z, z), \ z \in \mathbb{R}$.

c) $\mathbf{M}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{M}_{\text{B}_3,\text{B}_2}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

6.

a) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

7.

a) **(i)** $(\mathbf{L} \circ \mathbf{T})(x,y) = (4x, 0)$.

(ii) $(\mathbf{T} \circ \mathbf{L})(x,y,z) = (2z, 2x + 2y, 2x + 2y + 2z)$.

b)

8.

a) Por exemplo, $\mathbf{T}$ definida por: $\mathbf{T}\big((1,0,1)\big) = \mathbf{T}\big((0,1,1)\big) = (0,0,0)$ e $\mathbf{T}\big((0,1,0)\big) = (1,1,1)$.

b) Não é possível porque $\dim(\mathbb{R}^3) > \dim(\text{Ker}(\mathbf{T})) + \dim(\text{Im}(\mathbf{T}))$.

c) Por exemplo, $\mathbf{T}$ definida por: $\mathbf{T}\big((0,1,0)\big) = (0,0,0)$, $\mathbf{T}\big((1,0,0)\big) = (0,1,0)$ e $\mathbf{T}\big((0,0,1)\big) = (1,0,0)$.

d) Não é possível porque...

e) Por exemplo $\mathbf{T}$ tal que $\mathbf{T}(-1,1,0) = (1,0,0)$, $\mathbf{T}(-1,0,1) = (0,-2,1)$ e $\mathbf{T}(0,1,0) = (0,1,0)$.

9.

a) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10.

a) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{M}_{\text{B},\text{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $(a + 2b - c)(1 + x^2) + (a + b + c)(1 + x) + (-a - 2b)(1 + x + x^2)$.

11.

a) $\text{Ker}(\mathbf{T}) = \{(0,0,0)\}$.

jem@isep.ipp.pt

b) Sim.

c) $\mathbf{M}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ (com multiplicidade 2).

e) $\mathrm{E}_1 = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_3 = \{(0,x,x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$.

12.

a)

b) $\mathbf{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/4 & -3/4 & -1/2 \\ 9/4 & 13/4 & 5/2 \end{bmatrix}$.

c)

13.

a) 2 e -5; $\mathrm{E}_2 = \{(x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_{-5} = \{(0,x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

b) 3, 4 e 7; $\mathrm{E}_3 = \{(x,0,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{E}_4 = \{(0,x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_7 = \{(0,0,x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

c) 3 e 7; $\mathrm{E}_3 = \{(x,-2x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_7 = \{(x,2x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

d) -2 e 6; $\mathrm{E}_{-2} = \{(x,-x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_6 = \{(x,\frac{3}{5}x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$

e) 0, 2 e -3; $\mathrm{E}_0 = \{(0,x,-x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{E}_2 = \{(x,x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_{-3} = \{(0,x,-2x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

f) 0 (multiplicidade 2) e 3; $\mathrm{E}_0 = \{(0,x,0) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_3 = \{(x,4/3x,3x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

g) 2 (multiplicidade 2) e 9; $\mathrm{E}_2 = \{(x,y,0) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_9 = \{(x,x/2,7x/6) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

h) 0, 1, 2 e 3; $\mathrm{E}_0 = \{(0,0,x,-x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{E}_1 = \{(x,0,x/2,-5x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{E}_2 = \{(x,x/4,-23x/8,-69x/8) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$ e $\mathrm{E}_3 = \{(0,0,x,2x) \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

14.

a)

b) 1, 2 e 5.

c) Por exemplo, $\mathrm{B} = \big((1,-1,1),(1,0,1),(1,1,2)\big)$.