Espaços Vectoriais

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciatura em Engenharia Informática

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Ano letivo 2024/2025

Instituto Superior de Engenharia do Porto

Definição 1 (Operação binária)

Seja $\mathscr{A}$ um conjunto não vazio. Uma **operação binária** θ definida no conjunto $\mathscr{A}$ é uma função

$$\theta : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}.$$

tal que o seu domínio coincide com o conjunto de partida $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

☞ *Escrevemos $a\theta b$ para representar a imagem de (a, b)*

Em linguagem Matemática esta condição traduz-se pela proposição

$$\forall (x, y) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}, \ \exists z \in \mathscr{A} : z = x\theta y. \tag{1}$$

Nota: Uma função cujo domínio coincide com o conjunto de partida diz-se uma aplicação. Frequentemente também dizemos que uma função $\theta : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ é uma *operação* em $\mathscr{A}$ e que θ é uma *operação fechada* em $\mathscr{A}$ se verifica a condição (1).

Exemplos:

1. A subtracção não é fechada no conjunto $\mathbb{N}$.
2. A subtracção é uma operação binária no conjunto $\mathbb{Z}$.

Definição 2 (Espaço vectorial real)

1. Um **espaço vectorial real** consiste em dois conjuntos $\mathscr{E}$ e $\mathbb{R}$. Aos elementos de $\mathscr{E}$ chamamos de *vectores* e aos elementos de $\mathbb{R}$ chamamos de escalares.
2. O conjunto $\mathbb{R}$ está munido com as operações binárias usuais de adição e produto "+" e "•".
3. O conjunto $\mathscr{E}$ está munido com uma *operação binária* (adição de vectores) que representaremos por $\oplus$. Ou seja,

$$\forall\, u,v \in \mathscr{E}, \exists w \in \mathscr{E} \ : \ w = u \oplus v.$$

4. Existe uma operação externa $\odot$ tal que

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$$

tal que a todo o escalar α e a todo o vector u faz corresponder um vector $v = \alpha \odot u$. Chamamos a esta operação **produto de um escalar por um vector**.

Definição 2 (continuação)

5. A operação $\oplus$ satisfaz os seguintes axiomas:

$$A_1: \quad \forall\, u, v, w \in \mathscr{E}, \; (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w).$$
$$A_2: \quad \exists o_\oplus \in \mathscr{E}, \; \forall\, u \in \mathscr{E}, u \oplus o_\oplus = o_\oplus \oplus u = u.$$
$$A_3: \quad \forall\, u \in \mathscr{E}, \; \exists u' \in \mathscr{E}, \; u \oplus u' = u' \oplus u = o_\oplus.$$
$$A_4: \quad \forall\, u, v \in \mathscr{E}, \; u \oplus v = v \oplus u.$$

6. As operações $\oplus$, $\odot$, $+$ e $\cdot$ satisfazem os seguintes axiomas

$$M_1: \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathscr{E}, (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u).$$
$$M_2: \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathscr{E}, \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v).$$
$$M_3: \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathscr{E}, (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u).$$
$$M_4: \quad \forall u \in \mathscr{E}, 1 \odot u = u.$$

☞

(i) *Os quatro primeiros axiomas,* A_1*,* A_2*,* A_3 *e* A_4*, dizem respeito à adição de vectores e são, respectivamente, a* ***associatividade****, a* ***existência de elemento neutro*** $o_\oplus$*, a* ***existência de inverso para cada vector*** *e a* ***comutatividade****.*

(ii) *Os axiomas,* M_1*,* M_2*,* M_3 *e* M_4*, estabelecem o comportamento das quatro operações envolvidas na estrutura de um espaço vectorial real.* M_1 *é a* ***distributividade relativamente à adição escalar****,* M_2 *a* ***distributividade relativamente à adição vectorial****,* M_3 *a* ***associatividade mista*** *e* M_4 *exige que o elemento neutro da multiplicação escalar,* 1*, seja elemento neutro à esquerda de* $\odot$*.*

(iii) *Sempre que não haja ambiguidades iremos simplificar a notação das operações, adição de vectores "*$\oplus$*" e produto de um escalar por um vector "*$\odot$*". Neste caso, Usaremos o mesmo símbolo '*$+$*" para representar indistintamente a soma de escalares ou a adição de vectores e o mesmo símbolo "•" para representar indistintamente o produto de escalares ou o produto de um escalar por um vector.*

Exemplos de espaços vectoriais:

1. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da operação **adição usual** de n-tuplos em $\mathbb{R}^n$
$$(x_1,\dots,x_n) \oplus (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
e pelo **produto usual** de um escalar por um n-tuplo em $\mathbb{R}^n$
$$\alpha \odot (x_1,\dots,x_n) = (\alpha \cdot x_1,\dots,\alpha \cdot x_n)$$
satisfaz todos os axiomas da definição de espaço vectorial.
2. Para todo $m,n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\mathscr{M}_{m,n}$ das matrizes do tipo $m \times n$ munido com a **soma usual** e com o **produto usual** de um escalar por uma matriz satisfaz todos os axiomas da definição de espaço vectorial.
3. O conjunto $P_n[x]$, constituído por todos os polinómios com coeficientes reais de grau não superior a n munido da operação **adição usual** e do **produto usual** de um escalar por um polinómio é um espaço vectorial.
4. O conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^+$ munido da operação adição
$$x \oplus y = x \cdot y$$
e do produto escalar por um vector
$$\alpha \odot x = x^\alpha$$

Propriedades 1 (algébricas dos espaços vectoriais)

Seja $\mathscr{E}$, munido com a adição $\oplus$ e com o produto de um escalar por um vector $\odot$, um espaço vectorial real com vector nulo $o_\oplus$ e o inverso de um vector u é representado por u'. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathscr{E}$. Então tem-se,

1. O vector nulo $o_\oplus$ é único.
2. Todo o vector u possui um único inverso u'.
3. $0 \odot u = o_\oplus$.
4. $\alpha \odot o_\oplus = o_\oplus$.
5. $(-\alpha) \odot u = (\alpha \odot u)' = \alpha \odot (u')$.
6. $(\alpha - \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)'$.
7. $\alpha \odot (u \oplus v') = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)'$.
8. $\alpha \odot u = o_\oplus \implies \alpha = 0 \vee u = o_\oplus$.

Definição 3 (Subespaço)

Seja $\mathscr{E}$ um espaço vectorial real (munido com uma operação binária adição $\oplus$ e com um produto de um escalar por um vector $\odot$) e $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ um subconjunto de $\mathscr{E}$. Dizemos que $\mathscr{F}$ é um *subespaço* de $\mathscr{E}$ se e somente se:

$$S_1: \quad \mathscr{F} \neq \emptyset$$

$$S_2: \quad \forall u, v \in \mathscr{F}, \quad u \oplus v \in \mathscr{F}$$

$$S_3: \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathscr{F}, \quad \alpha \odot u \in \mathscr{F}$$

☞ *Escrevemos $\mathscr{F} \prec E$ para indicar que $\mathscr{F}$ é um subespaço de E. Caso $\mathscr{F}$ não seja subespaço de $\mathscr{E}$ escrevemos, $\mathscr{F} \not\prec E$.*

Exemplo: Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ e os subconjuntos

$$\mathscr{F}_1 = \{(x,y) : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}, \quad \mathscr{F}_2 = \{(x,y) : xy \geq 0\}, \text{ e } \mathscr{F}_3 = \{(x,y) : x = y\}.$$

1. Tem-se $\mathscr{F}_1 \not< \mathbb{R}^2$ porque, por exemplo, $(1,1) \in \mathscr{F}_1$ e $-1\cdot(1,1) = (-1,-1) \notin \mathscr{F}_1$. Ou seja, a condição S_3 não é satisfeita.
2. Tem-se $\mathscr{F}_2 \not< \mathbb{R}^2$ porque, por exemplo, $(2,1) \in \mathscr{F}_2$, $(-1,-2) \in \mathscr{F}_2$ e a sua soma $(1,-1) \notin \mathscr{F}_2$. Ou seja a condição S_2 : não é satisfeita.
3. Já $\mathscr{F}_3$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ porque satisfaz todas as condições S_1, S_2 e S_3.

   S_1 : $\mathscr{F}_3 \neq \emptyset$ porque por exemplo $(0,0) \in \mathscr{F}_3$.

   S_2 : Para todo o par de vectores (x_1,x_1) e (x_2,x_2) em $\mathscr{F}_3$ tem-se que a sua soma (x_1+x_2, x_1+x_2) pertence a $\mathscr{F}_3$.

   S_3 : Dado um real qualquer α e um elemento qualquer (x,x) de $\mathscr{F}_3$ tem-se que $\alpha(x,x) = (\alpha x, \alpha x) \in \mathscr{F}_3$.

Teorema 1

Se o conjunto $\mathscr{F}$ é um subespaço de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$ então, o conjunto $\mathscr{F}$ munido com a restrição da adição vectorial em $\mathscr{E}$ a $\mathscr{F}^2$ e da restrição da multiplicação de um escalar por um vector em $\mathscr{E}$ a $\mathbb{R}\times\mathscr{F}$ é um espaço vectorial real.

Propriedades 2

1. Para todo o espaço vectorial $\mathscr{E}$ tem-se $\{0_\oplus\} \prec \mathscr{E}$ e $\mathscr{E} \prec \mathscr{E}$.
2. Se $\mathscr{F} \prec \mathscr{E}$ então, o vector nulo $0_\oplus$ de $\mathscr{E}$ pertence necessariamente a $\mathscr{F}$ e é igualmente o vector nulo do espaço vectorial $\mathscr{F}$.
3. Se $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ e $0_\oplus \notin \mathscr{F}$ então, $\mathscr{F} \not\prec \mathscr{E}$.
4. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$ e se $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ então, $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$

Propriedades 2 (continuação)

5. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$ e se $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ então,

$$\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E} \Leftrightarrow (\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \vee \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1)$$

6. Se $\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{E}$, $\mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$ e $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ então, tem-se

$$\mathscr{F}_1 \prec \mathscr{F}_2 \prec \mathscr{E}$$

☞

1. *Os subespaços $\{0_\oplus\}$ e $\mathscr{E}$ do espaço vectorial $\mathscr{E}$ dizem-se* ***subespaços triviais*** *de $\mathscr{E}$. Os restantes subespaços de $\mathscr{E}$ dizem-se* ***subespaços próprios*** *de $\mathscr{E}$.*
2. *A segunda propriedade revela-nos que se um subconjunto qualquer de $\mathscr{E}$ não tiver o vector nulo $0_\oplus$ como elemento então não é subespaço vectorial de $\mathscr{E}$.*

Definição 4 (Combinação linear)

Seja $\mathscr{U} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n)$ uma lista de n vectores (de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$ com a adição vectorial $\oplus$ e com produto de um escalar por um vector $\odot$) e seja $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ uma lista de n escalares. Uma *combinação linear* da lista de vectores $\mathscr{U}$ com *coeficientes lineares* α_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ é a soma vectorial

$$\alpha_1 \odot \mathrm{u}_1 \oplus \alpha_2 \odot \mathrm{u}_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot \mathrm{u}_n. \tag{2}$$

☞

- *Iremos considerar sempre listas ordenadas*
- *Se não houver ambiguidades escrevemos simplesmente*

$$\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n$$

ou de forma compacta $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{u}_i$.

Exemplos: Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) o vector $(6,-5,4)$ é a combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(1,1,1),(1,0,1))$ com *coeficientes lineares* $(2,-1,3)$ porque,

$$2(2,-2,1)+(-1)(1,1,1)+3(1,0,1)=(6,-5,4)$$

Neste exemplo, podemos verificar que o vector $(6,-5,4)$ escreve-se de **forma única** como combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(1,1,1),(1,0,1))$. Ou seja, por outras palavras, se

$$x(2,-2,1)+y(1,1,1)+z(1,0,1)=(6,-5,4)$$

então tem-se $x=2$, $y=-1$ e $z=3$. De facto, esta condição é equivalente a afirmar que o SEL

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & 6 \\ -2x & + & y & & & = & -5 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \end{cases}$$

é possível e determinado. Note que se trata de um sistema de Cramer e consequentemente $(2,-1,3)$ é o único elemento do seu conjunto solução.

b) A soma (ou o vector $(2,-2,1)$)

$$2(2,-2,1)+(-1)(3,-2,2)+1(1,0,1)=(2,-2,1)$$

é uma combinação linear da sequência vectores $((2,-2,1),(3,-2,2),(1,0,1))$ com coeficientes lineares $(2,-1,1)$. Contudo, neste caso, esta combinação linear não é única. Ou seja, existem outros coeficientes lineares $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ tais que o vector $(2,-2,1)$ é combinação linear da lista de vectores $((2,-2,1),(3,-2,2),(1,0,1))$. De facto, basta verificar que o SEL

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ -2x & - & 2y & & & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

é possível e indeterminado. Consequentemente toda a solução $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ do sistema "fornece" coeficientes lineares para os quais se tem

$$\alpha_1(2,-2,1)+\alpha_2(3,-2,2)+\alpha_3(1,0,1)=(2,-2,1).$$

resolvendo o sistema obtemos o conjunto solução

$$CS=\{(1+z,-z,z) : z\in\mathbb{R}\}$$

e temos

$$(1+z)(2,-2,1)-z(3,-2,2)+z(1,0,1)=(2,-2,1), \quad \forall z\in\mathbb{R}.$$

Definição 5 (Conjunto gerado por uma lista de vectores)

Seja $\mathscr{E}$ um espaço vectorial real e seja $\mathscr{L} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})$ uma lista de n vectores em $\mathscr{E}$. Ao conjunto (de vectores) formado por todas as combinações lineares da lista $\mathscr{L}$ chamamos **conjunto gerado** pela lista de vectores $\mathscr{L}$ e escrevemos $\overline{\mathscr{L}}$. Ou seja,

$$\overline{(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})} = \left\{ \mathrm{v} \in \mathscr{E} : \mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{u}_\mathrm{i}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Exemplos:

1. Considere a lista $\mathscr{L} = ((1, 0, -1, \frac{1}{3}))$ constituída por um vector do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$. Então o conjunto gerado por $\mathscr{L}$ é

$$\overline{((1, 0, -1, \tfrac{1}{3}))} = \left\{ \mathrm{v} \in \mathbb{R}^4 : \mathrm{v} = \alpha (1, 0, -1, \tfrac{1}{3}), \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (\alpha, 0, -\alpha, \tfrac{\alpha}{3}) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Considere a lista $\mathscr{L} = ((1,0,-1,\frac{1}{3}),(0,1,1,1))$ constituída por dois vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$. O conjunto gerado por $\mathscr{L}$ é o conjunto formado pelos vectores

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

para os quais existe uma lista (α,β) de coeficientes lineares tal que

$$(a,b,c,d) = \alpha(1,0,-1,\tfrac{1}{3}) + \beta(0,1,1,1).$$

ou seja, os elementos de $\overline{\mathscr{L}}$ são os vectores (a,b,c,d) para os quais o SEL nas duas incógnitas α e β,

$$\begin{cases} \alpha & & & = & a \\ & & \beta & = & b \\ -\alpha & + & \beta & = & c \\ \frac{1}{3}\alpha & + & \beta & = & d \end{cases}$$

tem solução. Então teremos que transformar a matriz completa $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$ deste SEL em forma de escada por linhas $[\mathrm{A}'|\mathrm{b}']$ e impor condições a (a,b,c,d) tal que se verifique

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}') = \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']).$$

Note que não interessa se o SEL seja determinado ou indeterminado. Apenas estamos interessados nos vectores (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$ que são combinações lineares dos elementos da lista $\mathscr{L}$.

Usando a eliminação Gaussiana temos

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & c \\ \frac{1}{3} & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{3}L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & -\frac{a}{3}+d \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a+c-b \\ 0 & 0 & -\frac{a}{3}+d-b \end{array}\right]$$

Facilmente se reconhece que o SEL é possível sse

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}') = \mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 2.$$

Ou seja, o sistema é possível sse $\mathrm{r}([\mathrm{A}'|\mathrm{b}']) = 2$, ou equivalentemente, se as entradas assinaladas a cor azul forem nulas. Deste modo, temos

$$\overline{((1,0,-1,\tfrac{1}{3}),(0,1,1,1))} = \left\{(a,b,c,d) : a+c-b=0 \wedge -\frac{a}{3}+d-b=0\right\}.$$

Por vezes é conveniente enfatizar o número de variáveis livres que ocorrem na descrição de um conjunto gerador. Neste exemplo procedíamos da seguinte forma. As condições $a+c-b=0$ e $-\frac{a}{3}+d-b=0$ formam um sistema de duas equações lineares nas 4 incógnitas a, b, c e d. Verifica-se imediatamente que este SEL é possível e indeterminado com grau de indeterminação 2 e, o seu conjunto solução CS coincide com o conjunto gerado pela lista $\mathscr{L}$. Logo, tem-se

$$\overline{((1,0,-1,\tfrac{1}{3}),(0,1,1,1))} = \left\{\left(\frac{3}{4}(-c+d), \frac{1}{4}(c+3d), c, d\right) : c,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Teorema 2

Seja $\mathscr{L}$ uma lista não vazia de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Então, o conjunto gerado $\overline{\mathscr{L}}$ pela lista $\mathscr{L}$ é um subespaço vectorial de $\mathscr{E}$.

Propriedade 1

Sejam $\mathscr{L}_n$ e $\mathscr{L}_{n+1}$ duas listas de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ tais que

$$\mathscr{L}_n = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})$$
$$\mathscr{L}_{n+1} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n}, \mathrm{u}_{\mathrm{n+1}})$$

Então tem-se

$$\begin{cases} \overline{\mathscr{L}_n} = \overline{\mathscr{L}_{n+1}}, & \text{se} \quad \mathrm{u}_{\mathrm{n+1}} \in \overline{\mathscr{L}_n} \\ \\ \overline{\mathscr{L}_n} \subsetneq \overline{\mathscr{L}_{n+1}}, & \text{se} \quad \mathrm{u}_{\mathrm{n+1}} \notin \overline{\mathscr{L}_n} \end{cases}$$

Definição 6 (Espaço vectorial finitamente gerado)

Um espaço vectorial $\mathscr{E}$ diz-se *finitamente gerado* sse existir uma lista $\mathscr{L}$ formada por um número finito de vectores que gere o conjunto $\mathscr{E}$. Ou seja,

$$\exists n \in \mathbb{N} : \mathscr{L} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n}) \quad \text{e} \quad \overline{\mathscr{L}} = \mathscr{E}.$$

Caso contrário dizemos que o espaço vectorial $\mathscr{E}$ *não é finitamente gerado*.

Um problema que se coloca é o de encontrar uma lista de vectores:

- que consiga gerar todo o espaço vectorial $\mathscr{E}$
- todo o vector do espaço vectorial $\mathscr{E}$ se escreve de forma única como combinação linear dos elementos dessa lista

Definição 7 (Lista de vectores linearmente independentes)

Seja $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$. Dizemos que os vectores da lista $\mathscr{L}$ são **linearmente independentes** (L.I.) se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_{\oplus} \implies (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0).$$

caso contrario, ou seja, se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_{\oplus} \wedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

dizemos que os vectores da lista $\mathscr{L}$ são **linearmente dependentes** (L.D.).

Propriedade 2

Seja $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores L.I. então, toda a lista $\mathscr{L}'$ que contenha apenas vectores de $\mathscr{L}$ é uma lista de vectores L.I.

Propriedade 3

Seja $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores L.D. então, toda a lista $\mathscr{L}'$ que contenha todos os elementos de $\mathscr{L}$ é uma lista de vectores L.D.

Propriedade 4

Seja $\mathscr{L}_n = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores. Então, se existe em $\mathscr{L}$ um vector u_k combinação linear da lista $\mathscr{L}_{n-1} = (u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ então, os vectores de $\mathscr{L}_n$ são L.D.

Propriedade 5

Seja $\mathscr{L}_n = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores L.I. e $\mathscr{L}_{n+1} = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$, onde o vector $u_{n+1} \notin \overline{\mathscr{L}_n}$. Então os vectores da lista $\mathscr{L}_{n+1}$ são L.I.

Propriedade 6

Seja $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma lista de vectores e seja $v \in \overline{\mathscr{L}}$ então, a lista de coeficientes lineares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ da combinação linear v (de vectores de $\mathscr{L}$) é única se e somente se os vectores da lista $\mathscr{L}$ são linearmente independentes.

Exercícios:

1. Sejam $\mathscr{L}_1 = ((1,1,0),(1,2,1))$ e $\mathscr{L}_2 = ((1,1,0),(-1,-2,1),(2,2,2))$ duas listas do e.v. $\mathbb{R}^3$. mostre que são ambas L.I.
2. Mostre que a lista $\mathscr{U} = ((1,1,0,0),(-1,-2,1,1),(-1,-3,2,2))$ de vectores do e.v. $\mathbb{R}^4$ é L.D.
3. Encontre o espaço gerado pela lista $\mathscr{U}$ do exercício anterior.

Definição 8 (Base de um espaço vectorial)

Uma lista $\mathscr{L}$ de vectores de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ diz-se uma **base** de $\mathscr{E}$ se e somente se

1. $\mathscr{E} = \overline{\mathscr{L}}$
2. Os vectores de $\mathscr{L}$ são LI

Teorema 3

Sejam $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ duas bases de um mesmo espaço vectorial. Então $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ possuem o mesmo número de vectores.

Definição 9 (Dimensão de um e. v. finitamente gerado)

Dizemos que a **dimensão** de um espaço vectorial $\mathscr{E}$ é n, e escrevemos

$$\dim(\mathscr{E}) = n$$

se e somente se uma base de $\mathscr{E}$ for constituida por n vectores.

Bases canónicas de e.v.

1. A lista $\mathscr{B}_c = ((1,0),(0,1))$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Consequentemente toda a base de $\mathbb{R}^2$ é uma lista constituída por dois vectores L.I. e tem-se $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Chamamos a $\mathscr{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$.
2. A lista $\mathscr{B}_c = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é a base canónica do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Consequentemente toda a base de $\mathbb{R}^3$ é uma lista constituída por três vectores L.I. e tem-se $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
3. Dado um número natural n tem-se que a lista $\mathscr{B}_c = ((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1))$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e tem-se $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
4. A lista
$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
do espaço vectorial das matrizes quadradas de ordem $\mathscr{M}_2$. Consequentemente este espaço tem dimensão 4.
5. A lista de polinómios $\mathscr{B}_c = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ é a base canónica do espaço $P_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente tem-se $\dim(P_n[x]) = n+1$.

☞ *Dado um espaço vectorial $\mathscr{E}$ tem-se que $\mathscr{B} = \emptyset$ (aqui usamos o símbolo $\emptyset$ para representar a lista vazia) é uma base do subespaço trivial $\{0_\oplus\}$. Logo, $\dim(\{0_\oplus\}) = 0$.*

Definição 10 (Representação de um vector)

Seja $\mathscr{B} = (\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ uma base de um espaço vectorial real $\mathscr{E}$. A *representação* de um vector $\mathrm{v} \in \mathscr{E}$ é o n-tuplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dos coeficientes lineares do vector v escrito como combinação linear dos elementos da base $\mathscr{B}$. Aos coeficientes lineares chamamos de coordenadas do vector v na base $\mathscr{B}$.
Ou seja, escrevemos

$$\mathrm{Rep}_{\mathscr{B}}(\mathrm{v}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathscr{B}}$$

onde $\mathrm{v} = \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n$.

Exercícios:

1. Verificar se $\mathscr{L} = ((1,1,2),(0,1,-1),(2,3,3))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
2. Encontre uma base $\mathscr{B}$ de $P_3[x]$ que contenha os polinómios $1+x^3$ e $1-x^2$.
3. Encontre $\mathrm{Rep}_{\mathscr{B}}((1,1,1,1))$, onde $\mathscr{B} = ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,1)$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.