Licenciatura em Engenharia Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

Recurso - 1ª Parte **16 de julho de 2019**

Aluno nº________________ Nome____

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- É permitida a consulta do formulário da U.C.. Não é permitida a consulta de quaisquer dispositivos eletrónicos (máquina de calcular, telemóvel, etc.).
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.

1. (1 val.) O número de alunos matriculados nas U.C. de Análise de Dados, Matemática Discreta, e Linguagens e Programação é 780. Constatou-se que 20 deles estão inscritos simultaneamente a Matemática Discreta e Linguagens e Programação, e que 210 frequentam unicamente Linguagens e Programação. Os alunos matriculados em Análise de Dados não frequentam Matemática Discreta nem Linguagens e Programação. Sabendo que a U.C. de Matemática Discreta tem 300 alunos, determine o número de estudantes em Análise de Dados. Justifique a sua resposta.

2. (4 val.) Use unicamente as propriedades das operações lógicas para mostrar que a expressão
$$(a \vee \sim b) \Rightarrow \Big[\sim (\sim b \vee \sim c) \wedge [c \vee (a \wedge b)] \Big]$$
é logicamente equivalente a $(\sim a \vee c) \wedge b$. Justifique a sua resposta e indique as propriedades usadas na simplificação da proposição.

3. a) (2 val.) Diga quais das seguintes expressões são proposições e indique, **justificando**, o seu valor lógico:
   (i) $\exists n \in \mathbb{Z}, n = -n$.
   (ii) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ p = \frac{m+n}{2}$.

   b) (1 val.) Para as proposições da alínea anterior, apresente a sua negação sem o símbolo $\sim$.

4. Considere a relação binária R sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por extensão como se segue
$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$
   a) (2 val.) Comente a afirmação: "A relação R é uma relação de ordem parcial".

   b) (2 val.) Determine a menor relação de equivalência que contém R. Apresente-a por extensão e pelo seu digrafo.

   c) (2 val.) Seja S a relação binária sobre o conjunto A representada pelo digrafo abaixo. Represente o digrafo da relação $S \circ R$. Justifique a sua resposta.
$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4$$

5. (2 val.) Mostre, por prova direta, que, se a soma de dois números inteiros é ímpar, então o seu produto é par.

6. (4 val.) Usando o Princípio de Indução Matemática, mostre que
$$2^n > n^2 + n, \text{ para todo o inteiro } n \geq 5.$$

Licenciatura em Engenharia Informática

MATEMÁTICA DISCRETA

Recurso - 2ª Parte **16 de julho de 2019**

Aluno nº________________ Nome____

- A duração da prova é de **60 minutos** + 10 minutos de tolerância.
- Não é permitida a consulta de dispositivos eletrónicos (telemóvel, smartwatch, etc.), exceto máquina de calcular.
- Todos os cálculos que efetuar e todas as conclusões que obtiver terão de ser devidamente **justificados**.
- Resolva as questões em 3 folhas separadas, da forma seguinte: Q1 — Q2 — Q3,Q4.

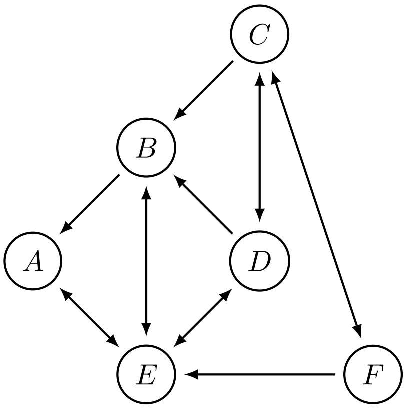
1. Considere o algoritmo que se segue, que recebe o vetor x e a matriz a, e efetua o procedimento seguinte: (i) se o comprimento de x for igual ao número de colunas de a, é feita a multiplicação $a \cdot x$; (ii) se o comprimento de x for igual ao número de linhas de a, é feita a multiplicação $x \cdot a$ após todas as entradas da matriz a serem divididas por uma potência de 2; (iii) caso contrário, é devolvida uma mensagem de erro.

```
procedure Function(vector x = (x1, ..., xm), matrix a = (a11, ..., anp): integers)
    if m = p:
        r := vector (r1, ..., rn)
        for i := 1 to n:
            s := 0
            for j := 1 to m:
                s := s + a[i, j] * x[j]
            r[i] := s
    else if m = n:
        for i := 1 to n:
            for j := 1 to p:
                k := 1
                while k < n + 1:
                    a[i, j] := a[i, j]/2
                    k := k + 1
        for i := 1 to p:
            s := 0
            for j := 1 to m:
                s := s + x[j] * a[j, i]
            r[i] := s
    else
        return error
    return r
```

a) (2 val.) Sejam $m = n = 3$ e $p = 4$. Quantas operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão) são efetuadas pelo algoritmo? (Exclua incrementações das variáveis iterativas.) Justifique.

b) (3 val.) Apresente uma estimativa O (complexidade temporal no pior caso) para o tempo de execução do algoritmo em função dos valores do input, m, n, p. Justifique.

2. Considere o grafo orientado G seguinte:



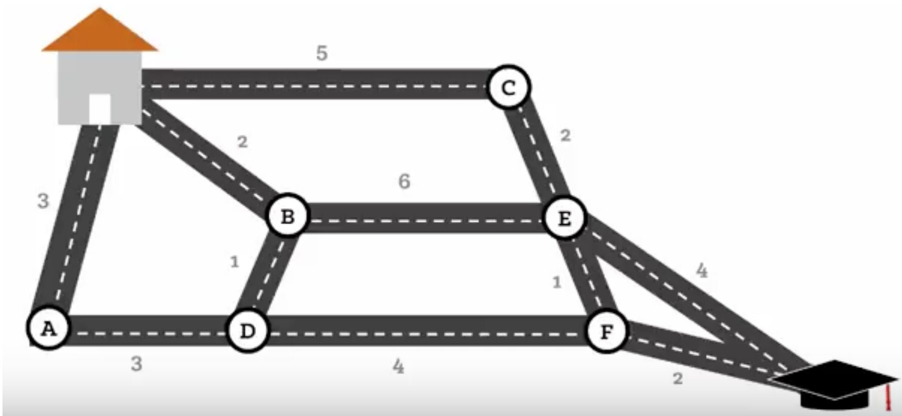
   a) (1 val.) Determine a matriz de adjacências de G.
   b) (2 val.) Calcule, matricialmente, quantos passeios de comprimento igual a 3 existem do vértice A para o vértice C. Apresente-os.
   c) (2 val.) Dê exemplo, neste grafo, se possível, de
      (i) um passeio que não seja trajeto;
      (ii) um trajeto que não seja caminho simples;
      (iii) um caminho simples;
      (iv) um ciclo.

3. Considere a tabela das distâncias aéreas, arredondadas às centenas de milhas, entre seis das maiores cidades do mundo: Londres (L), Cidade do México (CM), Nova Iorque (NI), Paris (Pa), Pequim (Pe) e Tóquio (T).

	L	CM	NI	Pa	Pe	T
L	-	56	35	2	51	60
CM	56	-	21	57	78	70
NI	35	21	-	36	68	68
Pa	2	57	36	-	51	61
Pe	51	78	68	51	-	13
T	60	70	68	61	13	-

   a) (1 val.) Construa um grafo ponderado com vértices L, CM, NI, Pa, Pe e T.
   b) (4,5 val.) Obtenha uma árvore geradora de custo mínimo, usando o algoritmo de Kruskal e preenchendo a tabela correspondente (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).

4. (4,5 val.) Determine um caminho de menor custo, e o seu custo, entre a casa do Jaime e o ISEP (use a folha com as tabelas disponibilizada no Moodle para esta prova).



Hall, A., *How to use Dijkstra's algorithm.*, from https://www.youtube.com/watch?v=Cjzzx3MvOcU