RESUMO - SÉRIES

Análise Matematica - Licenciatura em Engenharia Informática

SÉRIES NUMÉRICAS

- **Séries Geométricas**: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}$
  - **a** é o primeiro termo da série ($a \neq 0$);
  - **r** é a razão da série, $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

  Critério de convergência: se $|r| < 1$ a série é convergente, para este caso, podemos calcular a soma da série: $S = \dfrac{a}{1-r}, |r| < 1$.

- **Série de Riemann**: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$ (se $p = 1$, chama-se série harmónica)

  Critério de convergência:
  - Se $p > 1$ então a série é convergente;
  - Se $p \leq 1$ então a série é divergente.

- **Critério de Divergência**: Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

- **1º Critério de Comparação**: Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Suponhamos que, a partir de certa ordem, $a_n \leq b_n$. Tem-se:

  → Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

  → Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também é divergente.

- **2º Critério de Comparação**: Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Se a partir de certa ordem, $b_n > 0$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$, então, se $L \neq 0, +\infty$ as séries são da mesma natureza.

- **Critério da Razão**: Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos não nulos e suponha-se que

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

  - Se $\rho < 1$, a série é convergente.
  - Se $\rho > 1$, a série é divergente.
  - Se $\rho = 1$, o critério é inconclusivo.

- **Séries alternadas**: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$.
  - Se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n|$ for convergente, então a série alternada é absolutamente convergente.
  - Se a série dos módulos for divergente, então aplica-se o **critério de Leibniz**:

    Se se verificarem as condições:
    * $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (a_n é sucessão decrescente)
    * $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

    a série alternada diz-se simplesmente convergente, caso contrário diz-se divergente.

SÉRIES DE FUNÇÕES

- **Raio** e **Intervalo de Convergência**: Para calcular o Raio (R) e o Intervalo de Convergência (I.C.) da série de potências, com centro de convergência em a,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

  aplica-se o **Critério da Razão ou de D'Alembert**:
  - Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, a série é absolutamente convergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, a série é divergente.
  - Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o critério é inconclusivo.

- **Desenvolvimento de uma função em série de Taylor em torno de $\mathbf{x = a}$**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in \text{I.C.}$$

  Se $a = 0$, chama-se série de MacLaurin.

- **Fórmula de Taylor com Resto**

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

  Sendo

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  o polinómio de Taylor de ordem n em torno de $x = a$ e $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.