Análise Matemática

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

Capítulo 1

Licenciatura em
Engenharia Informática / ISEP

(2024/2025)

Conteúdo

Matérias a saber do ensino básico e secundário

- Funções trigonométricas.
- Função inversa.
- Função módulo, exponencial e logarítmica: representação gráfica, domínios, contradomínios, inversas e derivadas.
- Derivadas: interpretação geométrica, retas tangentes e retas normais.
- Cálculo de dervivadas de funções reais de variável real.

Onde relembrar e treinar as matérias a saber do ensino básico e secundário:

- *Análise Matemática I.*
  Resumo teórico, exercícios resolvidos e propostos.
  Autoras: Alzira Faria, Helena Brás e Isabel Figueiredo. 2021.
  ISBN $978-989-561-179-9$. Publicação na Editora Sílabo.
  (Capítulo 1).
- Sítio da internet EstudoEmCasa: EstudoEmCasa.
- Aplicação de telemóvel *Asymptote*. Código do grafo de aprendizagem sobre potências: G09885. Grafo de aprendizagem sobre logarítmos: G05894. Nota: os códigos são inseridos após selecionar "+".
- Treino no cálculo de derivadas: ficha de exercícios no Moodle.

Bibliografia recomendada

- *Análise Matemática I.*
  Resumo teórico, exercícios resolvidos e propostos.
  Autoras: Alzira Faria, Helena Brás e Isabel Figueiredo. 2021.
  ISBN $978-989-561-179-9$. Publicação na Editora Sílabo.

- *Análise Matemática II.*
  Resumo teórico, exercícios resolvidos e propostos.
  Autoras: Alzira Faria, Helena Brás e Isabel Figueiredo. 2023.
  ISBN $978-989-561-324-3$. Publicação na Editora Sílabo.

Exercício de Revisão: Função Exponencial.

Exercício 1: Considere a seguinte função $f(x) = 1 - 3^{\sqrt{x}}$.

1.1 Determine o domínio e o contradomínio da função f e caracterize a sua função inversa.

1.2 Resolva a seguinte equação: $3^{-2f\left((\log_3 2)^2\right)} = 10^{x \log_{10} 9}$.

1.3 Escreva uma equação da reta tangente à curva da função f no ponto $\left(f(0) + 1, f^{-1}(0) - 2\right)$.

Exercício de Revisão: Função Logarítmica.

Exercício 2: Considere a seguinte função $f(x) = \log_2 \left(\frac{8}{(1-x)^3} \right)$.

2.1 Simplifique a expressão analítica da função, utilizando propriedades da função logarítmica.

2.2 Determine o domínio e o contradomínio da função $g(x) = 3 - |f(x)|$.

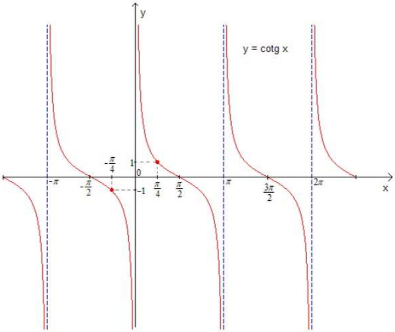
2.3 Calcule a função inversa $f^{-1}(x)$.

2.4 Determine o conjunto solução da equação

$$f(1-x) + f^{-1}(-6) + \frac{1}{3} f(0) = 0$$

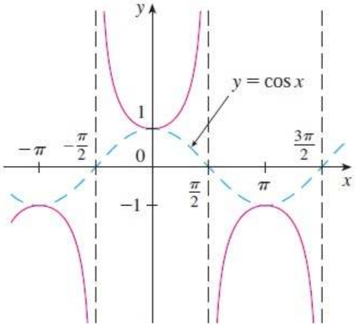
Novas funções trigonométricas.

Função cotangente $\rightarrow y = \text{cotg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$



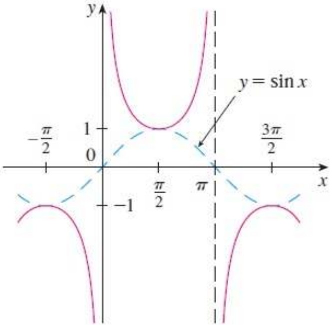
- Domínio: $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio: $D' = \mathbb{R}$;
- Período: π;
- Função não injetiva;
- Função ímpar: $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x)$;
- As retas de equação $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assímptotas verticais.

Função secante $\rightarrow y = \mathbf{sec}(x) = \dfrac{1}{\mathbf{cos}(x)}$



- Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Contradomínio: $D' =]-\infty, -1] \cup [1 + \infty[$;
- Período: 2π;
- Função não injetiva;
- Função par: $\sec(-x) = \sec(x)$;
- As retas de equação $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assímptotas verticais.

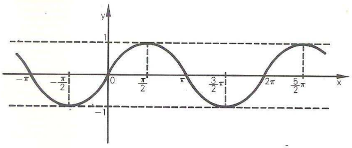
Função cossecante $\rightarrow y = \mathbf{cosec}(x) = \dfrac{1}{\mathbf{sen}(x)}$



- Domínio:
  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Contradomínio:
  $D' =]-\infty, -1] \cup [1 + \infty[$;
- Período: 2π;
- Função não injetiva;
- Função ímpar:
  $\text{cosec}(-x) = -\text{cosec}(x)$;
- As retas de equação $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ são assímptotas verticais.

Funções trigonométricas inversas.

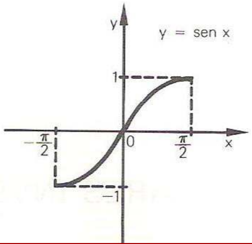
Função seno $\rightarrow y = \mathbf{sen}(x)$



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \text{sen(x)}$$

- A função f não é injetiva.
- A função f não admite inversa.

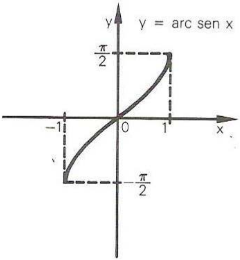
Consideremos uma restrição g de f que seja injetiva (restrição principal):



$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \text{sen(x)}$$

- A função g é injetiva.
- A função g admite inversa.

Função arcoseno $\rightarrow y = \textbf{arcsen}(x)$



$$\begin{array}{cccc} g^{-1} & : & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ & & x & \longmapsto & \text{arcsen(x)} \end{array}$$

Como as funções $\text{sen}(x)$ e $\text{arcsen}(x)$ são funções mutuamente inversas:

- $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$, $-1 \leq x \leq 1$;
- $\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- $\text{arcsen}(x) = y \iff x = \text{sen}(y), \forall x \in [-1,1]$.

Exemplo 1: O valor de arcsen $\left(\frac{1}{2}\right)$ corresponde ao

ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$

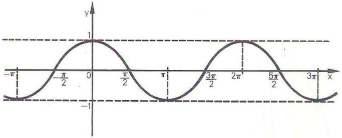
Para o seu cálculo, faz-se:

$$\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = y \Leftrightarrow \text{sen}\, y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6} \vee y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

No entanto, recorde-se que a restrição principal do seno é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e então a solução é

$$y = \frac{\pi}{6}.$$

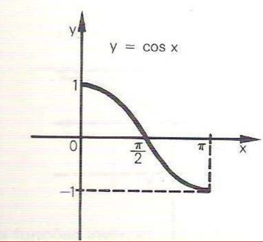
Função coseno $\rightarrow y = \cos(x)$



$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

- A função f não é injetiva.
- A função f não admite inversa.

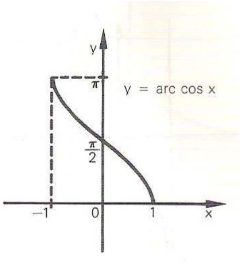
Consideremos uma restrição g de f que seja injetiva (restrição principal):



$$\begin{array}{rccc} g : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

- A função g é injetiva.
- A função g admite inversa.

Função arcocoseno $\rightarrow y = \mathbf{arccos}(x)$



$$\begin{array}{rcccc} g^{-1} & : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & & x & \longmapsto & \text{arccos(x)} \end{array}$$

Como as funções $\cos(x)$ e $\arccos(x)$ são funções mutuamente inversas:

- $\cos(\arccos(x)) = x$, $-1 \leq x \leq 1$
- $\arccos(\cos(x)) = x$, $0 \leq x \leq \pi$
- $\arccos(x) = y \iff x = \cos(y), \forall x \in [-1,1]$

Exemplo 2: O valor de $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ corresponde ao

$$\text{ângulo cujo coseno é } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

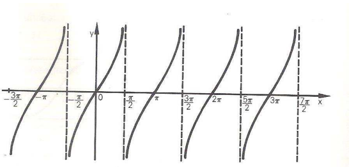
Para o seu cálculo, faz-se:

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y \Leftrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} \vee y = -\frac{\pi}{4}$$

No entanto, recorde-se que a restrição principal do coseno é $[0, \pi]$ e então a solução é

$$y = \frac{\pi}{4}.$$

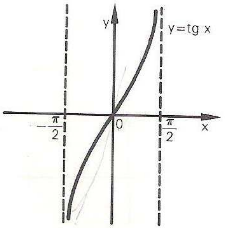
Função tangente $\rightarrow y = \mathbf{tg}(x)$



$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{tg(x)} \end{array}$$

- A função f não é injetiva.
- A função f não admite inversa.

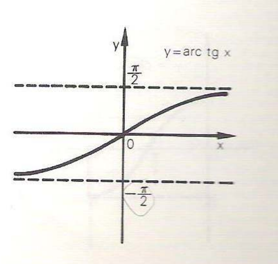
Consideremos uma restrição g de f que seja injetiva (restrição principal):



$$\begin{array}{rccc} g & : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \text{tg(x)} \end{array}$$

- A função g é injetiva.
- A função g admite inversa.

Função arcotangente $\rightarrow y = \textbf{arctg}(x)$



$$
\begin{array}{cccc}
g^{-1} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
 & x & \longmapsto & \text{arctg}(x)
\end{array}
$$

Como as funções $\text{tg}(x)$ e $\text{arctg}(x)$ são funções mutuamente inversas:

- $\text{tg}(\text{arctg}(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\text{arctg}(\text{tg}(x)) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;
- $\text{arctg}(x) = y \iff x = \text{tg}(y), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3: O valor de $\text{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ corresponde ao

$$\text{ângulo cuja tangente é } -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

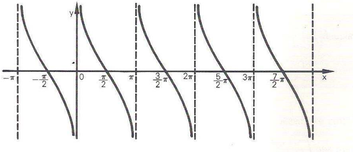
Para o seu cálculo, faz-se:

$$\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = y \Leftrightarrow \text{tg}\, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{6} \vee y = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

No entanto, recorde-se que a restrição principal da tangente é $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ e então a solução é

$$y = -\frac{\pi}{6}.$$

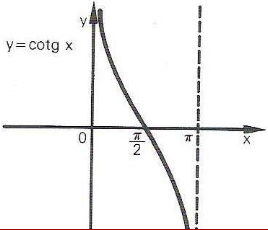
Função cotangente $\rightarrow y = \mathbf{cotg}(x)$



$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{cotg(x)} \end{array}$$

- A função f não é injetiva.
- A função f não admite inversa.

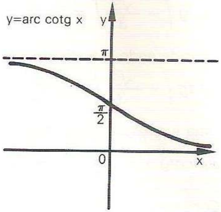
Consideremos uma restrição g de f que seja injetiva (restrição principal):



$$\begin{array}{rcl} g : \,]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{cotg(x)} \end{array}$$

- A função g é injetiva.
- A função g admite inversa.

Função arcotangente $\rightarrow y = \mathbf{arccotg}(x)$



$$g^{-1} \quad : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \ ]0, \pi[$$
$$x \longmapsto \text{arccotg(x)}$$

Como as funções $\text{cotg}(x)$ e $\text{arccotg}(x)$ são funções mutuamente inversas:

- $\text{cotg}(\text{arccotg}(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R};$
- $\text{arccotg}(\text{cotg}(x)) = x, 0 < x < \pi;$
- $\text{arccotg}(x) = y \iff x = \text{cotg}(y), \forall x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4: O valor de $\operatorname{arccotg}(-1)$ corresponde ao

$$\text{ângulo cuja cotangente é } -1$$

Para o seu cálculo, faz-se:

$$\operatorname{arccotg}(-1) = y \Leftrightarrow \operatorname{cotg} y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{4} \vee y = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

No entanto, recorde-se que a restrição principal do coseno é $]0, \pi[$ e então a solução é

$$y = \frac{3\pi}{4}.$$

Domínio e contradomínio das funções trigonométricas inversas:

Função	Domínio	Contradomínio
$\text{arcsen}(x)$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\text{arctg}(x)$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\text{arccotg}(x)$	$\mathbb{R}$	$]0, \pi[$

Exercício 3: Considere a função $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - 2\,\text{arcsen}(3x)$.
Considerando a restrição fundamental da função seno, determine:

3.1 O domínio e contradomínio da função.

3.2 A expressão da função inversa $y = f^{-1}(x)$.

3.3 $S = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{-f(x)} = 1\right\}$.

Exercício 4: Seja dada a função real de variável real

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arccotg}(x+1)$$

Considerando a restrição principal da função cotangente, determine:

4.1 O domínio e contradomínio da função.

4.2
$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \operatorname{cotg}\left(f(x) - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\operatorname{cosec}\left(-2\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \log_3\left(\frac{1}{9}\right) \right\}$.

4.3 A expressão da função inversa $y = f^{-1}(x)$.

Funções reais de várias variáveis reais.

Funções de várias variáveis

Uma **função de n variáveis**, f, consiste numa regra que atribui a cada n-uplo $(x_1, ..., x_n)$ (variáveis independentes)num domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, um único número real (variável dependente)representado por $f(x_1, ..., x_n)$.

- A temperatura T num determinado ponto da superfície terrestre, (x, y), num dado momento, depende da longitude, x, e da latitude, y.

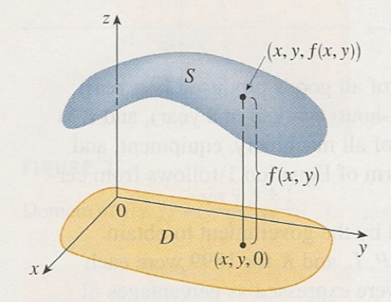
  Assim T é uma função de duas variáveis, x e y. Indicamos esta dependência funcional escrevendo: $T = f(x, y)$.

- O volume V de um cilindro depende do raio do círculo base, r, e da altura, h, do cilindro.

  Esta relação é escrita pela equação $V = \pi r^2 h$. Dizemos que V é uma função de r e h e escrevemos: $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Seja f uma função com duas variáveis $(x, y) \in D$. A representação gráfica de f permite visualizar o seu comportamento.

- O gráfico de f consiste no conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x, y)$ e $(x, y) \in D$.
- O gráfico de f é uma superfície S de equação $z = f(x, y)$.
- O gráfico S de f localiza-se na parte superior ou na parte inferior relativamente ao seu domínio D no plano xOy.



Derivadas parciais de funções reais de variáveis reais.

Derivadas Parciais

Definição: Se f é uma função de duas variáveis, as suas **derivadas parciais** são:

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h};$$
$$f'_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Notações para Derivadas Parciais

Se $z = f(x,y)$, escrevemos,

$$f'_x(x,y) = f'_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$f'_y(x,y) = f'_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Regras de Cálculo para as Derivadas Parciais de $z = f(x, y)$

1. Para encontrar f'_x, consideramos y como uma constante e derivamos $f(x, y)$ em ordem a x.
2. Para encontrar f'_y, consideramos x como uma constante e derivamos $f(x, y)$ em ordem a y.

Exemplo 5:

Se $f(x, y) = xy - 2x + 6y$, calcular $f'_x(x, y)$ e $f'_y(x, y)$.

Resolução:

- Considerando y como uma constante e derivando $f(x, y)$ em ordem a x, vem: $f'_x(x, y) = y - 2$.
- Considerando x como uma constante e derivando $f(x, y)$ em ordem a y, vem: $f'_y(x, y) = x + 6$.

Exemplo 6: Se $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, calcular $f'_x(2,1)$ e $f'_y(2,1)$.

Resolução:

- Considerando y como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a x, vem:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3; \quad f'_x(2,1) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 \times 1^3 = 16.$$

- Considerando x como uma constante e derivando $f(x,y)$ em ordem a y, vem:

$$f'_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y; \quad f'_y(2,1) = 3 \times 2^2 \times 1^2 - 4 \times 1 = 8.$$

A generalização das **derivadas parciais** para funções com mais de duas variáveis é direta. Ou seja, as regras e notações definidas para funções de duas variáveis também se aplicam a funções com mais de duas variáveis.

Exemplo 7: Determinar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ se $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} \ln z$, considerando y e z como constantes.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \ln z$, considerando x e z como constantes.
- $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{xy}}{z}$, considerando x e y como constantes.

Se $z = f(x, y)$ for uma função de duas variáveis, então as suas derivadas parciais de 1^a ordem também são funções de duas variáveis, e então podemos considerar as suas derivadas, denominadas derivadas parciais de 2^a ordem de f.

1. Derivadas em ordem a x e em ordem a y de $\frac{\partial f}{\partial x}$:
   - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
   - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
2. Derivadas em ordem a y e em ordem a x de $\frac{\partial f}{\partial y}$:
   - $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
   - $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Exemplo 8: Determinar todas as derivadas parciais de 2^a ordem da função

$$f(x, y) = \ln(xy) - x^3 + x^2y^2 + y.$$

Resolução:

Existem quatro derivadas parciais de 2^a ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Comecemos por calcular as derivadas de 1^a ordem:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x} - 3x^2 + 2xy^2.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y} + 2yx^2 + 1.$

Exemplo 8 (Cont.):

As derivadas de 2^a ordem são:

1. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - 3x^2 + 2xy^2\right) = -\frac{1}{x^2} - 6x + 2y^2.$$

2. $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + 2x^2 y + 1\right) = -\frac{1}{y^2} + 2x^2.$$

3. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - 3x^2 + 2xy^2\right) = 4xy.$$

4. $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + 2x^2 y + 1\right) = 4xy.$$

Exemplo 9: Determine as derivadas parciais de 1^a ordem da função,

$$f(x,y,z,t) = x\,y\,z^2\mathrm{tg}(yt).$$

Resolução:

- $\dfrac{\partial h}{\partial x} = y\,z^2\mathrm{tg}(yt).$
- $\dfrac{\partial h}{\partial y} = x\,z^2\mathrm{tg}(yt) + y\,t\,x\,z^2\sec^2(yt).$
- $\dfrac{\partial h}{\partial z} = 2x\,y\,z\,\mathrm{tg}(yt).$
- $\dfrac{\partial h}{\partial z} = x\,y^2 z^2\sec^2(yt).$

Nota:

Nos produtos em que um dos fatores é constante, usa-se a fórmula $(k\,u) = k\,u'$, e NÃO se usa a fórmula $(uv)'$.

Por exemplo, $(xyz^2\mathrm{tg}(yt))'_x = yz^2\mathrm{tg}(yt)x'$, ou seja, a constante fica inalterável e só se deriva a função.

Exemplo 10: Calcule a derivada indicada,

$$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,3)}$$

Resolução:

- $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

- $$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,3)} = \frac{-\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{3}{13}$$

Nota:

Quando se pretende calcular a derivada de uma função num determinado ponto, não é necessário, nem devemos, simplificar a derivada antes de substituir no ponto (perdemos tempo e corremos o risco de nos enganarmos).

Exemplo 11: Considere a função $u = y \ln\left(\frac{x}{1-y}\right) - y^{z-x+3y}$.

- Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{(1,2,1)}$.
- Determine $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}$.

Resolução: Simplifique-se a função,

$$u = y \ln\left(\frac{x}{1-y}\right) - y^{z-x+3y} \qquad \Leftrightarrow$$

$$u = y[\ln x - \ln(1-y)] - y^{z-x+3y} \qquad \Leftrightarrow$$

$$u = y\ \ln x - y\ \ln(1-y)] - y^{z-x+3y}$$

Exemplo 11 (Cont.):

- Para calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, primeiro deriva-se a função em ordem a x, depois deriva-se o resultado obtido em ordem a z, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x} + y^{z-x+3y} \ln y$.

- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = y^{z-x+3y}(\ln y)^2$.

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Big|_{(1,2,1)} = (\ln 2)^2\, 2^6$.

Exemplo 11 (Cont.):

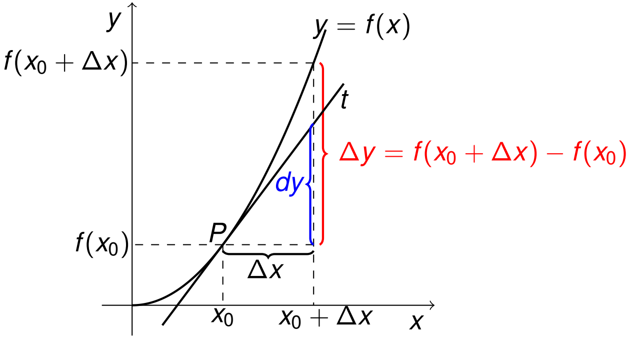
- Para calcular $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}$, deriva-se a função pela seguinte ordem: em ordem a x, em ordem a z e em ordem a y, ou seja,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right).$$

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{x} + y^{z-x+3y} \ln y$.
- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = y^{z-x+3y}(\ln y)^2$.
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = 2 \ln y \dfrac{1}{y} y^{z-x+3y} +$ $(\ln y)^2 \left[3\, y^{z-x+3y} \ln y + (z-x+3y)\, y^{z-x+3y-1}\right]$.

Diferencial de funções reais de variáveis reais. Cálculo de valores aproximados.

Diferencial de uma função f, num ponto P.



Seja $y = f(x)$ a expressão de uma função real de variável real. Um acréscimo da variável independente Δx, provoca um acréscimo da variável dependente

$$\Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0).$$

Definição de diferencial da variável independente

Define-se *diferencial* de x, denotado por dx, como $dx = \Delta x$.

Definição de diferencial da variável dependente

Define-se *diferencial da função f* e denota-se por dy, ao valor aproximado do acréscimo da variável dependente, dado por,

$$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\, dx.$$

Para valores suficientemente pequenos de Δx tem-se, $dy \approx \Delta y$.

- A aproximação entre o diferencial dy, e o acréscimo da variável dependente Δy, dado um acréscimo da variável independente, é tanto maior quanto menor for a acréscimo da variável independente Δx.

- Em consequência da definição, tem-se,

$$\begin{aligned} & \Delta y \approx dy && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy \end{aligned}$$

ou seja, o valor aproximado da função na abcissa resultante do acréscimo Δx, é dado pela soma entre o valor da função na abcissa antes do acréscimo e o valor do diferencial.

Exercício 5: Determine o diferencial da função real de variável real $f(x) = \operatorname{sen}\left(\ln^3(x)\right)$.

Exercíico 6: Determine o diferencial da função real de variável real $y = \sec\left(\sqrt{x}\right) \operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)$ no ponto de abcissa $x = \pi^2$.

Exercicio 7: Considere a função real de variável real $y = \arccos(x)$. Usando o conceito de diferencial, calcule um valor aproximado de $f(0.01)$.

Exercício 8: Usando o conceito de diferencial, calcule um valor aproximado de $2^{-1.97}$.

- Uma função derivável $z = f(x, y)$ sofrerá um acréscimo (ou redução) se se variar cada uma das suas variáveis independentes, mantendo as demais constantes (**acréscimo parcial**), ou se as variarmos ao mesmo tempo (**acréscimo total**). A variação total da função $z = f(x, y)$ é dada por:
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
- Definimos $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$ como os diferenciais das variáveis independentes x e y. O Diferencial Total, dz, da função é definido por:

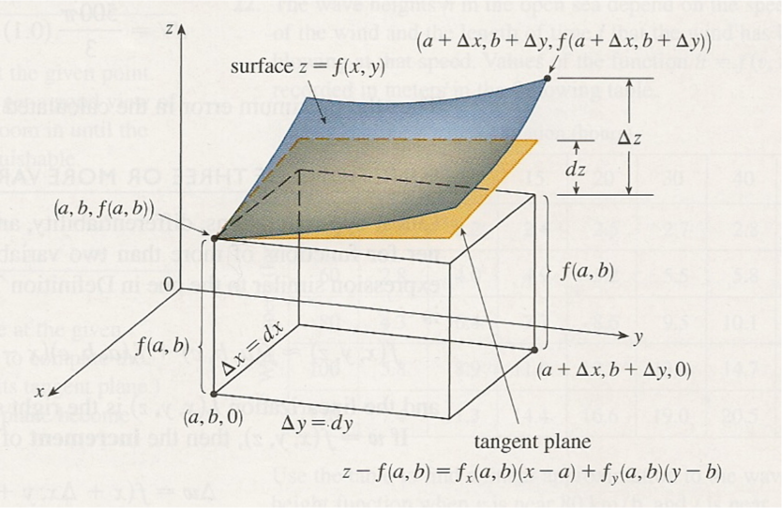
Diferencial Total

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

e representa uma aproximação da variação total da função, ou seja,

$$dz \approx \Delta z$$

- A generalização é direta para funções de mais de duas variáveis.



$(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y))$
surface $z=f(x,y)$
z
Δz
dz
$(a,b,f(a,b))$
$f(a,b)$
0
y
$f(a,b)$
$\Delta x = dx$
$(a+\Delta x, b+\Delta y, 0)$
x
$(a,b,0)$
$\Delta y = dy$
tangent plane
$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

Exemplo 12: Aplicando o conceito de diferencial total, calcule um valor aproximado de $\sqrt{9.02} + \ln 0.99$.

Resolução:

Considere-se:

- $f(x, y) = \sqrt{x} + \ln\ y$.
- $x = 9$ e $\Delta x = dx = 0.02$.
- $y = 1$ e $\Delta y = dy = -0.01$.

Como o diferencial total aproxima a variação total da função, dadas as variações das variáveis independentes, tem-se:

$$\sqrt{9.02} + \ln 0.99 = f(9.02, 0.99) \approx f(9, 1) + df(9, 1).$$

Exemplo 12 (Cont.):

Sabemos que $f(9,1) = 3$.

O diferencial total é dado por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + \frac{1}{y}dy$$

$$df(9,1) = \frac{1}{6} \times 0.02 + 1 \times (-0.01) = -\frac{1}{150} \approx -0.0067.$$

Assim,

$$\sqrt{9.02} + \ln 0.99 = f(9.02, 0.99) \approx 3 - \frac{1}{150} = \frac{449}{150} \approx 2.99333.$$

Nota: $\sqrt{9.02} + \ln 0.99 = f(9.02, 0.99) \approx 2.99328$.

Exemplo 13: Usando o conceito de diferencial total, determine um valor aproximado de $f(0.99, 1.02, -0.02)$, sendo

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x\, e^{xy} + 3xz}.$$

Resolução:

- Pretendemos calcular um valor aproximado da função no ponto $(0.99, 1.02, -0.02)$.
- Consideremos que as coordenadas do ponto $(0.99, 1.02, -0.02)$, resultaram de pequenas perturbações do ponto $(1, 1, 0)$.

Considere-se o ponto e as perturbações das suas coordenadas:

- $x = 1 \Rightarrow dx = -0.01$, $(x + dx = 0.99)$.
- $y = 1 \Rightarrow dy = +0.02$, $(y + dy = 1.02)$.
- $z = 0 \Rightarrow dz = -0.02$, $(z + dz = -0.02)$.

Exemplo 13 (Cont.):

- O valor do diferencial total é um valor aproximado da variação total da função, como resultado de variações/perturbações nas variáveis independentes.

- O valor da função nas variáveis perturbadas é aproximadamente igual ao valor da função nas variáveis não perturbadas, somado ao valor aproximado da perturbação provocada na função (diferencial).

Assim,

$$f(0.99, 1.02, -0.02) \approx f(1, 1, 0) + df(1, 1, 0).$$

Exemplo 13 (Cont.): Calcule-se as derivadas de 1^a ordem da função no ponto $(1,1,0)$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{xy} + xye^{xy} + 3z}{x\,e^{xy} + 3xz} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1,0)} = 1.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2 e^{xy}}{x\,e^{xy} + 3xz} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,0)} = \dfrac{1}{2}.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{3x}{x\,e^{xy} + 3xz} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,1,0)} = \dfrac{3}{2e}.$

A fórmula do diferencial num ponto é,

$$df(1,1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1,0)} dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,0)} dy + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(1,1,0)} dz$$

Fica,

$$df(1,1,0) = 1\,dx + \frac{1}{2}\,dy + \frac{3}{2e}\,dz.$$

Exemplo 13 (Cont.): Substituindo os acréscimos das variáveis independentes,

$$df(1,1,0) = 1 \times \left(-\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{100}\right) + \frac{3}{2e} \times \left(-\frac{2}{100}\right) = -\frac{3}{100e}$$

Como $f(1,1,0) = \frac{1}{2}$, a resposta à pergunta é,

$$f(0.99, 1.02, -0.02) \approx f(1,1,0) + df(1,1,0) = \frac{1}{2} - \frac{3}{100 \times e}.$$

Como curiosidade,

- $f(0.99, 1.02, -0.02) \approx 0.4888.$
- $\frac{1}{2} - \frac{3}{100 \times e} \approx 0.4890.$

Exemplo 14: Usando o conceito de diferencial total, determine um valor aproximado de $\ln(3.01) - (2.01 - \text{sen}(0.01))$.

Resolução:

- Consideremos a função,
$$f(x, y, z) = \ln x - (y - \text{sen} z) = \ln x - y + \text{sen} z.$$
- Pretendemos calcular um valor aproximado de $f(3.01, 2.01, 0.01)$.
- Consideremos que as coordenadas do ponto $(3.01, 2.01, 0.01)$, resultaram de pequenas perturbações do ponto $(3, 2, 0)$.

Considere-se o ponto e as perturbações das suas coordenadas:

- $x = 3 \Rightarrow dx = +0.01$, $(x + dx = 3.01)$.
- $y = 2 \Rightarrow dy = +0.01$, $(y + dy = 2.01)$.
- $z = 0 \Rightarrow dz = +0.01$, $(z + dz = 0.01)$.

Exemplo 14 (Cont.):

- O valor do diferencial total é um valor aproximado da variação total da função, como resultado de variações/perturbações nas variáveis independentes.
- O valor da função nas variáveis perturbadas é aproximadamente igual ao valor da função nas variáveis não perturbadas, somado ao valor aproximado da perturbação provocada na função (diferencial).

Assim,

$$f(3.01, 2.01, 0.01) \approx f(3, 2, 0) + df(3, 2, 0).$$

Exemplo 14 (Cont.): Calcule-se as derivadas de 1^a ordem da função no ponto $(3,2,0)$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(3,2,0)} = \dfrac{1}{3}.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(3,2,0)} = -1.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos z \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}|_{(3,2,0)} = 1.$

A fórmula do diferencial num ponto é,

$$df(3,2,0) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(3,2,0)}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(3,2,0)}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}|_{(3,2,0)}\, dz.$$

Fica,

$$df(3,2,0) = \frac{1}{3}\, dx + (-1)\, dy + 1\, dz.$$

Exemplo 14 (Cont.): Substituindo os acréscimos das variáveis independentes,

$$df(3,2,0) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{100}\right) + (-1) \times \left(\frac{1}{100}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{100}.$$

Como $f(3,2,0) = \ln 3 - 2$, a resposta à pergunta é,

$$f(3.01, 2.01, 0.01) \approx f(3,2,0) + df(3,2,0) = \ln 3 - 2 + \frac{1}{100} = \ln 3 - \frac{199}{100}.$$

Como curiosidade,

- $f(3.01, 2.01, 0.01) \approx -0.8981$.
- $\ln 3 - \dfrac{199}{100} \approx -0.8914$.

Derivadas de funções compostas e de funçõs dadas na forma implícita

Recorde-se que se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, ou seja,

- se f for uma função da variável x e
- se x for uma função da variável t.

então dizemos que f é uma função composta pois o argumento da função é ainda uma função. Indiretamente podemos, então, dizer que f é uma função de t, $y = f(g(t))$.

$$y \longmapsto x \longmapsto t$$

Se f e g forem funções deriváveis então podemos calcular a derivada de f em ordem a t:

Regra da Cadeia (Funções de uma Variável)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Exemplo 15: Sejam

$$y = 2x^2 + 1 \quad \text{e} \quad x = t^3 + 3$$

calcular $\dfrac{dy}{dt}$.

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = 4x.$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

logo a derivada de f em ordem a t é dada por:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 4x \times 3t^2 = 4(t^3+3) \times 3t^2 = 12t^2(t^3+3).$$

Suponhamos que $z = f(x, y)$ e $x = g(t)$ e $y = h(t)$, ou seja,

- se z for uma função de duas variáveis x e y e
- se x e y forem funções da variável t.

então dizemos que z é uma função composta e indiretamente podemos dizer que z é uma função de t, $z = f(g(t), h(t))$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r, mapsto] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r, mapsto] & t \end{tikzcd}$$

A variável z é a variável dependente, t é a variável independente e x e y são as variáveis intermediárias.

Regra da Cadeia (Funções de duas Variáveis) (Caso I)

Seja $z = f(x, y)$ uma função em x e y derivável, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$, ambas funções deriváveis em t. Então z é derivável em t e

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r, mapsto] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r, mapsto] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 16: Seja $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \sin(2t)$ e $y = \cos t$, calcular $\dfrac{dz}{dt}$ em $t = 0$.

Resolução:
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & x \arrow[r, mapsto] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r, mapsto] & t \end{tikzcd}$$

Pela regra da cadeia vem

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos(2t)) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t). \end{aligned}$$

Como queremos calcular a derivada num ponto não é necessário substituir x e y por t. Assim: $t = 0 \implies x = \sin 0 = 0$ e $y = \cos 0 = 1$.

Logo
$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos(0)) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6.$$

- Suponhamos que $z = f(x, y)$ tal que quer x, quer y são funções de duas variáveis: $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$, ou seja,
  - se z for uma função de duas variáveis x e y e
  - se x e y forem funções de duas variáveis s e t.

  então dizemos que z é uma função composta e indiretamente podemos dizer que z é uma função de s e t.

- A variável z é a variável dependente, s e t são as variáveis independente e x e y são as variáveis intermediárias.

Regra da Cadeia (Funções de duas Variáveis) (Caso II)

Seja $z = f(x, y)$ uma função em x e y derivável, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$, ambas funções deriváveis em s e t. Então,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & s \\ & x \arrow[ur] \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] \arrow[dr] & s \\ & & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \;; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Exemplo 17:

Seja $z = e^x \sin y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2 t$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Resolução:
$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
 & & s \\
 & x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & t \\
z \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & s \\
 & y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & t
\end{tikzcd}
.$$

Pela regra da cadeia vem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sin y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st) = \\
&= t^2 e^{st^2} \sin(s^2 t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2 t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \sin y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2) = \\
&= 2ste^{st^2} \sin(s^2 t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2 t).
\end{aligned}
$$

Exemplo 18: Seja $z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, onde $x = \ln(u^2)$ e $y = e^{uv}$, determinar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ no ponto $(1,0)$.

Resolução:

Se $P = (1,0)$ então $u = 1$ e $v = 0$, logo $x = 0$ e $y = 1$.

Calculemos as diferentes derivadas;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+y^2/x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_P = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1/x}{1+y^2/x^2} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}|_P = 0.$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{u}; \quad \frac{dx}{du}|_P = 2 \ ; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = ve^{uv}; \quad \frac{\partial y}{\partial u}|_P = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial v} = ue^{uv}; \quad \frac{\partial y}{\partial v}|_P = 1.$$

Exemplo 18 (Cont.):

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & x \arrow[r, mapsto] & u \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & u \\
 & y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & v
\end{tikzcd}
$$

Pela regra da cadeia vem,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\Big|_P = -1 \times 2 + 0 \times 0 = -2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v}\Big|_P = 0 \times 1 = 0.$$

Suponhamos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ define y implicitamente como uma função de x, ou seja, $y = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Derivada de Funções definidas Implicitamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Exemplo 19: Seja $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2y - 3xy^3 = 0$. Determine a derivada de y em ordem a x.

Resolução:

Seja $F(x, y) = x^2y - 3xy^3$, então $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 3y^3$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 27xy^2$. Logo $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy - 3y^3}{x^2 - 27xy^2}$.

Suponhamos que uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$ define z implicitamente como uma função de x e de y, ou seja, $z = f(x, y)$ $\forall (x, y) \in D_f$

Derivadas Parciais de Funções definidas Implicitamente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo 20: Determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Resolução: Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$.

Então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Exemplo 21: Considere as funções,

$w = f(x,y,z) = (3x-2)^{2y-2} + \dfrac{y\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2z-1}\right)}{x}$, sendo $P(1,1,1)$ um ponto da curva;

$y = g(u,v)$ definida por $y = \sqrt{2u+v+1} - \ln\, y$.

- Calcule $\dfrac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial x}$.
- Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} - 2\dfrac{\partial y}{\partial v} = 0$.
- Sendo $w = f(x,y,z)$, $x = e^u$, $y = g(u,v)$ e $u = \mathrm{sen}(z-1)$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial u}|_P$, aplicando o teorema da derivada da função composta.

Exemplo 21 (Cont.):

Resolução:

- $$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right).$$

- $$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(3x-2)^{2y-2}\ln(3x-2) + \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2z-1})}{x}.$$

- $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{\frac{2}{2\sqrt{2z-1}}}{1+(\sqrt{2z-1})^2} = \frac{1}{2xz\sqrt{2z-1}}.$$

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) = -\frac{2z\sqrt{2z-1}}{4x^2z^2(2z-1)} = -\frac{1}{2x^2z\sqrt{2z-1}}.$$

Exemplo 21 (Cont.):

- A função $y = f(u, v)$ é uma função de duas variáveis, definida na forma implícita.
- Faça-se, $F(y, u, v) = y - \sqrt{2u + v + 1} + \ln y$.
- $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-\frac{2}{2\sqrt{2u+v+1}}}{1+\frac{1}{y}} = \dfrac{y}{\sqrt{2u+v+1}(y+1)}$.
- $\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{2u+v+1}}}{1+\frac{1}{y}} = \dfrac{y}{2\sqrt{2u+v+1}(y+1)}$.

Facilmente se prova que $\dfrac{\partial y}{\partial u} - 2\dfrac{\partial y}{\partial v} = 0$.

Exemplo 21 (Cont.):

Trata-se de uma função composta,

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r] & u \\
 & & u \\
w \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[ddr] & y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & v \\
 & z \arrow[r] & u
\end{tikzcd}$$

- Já vimos que a função $y = g(u, v)$ está definida na forma implícita.
- Podemos considerar que z é uma função de u porque $u = \operatorname{sen}(z-1) \Leftrightarrow z = \operatorname{arcsen} u + 1$
- A derivada de w em ordem a u é dada por,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{du}.$$

Exemplo 21 (Cont.):

O exercício pede o cálculo da derivada no ponto $P(1,1,1)$, ou seja $x=1$, $y=1$ e $z=1$.

Precisamos de calcular os correspondentes valores de u e de v.

- $x=1 \Rightarrow u=\ln 1 \Rightarrow u=0$, porque $x=e^u$;
- $y=1 \wedge u=0 \Rightarrow 1=\sqrt{2\times 0+v+1}-\ln 1 \Rightarrow v=0$, porque $y=\sqrt{2u+v+1}-\ln y$.

A derivada pedida é dada por,

$$\frac{\partial w}{\partial u}|_P = \frac{\partial w}{\partial x}|_P \frac{dx}{du}|_{u=0} + \frac{\partial w}{\partial y}|_P \frac{\partial y}{\partial u}|_{u=0,v=0} + \frac{\partial w}{\partial z}|_P \frac{dz}{du}|_{u=0}.$$

Exemplo 21 (Cont.):

Resolução: Calculemos todas as derivadas no ponto,

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 3(2y-2)(3x-2)^{2y-3} - \dfrac{y \operatorname{arctg}\sqrt{2z-1}}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial x}|_P = -\operatorname{arctg} 1 = -\dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{dx}{du} = e^u \Rightarrow \dfrac{dx}{du}|_{u=0} = 1$
- $\dfrac{\partial w}{\partial y}|_P = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$
- $\dfrac{\partial y}{\partial u}|_{u=0,v=0} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{y}{x} \times \dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2z-1}}}{1+(\sqrt{2z-1})^2} \Rightarrow \dfrac{\partial w}{\partial z}|_P = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{dz}{du} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow \dfrac{dz}{du}|_{u=0} = 1$

$$\frac{\partial w}{\partial u}|_P = -\frac{\pi}{4} \times 1 + \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo 22: Considere a função

$$z = f(x, y) = \ln\left(\sqrt{3x + y}\right) + \operatorname{arctg}\left(x^{2y}\right)$$

- Calcule o valor aproximado de $f(0.99, -1.98)$.
- Sendo $z = f(x, y)$, $x = \ln(et)$ e $y = 2u\cos(u + t)$, calcule $\frac{\partial z}{\partial t}\big|_{\{t=1, u=-1\}}$, aplicando o teorema da derivada da função composta.

Resolução:

- Pretendemos calcular um valor aproximado da função no ponto $(0.99, -1.98)$.
- Consideremos que as coordenadas do ponto $(0.99, -1.98)$, resultaram de pequenas perturbações do ponto $(1, -2)$.
- $x = 1 \Rightarrow dx = -0.01$, $(x + dx = 0.99)$.
- $y = -2 \Rightarrow dy = +0.02$, $(y + dy = -1.98)$.

Exemplo 22 (Cont.): Então,

$$f(0.99, -1.98) \approx f(1, -2) + df(1, -2).$$

Para calcular o diferencial no ponto, calcule-se primeiro, as derivadas de 1^a ordem da função no ponto $(1, -2)$:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{3x + y} + \dfrac{2y\, x^{2y-1}}{1 + x^{4y}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-2)} = -\dfrac{1}{2}.$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3x + y} + \dfrac{2x^{2y} \ln x}{1 + x^{4y}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-2)} = \dfrac{1}{2}.$

A fórmula do diferencial num ponto é,

$$df(1, -2) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-2)}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-2)}\, dy.$$

Fica,

$$df(1, -2) = -\frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2}\, dy.$$

Exemplo 22 (Cont.): Substituindo os acréscimos das variáveis independentes,

$$df(1,-2) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{100}\right).$$

Como $f(1,-2) = \frac{\pi}{4}$, a resposta à pergunta é,

$$f(0.99,-1.98) \approx f(1,-2) + df(1,-2) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{200}.$$

Como curiosidade,

- $f(0.99,-1.98) \approx 0.80027.$
- $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{200} \approx 0.80040.$

Exemplo 22 (Cont.): Trata-se de uma função composta,

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & u \\ & y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & t \end{tikzcd}$$

A derivada de z em ordem a t é dada por,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

O exercício pede o cálculo da derivada para $t = 1 \wedge u = -1$.
Precisamos de calcular os correspondentes valores de x e de y.

- $t = 1 \Rightarrow x = \ln(e \times 1) \Rightarrow x = 1$;
- $t = 1 \wedge u = -1 \Rightarrow y = -2\cos(0) \Leftrightarrow y = -2$.

Seja $P = (1, -2)$, a derivada pedida é dada por,

$$\frac{dz}{dt}\Big|_{\{t=1,u=-1\}} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_P \frac{dx}{dt}\Big|_{t=1} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_P \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{\{t=1,u=-1\}}.$$

Exemplo 22 (Cont.): Calculemos todas as derivadas no ponto,

- $\frac{\partial z}{\partial x}|_P = -\frac{1}{2}$.
- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}|_{t=1} = 1$.
- $\frac{\partial z}{\partial y}|_P = \frac{1}{2}$.
- $\frac{\partial y}{\partial t} = -2u\text{sen}(u+t) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t}|_{\{t=1,u=-1\}} = 0$.

$$\frac{dz}{dt}|_{\{t=1,u=-1\}} = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = -\frac{1}{2}.$$

Exemplo 23: Considere as funções $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ definidas pelas equações:

$$u = y \ln\left(\frac{x+2}{y+3}\right) - 2^{1-x+3y} \qquad\qquad v + \operatorname{tg}^2\left(2x^2 y\right) = 1 - v^3 \ln\, x.$$

- Calcule $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.
- Determine a expressão de dv.
- Sendo $z = \dfrac{v}{u}$, em que u e v são as funções definidas, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = 1 + \ln\, 4$, aplicando o teorema da derivada da função composta.

Exemplo 23 (Cont.):

- Simplifiquemos a função dada,

$$\begin{aligned} u &= y\left[\ln(x+2)-\ln(y+3)\right]-2^{1-x+3y} \\ &= y\ \ln(x+2)-y\ \ln(y+3)-2^{1-x+3y} \end{aligned}$$

- $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{x+2}+2^{1-x+3y}\ \ln 2.$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=-\dfrac{y}{(x+2)^2}-2^{1-x+3y}(\ln 2)^2.$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}-3\times 2^{1-x+3y}(\ln 2)^3.$

Exemplo 23 (Cont.):

- A definição de diferencial é, $dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}\, dy$.

  A função $v = v(x, y)$ está definida na forma implícita, logo, faça-se,

$$F(v, x, y) = v + \operatorname{tg}^2(2x^2 y) - 1 + v^3 \ \ln\ x.$$

  As fórmulas são,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{2\operatorname{tg}(2x^2 y)\sec^2(2x^2 y)\, 4xy + \frac{v^3}{x}}{1 + 3v^2 \ln x}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{2\operatorname{tg}(2x^2 y)\sec^2(2x^2 y)\, 2x^2}{1 + 3v^2 \ln x}.$$

Exemplo 23 (Cont.): A resposta é,

$$\begin{aligned} dv &= -\frac{8x^2y\text{tg}(2x^2y)\sec^2(2x^2y)+v^3}{x(1+3v^2\ln x)}\,dx+ \\ &+ -\frac{2\text{tg}(2x^2y)\sec^2(2x^2y)\,2x^2}{1+3v^2\ln x}\,dy \end{aligned}$$

- Trata-se de uma função composta,

$$\begin{tikzcd} & & x \\ & u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & y \\ & v \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ & & y \end{tikzcd}$$

As derivada pedidas são,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Exemplo 23 (Cont.): O exercício pede o cálculo da derivada para $x = 1 \wedge y = 0$. Precisamos de calcular os correspondentes valores de u e de v.

- $x = 1 \wedge y = 0 \Rightarrow u = 0 - 2^{1-1+0} \Rightarrow u = -1$;
- $x = 1 \wedge y = 0 \wedge u = -1 \Rightarrow v + \text{tg}^2(0) = 1 - v^3 \ln 1 \Rightarrow v = 1$.

As derivadas pedidas são dadas por,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0\\u=-1\\v=1}} = \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{u=-1\\v=1}} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} + \left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{\substack{u=-1\\v=1}} \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0\\u=-1\\v=1}} = \left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{\substack{u=-1\\v=1}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} + \left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{\substack{u=-1\\v=1}} \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$$

Exemplo 23 (Cont.): Calculemos todas as derivadas no ponto,

- $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{v}{u^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}\Big|_{\substack{u=-1\\v=1}} = -1.$
- $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = \ln 2.$
- $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v}\Big|_{\substack{u=-1\\v=1}} = -1.$
- $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = -1.$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x+2) - \ln(y+3) - \frac{y}{y+3} - 3 \times 2^{1-x+3y} \ln 2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = -3\ln 2.$
- $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = 0.$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}} = (-1)\times\ln 2 + (-1)\times(-1) + (-1)\times(-3\ln 2) + (-1)\times 0 =$$

$$= 1 + \ln\, 4.$$