

PARTE 1: INTERFEROMETRIA E PRINCIPI DEI LASER

INTRODUZIONE

LEZIONE 15/09

I laser sono stati inventati nei primi anni '60 anche se le loro possibili applicazioni non erano ancora note.

Qual è la differenza tra i laser e le sorgenti di luce "classiche" (es. sole, lampadine, ...)?

Le sorgenti di luce classica emettono una luce incoerente/disordinata perché sono composti da emettitori che si scaldano e pertanto emettono una radiazione di corpo nero e a seconda di quanto sono caldi emettono uno spettro di radiazione piuttosto ampio.

Il sole, ad esempio, emette uno spettro di radiazione elettromagnetica che va dai raggi gamma alle onde radio, coprendo circa 16 ordini di grandezza: da $3 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$ fino a $3 \cdot 10^4 \text{ Hz}$.

Lo spettro del visibile è intorno ai $\nu \sim 300 \text{ THz}$ che in termini di lunghezza d'onda corrisponde ad un range [400, 750] nm. Il primo laser inventato nel 1960 è stato un laser a rubino che emetteva una luce con $\lambda = 694.3 \text{ nm}$. La luce laser è una luce ordinata cioè tutti gli emettitori che lo compongono oscillano con la stessa frequenza e la stessa fase e quindi ogni emettitore contribuisce costruttivamente alla generazione dell'onda elettromagnetica risultante. Pertanto, si dice che il laser sia una sorgente di radiazione elettromagnetica coerente sia temporalmente che spazialmente, il che significa che la luce emessa dal laser è il campo elettromagnetico a frequenza ottica più puro, controllabile e malleabile che esistano.

In generale, al giorno d'oggi, la luce emessa dai laser varia $0.1 \text{ nm} < \lambda < 10 \mu\text{m}$, $30 \text{ THz} < \nu < 3 \cdot 10^5 \text{ THz}$.

PROPERTIES OF LASER BEAMS

Perché sono così importanti i laser? Quali sono le principali proprietà?

1. COERENZA TEMPORALE

Essendo composti da emettitori che emettono la luce in modo ordinato, cioè possedendo una coerenza temporale molto elevata, i laser hanno:

- ALTA MONOCROMATICITÀ
cioè emettono luce ad una frequenza molto stabile, cioè con una precisione $\frac{\Delta\nu}{\nu_L} < 10^{-18}$.
Il laser emette una singola riga di frequenza.
(equivale a determinare la distanza tra la terra e il sole con una tolleranza di 100 nm)
- IMPULSI MOLTO CORTI
Sommando varie armoniche con una certa relazione di fase l'una con l'altra si riescono a progettare laser in grado di emettere impulsi ultra-brevi, cioè con una durata $\tau_{pulse} < 5 \cdot 10^{-15} \text{ s}$.
(ci consente di fare fotografie di processi elettronici e chimici molto molto veloci, come nel caso della fotosintesi clorofilliana ad esempio)

2. COERENZA SPAZIALE

Ogni punto del fascio di luce è coerente, cioè ogni punto del fascio è un'onda elettromagnetica che oscilla con la stessa frequenza e la stessa fase. Questa proprietà permette di manipolare il fascio di luce laser spazialmente come si vuole e ciò permette di avere:

- DIMENSIONI DI MACCHIA FOCALIZZATA (SPOT) MOLTO PICCOLE
anche inferiori alla lunghezza d'onda stessa $w < \lambda$ e ciò permette di usare il laser per fare delle modellazioni molto precise e consente di avere delle intensità luminose molto alte.
- ELEVATA DIREZIONALITÀ/BASSA DIVERGENZA
L'angolo di divergenza, ossia l'angolo con cui si allarga il fascio di luce durante la propagazione, rimane molto piccolo $\theta_{divergence} < 0.1 \text{ mrad}$

RIPASSO DI OTTICA ONDULATORIA

Equazioni di Maxwell

1. LEGGE DI FARADAY: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2. LEGGE DI GAUSS ELETTRICA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
3. LEGGE DI AMPERE-MAXWELL: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{free}$
4. LEGGE DI GAUSS MAGNETICA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

where $\vec{H} = \vec{B}/\mu$.

La densità di carica è data dalla somma di due contributi: $\rho = \rho_{free} + \rho_{polarization}$, quindi possiamo riscrivere la legge di Gauss elettrica come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{free}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{polarization}}{\epsilon_0}$$

dove il primo termine al secondo membro $\frac{\rho_{free}}{\epsilon_0}$ può essere trascurato perché ipotizziamo di trovarci lontano dalla sorgente di campo elettromagnetico, cioè assumiamo che la presenza di carica libera sia trascurabile, cioè che $\rho_{free} = 0$ e quindi che $\vec{j}_{free} = 0$.

Che cos'è la carica di polarizzazione?

Pensiamo il materiale come se fosse costituito da tanti piccoli dipoli in cui abbiamo una separazione microscopica tra cariche positive e negative, la cui distanza di separazione è \vec{d} .

In condizioni stazionarie questi dipoli sono orientati casualmente all'interno del materiale e la carica netta è nulla, ma se applichiamo un campo elettrico, questi dipoli tendono ad orientarsi in modo da allinearsi al campo elettrico stesso.

Questa rotazione dei dipoli determina un displacement netto effettivo $\vec{d} > 0$ che a sua volta causa la presenza di un vettore di polarizzazione $\vec{p} \neq 0$.

Il VETTORE DI POLARIZZAZIONE è dato da

$$\vec{p} = N \langle q \vec{d} \rangle = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

dove $N = \text{densità dei dipoli} = \frac{\# \text{dipoli}}{\text{unità volume}}$, $\chi = \text{SUSCETTIVITÀ ELETTRICA (kai)}$.

Può essere dimostrato che la densità di carica di polarizzazione può essere scritta come

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \vec{p} = -\vec{\nabla}(\epsilon_0 \chi \vec{E})$$

Se ora moltiplichiamo la legge di Gauss elettrica per ϵ_0 osserviamo che

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{pol} = -\vec{\nabla}(\epsilon_0 \chi \vec{E})$$

e quindi otteniamo

$$\vec{\nabla} \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = 0$$

che è un'altra formulazione della legge di Gauss elettrica.

Possiamo quindi scrivere il VETTORE DI INDUZIONE ELETTRICA (ELECTRICAL DISPLACEMENT) come

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

dove $\epsilon_r = (1 + \chi)$ è la COSTANTE DIELETTRICA DEL MATERIALE, quindi

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

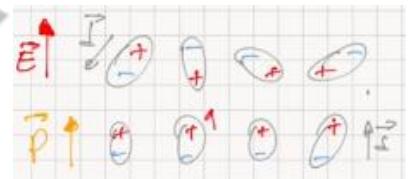
Possiamo anche definire l'INDICE DI RIFRAZIONE come

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

A questo punto possiamo riscrivere la legge di Gauss elettrica come

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

dove abbiamo assunto $\rho_{free} = 0$.



Equazione d'onda elettromagnetica

La prima equazione di Maxwell, ossia la legge di Faraday, ci dice che la variazione nel tempo del campo magnetico è una sorgente di campo elettrico, mentre la terza equazione di Maxwell, ossia la legge di Ampere-Maxwell, ci dice che la variazione nel tempo del campo elettrico è una sorgente di campo magnetico.

Per ottenere l'equazione d'onda elettromagnetica, iniziamo applicando l'operatore ROTORE ad entrambi i membri della prima equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \vec{\nabla} \times \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right]$$

ottenendo

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{B}]$$

dove sappiamo che il secondo termine al primo membro è uguale a zero (legge di Gauss elettrica), quindi

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \times \vec{B}]$$

Ora riscriviamo la terza equazione di Maxwell tenendo conto di aver assunto $\rho_{free} = 0 \rightarrow \vec{j}_{free} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu}$$

dalla quale ricaviamo che

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sostituendo in modo opportuno, ricaviamo

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

che, dato che μ e ϵ sono costanti, può essere riscritta come

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

questa espressione rappresenta l'EQUAZIONE GENERALE D'ONDA ELETTRONAGNETICA in cui l'onda viaggia in una direzione qualsiasi.

SOLUZIONE DI UN'ONDA PIANA ARMONICA

Ora supponiamo di voler ricavare l'espressione dell'equazione d'onda che propaga in direzione z .

In questo caso l'equazione d'onda elettromagnetica diventa:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

questa rappresenta l'EQUAZIONE D'ONDA PIANA LUNGO L'ASSE Z.

Possiamo anche assumere che l'onda sia polarizzata lungo una direzione particolare, cioè che il campo elettrico oscilli linearmente, ad esempio, lungo l'asse y , e quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial z^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2} = 0$$

In un'onda elettromagnetica il campo magnetico oscilla sempre in fase con il campo elettrico, quindi abbiamo il massimo di campo magnetico in corrispondenza del massimo di campo elettrico e sappiamo anche che il campo elettrico e il campo magnetico oscillano sempre perpendicolarmente l'uno rispetto all'altro, quindi possiamo scrivere le soluzioni all'equazione d'onda come

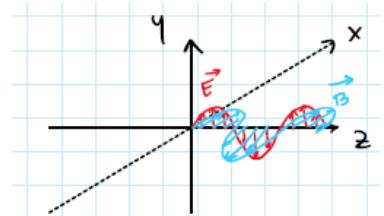
$$\vec{E}(z, t) = E_y \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}(z, t) = B_x \cos(kz - \omega t) \vec{u}_x$$

che sono ONDE PIANE ARMONICHE dove k è la COSTANTE DI PROPAGAZIONE DELL'ONDA, \vec{u} è il vettore unitario che rappresenta la DIREZIONE DI PROPAGAZIONE e ω è la FREQUENZA ANGOLARE.

Sostituendo, otteniamo

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [E_y \cos(kz - \omega t)] - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} [E_y \cos(kz - \omega t)] = 0$$



Effettuando la derivata

$$E_y[-k^2 \cos(kz - \omega t)] - \epsilon\mu E_y[-\omega^2 \cos(kz - \omega t)] = 0$$

che può essere riscritta come

$$k^2 + \epsilon\mu\omega^2 = 0$$

e quindi come

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \epsilon\mu$$

cioè

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu}$$

oppure, più comunemente, come

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Ricordando che:

- la frequenza angolare è $\omega = 2\pi\nu$ dove ν è la FREQUENZA OTTICA
- costante di propagazione è $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dove λ è la LUNGHEZZA D'ONDA
- la costante dielettrica è $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ dove $\sqrt{\epsilon_r} = n$
- la permittività magnetica è $\mu = \mu_0\mu_r$

possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

dalla quale ricaviamo che

$$\lambda\nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

dove $\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$.

Ora se supponiamo di NON trovarci in un materiale/mezzo ferromagnetico, possiamo assumere $\mu_r = 1$ e quindi abbiamo $\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot n$ che ci dice che la propagazione di un'onda in un materiale è esattamente uguale alla propagazione dell'onda nel vuoto eccetto per un fattore moltiplicativo uguale all'indice di rifrazione.

Velocità della luce

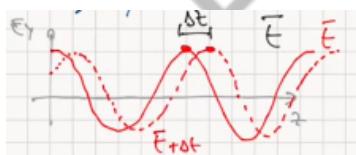
Diamo per garantito che la velocità della luce nel vuoto sia $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ e che $\lambda\nu = \frac{c_0}{n} = c_n$ è la velocità della luce in un mezzo.

Consideriamo la soluzione campo elettrico, ad esempio

$$\vec{E}(z, t) = E_y \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y$$

l'argomento del coseno rappresenta la FASE DELL'ONDA e può essere scritta come

$$\phi(z, t) = kz - \omega t$$



La velocità dell'onda può essere calcolata, calcolando quanto i picchi si siano mossi nello spazio, perciò la VELOCITÀ MEDIA può essere scritta come

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Per calcolare questa velocità consideriamo il luogo dei punti per i quali la fase è costante e per dire che la fase è costante dobbiamo calcolare la derivata totale della fase e porla uguale a zero

$$d\phi(z, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot dt = 0$$

dalla quale otteniamo

$$k \cdot dz - \omega \cdot dt = 0$$

e quindi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

dove $\frac{dz}{dt} = \langle v \rangle = v_{ph}$ è VELOCITÀ DI FASE e $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c_n$ è la VELOCITÀ DELLA LUCE NEL MEZZO.

Concludiamo che

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c_n = \lambda\nu$$

Relazione tra i campi B_x e E_y

Un'altra cosa che abbiamo dato per garantito è che il campo elettrico sia perpendicolare al campo magnetico.
Abbiamo detto che

$$\vec{E}(z, t) = E_y \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}(z, t) = B_x \cos(kz - \omega t) \vec{u}_x$$

La legge di Faraday asserisce che

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Quindi possiamo sviluppare rotore del campo elettrico e ricordando che il campo elettrico è polarizzato lungo l'asse y e che essendo il campo elettrico un'onda piana, il campo elettrico sarà costante in direzione x e y e pertanto le derivate rispetto a queste direzioni saranno nulle

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \cancel{\partial/\partial x} & \cancel{\partial/\partial y} & \partial/\partial z \\ \cancel{E_x} & E_y & \cancel{E_z} \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \cdot \vec{u}_x = -E_y k \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{u}_x$$

Inoltre, assumendo che il vettore induzione magnetica sia diretto in direzione x , possiamo scrivere

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B_x \omega \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{u}_x$$

Quindi sostituendo otteniamo

$$-E_y k \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{u}_x = B_x \omega \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{u}_x$$

dalla quale semplificando si ottiene

$$\frac{E_y}{B_x} = \frac{\omega}{k} = c_n$$

In conclusione, abbiamo raggiunto due risultati:

- abbiamo dimostrato che i due campi sono ortogonali
- che il rapporto tra le ampiezze dei due campi è pari alla velocità della luce all'interno del mezzo

LEZIONE 17/09

Notazione fasoriale

Se abbiamo un vettore oscillatorio come la soluzione dell'equazione d'onda

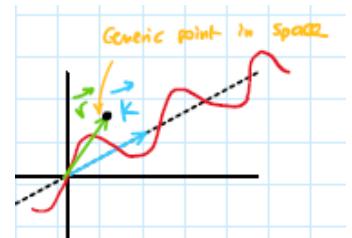
$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

che in generale può essere scritta come

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

dove $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{u}_u$ = direzione dell'onda, in cui λ è la distanza tra due fronti d'onda, e
 \vec{r} = vettore di posizione generale.

Una funzione armonica può essere anche scritta nel piano complesso come la somma di due vettori che ruotano in direzioni diverse.



La fase dell'onda dipende dalla posizione nello spazio e dal tempo

$$\phi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

dove il primo termine al secondo membro è il componente della fase che dipende dalla coordinata spaziale e quindi può essere indicato come ϕ_r e l'intera fase può essere quindi riscritta come

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_r - \omega t$$

Il campo elettrico oscilla sia nello spazio che nel tempo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\phi_r - \omega t) = \Re\{E_0 e^{j(\phi_r - \omega t)}\} = \frac{1}{2}\{E_0 e^{j(\phi_r - \omega t)} + E_0 e^{-j(\phi_r - \omega t)}\}$$

Quindi, possiamo definire i fasori come

$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{j(\phi_r - \omega t)}$$

$$\tilde{E}^*(\vec{r}, t) = E_0 e^{-j(\phi_r - \omega t)}$$

Pertanto, il campo elettrico può essere scritto come la somma di questi due vettori di cui il primo ruota in senso antiorario ed il secondo in senso orario.

Quindi

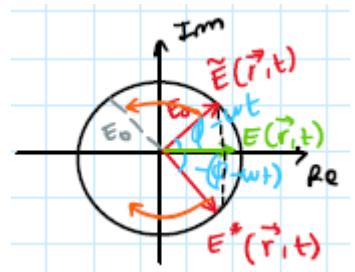
$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\{\tilde{E}(\vec{r}, t) + \tilde{E}^*(\vec{r}, t)\}$$

Inoltre, possiamo scrivere il fasore anche in una forma più compatta, osservando che

$$E_0 e^{j\phi_r} = \tilde{E}_0(\vec{r})$$

e quindi otteniamo

$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0(\vec{r})e^{-j\omega t}$$

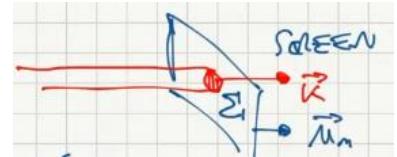


Intensità dell'onda elettromagnetica

Se prendiamo uno schermo di area Σ e lo illuminiamo con un laser beam.

L'INTENSITÀ dell'onda è definita come la potenza ottica media dell'onda fratto la superficie Σ ortogonale al beam

$$I(t) = \frac{\langle P \rangle}{\Sigma} = \frac{\text{potenza ottica media}}{\text{superficie}}$$



Se la superficie è una superficie orientata può essere scritta come $\vec{\Sigma} = \Sigma \cdot \vec{u}_n$, dove $\vec{u}_n \parallel \vec{k}$, cioè $\vec{u}_n \cdot \vec{u}_v = 1$.

La POTENZA ISTANTANEA DELL'ONDA è l'energia trasportata dall'onda nell'unità di tempo impiegato dall'onda per attraversare la superficie

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\text{energia che fluisce attraverso } \Sigma}{\text{tempo necessario per attraversare } \Sigma}$$

La DENSITÀ DELL'ENERGIA ELETTROMAGNETICA SPAZIALE trasportata dal beam (e.m. wave) può essere scritta come

$$U(t) = \frac{1}{2}\epsilon E^2(t) + \frac{1}{2}\frac{B^2(t)}{\mu}$$

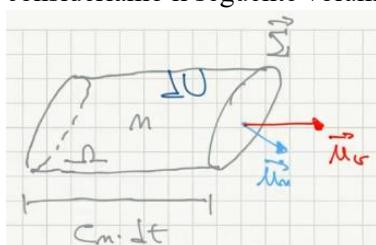
Abbiamo visto che il campo magnetico istantaneo può essere scritto come

$$B(t) = \frac{E(t)}{c_n} = \sqrt{\epsilon\mu} \cdot E(t)$$

Quindi sostituendo possiamo riscrivere la densità dell'energia elettromagnetica spaziale solo in funzione del campo elettrico, cioè come

$$U(t) = \epsilon E^2(t)$$

Ora consideriamo una superficie che non è ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda ($\vec{u}_n \cdot \vec{u}_v \neq 1$) e quindi consideriamo il seguente volume



Dove \vec{u}_v è la direzione di propagazione dell'onda, mentre \vec{u}_n è l'angolo che forma la normale alla superficie con il vettore \vec{u}_v .

Consideriamo come lunghezza del cilindro $c_n \cdot dt$ e come volume del cilindro $d\Omega$. Vogliamo calcolare l'energia contenuta in questo volume $d\Omega$ che può essere espressa come

$$dU = U(t) \cdot d\Omega = \epsilon E^2(t) \cdot c_n dt \Sigma \cdot \vec{u}_v \cdot \vec{u}_n$$

La POTENZA ISTANTANEA OTTICA ASSOCIATA ALL'ONDA è quindi

$$P(t) = \frac{dU}{dt} = \epsilon E^2(t) \cdot c_n \Sigma \cdot \vec{u}_v \cdot \vec{u}_n$$

Dalla quale possiamo ricavare l'INTENSITÀ DELLA LUCE SULLA SUPERFICIE Σ (non perpendicolare alla direzione dell'onda) come

$$I_\Sigma(t) = \frac{P(t)}{\Sigma} = \frac{\epsilon E^2(t) \cdot c_n \Sigma \vec{u}_v \cdot \vec{u}_n}{\Sigma} = \epsilon E^2(t) \cdot c_n \cdot \cos(\sigma)$$

Ma nel caso la superficie Σ_i fosse ortogonale alla direzione dell'onda abbiamo

$$\vec{u}_n \parallel \vec{u}_v \rightarrow \cos(\sigma) = 1$$

e quindi

$$I(t) = \epsilon c_n E^2(t)$$

Questo valore rappresenta l'intensità istantanea dell'onda, ma solitamente quello che misuriamo in realtà è il suo valore medio che può essere definito come

$$I = \langle I(t) \rangle = \epsilon c_n \langle E^2(t) \rangle$$

Inoltre, definendo il VETTORE DI POYNTING come

$$\vec{S}(t) = \vec{E} \times \vec{H} = \epsilon c_n E^2(t) \vec{u}_v$$

possiamo riscrivere la potenza istantanea dell'onda come

$$P(t) = \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

e quindi l'intensità media dell'onda come

$$I = \langle \vec{S}(t) \cdot \vec{u}_n \rangle$$

Intensità dell'onda in notazione fasoriale

Abbiamo visto che il campo elettrico istantaneo in notazione fasoriale può essere scritto come

$$E(\vec{r}, t) = \mathbb{R}\{\tilde{E}(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2}\{\tilde{E}(\vec{r}, t) + \tilde{E}^*(\vec{r}, t)\}$$

Allora possiamo riscrivere l'intensità media dell'onda come

$$I = \langle I(t) \rangle = \epsilon c_n \left\langle \frac{1}{4} \left\{ \tilde{E}^2(\vec{r}, t) + \tilde{E}^{*2}(\vec{r}, t) + 2\tilde{E}(\vec{r}, t)\tilde{E}^*(\vec{r}, t) \right\} \right\rangle$$

Questo simbolo $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la MEDIA STOCASTICA, ma in questo caso abbiamo un processo continuo e non discreto e quindi possiamo fare anche la MEDIA TEMPORALE che è data da

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^2(t) \cdot dt$$

A seconda del processo la media stocastica e quella temporanea possono essere identiche o possono differire.

Se la media stocastica coincide con quella temporale il processo viene definito PROCESSO ERGODICO, cioè

$$\text{se } \langle E^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^2(t) \cdot dt \rightarrow E^2(t) \text{ è un PROCESSO ERGODICO}$$

In questo caso, l'intensità media dell'onda può essere scritta come

$$I = \epsilon c_n \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{E}^2(\vec{r}, t) + \tilde{E}^{*2}(\vec{r}, t) + 2\tilde{E}(\vec{r}, t)\tilde{E}^*(\vec{r}, t) dt$$

Ricordiamo che il fasore dell'onda di campo elettrico ed il suo complesso coniugato possono essere scritti come

$$\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0(\vec{r})e^{-j\omega t} = E_0 e^{j\phi} e^{-j\omega t} \rightarrow \tilde{E}^*(\vec{r}, t) = E_0 e^{-j\phi} e^{+j\omega t}$$

quindi il primo e il secondo termine dell'integrandi sono vettori rotativi che al passare del tempo ruotano solamente mantenendo la propria ampiezza costante e dato che stiamo calcolando la media temporale, facciamo andare il tempo all'infinito e quindi stiamo praticamente dividendo delle quantità che rimangono finite per una quantità che va all'infinito. Pertanto, questi due termini vanno a zero

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{E}^2(\vec{r}, t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{E}^{*2}(\vec{r}, t) dt = 0$$

Invece, per quanto riguarda il terzo termine possiamo scrivere

$$2\tilde{E}(\vec{r}, t)\tilde{E}^*(\vec{r}, t) = 2|\tilde{E}(\vec{r}, t)|^2$$

e siccome sappiamo che $\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_0(\vec{r})e^{-j\omega t} = E_0 e^{j\phi} e^{-j\omega t} \rightarrow |\tilde{E}(\vec{r}, t)| = E_0$, quindi possiamo scrivere

$$I = \epsilon c_n \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 2E_0^2 dt = \frac{1}{4} \epsilon c_n 2E_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} E_0^2$$

e ricordando che $\sqrt{\epsilon_r} = n$ possiamo concludere che l'intensità media dell'onda è data da

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n E_0^2$$

Interferenza di 2 onde elettromagnetiche

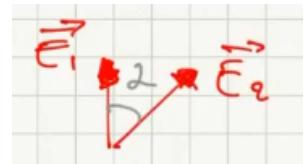
Iniziamo con due generiche onde elettromagnetiche che assumiamo oscillino alla stessa frequenza, ma assumiamo anche che queste abbiano differente polarizzazione (differenti direzioni di polarizzazione).

Quindi possiamo scrivere i campi elettrici di queste due onde come

$$\vec{E}_1 = E_{01} \cos(\phi_1 - \omega t) \vec{u}_1$$

$$\vec{E}_2 = E_{02} \cos(\phi_2 - \omega t) \vec{u}_2$$

Vogliamo valutare l'intensità del campo elettromagnetico totale, quindi dell'onda, in un punto qualsiasi dello spazio.



Sappiamo che l'intensità può essere scritta come

$$I_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n |\vec{E}_{tot}|^2$$

dove $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Quindi possiamo scrivere

$$|\vec{E}_{tot}|^2 = \vec{E}_{tot} \cdot \vec{E}_{tot} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2|\vec{E}_1||\vec{E}_2| \cos \alpha$$

Pertanto, l'intensità totale può essere scritta come

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + \epsilon_0 c_0 n E_{01} E_{02} \cos \alpha$$

che è la somma delle due intensità più un termine aggiuntivo che viene comunemente nominato INTERFERENCE TERM.

Notiamo che

$$\begin{cases} \text{se } \alpha = 0 \rightarrow \text{MAX INTERFERENCE} \\ \pi \\ \text{se } \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{MIN INTERFERENCE} \end{cases}$$

Se $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ possiamo lavorare con gli scalari e scrivere il campo elettrico totale in forma fasoriale come

$$\tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_1(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2(\vec{r}, t)$$

dove $\tilde{E}_1(\vec{r}, t) = E_{01} e^{j(\phi_1 - \omega_1 t)}$ e $\tilde{E}_2(\vec{r}, t) = E_{02} e^{j(\phi_2 - \omega_2 t)}$, dove consideriamo il caso più generale con frequenza e fasi differenti tra le due onde.

Adesso, possiamo scrivere l'intensità dell'onda come

$$I_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n |\tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t)|^2$$

quindi ora dobbiamo calcolare l'ampiezza di un numero complesso e sappiamo che il quadrato dell'ampiezza di un numero complesso può essere calcolato come il prodotto tra il numero complesso e il suo complesso coniugato

$$|\tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t)|^2 = \tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t) \cdot \tilde{E}_{TOT}^*(\vec{r}, t)$$

e siccome $\tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t) = \tilde{E}_1(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2(\vec{r}, t) \rightarrow |\tilde{E}_{TOT}(\vec{r}, t)|^2 = [\tilde{E}_1(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2(\vec{r}, t)] \cdot [\tilde{E}_1^*(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2^*(\vec{r}, t)]$ che ci permette di riscrivere l'intensità come

$$I_{tot} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \{[\tilde{E}_1(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2(\vec{r}, t)] \cdot [\tilde{E}_1^*(\vec{r}, t) + \tilde{E}_2^*(\vec{r}, t)]\}$$

Svolgendo i calcoli, quello che otteniamo è

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n [\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^* + \tilde{E}_1^* \tilde{E}_2]$$

Se osserviamo attentamente possiamo osservare che $\tilde{E}_1^* \tilde{E}_2 = (\tilde{E}_1 \tilde{E}_2)^*$, quindi

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \cdot 2 \Re\{\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^*\} == I_1 + I_2 + \epsilon_0 c_0 n \cdot \Re\{\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^*\}$$

dove $\tilde{E}_1 \tilde{E}_2^* = E_{01} e^{j(\phi_1 - \omega_1 t)} \cdot E_{02} e^{-j(\phi_2 - \omega_2 t)} = E_{01} E_{02} e^{j(\phi_1 - \phi_2 + \omega_2 t - \omega_1 t)} = E_{01} E_{02} e^{j(\delta + \Delta\omega t)}$, in cui abbiamo imposto $\delta = \phi_1 - \phi_2$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Dunque, l'intensità totale è

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + \epsilon_0 c_0 n E_{01} E_{02} \cos(\delta - \Delta\omega t)$$

dove $\epsilon_0 c_0 n E_{01} E_{02} = 2\sqrt{I_1 I_2}$, quindi la riscriviamo come

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta - \Delta\omega t)$$

che prende il nome INTERFERENZA DI 2 ONDE ELETTRONAGNETICHE SOVRAPPORTE.

Perché questa espressione è così interessante?

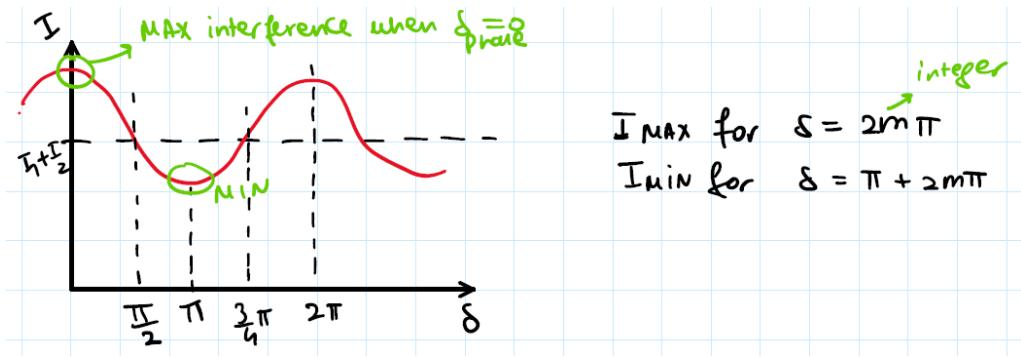
- Se $\omega_1 = \omega_2 \rightarrow \Delta\omega = 0 \rightarrow$ la dipendenza dal tempo sparisce.

NOTA: questo accade quando le sorgenti di luce sono esattamente le stesse e cioè quando abbiamo una sola sorgente perché altrimenti, a causa dei fattori di rumore, è impossibile avere due diverse sorgenti di luce che hanno esattamente la stessa frequenza ottica.

In questo caso abbiamo il termine interferenza che dipende esclusivamente dalla fase ottica delle due onde e pertanto possiamo variare l'intensità totale dell'onda cambiando la differenza di fase tra le due onde elettromagnetiche

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$$

Quindi avremo il valore medio dell'intensità che rimarrà costante e uguale a $I_1 + I_2$, e l'intensità oscillerà intorno a questo valore medio



Questo pattern che cambia in funzione della differenza di fase è conosciuto come INTERFERENCE PATTERN o INTERFEROGRAMMA e i suoi picchi sono detti INTERFERENCE FRINGES.

La VISIBILITÀ DEGLI INTERFERENCE FRINGES è definita dalla relazione

$$V = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$$

in cui

$$\begin{cases} I_{MAX} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, & \text{se } \cos \delta = 1 \\ I_{MIN} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, & \text{se } \cos \delta = -1 \end{cases}$$

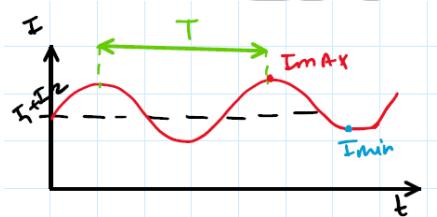
quindi la visibilità può essere scritta come

$$V = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Se l'intensità del primo beam I_1 e l'intensità del secondo beam I_2 presi individualmente, sono uguali, abbiamo la massima visibilità, cioè

$$\text{se } I_1 = I_2 = I_0 \rightarrow V = V_{MAX} = 1 \equiv 100\%$$

- Se $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \Delta\omega \neq 0$, ciò che avremo è che l'intensità totale oscillerà periodicamente nel tempo, cioè

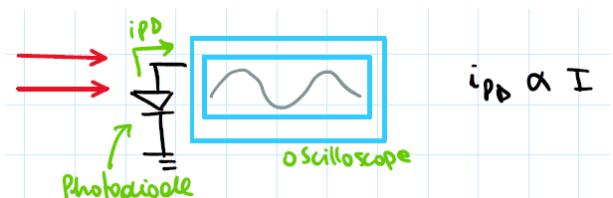


dove $T_{beat} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ è conosciuto come BEAT NOTE PERIOD e il suo reciproco $f_{beat} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ sarà ovviamente conosciuto come BEAT NOTE FREQUENCY.

Per misurare il beat note prendiamo le due onde di campo elettrico e illuminiamo un photo diode collegato ad un oscilloscopio. Il PD converte il segnale ottico in un segnale elettrico, cioè in corrente, la quale è proporzionale all'intensità del segnale ottico.

Ovviamente in questo caso non vedremo alcuna

interferenza perché per vedere interferenza dobbiamo osservare qualcosa che cambi la sua fase.



Soluzione PACCHETTO D'ONDA (WAVE-PACKET) di onde elettromagnetiche

Sappiamo che le equazioni di Maxwell e l'equazione d'onda soddisfano il principio di sovrapposizione degli effetti. È possibile osservare soluzioni dell'equazione d'onda anche per la distribuzione dell'onda piana armonica.

Consideriamo la prima soluzione

$$\tilde{E}_1(z, t) = \tilde{A}_1 e^{j(\beta_1 z - \omega_1 t)}$$

dove β_1 è la costante di propagazione, cioè $\beta = k = 2\pi/\lambda_n$.

Assumiamo che questa soluzione abbia una fase iniziale che possiamo integrare all'interno dell'ampiezza, quindi \tilde{A}_1 è un fasore che contiene la fase dell'oscillazione.

Poi consideriamo una seconda soluzione che ha una diversa ampiezza, una diversa frequenza, una diversa fase ed una diversa costante di propagazione

$$\tilde{E}_2(z, t) = \tilde{A}_2 e^{j(\beta_2 z - \omega_2 t)}$$

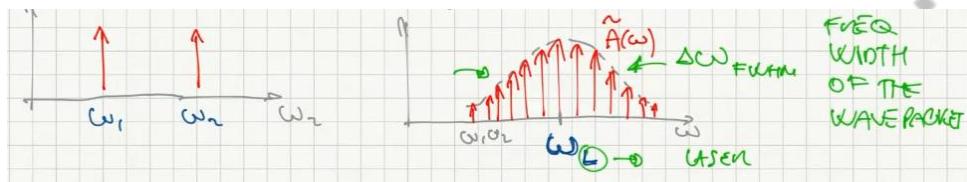
Allora per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\tilde{E}_{TOT} = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$$

è anch'essa una soluzione dell'equazione d'onda.

Possiamo immaginare che stiamo immaginando due armoniche che nel dominio della frequenza rappresentano due toni, cioè due delta di Dirac, quindi se aumentiamo il numero di armoniche che consideriamo possiamo creare una DISTRIBUZIONE DI ARMONICHE, la quale ha tipicamente un massimo che supponiamo essere una frequenza che indichiamo con ω_L (dove L sta per LASER).

Noi possiamo far lavorare il laser in CONTINUOUS MODE (CM) e in questo caso produrrà tutte le possibili frequenze o in PULSED OPERATION (PO) e in questo caso produrrà un vasto range di frequenze discrete (al limite infinito) centrate attorno a ω_L con una FULL-WIDTH HALF MAXIMUM (FWHM) $\Delta\omega_{FWHM}$ che rappresenta la FREQUENCY WIDTH OF THE WAVE PACKET.



Anche l'ampiezza di queste armoniche dipenderà dalla frequenza ottica di oscillazione dell'onda, cioè $\tilde{A} = \tilde{A}(\omega)$.

Possiamo scrivere l'onda piana armonica come la somma di tutte le armoniche (ognuna delle quali con una propria ampiezza, una propria fase, una propria costante di propagazione ed una propria frequenza), ma siccome abbiamo un numero infinito di armoniche, possiamo scrivere

$$\tilde{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega - \omega_L) e^{j(\beta z - \omega t)} d\omega$$

Questa espressione è molto simile ad una trasformata inversa di Fourier.

Possiamo esprimere la dipendenza della costante di propagazione in funzione della frequenza ottica e svilupparla in serie di Taylor arrestata al primo ordine

$$\beta(\omega) \approx \beta(\omega_L) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_L} (\omega - \omega_L)$$

Definendo $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{d\omega}$ e $\beta_L = \beta(\omega_L)$, possiamo riscrivere l'espressione del campo elettrico come

$$\tilde{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega - \omega_L) e^{j\{[\beta_L + \dot{\beta}(\omega - \omega_L)]z - \omega t\}} d\omega$$

Possiamo moltiplicare l'espressione per $1 = e^{-j\omega_L t} \cdot e^{+j\omega_L t}$

$$\tilde{E}(z, t) = \frac{e^{-j\omega_L t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega - \omega_L) e^{j\{[\beta_L + \dot{\beta}(\omega - \omega_L)]z - \omega t\}} \cdot e^{+j\omega_L t} d\omega$$

Possiamo osservare che $e^{j(\beta_L z)}$ non dipende dalla frequenza e pertanto può essere portato fuori dall'integrale e quindi possiamo riscrivere l'espressione come

$$\tilde{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} e^{j(\beta_L z - \omega_L t)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega - \omega_L) e^{j\{\dot{\beta}(\omega - \omega_L)z - (\omega - \omega_L)t\}} d\omega$$

dove $\Delta\omega = \omega - \omega_L$ (differenza tra la frequenza che sto considerando e la frequenza centrale della distribuzione)

$$\tilde{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} e^{j(\beta_L z - \omega_L t)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\Delta\omega) e^{j[\dot{\beta}z - t]\Delta\omega} d\omega$$

dove $d\omega = d\Delta\omega$, visto che abbiamo semplicemente shiftato la frequenza centrale.

Definendo $\tau = \dot{\beta}z - t$, possiamo concludere che l'espressione finale del campo elettrico è

$$\tilde{E}(z, t) = e^{j(\beta_L z - \omega_L t)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\Delta\omega) e^{j\Delta\omega\tau} d\Delta\omega$$

Questa espressione rappresenta la trasformata inversa di Fourier della distribuzione delle ampiezze $\tilde{A}(\Delta\omega)$ che prende il nome di SPETTRO DI AMPIEZZA DEL PACCHETTO D'ONDA

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\Delta\omega) e^{j\Delta\omega\tau} d\Delta\omega = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{A}(\Delta\omega)\}$$

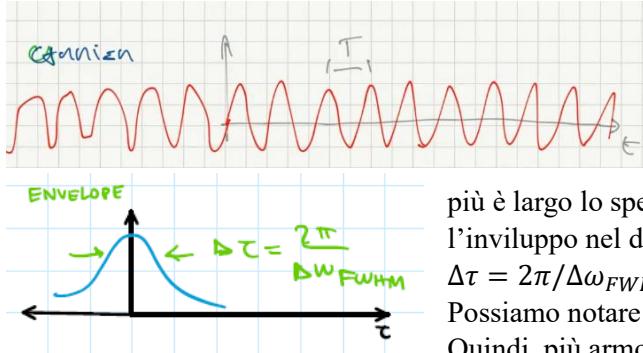
che è una funzione di τ , cioè $\tilde{G}^{-1}\{\tilde{A}(\Delta\omega)\} = G(\tau)$ che comporta che $\tilde{A}(\Delta\omega) = \tilde{G}\{G(\tau)\}$.

Quindi possiamo scrivere la SOLUZIONE PACCHETTO D'ONDA DELL'EQUAZIONE D'ONDA EM come

$$\tilde{E}(z, t) = e^{j(\beta_L z - \omega_L t)} \cdot G(\tau)$$

dove $G(\tau)$ è la FUNZIONE INVILUPPO e $e^{j(\beta_L z - \omega_L t)}$ è la PORTANTE DELL'ONDA EM che è un'onda piana alla frequenza ω_L .

Nel tempo, la portante è un'armonica che oscilla con frequenza $v_L = \frac{1}{T} = \frac{\omega_L}{2\pi}$



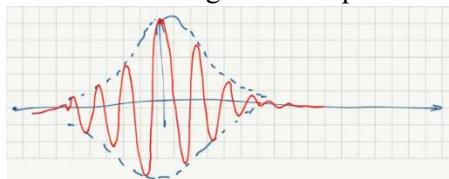
La funzione inviluppo $G(\tau)$ invece ha una forma che può variare nel tempo, in quanto dipende dallo spettro di ampiezza, ma una cosa che può essere valutata è la larghezza temporale e sappiamo che siccome la funzione inviluppo e lo spettro di ampiezza sono legati da una trasformata di Fourier,

più è largo lo spettro in ampiezza nel dominio della frequenza, più corto sarà l'inviluppo nel dominio del tempo cioè vale la relazione $\Delta\tau \cdot \Delta\omega_{FWHM} = 2\pi \rightarrow \Delta\tau = 2\pi/\Delta\omega_{FWHM}$.

Possiamo notare che l'inviluppo è una funzione impulsiva.

Quindi, più armoniche siamo in grado di far oscillare insieme, più l'impulso che siamo in grado di generare sarà corto. Questo è il motivo per cui al fine di avere un laser che produca impulsi molto corti, il materiale attivo del laser deve amplificare il più largo spettro di luce possibile.

L'onda elettromagnetica è il prodotto della portante per l'inviluppo pertanto la sua forma sarà



Possiamo notare che abbiamo due variabili del tempo, una è t e l'altra è τ , questo è possibile perché l'inviluppo è una funzione definita rispetto al TIMEFRAME τ che è

$$\tau = \dot{\beta}z - t$$

cioè è una versione scalata della variabile temporale t e quindi l'inviluppo è

una funzione dello spazio z e del tempo t cioè

$$G(\tau) = G(z, t)$$

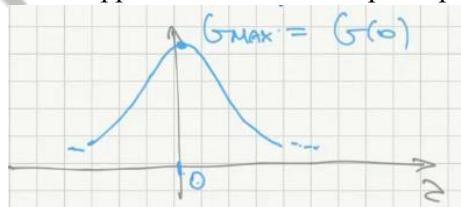
Possiamo poi definire la VELOCITÀ DI GRUPPO come

$$v_g = \frac{1}{\dot{\beta}}$$

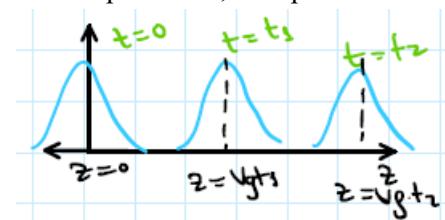
e quindi possiamo riscrivere il timeframe τ come

$$\tau = \frac{z}{v_g} - t$$

L'inviluppo $G(\tau)$ è una funzione impulsiva e supponiamo che abbia il picco per $\tau = 0$, cioè



Per $t = 0 \rightarrow \tau = z/v_g$ e il massimo lo abbiamo per $\tau = 0$, cioè per $z = 0$.



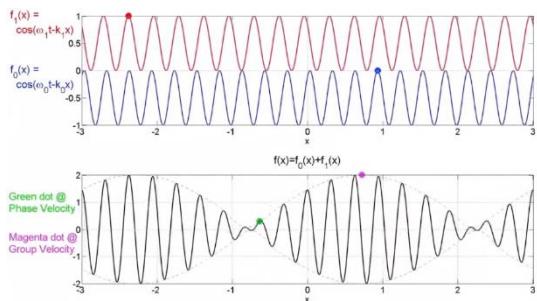
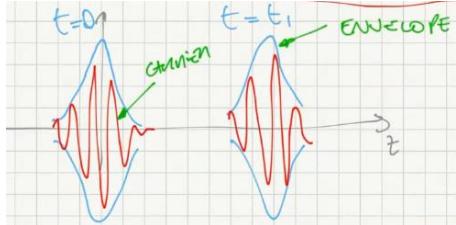
Per $t = t_1 \rightarrow \tau = \frac{z}{v_g} - t_1$ e quindi siccome il picco si ha per $\tau = 0$, lo avremo in $z_{peak}(t_1) = v_g t_1$, e lo stesso vale per $t = t_2$ e così via.

Quindi tra t_1 e t_2 il picco si è mosso di $\Delta z = z_{peak}(t_2) - z_{peak}(t_1) = v_g(t_2 - t_1) = v_g \Delta t$, cioè vale la relazione

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = v_g = \frac{1}{\dot{\beta}} = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}$$

che è la VELOCITÀ DI GRUPPO DELL'ONDA cioè la velocità con la quale la funzione inviluppo si muove nello spazio al variare del tempo.

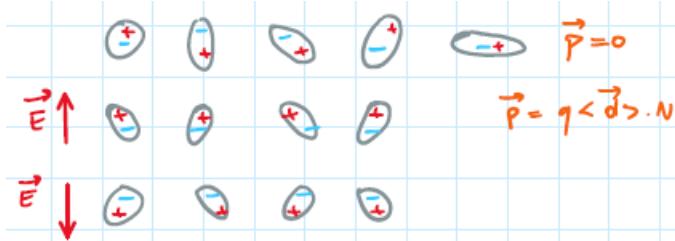
Quindi, il pacchetto d'onda è il prodotto della portante, la quale si muove con la velocità di fase $v_{phase} = \omega_L/\beta_L$ e la funzione inviluppo che si muove con velocità $v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$.



Le velocità con cui si muovono la portante e la funzione inviluppo possono essere diverse tra loro $v_{phase} \neq v_g$ e se sono diverse quello che succede è che vediamo il picco dell'inviluppo e i picchi del campo elettrico muoversi a velocità differenti.

La velocità di fase dipende solo sul valore assoluto della portante e sul vettore di propagazione, mentre la velocità di gruppo dipende sulla velocità alla quale la costante di propagazione cambia con la frequenza.

Propagazione di un'onda elettromagnetica all'interno di un mezzo lineare



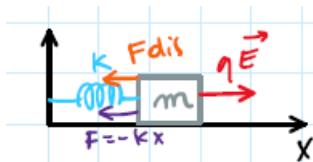
elettromagnetica che si propaga attraverso il mezzo, anche i dipoli oscillatori

Se il campo elettrico è diretto verso l'alto, tutti i dipoli si orientano con il polo positivo verso l'alto e il contrario succede se il campo elettrico è diretto verso il basso.

Ricordiamo che il vettore di polarizzazione è

$$\vec{p} = q\langle\vec{d}\rangle \cdot \vec{N}$$

Possiamo modellare ogni atomo/molecola del mezzo usando l'APPROXIMAZIONE DI LORENTZ, nella quale ogni atomo/molecola è schematizzata come un sistema elastico.



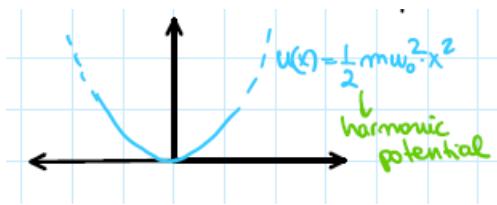
Ogni molecola di massa m è soggetta ad una forza esterna che è la forza elettromagnetica $F_{em} = q\vec{E}$ dovuta al campo che tende ad orientare i dipoli in una certa direzione e ad una restoring force (forza elastica) che tende a riportare i dipoli alla loro posizione originaria.

Prendendo x come la distanza tra centro della distribuzione di carica negativa e quello del nucleo di carica positiva, sappiamo che la forza elastica è proporzionale a x , cioè $F = -kx$, dove la costante di proporzionalità k può essere scritta come

$$k = m\omega_0^2$$

dove ω_0 è la FREQUENZA DI RISONANZA DEL DIPOLO.

Quindi il sistema è soggetto ad un'energia potenziale armonica $U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$



Pertanto, la forza elastica può essere scritta come

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = -m\omega_0^2x$$

Ogni volta che abbiamo un dipolo che oscilla questo irradierà energia verso l'ambiente esterno e quindi nel nostro modello dobbiamo

considerare anche una forza dissipativa F_{dis} che risulta essere proporzionale alla velocità alla quale il sistema si muove

$$F_{dis} = -\frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt}$$

Se scriviamo la seconda legge di Newton $F_{tot} = m \cdot a$, possiamo scrivere

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = q\tilde{E} - m\omega_0^2 x - \frac{m}{\tau} \frac{dx}{dt}$$

Ponendo $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, osservando se il campo elettrico è oscillatorio, anche la soluzione è oscillatoria, cioè che se il campo elettrico \tilde{E} è un fasore anche la soluzione è un fasore (se $E = \tilde{E} \rightarrow x = \tilde{x}$) e dividendo tutti i termini dell'equazione per la massa della molecola m , otteniamo

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q\tilde{E}}{m}$$

Sappiamo che $x(t) = \frac{1}{2}\{\tilde{x}_\omega e^{-j\omega t} + \text{complex conj}\}$, $\tilde{E} = \tilde{E}_\omega e^{j\omega t}$ e $E(t) = \frac{1}{2}\{\tilde{E}_\omega e^{-j\omega t} + \text{complex conj}\}$.

Consideriamo l'equazione in funzione del tempo

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{qE(t)}{m}$$

sostituendo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (-j\omega)(-j\omega)\tilde{x}_\omega e^{-j\omega t} + \left(-\frac{j\omega}{\tau}\right)\tilde{x}_\omega e^{-j\omega t} + \omega_0^2 \tilde{x}_\omega e^{-j\omega t} &= \frac{q\tilde{E}_\omega e^{j\omega t}}{m} \\ \left[-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{j\omega}{\tau}\right] \tilde{x}_\omega &= \frac{q\tilde{E}_\omega}{m} \end{aligned}$$

dalla quale ricaviamo

$$\tilde{x}_\omega = \frac{q\tilde{E}_\omega}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\frac{\omega}{\tau}}$$

nella quale poniamo $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$.

Prendendo $\omega \simeq \omega_0 \rightarrow \omega + \omega_0 \simeq 2\omega_0$ e quindi possiamo scrivere

$$\tilde{x}_\omega = \frac{q\tilde{E}_\omega}{m} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - j\frac{\omega}{\tau}}$$

che vorremmo riscrivere come

$$\tilde{x}_\omega = \frac{q\tilde{E}_\omega}{m} (a + jb)$$

Osservando che

$$\frac{1}{c - jd} \cdot \frac{c + jd}{c + jd} = \frac{c + jd}{c^2 + d^2} = \frac{c}{c^2 + d^2} + j \frac{d}{c^2 + d^2}$$

possiamo scrivere

$$\tilde{x}_\omega = \frac{q\tilde{E}_\omega}{m} \cdot \frac{\tau}{\omega_0} \left[\frac{2\tau(\omega_0 - \omega)}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1} + j \frac{1}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1} \right]$$

che è proprio nella forma desiderata.

Anche la polarizzazione è un numero complesso che può essere scritto come

$$\tilde{p}_\omega = qN(d) = qN\tilde{x}_\omega$$

se supponiamo che tutti i dipoli siano orientati nella stessa direzione.

Quindi il meccanismo che sostiene la propagazione dell'onda all'interno del mezzo oscilla con fase ed ampiezza proporzionali al displacement.

Possiamo osservare dall'equazione precedente che lo spostamento/displacement \tilde{x}_ω è proporzionale al campo elettrico \tilde{E}_ω e possiamo riscriverlo nel modo seguente

$$\tilde{x} = \frac{q\tau}{m\omega_0} \cdot (a + jb) \cdot \tilde{E}_\omega$$

Se combiniamo le ultime due equazioni otteniamo che

$$\tilde{p}_\omega = \frac{Nq^2\tau}{m\omega_0} (a + jb) \tilde{E}_\omega = \epsilon_0 \tilde{\chi}_\omega \tilde{E}_\omega$$

dalla quale ricaviamo che la SUCETTIVITÀ ELETTRICA DEL MEZZO è

$$\tilde{\chi}_\omega = \frac{Nq^2\tau}{m\epsilon_0\omega_0} (a + jb) = \chi' + j\chi''$$

dove $a = \frac{2\tau(\omega_0 - \omega)}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1}$ e $b = \frac{1}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1}$, quindi possiamo scrivere la dipendenza di $\tilde{\chi}_\omega$ da tutti i parametri del sistema e otteniamo

$$\begin{aligned}\chi' &= \frac{Nq^2\tau}{m\epsilon_0\omega_0} \cdot \frac{2\tau(\omega_0 - \omega)}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1} \\ \chi'' &= \frac{Nq^2\tau}{m\epsilon_0\omega_0} \cdot \frac{1}{4\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1}\end{aligned}$$

Queste due espressioni sono conosciute come le RELAZIONI DI KRAMERS-KRÖNIG PER LA SUSCETTIVITÀ ELETTRICA DEL MEZZO.

Perché siamo interessati a queste relazioni?

Siamo interessati a queste relazioni perché l'indice di rifrazione del mezzo è $n = \sqrt{\epsilon_r}$ e $\epsilon_r = 1 + \tilde{\chi}$, quindi siccome la suscettività è un numero complesso anche l'indice di rifrazione lo sarà e potrà essere espresso come

$$\tilde{n} = \sqrt{1 + \chi' + j\chi''}$$

Siccome solitamente $\chi' + j\chi''$ è piccolo, possiamo effettuare l'approssimazione in serie di Taylor e scrivere

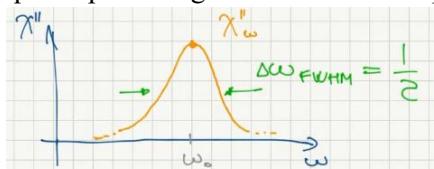
$$\tilde{n} = \sqrt{1 + \chi' + j\chi''} \approx 1 + \frac{\chi'}{2} + j\frac{\chi''}{2} = n' + jn''$$

dove $n' = \Re\{\tilde{n}\} = 1 + \frac{\chi'}{2}$ e $n'' = \Im\{\tilde{n}\} = \frac{\chi''}{2}$.

Siccome $\chi'' \propto \frac{1}{\omega_0 - \omega}$ diventa grande per $\omega \approx \omega_0$ e presenta la forma di una funzione di Lorentz. Possiamo quindi definire il FWHM

$$\Delta\omega_{FWHM} = \frac{1}{\tau}$$

quindi più è lunga la costante di tempo τ più χ''_ω che è definita la RISONANZA DEL MATERIALE diventa stretta.

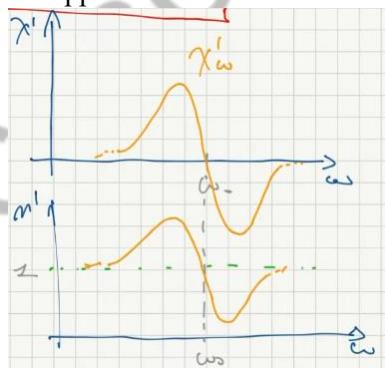


La costante di tempo τ è la costante di tempo con la quale l'energia è dissipata dal singolo dipolo.

Dall'altra parte $\chi' \propto \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2}$ presenta uno zero in $\omega = \omega_0$.

Il COMPORTAMENTO DISPERSIVO DELLA PARTE REALE

DELL'INDICE DI RIFRAZIONE può essere rappresentato come



Propagazione di un'onda piana armonica

Come sappiamo, possiamo scrivere la soluzione di un'equazione d'onda piana armonica come

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{j(kz - \omega t)}$$

La parte intera dell'onda può essere scritta come la somma del fasore e del complesso coniugato diviso 2, cioè come

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \{ \tilde{E} + \tilde{E}^* \}$$

La costante di propagazione è

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n$$

dato che lunghezza d'onda all'interno di un mezzo è $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$, ma l'indice di rifrazione è complesso e quindi scriveremo

$$\tilde{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \tilde{n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n' + j \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n''$$

quindi l'equazione d'onda piana diverrà

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{j\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n' + j\frac{2\pi}{\lambda_0} n''\right)z - \omega t\right]} = \tilde{E}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} n'' z} e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n' z - \omega t\right)}$$

Possiamo osservare che la parte reale dell'indice di rifrazione influenza soltanto il termine di fase spaziale.

Il termine n' viene definito COMPONENTE DI ASSORBIMENTO DELL'INDICE DI RIFRAZIONE, mentre il termine n'' viene definito COMPONENTE DI DISPERSIONE DELL'INDICE DI RIFRAZIONE.

Possiamo anche scrivere il campo elettrico come

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\frac{\alpha}{2} z} e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n' z - \omega t\right)}$$

dove $\alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} n''$ è definito COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO DEL MEZZO.

Intensità di un'onda elettromagnetica all'interno del mezzo

Sappiamo che l'intensità dell'onda può essere scritta come

$$I(z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n |\tilde{E}(z, t)|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \tilde{E}_0^2 e^{-\alpha z}$$

Se consideriamo l'INTENSITÀ INIZIALE, cioè l'intensità con cui l'onda entra nel mezzo

$$I_0 = I(z=0) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \tilde{E}_0^2$$

Possiamo riscrivere l'INTENSITÀ DELL'ONDA ALL'INTERNO DEL MEZZO come

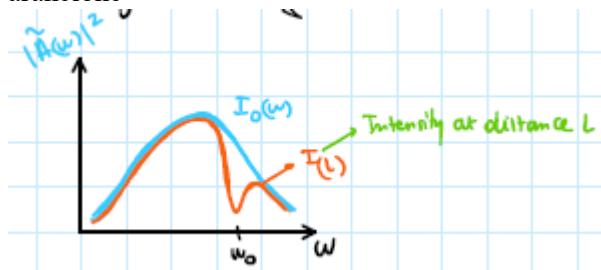
$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

che rappresenta la LEGGE DI ASSORBIMENTO DI LAMBERT-BEER.



Una cosa importante è che $\alpha_\omega = \frac{4\pi}{\lambda_0} n''_\omega$ dipende direttamente dalla forma in frequenza dell'indice di rifrazione e sappiamo che n'' ha la forma di una funzione di Lorentz, quindi non tutte le frequenze di luce saranno assorbite allo stesso modo. Le frequenze vicino alla frequenza di risonanza ω_0 saranno assorbite maggiormente.

Illuminando un materiale/mezzo con una sorgente di luce bianca, in uscita dal materiale/mezzo avremo lo spettro arancione



Usando una sorgente di luce aggiustabile siamo in grado di eseguire la SPETTROSCOPIA OTTICA del materiale/mezzo, cioè di vedere le linee di assorbimento del materiale/mezzo e quindi di valutare a che frequenza si trova la risonanza del materiale/mezzo.

Facendo il rapporto tra l'intensità in uscita e l'intensità iniziale otteniamo

$$\frac{I(L)}{I_0} = e^{-\alpha_\omega L}$$

poi applichiamo il logaritmo naturale ed otteniamo

$$\ln\left(\frac{I(L)}{I_0}\right) = -\alpha_\omega L$$

$$\alpha_\omega = -\frac{1}{L} \ln\left(\frac{I(L)}{I_0}\right)$$

dove $\frac{I(L)}{I_0}$ è la NORMALIZZAZIONE DELL'INTENSITÀ.



Questa è una spettroscopia ottica risolta in frequenza perché stiamo analizzando lo spettro della sorgente di luce e si differenzia dalla spettroscopia risolta nel tempo.

Effetto della parte reale dell'indice di rifrazione → dispersione del materiale

Consideriamo ora il pacchetto d'onda e trascuriamo per il momento l'assorbimento

$$\tilde{E}(z, t) = E_0 e^{j(\beta_L z - \omega_L t)} \cdot G\left(\frac{z}{v_g} - t\right)$$

Sappiamo che la velocità di gruppo del pacchetto d'onda è

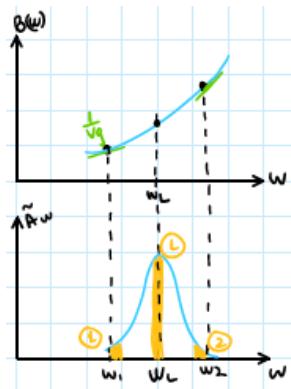
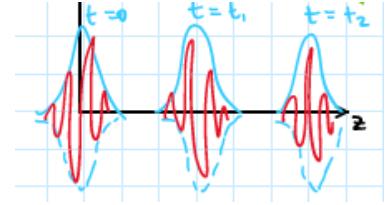
$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$$

dove $\beta(\omega) \simeq \beta_L + \frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_L} (\omega - \omega_L) + \dots$, cioè abbiamo assunto una dipendenza

lineare di β con ω .

Ma, dato che l'indice di rifrazione non è costante con la frequenza, cioè $n = n(\omega)$, l'espressione sopra della costante di propagazione non è valida e dobbiamo considerare anche il termine del secondo ordine

$$\beta(\omega) \simeq \beta_L + \frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_L} (\omega - \omega_L) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\Big|_{\omega_L} (\omega - \omega_L)^2$$



Questa curva rappresenta la CURVA DI DISPERSIONE DELLA COSTANTE DI PROPAGAZIONE.

Ora immaginiamo che il nostro pacchetto d'onda sia centrato in ω_L e abbia uno spettro di ampiezza del tipo

Se il comportamento di β può essere considerato dispersivo o non dispersivo, dipende anche dalla larghezza del pacchetto d'onda che viaggia nel mezzo.

Consideriamo altre due frequenze agli estremi della banda del pacchetto d'onda ω_1 e ω_2 . Possiamo facilmente vedere che le velocità di gruppo a queste due frequenze sono molto diverse tra loro e in particolare avremo

$$v_{g2} < v_{gL} < v_{g1}$$

Questa situazione è conosciuta come DISPERSIONE NORMALE ed è una situazione nella quale siamo lontani dalla frequenza di risonanza del mezzo e le frequenze più alte del pacchetto d'onda viaggiano con una velocità di gruppo più piccola rispetto alle frequenze più basse, cioè le basse frequenze viaggiano più velocemente delle alte.

Consideriamo ora il pacchetto d'onda come se fosse formato da pacchetti d'onda più piccoli (in giallo).

Man mano che il tempo passa e l'impulso si propaga lungo l'asse z, quello che succede è che le frequenze più alte vengono lasciate indietro e quindi l'impulso diventa più largo, perché avremo le alte frequenze nella coda e le basse frequenze in prossimità del picco dell'impulso.



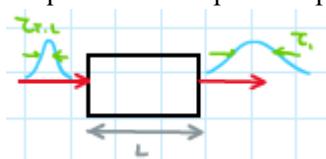
Quindi all'interno del mezzo l'impulso si propaga e avremo questo comportamento dispersivo che si presenta come un allargamento dell'impulso, ma avremo anche una attenuazione dovuta sia a questo allargamento che all'effetto di Lamber-Beer.

La durata dell'impulso limitata dalla trasformazione (transform limited) sarà

$$\tau_{TL} = 2\pi \frac{A}{\Delta\omega_{FWHM}}$$

dove A è una costante.

Per misurare la dispersione, ossia l'allargamento dell'impulso, possiamo misurare il tempo che ogni componente di frequenza dell'impulso impiega per percorrere il mezzo



$$\Delta t_1 = \frac{L}{v_{g1}}, \Delta t_2 = \frac{L}{v_{g2}}, \text{ quindi l'aumento della durata dell'impulso sarà}$$

$$\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 = L \left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}} \right)$$

Dato che $v_{g1} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_1}}$ e $v_{g2} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_2}}$, avremo

$$\tau = L \left(\frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_1} - \frac{d\beta}{d\omega}\Big|_{\omega_2} \right)$$

che rappresenta il cosiddetto RITARDO DI GRUPPO.

Confrontata con la frequenza portante ω_L , questa differenza in frequenza è molto piccola

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_L$$

quindi possiamo effettuare la seguente approssimazione

$$\tau \simeq L \cdot \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Big|_{\omega_L} \cdot \Delta\omega_{FWHM}$$

in cui $\omega_L \simeq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Big|_{\omega_L} = GVD$ ossia il GROUP VELOCITY DISTORSION e $\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Big|_{\omega_L} \cdot \Delta\omega_{FWHM} = GDD$ ossia il GROUP DELAY DISTORSION.

ESERCIZI DI OTTICA ONDULATORIA

Esercizio 1 – propagazione di onde elettromagnetiche e del pacchetto d'onda (laser pulse)

Dimostrare che la Group Velocity Dispersion (GVD) per un impulso che viaggia all'interno di un materiale è nulla se l'indice di rifrazione del materiale è costante sulla larghezza di banda spettrale dell'impulso.

Sappiamo che per un impulso, cioè per un pacchetto d'onda, la velocità di gruppo è definita come

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1}$$

E sappiamo che la distorsione della velocità di gruppo (GVD) è proporzionale alla derivata seconda di questa costante

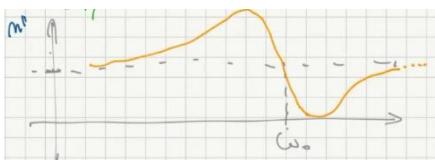
$$GVD \propto \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \quad [fs^2/mm]$$

in quanto abbiamo visto che

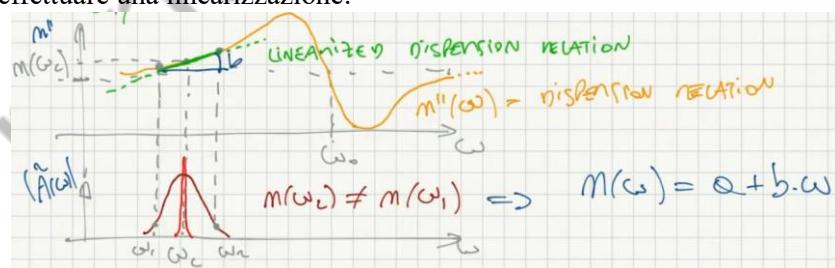
$$\tau \simeq \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Big|_{\omega_L} \cdot \Delta\omega_{FWHM} \cdot L = GVD \cdot \Delta\omega_{FWHM} \cdot L$$

Quello che vogliamo dimostrare è che se n è costante $GVD = 0$.

Se guardiamo alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione n''



abbiamo che l'indice di rifrazione n può essere considerato costante se la banda della sorgente di luce è piccola a confronto alla derivata prima della relazione di dispersione $n''(\omega)$, cioè se l'impulso $|\tilde{A}(\omega)|^2$ è stretto possiamo considerare l'indice di rifrazione costante e uguale a $n = n(\omega_L)$, se l'impulso è largo non possiamo considerare l'indice di rifrazione costante perché $n(\omega_L) \neq n(\omega_1) \neq n(\omega_2)$, mentre se l'impulso non è troppo largo possiamo effettuare una linearizzazione.



Se l'indice di rifrazione può essere linearizzato in questo modo

$$n(\omega) = a + b \cdot \omega$$

Quello che dobbiamo fare è verificare che $n = \text{costante se } GVD = 0$, quindi dobbiamo valutare la derivata seconda di β .

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n$$

dove $\lambda_0 v = c_0$ e quindi $\frac{1}{\lambda_0} = \frac{v}{c_0}$, pertanto possiamo riscrivere come

$$\beta = \frac{2\pi v}{c_0} n(\omega) = \frac{2\pi v}{c_0} (a + b\omega)$$

Al fine di trovare la velocità di gruppo e la dispersione dobbiamo calcolare

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{a}{c_0} \omega + \frac{b}{c_0} \omega^2 \right] = \frac{a}{c_0} + \frac{2b}{c_0} \omega = \frac{a + 2b\omega}{c_0}$$

Quindi la velocità di gruppo è

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{a + 2b\omega}$$

Dobbiamo fare alcune considerazioni

- Se $b > 0$, allora all'aumentare della frequenza ω , la velocità di gruppo diminuisce

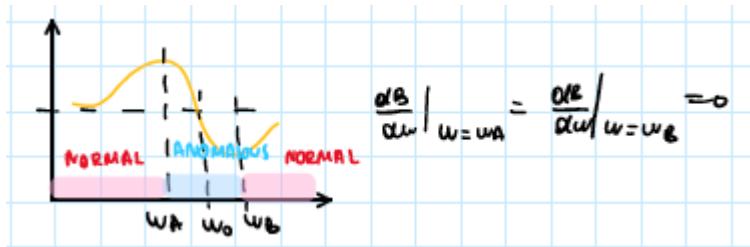
$$\text{se } b > 0 \rightarrow v_g(\omega_2) < v_g(\omega_1) \text{ se } \omega_2 > \omega_1$$

ciò significa che siamo in condizione di DISPERSIONE NORMALE.

- Se $b < 0$, allora all'aumentare della frequenza ω , la velocità di gruppo aumenta

$$\text{se } b < 0 \rightarrow v_g(\omega_2) > v_g(\omega_1) \text{ se } \omega_2 > \omega_1$$

ciò significa che siamo in condizione di DISPERSIONE ANOMALA.



Ora consideriamo la distorsione della velocità di gruppo

$$GVD = \frac{d^2\beta}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{a + 2b\omega}{c_0} \right) = \frac{2b}{c_0}$$

Allora vediamo che

$$\begin{aligned} \text{se } n = \text{costante} \rightarrow b = 0 \rightarrow GVD = 0 \rightarrow v_g \\ = \frac{c_0}{a} \text{ e } n = a \rightarrow v_g = \frac{c_0}{n} = c_n \end{aligned}$$

Esercizio 2 – propagazione di onde elettromagnetiche e del pacchetto d'onda (laser pulse)

Determinare la frequenza portante ω_L e la durata dell'impulso per i seguenti laser

Er: fiber $\rightarrow \lambda_0 = 1.55 \mu m$ e $\Delta\lambda = 100 nm$

Yb: fiber $\rightarrow \lambda_0 = 1040 nm$ e $\Delta\lambda = 40 nm$

Cr: ZnSe $\rightarrow \lambda_0 = 2.4 \mu m$ e $\Delta\lambda = 150 nm$

Ti: AlO₃ $\rightarrow \lambda_0 = 800 nm$ e $\Delta\lambda = 1800 nm$

I primi due sono vetro, mentre gli ultimi due sono cristalli.

Il primo è il materiale attivo che amplifica la radiazione all'interno del laser, mentre il secondo è la host matrix che è un materiale che non assorbe ne trasmette luce.

Vogliamo trovare la frequenza centrale $v_0 = ?$ e la durata dell'impulso $\tau_p = ?$, assumendo che all'output del laser tutti gli impulsi siano transform limited con una forma gaussiana.

Per un impulso gaussiano possiamo scrivere

$$\tau_p = \frac{0.44}{\Delta\nu_{BW}}$$

La frequenza centrale è data da

$$v_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$$

Quindi

$$v_0(Er) = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{1.55 \cdot 10^{-6} m} = 193 \cdot 10^{12} Hz = 193 THz$$

$$v_0(Yb) = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{1.04 \cdot 10^{-6} m} = 288 \cdot 10^{12} Hz = 288 THz$$

$$v_0(Cr) = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{2.04 \cdot 10^{-6} m} = 125 \cdot 10^{12} Hz = 125 THz$$

$$v_0(Ti) = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{0.8 \cdot 10^{-6} m} = 375 \cdot 10^{12} Hz = 375 THz$$

Per ricavare la durata dell'impulso dobbiamo applicare la formula scritta inizialmente e pertanto dobbiamo ricavare $\Delta\nu_{BW}$ a partire da $\Delta\lambda_{BW}$

$$\Delta\nu_0 = \Delta \left(\frac{c_0}{\lambda_0} \right) = c_0 \Delta \left(\frac{1}{\lambda_0} \right) = -c_0 \frac{1}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$$

Se prendiamo due frequenze

$$\nu_2 - \nu_1 = c_0 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = -c_0 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = -c_0 \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \text{ se } \lambda_1 \simeq \lambda_2 = \lambda_0$$

Dobbiamo quindi usare la seguente formula (valore assoluto)

$$\Delta\nu = \frac{c_0}{\lambda_0^2} \cdot \Delta\lambda$$

E troviamo

$$\Delta\nu(Er) = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{(1.55 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} \cdot 100 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 12.5 \text{ THz}$$

$$\Delta\nu(Yb) = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{(1.04 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} \cdot 40 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 11 \text{ THz}$$

$$\Delta\nu(Cr) = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{(2.04 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} \cdot 150 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 7.8 \text{ THz}$$

$$\Delta\nu(Ti) = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{(0.8 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} \cdot 1800 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 84 \text{ THz}$$

Vogliamo gli impulsi con la durata minima

$$\tau_p(Er) = \frac{0.44}{12.5 \text{ THz}} = 35 \text{ fs}$$

$$\tau_p(Yb) = \frac{0.44}{11 \text{ THz}} = 40 \text{ fs}$$

$$\tau_p(Cr) = \frac{0.44}{7.8 \text{ THz}} = 56 \text{ fs}$$

$$\tau_p(Ti) = \frac{0.44}{84 \text{ THz}} = 5.2 \text{ ps}$$

Esercizio 3 – propagazione di onde elettromagnetiche e del pacchetto d’onda (laser pulse)

Per gli impulsi dell’esercizio precedente, calcolare la durata dopo la propagazione attraverso una lente di spessore $L = 3 \text{ mm}$ fatta di uno di questi materiali riportati in tabella:

	Wavelength (nm)			
	800	1040	1550	2400
fused silica	36 fs ² /mm	18 fs ² /mm	-27 fs ² /mm	-212 fs ² /mm
BK7	44 fs ² /mm	24 fs ² /mm	-24 fs ² /mm	-211 fs ² /mm
CaF ₂	27 fs ² /mm	18 fs ² /mm	-0.2 fs ² /mm	-47 fs ² /mm
KBr	111 fs ² /mm	81 fs ² /mm	51 fs ² /mm	28 fs ² /mm

Se un materiale assorbe una certa lunghezza d’onda significa che ci sarà anche un sacco di dispersione all’interno del materiale perché la curva di dispersione dell’indice di rifrazione è dipendente dalla frequenza.

Questi numeri possono essere recuperati dalle FORMULE DI SELLMEIER che permettono di scrivere l’indice di rifrazione in un’equazione di funzione della lunghezza d’onda.

Ricordiamo che la dispersione della velocità di gruppo è

$$GVD = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$$

mentre la durata dell’impulso in funzione dello spessore del materiale è

$$\tau_p(L) = GVD \cdot \Delta\omega_{BW}$$

dove $\Delta\omega_{BW} = 2\pi\Delta\nu_{BW}$.

Nel caso di una lente di fused silica

$$\tau_p(Ti)_L = 36 \frac{\text{fs}^2}{\text{mm}} \cdot 3 \text{ mm} \cdot 2\pi \cdot 84 \text{ THz} = 57 \text{ fs}$$

Nel caso di una lente di calcium floride

$$\tau_p(Ti)_L = 27 \frac{\text{fs}^2}{\text{mm}} \cdot 3 \text{ mm} \cdot 2\pi \cdot 84 \text{ THz} = 42 \text{ fs} \rightarrow \text{risultato migliore}$$

Consideriamo nuovamente una lente di fused silica

$$\tau_p(Er)_L = -27 \frac{\text{fs}^2}{\text{mm}} \cdot 3 \text{ mm} \cdot 2\pi \cdot 12.5 \text{ THz} = -6 \text{ fs}$$

Cosa significa?

Sappiamo che

$$\tau_p = \tau_{TL} + |\tau_{disp}|$$

Se la durata dell'impulso Er era $\tau_{p,disp} = 50 \text{ fs}$, allora dopo un ritardo di gruppo di -6 fs , l'impulso diventa

$$\tau_p = 50 \text{ fs} - 6 \text{ fs} = 44 \text{ fs}$$

Chirped pulse = impulse non transform limited (con dispersion)

A volte aggiungere dispersion è utile perché ci permette di ridurre il picco di intensità dell'impulso.

L'intensità di picco di un laser di Ti sapphire di 500 mW è

$$I_{peak} = \frac{\text{pulse energy}}{\tau_p} = \frac{1 \mu\text{J}}{5 \text{ fs}} = \frac{10^{-6} \text{ J}}{5 \cdot 10^5 \text{ s}} = \frac{1}{5} \cdot 10^9 = 200 \text{ MW}$$

Questa potenza può distruggere un elemento ottico, quindi allunghiamo l'impulso al fine di ridurre l'intensità di picco.

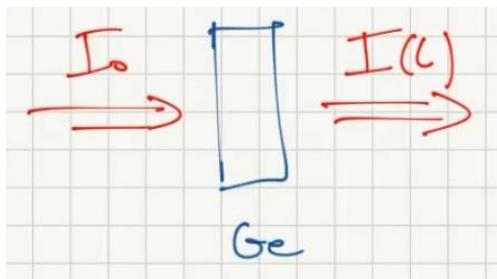
Esercizio 4 – propagazione di onde elettromagnetiche e del pacchetto d'onda (laser pulse)

Calcolare l'intensità media di un laser beam di Er:fiber di intensità iniziale I_0 dopo aver viaggiato attraverso una finestra ottica realizzata mediante un sottile piano ($L = 1 \text{ mm}$) di cristallo di germanio.

La tabella sotto riporta l'indice di rifrazione n seguito dal coefficiente di assorbimento α per vari materiali a diverse lunghezze d'onda.

	Wavelength (nm)			
	800	1040	1550	2400
Silicon (Crystal)	3.9 / 17184 cm ⁻¹	3.6 / 0 cm ⁻¹	3.48 / 0 cm ⁻¹	3.44 / 0 cm ⁻¹
Germanium (Crystal)	4.1 / 24955 cm ⁻¹	4.35 / 4246 cm ⁻¹	4.2 / 21.9 cm ⁻¹	4 / 0 cm ⁻¹

Da questo momento in poi quando ci riferiamo all'indice di rifrazione ci riferiamo sempre alla parte reale del coefficiente di rifrazione, mentre per far riferimento alla parte immaginaria faremo riferimento al coefficiente di assorbimento.



Dove $L = 1 \text{ mm}$ e $\alpha = 21.9 \text{ cm}^{-1}$.

$$I(L) = I_0 e^{-\alpha L} = I_0 e^{-21.9 \text{ cm}^{-1} \cdot 0.1 \text{ cm}} = 0.11 \cdot I_0$$

Quindi

$$\frac{I(L)}{I_0} = 11\% = T'$$

che rappresenta la TRASMISSIONE ATTRAVERSO IL MATERIALE.

Abbiamo anche un altro valore di trasmissione dovuto alla riflessione della prima interfaccia.

La riflettività dell'interfaccia di ingresso della finestra è

$$R_{in} = \left(\frac{n_0 - n_{ge}}{n_0 + n_{ge}} \right)^2 = \left(\frac{1 - 4.2}{1 + 4.2} \right)^2 = 0.38 = 38\%$$

dove $n_{ge}(@1550 \text{ nm}) = 4.2$.

Possiamo anche considerare la riflessione all'interfaccia di uscita della finestra

$$R_{out} = \left(\frac{n_0 - n_{ge}}{n_0 + n_{ge}} \right)^2 = 38\%$$

La trasmissione dell'interfaccia di ingresso è

$$T_{in} = 1 - R_{in} = 1 - 38\% = 62\%$$

Mentre la trasmissione dell'interfaccia di uscita è sempre

$$T_{out} = 1 - R_{out} = 62\%$$

Quindi abbiamo che l'intensità dell'impulso è

$$I(L) = I_0 e^{-\alpha L} \cdot T_{in} \cdot T_{out} = I_0 \cdot 0.11 \cdot 0.62 \cdot 0.62 = I_0 \cdot 0.043 = 4.3\% I_0$$

NOTA: è possibile aggiungere un coating alla superficie della finestra per aumentare la trasmissività e ridurre la riflessività.

INTERFEROMETRIA OTTICA

Introduzione

L'INTERFEROMETRIA è una branca dell'ottica che studia il fenomeno dell'interferenza e lo sfrutta per eseguire misure molto accurate.

Quali tipi di misure sfruttano l'interferenza?

Quelle che ci permettono ad esempio di calcolare la lunghezza d'onda della luce emessa da un laser, la sua velocità attraverso un mezzo, l'indice di rifrazione, o anche la posizione di un oggetto che si trova anche a notevole distanza.

Nel fenomeno dell'interferenza, abbiamo due campi elettrici \tilde{E}_1 e \tilde{E}_2 e l'interferenza totale può essere scritta come

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

dove δ è la differenza spaziale di fase.

Per avere interferenza devono essere soddisfatte alcune condizioni.

CONDIZIONI DI INTERFERENZA

1. I due campi devono sovrapporsi
2. Le polarizzazioni dei due campi devono essere parallele $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$
3. Le due frequenze devono essere identiche $\omega_1 = \omega_2$
$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \Re\{\tilde{E}_{01} e^{-j\omega_1 t}\}$$
$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \Re\{\tilde{E}_{02} e^{-j\omega_2 t}\}$$
4. I due campi elettrici $E_1(t)$ e $E_2(t)$ devono avere un certo grado di coerenza, cioè i due campi devono mantenere nel tempo una relazione di fase fissa.

Le prime due condizioni sono molto facili da soddisfare perché è sufficiente illuminare lo stesso spot con i due laser e mantenere fissata la polarizzazione parallela, ad esempio attraverso l'uso dei polarizzatori.

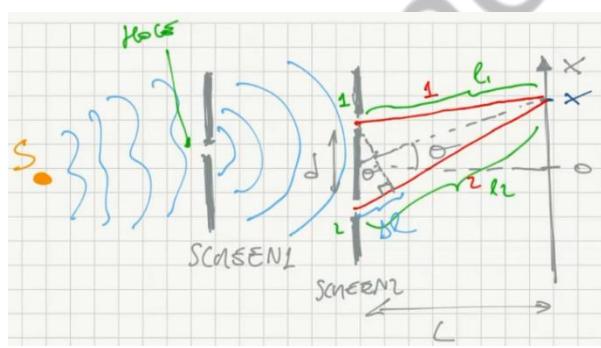
Le ultime due condizioni invece non sono facili da soddisfare e in particolare sono impossibili da soddisfare usando due sorgenti di luce differenti, ma occorre necessariamente utilizzare la stessa sorgente di luce per soddisfarle.

Dovendo utilizzare una sola sorgente luminosa, abbiamo bisogno di dividere in qualche modo il campo elettrico emesso dalla sorgente in due campi elettrici al fine di avere interferenza.

Possiamo dividere il campo elettrico della sorgente in 2 modi

1. DIVISIONE DEL FRONTE D'ONDA (interferometro di Young)
2. DIVISIONE DELL'AMPIEZZA (interferometro di Michelson)

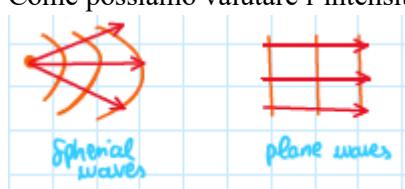
Interferometro di Young



La sorgente di luce S emetterà dei fronti d'onda che possono essere campionati utilizzando una fenditura (hole) in uno schermo. Se la fenditura è molto piccola, la luce in uscita da essa si comporterà come una sorgente puntiforme ed emetterà fronti d'onda sferici. Successivamente possiamo di nuovo campionare questi fronti d'onda sferici con due fenditure su un secondo schermo separate da una distanza d . La luce in uscita da queste due fenditure si comporterà nuovamente come due sorgenti puntiforme che pertanto emettono fronti d'onda sferici. I fronti d'onda in uscita dalle due fenditure interverranno tra loro creando un interference pattern che può essere osservato posizionando un terzo schermo (questa volta senza fenditure) ad una distanza L dal secondo.

creando un interference pattern che può essere osservato posizionando un terzo schermo (questa volta senza fenditure) ad una distanza L dal secondo.

Come possiamo valutare l'intensità del pattern che vedremo allo schermo 3?



Prendiamo l'origine dello schermo nel punto medio tra i due fori e consideriamo un punto x sullo schermo. A questo punto consideriamo i due raggi di luce (un raggio di luce è la direzione in cui fluisce l'energia dell'onda elettromagnetica e questa direzione è sempre ortogonale al fronte d'onda) dalle sorgenti, cioè le due fenditure, al punto x considerato.

Per calcolare l'intensità dell'interference pattern dobbiamo innanzitutto calcolare la differenza di fase in funzione della posizione del punto x

$$\delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l_1 - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l$$

in cui

$$\Delta l = d \cdot \sin \theta$$

Quindi abbiamo

$$\delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin \theta$$

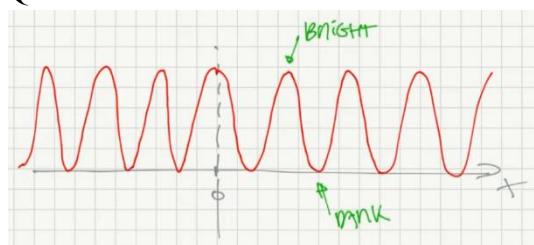
dove $\sin \theta \simeq \tan \theta = \frac{x}{L}$ e quindi otteniamo

$$\delta(x) \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{L} \cdot x$$

Se per esempio le intensità emesse dalle due fenditure sono le stesse $I_1 = I_2$, possiamo scrivere l'intensità dell'interference pattern come

$$I = 2I_0[1 + \cos \delta] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{L} \cdot x \right) \right]$$

Quindi allo schermo vedremo un massimo di intensità nell'origine e poi l'alternarsi di dark fringes e bright fringes



Le bright fringes appaiono quando

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{L} \cdot x = 2m\pi$$

cioè per

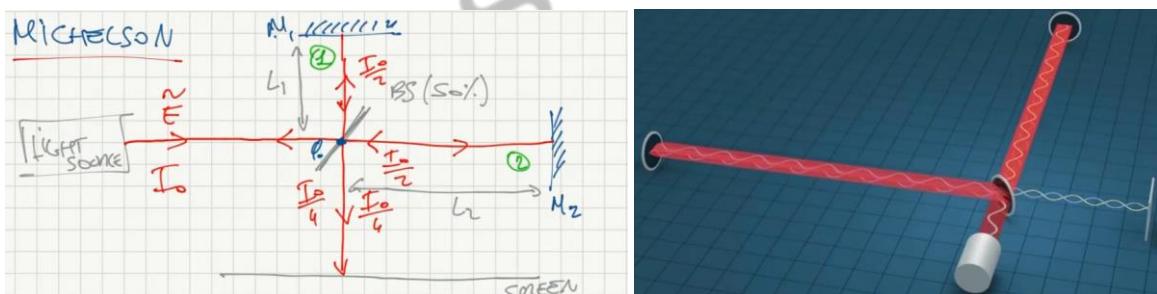
$$x = m \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d}$$

in cui m è un numero intero che rappresenta l'ORDINE DI

INTERFERENZA.

Dove abbiamo bright fringes significa che \tilde{E}_1 ed \tilde{E}_2 hanno la stessa fase, mentre dove abbiamo le dark fringes significa che i due campi hanno fasi opposte.

Interferometro di Michelson



Consideriamo una sorgente di luce e consideriamo per il momento che la sorgente emetta onde elettromagnetiche piane di intensità I_0 , con un campo elettrico associato \tilde{E} .

L'interferometro utilizza un BEAM SPLITTER, cioè un elemento ottico (specchio semiriflettente) posto a 45° lungo il raggio di luce che è in grado di riflettere circa il 50% dell'intensità dell'onda, lasciando passare metà dell'intensità in due direzioni, lungo la stessa direzione dell'onda incidente stessa e lungo la direzione perpendicolare ad essa.

A questo punto mettiamo due specchi M_1 e M_2 perpendicolari alle direzioni dei due beam che abbiamo precedentemente generato con il beam splitter. Questi due specchi sono perfettamente riflettenti e pertanto riflettono i due beam che colpiranno nuovamente il beam splitter. Parte dell'intensità verrà riflessa in direzione della sorgente di luce, mentre una parte verrà riflessa su uno schermo sul quale si osserverà l'interference pattern.

Immaginiamo che le distanze tra il beam splitter e gli specchi M_1 e M_2 siano rispettivamente L_1 e L_2 , allora la fase accumulata dal beam 1 dal punto di separazione al punto di ricombinazione sarà

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2L_1$$

dove ϕ_0 è la fase del beam iniziale incidente, mentre la fase accumulata dal beam 2 sarà

$$\phi_2 = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2L_2$$

Quindi la differenza di fase tra i due beams sarà

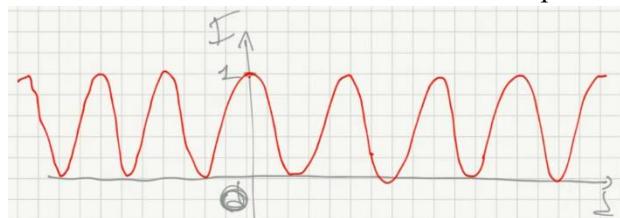
$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot (L_2 - L_1) = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d$$

dove $d = L_2 - L_1$.

Se i due specchi sono fissati, $d = L_2 - L_1$, allo schermo l'intensità dell'interference pattern sarà uniforme

$$I_{screen} = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2 \sqrt{\frac{I_0}{4} \cdot \frac{I_0}{4}} \cdot \cos \delta = \frac{I_0}{2} \cdot [1 + \cos \delta] = \frac{I_0}{2} \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \right) \right]$$

Ma se cambiamo la distanza dei due schermi possiamo variare l'intensità dell'interference pattern



E avremo i massimi a

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d = 2m\pi$$

Cioè a

$$d = m \frac{\lambda}{2}$$

Cioè avremo i massimi a multipli interi di $\lambda/2$.

Quindi quando i due schermi sono posizionati esattamente alla stessa distanza $L_2 = L_1 \rightarrow d = 0$ e abbiamo il massimo nell'origine infatti. Poi, appena cambiamo leggermente la posizione relativa dei due specchi, l'intensità cambierà rapidamente ed avremo il primo zero a

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d = \pi + 2m\pi$$

Cioè per

$$d = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

Cioè avremo gli zeri a multipli interi di $\lambda/4$.

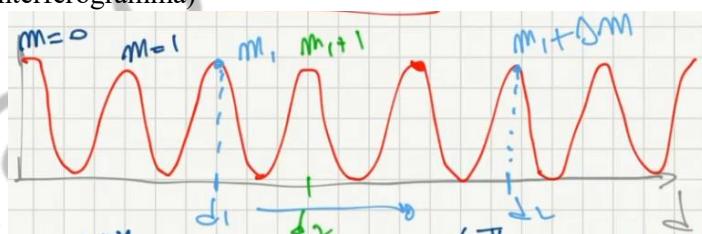
Quindi questo interferometro è molto sensibile alla posizione dei due specchi ed è in grado di misurare variazioni di frazioni della lunghezza d'onda.

A seconda della posizione dei due specchi i due beams possono ricombinarsi in fase o in opposizione di fase: se sono in fase abbiamo un massimo dell'intensità dell'interference pattern, mentre se si ricombinano in opposizione di fase abbiamo un minimo.

Applicazioni dell'interferometro di Michelson

Applicazione 1: calcolo della lunghezza d'onda della sorgente luminosa

Dato l'interference pattern (interferogramma)



Abbiamo che la differenza di fase è

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d$$

Quindi avremo bright fringes per

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d = 2m\pi \rightarrow d = m \frac{\lambda}{2}$$

Ma possiamo anche scrivere che

$$\lambda = \frac{2d}{m}$$

Quindi, se possiamo valutare l'ordine di interferenza m , cioè se possiamo contare il numero di bright fringes cambiando la distanza degli specchi d , siamo in grado di misurare la lunghezza d'onda.

Quello che si fa è iniziare da una distanza d_1 che corrisponde ad un ordine di interferenza m_1 e poi si cambia l'ordine di interferenza di una quantità Δm

$$d_1 \leftrightarrow m_1 \text{ (starting point)}$$

$$d_2 \leftrightarrow m_2 = m_1 + \Delta m$$

Quindi abbiamo spostato i due specchi di $\Delta d = d_2 - d_1$ e la lunghezza d'onda può essere calcolata come

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta d}{\Delta m}$$

Soltamente, evitiamo di spostarci di un solo ordine di interferenza, cioè

$$d_2 \leftrightarrow m_2 = m_1 + 1$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta d}{1} = 2 \cdot \Delta d$$

Perché in questo caso avremo un grande errore nella misura della lunghezza d'onda.

Per valutare l'errore consideriamo il valore misurato Δd come la somma del valore reale $\bar{\Delta d}$ e dell'errore ϵ_d

$$\Delta d = \bar{\Delta d} + \epsilon_d$$

E la stessa cosa per la lunghezza d'onda

$$\lambda = \bar{\lambda} + \epsilon_\lambda = \frac{2 \cdot \bar{\Delta d}}{\Delta m} + \frac{2 \cdot \epsilon_d}{\Delta m}$$

Quindi l'errore nella misura della lunghezza d'onda è

$$\epsilon_\lambda = \frac{2 \cdot \epsilon_d}{\Delta m}$$

E vediamo che più piccola è la variazione degli ordini di interferenza Δm che consideriamo, maggiore è l'errore nella misura finale della lunghezza d'onda.

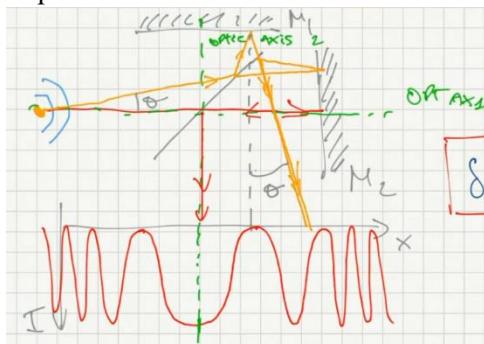
Se immaginiamo di trovarci nel vuoto sappiamo che vale la relazione $\lambda_0 = v = c_0$. Quindi, se misuriamo con grande accuratezza la frequenza del beam v , utilizzando l'interferometro di Michelson, possiamo effettuare una misura molto accurata della velocità della luce.

REMARK (DIMOSTRAZIONE: PEDROTTI PAG 225)

Se la sorgente è una sorgente reale con fronti d'onda che presentano una certa curvatura, cioè ad esempio sono fronti d'onda sferici.

Possiamo considerare due beam, il primo emesso lungo un asse ottico, mentre il secondo che non viene emesso parallelamente all'asse ottico, ma forma un angolo θ con questo.

Si può dimostrare che il beam finale che colpisce lo schermo presenterà lo stesso angolo θ rispetto all'asse ottico

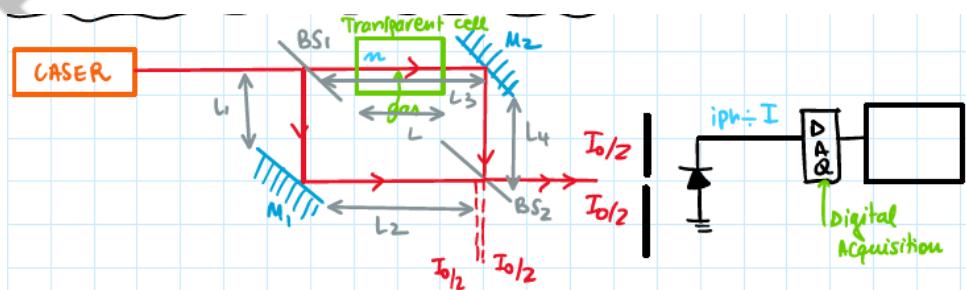


Troviamo che cambiando l'angolo θ cambiamo la fase e la differenza di fase può essere definita come

$$\delta(d, \theta) = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \cos \theta$$

Quindi cambiando l'angolo, osserviamo una variazione di fase e quindi anche l'alternarsi di spatial phase fringes.

Applicazione 2: configurazione MACH-ZENDER x misurazione della lunghezza di una cella



Possiamo mettere una cella trasparente, riempita con un certo gas, della quale pertanto conosciamo l'indice di rifrazione n , ma non conosciamo la lunghezza.

Se per il momento non consideriamo nessuna cella all'interno dell'interferometro, abbiamo che il DISPLACEMENT o UNBALANCE è

$$d = (L_3 + L_4) - (L_1 + L_2) = 0$$

Se però mettiamo la cella all'interno abbiamo che $d \rightarrow d'$

$$d' = d - L + n \cdot L = d + (n - 1)L = (n - 1)L$$

dove come abbiamo calcolato $d = 0$ e L è la lunghezza ottica della cella.

Quindi la differenza di fase che misureremo in presenza della cella sarà

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d' = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n - 1)L$$

ATT siccome il beam va solo in una direzione avremo 2π e non 4π

Misurando la differenza di fase possiamo ricavare la lunghezza della cella

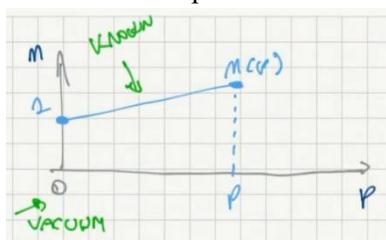
$$L = \frac{\delta}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{n - 1}$$

REMARK 1

Un problema è che quando mettiamo la cella all'interno del sistema il sistema si adatta molto velocemente (alla velocità della luce) e quindi il photodiode non ha tempo per misurare la variazione di fase.

Quindi quello che facciamo per risolvere questo problema è inserire una cella vuota ($n = 1$) in cui andiamo ad iniettare il gas molto lentamente. Siccome l'indice di rifrazione n dipende dalla pressione, per misurare d , iniziamo con $n(p = 0) = 1$ e poi aumentiamo gradualmente la pressione fino ad un valore di pressione desiderato $\bar{p}: 0 \rightarrow \bar{p}$

Ovviamente il modo in cui andiamo ad aumentare la pressione è noto, cioè è nota la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla pressione

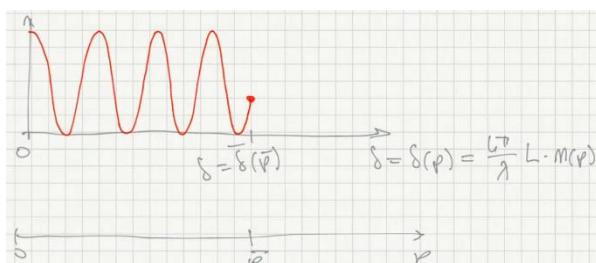


Quindi per misurare δ , iniziamo con $n(p = 0) = 1$ e poi aumentiamo $p: 0 \rightarrow \bar{p}$ (al valore desiderato). Quindi avremo

$$n: n(p = 0) = 1 \rightarrow n(p = \bar{p}) = \bar{n}$$

Pertanto la differenza di fase dipenderà anch'essa dalla pressione

$$\delta = \delta(p) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L \cdot n(p)$$

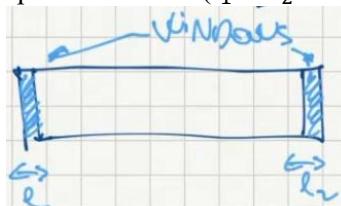


Quindi cambiando la pressione da 0 al valore desiderato, vediamo che l'interferogramma oscillerà finché non raggiunge un determinato valore quando $\delta = \bar{\delta}(\bar{p})$. Pertanto aumentiamo la pressione, aumenta l'indice di rifrazione, aumenta la differenza di fase...

ATT: il problema potrebbe continuare a presentarsi se aumentiamo la pressione del gas all'interno della cella troppo velocemente rispetto al DAQ (digital acquisition)

REMARK 2

Quando poniamo la cella vuota, comunque modifichiamo la differenza di fase perché la cella ha due finestre ottiche di spessore finito l ($l_1 = l_2 = l$)



quindi stiamo aggiungendo un ritardo (la differenza di fase iniziale non sarà zero)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n_{window} \cdot 2l$$

Per alcune misure in cui vogliamo un interferometro perfettamente bilanciato questa differenza di fase aggiuntiva potrebbe essere un problema e per compensare questo valore aggiuntivo viene aggiunta una seconda cella vuota identica alla prima chiamata REFERENCE CELL. Quindi, la differenza di fase iniziale sarà

$$\delta_0 = \delta_{cell} - \delta_{ref.cell} = 0$$

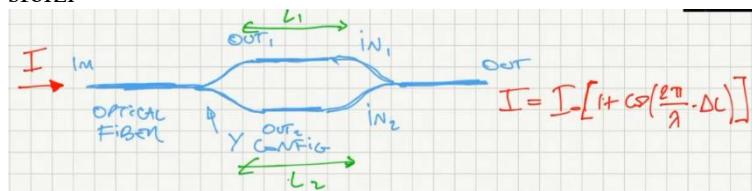
REMARK 3

Una volta che la lunghezza della cella L è nota con sufficiente precisione, è possibile misurare un indice di rifrazione n sconosciuto riempiendo la cella con un gaso differente

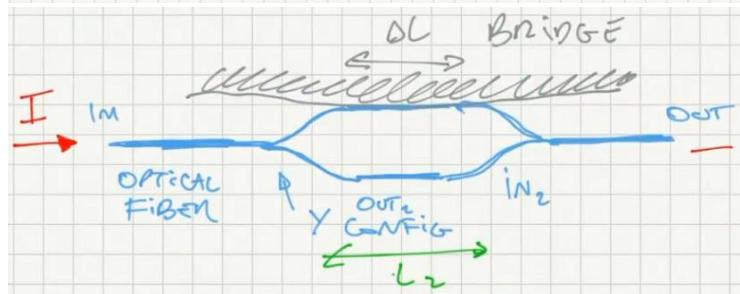
$$n = 1 + \delta \frac{\lambda}{2\pi L}$$

REMARK 4: ALL FIBER MACH-ZENDER INTERFEROMETER

Questo tipo di interferometro può essere realizzato anche utilizzando solo fibra ottica per misurare spostamenti e sforzi

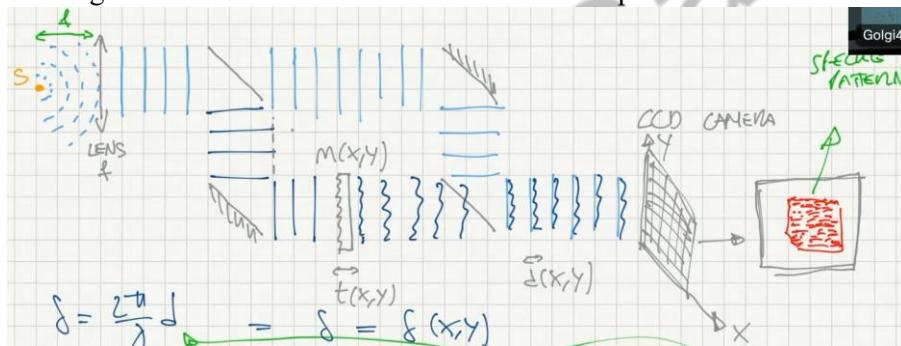


Se ad esempio vogliamo misurare gli sforzi che agiscono su un ponte, attacchiamo questo dispositivo al ponte



Applicazione 3: CONFIGURAZIONE DI TWYNMANN-GREEN

La configurazione è identica a quella di Mach-Zender, con l'unica differenza che viene utilizzata una sorgente luminosa puntiforme che emette fronti d'onda sferici e viene posta una LENTE FOCALE ad una distanza uguale alla lunghezza focale f dalla sorgente di luce in modo da avere fronti d'onda piani in uscita dalla lente.



Se la differenza di fase è zero, i fronti di fase si sovrappongono in uscita e avremo una intensità uniforme sullo schermo, tipicamente uguale al massimo.

Se muoviamo uno degli specchi o uno dei beam splitter, generiamo una differenza di fase tra i fronti in uscita

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d$$

Cosa succede se mettiamo un elemento ottico esteso all'interno di questo interferometro?

Se ad esempio mettiamo una window che non è perfettamente piatta, ma presenta delle asperità, avremo che lo spessore della window non sarà costante, ma avrà una dipendenza dalla posizione spaziale, cioè lo spessore può essere scritto come

$$t = t(x, y)$$

Di conseguenza anche l'indice di rifrazione avrà una dipendenza dalla posizione spaziale sulla superficie di questo oggetto

$$n = n(x, y)$$

In questo caso possiamo scrivere il displacement come

$$d = t(x, y) \cdot [1 - n(x, y)] = d(x, y)$$

Quindi avremo una differenza di fase che dipenderà anch'essa da (x, y)

$$\delta = \delta(x, y)$$

Se al posto dello schermo, in uscita, mettiamo una CCD CAMER che connettiamo ad un DAQ e ad un computer, vediamo che anche l'interference pattern ha una dipendenza da (x, y)

$$I = \frac{I_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} d(x, y) \right] \right\} = I(x, y)$$

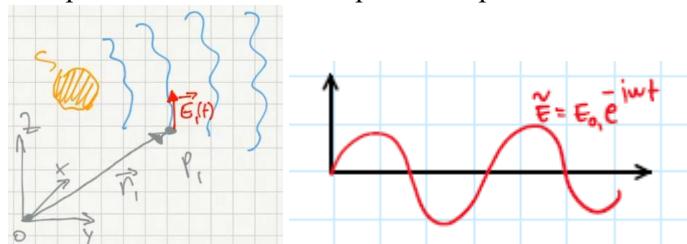
Se la window è perfettamente piatta vedremo un'immagine perfettamente uniforme, ma se la window ha delle asperità sulla superficie, sul nostro computer vedremo un'immagine con un certo pattern che prende il nome di SPECKLE PATTERN.

Coerenza della luce (Svelto 5th edition PAG 477)

Quando abbiamo iniziato a parlare di interferenza, abbiamo detto che una delle condizioni necessarie ad avere interferenza è che le due onde abbiano un certo grado di coerenza.

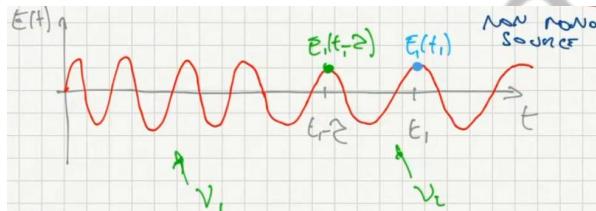
Assumiamo di avere una sorgente di luce estesa che emetterà luce con una certa distribuzione spaziale del campo elettrico.

Se siamo capaci di misurare il campo elettrico nella posizione spaziale P_1 , se la sorgente di luce è perfettamente monocromatica, avremo che il campo elettrico oscillatorà nel piano complesso.



Coerenza temporale

Ma in generale non esiste una sorgente una sorgente perfettamente monocromatica (esistono solo sorgenti quasi-monocromatiche) e quindi avremo che la frequenza di oscillazione del campo cambierà leggermente al passare del tempo.



Ora, misuriamo il campo elettrico al tempo t_1 e al tempo $t_1 - \tau$, quello che osserviamo è che se fissiamo τ e muoviamo il tempo t_1 , vediamo che $E_1(t_1 - \tau)$ ed $E_1(t_1)$ oscillano più o meno allo stesso modo, cioè sono coerenti, ma se muoviamo τ , i due potrebbero non oscillare più allo stesso modo. (SPIEGATO MALE)

La coerenza di un campo elettrico è definita considerando il campo elettrico a due diversi istanti temporali e calcolando la correlazione del campo valutato in questi due istanti. (SPIEGATO BENE)

Matematicamente, la funzione di autocorrelazione del campo elettrico in funzione del ritardo τ può essere scritta come

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = \langle \tilde{E}_1^*(t) \tilde{E}_1(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T \tilde{E}_1^*(t) \tilde{E}_1(t - \tau) dt$$

Questa equazione prende anche il nome di CORRELAZIONE TEMPORALE.

Significa che prendiamo l'oscillazione al tempo t poi al tempo $(t - \tau)$ e poi facciamo la media: se il campo oscilla allo stesso modo in questi due punti temporali, la media sarà alta, ma se oscilla in modo casuale, la media sarà bassa e così il valore dell'autocorrelazione.

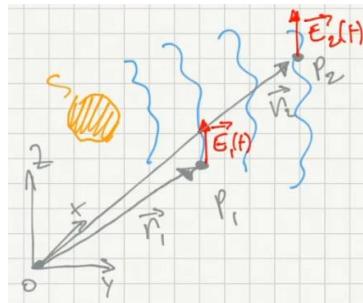
Vediamo che maggiore è il ritardo τ , minore è l'autocorrelazione e quindi minore è la coerenza.

In realtà, al fine di definire la coerenza, dobbiamo normalizzare la correlazione temporale rispetto all'intensità dell'onda, definendo il COMPLEX DEGREE OF TEMPORAL COHERENCE

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}_1^*(t) \tilde{E}_1(t - \tau) \rangle}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t - \tau)|^2 \rangle}} = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t - \tau)|^2 \rangle}}$$

Coerenza spaziale

Per calcolare la coerenza spaziale, dobbiamo considerare un secondo punto P_2 e misurare il campo nei due punti P_1 e P_2 allo stesso tempo t .



A questo punto possiamo definire la CORRELAZIONE SPAZIALE come

$$\tilde{\Gamma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \tilde{E}_1^*(\vec{r}_1, t) \tilde{E}_2(\vec{r}_2, t) \rangle$$

E anche il COMPLEX DEGREE OF SPATIAL COHERENCE come

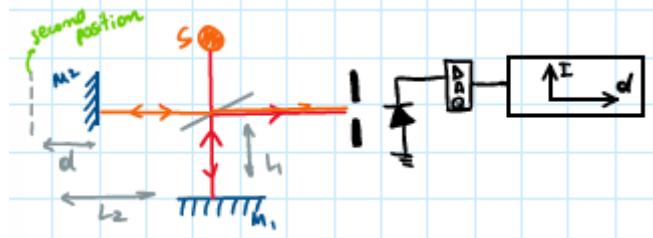
$$\tilde{\gamma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle \tilde{E}_1^*(\vec{r}_1, t) \tilde{E}_2(\vec{r}_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_2(\vec{r}_2, t)|^2 \rangle}} = \frac{\tilde{\Gamma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_2(\vec{r}_2, t)|^2 \rangle}}$$

Mutua coerenza

Infine, abbiamo un'espressione più generale della coerenza che prende il nome di COMPLEX DEGREE OF MUTUAL COHERENCE ed è scritta come

$$\tilde{\gamma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\langle \tilde{E}_1^*(\vec{r}_1, t) \tilde{E}_2(\vec{r}_2, t - \tau) \rangle}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_2(\vec{r}_2, t - \tau)|^2 \rangle}} = \frac{\tilde{\Gamma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(\vec{r}_1, t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_2(\vec{r}_2, t - \tau)|^2 \rangle}}$$

Applicazione 4: misura della coerenza temporale



Consideriamo in uscita dall'interferometro di Michelson uno schermo con una feritoia seguito da un fotodiodo, al quale collego una unità DAQ e un computer, al fine di misurare l'intensità dell'interference pattern in funzione del displacement d .

Possiamo considerare l'optical path difference d ed esprimere l'intensità dell'interference pattern misurata dal photodiode come

$$I = \frac{I_0}{2} [1 + \cos \delta] = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \right) \right]$$

Ma possiamo anche considerare la differenza di tempo tra il fronte di fase di un beam e il fronte di fase dell'altro beam che è ritardato a causa del fatto che in un caso (a sinistra) la luce deve viaggiare per una distanza più lunga. Quindi, se $d = 0$ i due percorsi dell'interferometro sono identici, ma se muoviamo lo specchio M_2 di una distanza $d \neq 0$, in particolare abbiamo che se $L_2 > L_1$ il beam in L_2 impiegherà più tempo per raggiungere il beam splitter e quindi introduciamo non solo un ritardo spaziale, ma anche un RITARDO TEMPORALE pari a

$$\tau = \frac{2d}{c_0}$$

dove abbiamo ipotizzato di trovarci nel vuoto.

Sappiamo che $\lambda\nu = c_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c_0}$ e quindi possiamo scrivere la differenza di fase in funzione del ritardo temporale come

$$\delta = \frac{2\pi \cdot \nu}{c_0} \cdot d = 2\pi\nu \cdot \frac{2d}{c_0} = \omega \cdot \tau$$

Pertanto, l'intensità misurata dal photodiode può essere scritta come

$$I_{PD} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \langle |\tilde{E}_{tot}(t)|^2 \rangle$$

dove $\tilde{E}_{tot}(t) = \tilde{E}(t) + \tilde{E}(t - \tau)$, quindi

$$I_{PD} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 n \langle [\tilde{E}(t) + \tilde{E}(t - \tau)][\tilde{E}^*(t) + \tilde{E}^*(t - \tau)] \rangle$$

Quindi, se l'intensità della sorgente è $I_{source} = \frac{I_0}{4}$ avremo che

$$\begin{aligned} I_{PD} &= \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + \frac{1}{2}\epsilon_0 c_0 n \langle \tilde{E}^*(t) \cdot \tilde{E}(t-\tau) + \tilde{E}(t) \cdot \tilde{E}^*(t-\tau) \rangle = \\ &= \frac{I_0}{2} + \frac{1}{2}\epsilon_0 c_0 n \cdot 2\Re\{\langle \tilde{E}^*(t) \cdot \tilde{E}(t-\tau) \rangle\} = \frac{I_0}{2} + \epsilon_0 c_0 n \cdot \Re\{\langle \tilde{E}^*(t) \cdot \tilde{E}(t-\tau) \rangle\} = \end{aligned}$$

Concludiamo che l'intensità misurata dal photodiode è proporzionale alla parte reale della funzione di autocorrelazione temporale

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} + \epsilon_0 c_0 n \cdot \Re\{\tilde{\Gamma}(\tau)\}$$

Inoltre, abbiamo che

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 c_0 n \langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle = \frac{I_0}{2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c_0 n \langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle$$

segue che

$$\sqrt{\epsilon_0 c_0 n} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} = \sqrt{\frac{I_0}{2}} = \sqrt{\epsilon_0 c_0 n} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle}$$

indicando $A = \sqrt{\epsilon_0 c_0 n} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle}$ e $B = \sqrt{\epsilon_0 c_0 n} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle}$, possiamo calcolare il prodotto $A \cdot B$ ottenendo

$$\epsilon_0 c_0 n = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle}}$$

e dato che $\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle}}$, possiamo riscrivere

$$\epsilon_0 c_0 n = \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\tilde{\gamma}(\tau)}{\tilde{\Gamma}(\tau)}$$

Quindi, sostituendo il valore appena ottenuto nell'equazione dell'intensità del photodiode, otteniamo

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} \cdot \frac{\tilde{\gamma}(\tau)}{\tilde{\Gamma}(\tau)} \cdot \Re\{\tilde{\Gamma}(\tau)\}$$

e quindi

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} [1 + \Re\{\tilde{\gamma}(\tau)\}]$$

CONCLUSIONE: quando guardiamo l'interferogramma all'uscita dell'interferometro di Michelson, possiamo interpretarlo come la parte reale del complex degree of coherence of the light.

Caso una sorgente che emette un'onda piana armonica con coerenza temporale perfetta

Supponiamo che la sorgente nell'interferometro di Michelson emetta un'onda piana armonica con una coerenza temporale perfetta (il cui spettro, come vedremo in seguito, è una delta di Dirac centrata in ω_L):

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}_0 e^{-j\omega_L t}$$

dove ω_L come sappiamo è la frequenza portante o la frequenza centrale di banda della sorgente.

La cui funzione di autocorrelazione temporale è

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = \langle \tilde{E}_1^*(t) \tilde{E}_1(t-\tau) \rangle$$

quindi

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{E}_0^* e^{j\omega_L t} \cdot \tilde{E}_0 e^{-j\omega_L (t-\tau)} dt = |\tilde{E}_0|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j\omega_L \tau} dt = |\tilde{E}_0|^2 e^{j\omega_L \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = |\tilde{E}_0|^2 e^{j\omega_L \tau}$$

Quindi se $\tilde{E}_0 = E_0 e^{j\phi(\vec{r})}$, abbiamo che $|\tilde{E}_0|^2 = E_0^2$ e quindi

$$\tilde{\Gamma}(\tau) = E_0^2 e^{j\omega_L \tau}$$

che è la FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE TEMPORALE DI UN'ONDA ARMONICA PIANA.

Ovviamente, il complex degree of temporal coherence sarà

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} \cdot \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle}}$$

dove nel caso di un'onda piana armonica $\sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t)|^2 \rangle} = \sqrt{\langle |\tilde{E}_1(t-\tau)|^2 \rangle} = E_0$ e quindi il COMPLEX DEGREE OF TEMPORAL COHERENCE DI UN'ONDA PIANA ARMONICA è

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}(\tau)}{E_0^2} = \frac{E_0^2 e^{j\omega_L \tau}}{E_0^2} = e^{j\omega_L \tau}$$

Pertanto, l'intensità misurata dal photodiode nel caso di un'onda piana armonica sarà

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} [1 + \Re\{e^{j\omega_L \tau}\}] = \frac{I_0}{2} [1 + \cos(\omega_L \tau)]$$

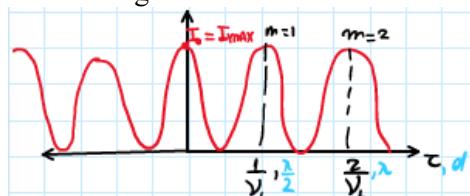
A prima vista possiamo dire che abbiamo ottenuto la stessa espressione dell'inizio, con l'unica differenza che ora l'intensità è una funzione del ritardo τ e non del displacement d .

Però possiamo scrivere $\omega_L = 2\pi\nu_L = \frac{2\pi c}{\lambda}$ e $\tau = \frac{2d}{c}$ quindi

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d\right) \right]$$

ottenendo esattamente la stessa espressione dell'inizio.

L'interferogramma che visualizzeremo sarà



Dove i massimi si troveranno a $\omega_L \tau = m2\pi \rightarrow \tau = m \frac{2\pi}{\omega_L} = m \frac{1}{\nu_L}$ oppure equivalentemente a $d = m \frac{\lambda}{2}$.

Caso di una sorgente che NON possiede una coerenza temporale perfetta

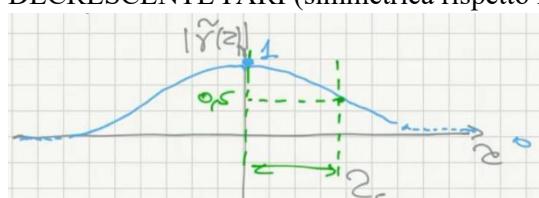
In questo caso il complex degree of temporal coherence può essere espresso come

$$\tilde{\gamma}(\tau) = |\tilde{\gamma}(\tau)| e^{j\omega_L \tau}$$

Quindi, l'intensità misurata dal photodiode sarà

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} [1 + |\tilde{\gamma}(\tau)| \cdot \cos(\omega_L \tau)]$$

La differenza tra i due casi è che con una sorgente con coerenza temporale perfetta l'ampiezza normalizzata dell'interferogramma è sempre unitaria, mentre nel caso di una sorgente che non ha una coerenza temporale perfetta, l'ampiezza normalizzata dell'interferogramma è l'ampiezza del complex degree of temporal coherence, cioè $|\tilde{\gamma}(\tau)|$. Inoltre, l'ampiezza del complex degree of temporal coherence $|\tilde{\gamma}(\tau)|$ è una FUNZIONE MONOTONA DECRESCENTE PARI (simmetrica rispetto l'asse delle ordinate)



E il tempo (ritardo) per cui si ha il FWHM, cioè per cui l'ampiezza $|\tilde{\gamma}(\tau)| = 1/2$ è

$$\tau = \tau_c$$

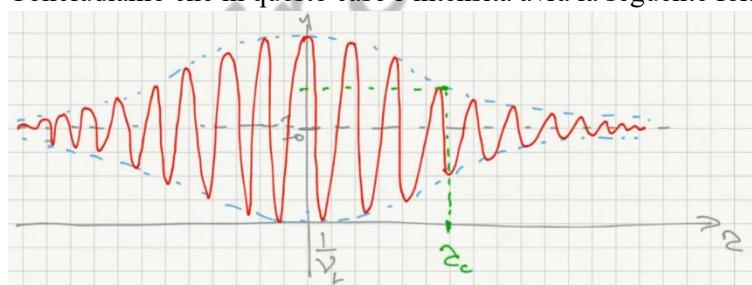
che viene detto COHERENCE TIME della sorgente.

A cui corrisponde

$$2d = \tau_c \cdot c_0 = l_c$$

che è detta COHERENCE LENGTH e rappresenta il doppio del displacement che dobbiamo avere tra i due specchi affinché si abbia metà dell'ampiezza del complex degree of temporal coherence.

Concludiamo che in questo caso l'intensità avrà la seguente forma



cioè l'intensità che avremmo nel caso la sorgente possedesse una perfetta coerenza temporale è modulata dall'ampiezza del complex degree of temporal coherence.

Se valutiamo la visibilità di questo interferogramma che ricordiamo essere

$$V(\tau) = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{I_{MAX} + I_{MIN}}$$

abbiamo che anch'essa sarà una funzione del ritardo τ in quanto l'intensità è una funzione di τ .

L'intensità massima è

$$I_{MAX} = \frac{I_0}{2} [1 + |\tilde{\gamma}(\tau)|]$$

mentre l'intensità minima è

$$I_{MIN} = \frac{I_0}{2} [1 - |\tilde{\gamma}(\tau)|]$$

Quindi, la visibilità o contrasto degli interference fringes sarà

$$V(\tau) = \frac{2 \cdot |\tilde{\gamma}(\tau)|}{2} = |\tilde{\gamma}(\tau)|$$

esattamente uguale all'ampiezza del complex degree of temporal coherence.

CONCLUSIONE: l'interferometro di Michelson può essere utilizzato per misurare la coerenza di una sorgente luminosa (tempo e lunghezza di coerenza della sorgente)

Applicazione 5: misura dello spettro di potenza di una sorgente ottica → SPETTROSCOPIA

Esiste un teorema che prende il nome di TEOREMA DI WIENER-KITCHINE che asserisce quanto segue.

Partendo dalla funzione di autocorrelazione temporale $\Gamma(\tau)$, facendone la trasformata di Fourier, si ottiene lo

SPETTRO DI POTENZA DELLA SORGENTE che è pari al modulo dello spettro di ampiezza $S(v) = |\tilde{A}(v)|^2$.

Infatti, possiamo scrivere

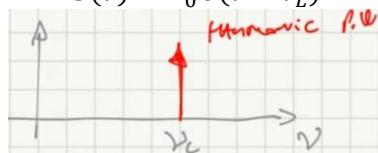
$$S(v) = \mathcal{F}\{\Gamma(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-j2\pi v\tau} d\tau$$

Dove la funzione di autocorrelazione temporale di un'onda piana armonica sappiamo potersi scrivere come

$$\Gamma(\tau) = E_0^2 \cos(\omega_L \tau)$$

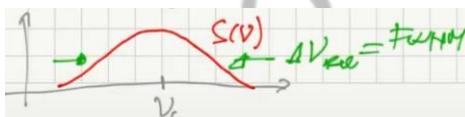
Quindi avremo che lo SPETTRO DI POTENZA DI UN'ONDA PIANA ARMONICA sarà

$$S(v) = E_0^2 \delta(v - v_L)$$



cioè una delta di Dirac centrale in v_L e di ampiezza pari a E_0^2 .

Però, se la sorgente di luce è BROADBAND (A BANDA LARGA), lo spettro di potenza della sorgente sarà sempre centrato in v_L , ma sarà più largo



Esistono due tipi di sorgenti a banda larga:

- Sorgente a banda larga incoerente → sorgente di luce termica = lampada
- Sorgente a banda larga coerente → broadband laser = laser a femtosecondi o laser a impulsi brevi

Se chiamiamo $\Delta\nu_{BW}$ il FWHM dello spettro di potenza questo sarà legato al coherence time τ_c dalla trasformata di Fourier e in particolare abbiamo

$$\Delta\nu_{BW} \cdot \tau_c \geq 1$$

cioè

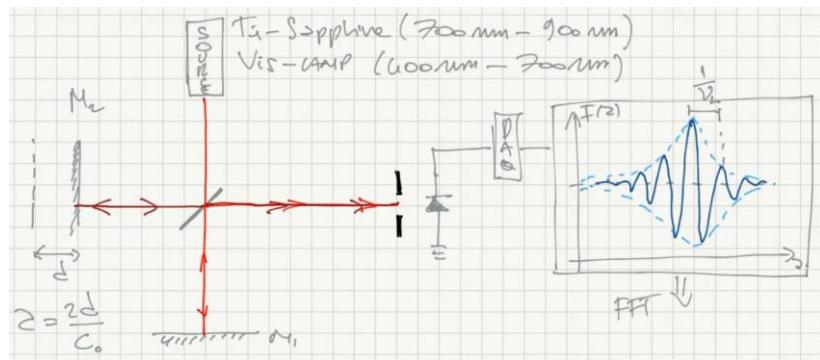
$$\Delta\nu_{BW} \geq \frac{1}{\tau_c}$$

RISULTATI:

- Se abbiamo una sorgente di luce incoerente, questa sarà sempre broadband.
- Minore è il coherence time, maggiore è la banda dello spettro di potenza.

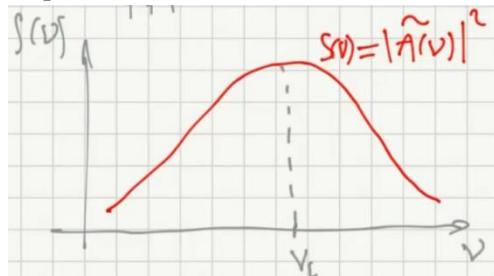
Spettrometro FTIR (Fourier Transform Infrared Spectrometer)

Lo SPETTROMETRO FTIR è fondamentalmente un interferometro di Michelson, in cui abbiamo una sorgente a banda larga che può essere un broadband laser come un laser a Ti-Sapphire (Zaffiro di Titanio) ($\lambda \div 700 - 900 \text{ nm}$) o può essere una lampada ($\lambda \div 400 - 700 \text{ nm}$).

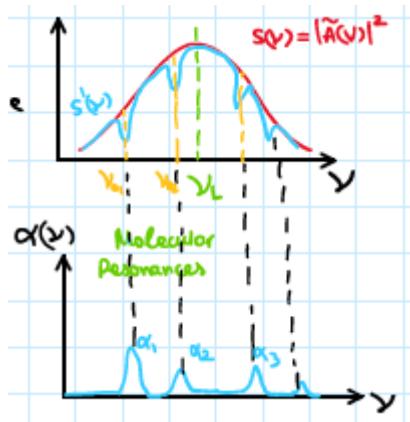


In questo caso l'interferogramma è quello di una sorgente che non possiede una coerenza temporale perfetta.

Dopodiché facciamo la trasformata di Fourier (FFT con Matlab) e otteniamo il seguente spettro di potenza



Se poi inseriamo una cella ottica contenente del gas, quello che succede è che lo spettro di potenza della sorgente sarà modulato dal coefficiente di assorbimento delle molecole di gas contenute nella cella, cioè



Quindi a causa dell'interazione della luce con le molecole di gas, in corrispondenza delle frequenze di risonanza delle molecole di gas (molecular resonances), avremo dei buchi nello spettro di potenza.

Quindi $S(v)$ è lo spettro di potenza prima dell'inserimento della gas cell, mentre $S'(\tau)$ è lo spettro di potenza modulato dalle molecole di gas che pertanto può essere scritto come

$$S'(\tau) = S(v)e^{\alpha(v)L}$$

dove L è la lunghezza della cella.

Quindi se applichiamo la funzione logaritmo ad entrambi i membri otteniamo

$$\frac{1}{L} \ln \frac{S(v)}{S'(\tau)} = \alpha(v)$$

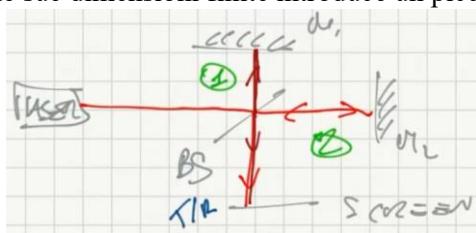
che è lo SPETTRO DI ASSORBIMENTO DEL MOLECULAR SAMPLE ed è raffigurato nella figura sopra.

Esercizi interferometro di Michelson

Esercizio 1 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

Dimostrare che l'interferometro di Michelson è sempre bilanciato per quanto riguarda l'intensità e che l'intensità di uscita è massima quando la riflettività del beam splitter (BS) è del 50%. Se il BS ha uno spessore $t_{BS} = 2 \text{ mm}$ e l'optical path difference tra i due armi nell'aria è $d_{air} = 0$, valutare l'optical path difference d_{BS} dovuto allo spessore del BS (il substrato del BS è fatto di fused-silica con indice di rifrazione $n_{FS} = 1.45$ nel range del visibile)

Il punto è che lo stesso BS a causa delle sue dimensioni finite introduce un piccolo ma non trascurabile displacement.

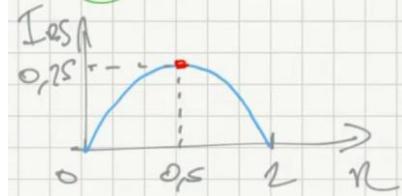


Il beam 1 viene prima riflesso poi trasmesso quindi la sua intensità è $I_1 = I_0 \cdot R \cdot T$, mentre il beam 2 viene prima trasmesso e poi riflesso quindi la sua intensità è $I_2 = I_0 \cdot T \cdot R$. Tuttavia, per la proprietà commutativa le due intensità sono uguali tra loro $I_1 = I_2$ anche se $R \neq T$.

Possiamo scrivere l'intensità dopo il BS come

$$I_{BS} = I_0 RT = I_0 R(1 - R) = I_0(R - R^2)$$

che ha una dipendenza quadratica rispetto alla riflettività con un picco quando $R = 0.5 = 50\%$



Infatti se calcoliamo la derivata prima e la poniamo uguale a 0, otteniamo

$$\frac{dI_{BS}}{dR} = 0 \rightarrow R = 0.5 = 50\%$$

Questo implica che la visibilità dei fringes sullo schermo sarà sempre uguale a 1, perché

$$\text{se } I_1 = I_2 \rightarrow I_{MIN} = 0$$

DIMOSTRAZIONE

L'intensità allo schermo è

$$I_{screen} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Abbiamo il minimo quando $\cos \delta = -1$, quindi ponendo il valore dell'intensità minima uguale a 0

$$I_{MIN} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} (I_1 + I_2)^2 &= (2\sqrt{I_1 I_2})^2 \\ I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 &= 4I_1 I_2 \\ I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 &= 0 \\ (I_1 - I_2)^2 &= 0 \\ I_{MIN} = 0 &\Leftrightarrow I_1 = I_2 \end{aligned}$$

La visibilità è data da

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = 1 \text{ se } I_2 = 0$$

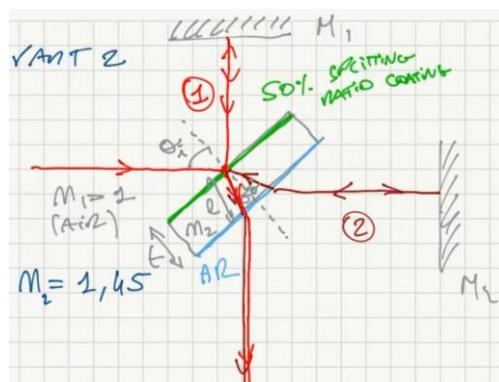
Abbiamo massima visibilità se l'interferometro è bilanciato rispetto all'intensità.

Questa cosa è sempre vera nel caso dell'interferometro di Michelson, ma potrebbe non essere vero nell'interferometro di Mach-Zender, dove abbiamo due BS differenti quindi se prendiamo questi con rapporti di splitting differenti le due intensità dei beams non sono uguali tra loro.

Abbiamo visto che abbiamo il massimo dell'intensità quando $R = 0.5$.

Avere un elevato valore di intensità massima è importante perché nelle applicazioni reali abbiamo a che fare con il rumore; quindi, è importante che il rumore non sovrasti il segnale.

Ora analizziamo il caso di un beam splitter reale.



Il beam 2 passa 3 volte dentro al BS, mentre il beam 1 ci passa solo una volta.

Quindi se chiamiamo l la lunghezza fisica percorsa dal beam all'interno del BS, l'OPTICAL DELAY introdotto dallo BS di spessore finito è

$$d_{BS} = (3l - l) \cdot n = 2l \cdot n$$

L'angolo incidente sul BS è $\theta_i = 45^\circ \rightarrow \sin \theta_i = \sqrt{2}/2$, quindi l'angolo di trasmissione θ viene definito dalla legge di Snell

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta \\ \rightarrow \sin \theta &= \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \frac{\sqrt{2}}{2.9} \end{aligned}$$

La lunghezza fisica percorsa dal beam all'interno del BS è l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha come cateto maggiore t e come angolo sotteso tra l'ipotenusa e il cateto maggiore θ ; dunque, è definita come

$$l = \frac{t}{\cos \theta} = \frac{t}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = 1.13 \cdot t|_{t=2 \text{ mm}} = 2.26 \text{ mm}$$

Quindi il ritardo ottico introdotto dal BS finito è

$$d_{BS} = 2 \cdot l \cdot n_2 = 2 \cdot 2.26 \text{ mm} \cdot 1.45 = 6.55 \text{ mm}$$

Se vogliamo vedere quanto di questo ritardo viene trasferito nello sfasamento tra i due beam

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot d_{BS} = \frac{2\pi}{633 \text{ nm}} \cdot 6.55 \text{ mm} = 2\pi \cdot 10347.5$$

Quindi, nella realtà, a causa dello spessore del BS, l'interferometro non è bilanciato, ma in realtà abbiamo contato più di 10 mila massimi di interference pattern.

Al fine di evitare questo problema possiamo introdurre una seconda finestra ottica di spessore uguale a quello del BS che presenti un anti-reflection coating su entrambe le interfacce.

Esercizio 2 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

Lo specchio mobile di un interferometro di Michelson è lentamente traslato di 0.04166 mm . Durante la traslazione lo sperimentatore conta 150 picchi di interferenza (bright fringes) in uscita. Calcolare la lunghezza d'onda della sorgente monocromatica usata nell'esperimento.

SALTATO

Esercizio 3 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

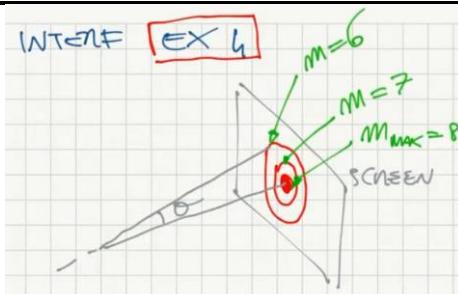
Quando uno sottile film trasparente (di spessore $40 \mu\text{m}$) è introdotto in un arm dell'interferometro di Michelson, uno spostamento di 83.6 fringes viene osservato in uscita. La sorgente monocromatica ha una lunghezza d'onda uguale a $\lambda = 555 \text{ nm}$. Calcolare l'indice di rifrazione del film.

NOTA: si noti che lo spostamento di un fringe avviene in modo immediato non appena viene introdotto il film. Come può essere possibile misurare l'indice di rifrazione in un esperimento pratico?

NON RISOLTO IN CLASSE → GUARDARE SOLUZIONI

Esercizio 4 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

All'uscita di un interferometro di Michelson vengono osservati dei fringes circolari (sorgente di dimensioni finite). Se lo squilibrio geometrico tra i due arms è $d = 2 \mu\text{m}$ e la lunghezza d'onda della sorgente è $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, dimostrare che il massimo valore dell'ordine dei fringe $m = m_{MAX}$ si ottiene per $\theta = 0 \text{ rad}$. Calcolare l'angolo corrispondente al terzo massimo dell'interferogramma.



Abbiamo che il phase shift introdotto dall'interferometro è

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \cos \theta$$

Al fine di osservare un massimo di interferenza dobbiamo avere

$$\delta = m \cdot 2\pi$$

Quindi possiamo semplificare e ottenere

$$m = \frac{2}{\lambda} \cdot d \cdot \cos \theta$$

Se $\theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1$ (*MAX VALUE*)

$$\text{Se } \theta > 0 \rightarrow \cos \theta < 1$$

Quindi al fine di avere il massimo numero di ordini di interferenza $m = m_{MAX}$ dobbiamo avere $\cos \theta = 1 \rightarrow \theta = 0$

$$m_{MAX} = \frac{2d}{\lambda} = \frac{2 \cdot 2 \mu m}{0.5 \mu m} = 8$$

Ora scriviamo la stessa equazione corrispondente al terzo ordine di interferenza

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \cos \theta_{3rd} = m_{3rd} \cdot 2\pi \rightarrow m_{3rd} = \frac{2d}{\lambda} \cdot \cos \theta_{3rd}$$

E siccome sappiamo che $m_{MAX} = 8 \rightarrow m_{3rd} = 6$ allora facendo la differenza tra le due equazioni possiamo ricavare

$$\begin{aligned} \frac{2d}{\lambda}(\cos \theta_3 - \cos \theta_{MAX}) &= m_3 - m_{MAX} \\ \cos \theta_3 &= \cos \theta_{MAX} - (m_{MAX} - m_3) \frac{\lambda}{2d} \\ \theta_3 &= \cos^{-1} \left(1 - \frac{\lambda}{d} \right) \simeq 41.4^\circ \end{aligned}$$

Possiamo valutare quanto vale l'aumento di angolo $\Delta\theta$ tra massimi di interferenza adiacenti.

$$\frac{4\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \cos \theta = m \cdot 2\pi$$

dove $\Delta m = -1$, in quanto stiamo considerando massimi adiacenti.

Ouindi

$$\Delta \cos \theta = \frac{\lambda}{2d}$$

Se $A \cos \theta$ è piccolo possiamo approssimarla al primo ordine e scrivere

$$-\sin \theta \cdot \Delta \theta = -\frac{\lambda}{2d}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d \cdot \sin\theta}$$



Aumentando l'angolo, $\Delta\theta$ diventa sempre più piccolo.

Esercizio 6 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

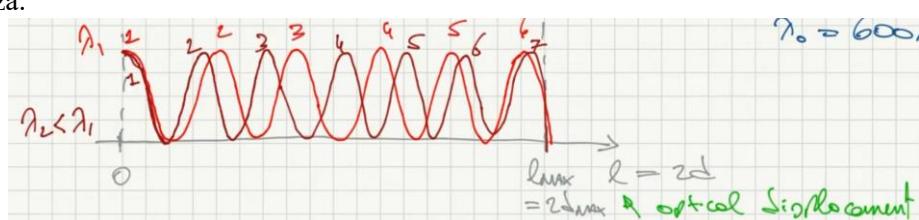
Calcolare la risoluzione e la resolving power di un interferometro di Michelson per una lunghezza d'onda $\lambda \simeq 600 \text{ nm}$ se il massimo displacement tra i due specchi è $d \equiv 50 \text{ cm}$.

SOLUZIONI: $R = 1.67 \cdot 10^6 \Omega$, $\Delta L = 0.36 \mu m$, $\Delta v = 300 MHz$, $\Delta W/N = 0.01 cm^{-1}$

Come misuriamo la risoluzione?

Rappresentiamo l'interferogramma in funzione dell'optical displacement l

Se abbiamo due onde con una diversa lunghezza d'onda avremo un numero diverso di ordini di interferenza per le due onde e la differenza minima tra le due onde che possiamo distinguere è quella che fa differire le due onde di un solo ordine di interferenza.



$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot l_{MAX} = m_1 2\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot l_{MAX} = m_2 2\pi \end{cases}$$

Al fine di distinguere λ_1 da λ_2

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= \Delta m \geq 1 \\ \rightarrow 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \cdot l_{MAX} &= \Delta m \cdot 2\pi \end{aligned}$$

in cui $\Delta m = 1$ e $\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)$, quindi possiamo riscrivere

$$\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{l_{MAX}}$$

Quindi al fine di trovare la RISOLUZIONE DELL'INTERFEROMETRO $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ scriviamo

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \Delta\lambda = \frac{1}{l_{MAX}} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{l_{MAX}}$$

Sostituendo otteniamo $\Delta\lambda = 0.36 \text{ pm}$.

La RESOLVING POWER è definita come

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$$

E si ottiene $R = 1.67 \cdot 10^6$.

Mentre la PRECISIONE RELATIVA DELLO STRUMENTO è definita come il reciproco della resolving power, cioè

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

La FREQUENCY RESOLUTION invece può essere definita a partire dall'equazione precedente $\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{l_{MAX}}$ e considerando che $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$, quindi si ottiene

$$\frac{1}{c} \cdot \Delta\nu_{RES} = \frac{1}{l_{MAX}} \rightarrow \Delta\nu_{RES} = \frac{c}{l_{MAX}}$$

Di conseguenza la FREQUENCY RESOLVING POWER è definita come

$$\mathcal{R}_\nu = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$$

e sostituendo si ottiene $\mathcal{R}_\nu = 1.67 \cdot 10^6 = \mathcal{R}_\lambda$.

CONCLUSIONE: le quantità relative non variano tra λ e ν

DIMOSTRAZIONE:

$$\Delta\nu = c \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \Delta\nu = -c \frac{1}{\lambda^2} \Delta\lambda \rightarrow \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\nu \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

FREQUENZA OTTICA VALUTATA IN WAVENUMBERS (NUMERI D'ONDA)

Un WAVENUMBER (WN) è definito come

$$WN = \frac{1}{\lambda[\text{cm}]} \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} \rightarrow WN = \frac{\nu}{c[\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}]}$$

Questa quantità fisica è utile perché se ad esempio consideriamo un laser beam con $\lambda_0 = 10 \mu\text{m} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 10^{-3} \text{ cm}$ avremo

$$WN_0 = \frac{1}{\lambda_0[\text{cm}]} = \frac{1}{10^{-3} \text{ cm}} = 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

Se vogliamo misurare la frequenza ottica in Hz

$$\nu_{Hz} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 30 \text{ THz} = 30 \cdot 10^{12}$$

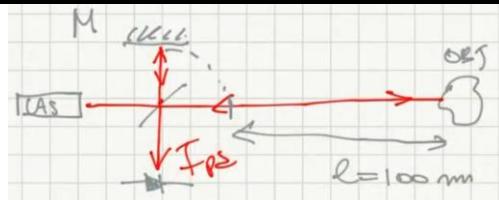
Questo è utile perché possiamo valutare la risoluzione dell'interferometro in wavenumbers

$$\Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{l_{MAX}} \rightarrow \Delta WN = \frac{1}{l_{MAX}[\text{cm}]}$$

Quindi la risoluzione dell'interferometro in wavenumbers è il reciproco del massimo optical displacement.

Esercizio 7 – Interferometro di Michelson e misura della coerenza temporale

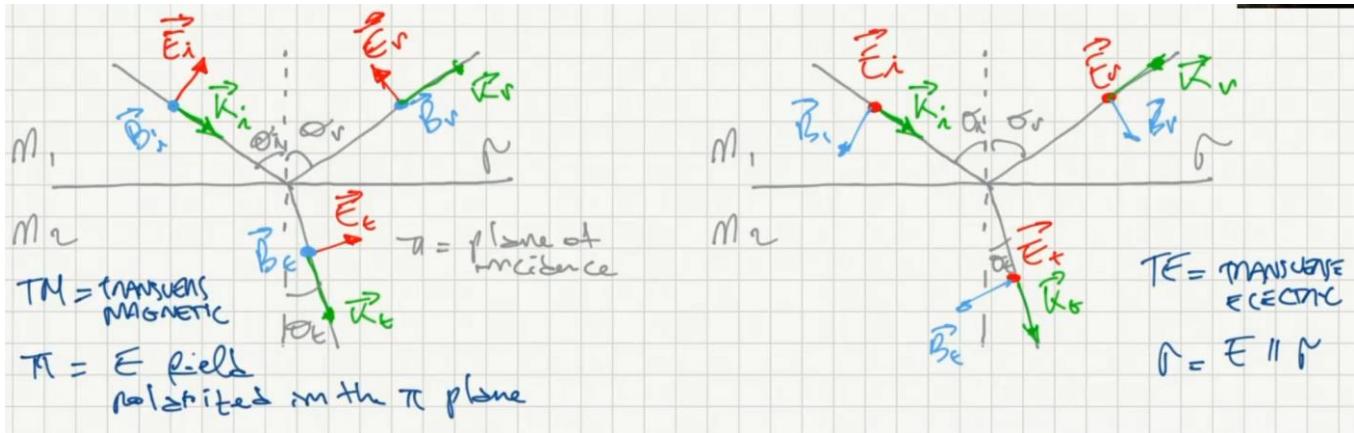
Un interferometro di Michelson viene usato per effettuare una misura ultra-precisa della posizione: fare una stima dell'effetto dell'instabilità in frequenza della sorgente di luce adottata sulla precisione della misura. Qual è il livello di stabilità in frequenza necessario per rilevare un displacement di 1 nm di un oggetto posto a 100 m dall'interferometro? Se si utilizza un laser a fibra di Erbio (Er:fiber) come sorgente per la misura, qual è il massimo livello accettabile di instabilità in frequenza?



FINIRE REGISTRAZIONE 30/09 – EX 3

Introduzione all'interferometro di Fabry-Perot

Riflessione di un'onda elettromagnetica ad una singola interfaccia dielettrica



π = piano di incidenza

σ = interfaccia

Abbiamo due diverse situazioni a seconda di come è polarizzato il campo elettrico (magnetico):

- Se il campo elettrico è polarizzato nel piano di incidenza \rightarrow il campo magnetico sarà ortogonale al piano di incidenza \rightarrow questo tipo di onda è detta π -WAVE o TM (TRANSVERSAL MAGNETIC) WAVE
- Se il campo elettrico è polarizzato ortogonalmente al piano di incidenza, cioè parallelo all'interfaccia \rightarrow questo tipo di onda è detta σ -WAVE o TE (TRANSVERSAL ELECTRIC) WAVE

Possiamo misurare due cose

1. L'angolo di riflessione e trasmissione in funzione dell'angolo di incidenza
2. Ampiezza del campo elettrico riflesso e trasmesso in funzione del campo elettrico incidente

Gli angoli possono essere misurati utilizzando le LEGGI DI SNELL che sfruttano il fatto che siccome il sistema è lineare tutte e tre le onde devono avere la stessa fase nel punto in cui l'onda incidente si divide in onda riflessa e onda trasmessa:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$$

Siccome

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1, \quad \vec{k}_r = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1, \quad \vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_2$$

Dalla prima uguaglianza otteniamo

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1 \cdot \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1 \cdot \sin \theta_r \\ \sin \theta_i = \sin \theta_r$$

che rappresenta la 1 LEGGE DI SNELL = LEGGE DI SNELL DELLA RIFLESSIONE.

Dalla seconda uguaglianza invece otteniamo

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_1 \cdot \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_2 \cdot \sin \theta_t \\ n_1 \cdot \sin \theta_i = n_2 \cdot \sin \theta_t$$

che rappresenta la 2 LEGGE DI SNELL = LEGGE DI SNELL DELLA RIFRAZIONE.

Da queste due relazioni possiamo ricavare l'angolo di riflessione e trasmissione in funzione dell'angolo di incidenza.

Le ampiezze invece possono essere misurate ricorrendo alla LEGGE DI FRESNEL che garantisce la conservazione del campo elettrico all'interfaccia. Possiamo quindi scrivere una coppia di equazioni: la prima che garantisce la conservazione del campo elettrico nella direzione parallela all'interfaccia, mentre la seconda che garantisce la conservazione dell'electrical displacement vector

$$\begin{cases} \tilde{E}_i \cos \theta_i - \tilde{E}_r \cos \theta_r = \tilde{E}_t \cos \theta_t \\ \epsilon_1 \tilde{E}_i \sin \theta_i + \epsilon_2 \tilde{E}_r \sin \theta_r = \epsilon_2 \tilde{E}_t \sin \theta_t \end{cases}$$

dove $\epsilon_1 \tilde{E}_i = |\vec{\Delta}_i|$, $\epsilon_1 \tilde{E}_r = |\vec{\Delta}_r|$, $\epsilon_2 \tilde{E}_t = |\vec{\Delta}_t|$, $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{ri} = \epsilon_0 n_1^2$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 n_2^2$.

Ora possiamo definire il FIELD REFLECTION COEFFICIENT e il FIELD TRANSMISSION COEFFICIENT

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{E}_r}{\tilde{E}_i}$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{E}_t}{\tilde{E}_i}$$

e anche la RIFLETTIVITÀ e la TRASMISSIVITÀ

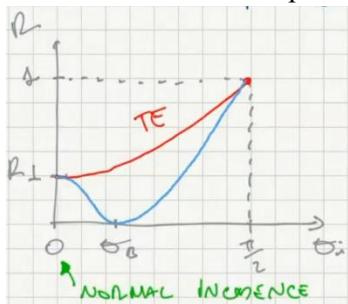
$$R = \frac{|\tilde{E}_r|^2}{|\tilde{E}_i|^2} = \frac{I_r}{I_i}$$

$$T = 1 - R$$

Riflettività in funzione di θ_i nel caso di EXTERNAL REFLECTION ($n_1 < n_2$)

$\theta_i = 0 \rightarrow \text{ANGOLO DI INCIDENZA NORMALE}$

La riflettività inizia sempre dal valore R_\perp .



Nel solo caso di un'onda TM il coefficiente di riflessione vale

$$r_{TM} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

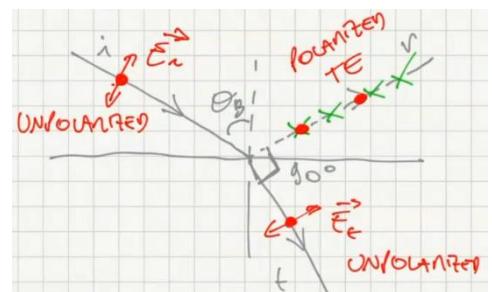
Se $\theta_i = \theta_B$, per il quale $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, abbiamo che il denominatore del coefficiente di riflessione r_{TM} va all'infinito, quindi il coefficiente di riflessione va a zero e così la riflettività. Questo angolo θ_B è detto ANGOLO DI BREWSTER.

Quando l'onda incide all'angolo di Brewster, in principio abbiamo che l'angolo che si forma tra l'onda riflessa e quella trasmessa è di 90° . Però, possiamo immaginare che sia l'onda riflessa che quella trasmessa siano sostenute dai dipoli del secondo mezzo, i quali oscillano, ma siccome la direzione di propagazione del campo trasmesso e quella del campo riflesso sono ortogonali, i dipoli non riescono a sostenere un'onda che si propaga parallelamente alla loro direzione di oscillazione, quindi in realtà non avremo il beam riflesso.

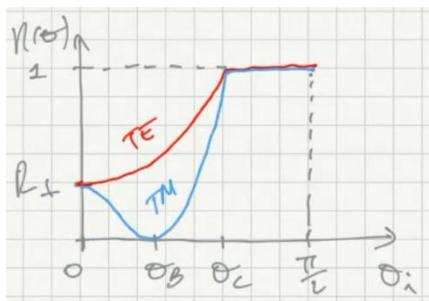
ATT: non esiste θ_B nel caso l'onda incidente fosse un'onda TE

Possibili applicazioni:

- Minimizzare le perdite di riflessione
- Produrre un'onda polarizzata da una non polarizzata
siccome l'angolo di Brewster è il fenomeno appena analizzato
esiste solo per un'onda incidente TM, se l'onda incidente è un'onda
non polarizzata, verrà trasmessa un'onda non polarizzata e verrà
riflessa solo un'onda polarizzata TE



Riflettività in funzione di θ_i nel caso di INTERNAL REFLECTION ($n_1 > n_2$)



La riflettività inizia sempre dal valore R_\perp , per $\theta_i = 0$, ma poi sia per l'onda polarizzata TE che per l'onda polarizzata TM, per $\theta_i = \theta_c$, detto ANGOLO CRITICO, la riflettività raggiunge il valore massimo 1, prima che l'angolo di incidenza raggiunga i 90° .

Per la legge di Snell della rifrazione

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

e siccome stiamo analizzando il caso di riflessione interna, cioè il caso in cui $n_1 > n_2$, abbiamo che

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

siccome $0 < \sin \theta_i < 1$, se $n_1 > n_2$, per grandi valori di θ_i finiremmo con $\sin \theta_t > 1$ che ovviamente è impossibile.

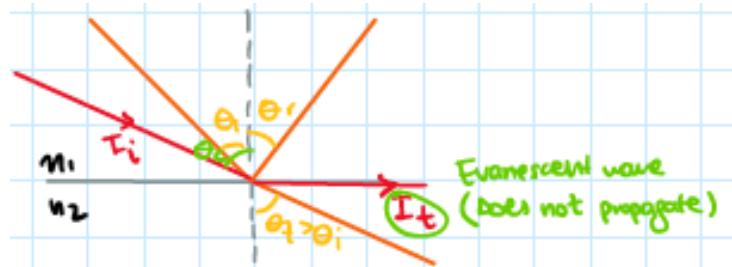
Quindi dobbiamo considerare l'angolo $\theta_i = \theta_c$ per cui

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c = 1$$

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

$$\theta_t = \frac{\pi}{2}$$

Questa condizione è conosciuta come CONDIZIONE DI RIFLESSIONE TOTALE DELL'ONDA.



Incidenza normale

In questa condizione abbiamo l'onda che incide l'interfaccia σ con un angolo di 90° .

Questa situazione è identica per entrambi i campi TE e TM, perché entrambi oscillano nel piano σ .

Il coefficiente di riflessione in queste condizioni può essere scritto come

$$r_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

e il coefficiente di trasmissione può essere scritto come

$$t_{\perp} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Quindi la riflettività in caso di incidenza normale è

$$R_{\perp} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Nonostante non ci sia una differenza tra onda TE o TM, esiste una differenza tra riflessione esterna ed interna.

Riflessione esterna $n_1 < n_2$

Abbiamo che

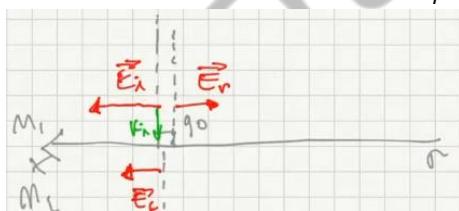
$$t_{\perp, external} < 1 \rightarrow E_t < E_i$$

Questo significa che il campo elettrico riflesso deve cambiare direzione rispetto al campo elettrico incidente a causa della conservazione del campo elettrico all'interfaccia $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$.

Quindi se consideriamo il campo incidente diretto lungo la direzione \vec{u}_x , abbiamo che

$$\vec{E}_i = E_i \cdot \vec{u}_x$$

$$\text{se } \vec{E}_r = -E_r \cdot \vec{u}_x \text{ e } \vec{E}_t = E_t \vec{u}_x \rightarrow E_t = E_i - E_r < E_i$$



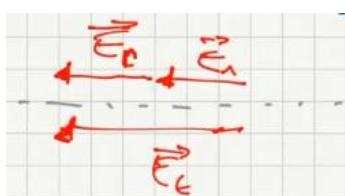
Quindi, quello che succede in caso di riflessione esterna è che il campo elettrico cambia segno, cioè è in opposizione di fase. Questo vuol dire che per la riflessione esterna abbiamo che $r_{\perp} < 0 \rightarrow \tilde{E}_r = \tilde{E}_i |r| e^{j\pi}$, cioè abbiamo un cambiamento di fase di π .

Riflessione interna $n_1 > n_2$

Abbiamo che

$$r_{\perp} > 0, t_{\perp} > 1$$

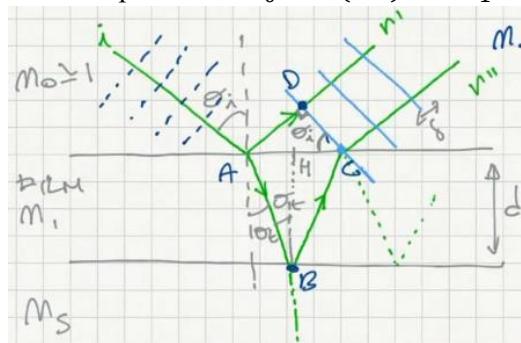
Cioè quello che succede è che l'ampiezza del campo trasmesso sarà maggiore di quello incidente $|E_t| > |E_i|$ e quindi che, al fine di conservare il campo all'interfaccia, il campo riflesso deve avere lo stesso segno di quello incidente e cioè non dobbiamo avere un cambiamento di fase $\tilde{E}_r = \tilde{E}_i |r| e^{j0}$.



Riflessione doppia (2 interfacce: $n_0 < n_1 < n_s$) nel caso di $R_{01} = \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2$ piccola

Questo succede tipicamente quando abbiamo uno strato depositato di spessore d su un substrato.

NOTA: tipicamente $n_0 \approx 1$ (air) e se $n_1 \approx 1.5$ abbiamo $R_{01} \approx 4\%$



Una parte dell'onda incidente sul substrato viene riflessa e una parte viene trasmessa. La frazione di onda parzialmente trasmessa verrà a sua volta riflessa dal substrato per una parte e per la restante parte verrà parzialmente trasmessa all'interno del substrato. L'onda riflessa dal substrato colpisce nuovamente la prima interfaccia e viene trasmessa in n_0 . Le due onde riflesse, quella primaria e quella secondaria, possono interferire tra loro.

NOTA: in realtà qui ci stiamo limitando a considerare solo le prime due onde riflesse, ma in realtà il meccanismo di riflessione continua e avremo più di due onde riflesse.

Se consideriamo i piani di massima fase, non è garantito che i piani di massima fase della seconda onda riflessa coincidono con quelli della prima onda riflessa, ma tipicamente presenteranno uno sfasamento che determinerà se le due onde riflesse interferiranno in modo costruttivo o distruttivo.

Se indichiamo con A il punto in cui l'onda incidente viene inizialmente riflessa, con B il punto in cui l'onda trasmessa viene riflessa dal substrato, con C il punto in cui l'onda riflessa dal substrato emerge dalla prima interfaccia e infine con D il punto sull'onda riflessa primaria che si trova sullo stesso piano di C, lo sfasamento tra le due onde riflesse vale

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} [n_i(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_0 \overline{AD}]$$

che prende il nome di OPTICAL PHASE BETWEEN THE PRIMARY REFLECTION r' AND THE SECONDARY REFLECTION r'' .

Ora dobbiamo valutare i vari percorsi

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{d}{\cos \theta_t}, \quad \overline{BC} = \overline{AB} \rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} = \frac{2d}{\cos \theta_t} \\ \overline{AD} &= \overline{AC} \sin \theta_i = 2\overline{AH} \sin \theta_i \\ \overline{AH} &= \overline{AB} \sin \theta_t \\ \overline{AD} &= \frac{2d}{\cos \theta_t} \sin \theta_t \sin \theta_i \end{aligned}$$

Applicando la legge di Snell della riflessione

$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta_i &= n_1 \sin \theta_t \\ \sin \theta_i &= \frac{n_1}{n_0} \sin \theta_t \\ \overline{AD} &= \frac{n_1}{n_0} \frac{2d}{\cos \theta_t} \sin^2 \theta_t = \frac{n_1}{n_0} \frac{2d}{\cos \theta_t} (1 - \cos \theta_t)^2 \end{aligned}$$

Per cui ricaviamo che lo sfasamento vale

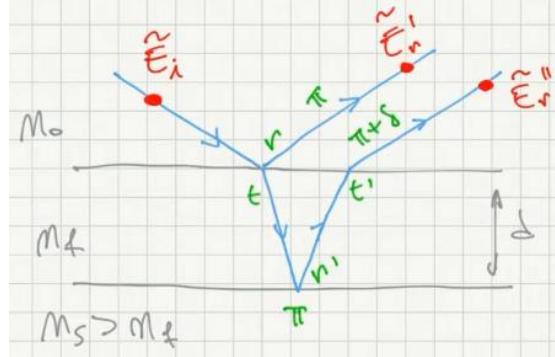
$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left\{ n_i \frac{2d}{\cos \theta_t} - n_0 \left[\frac{n_1}{n_0} \frac{2d}{\cos \theta_t} (1 - \cos \theta_t)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left\{ n_i \frac{2d}{\cos \theta_t} - n_1 \frac{2d}{\cos \theta_t} + n_1 \frac{2d}{\cos \theta_t} \cos^2 \theta_t \right\} = \end{aligned}$$

In conclusione, otteniamo

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_1 d \cos \theta_t$$

che è lo sfasamento tra due riflessioni consecutive in una interfaccia doppia.

Example: condizione di interferenza costruttiva o distruttiva



Sappiamo che $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_f d \cos \theta_t$, allora se $\theta_i \approx 0$ (*near normal incidence*) possiamo assumere che $\cos \theta_i \approx 1$ e quindi lo sfasamento sarà

$$\delta_{\perp} = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_f d$$

E possiamo avere due situazioni

- INTERFERENZA DISTRUTTIVA $\leftrightarrow \delta = \pi + m \cdot 2\pi \rightarrow \frac{4\pi}{\lambda_0} n_f d = \pi \rightarrow d = \frac{\lambda_f}{4}$ dove $\lambda_f = \frac{\lambda_0}{n_f}$

Cioè abbiamo interferenza distruttiva ogni volta che il film ha uno spessore pari ad un quarto della lunghezza d'onda (QUARTER WAVELENGTH FILM).

- INTERFERENZA COSTRUTTIVA $\leftrightarrow \delta = m \cdot 2\pi \rightarrow \frac{4\pi}{\lambda_0} n_f d = 2\pi \rightarrow d = \frac{\lambda_f}{2}$ dove $\lambda_f = \frac{\lambda_0}{n_f}$

Cioè abbiamo interferenza costruttiva ogni volta che il film ha uno spessore pari ad un mezzo della lunghezza d'onda (HALF WAVELENGTH FILM).

Anti-reflection coating (AR-coating)

Per avere un anti-reflection coating devono essere verificate due condizioni

1. Dobbiamo avere interferenza distruttiva $\rightarrow d = \lambda_f/4$
2. Il campo riflesso totale deve essere nullo $\rightarrow \tilde{E}'_r + \tilde{E}''_r = 0$

La prima riflessione può essere scritta come

$$\tilde{E}'_r = r \cdot \tilde{E}_i$$

mentre la seconda riflessione può essere scritta come

$$\tilde{E}''_r = r \cdot r' \cdot t' \cdot \tilde{E}_i \cdot e^{j\delta} = r \cdot r' \cdot t' \cdot \tilde{E}_i \cdot e^{j\pi}$$

dato che $d = \lambda_f/4$.

Inoltre, può essere dimostrato che

$$t \cdot t' = 1$$

e questa viene chiamata RELAZIONE DI STOKES PER IL COEFFICIENTE DI TRASMISSIONE t (Dimostrazione facoltativa in Pedrotti pag. 232).

Quindiabbiamo

$$\tilde{E}'_r + \tilde{E}''_r = r \tilde{E}_i - r' \tilde{E}_i = (r - r') \cdot \tilde{E}_i$$

Quindi al fine di avere $\tilde{E}_{tot} = \tilde{E}'_r + \tilde{E}''_r = 0$ dobbiamo avere

$$r' = r$$

Quindi

$$r = \frac{n_0 - n_f}{n_0 + n_f} = r' = \frac{n_f - n_s}{n_f + n_s}$$

Possiamo moltiplicare sia il numeratore che il denominatore di r per $1/n_0$ e il numeratore ed il denominatore di r' per $1/n_f$, ottenendo

$$\frac{1 - \frac{n_f}{n_0}}{1 + \frac{n_f}{n_0}} = \frac{1 - \frac{n_s}{n_f}}{1 + \frac{n_s}{n_f}}$$

Da cui concludiamo che abbiamo $r = r'$ se

$$\frac{n_f}{n_0} = \frac{n_s}{n_f}$$

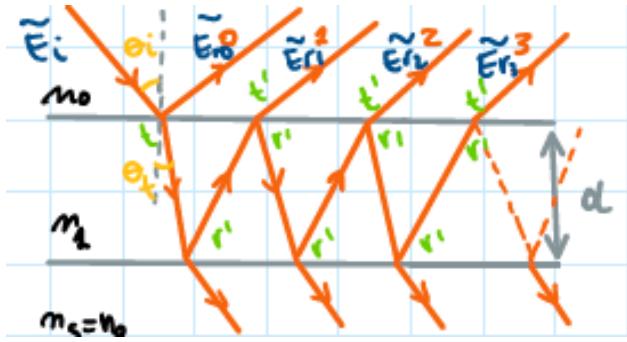
dove n_0 e n_s sono dati, quindi possiamo scrivere

$$n_f^2 = n_s \cdot n_0 \rightarrow n_f = \sqrt{n_s \cdot n_0}$$

e nel caso dell'aria $n_0 = 1 \rightarrow n_f = \sqrt{n_s}$.

Questa rappresenta la seconda condizione per avere un perfetto AR coating.

Riflessioni multiple tra due interfacce



Le onde riflesse possono essere scritte come

$$\tilde{E}_{r0} = r \cdot \tilde{E}_i$$

$$\tilde{E}_{r1} = t \cdot r' \cdot t' \cdot \tilde{E}_i \cdot e^{j\delta}$$

$$\tilde{E}_{r2} = t \cdot r'^3 \cdot t' \cdot \tilde{E}_i \cdot e^{j2\delta}$$

$$\tilde{E}_{r3} = t \cdot r'^5 \cdot t' \cdot \tilde{E}_i \cdot e^{j3\delta}$$

dove come ben sappiamo lo sfasamento vale $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_1 d \cos \theta_t$, mentre i coefficienti di riflessione valgono

rispettivamente $r = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}$ e $r' = \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0}$.

Quindi possiamo scrivere il campo elettrico totale riflesso come

$$\tilde{E}_{r,tot} = \tilde{E}_{r0} + \tilde{E}_{r1} + \tilde{E}_{r2} + \tilde{E}_{r3} + \dots = \left\{ r + r' t t' \cdot e^{j\delta} [1 + r'^2 e^{j\delta} + r'^4 e^{j2\delta} + \dots] \right\} \tilde{E}_i$$

Quindi nel caso più generale possiamo scrivere

$$\tilde{E}_{r,tot} = \left\{ r + r' t t' \cdot e^{j\delta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (r'^2 e^{j\delta})^k \right\} \cdot \tilde{E}_i$$

dove $\sum_{k=0}^{\infty} (r'^2 e^{j\delta})^k$ è una serie geometrica e pertanto possiamo scrivere che $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \simeq \frac{1}{1-x}$. Quindi riscriviamo il campo elettrico totale riflesso come

$$\tilde{E}_{r,tot} = \left\{ r + r' t t' \cdot e^{j\delta} \cdot \frac{1}{1 - r'^2 e^{j\delta}} \right\} \cdot \tilde{E}_i$$

Dunque, il coefficiente di riflessione totale di questa struttura può definito come il rapporto tra il campo elettrico totale riflesso e il campo elettrico incidente, cioè

$$\tilde{r}_{tot} = \frac{\tilde{E}_{r,tot}}{\tilde{E}_i} = r + r' t t' e^{j\delta} \frac{1}{1 - r'^2 e^{j\delta}}$$

La riflettività totale della superficie è quindi definita come

$$R_{tot} = \frac{|\tilde{E}_r|^2}{|\tilde{E}_i|^2} = \frac{\tilde{E}_r \cdot \tilde{E}_r^*}{\tilde{E}_i \cdot \tilde{E}_i^*} = \frac{I_{r,tot}}{I_i}$$

Il coefficiente di riflessione della singola interfaccia è uguale alla radice quadrata della riflettività della singola interfaccia

$$r = \sqrt{R_s}$$

E sempre per la legge di Stokes, abbiamo che il prodotto dei coefficienti di trasmissione è uguale alla trasmissività della singola interfaccia

$$t t' = T_s = 1 - R_s$$

Infine, possiamo scrivere sempre per la legge di Stokes

$$r' = -r = -\sqrt{R_s}$$

NOTA: le dimostrazioni di tutte queste equazioni si trovano a pag.232 del Pedrotti, ma non è necessario saperle

Eseguendo una serie di calcoli si trovano le FUNZIONI DI AIRY cioè le espressioni per la RIFLESSIVITÀ TOTALE e la TRASMISSIVITÀ TOTALE

$$R_{tot} = \frac{F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$T_{tot} = 1 - R_{tot} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

dove F è detto FATTORE DI CONTRASTO DELLA STRUTTURA e può essere scritto come

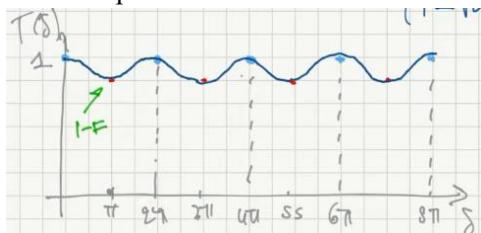
$$F = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}$$

NOTA: le airy functions sono funzioni periodiche e la loro forma dipende fortemente dal fattore di contrasto.

Interferometro di Fabry-Perot

$$\text{Se } R_s \rightarrow 0 \Rightarrow F = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2} \simeq 0$$

Facciamo il plot della trasmissività in funzione dello sfasamento δ , che come abbiamo detto la scorsa volta è una funzione periodica che ha massimi a multipli pari di π e minimi ai multipli dispari



Il valore della trasmissività è

$$T = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Quindi se $F \simeq 0 \rightarrow T \simeq 1 - F \sin^2 \frac{\delta}{2}$, dove $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_1 d \cos \theta_t$.

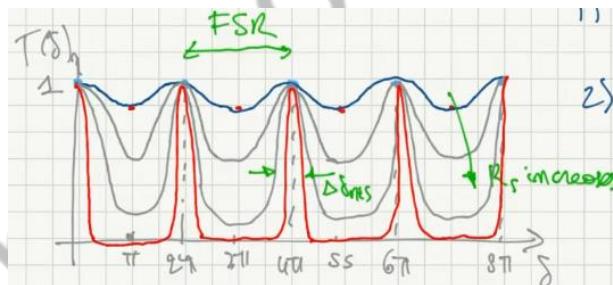
Quindi questa funzione ha valore massimo 1 e valore minimo $1 - F$.

Se $\theta_i \simeq 0$ (incidenza quasi normale) abbiamo che $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_1 d$ e in particolare abbiamo:

- $T = 1$ (massimo) quando $\delta = m \cdot 2\pi \rightarrow d = m \frac{\lambda_{n_i}}{2}$
- $T = 1 - F$ (minimo) quando $\delta = \pi + m \cdot 2\pi \rightarrow d = \frac{\lambda_{n_i}}{4}$

Se aumentiamo la riflettività di queste due interfacce, cosa succede?

Se $R_s \rightarrow 1$



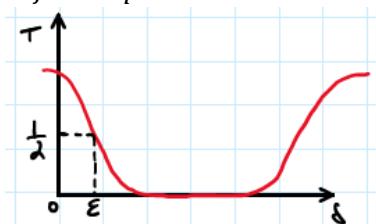
All'aumentare della riflettività, i punti di massimo rimangono gli stessi, ma abbiamo una diminuzione dei punti di minima riflettività. Quindi avremo dei picchi molto stretti e la riflettività che va a zero al di fuori dei punti di massimo. Questa è la condizione in cui tipicamente vogliamo lavorare, perché i picchi danno l'alta risoluzione della struttura.

Quindi le peculiarità dell'interferometro di Fabry-Perot sono:

1. La periodicità (periodo=2π) della funzione di trasmissività e la distanza tra due picchi consecutivi è detta FREE SPECTRAL RANGE (FSR), quindi

$$\Delta\delta_{FSR} = 2\pi$$

2. L'alta risoluzione: $\Delta\delta_{res} = FWHM \text{ of each peak}$



Se guardiamo il primo picco, il HWHM, cioè il punto in cui la trasmissività vale $\frac{1}{2}$ è: $T(\epsilon) = \frac{1}{2} \leftrightarrow \delta = \epsilon$

La trasmissività in funzione di ϵ è $T(\epsilon) = \frac{1}{1+F \sin^2(\frac{\epsilon}{2})} = \frac{1}{2}$ e quindi abbiamo $F \sin^2(\frac{\epsilon}{2}) = 1$.

Ora, possiamo semplificare questa equazione perché siccome stiamo valutando la situazione in cui questa funzione è molto ripida, abbiamo che ϵ è molto piccolo e perciò vicino a 0.

Quindi, se $\epsilon \rightarrow 0$ possiamo approssimare $\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \approx \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \approx \frac{\epsilon^2}{4} \Rightarrow F \cdot \frac{\epsilon^2}{4} = 1 \Rightarrow \epsilon = \frac{2}{\sqrt{F}}$ che rappresenta la HFHM (HALF WIDTH HALF MAXIMUM).

Quindi la PHASE RESOLUTION DELL'INTERFEROMETRO DI FABRY-PEROT è

$$\Delta\delta_{res} = 2\epsilon = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

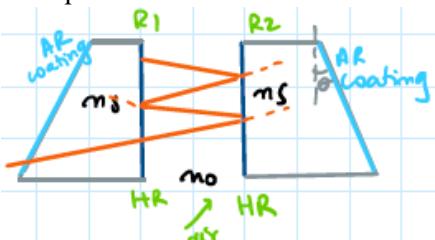
Dunque, abbiamo trovato una relazione tra la fase e il FSR e tra la fase e la risoluzione.

Il FSR di per sé non è così interessante, quello che vogliamo sapere è come cambia la trasmissività al variare della frequenza, o equivalentemente della lunghezza d'onda. Lo vedremo più avanti.

Struttura dell'interferometro di Fabry-Perot

Quello di cui abbiamo bisogno è una riflettività molto alta e abbiamo visto che la riflettività naturale di un mezzo naturale non è sufficientemente elevata, pertanto per raggiungere i valori di riflettività desiderata dobbiamo utilizzare degli specchi. In particolare, utilizzeremo due specchi realizzati effettuando un high reflectivity (HR) coating su due substrati dielettrici. Sull'altra interfaccia del substrato viene realizzato un AR coating e siccome questo non è perfetto (almeno non lo è per tutte le onde), realizzeremo questa faccia del substrato non parallela a quella in cui abbiamo realizzato l'HR coating (WEDGED SUBSTRATE). L'AR coating e il wedged substrate prevengono la formazione di un PARASITIC ETALON EFFECT, cioè di riflessioni multiple sul substrato.

In questo modo abbiamo riflessione solo all'interno della struttura principale, cioè tra le due facce con HR coating.



Immaginiamo di utilizzare una sorgente di luce sferica che pertanto emette luce in tutte le direzioni. Noi consideriamo il beam emesso con un angolo θ rispetto all'asse ottico che nel caso dell'interferometro di Fabry-Perot è ortogonale alle superfici degli specchi.



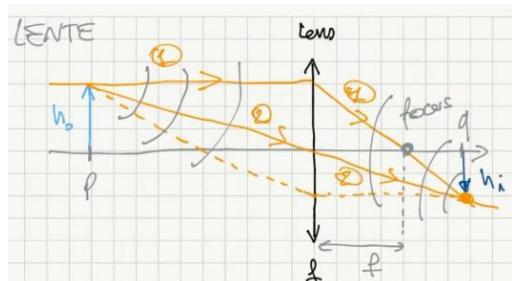
Il beam entra nella struttura e viene riflesso tra i due specchi e all'uscita dell'interferometro avremo tutti i beam trasmessi che sono paralleli, quindi non interferiranno ad una distanza finita. Pertanto, per vedere un interference pattern dobbiamo posizionare una lente di lunghezza focale f in uscita, ad una distanza pari alla lunghezza focale stessa da uno schermo. In questo modo abbiamo che tutti i beams saranno focalizzati sullo stesso spot sullo schermo e quindi saranno in grado di interferire su questo punto r sullo schermo.

Il sistema ottico ha una simmetria cilindrica e la sorgente ha una

simmetria sferica, quindi se facciamo ruotare il sistema attorno a questo asse ottico non cambia nulla dato che anche l'uscita avrà anch'essa una simmetria cilindrica.

Quindi se cambiamo la direzione di osservazione rispetto all'asse ottico, vedremo sempre lo stesso interferogramma, cioè gli interferometric fringes avranno una simmetria circolare, esattamente come avviene per l'interferometro di Michelson. Possiamo far ruotare l'angolo θ_1 attorno all'asse ottico e lo sfasamento non cambia.

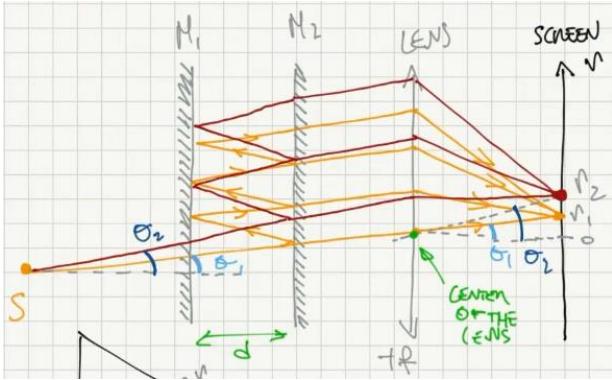
Come funziona la lente?



Se abbiamo un oggetto di altezza h_0 ad una distanza p dalla lente, questo verrà visualizzato ad una distanza q dall'altro lato della lente seguendo le seguenti relazioni

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad \frac{h_i}{h_0} = \frac{q}{p}$$

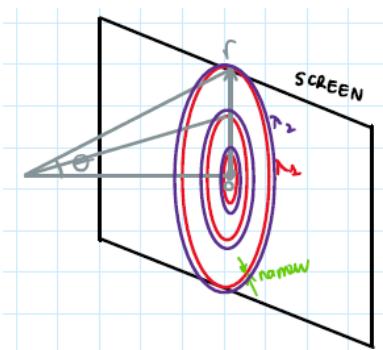
Cosa succede se ora consideriamo un secondo raggio?



Se cambiamo l'angolo di incidenza $\theta_2 > \theta_1$, i raggi si concentreranno sullo spot r_2 .

Tra i due specchi abbiamo l'aria quindi $n_1 = n_0 \rightarrow \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cos \theta_i$.

Siccome lo sfasamento è legato all'angolo con il quale il raggio viene emesso dalla sorgente, in questa struttura si crea una relazione 1:1 tra la posizione spaziale e lo sfasamento. Per ogni angolo abbiamo uno sfasamento e un diverso punto focale sullo schermo.



Se cambiamo l'angolo di emissione, cambiamo lo sfasamento e quindi cambiamo l'interference pattern.

Se abbiamo una sorgente di luce monocromatica, vediamo un insieme di beams circolari con lo stesso centro e tutti questi beams corrispondono al massimo di interferenza della struttura

$$\delta_{MAX} = m \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cos \theta_i$$

$$\cos \theta_{MAX} = m \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Se accoppiamo due lunghezze d'onda differenti ($\lambda_2 < \lambda_1$), abbiamo che siccome lo sfasamento dipende dalla lunghezza d'onda, per avere il massimo per entrambe le lunghezze d'onda dobbiamo cambiare l'angolo

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{\lambda_1} d \cos \theta_1 = m2\pi \\ \frac{4\pi}{\lambda_2} d \cos \theta_2 = m2\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\lambda_1} d \cos \theta_1 = \frac{2}{\lambda_2} d \cos \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cos \theta_1 < \cos \theta_1$$

dato che $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$.

Concludiamo che $\theta_2 > \theta_1$ cioè che la direzione angolare alla quale osserviamo il massimo di ordine m per λ_2 è maggiore di quella al quale osserviamo il massimo di ordine m per λ_1 .

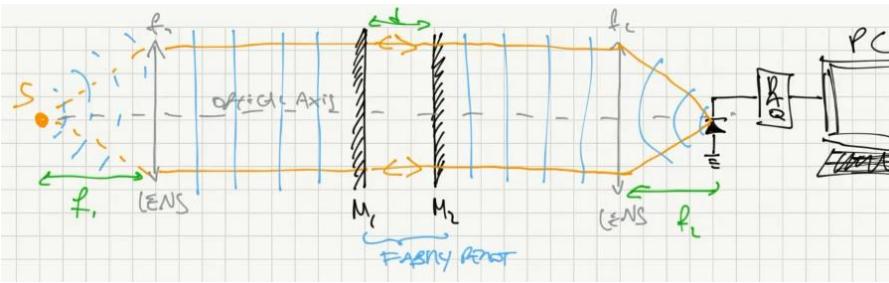
Siccome questi cerchi sono le immagini/rappresentazioni della funzione di trasmissione, questi cerchi sono molto stretti a causa dello stretto sfasamento che permette un'alta trasmissione. Quindi, l'interference pattern che vediamo in uscita dall'interferometro di Fabry-Perot è molto diverso dal pattern che osserviamo dall'interferometro di Michelson, dove avevamo un pattern sinusoidale con interference fringes molto larghi. In questo caso invece gli interference fringes sono molto stretti e più questi sono stretti più è alta la risoluzione dello strumento, cioè più stretti sono i cerchi, meglio possiamo distinguere lo sfasamento da un cerchio all'altro se λ_1 è simile a λ_2 .

Questa è un'analisi qualitativa dell'interferometro di Fabry-Perot. Al fine di avere una valutazione quantitativa dobbiamo utilizzare un photodiode al centro dell'interferometro per misurare la lunghezza d'onda e la frequenza, ad esempio.

REMARK: il focal spot può essere scritto come $r = f \cdot \tan \theta \simeq f \cdot \theta$ se θ è piccolo e quindi l'angolo di emissione sarà $\theta \simeq \frac{r}{f}$ e di conseguenza lo sfasamento sarà $d = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \left(\frac{r}{f} \right)$ e quindi come possiamo vedere abbiamo una relazione 1:1 tra la posizione e la fase. Quindi per ogni posizione sullo schermo abbiamo una diversa fase ed un diverso angolo di emissione.

Ora, supponiamo di avere una sorgente di luce sferica e poi di avere una lente di lunghezza focale f_1 posta ad una distanza f_1 dalla sorgente, quindi dopo la lente avremo un'onda piana. Ad una certa distanza posizioniamo l'interferometro di Fabry-Perot. Poi in uscita da questo metteremo una seconda lente di lunghezza focale f_2 seguita da un photodiode collegato ad una unità DAQ e in seguito ad un PC.

In questo modo lavoreremo sempre con incidenza normale, in quanto avremo dei rimbalzi multipli dell'onda piana all'interno dell'interferometro, poi l'onda uscente sarà sempre piana, colpirà la lente e verrà concentrata sul focal point.



Siccome lavoriamo con incidenza normale, la luce verrà sempre da una sola direzione parallela all'asse ottico del sistema $\rightarrow \theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1 \rightarrow \delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} d$.

Possiamo posizionare una seconda sorgente di luce S2 e ovviamente se le due sorgenti sono sovrapposte i due beam seguiranno lo stesso pattern e raggiungeranno il photodiode sul quale però possiamo misurare lo sfasamento tra λ_1 e λ_2

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda_1} d, \quad \delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda_2} d$$

Quindi la variazione dello sfasamento è

$$\Delta\delta = -\frac{4\pi}{\lambda^2} d \Delta\lambda$$

in cui $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ e $\lambda^2 = \lambda_1 \lambda_2$.

Ipotizziamo che $\lambda_1 \approx \lambda_2 \Rightarrow \Delta\lambda \rightarrow 0$. Ora vogliamo trovare la relazione tra lo sfasamento e la frequenza, allora scriviamo

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1, \quad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2}, \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} \Rightarrow \Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

Quindi, possiamo scrivere il rapporto $\Delta\lambda/\lambda^2$ in funzione della frequenza e della velocità della luce e poi sostituirlo nell'espressione di $\Delta\lambda$ e quindi legare la variazione nello sfasamento alla variazione in frequenza

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi d}{c} \Delta\nu$$

O equivalentemente

$$\Delta\nu = \frac{c}{4\pi d} \Delta\lambda$$

La variazione nello sfasamento è direttamente proporzionale alla variazione in frequenza (e viceversa ovviamente), cioè c'è una corrispondenza 1:1 tra la frequenza e lo sfasamento.

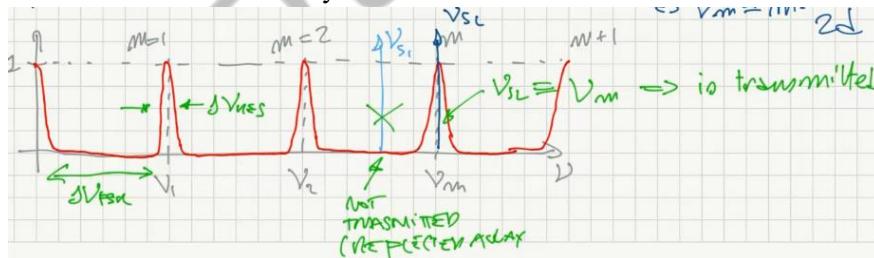
Questa relazione insieme a quella del free spectral range che abbiamo trovato precedentemente, ci permette di trovare la FREQUENCY RESOLUTION DELL'INTERFEROMETRO DI FABRY-PEROT

$$\Delta\nu_{RES} = \frac{c}{\pi d \sqrt{F}}$$

Abbiamo che $\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{4\pi d} \Delta\delta_{FSR}$, in cui $\Delta\delta_{FSR} = 2\pi$, quindi il FREQUENCY FSR è

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{2d}$$

Questo risultato è molto importante perché ci da la periodicità in frequenza della funzione di trasmissione dell'interferometro di Fabry-Perot.



Quindi possiamo trovare che le posizioni in frequenza dei picchi della funzione di trasmissione, ognuno di larghezza $\Delta\nu_{RES}$, sono ogni $\Delta\nu_{FSR}$, cioè si trovano a

$$\nu_m = m \cdot \Delta\nu_{FSR} = m \cdot \frac{c}{2d}$$

Quindi se la distanza tra i due specchi è fissa e non cambia, la luce che viene dalla sorgente verrà perfettamente trasmessa al photodiode solo se la frequenza soddisfa questa condizione, cioè solo se la luce ha una frequenza che è un multiplo intero del FREQUENCY FSR.

Una cosa interessante è che sia la risoluzione che il FSR sono inversamente proporzionali alla distanza tra gli specchi e quindi se prendiamo il rapporto tra il FSR e la risoluzione abbiamo un valore costante

$$\frac{\Delta\nu_{FSR}}{\Delta\nu_{RES}} = \frac{c}{2d} \cdot \frac{\pi d \sqrt{F}}{c} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \mathfrak{F}$$

questo valore viene comunemente chiamato FINESSE (FINEZZA) dell'interferometro di Fabry-Perot e rappresenta una costante importante per la caratterizzazione dell'interferometro.

Se abbiamo due specchi con diversa riflettività abbiamo

$$F = \frac{4R_S}{(1 - R_S)^2}, \text{ dove } R_S = \sqrt{R_1 R_2}$$

quindi una volta che sappiamo la riflettività, possiamo ricavare il contrast factor e poi trovare la finesse (finezza).

Quindi possiamo riscrivere la relazione tra risoluzione e FSR come

$$\Delta\nu_{RES} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\mathfrak{F}}$$

Ricordiamo che la RESOLVING POWER di un interferometro può essere scritta come

$$R = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{RES}} = \frac{m \cdot \Delta\nu_{FSR}}{\Delta\nu_{RES}}$$

Quindi la RESOLVING POWER DELL'INTERFEROMETRO DI FABRY-PEROT sarà

$$R_{FP} = m \cdot \mathfrak{F}$$

dove m come sappiamo è l'ordine di interferenza.

OSS1: Fissata la finesse (finezza), più alta è la frequenza della luce, più alto è l'ordine di interferenza e più alta è la resolving power.

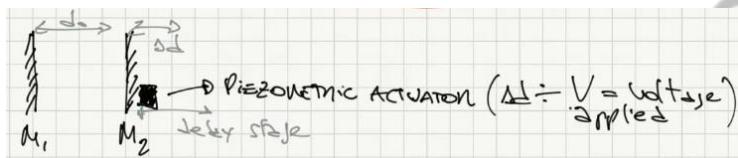
OSS2: se fissiamo la lunghezza d'onda, diminuendo il FSR, aumentiamo l'ordine d'interferenza

OSS3: se manteniamo fissa la distanza tra gli specchi, possiamo misurare solo le frequenze che soddisfano la condizione precedente, ma noi vogliamo misurare la frequenza della luce, non scegliere una sorgente con una determinata frequenza. Quindi se abbiamo una sorgente di luce con una frequenza casuale, al fine di far passare la luce attraverso l'interferometro, dobbiamo scegliere la giusta distanza tra gli specchi.

Questo procedimento prende il nome di:

Scanning Fabry-Perot interferometer

Cambiamo la distanza tra gli specchi, muovendo lo specchio M₂ di una distanza Δd , ad esempio posizionando su di esso un ATTUATORE PIEZOELETTRICO, cioè un materiale le cui dimensioni cambiano all'applicare di una certa tensione.

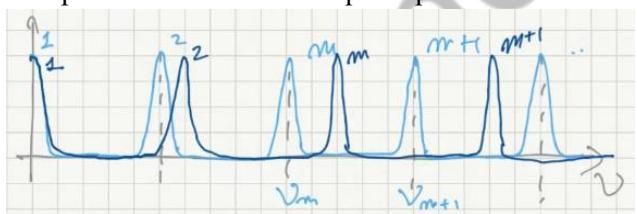


Cambiando la distanza quello che succede è che anche la funzione di trasmissione dell'interferometro cambierà.

Diminuendo la distanza da $d \rightarrow d'$ ($d' < d$) cambierà anche la posizione dei massimi nella funzione di trasmissione

$$\nu_m = m \cdot \frac{c}{2d} \rightarrow \nu'_m = m \cdot \frac{c}{2d'}$$

E in particolare avremo che questi picchi si muoveranno verso frequenze più alte.



Quindi facendo uno scanning della distanza tra d e d' , riusciamo a fare uno scanning dell'asse delle frequenze. La differenza in frequenza causata dalla variazione della distanza tra i due specchi è

$$\Delta\nu_m = m \cdot \frac{c}{2d^2} \cdot (-\Delta d) = \nu_m \cdot \left(-\frac{\Delta d}{d}\right)$$

dove $\Delta d = d' - d$ e $d^2 = d \cdot d'$.

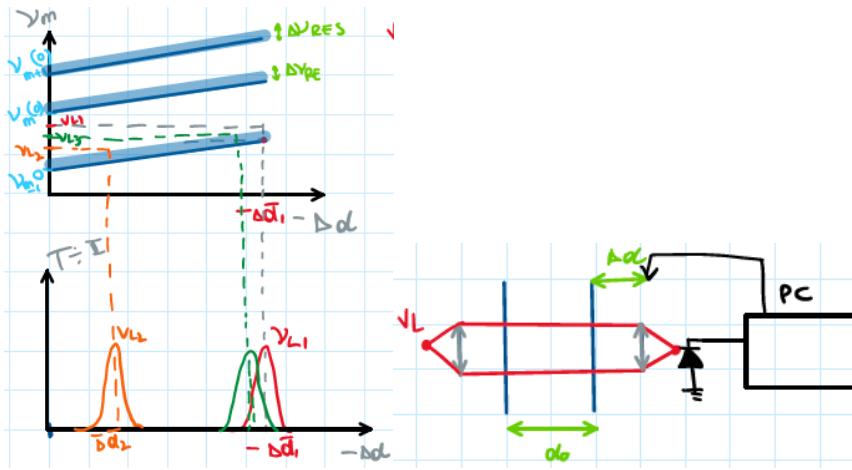
Un piccolo cambiamento nella distanza tra i due specchi provoca una grande variazione nelle frequenze

Se $\nu_m = 300 \text{ THz}$ e $\frac{\Delta d}{d} = 1\% = 0.01 \Rightarrow \Delta\nu_m = 3 \text{ THz}$ (vale sempre 1%, ma è una grande variazione).

Possiamo fare il plot della variazione della frequenza dei picchi in funzione del cambiamento della distanza Δd .

$$\nu_m = \nu_m(0) - \nu_m(0) \cdot \frac{\Delta d}{d} = \nu_m(0) - \Delta\nu_m$$

Se aumentiamo linearmente la distanza tra i due specchi, osserviamo un aumento lineare della frequenza dei picchi



Usando un computer possiamo controllare la distanza tra i due specchi.

Quello che facciamo è far variare Δd e guardare la funzione di trasmissione.

La distanza tra le due frequenze e quindi tra le due lunghezze d'onda deve essere maggiore della risoluzione dell'interferometro di Fabry-Perot. Se consideriamo una frequenza ν_{L3} molto vicina a ν_{L1} , la funzione di trasmissione per ν_{L3} si sovrapporrà a quella di ν_{L1} .

Le frequenze ν_{L1} e ν_{L2} sono resolved (determinate?) per diversi valori di Δd solo se $\nu_{L2} - \nu_{L1} > \Delta\nu_{RES} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{g}$.

OSS: Solitamente $\Delta\nu_{RES,FP} \ll \Delta\nu_{RES,MI}$, quindi la risoluzione del Fabry-Perot è molto meglio di quella di Michelson.

LIMITE DI FP: il vero limite dell'interferometro di Fabry-Perot è che quando facciamo lo scanning non scannerizziamo un solo picco, ma li scannerizziamo tutti, quindi abbiamo un PROBLEMA DI ALIASING.

Problema di aliasing

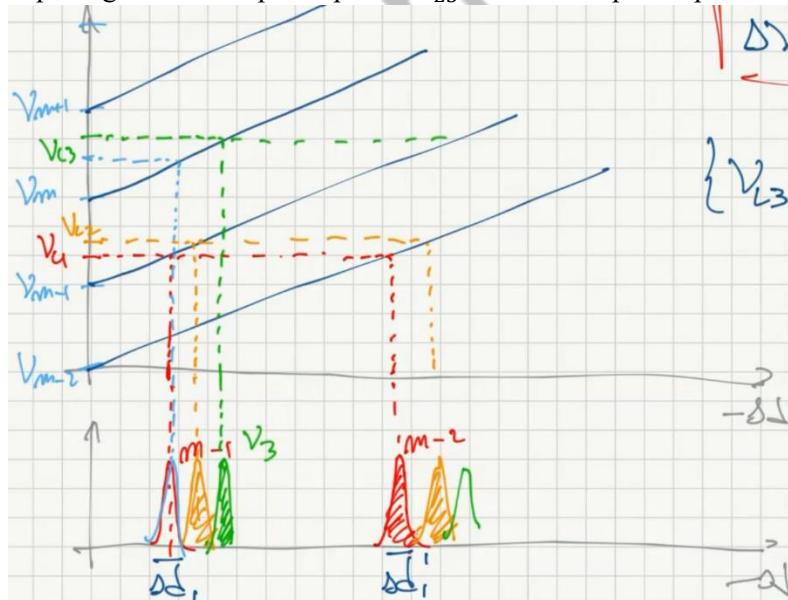
Nell'interferometro di Michelson le due frequenze che vogliamo misurare possono essere molto distanti, mentre siccome l'interferometro di FP ha un insieme discreto di picchi di trasmissione possiamo avere aliasing se la frequenza che vogliamo misurare è maggiore del FSR_{FP} .

Quindi le frequenze possono "mischiarsi" se $\Delta\nu > \Delta\nu_{FSR}$.

Se la prima frequenza che vogliamo misurare è ν_{L1} , per questa stessa frequenza possiamo trovare due picchi, ad esempio uno che corrisponde all'ordine $m - 1$, per $\overline{\Delta d}_1$, e uno che corrisponde all'ordine $m - 2$, per $\overline{\Delta d}'_1$.

Questo di per sé non è un problema. Anche se consideriamo una frequenza ν_{L2} di poco maggiore non abbiamo nessun problema.

Se andiamo a considerare una frequenza ν_{L3} molto maggiore alle altre due, ci aspettiamo di trovare dei picchi che siano molto distanti a quelli precedentemente trovati, invece quello che succede è che troviamo dei picchi molto vicini a quelli già trovati e questo perché ν_{L3} è ad una frequenza più alta di $\Delta\nu_{FSR}$ rispetto alle altre due frequenze.



Quindi abbiamo un'indeterminazione nella misura che è pari a

$$\Delta\nu_{INDET} = m \cdot \Delta\nu_{FSR}$$

Questo significa che il valore di frequenza misurato è

$$\begin{aligned} \{\nu_{L3}\}_{MEASURED} &= \bar{\nu}_{L3} + \Delta\nu_{INDET} \\ &= \bar{\nu}_{L3} + m \cdot \Delta\nu_{FSR} \end{aligned}$$

dove $\bar{\nu}_{L3}$ è il valore reale. Quindi il valore misurato dipende da quanti FSR questa frequenza è lontana dalla frequenza reale.

Abbiamo aliasing perché abbiamo un'indeterminazione della frequenza che fa in modo che una frequenza più alta causi un picco che cade sopra ad un picco relativo ad una frequenza più piccola e viceversa.

Esercizi interferometria

Esercizio 8

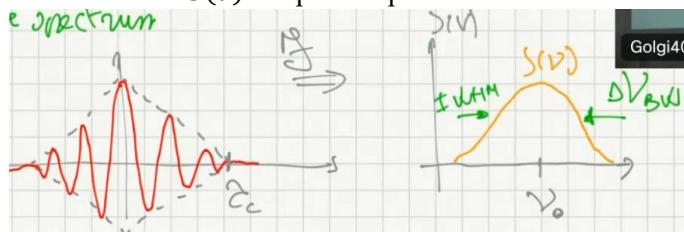
Calcolare il tempo di coerenza, la lunghezza di coerenza e la frequency spectral bandwidth delle seguenti sorgenti luminose:

- i. Luce bianca (400 nm-750 nm)
- ii. Lampada al vapore di sodio ($\lambda = 590 \text{ nm}$, $\Delta\lambda = 30 \text{ nm}$)
- iii. LED rosso con bandwidth $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$
- iv.

La relazione tra il tempo di coerenza e la bandwidth della sorgente è determinata dal teorema di Wiener-Kinchine, secondo il quale

$$\mathcal{F}\{\Gamma(\tau)\} = S(v)$$

dove $\Gamma(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione e $S(v)$ è il power spectrum.



Il prodotto tra il tempo di coerenza e la bandwidth è fisso e dipende dalla forma di queste due curve e tipicamente se queste due curve sono gaussiane, si avrà

$$\tau_c \cdot \Delta v_{BW} \geq 0.44$$

Quindi possiamo scrivere il tempo di coerenza come

$$\tau_c \geq \frac{0.44}{\Delta v_{BW}}$$

Mentre la lunghezza di coerenza è lo spazio percorso dalla luce in questo tempo

$$l_c = c_0 \cdot \tau_c$$

La banda in frequenza è data da

$$\Delta v_{BW} = \frac{c_0}{\lambda^2} \Delta \lambda_{BW}$$

LUCE BIANCA

Esercizio 10

Dimostrare che la minima frequency resolution di uno spettrometro FTIR è $\frac{1}{2d_{MAX}} \text{ cm}^{-1}$ dove d_{MAX} è il massimo spostamento dello specchio dalla condizione di equilibrio.

...

Multi dielectric optical coatings

Sappiamo già che se facciamo il coating del substrato (che immaginiamo essere fused silica) con uno strato con indice di rifrazione n_1 , la luce che viene dall'aria n_0 subirà una doppia riflessione e la prima onda riflessa avrà uno sfasamento di π rispetto all'onda incidente, mentre la seconda presenterà uno sfasamento $\pi + \delta$.

Se la riflettività del substrato R_s è piccola, possiamo considerare solo le prime due onde riflesse.

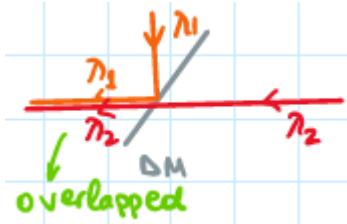
Nel caso di un substrato di fused silica abbiamo $n_s \approx 1.5 \rightarrow R_s = 4\%$ (quindi è piccola)

Se lo spessore del coating layer è $t = \lambda/4$ dove $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ allora lo sfasamento $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot n_1 \cdot t \cdot \cos \theta$ (dove $\cos \theta = 1$ in condizione di incidenza normale) sarà $\delta = \pi$, cioè avremo INTERFERENZA DISTRUTTIVA tra le onde riflesse 1 e 2 e quindi avremo un ANTI REFLECTION COATING.

Al fine di avere la riflessione della struttura uguale a zero $R_{tot} = 0$, dobbiamo avere $n_1 = \sqrt{n_0 n_s}$ che non è una condizione facilmente ottenibile.

In principio, ciò che vorremmo fare è fare il tuning della riflettività del materiale al fine di ottenere diverse possibili applicazioni, tra le quali

1. AR coating ($R_{tot} \approx 0$) anche con $n_1 \neq \sqrt{n_0 n_s}$
2. HR coating ($R_{tot} \approx 1 = 100\%$ ottenibile nel caso di specchi perfetti) e questo non è possibile con un unico strato, ma abbiamo bisogno di più strati
3. Ingegnerizzazione dello rapporto di splitting di un beam splitter (50/50, 70/30, 10/90, ...)
4. DICROIC MIRRORS, cioè specchi che sono in grado di riflettere completamente una lunghezza d'onda e trasmettere un'altra, cioè specchi per cui si ha $HR@\lambda_1$ e $HT@\lambda_2$



AR coating

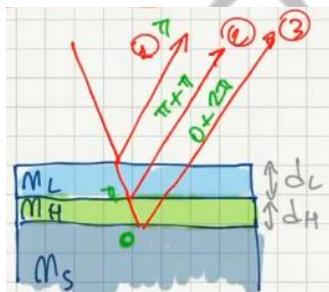
Se usiamo un solo strato, siamo limitati dalla relazione $n_1 = \sqrt{n_0 n_s}$ per ottenere $R_{tot} = 0$, quindi andremo a considerare anche un secondo strato al fine di ottenere una riflettività totale nulla anche nel caso $n_1 \neq \sqrt{n_0 n_s}$.

Sopra metteremo uno strato con basso indice di rifrazione $n_L < n_s$ e nel mezzo inseriremo un secondo coating layer con un alto indice di rifrazione $n_H > n_s$.

Al fine di avere riflessione totale nulla, questi due strati dovranno avere uno spessore pari a $1/4$ della lunghezza d'onda

$$d_L = \frac{\lambda_L}{4}, \quad \lambda_L = \frac{\lambda_0}{n_L}$$

$$d_H = \frac{\lambda_H}{4}, \quad \lambda_H = \frac{\lambda_0}{n_H}$$



Così facendo avremo la prima onda riflessa con sfasamento pari a π , poi avremo la seconda onda riflessa con sfasamento $\pi + \pi$ (perché anche il secondo strato ha uno spessore di $1/4$ della lunghezza d'onda) e infine abbiamo la terza onda riflessa che introduce uno sfasamento nullo (perché l'onda incide sul substrato che ha un indice di rifrazione più basso) e quindi avrà uno sfasamento $0 + 2\pi$.

Quindi lo sfasamento tra le onde riflesse 2 e 3 è nullo $\varphi_{2-3} = 0$, quindi i beam 2 e 3 sono in fase ed entrambi hanno uno sfasamento di π rispetto al beam 1.

Pertanto, con questo tipo di struttura, avendo riflessioni multiple in fase tra loro ed in controfase rispetto rispetto al primo beam, possiamo diminuire il valore della riflettività.

HR coating → BRAGG REFLECTOR

Abbiamo la stessa struttura che abbiamo nel caso del AR coating, ma in questo caso aggiungiamo in cima un terzo strato con un alto indice di rifrazione, anch'esso avente uno spessore di $1/4$ di lunghezza d'onda.

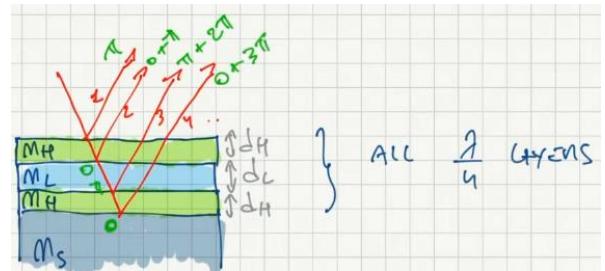
Questa struttura prende il nome di RIFLETTORE DI BRAGG.

Il beam 1 riflesso avrà uno sfasamento di π , il beam 2 avrà uno sfasamento di $0 + \pi$, il beam 3 avrà uno sfasamento $\pi + 2\pi$ e infine il beam 4 avrà uno sfasamento $0 + 3\pi$.

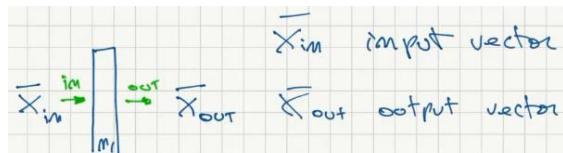
Quindi lo sfasamento è sempre $\pi + m \cdot 2\pi$.

Tutti i beam, incluso il 1, si sommano in fase.

Si conclude che anche se la riflettività di ogni strato è bassa, se impiliamo un certo numero (>2) di strati avremo una riflettività totale alta.



Matrix approach to MDL (numerical analysis)

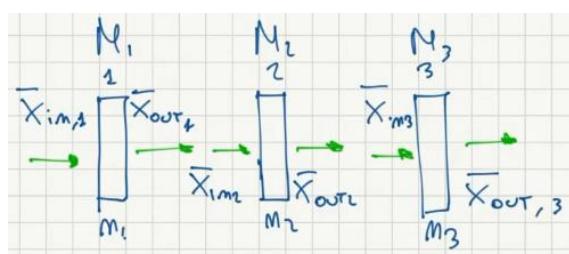


MDL=multi dielectric layer system

L'approccio matriciale è un modo per simulare matematicamente le proprietà di riflettività di una struttura MDL.

Il raggio incidente e quello in uscita sono legati dalla relazione

$$\bar{x}_{in} = M \bar{x}_{out} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \bar{x}_{out}$$



Assumiamo di avere 3 layer, per cui valgono le seguenti condizioni

$$\bar{x}_{in2} = \bar{x}_{out1}$$

$$\bar{x}_{in3} = \bar{x}_{out2}$$

Chiamiamo M_1, M_2 e M_3 le matrici di trasferimento di ognuno di questi layer, quindi possiamo scrivere

$$\bar{x}_{in1} = M_1 \bar{x}_{out2}$$

$$\bar{x}_{in2} = M_2 \bar{x}_{out3}$$

$$\bar{x}_{in3} = M_3 \bar{x}_{out3}$$

Quindi l'intero trasferimento può essere ricavato combinando queste tre equazioni con le due condizioni precedenti

$$\bar{x}_{in1} = M_1 M_2 M_3 \bar{x}_{out3}$$

Quindi in generale possiamo scrivere la matrice totale di trasferimento del sistema e la relazione di trasferimento come

$$M_{tot} = \prod_{i=1}^N M_i$$

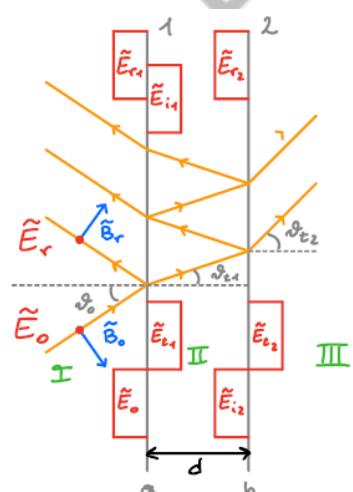
$$\bar{x}_{in1} = M_{tot} \bar{x}_{outN}$$

Matrix treatment (page 391, ch19 Pedrotti)

I due parametriche assegniamo per i vettori di input e di output del sistema sono il campo elettrico ed il campo magnetico.

Abbiamo tre layers n_0, n_1, n_2 e chiameremo le due interfacce che si vengono a creare (a) e (b).

Assumiamo di avere un'onda incidente polarizzata TE.



Indichiamo con \tilde{E}_0 il campo incidente all'interfaccia 1, con \tilde{E}_{r1} la somma dei campi elettrici riflessi dall'interfaccia 1, con \tilde{E}_{t1} la somma dei campi elettrici trasmessi all'interfaccia 1, quindi

$$\tilde{E}_{r1} = \tilde{E}_r + \tilde{E}'_r + \tilde{E}''_r + \dots$$

$$\tilde{E}_{t1} = \tilde{E}_t + \tilde{E}'_t + \tilde{E}''_t + \dots$$

Inoltre indichiamo con \tilde{E}_{i1} la somma dei campi elettrici incidenti all'interfaccia 1 che viaggiano da destra a sinistra, con \tilde{E}_{i2} la somma dei campi elettrici che incidono sull'interfaccia 2 che viaggiano da sinistra a destra e con \tilde{E}_{t2} la somma dei campi elettrici trasmessi attraverso l'interfaccia 2 muovendosi verso destra.

Ora dobbiamo trovare un modo per collegare tutti i campi elettrici. Per farlo dobbiamo applicare la CONSERVAZIONE DEI CAMPI \tilde{E} e \tilde{B} ALLE DUE INTERFACCE.

Possiamo scrivere il primo set di equazioni come

$$a: \begin{cases} \tilde{E}_0 + \tilde{E}_{r1} = \tilde{E}_{t1} + \tilde{E}_{i1} \equiv \tilde{E}_a \\ b: \begin{cases} \tilde{E}_{i1} + \tilde{E}_{r2} = \tilde{E}_{t2} \equiv \tilde{E}_b \end{cases} \end{cases}$$

Dove \tilde{E}_a ed \tilde{E}_b sono i campi elettrici totali rispettivamente all'interfaccia (a) e (b).

Per la conservazione del campo magnetico dobbiamo considerare la componente di campo magnetico parallela all'interfaccia quindi scriveremo

$$a: \begin{cases} \tilde{B}_0 \cos \theta_0 - \tilde{B}_{r1} \cos \theta_0 = \tilde{B}_{t1} \cos \theta_{t1} - \tilde{B}_{i1} \cos \theta_{t1} \equiv \tilde{B}_a \\ b: \begin{cases} \tilde{B}_{i2} \cos \theta_{t1} - \tilde{B}_{r2} \cos \theta_{t1} = \tilde{B}_{t2} \cos \theta_{t2} \equiv \tilde{B}_b \end{cases} \end{cases}$$

Per semplificare le espressioni, ricordiamo che $\tilde{B} = \frac{n}{c_0} \tilde{E}$ e definiamo le costanti $\gamma_0 = \frac{n_0}{c_0} \cos \theta_0$, $\gamma_1 = \frac{n_1}{c_1} \cos \theta_1$ e $\gamma_2 = \frac{n_2}{c_2} \cos \theta_2$. Quindi possiamo riscrivere le espressioni del campo magnetico, cioè il secondo set di equazioni, come

$$a: \begin{cases} \gamma_0 (\tilde{E}_0 - \tilde{E}_{r1}) = \gamma_1 (\tilde{E}_{t1} - \tilde{E}_{i1}) \equiv \tilde{B}_a \\ b: \begin{cases} \gamma_1 (\tilde{E}_{i2} - \tilde{E}_{r2}) = \gamma_2 \tilde{E}_{t2} \equiv \tilde{B}_b \end{cases} \end{cases}$$

Notiamo che abbiamo 7 variabili, ma solo 4 equazioni, quindi dobbiamo trovare altre 3 relazioni.

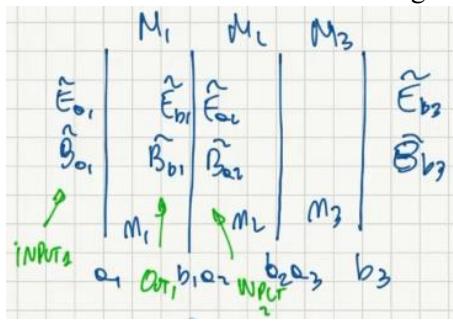
Potremmo scrivere $\tilde{E}_{i2} = \tilde{E}_{t1} e^{-j\delta}$ e $\tilde{E}_{i1} = \tilde{E}_{r2} e^{-j\delta}$, dove $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 d \cos \theta$ (calcolato per una distanza d e non $2d$ come abbiamo fatto precedentemente nel caso di FP).

Ora, se conosciamo il campo elettrico incidente \tilde{E}_0 , possiamo trovare tutti i campi come una funzione del campo elettrico incidente.

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_a \\ \tilde{B}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_b \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & j \frac{\sin \delta}{\gamma_1} \\ j \gamma_1 \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_b \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix}$$

Ora che abbiamo analizzato un singolo layer, passiamo a considerare un multilayer stack di 3 layer



Quindi possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{a1} \\ \tilde{B}_{a1} \end{bmatrix} = M_1 M_2 M_3 \begin{bmatrix} \tilde{E}_{b3} \\ \tilde{B}_{b3} \end{bmatrix}$$

dove $M_{tot} = M_1 M_2 M_3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$.

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_a = \tilde{E}_0 + \tilde{E}_{r1} \\ \tilde{B}_a = \gamma_0 (\tilde{E}_0 - \tilde{E}_{r1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_b = \tilde{E}_{t2} \\ \tilde{B}_b = \gamma_2 \tilde{E}_{t2} \end{bmatrix}$$

Risolvendo, otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0 + \tilde{E}_{r1} &= m_{11} \tilde{E}_{t2} + m_{12} \gamma_2 \tilde{E}_{t2} \Rightarrow 1 + \frac{\tilde{E}_{r1}}{\tilde{E}_0} = (m_{11} \tilde{E}_{t2} + m_{12} \gamma_2 \tilde{E}_{t2}) \frac{1}{\tilde{E}_0} \\ \gamma_0 (\tilde{E}_0 + \tilde{E}_{r1}) &= m_{21} \tilde{E}_{t2} + m_{22} \gamma_2 \tilde{E}_{t2} \Rightarrow \gamma_0 \left(1 + \frac{\tilde{E}_{r1}}{\tilde{E}_0} \right) = (m_{21} \tilde{E}_{t2} + m_{22} \gamma_2 \tilde{E}_{t2}) \frac{1}{\tilde{E}_0} \end{aligned}$$

Dove $\frac{\tilde{E}_{r1}}{\tilde{E}_0} = \tilde{r}$ è il COMPLEX FIELD REFLECTION COEFFICIENT OF THE STACK ed

$\frac{\tilde{E}_{t2}}{\tilde{E}_0} = \tilde{t}$ è il COMPLEX FIELD TRANSMISSION COEFFICIENT OF THE STACK.

Quindi otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} 1 + \tilde{r} = m_{11} \tilde{t} + m_{12} \gamma_2 \tilde{t} \\ \gamma_0 (1 - \tilde{r}) = m_{21} \tilde{t} + m_{22} \gamma_2 \tilde{t} \end{cases}$$

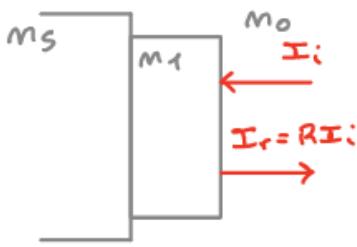
Dalle quali ricaviamo il coefficiente di riflessione dello stack

$$\tilde{r} = \frac{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_2 m_{12} - m_{21} - \gamma_2 m_{22}}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_2 m_{12} + m_{21} + \gamma_2 m_{22}}$$

Possiamo a questo punto ricavare anche la riflettività e la trasmissività dello stack

$$R = \tilde{r} \cdot \tilde{r}^* = |\tilde{r}|^2 \Rightarrow T = 1 - R$$

ESEMPIO 1: SINGLE LAYER NEL CASO DI INCIDENZA NORMALE



Siccome abbiamo incidenza normale, avremo $\cos \theta_0 = \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = 1$; inoltre, sappiamo che

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{n_0}{c_0}, \gamma_1 = \frac{n_1}{c_0}, \gamma_2 = \frac{n_2}{c_0} \\ \delta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 d \\ R &= \frac{I_R}{I_0} \\ M &= \begin{bmatrix} \cos \delta & j \frac{c_0}{n_1} \sin \delta \\ \frac{n_1}{c_0} \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

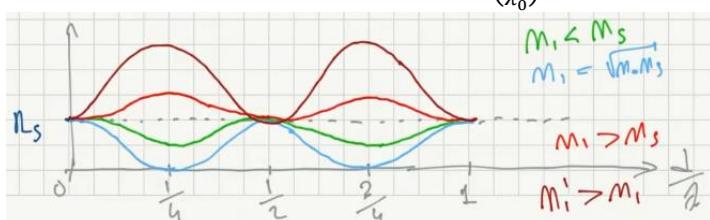
M è una matrice diagonale.

La riflettività di un singolo layer di dielettrico depositato su un substrato sarà

$$R = \tilde{r}\tilde{r}^* = \frac{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos \delta - (n_0 n_s - n_1^2) \sin \delta}{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos \delta + (n_0 n_s - n_1^2) \sin \delta} = \frac{I_R}{I_0}$$

Possiamo fare il plot di questa riflettività in funzione dello spessore del layer, in quanto δ dipende dallo spessore.

In particolare, potremmo fare il plot di $R \left(\frac{d}{\lambda_0} \right)$



$$R_S = \frac{(n_0 - n_s)^2}{(n_0 + n_s)^2}$$

Se $n_1 < n_s$, quello che succede è che tra il layer e il substrato abbiamo una riflessione esterna, cioè abbiamo uno sfasamento di π e quindi abbiamo una diminuzione periodica di R_S con i minimi a multipli interi di $\lambda/4$.

I minimi assoluti sono raggiunti quando $n_1 = \sqrt{n_0 n_s}$

perché è la condizione per cui i due beam rifletti sono in opposizione di fase e hanno stessa ampiezza (stesso campo).

Se invece $n_1 > n_s$, avremo sfasamento nullo all'interfaccia tra il layer e il substrato e quindi avremo un aumento periodico della riflettività R_S , con i massimi a multipli interi di $\lambda/4$.

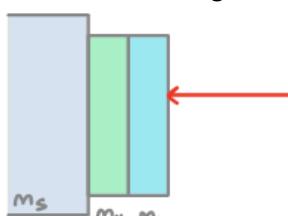
Più n_1 è maggiore di n_s , maggiore è l'aumento di R_S .

In conclusione, abbiamo $R = 0$ se $n_1 = \sqrt{n_0 n_s} \wedge d = m \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} d = \frac{\pi}{2}$, cioè se la matrice di trasferimento è

$$M = \begin{bmatrix} 0 & j c_0 / n_1 \\ j n_1 / c_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ESEMPIO 2: DOUBLE LAYER PER AR COATING NEL CASO DI INCIDENZA NORMALE

Nel caso di un singolo layer, al fine di avere $R = 0$, dobbiamo avere $n_1 = \sqrt{n_0 n_s} = \sqrt{n_s}$ se $n_0 = 1$ e $d = m \lambda/4$.



Abbiamo visto che al fine di avere un AR coating dobbiamo avere

$$d = \frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda_n} d = \frac{\pi}{2}$$

Quindi la matrice di trasferimento del layer a basso indice di rifrazione sarà

$$M_L = \begin{bmatrix} 0 & j c_0 / n_L \\ j n_L / c_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mentre la matrice di trasferimento del layer ad alto indice di rifrazione sarà

$$M_H = \begin{bmatrix} 0 & j c_0 / n_H \\ j n_H / c_0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di trasferimento del double layer sarà

$$M_{LH} = M_L \cdot M_H = \begin{bmatrix} -n_H / n_L & 0 \\ 0 & n_L / n_H \end{bmatrix}$$

Quindi il coefficiente di riflessione totale è

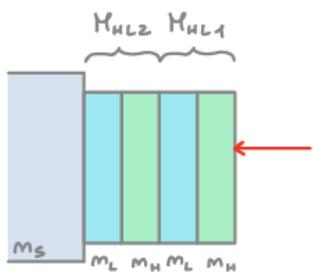
$$\tilde{r}_{LH} = \frac{\frac{n_0}{c_0} \left(-\frac{n_H}{n_L} \right) - \frac{n_s}{c_0} \left(-\frac{n_L}{n_H} \right)}{\frac{n_0}{c_0} \left(-\frac{n_H}{n_L} \right) + \frac{n_s}{c_0} \left(-\frac{n_L}{n_H} \right)}$$

e al fine di avere un AR coating vogliamo avere $\tilde{r}_{LH} = 0$.

Questo significa che il numeratore deve essere nullo e quindi che $\Rightarrow \frac{n_0}{n_s} = \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^2 \Rightarrow \frac{n_L}{n_H} = \sqrt{\frac{n_0}{n_s}} \Rightarrow \frac{n_H}{n_L} = \sqrt{\frac{n_s}{n_0}}$ se $n_0 = 1$.

Nella pratica questa è una condizione più facile da soddisfare rispetto al condizione per un singolo layer.

ESEMPIO 3: MULTILAYER PER HR COATING NEL CASO DI INCIDENZA NORMALE



Abbiamo già visto che al fine di avere HR coating, dobbiamo invertire l'ordine dei layer rispetto al caso di AR coating e quindi dobbiamo avere un layer con basso indice di rifrazione a contatto con il substrato e un layer con alto indice di rifrazione come layer iniziale.

Incidenza normale: $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$

Assumendo di avere N double-layer (di tipo HL per avere HR coating), la matrice di trasferimento totale è

$$M_{tot} = M_{HL}^N = \begin{bmatrix} -\frac{n_L}{n_H} & 0 \\ 0 & \frac{n_H}{n_L} \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \left(-\frac{n_L}{n_H}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^N \end{bmatrix}$$

Quindi il coefficiente di riflessione totale è

$$\tilde{r}_{HL}^N = \frac{n_0 \left(-\frac{n_L}{n_H}\right)^N - n_s \left(-\frac{n_H}{n_L}\right)^N}{n_0 \left(-\frac{n_L}{n_H}\right)^N + n_s \left(-\frac{n_H}{n_L}\right)^N}$$

Moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per $\frac{1}{n_s} \left(-\frac{n_L}{n_H}\right)^N$, otteniamo facilmente la riflessività totale

$$R = |r|^2 = \frac{\left(\frac{n_0}{n_s}\right) \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} - 1}{\left(\frac{n_0}{n_s}\right) \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} + 1}$$

Siccome $n_L \ll n_H$ (perché $n_L < n_s$ e $n_H > n_s$) $\Rightarrow \frac{n_L}{n_H} < 1 \Rightarrow \left(\frac{n_L}{n_H}\right)^{2N} \rightarrow 0$ se N è grande e la riflettività tenderà a 1

$$R = 1$$

LASERS: PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

PROPRIETÀ DELLA LUCE EMESSA DA UN LASER (Svelto Ch1)

1. ALTA CORENZA TEMPORALE

a. ALTA MONOCROMATICITÀ

questo ci permette di emettere una lunghezza d'onda molto precisa e quindi di essere in una situazione vicina all'avere una singola armonica.

Siccome $S(\nu) = \mathfrak{F}(\Gamma(\tau))$ abbiamo che $\Delta\nu_{FWHM}$ è stretto. Al giorno d'oggi possiamo raggiungere

$$\frac{\Delta\nu_{FWHM}}{\nu_0} \approx 10^{-18}$$

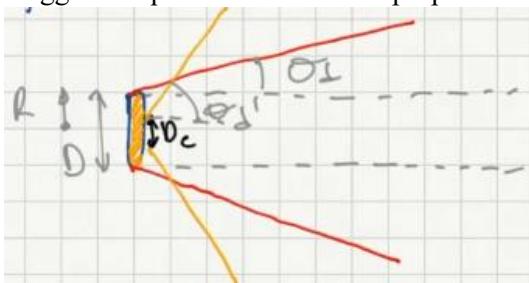
b. IMPULSI ULTRA CORTI

La durata di un impulso è proporzionale al reciproco del FWHM: $\Delta\tau_P = \frac{1}{\Delta\nu_{FWHM}}$

2. ALTA CORENZA SPAZIALE

a. BASSA DIVERGENZA DEL BEAM

Significa che ogni volta che proviamo a confinare la luce, questa tende a diffondersi su un angolo maggiore e questo deriva da una proprietà di diffrazione della luce che vedremo in seguito.



Se D è il diametro dell'area di emissione, cioè l'area dell'apertura, la luce emessa non sarà confinata alla sezione dell'apertura, ma si diffonderà con un angolo maggiore che prende il nome di ANGOLO DI DIVERGENZA θ_d . Nel caso di un laser, l'angolo di divergenza è legato al diametro dell'apertura dalla formula

$$\theta_d = \lambda/D$$

In realtà questa relazione è valida per ogni sorgente di luce con una perfetta coerenza spaziale e se questa relazione è valida, la sorgente di luce è detta DIFFRACTION LIMITED LIGHT SOURCE (DIFL).

I laser sono sempre sorgenti DIFL.

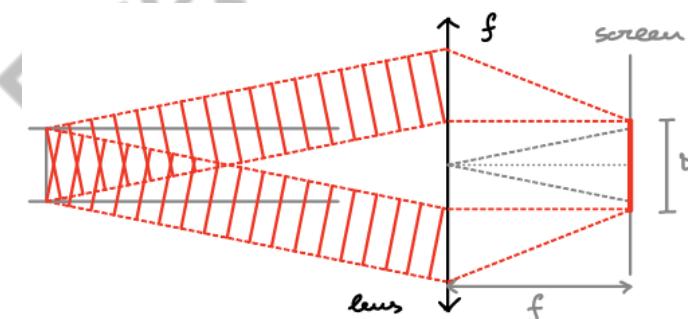
Quindi, più è grande il diametro del beam, minore è l'angolo di divergenza.

Nel caso avessimo una sorgente di luce con una coerenza spaziale limitata/parziale, possiamo trovare un DIAMETRO DI CORENZA D_c tc $D_c < D$ e l'angolo di divergenza sarà dato da

$$\theta_d = \lambda/D_c$$

Siccome $D_c < D \Rightarrow \theta_{d,incoherent} \gg \theta_{d,coherent}$.

b. ALTA FOCALIZZABILITÀ (HIGH FOCUSABILITY)



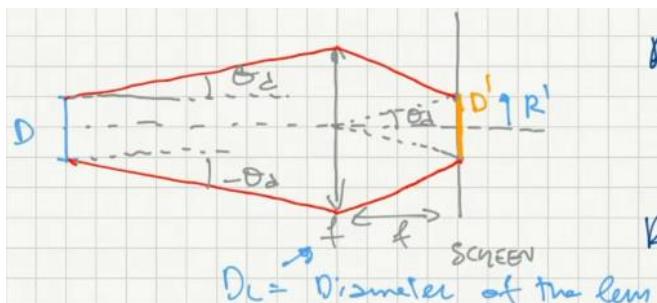
Consiste nell'abilità di focalizzare il beam su spot di dimensioni molto piccole.

Consideriamo beam con diametro D , una lente con lunghezza focale f ed uno schermo posto ad una distanza dalla lente pari alla lunghezza focale stessa.

Si originano due onde piane una con angolo θ_d e l'altra con angolo $-\theta_d$ rispetto all'asse focale.

Sappiamo che i raggi che colpiscono il centro della lente non vengono modificati, diversamente i raggi che propagano in direzione θ_d e $-\theta_d$ verranno concentrati nello spot di diametro D' (e raggio R') e possiamo scrivere che

$$\begin{cases} R' = \theta_d \cdot f \\ \theta_d = \lambda/D \end{cases} \Rightarrow R' = f \frac{\lambda}{D}$$



Se vogliamo uno spot molto piccolo (quindi un focus beam molto piccolo), dobbiamo avere un angolo di divergenza θ_d molto piccolo, il che significa avere un diametro molto grande.

Il massimo valore del diametro del beam che possiamo avere è $D = D_L$, dove D_L è il diametro della lente. Pertanto, se $D = D_{MAX} = D_L \Rightarrow R' = R'_{MIN}$.

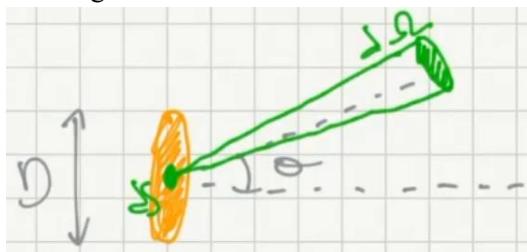
Quindi il minimo raggio per lo spot è

$$R' = \lambda \frac{f}{D_L} = \lambda \cdot NA$$

$NA = D_L/2f$ è un parametro che prende il nome di APERTURA NUMERICA e dipende dalla lente che si utilizza. Più piccola è l'apertura numerica, minore sono le dimensioni del focus beam/focus spot.

3. ALTA BRILLANTEZZA

La brillantezza rappresenta la potenza emessa dalla sorgente per unità d'area e per unità di solid angle. Cosa significa?



Consideriamo una sorgente S di diametro D , la luce emessa da questa sorgente si diffonderà su molti angoli e se consideriamo un'area infinitesima di sorgente dS , questa emetterà luce in infinite possibili direzioni.

Se consideriamo la luce emessa nella direzione che forma un angolo θ con l'asse focale della sorgente, questa avrà una certa divergenza che viene descritta dal solid angle $d\Omega$.

Quindi la potenza infinitesima dP emessa dall'infinitesima area dS sulla direzione con angolo θ è data da

$$dP(\theta) = B(\theta) \cos \theta \cdot dS \cdot d\Omega$$

dove $B(\theta)$ è una grandezza che prende il nome di BRILLANTEZZA.

REMARK 1

Esistono sorgenti di luce particolari, come i laser e i led, che prendono il nome di SORGENTI LAMBERTIANE per cui la brillantezza non dipende dal solid angle, ma è una costante

$$B(\theta) = B = \text{constant}$$

REMARK 2

Siccome l'emissione di un laser è altamente direzionale, cioè l'angolo di divergenza è molto piccolo, possiamo considerare $\cos \theta \approx 1$ (perché θ_d è molto piccolo), quindi (considerando anche $B = \text{const}$) la potenza totale emessa da un laser beam è data da

$$\int dP = \int_S \int_{\Omega} B \cdot dS \cdot d\Omega \Rightarrow P = B \cdot S \cdot \Omega \Rightarrow B = \frac{P}{S \cdot \Omega}$$

Se chiamiamo Σ l'area sulla quale valutiamo la potenza e z , la distanza tra la sorgente e Σ , possiamo scrivere il solid angle come

$$\Omega = \frac{\Sigma}{z^2}$$

dove $\Sigma = \pi R'^2 = \pi (\theta_d \cdot z)^2$, in cui $\theta_d = \lambda/D$, quindi $\Sigma = \pi \left(\frac{\lambda}{D} \cdot z \right)^2$ e il solid angle può essere riscritto come

$$\Omega = \frac{\pi \left(\frac{\lambda}{D} \cdot z \right)^2}{z^2} = \pi \cdot \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2$$

Siccome la superficie della sorgente è $S = \pi \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$, possiamo scrivere la potenza totale emessa come

$$P = B \cdot \frac{(\pi \cdot \lambda)^2}{4}$$

Quindi la brillantezza del laser sarà

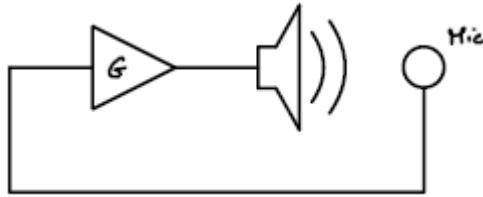
$$B = \frac{4P}{(\pi \cdot \lambda)^2}$$

PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DI UN LASER

L'acronimo LASER sta per LIGHT AMPLIFICATION BY STIMULATED EMISSION OF RADIATION.

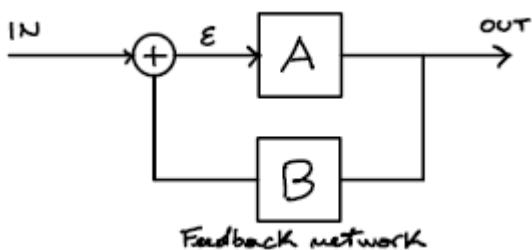
Quindi, un laser è un amplificatore di luce che però non ha alcuna grandezza in ingresso, quindi in realtà è un oscillatore. Al fine di avere un oscillatore dobbiamo avere un feedback positivo.

Il principio di funzionamento di un laser è simile all'effetto Larsen in campo audio.



In questo caso $P_{in} = P_{out}$ e anche se non alimentiamo il microfono con una sorgente di segnale esterna, un segnale audio continua a circolare nel sistema e ad autosostenersi grazie al feedback positivo. Siccome il segnale audio che circola all'interno del sistema è un segnale sinusoidale, per autosostenersi questo deve soddisfare alcune relazioni sull'ampiezza e sulla fase che prendono il nome di CONDIZIONI DI BARKHAUSEN.

DIAGRAMMA A BLOCCHI DI UN OSCILLATORE



il segnale errore è $\varepsilon = IN + B \cdot OUT$ e l'uscita è $OUT = \varepsilon \cdot A$. Possiamo riscrivere il segnale di uscita come

$$OUT = A(IN + B \cdot OUT) \Rightarrow OUT = \frac{A}{1 - AB} \cdot IN$$

dove il prodotto tra il guadagno a ciclo aperto e il guadagno di feedback prende il nome di guadagno d'anello $AB = G_{loop}$.

La condizione di oscillazione è

$$OUT \neq 0 \text{ anche se } IN = 0$$

in regime stazionario, cioè una volta esauritosi il transitorio.

Questo significa che il sistema oscilla solo se

$$\frac{A}{1 - AB} \rightarrow \infty \Rightarrow 1 - AB \rightarrow 0 \Rightarrow G_{loop} = 1$$

che significa

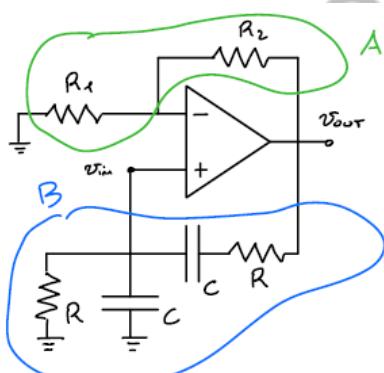
$$G_{loop} = 1 \Rightarrow \begin{cases} |G_{loop}| = 1 : \text{condizione sull'ampiezza} \\ \arg[G_{loop}] = 2m\pi : \text{condizione sulla fase} \end{cases} \Rightarrow \text{CONDIZIONI DI BARKHAUSEN}$$

Quindi un laser è un sistema ottico costituito da uno stadio amplificatore con un feedback positivo che soddisfa le condizioni di Barkhausen almeno per una frequenza ottica ν_L . Il sistema deve comunque soddisfare il principio di conservazione dell'energia, cioè se abbiamo un'uscita che è maggiore dell'ingresso, l'energia deve essere fornita in qualche modo dall'esterno e infatti viene fornita dal power supply.

Quindi un oscillatore è composto da

1. Un elemento attivo (amplificatore)
2. Power supply
3. Feedback network

ESEMPIO: OSCILLATORE DI WIEN-BRIDGE (oscillatore più semplice in elettronica)



Consideriamo un amplificatore non invertente con feedback negativo, al quale collegiamo una positive feedback network al fine di creare l'oscillatore.

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A$$

$$\frac{v_{in}}{v_{out}} = \frac{s}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{1}{(RC)^2}} = B$$

$$s = \alpha + j\omega$$

In regime stazionario, cioè per $\alpha = 0 \Rightarrow s = j\omega$, abbiamo

$$G_{loop} = AB = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{j\omega}{RC}}{-\omega^2 + j\frac{3}{RC}\omega + \frac{1}{(RC)^2}}$$

Quindi al fine di soddisfare le condizioni di Barkhausen, dovremo settare degli opportuni parametri per la frequenza e per i componenti

$$\begin{cases} |G_{loop}| = 1 \Rightarrow |G_{loop}| = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow R_2 = 2R_1 \\ \arg[G_{loop}] = 2m\pi \stackrel{m=0}{\Leftrightarrow} 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\{G_{loop}\} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC} : \text{frequenza di risonanza} \end{cases}$$

AMPLIFICATORE OTTICO → OSCILLATORE OTTICO

Interazione tra radiazione e materia

Quando studiamo l'interazione tra la radiazione e la materia dobbiamo tenere in conto 2 fattori:

1. QUANTIZZAZIONE DELLA RADIAZIONE

Campo elettromagnetico @ frequenza ottica

- Classical approach: $E(t) = E_0 \cos(\varphi - 2\pi\nu_L t)$; $I \propto |E|^2$
- Quantum electrodynamic approach → consideriamo il campo EM come un ensemble di pacchetti di energia simili a particelle. Questi pacchetti sono chiamati fotoni e la loro energia è

$$\Delta E_{ph} = h\nu_L$$

dove h è la COSTANTE DI PLANK ed è pari a $h = 6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

Se consideriamo un'area Σ e un'onda elettromagnetica di frequenza ν_L ed intensità I che la colpisce; la potenza che attraversa la superficie Σ è

$$P_\Sigma = I \cdot \Sigma = \frac{\Delta E_{wave}}{\Delta t}$$

Ma l'energia dell'onda può essere scritta come il prodotto dell'energia di ogni fotone per il numero dei fotoni che colpiscono la superficie cioè

$$\Delta E_{wave} = \Delta E_{ph} \cdot n_{ph}$$

Quindi abbiamo

$$P_\Sigma = I \cdot \Sigma = \frac{n_{ph} \cdot \Delta E_{ph}}{\Delta t}$$

Pertanto, l'intensità dell'onda elettromagnetica incidente è

$$I = \frac{n_{ph}}{\Sigma \cdot \Delta t} \cdot \Delta E_{ph} = \frac{n_{ph}}{\Sigma \cdot \Delta t} \cdot h\nu_L = \Phi \cdot h\nu_L$$

dove $\Phi = \frac{n_{ph}}{\Sigma \cdot \Delta t}$ è il FLUSSO DI FOTONI, cioè il numero di fotoni che attraversa l'unità di superficie per unità di tempo.

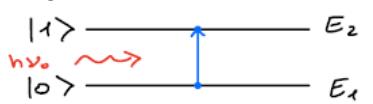
2. QUANTIZZAZIONE DELLA MATERIA

Per materia si intende il materiale che interagisce con la luce, il quale è composto da ioni, atomi e molecole in stato solido, liquido o gassoso.

La quantità di energia che può essere assorbita dalla materia è quantizzata, cioè significa che la materia non può assumere qualsiasi valore di energia, ma può assumere solo determinati valori discreti di energia o al limite assumere un valore continuo di energia, ma solamente all'interno di un determinato range che prende il nome di banda di energia.

Quindi avremo il livello di energia più basso, detto GROUND STATE (stato fondamentale), e poi avremo livelli energetici superiori (che non devono essere necessariamente equi spaziati tra loro) o bande di energia. In generale, questi livelli di energia non sono i livelli di energia che può assumere un singolo elettrone (è così solo nel caso di un atomo composto da un solo elettrone, come nel caso dell'idrogeno), ma sono i livelli che può assumere l'ensemble di elettroni del materiale.

All'equilibrio termodinamico, tutti gli emettitori (atomi, molecole, ioni, etc) sono al ground state/stato fondamentale, ma è possibile promuovere un emettitore ad uno stato più alto (stato eccitato), fornendo energia, cioè calore.



La CONDIZIONE DI RISONANZA, cioè la condizione che ci permette di promuovere un emettitore da uno stato ad un altro ad energia più alta, è che l'energia del fotone sia in risonanza con l'energia di transizione, cioè che

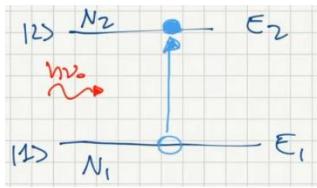
$$\Delta E_{ph} = E_2 - E_1 \Rightarrow \nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Questo processo di promuovere un emettitore da uno stato ad un altro ad energia maggiore fornendo un fotone a frequenza di risonanza è detto ASSORBIMENTO.

Processi che possono avvenire durante l'interazione tra luce e materia

1. ASSORBIMENTO STIMOLATO

Consideriamo due stati E_1 e E_2 , con popolazione rispettivamente N_1 ed N_2 .



Se il fotone incidente ha energia pari alla differenza di energia tra i due livelli energetici

$$\Delta E_{ph} = h\nu_0 = E_2 - E_1$$

Qual è la probabilità di avere la transizione di un emettitore dal livello più basso a quello più alto?

Possiamo parlare sia di probabilità che di rate (velocità) a seconda se a colpire il materiale è un solo fotone (allora parleremo di probabilità) o più fotoni (in questo caso parleremo di rate).

La POPOLAZIONE è il numero di elementi per unità di volume e in equilibrio termodinamico possiamo scrivere

$$N_k \propto e^{\frac{E_k}{kT}}$$

La velocità con la quale la popolazione N_1 viene promossa dal livello energetico E_1 al livello energetico E_2 è data dalla seguente espressione (che dimostreremo in seguito)

$$\frac{dN_1}{dt} = -W_{12}N_1$$

dove W_{12} è il TRANSITION RATE da 1 a 2 che può essere espresso come

$$W_{12} = \Phi \cdot \sigma_{12}$$

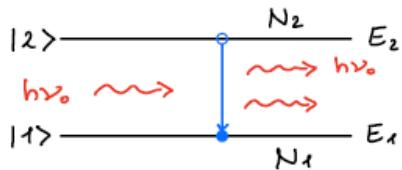
dove σ_{12} è detto ABSORPTION CROSS-SECTION.

Quindi

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Phi \cdot \sigma_{12} \cdot N_1$$

Nel processo di assorbimento, per il principio di conservazione di energia, il fotone viene assorbito dal sistema e quindi in uscita non abbiamo fotoni.

2. EMISSIONE STIMOLATA



Consideriamo lo stesso materiale con gli stessi 2 livelli energetici, per cui continua a valere la relazione $\Delta E_{ph} = h\nu_0 = E_2 - E_1$.

Assumiamo però di avere una condizione iniziale differente in questo caso, cioè assumiamo che il materiale si trovi inizialmente allo stato E_2 .

Quello che succede è che c'è una probabilità finita non nulla per cui il

fotone incidente stimoli la transizione dell'emettitore dal livello energetico più alto a quello più basso.

In questo caso, per garantire la conservazione dell'energia del sistema, abbiamo che l'energia persa dal sistema, viene emessa sotto la forma di un secondo fotone. Quindi in uscita dal sistema avremo nuovamente il fotone originale che in questo caso non viene assorbito ed un fotone aggiuntivo che viene emesso per il principio di conservazione dell'energia.

Il fotone emesso avrà le seguenti caratteristiche

- $h\nu_0 = E_2 - E_1 \Rightarrow \Delta E_{ph,emitted} = \Delta E_{ph,stimulating} \Rightarrow \nu_{emitted} = \nu_0$: ha la stessa frequenza del fotone stimolatore
- ha la stessa fase del fotone stimolatore
- ha la stessa direzione del fotone stimolatore

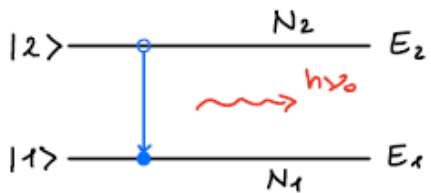
Il fatto che il fotone emesso abbia stessa frequenza, fase e direzione di quello stimolatore è molto importante, perché ci dice che la radiazione emessa da questo processo si somma coerentemente con la radiazione stimolante. Quindi se stimoliamo il sistema con una radiazione monocromatica, in uscita avremo la stessa radiazione, ma semplicemente amplificata, cioè si verifica un processo di amplificazione coerente.

In questo caso possiamo scrivere la velocità di transizione come

$$\frac{dN_2}{dt} = -W_{21}N_2 = -\Phi\sigma_{21}N_2$$

REMARK: $\sigma_{12} = \sigma_{21} \Rightarrow W_{12} = W_{21}$

3. EMISSIONE SPONTANEA



Supponiamo nuovamente che il sistema si trovi inizialmente allo stato 2. Allora c'è una probabilità finita non nulla che il sistema decadi spontaneamente dallo stato 2 allo stato 1, causando l'emissione di un fotone di energia $\Delta E_{ph} = h\nu_0 = E_2 - E_1$ (per la conservazione dell'energia). Non essendoci un fotone stimolante, la fase e la direzione del fotone emesso sono casuali.

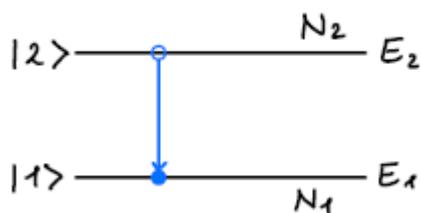
Se è presente un campo EM, il fotone emesso è completamente incorrelato ai fotoni del campo esterno, quindi questi fotoni non contribuiscono al processo di amplificazione.

In questo caso scriveremo

$$\frac{dN_2}{dt} = -AN_2 = \frac{N_2}{\tau_{sp}}$$

dove A prende il nome di COEFFICIENTE DI TRANSIZIONE DI EINSTEIN e τ_{sp} è la COSTANTE DI DECADIMENTO DI EMISSIONE SPONTANEA.

4. DECADIMENTO NON-RADIOATTIVO

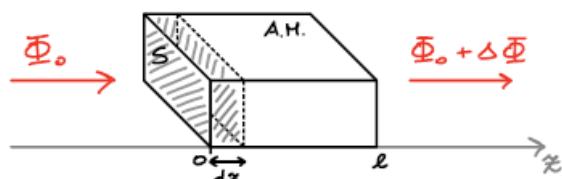


in questo caso, quando un emettitore decade dal livello 2 al livello 1 non viene emesso alcun fotone, ma l'energia $\Delta E_{21} = E_2 - E_1$ può essere emessa in 2 modi:

- Aumentando l'energia cinetica molecolare (se il materiale è in fase gassosa)
- Aumentando l'energia vibrazionale del reticolo atomico (se il materiale è in stato solido)

Interazione tra luce e materia

Ora vediamo come ottenere l'amplificazione ottica, considerando un materiale amplificante.



Il numero totale di fotoni che attraversa la superficie S nell'unità di tempo è dato da $\Phi_0 \cdot S$, quindi il numero di fotoni aggiunti o rimossi al/dal campo EM è $S \cdot d\Phi$, il quale è definito come

$$S \cdot d\Phi = \left(-\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} d\Omega - \left(-\frac{dN_1}{dt} \right)_{ABS} d\Omega$$

dove $\left(-\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} d\Omega$ è il numero di fotoni aggiunti per unità di

tempo per emissione stimolata, $\left(-\frac{dN_1}{dt} \right)_{ABS} d\Omega$ è il numero di fotoni rimossi nell'unità di tempo per assorbimento e $d\Omega = S \cdot dz$ è il volume della fetta di materiale considerata.

Quindi abbiamo

$$\begin{cases} S \cdot d\Phi = \left(-\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} d\Omega - \left(-\frac{dN_1}{dt} \right)_{ABS} d\Omega \\ \frac{dN_2}{dt} = -\Phi \sigma_{21} N_2; \quad \frac{dN_1}{dt} = -\Phi \sigma_{12} N_1; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma \end{cases} \Rightarrow S \cdot d\Phi = (N_2 - N_1) \sigma \cdot \Phi \cdot S \cdot dz$$

Dalla quale otteniamo

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = (N_2 - N_1) \sigma \cdot dz$$

Definendo $\Delta N = N_2 - N_1$ e integrando, si ottiene il flusso di fotoni in uscita

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{1}{\Phi} d\Phi = \int_0^{\ell} \Delta N \sigma dz \Rightarrow \ln \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = \Delta N \sigma \ell \Rightarrow \Phi(\ell) = \Phi_0 e^{\Delta N \sigma \ell}$$

- Se $N_2 > N_1 \Rightarrow \Phi(\ell) > \Phi_0$
- Se $N_2 < N_1 \Rightarrow \Phi(\ell) < \Phi_0$

Siccome l'intensità è definita come $I = \Phi \cdot \Delta E_{ph} = \Phi \cdot h\nu_0$, possiamo scrivere

$$I(\ell) = I_0 e^{\Delta N \sigma \ell}$$

All'equilibrio termodinamico $N_1 > N_2 \Rightarrow \Delta N \sigma \ell < 0$ quindi dobbiamo fornire dell'energia al materiale per ottenere $\Delta N > 0$, cioè l'**INVERSIONE DELLA POPOLAZIONE** e in questo modo il materiale agisce come un amplificatore di fotoni. Quindi, al fine di avere il materiale in grado di amplificare la luce, dell'energia deve essere fornita

dall'esterno al fine di ottenere la condizione di inversione della popolazione. Il mezzo usato per fornire quest'energia al materiale è un SISTEMA DI POMPAGGIO. Una volta che questa energia viene fornita il materiale agisce come amplificatore ($\Delta N > 0$) e prende il nome di MATERIALE ATTIVO.

OSCILLATORE LASER

Abbiamo visto che al fine di creare un oscillatore, dobbiamo avere un amplificatore, il quale è costituito da un materiale capace di interagire con il flusso di fotoni incidente.

In uscita avremo un flusso di fotoni che dipende dallo stato di inversione del materiale.

Anche il materiale è quantizzato e possiamo considerarlo come la somma di diversi livelli di energia. In questo caso considereremo solamente due stati: lo stato (1) e lo stato (2). Usando un approccio quantistico, abbiamo trovato che il rate di assorbimento del livello basso è $\frac{dN_1}{dt} = -W_{12}N_1$ e il rate di emissione del livello alto è $\frac{dN_2}{dt} = -W_{21}N_2$, dove $W_{12} = W_{21} = W$ e $W_{12} = \sigma_{12}\Phi$, $W_{21} = \sigma_{21}\Phi$, pertanto avremo che l'absorption cross section e l'emission cross section sono identiche $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma$.

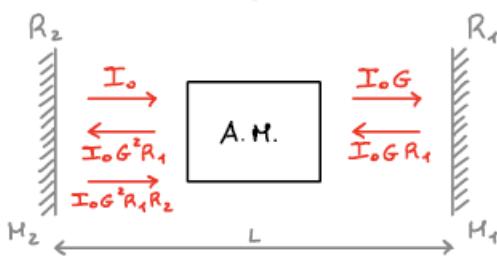
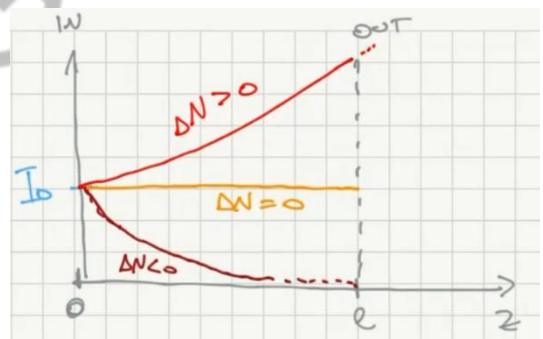
L'energia del fotone deve essere risonante con l'energia di transizione tra i due livelli, cioè $\Delta E_{ph} = E_2 - E_1$ e quindi che $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$.

Abbiamo poi trovato che il flusso di fotoni in uscita può essere scritto come $\Phi(\ell) = \Phi_0 e^{\Delta N \sigma \ell}$, dove $\Delta N = N_2 - N_1$.

Siccome la popolazione di ogni stato segue la statistica di Boltzman, cioè $N \propto e^{-\frac{E}{kT}}$, allora avremo che $\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}$.

Dato che $E_2 - E_1 = E_{ph} \approx 1 \text{ eV}$ e $kT \approx 25 \text{ meV}$, allora avremo che $\frac{N_2}{N_1} \approx 0$, che significa che all'equilibrio termodinamico, la popolazione totale $N_t = N_1 + N_2$ è allo stato più basso, cioè che $N_1 = N_t$ e $N_2 = 0$.

- Quindi all'equilibrio termodinamico abbiamo $N_2 < N_1$ e quindi $\Delta N < 0 \Rightarrow \sigma \Delta N < 0$.
Se chiamiamo $\sigma \Delta N = -\alpha$ dove $\alpha > 0$ è il COEFFICIENTE DI ASSORBIMENTO, possiamo riscrivere il flusso di fotoni in uscita come $\Phi(\ell) = \Phi_0 e^{-\alpha \ell}$ e siccome $I = \Phi \cdot h\nu_0$, allora possiamo scrivere anche $I(\ell) = I_0 e^{-\alpha \ell}$.
- Se ora aggiungiamo un sistema di pompaggio in grado di fornire l'energia necessaria per passare allo stato alto, possiamo aumentare N_2 . Quando $N_2 = N_1$ abbiamo $\Delta N = 0$ e questo significa che l'intensità in uscita dal materiale è uguale all'intensità in ingresso (lo stesso vale per i flussi di fotoni) $I(\ell) = I_0$ e questa condizione prende il nome di CONDIZIONE DI TRASPARENZA.
NOTA: questa non è una condizione di Barkhausen
- Se aumentiamo ancora N_2 , arriveremo alla condizione in cui $N_2 > N_1 \Rightarrow \Delta N > 0$ e quindi indicando con $\sigma \Delta N = g > 0$ (gain per lunghezza unitaria), possiamo scrivere $I(\ell) = I_0 e^{g \ell}$, dove $e^{g \ell} = G$ è il GAIN TOTALE DEL MATERIALE.



Quanto dobbiamo pompare? Quanto dobbiamo invertire la popolazione affinché il laser inizi ad operare?

Questo dipende dalle perdite dell'intero sistema.

Finora abbiamo considerato solamente un materiale attivo ed un sistema di pompaggio. Ora aggiungiamo un sistema di feedback costituito da una coppia di specchi M_1 e M_2 di riflettività R_1 e R_2 non unitarie.

Questo intero sistema prende il nome di SISTEMA DI FEEDBACK OTTICO o RISONATORE OTTICO o CAVITÀ OTTICA.

Dopo un loop otteniamo un'intensità pari a $I(2L) = I_0 G^2 R_1 R_2$. In realtà, anche altre perdite dovrebbero essere considerate, per esempio quelle date dalla riflettività non nulla della superficie del materiale o quelle date dallo scattering dei fotoni all'interno del materiale. Quindi, chiamando L_i le perdite totali all'interno della cavità possiamo riscrivere l'intensità dopo un loop come $I(2L) = I_0 G^2 R_1 R_2 (1 - L_i)^2$

Ricordiamo che per soddisfare le condizioni di Barkhausen dobbiamo avere $|G_{loop}| = 1$. Quindi dobbiamo avere

$$G_{loop} = \frac{I(2L)}{I_0} = G^2 R_1 R_2 (1 - L_i)^2 = 1$$

E abbiamo visto in precedenza che il gain del materiale è $G = e^{g\ell} = e^{\sigma\Delta N\ell}$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_{loop} &= e^{2\sigma\Delta N\ell} R_1 R_2 (1 - L_i)^2 = 1 \\ \Rightarrow \ln(G_{loop}) &= 2\sigma\Delta N\ell + \ln(R_1) + \ln(R_2) + 2\ln(1 - L_i) = 0 \end{aligned}$$

Siccome $R_1, R_2 < 1 \Rightarrow \ln(R_1), \ln(R_2) < 0$.

Chiamando $\ln(R_1) = -\gamma_1$ e $\ln(R_2) = -\gamma_2$ e $\ln(1 - L_i) = -\gamma_i$ (perdite interne logaritmiche), possiamo riscrivere:

$$2\sigma\Delta N\ell - 2\left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \gamma_i\right] = 0$$

REMARK: Ricordando che $R_1 = 1 - T_1$ dove $T_1 \approx 0$, possiamo linearizzare il logaritmo $\ln(1 - T_1) \approx T_1$, quindi possiamo scrivere $\gamma_1 = -\ln(R_1) = -\ln(1 - T_1) \approx -T_1$.

Chiamando $\gamma = \left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \gamma_i\right]$ che rappresenta le PERDITE LOGARITMICHE TOTALI PER SINGOLO PASSAGGIO NELLA CAVITÀ, possiamo scrivere la condizione di Barkhausen come

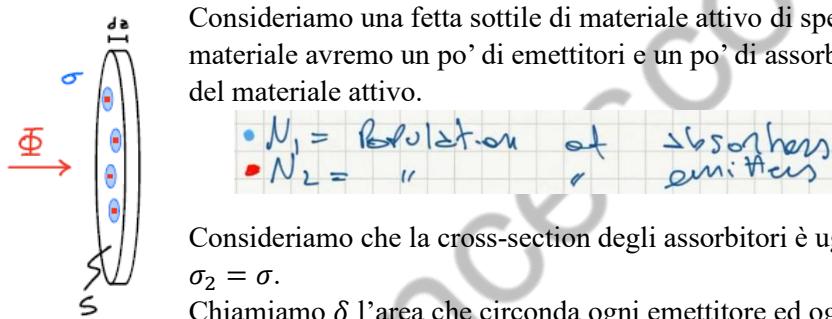
$$\sigma\Delta N\ell - \gamma = 0 \Rightarrow \Delta N_c = \frac{\gamma}{\sigma\ell}$$

dove ΔN_c prende il nome di INVERSIONE DI POPOLAZIONE CRITICA. Questa rappresenta la soglia di inversione da superare al fine di azionare l'operazione del laser.

NOTA: Più piccola è questa soglia, minore è l'energia che dobbiamo iniettare all'interno del sistema con il sistema di pompaggio al fine di azionare il laser.

Significato fisico della cross-section σ

Consideriamo una fetta sottile di materiale attivo di spessore dz . All'interno di questa fetta di materiale avremo un po' di emettitori e un po' di assorbitori a seconda della condizione di inversione del materiale attivo.



Consideriamo che la cross-section degli assorbitori è uguale a quella degli emettitori, cioè che $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Chiamiamo δ l'area che circonda ogni emettitore ed ogni assorbitore.

- Emettitore: se un fotone entra nell'area δ , abbiamo una probabilità unitaria (100%) di avere emissione stimolata (SE)
 - Assorbitore: se un fotone entra nell'area δ , abbiamo una probabilità unitaria (100%) di avere assorbimento
- La variazione di flusso totale è

$$\frac{d\Phi}{\Phi_0} = \left(\frac{d\Phi}{\Phi_0}\right)_{SE} + \left(\frac{d\Phi}{\Phi_0}\right)_{ABS}$$

Se chiamiamo S la superficie del materiale, la variazione di flusso dovuto all'assorbimento è

$$\left(\frac{d\Phi}{\Phi_0}\right)_{ABS} = \frac{d\Sigma_{ABS}}{S}$$

dove $d\Sigma_{ABS}$ è l'area di assorbimento totale del sistema $\rightarrow d\Sigma_{SE} = n_{abs} \cdot \delta$.

Lo stesso può essere calcolato per l'emissione stimolata

$$\left(\frac{d\Phi}{\Phi_0}\right)_{SE} = \frac{d\Sigma_{SE}}{S}$$

dove $d\Sigma_{SE}$ è l'area di emissione totale del sistema $\rightarrow d\Sigma_{SE} = n_{se} \cdot \delta$.

n_{abs} e n_{se} sono rispettivamente il numero degli assorbitori e degli emettitori e possono essere scritti come

$$\begin{aligned} n_{abs} &= N_1 d\Omega = N_1 S dz \\ n_{se} &= N_2 d\Omega = N_2 S dz \end{aligned}$$

dove $d\Omega$ è il volume della fetta di superficie S e spessore dz .

In conclusione possiamo scrivere la variazione relativa di flusso del sistema come

$$\frac{d\Phi}{\Phi_0} = \frac{N_2 S dz \delta}{S} - \frac{N_1 S dz \delta}{S}$$

Integrando otteniamo il flusso in uscita

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi(\ell)} \frac{d\Phi}{\Phi_0} = \int_0^\ell (N_2 - N_1) \delta \cdot dz \Rightarrow \Phi(\ell) = \Phi_0 e^{(N_2 - N_1) \delta \ell}$$

Questo risultato è ottenuto esclusivamente da considerazioni geometriche.

Considerazioni di meccanica quantistica ci avevano portato all'espressione $\Phi(\ell) = \Phi_0 e^{(N_2 - N_1) \sigma \ell}$.

Comparando le due espressioni, si conclude che $\delta = \sigma$.

LASER PUMPING

SISTEMI DI POMPAGE

I sistemi di pompaggio si suddividono in 2 grandi classi a seconda del tipo di materiale attivo che viene utilizzato:

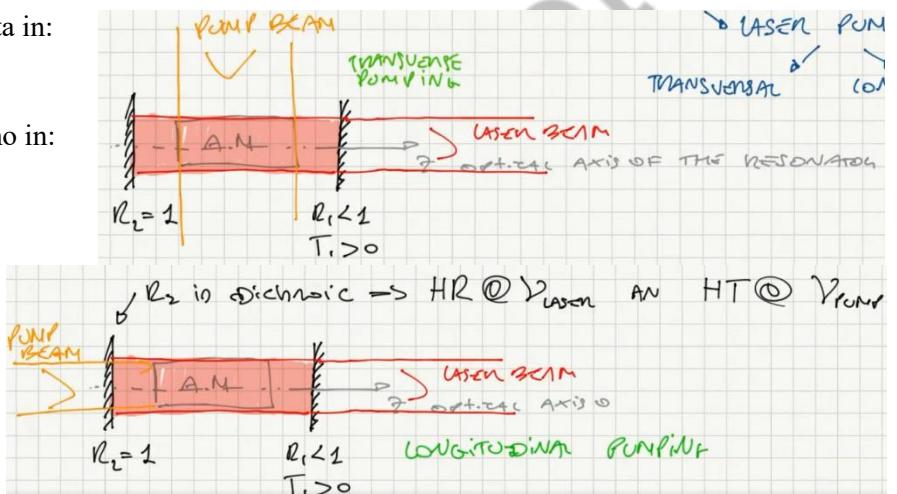
1. Pompaggio elettrico (se il materiale attivo è in forma gassosa)
2. Pompaggio ottico

Quest'ultimi si dividono a loro volta in:

- i. Pompaggio a lampada
- ii. Pompaggio a laser

Infine, questi si suddividono in:

- Trasversali
- Longitudinali



SCHEMI DI POMPAGE

Finora abbiamo sempre considerato un materiale attivo a 2 livelli: un livello basso (1) ed un livello alto (2).

Ovviamente all'equilibrio termico il sistema si trova in ground state e dobbiamo fornire un certo pompaggio per garantire l'inversione della popolazione e quindi l'azionamento del laser.

Quindi, se usiamo un pompaggio ottico, dobbiamo pompare dei fotoni che siano risonanti con il sistema, cioè dobbiamo fornire un flusso di fotoni in ingresso a frequenza ν_p (dove p=pump), tale che l'energia sia uguale all'energia di transizione $h\nu_p = E_2 - E_1$.

Possiamo definire la VELOCITÀ DI POMPAGE (pumping rate), cioè la velocità alla quale aumentiamo la popolazione del livello alto, come

$$R_p = \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{pump} = - \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{ABS} = \sigma N_1 \Phi$$

Siccome il sistema è soggetto anche ad un flusso di fotoni che colpisce il materiale, abbiamo anche un'emissione stimolata

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} = -\sigma N_2 \Phi$$

Quindi abbiamo un pompaggio che cerca di popolare il livello più alto e poi abbiamo un'emissione stimolata che cerca di svuotare questo stesso livello; quindi, la velocità totale di variazione della popolazione del livello alto sarà

$$\frac{dN_2}{dt} = \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{pump} + \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} = R_p - \sigma N_2 \Phi = \sigma N_1 \Phi - \sigma N_2 \Phi = \sigma \Phi (N_1 - N_2)$$

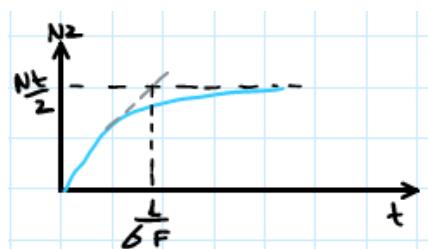
Fintanto che $N_1 > N_2$ questa velocità è positiva e la popolazione viene efficientemente pompata sul livello alto. Al passare del tempo però N_2 aumenta e N_1 diminuisce, quindi la velocità diminuisce fino ad annullarsi quando $N_2 = N_1$, che corrisponde alla condizione di trasparenza.

La condizione

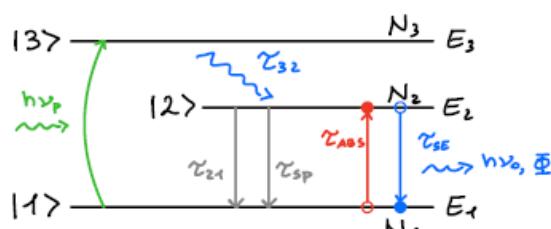
$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \text{ quando } N_2 = N_1$$

è anche nota come CONDIZIONE DI SATURAZIONE DI UN SISTEMA A 2 LIVELLI.

Se indichiamo la popolazione totale come $N_t = N_1 + N_2$, quando $N_2 = N_1 = N_t/2$ abbiamo la saturazione del sistema.



Il salto di questa curva è maggiore, maggiore sono σ e Φ , quindi maggiore è il numero di fotoni che forniamo al sistema.



SCHEMA A 3 LIVELLI

Al fine di effettuare un pompaggio efficace del sistema abbiamo bisogno di almeno 3 livelli.

In questo modo avremo il ground state (1), poi avremo l'upper laser level (2) e infine avremo il pump level (3) che si trova all'energia più alta.

La velocità di pompaggio (pumping rate) è ora uguale a

$$R_p = \frac{dN_3}{dt} = \sigma_{13} N_1 \Phi$$

L'azione del laser avviene tra il livello 2 e il livello 1, tra i quali abbiamo emissione stimolata

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} = \sigma_{21} N_2 \Phi_L$$

dove Φ = laser photon flux.

Come possiamo trasferire la popolazione dal livello 3 al livello 2?

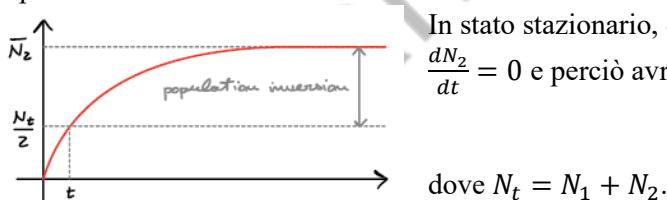
Questi due livelli devono essere accoppiati da un decadimento non-radioattivo molto corto: se τ_{32} è molto corto, cioè $\tau_{32} \ll \tau_{sp}, \tau_{21}$ (che sono rispettivamente i tempi di decadimento dell'emissione spontanea $2 \rightarrow 1$ e del decadimento non-radioattivo sempre da $2 \rightarrow 1$), N_3 decade molto velocemente al livello 2 \Rightarrow è come se stessimo pompando direttamente il livello 2

$$R_p = \frac{dN_3}{dt} = \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{pump}, \text{siccome } \tau_{32} \approx 0$$

Trascurando l'emissione spontanea e l'emissione non-radioattiva, possiamo scrivere

$$\frac{dN_2}{dt} = \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{pump} + \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{SE} + \left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{ABS} = R_p - \sigma_{21} N_2 \Phi + \sigma_{12} N_1 \Phi = R_p + \sigma \Phi (N_2 - N_1)$$

questa equazione prende il nome di POPULATION RATE EQUATION, in quanto descrive la velocità con la quale la popolazione cresce o decade.



In stato stazionario, cioè quando $t \rightarrow \infty$, abbiamo che $N_2 \rightarrow \bar{N}_2 = const$, quindi $\frac{dN_2}{dt} = 0$ e perciò avremo

$$\bar{N}_2 = \frac{N_t}{2} + \frac{R_p}{2\sigma\Phi}$$

dove $N_t = N_1 + N_2$.

Quindi, a seconda di quanto stiamo pompando, possiamo raggiungere un valore stazionario di N_2 che è maggiore di metà della popolazione totale. In questo modo siamo in grado di superare il problema della saturazione.

RIPASSO

Abbiamo detto che un laser è composto da 3 elementi:

- Un materiale
- Un sistema di pompaggio che rende attivo il materiale
- Un risonatore ottico che forma il feedback

Abbiamo detto che sotto particolari circostanze il materiale può agire come un amplificatore ottico, il cui guadagno per unità di lunghezza dipende dalla condizione di inversione di popolazione.

Al fine di provocare l'inversione della popolazione dobbiamo effettuare un pompaggio sul sistema.

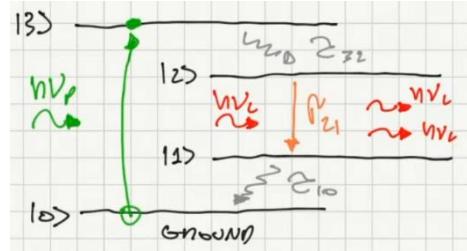
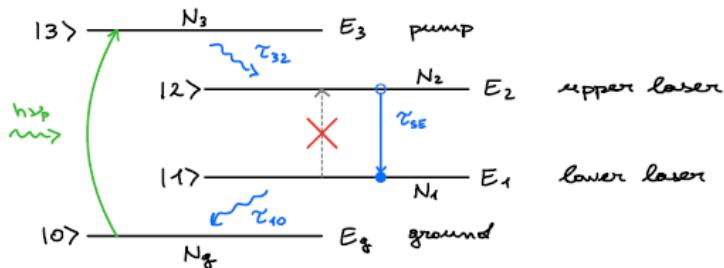
Esistono diversi modi di effettuare il pompaggio, ma noi ci siamo concentrati sul pompaggio ottico.

Abbiamo visto che utilizzando un sistema a 2 livelli, non riusciamo a raggiungere la condizione di trasparenza e quindi la condizione di inversione della popolazione perché con solo 2 livelli ad un certo punto l'emissione stimolata dal livello alto prevale sul pompaggio di popolazione e quindi in condizioni stazionarie raggiungiamo un livello di saturazione del sistema.

Abbiamo poi visto che per risolvere il problema della saturazione dobbiamo considerare almeno 3 livelli.

Quindi partendo dal ground state pompiamo ad un livello più alto dell'upper laser level e se il pump level è accoppiato all'upper laser level da un decadimento veloce e non-radioattivo è come se pompando al livello 3 stessimo pompando direttamente al livello 2

SCHEMA A 4 LIVELLI



Questo schema di pompaggio è anche più efficiente di quello a 3 livelli.

Pompiamo fotoni dal ground state (0) al pump level (3) ($R_p = \sigma_{03} \Phi_p N_0$), poi dal pump level (3) la popolazione decade molto velocemente all'upper laser level (2) ($\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{pump} = R_p$) e una volta che l'upper level è popolato, la popolazione decade per emissione stimolata al lower laser level (1).

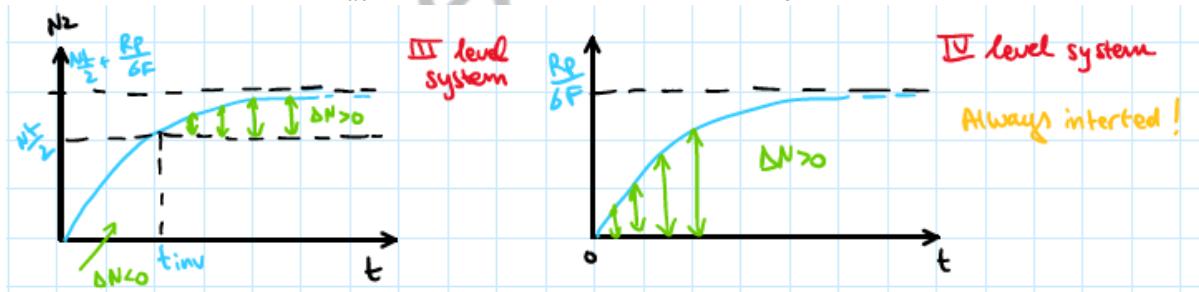
I decadimenti 3 → 2 e 1 → 0 sono non-radioattivi e molto veloci, pertanto possiamo considerare $\tau_{32} \rightarrow 0$ e $\tau_{10} \rightarrow 0$. Per questa ragione avremo sempre $N_3 \approx 0$ e $N_1 \approx 0$, quindi $\Delta N = N_2 - N_1 \approx N_2$ che significa che avremo inversione di popolazione anche con una sola molecola al livello 2.

Inoltre, non possiamo assorbimento da N_1 a N_2 in quanto $\left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{ABS} = \sigma \Phi N_1 \approx 0$.

In questo caso l'equazione della velocità di variazione della popolazione dell'upper laser level diventa

$$\frac{dN_2}{dt} = \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{pump} + \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{SE} + \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{ABS} = R_p - \sigma_{21} \Phi N_2$$

In stato stazionario $t \rightarrow \infty$, abbiamo $\frac{dN_2}{dt} = 0 \Rightarrow R_p - \sigma \Phi \bar{N}_2 = 0 \Rightarrow \bar{N}_2 = \frac{R_p}{\sigma \Phi}$.



Nel sistema a 4 livelli, tutta l'energia pompata va a costruire l'inversione di popolazione e non serve a raggiungere la condizione di inversione, perché la popolazione sarà sempre invertita → MAGGIORE EFFICIENZA.

Per essere più precisi, il tempo di vita del upper laser level non è infinito e dobbiamo considerarlo, quindi la VELOCITÀ DI VARIAZIONE DELLA POPOLAZIONE DELL'UPPER LASER LEVEL sarà

$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \sigma_{21} \Phi N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

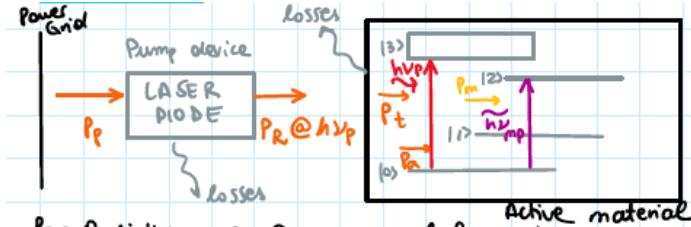
dove $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{NR}} + \frac{1}{\tau_{sp}}$ = overall decay time (lifetime of |2>).

PUMPING EFFICIENCY (Svelto par 6.2.3, p.213)

L'efficienza di pompaggio η_p è definita come la minima potenza necessaria a pompare il materiale P_m fratto la potenza effettiva assorbita dal dispositivo di pompaggio P_p

$$\eta_p = \frac{P_m}{P_p}$$

DIMOSTRAZIONE



La potenza ottica è trasferita al materiale dove abbiamo anche alcune perdite a causa dello scattering dei fotoni all'interno del materiale e alle riflessioni sulle superfici del materiale.

La parte di potenza trasmessa all'interno del materiale è P_t e possiamo indicare l'efficienza di trasferimento come

$$\eta_t = \frac{P_t}{P_R}$$

Una parte della potenza trasferita viene assorbita dal materiale P_a e l'efficienza di assorbimento è

$$\eta_a = \frac{P_a}{P_t}$$

Infine, abbiamo la power quantum efficiency dovuta al fatto che noi non stiamo pompando direttamente l'upper laser level, ma stiamo pompando un livello più alto (il pump level). Se pompassimo direttamente l'upper laser level useremmo meno energia. Quindi definendo l'energia dei fotoni effettivamente spesa come $h\nu_p = E_3 - E_0$ e l'energia di pompaggio minima come $h\nu_{mp} = E_2 - E_0$, possiamo definire l'energia quantistica in eccesso come $h\nu_p - h\nu_{mp}$. In questo modo possiamo definire l'efficienza quantica di potenza come

$$\eta_{pq} = \frac{P_m}{P_a}$$

In conclusione, l'efficienza di pompaggio complessiva in caso di pompaggio ottico può essere scritta come

$$\eta_p = \eta_r \eta_t \eta_a \eta_{pq} = \frac{P_r}{P_p} \frac{P_t}{P_r} \frac{P_a}{P_t} \frac{P_m}{P_a} = \frac{P_m}{P_p}$$

SISTEMI DI FEEDBACK

RISONATORI PASSIVI

DEF: Un RISONATORE PASSIVO è un sistema fisico che tende ad oscillare tra due stati differenti (gli stati differiscono per il tipo di energia che viene immagazzinata in ogni stato).

ESEMPI DI RISONATORI:

- Il risonatore più comune che viene studiato è il risonatore meccanico che è un sistema composto da una molla ed una massa. Se la massa viene spostata dalla posizione di equilibrio di una distanza x , l'energia potenziale/cinetica del sistema è $U = \frac{1}{2}kx^2$ e la pulsazione di risonanza è $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Poi dobbiamo anche considerare le perdite dovute alla forza di attrito della massa con il piano che riducono l'ampiezza di oscillazione del sistema.
- Un altro tipo di risonatore è l'OSCILLATORE ELETTROMAGNETICO composto da una resistenza, un induttore ed un condensatore in parallelo. L'energia rimbalza tra l'energia elettrica all'interno del condensatore e l'energia magnetica all'interno dell'induttore. L'energia elettrica all'interno del condensatore può essere scritta come $U = \frac{1}{2}CV^2$ e la pulsazione di risonanza del sistema è $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Il risonatore modella le perdite per effetto Joule.

Nonostante sembrino molto diversi tra loro, questi due sistemi hanno diverse cose in comune: 1. L'energia immagazzinata è proporzionale ad una variabile del sistema; 2. La frequenza di risonanza; 3. Presentano delle perdite $|\Delta U|$ ad ogni ciclo del sistema di periodo $T = 2\pi/\omega_0$.

QUALITY FACTOR Q DEL RISONATORE

Il QUALITY FACTOR del risonatore è definito come

$$Q = 2\pi \frac{U}{|\Delta U|}$$

Quindi possiamo scrivere la perdita di energia ad ogni ciclo del risonatore come

P_R è la potenza radiata dal dispositivo di pompaggio @ frequenze ottiche di pompaggio (potenza assorbita dalle pump bands del materiale).

Possiamo definire l'efficienza di radiazione come

$$\eta_R = \frac{P_R}{P_p}$$

$$|\Delta U| = 2\pi \frac{U}{Q}$$

L'energia persa può essere definita anche come

$$|\Delta U| = -\frac{dU}{dt} \cdot T$$

Confrontando le due formule possiamo scrivere

$$2\pi \frac{U}{Q} = -\frac{dU}{dt} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -\frac{\omega_0}{Q} dt$$

Integrando otteniamo

$$\int_{U_0}^{U(t)} \frac{dU}{U} = \int_0^t -\frac{\omega_0}{Q} dt \Rightarrow U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_u}}$$

dove $\tau_u = Q/\omega_0$ è la costante di tempo del decadimento dell'energia del risonatore.

Quindi possiamo scrivere il quality factor del risonatore anche come

$$Q = \tau_u \cdot \omega_0$$

che rappresenta una definizione empirica (cioè possiamo utilizzarla per effettuare una misura).

Definendo con $E(t)$ il campo di oscillazione e sapendo che l'energia del sistema è proporzionale al quadrato del campo $U \propto E^2(t)$, possiamo scrivere l'andamento temporale del campo di oscillazione come

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{j\omega_0 t} \cdot \sqrt{U(t)} \Rightarrow \tilde{E}(t) = E_0 e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}}$$

dove $\tau_E = 2\tau_u$.

Prendendo la trasformata di Fourier di questo campo, possiamo anche definire lo spettro di ampiezza del campo $\tilde{A}(\nu) = \mathcal{F}\{\tilde{E}(t)\}$.

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{j2\pi\nu_0 t} e^{-\frac{t}{\tau_E}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{A}(\nu) = \frac{E_0}{1 + 4\pi^2\tau_E^2(\nu - \nu_0)^2}$$

cioè abbiamo uno spettro lorentziano in cui $\Delta\nu_{FWHM} = 1/\pi\tau_E$.

Siccome $\tau_E = 2\tau_u = 2\frac{Q}{\omega_0}$, allora possiamo scrivere

$$\Delta\nu_{FWHM} = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{2\pi\nu_0}{2\pi Q} = \nu_0/Q$$

Dalla quale possiamo ricavare una terza espressione per quality factor

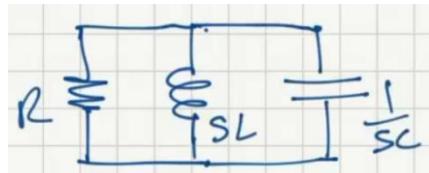
$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{FWHM}} = \left(\frac{\Delta\nu_{FWHM}}{\nu_0} \right)^{-1}$$

dove $\frac{\Delta\nu_{FWHM}}{\nu_0}$ è la PRECISIONE RELATIVA DEL RISONATORE.

Ricordiamo che quando abbiamo parlato dell'interferometro di FP (che viene chiamato anche risonatore di FP), abbiamo definito questo rapporto $\left(\frac{\Delta\nu_{FWHM}}{\nu_0} \right)^{-1} = R$ la POTENZA RISOLUTIVA (resolving power) del risonatore.

Per riassumere: quando abbiamo un sistema oscillante, l'energia decade esponenzialmente con un tempo di decadimento τ_u . Il campo dal quale viene ottenuta l'oscillazione, oscilla alla frequenza di risonanza e decade con una costante di tempo $\tau_E = 2\tau_u$.

ESEMPIO: RISONATORE ELETTRICO PASSIVO



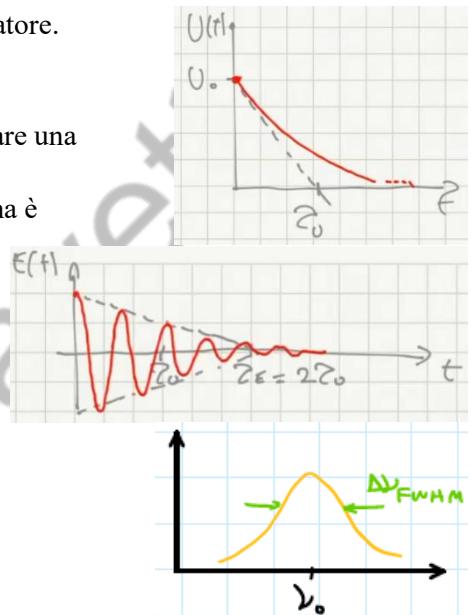
Possiamo definire l'impedenza dell'intero sistema nel dominio di Laplace come

$$Z(s) = \left(\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{sL} \right)^{-1} = \frac{V(s)}{I(s)}$$

Sviluppando la somma otteniamo

$$Z(s) = R \frac{s \frac{\omega_0}{Q}}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

dove $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ e $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$.

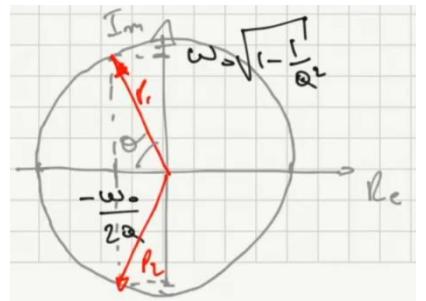


Se vogliamo trovare quali sono le frequenze di oscillazione del sistema dobbiamo trovare i poli e quindi porre il denominatore a 0

$$s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} [1 \pm j\sqrt{4Q^2 - 1}]$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned}|p_{1,2}| &= \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \Re\{p_{1,2}\} &= -\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{1}{\tau_E} \\ \Im\{p_{1,2}\} &= \mp\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\end{aligned}$$



Quindi l'ampiezza dei due poli è la stessa ed è pari a ω_0 . L'angolo θ dipende esclusivamente dal quality factor Q : maggiore è Q , minore è il fattore di smorzamento e minore è θ .

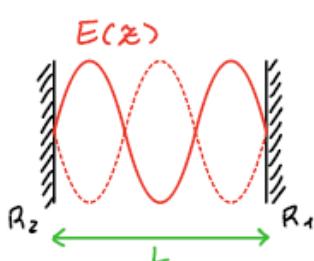
$$\text{se } Q \rightarrow \infty \Rightarrow \Re\{p_{1,2}\} \rightarrow 0, \Im\{p_{1,2}\} \rightarrow \omega_0$$

Se consideriamo la tensione ai capi del condensatore come variabile indipendente, vediamo che questa oscilla come

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau_V}} e^{j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} t}$$

dove $\tau_V = \tau_E = 2 \frac{Q}{\omega_0}$. Il cui spettro è ancora lorentziano con FWHM che è inversamente proporzionale al tempo di decadimento.

RISONATORE OTTICO (CAVITÀ)



Il risonatore ottico più semplice è costituito da una coppia di specchi paralleli; in pratica è l'**INTERFEROMETRO DI FABRY-PEROT**.

La CONDIZIONE DI RISONANZA per questo risonatore è che ad ogni ciclo il campo elettrico interferisca con se stesso in modo costruttivo, cioè che la fase accumulata dal campo elettrico all'interno del risonatore ad ogni ciclo sia un multiplo intero di 2π .

Possiamo scrivere il campo come $\tilde{E}(z) = E_0 e^{jkz}$, pertanto dopo un ciclo il campo elettrico sarà

$$\tilde{E}(2L) = \alpha E_0 e^{jk \cdot 2L}$$

dove $\alpha < 1$ è una costante che rappresenta le perdite dello specchio.

Al fine di avere interferenza costruttiva, come detto, dobbiamo avere

$$\angle[\tilde{E}(2L)] = k \cdot 2L = m \cdot 2\pi$$

Sappiamo che la condizione di risonanza prevede il rispetto delle condizioni di Barkhausen sull'ampiezza e sulla fase. La condizione di Barkhausen sull'ampiezza è

$$\tilde{G}_{loop} = \frac{\tilde{E}(2L)}{E_0} = \alpha e^{jk2L} = 1$$

che non può essere rispettata dato che $\alpha < 1$.

Tuttavia, possiamo sempre rispettare la condizione di Barkhausen sulla fase

$$\angle[\tilde{G}_{loop}] = k2L = m2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_m} \cdot 2L = m \cdot 2\pi$$

$$\lambda_m = \frac{2L}{m}$$

$$L = m \cdot \frac{\lambda_m}{2}$$

Quindi le lunghezze d'onda che soddisfano la condizione di Barkhausen sulla fase e quindi la condizione di risonanza sono:

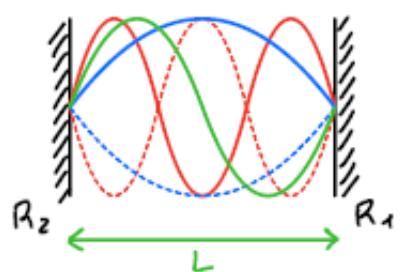
$$m = 1 \rightarrow \lambda_1 = 2L$$

$$m = 2 \rightarrow \lambda_2 = L$$

$$m = 3 \rightarrow \lambda_3 = \frac{2L}{3}$$

$$m = 4 \rightarrow \lambda_4 = \frac{L}{2}$$

...



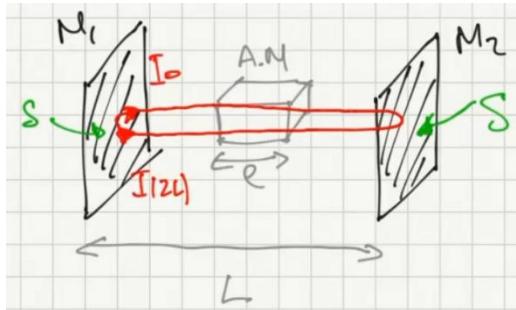
Quindi, analogamente, le frequenze che soddisfano la condizione di risonanza sono

$$\nu_m = \frac{c}{\lambda_m} = m \cdot \frac{c}{2L} = m \cdot \Delta\nu_{FSR}$$

Quindi abbiamo un insieme discreto di frequenze di risonanza pari a multipli interi del FSR.

Quindi i picchi di trasmissione dell'interferometro di FP corrispondono alle frequenze di risonanza del risonatore di FP. Se le perdite del risonatore sono basse, possiamo poi approssimare ogni picco con un andamento Lorentziano di larghezza $\Delta\nu_{FWHM} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\gamma}$ dove γ è la finezza (finesse) del risonatore che tiene conto delle perdite del sistema.

PERDITE IN UN RISONATORE OTTICO



Immaginiamo che all'interno del risonatore, tra i due specchi, mettiamo un materiale attivo di lunghezza ℓ (CAVITÀ ATTIVA).

Vediamo cosa succede all'intensità dell'onda em che viaggia all'interno del risonatore.

Iniziamo con un'intensità I_0 e dopo un ciclo avremo un'intensità $I(2L)$ che è data da

$$I(2L) = I_0 e^{2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)}$$

dove γ rappresenta le perdite logaritmiche del sistema.

Sappiamo che se x è piccolo $e^x \approx 1 + x$, quindi se $2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)$ è

piccolo possiamo linearizzare l'intensità come

$$I(2L) \approx I_0 \{1 + 2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)\}$$

Sappiamo che le perdite logaritmiche sono definite come

$$-\gamma = \ln(R_1 R_2 (1 - L_i)^2)$$

L'intensità all'interno della cavità è un parametro interessante, ma un parametro ancora più interessante da conoscere è il numero di fotoni all'interno della cavità perché questo da questo possiamo ricavare la quantità di energia immagazzinata all'interno del risonatore che è quello che vogliamo sapere. Quindi dobbiamo fare un cambio di variabile e passare dalla variabile intensità alla variabile "numero di fotoni": $I \rightarrow \phi$. Queste due quantità sono proporzionali perché l'intensità può essere scritta come il flusso di energia nell'unità di tempo e quindi come l'energia totale immagazzinata all'interno della cavità divisa per la superficie del risonatore moltiplicata per il round trip time (tempo necessario all'onda eletromagnetica per effettuare un intero ciclo all'interno del risonatore)

$$I = \frac{U}{S \cdot \tau_{RT}}$$

dove $\tau_{RT} = \frac{2L}{c}$. Il round trip time può anche essere visto come il tempo necessario affinché tutti i fotoni all'interno della cavità percorrano un intero ciclo.

Siccome l'energia immagazzinata nella cavità è pari al numero di fotoni moltiplicato per l'energia del singolo fotone, otteniamo

$$I = \frac{\phi \Delta E_{ph}}{S \cdot \tau_{RT}} = \frac{\phi \cdot h\nu_L}{S \cdot \tau_{RT}} \Rightarrow I \propto \phi$$

Quindi, possiamo scrivere il numero di fotoni all'interno della cavità dopo un ciclo/round trip come

$$\phi(2L) = \phi_0 \{1 + 2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)\}$$

Al fine di ricavare la velocità di variazione del numero dei fotoni dobbiamo definire la variazione di fotoni in un ciclo come $d\phi = \phi(2L) - \phi_0$ che può anche essere scritto come $d\phi = \phi_0 2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)$.

Poi dobbiamo anche definire l'intervallo di tempo nel quale avviene questa variazione che sappiamo essere $dt = \tau_{RT}$. Quindi possiamo scrivere la VELOCITÀ DI VARIAZIONE DEL NUMERO DEI FOTONI ALL'INTERNO DI UNA CAVITÀ ATTIVA come

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi 2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)}{\frac{2L}{c}} = \frac{\sigma\Delta N\ell c}{L} \phi - \frac{\gamma c}{L} \phi$$

Nel caso di CAVITÀ PASSIVA (RISONATORE OTTICO PASSIVO), abbiamo $\sigma\Delta N\ell = 0$ e quindi la VELOCITÀ DI VARIAZIONE DEL NUMERO DEI FOTONI ALL'INTERNO DI UNA CAVITÀ PASSIVA sarà

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\gamma c}{L} \phi = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

dove $\tau_c = \frac{L}{\gamma c} = \frac{\tau_1}{\gamma}$ è il TEMPO DI VITA DI UN FOTONE ALL'INTERNO DELLA CAVITÀ, in cui $\tau_1 = \frac{L}{c}$ è il tempo per percorrere solo un percorso (es solo andata).

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{\phi} &= -\frac{dt}{\gamma} \\ \int \frac{d\phi}{\phi} &= \int -\frac{dt}{\gamma} \\ \Rightarrow \phi(t) &= \phi_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}\end{aligned}$$

l'ENERGIA IMMAGAZZINATA ALL'INTERNO DELLA CAVITÀ può essere scritta come

$$U(t) = \phi(t) \cdot h\nu_L$$

Siccome l'intensità dell'onda elettromagnetica è $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}$, l'onda elettromagnetica all'interno della cavità può essere scritta come

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{j2\pi\nu_L t} e^{-\frac{t}{2\tau_c}}$$

Quindi all'interno della cavità abbiamo un campo elettrico che decade con un tempo pari al doppio del tempo di decadimento dell'energia/del numero di fotoni.

Lo spettro di ampiezza del campo elettrico è lorentziano ed è pari a

$$\tilde{A}(\nu) = \tilde{\mathcal{F}}\{\tilde{E}(t)\} = \frac{E_0}{1 + 4\pi^2\tau_E^2(\nu - \nu_L)^2}$$

$$\text{con } \Delta\nu_{FWHM} = \frac{1}{\pi\tau_E} = \frac{1}{2\pi\tau_c}.$$

Quindi ricaviamo che il QUALITY FACTOR RISONATORE OTTICO è

$$Q = \omega_L\tau_c = \frac{2\pi\nu_L}{2\pi\Delta\nu_{FWHM}} \Rightarrow Q = R = \frac{\nu_L}{\Delta\nu_{FWHM}}$$

Possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\nu_L &= \nu_m = m \cdot \Delta\nu_{FSR} \\ \Rightarrow Q &= R = m \cdot \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\Delta\nu_{FWHM}} = m \cdot \tilde{\mathcal{F}}\end{aligned}$$

Quindi se abbiamo un risonatore FP passivo possiamo valutare il quality factor misurando la finezza (finesse) e l'ordine di risonanza che utilizziamo per accoppiare la luce.

Il modo più semplice per misurare il quality factor però è misurando direttamente il tempo di decadimento dei fotoni τ_c .

CONTINUOUS WAVE LASER BEHAVIOR

EQUAZIONI DELLA VELOCITÀ DI UN LASER A 4 LIVELLI (RATE EQUATIONS)

Abbiamo trovato che in ogni risonatore c'è un equilibrio tra due variabili. Nel caso di un laser che è un oscillatore ottico, abbiamo un equilibrio tra la popolazione dei fotoni e la popolazione dell'upper laser level. Quindi, l'energia viene immagazzinata in 2 forme: come energia di eccitazione all'interno del materiale e come energia dei fotoni all'interno della cavità. Queste due quantità, cioè l'energia del materiale che dipende dalla popolazione del upper laser level e il numero dei fotoni all'interno della cavità sono legate tra loro.

Avevamo trovato che la velocità di variazione della popolazione dell'upper laser level (nel caso di uno schema a 4 stati) fosse

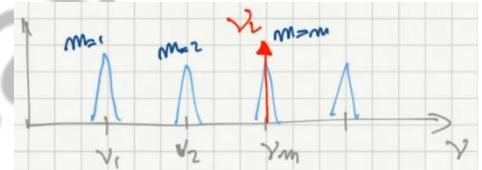
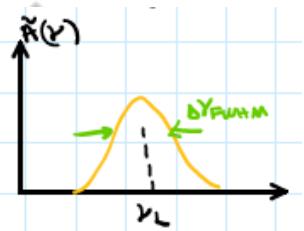
$$\frac{dN_2}{dt} = R_p - \sigma_{21}\Phi N_2 - \frac{N_2}{\tau}, \quad \text{dove } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_{sp}}$$

che quindi dipende dalla velocità di pompaggio (pumping rate) e dal flusso di fotoni che è direttamente proporzionale al numero di fotoni all'interno della cavità.

Poi, quando abbiamo analizzato le perdite di un risonatore ottico, abbiamo anche visto che la velocità di variazione del numero di fotoni all'interno della cavità attiva è

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi 2(\sigma\Delta N\ell - \gamma)}{\frac{2L}{c}} = \frac{\sigma\Delta N\ell c}{L}\phi - \frac{\gamma c}{L}\phi$$

che è legata all'inversione della popolazione ΔN .



Quindi all'interno del risonatore ottico abbiamo un equilibrio tra queste velocità: tra la velocità di variazione della popolazione del upper laser level e la velocità di variazione del numero di fotoni all'interno della cavità.

Queste due equazioni insieme prendono il nome di LASER RATE EQUATIONS e descrivono il principio di funzionamento del laser, in quanto descrivono l'equilibrio tra il numero di fotoni all'interno della cavità e la popolazione dell'upper laser level.

A_b = area del beam

Il volume del modo attivo all'interno del materiale attivo è

$$V_a = A_b \cdot \ell$$

Possiamo quindi definire la LUNGHEZZA OTTICA DELLA CAVITÀ come

$$L_e = L + (n - 1)\ell$$

dove L è la lunghezza fisica della cavità.

Prima di trovare le equazioni dobbiamo fare un paio di ASSUNZIONI:

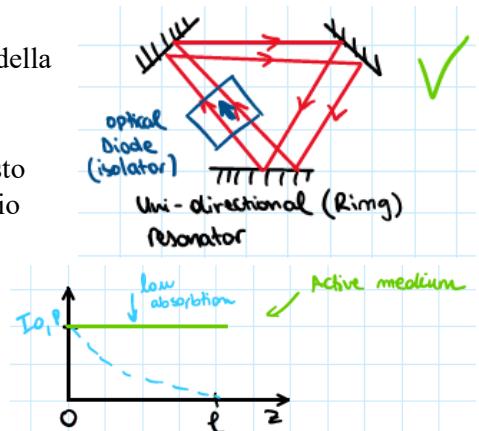
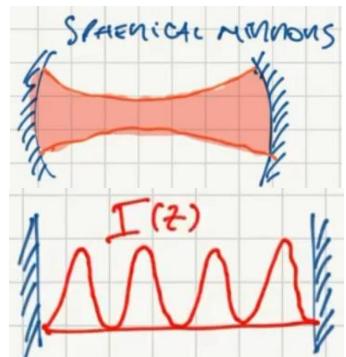
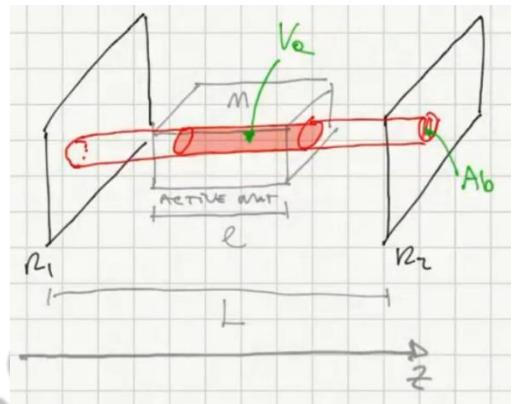
A) MODELLO INDIPENDENTE DALLO SPAZIO

Consideriamo un sistema che è omogeneo lungo la direzione z , cioè lungo l'asse ottico, quindi tutti i nostri parametri sono indipendenti dalla direzione di propagazione.

Al fine di avere un modello indipendente dallo spazio abbiamo bisogno che gli specchi siano posizionati in un modo particolare.

- Se consideriamo una coppia di SPECCHI SFERICI, questi concentrano il modo all'interno della cavità e ovviamente in questo caso l'area del beam e quindi i parametri dipenderanno dalla direzione di propagazione e il sistema non sarà indipendente dallo spazio.
- Se consideriamo una coppia di SPECCHI PIANI PARALLELI (configurazione standard dell'interferometro di FP) avremo un risonatore bidirezionale nel quale andrà a formarsi un'onda stazionaria, la cui intensità avrà dei picchi in funzione di z , quindi il sistema non sarà indipendente dallo spazio
- Per avere un sistema indipendente dallo spazio, abbiamo bisogno di 3 cose
 - Specchi quasi-piani
 - Risonatore unidirezionale
 - Dobbiamo poter trascurare il profilo di assorbimento della pompa

Un sistema che soddisfa queste caratteristiche è un RISONATORE UNIDIREZIONALE (AD ANELLO). In questo risonatore, in principio, la luce può viaggiare sia in senso orario che in senso antiorario, quindi per ottenere l'unidirezionalità dobbiamo inserire all'interno della cavità un dispositivo che prenda il nome di ISOLATORE OTTICO o DIODO OTTICO.



B) SISTEMA DI POMPAZIONE A 4 LIVELLI

$$\tau_{32} \rightarrow 0, \quad \tau_{10} \rightarrow 0 \Rightarrow N_3 = 0, N_1 = 0 \Rightarrow \Delta N = N_2 - N_1 = N_2 = N$$

EQUAZIONE DELLA VELOCITÀ DI VARIAZIONE DELLA POPOLAZIONE:

Fatte queste assunzioni, iniziamo dall'equazione della velocità di variazione della popolazione nel upper laser level

$$\frac{dN}{dt} = R_p - \sigma\Phi N - \frac{N}{\tau}$$

dove il flusso dei fotoni è ovviamente proporzionale al numero di fotoni all'interno della cavità $\Phi \propto \phi$.

Quello che vogliamo fare è scrivere il flusso di fotoni in funzione del numero dei fotoni e questo è molto semplice dato che

$$\Phi = \frac{I}{hv_L}$$

$$I = \frac{\phi \cdot hv_L}{A_b \tau_{RT}}$$

dove $\tau_{RT} = L_e/c$. Quindi otteniamo che il flusso di fotoni in funzione del numero dei fotoni all'interno della cavità è

$$\Phi = \frac{c}{A_b \cdot L_e} \phi$$

Possiamo riscrivere l'equazione di velocità della popolazione come

$$\frac{dN}{dt} = R_p - \frac{\sigma c}{A_b \cdot L_e} N\phi - \frac{N}{\tau}$$

dove possiamo indicare $\frac{\sigma c}{A_b \cdot L_e} = A$. Questa rappresenta un'equazione non lineare.

EQUAZIONE DI VELOCITÀ DI VARIAZIONE DEL NUMERO DEI FOTONI:

Passiamo ora alla seconda equazione. Avevamo ottenuto:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\sigma N \ell c}{L_e} \phi - \frac{\gamma c}{L_e} \phi = \frac{\sigma N \ell c}{L_e} \phi - \frac{\phi}{\tau_c}$$

dove il primo termine è relativo all'emissione stimolata e il secondo termine tiene conto delle perdite della cavità.

Indichiamo $\frac{\sigma \ell c}{L_e} = B \cdot V_a$, quindi possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{d\phi}{dt} = B \cdot V_a N\phi - \frac{\phi}{\tau_c}$$

Anche questa rappresenta un'equazione non lineare.

Consideriamo il coefficiente A e moltiplichiamo sia numeratore che denominatore per la lunghezza del materiale attivo ℓ , otteniamo

$$A = \frac{\sigma c}{A_b L_e} \cdot \frac{\ell}{\ell}$$

ed essendo $A_b \cdot \ell = V_a$ abbiamo che

$$A = \frac{\sigma \ell c}{V_a \cdot L_2} = B$$

Quindi possiamo riscrivere le due EQUAZIONI DI VELOCITÀ DEL LASER come

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = R_p - B\phi N - \frac{N}{\tau} \\ \frac{d\phi}{dt} = B \cdot V_a N\phi - \frac{\phi}{\tau_c} \end{cases}$$

dove $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{NR}} + \frac{1}{\tau_{sp}}$, $\tau_c = \frac{\gamma L_2}{c}$ e $B = \frac{\sigma \ell c}{V_a L_e}$.

SOLUZIONI AD ONDA CONTINUA (A REGIME/IN STATO STAZIONARIO) DELLE EQUAZIONI DI VELOCITÀ

Valutando le soluzioni ad onda continua, cioè in stato stazionario, stiamo assumendo che sia la popolazione dell'upper laser level che il numero di fotoni siano costanti, pertanto avremo

$$\begin{cases} N(t) = \bar{N} \\ \phi(t) = \bar{\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0 \\ \frac{d\phi}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_p - B\bar{\phi}\bar{N} - \frac{\bar{N}}{\tau} = 0 \\ \left(BV_a \bar{N} - \frac{1}{\tau_c} \right) \bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

Iniziamo dalla seconda equazione che è la più semplice essendo un'equazione omogenea. Essendo un'equazione omogenea abbiamo sempre una soluzione triviale (banale) che è

$$\begin{cases} \bar{\phi} = 0 \\ \forall \bar{N} \neq \frac{1}{BV_a \tau_c} \end{cases}$$

e una soluzione non banale quando

$$\begin{cases} \bar{\phi} > 0 \\ BV_a \bar{N} - \frac{1}{\tau_c} = 0 \rightarrow \bar{N} = \frac{1}{BV_a \tau_c} = N_c = \text{inversione critica} \end{cases}$$

Chiamando la soluzione triviale alla seconda equazione A e la soluzione non triviale alla seconda equazione B, andiamo a risolvere la prima equazione in questi due casi:

$$1.A \begin{cases} \bar{\phi} = 0 \\ R_p - B\bar{\phi}\bar{N} - \frac{\bar{N}}{\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\phi} = 0, \bar{N} < N_c \\ \bar{N} = R_p \tau \end{cases}$$

questa rappresenta la prima soluzione ad onda continua alle equazioni di velocità e prende il nome di SOLUZIONE SOTTO SOGLIA. Iniziamo con una popolazione nulla sul upper laser level, avviamo il pompaggio, quindi aumentiamo il pumping rate ad un valore maggiore di 0 e per un certo intervallo di tempo avremo ancora un numero nullo di fotoni all'interno della cavità, ma la popolazione aumenterà insieme al pumping rate finché non raggiunge il valore di inversione critica.

Per vedere cosa succede quando raggiungiamo l'inversione critica, dobbiamo risolvere la prima equazione con la soluzione non triviale della seconda equazione. Prima di procedere ricordiamo che $B = \frac{\sigma \ell c}{V_a L_e}$ e $\tau_c = \frac{L_e}{\gamma c}$, quindi possiamo scrivere l'inversione critica come $N_c = \frac{1}{BV_a \tau_c} = \frac{V_a L_e}{\sigma \ell c} \frac{1}{V_a L_e} \frac{\gamma c}{\sigma \ell} = \frac{\gamma}{\sigma \ell}$.

A questo punto possiamo scrivere la seconda soluzione alla prima equazione come

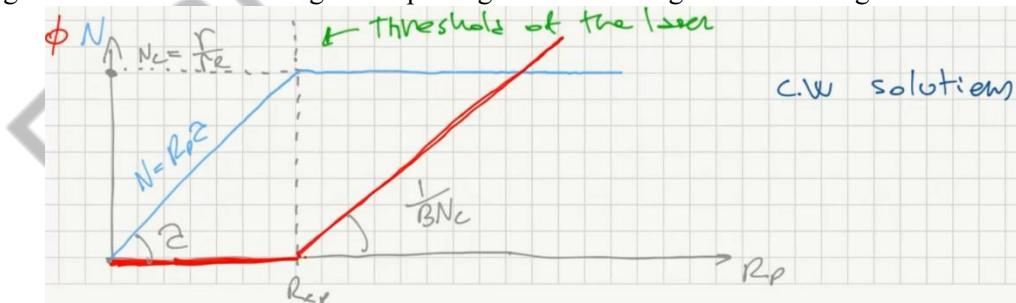
$$1.B \begin{cases} \bar{N} = N_c = \frac{\gamma}{\sigma \ell} \\ R_p - B\bar{\phi}\bar{N} - \frac{\bar{N}}{\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{N} = N_c = \frac{\gamma}{\sigma \ell} \\ \bar{\phi} = \frac{1}{BN_c} [R_p - \frac{N_c}{\tau}] \end{cases}$$

Possiamo definire il CRITICAL PUMPING RATE come $R_{cp} = \frac{N_c}{\tau} = \frac{\gamma}{\sigma \ell \tau}$, cioè il pumping rate che si raggiunge quando raggiungiamo la condizione di inversione critica. Quindi possiamo riscrivere la soluzione come

$$\begin{cases} \bar{N} = N_c = \frac{\gamma}{\sigma \ell} \\ \bar{\phi} = \frac{1}{BN_c} [R_p - R_{cp}] \end{cases}$$

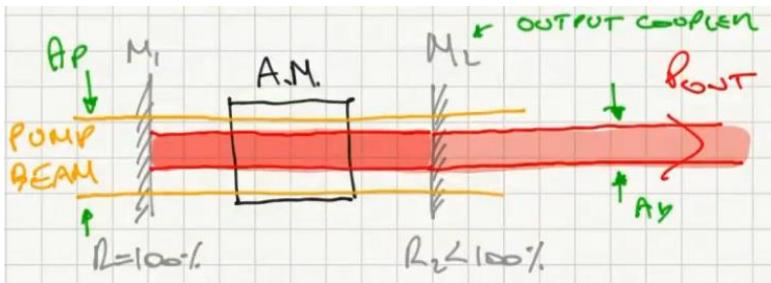
Questa soluzione prende il nome di SOLUZIONE SOPRA SOGLIA delle equazioni di velocità e ci dice che una volta raggiunta e superata l'inversione critica, il numero di fotoni cresce linearmente da 0 ad un valore che dipende linearmente dal pumping rate.

Possiamo disegnare le soluzioni sotto soglia e sopra soglia in un unico grafico come segue:



Sotto soglia la popolazione cresce linearmente con il pumping rate finché non raggiunge la condizione di inversione critica, cioè la soglia del laser. A quel punto la popolazione smette di crescere in quanto ha inizio l'emissione stimolata. Una volta raggiunta la soglia del laser, cioè l'inversione critica, la popolazione del upper level rimane costante, ma il numero di fotoni all'interno della cavità inizia a crescere linearmente (NOTA: la popolazione e il numero di fotoni non crescono con lo stesso slope).

POTENZA IN USCITA DA UN LASER



Supponiamo che il primo specchio sia riflettente al 100%, mentre il secondo specchio presenti delle perdite e parte della potenza ottica all'interno della cavità venga trasmessa all'esterno attraverso esso. Possiamo notare inoltre che le dimensioni della sezione del pump beam siano diverse da quelle del laser beam, infatti il pump beam ha solitamente una sezione maggiore rispetto al laser beam.

La POTENZA IN USCITA DAL LASER è definita come il prodotto tra la velocità di perdita di fotoni dallo specchio M2 e l'energia del fotone, cioè come

$$P_{out} = \frac{d\phi}{dt} \Big|_{M2} \cdot h\nu_L$$

dove la velocità di perdita dei fotoni dallo specchio M2 può essere a sua volta scritto come il prodotto tra la velocità di decadimento complessiva dei fotoni all'interno della cavità e la frazione di perdita causata dalla non perfetta riflettività dello specchio M2 $R_2 < 100\%$, cioè come

$$\frac{d\phi}{dt} \Big|_{M2} = \bar{\phi} \cdot \frac{\gamma_2}{2\gamma}$$

Quindi la POTENZA IN USCITA può essere riscritta come

$$P_{out} = \bar{\phi} \cdot h\nu_L \cdot \frac{\gamma_2}{2\gamma}$$

Possiamo ricavare il numero di fotoni all'interno della cavità $\bar{\phi}$ dall'equazione di velocità del laser

$$\bar{\phi} = \frac{1}{BN_c} (R_p - R_{pc})$$

dove $B = \frac{\gamma\ell c}{V_a L_2}$, $N_c = \frac{\gamma}{\sigma\ell}$ $\Rightarrow BN_c = \frac{\gamma c}{V_a L_e} = \frac{1}{V_a \tau_c}$. Quindi possiamo riscrivere

$$\bar{\phi} = V_a \tau_c (R_p - R_{pc})$$

Vogliamo semplificare ulteriormente questa espressione e per farlo moltiplichiamo e dividiamo per la velocità critica di pompaggio $R_{pc} = \frac{N_c}{\tau} = \frac{\gamma}{\sigma\ell\tau}$ e notiamo che ovviamente la velocità di pompaggio (pumping rate) è direttamente proporzionale alla potenza di pompaggio $R_p \propto P_p$. In questo modo otteniamo

$$\bar{\phi} = V_a \tau_c \frac{(R_p - R_{pc})}{R_{pc}} \cdot R_{pc} = V_a \tau_c \left(\frac{P_p}{P_{th}} - 1 \right) \cdot \frac{\gamma}{\sigma\ell\tau}$$

dove $P_{th} = P_p @ R_{pc}$ è la POTENZA DI POMPAGGIO DI SOGLIA.

Unendo le due formule otteniamo

$$\begin{cases} P_{out} = \bar{\phi} \cdot h\nu_L \cdot \frac{\gamma_2}{2\gamma} \\ \bar{\phi} = V_a \tau_c \left(\frac{P_p}{P_{th}} - 1 \right) \cdot \frac{\gamma}{\sigma\ell\tau} \end{cases} \Rightarrow P_{out} = h\nu_L \left(\frac{\gamma_2}{2\gamma} \right) \cdot \frac{1}{\tau_c} \left[V_a \tau_c \frac{\gamma}{\sigma\ell\tau} \left(\frac{P_p}{P_{th}} - 1 \right) \right]$$

dove $\frac{V_a}{\ell} = A_b$.

Quindi la forma finale della potenza in uscita del laser è

$$P_{out} = \frac{\gamma_2}{2} \cdot I_s \cdot A_b \cdot \left(\frac{P_p}{P_{th}} - 1 \right)$$

dove $I_s \cdot A_b = POTENZA DI SATURAZIONE DEL LASER$, in cui $I_s = \frac{h\nu_L}{\sigma\tau}$ è l'INTENSITÀ DI SATURAZIONE.

Se grafichiamo la potenza in uscita dal laser in funzione della potenza di pompaggio, vediamo che fino alla potenza di pompaggio di soglia non abbiamo potenza in uscita, poi raggiunta la soglia la potenza in uscita del laser inizia ad aumentare linearmente con una certa inclinazione η_s che rappresenta la SLOPE EFFICIENCY DEL LASER e vale

$$\eta_s = \frac{dP_{out}}{dP_p} = \frac{\gamma_2 I_s A_b}{2 P_{th}}$$

Possiamo scrivere la potenza di pompaggio di soglia come



$$P_{th} = \frac{R_{pc} \cdot V_p \cdot h\nu_{mp}}{\eta_p}$$

dove $V_p = A_p \cdot \ell$ è il VOLUME DELLA PUMP EXCITATION ALL'INTERNO DEL MATERIALE ATTIVO (A_p è l'area del pump beam), $h\nu_{mp}$ = energia di eccitazione minima per pompare l'upper laser level |2> e η_p è l'efficienza di pompaggio.

Sostituendo il valore della potenza di pompaggio di soglia all'interno dell'espressione della slope efficiency del laser, otteniamo

$$\eta_s = \eta_p \left(\frac{\gamma_2}{2\gamma} \right) \left(\frac{h\nu_L}{h\nu_{mp}} \right) \left(\frac{A_b}{A_p} \right) = \eta_p \eta_c \eta_q \eta_T$$

Questa espressione rappresenta il prodotto di 4 diverse efficienze

- η_p = EFFICIENZA DI POMPAGGIO
- η_c = EFFICIENZA DI ACCOPPIAMENTO IN USCITA: maggiore è η_c maggiore le perdite sono concentrate in uscita
- η_q = EFFICIENZA QUANTICA DEL LASER
- η_T = EFFICIENZA DI POMPAGGIO TRASVERSALE

Infine, possiamo graficare la potenza in uscita del laser in funzione delle perdite γ_2 . Lo facciamo perché se guardassimo solo all'espressione della slope efficiency potremmo pensare che aumentando indefinitamente γ_2 siamo in grado di aumentare indefinitamente la slope efficiency η_s , ma ovviamente così non è perché le perdite complessive del laser γ dipendono ovviamente anche da γ_2 . Quindi se $\gamma_2 \ll \gamma$ abbiamo una regione iniziale in cui la potenza in uscita aumenta linearmente con γ_2 , poi man mano che aumentiamo γ_2 iniziamo a perdere efficienza, il profilo della potenza in uscita in funzione di γ_2 diventa parabolico e raggiunge il suo massimo a $\gamma_{2,opt}$. Superato questo valore la potenza in uscita inizia a diminuire e se aumentiamo troppo γ_2 la potenza in uscita va a zero e quindi praticamente spegniamo il laser.

$\gamma_{2,opt}$ prende il nome di OPTIMUM OUTPUT COUPLING

(accoppiamento ottimo in uscita) e noi vogliamo sempre costruire il laser in modo che funzioni vicino a questo punto di lavoro.

Quando aumentiamo γ_2 , non aumentiamo solo le perdite complessive γ , ma aumentiamo anche la soglia del laser, cioè la potenza di pompaggio di soglia.

Quindi per una certa potenza di pompaggio \bar{P}_p a seconda del valore di γ_2 avremo una certa potenza in uscita.

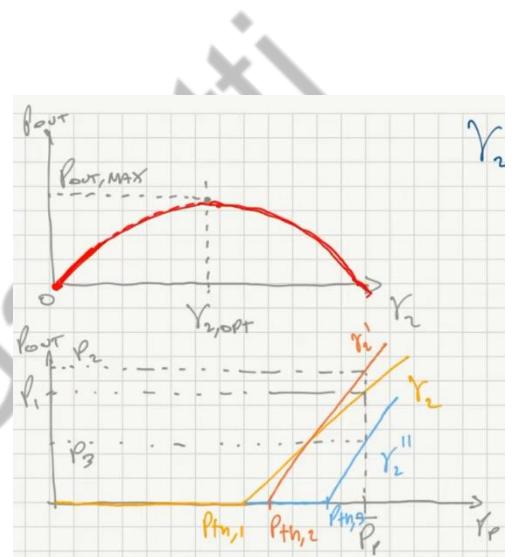
Aumentando γ_2 è vero che aumentiamo la slope efficiency (fino a $\gamma_{2,opt}$), ma allo stesso tempo muoviamo la soglia a valori sempre più alti, quindi siamo in presenza di un TRADE-OFF per cui anche se abbiamo una grande slope efficiency finiamo con una potenza in uscita più bassa!!!

Dalla figura vediamo che

$$\gamma_2 \rightarrow P_{out} = P_1$$

$$\gamma'_2 > \gamma_2 \rightarrow P_{out} = P_2 > P_1$$

$$\gamma''_2 \gg \gamma_2 \rightarrow P_{out} = P_3 < P_1$$

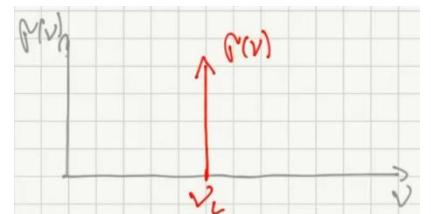


FREQUENZA DI EMISSIONE DEL LASER

Consideriamo un sistema a 4 livelli: (0) ground state level, (1) lower laser level, (2) upper laser level e (3) pump level. Ovviamente, come sappiamo l'azione del laser avviene tra l'upper laser level e il lower laser level dove abbiamo una sezione σ_L che amplifica i fotoni ad energia $h\nu_L$.

Sappiamo che la frequenza di emissione è $\nu_L = \frac{E_2 - E_1}{h}$ e che $\sigma(\nu) = \begin{cases} \sigma(\nu_L) \neq 0 & \forall \nu = \nu_L \\ 0 & \forall \nu \neq \nu_L \end{cases}$.

Da queste equazioni si potrebbe evincere che se facciamo il plot dell'emission cross-section in funzione della frequenza, questa sia una delta di Dirac centrata alla frequenza di emissione.



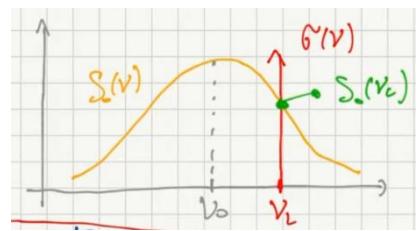
Se consideriamo un'onda in ingresso con spettro $S_0(v)$, sappiamo che di questo spettro centrato alla frequenza v_0 , il materiale attivo amplificherà solo una piccola porzione di frequenze nell'intorno della frequenza di emissione. Quindi verrà amplificata solo la porzione di spettro $S_0(v_L)$ e la parte rimanente di spettro non verrà amplificata.

È possibile dimostrare che per una frequenza di emissione molto netta la emission cross-section può essere scritta in questo modo

$$\sigma(v) = \sigma_0 S(v - v_c)$$

(Può essere dimostrato a partire dal fatto che l'intensità può essere scritta come

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) dv$$



Questo comporta che lo spettro di potenza della luce in uscita dal materiale (dopo aver percorso una distanza ℓ all'interno del materiale) può essere scritto come

$$S_\ell(v) = S_0(v) e^{\sigma(v)\Delta N\ell}$$

Quindi per una frequenza di emissione molto netta solo la precisa frequenza v_L sarà amplificata e tutte le altre rimarranno le stesse.

Ora per dimostrare che l'emission cross-section abbia effettivamente la forma di una delta di Dirac dobbiamo eseguire un esperimento di assorbimento, quindi andremo a considerare un pezzo di materiale di lunghezza ℓ e colpiremo il materiale con un'onda di spettro $S_0(v)$. Se siamo in equilibrio termico, sappiamo che questo materiale a 4 livelli funziona come un assorbitore perché all'equilibrio termico tutta la popolazione si trova al livello 1 e se colpiamo il materiale con fotoni di frequenza ottica v_L il principale processo di interazione è un processo di assorbimento tra il livello 1 e 2. Quindi avremo

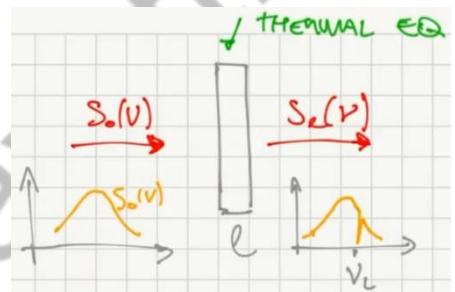
$$\Delta N = -N_1$$

$$S_\ell(v) = S_0(v) e^{-\sigma(v)N_1\ell}$$

Nello spettro in uscita ci aspettiamo un buco molto netto in corrispondenza della frequenza v_L dovuto all'assorbimento da parte del materiale.

Dalla formula precedente ricaviamo che

$$\sigma(v) \div \ln \left[\frac{S_0(v)}{S_\ell(v)} \right]$$



Quindi per determinare l'andamento dell'emission cross-section è sufficiente conoscere gli spettri di potenza dell'onda in ingresso e in uscita dal materiale.

Se eseguiamo questo esperimento nel mondo reale troveremo sempre che l'andamento in frequenza della sezione di emissione non è mai una delta di Dirac, ma avrà una certa larghezza in frequenza (spectral broadening) che dipenderà dal materiale ma sarà sempre $\Delta\nu_L \neq 0$.

In particolare,abbiamo due possibilità:

- La sezione di emissione ha un andamento lorentziano

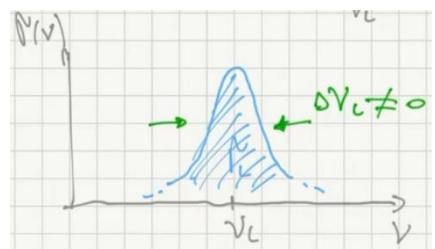
$$\sigma(v) = \sigma_L \cdot g(v - v_L)$$

dove σ_L è l'area della funzione e $\int_{-\infty}^{\infty} g(v - v_L) = 1$. In questo caso si dice che abbiamo un allargamento in frequenza omogeneo (homogeneous spectral broadening).

- La sezione di emissione ha un andamento gaussiano

$$\sigma(v) = \sigma_L \cdot g^*(v - v_L)$$

dove questa volta $g^*(v - v_L)$ ha un andamento gaussiano. In questo caso diciamo di avere un allargamento in frequenza non-omogeneo.



Le principali differenze tra questi due tipi di espansione in frequenza sono:

1. Il processo fisico che porta all'allargamento
2. L'entità dell'allargamento

ESPANSIONE OMOGENEA:

La cosa importante da dire è che, nel caso di espansione omogenea, tutti gli emettitori sono interessati allo stesso modo e ogni emettitore può assorbire/emettere un largo range di frequenze ottiche.

Siccome nel mondo reale ogni livello ha un tempo di vita finito, possiamo dire che i livelli 1 e 2 non siano ben determinati, ma abbiano un'incertezza che indichiamo con ΔE_1 ed ΔE_2 . Quindi l'emissione stimolata può avvenire tra $h\nu_{MIN} = E_2 - E_1$ e $h\nu_{MAX} = (E_2 + \Delta E_2) - (E_1 + \Delta E_1)$.

Per il livello E_2 per esempio avremo

$$\Delta E_2 \cdot \tau_{12} \geq \hbar$$

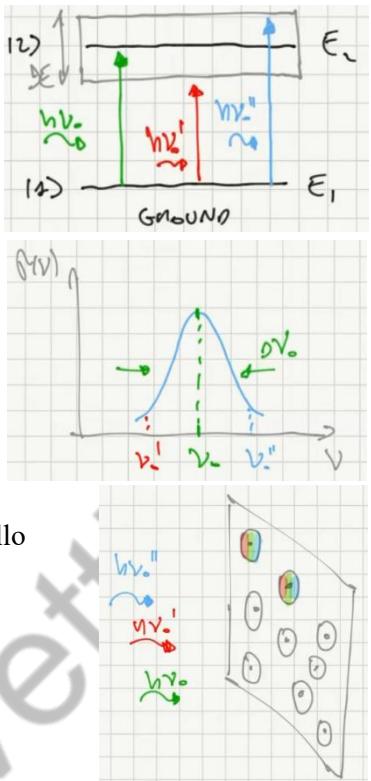
dove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Ricaviamo che l'energia del fotone ha un'indeterminazione di $\Delta\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau_{21}}$.

Questo è uno dei meccanismi che causa l'espansione in frequenza dell'emissione e dell'assorbimento di ogni emettitore, perché ogni emettitore a causa di questa indeterminazione può emettere o assorbire luce a frequenze diverse (ma tutti lo fanno allo stesso modo).

Nel caso di espansione omogenea l'allargamento è nell'ordine di grandezza di

$$\Delta\nu_0 \approx 100 \text{ kHz} - \text{MHz}$$

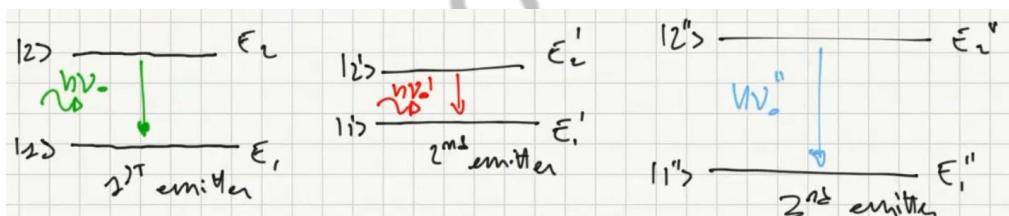
cioè non è molto largo.



ESPANSIONE NON-OMOGENEA:

In questo caso, ogni emettitore non ha una cross-section di emissione/assorbimento molto netta, ma ogni emettitore ha una differente energia di risonanza (o in altre parole c'è una distribuzione delle frequenze ottiche di interazione).

In altre parole ancora, abbiamo un'espansione non-omogenea se l'interazione radiazione-materia avviene in modo ideale (cioè non abbiamo un'indeterminazione dei livelli di energia), ma gli emettitori non hanno esattamente la stessa distribuzione di energia. In questo caso ogni emettitore avrà una propria cross-section di emissione.



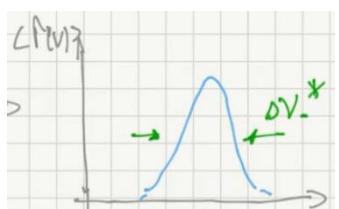
Quindi, in principio, se vogliamo graficare l'emission cross-section del materiale dobbiamo graficare l'emission cross-section di ogni emettitore.

Se facciamo la media di tutte le sezioni di emissione degli emettitori $\langle \sigma_{SE} \rangle$ otteniamo una distribuzione gaussiana

$$\langle \sigma_{SE} \rangle = \sigma_0 g^*(v - v_0)$$

dove $\Delta\nu_0^*$ è il FWHM e ha un ordine di grandezza molto più grande rispetto all'allargamento omogeneo

$$\Delta\nu_0^* \approx \text{GHz} - \text{THz}$$



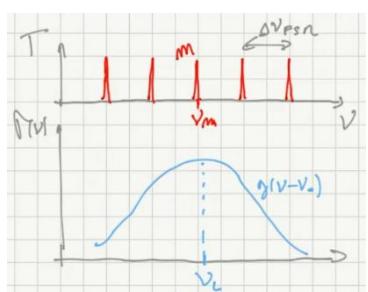
Quello che abbiamo visto finora è il comportamento in frequenza del materiale attivo, ma questo non è l'unico elemento che la frequenza di emissione; infatti, dobbiamo tenere in considerazione anche il risonatore ottico. Anche se abbiamo una frequenza di emissione molto larga, solo le frequenze corrispondenti alla frequenza di risonanza emetteranno luce.

Se consideriamo la trasmissione del risonatore di FP

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{2L_e}$$

Anche se abbiamo una sezione di emissione molto larga, solo le frequenze corrispondenti ai modi di trasmissione del risonatore di FP possono emettere luce.

Se combiniamo il risonatore con un materiale attivo avremo che solo le frequenze che soddisfano le condizioni di Barkhausen subiranno l'azione del laser. Se consideriamo



lo spettro, dopo un intero ciclo all'interno della cavità questo sarà amplificato e avrà la forma

$$S_{2L}(v) = S_0(v)e^{[\sigma(v)N\ell - \gamma]} = S_0(v) \cdot G_{loop}$$

E abbiamo oscillazione solo se $G_{loop} = 1$, cioè le condizioni di Barkhausen sono soddisfatte solo se

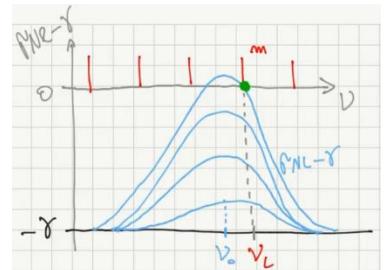
$$\sigma(v)N_c\ell - \gamma = 0 \Rightarrow N_c = \frac{\gamma}{\sigma(v)\ell}$$

Abbiamo l'azione del laser quando la curva raggiunge il livello zero, ma dobbiamo tenere in considerazione anche i modi del risonatore che determinano quali frequenze emettono luce.

Quindi le condizioni di Barkhausen sono soddisfatte e abbiamo emissione quando

$$\sigma(v_m)N_c\ell - \gamma = 0 \Rightarrow N_c = \frac{\gamma}{\sigma(v_m)\ell}$$

dove v_m è la frequenza di risonanza più vicina al picco della curva $\sigma(v)N\ell - \gamma$ che è detto gain profile (profilo di guadagno).



Quindi, partiamo con popolazione nulla, quindi il guadagno d'anello logaritmico è uguale a $-\gamma$, poi aumentiamo il pumping rate (ricordiamo che l'inversione di popolazione è data da $N = R_p\tau$, quindi se aumentiamo il pumping rate aumentiamo l'inversione di popolazione) e raggiungiamo le condizioni di Barkhausen solo se $G_{loop} = 1 \equiv \sigma(v)N\ell - \gamma = 0$ e se ci troviamo ad una frequenza che corrisponde ad uno dei modi di trasmissione del risonatore.

Abbiamo due possibilità:

- Se il profilo di guadagno è allargato in modo omogeneo (materiale homogeneously broadened).

Quando raggiungiamo le condizioni di Barkhausen per una determinata frequenza, il guadagno smette di crescere perché raggiungiamo l'inversione critica della popolazione N_c che è causata da tutti gli emettitori del materiale. Quindi in questo processo, tutti gli emettitori nel materiale sono "saturi", quindi la popolazione non può crescere ulteriormente e anche se aumentiamo il pumping rate, quello che otteniamo è che la potenza in eccesso che andiamo ad iniettare nel sistema viene trasformata in fotoni aggiuntivi a questa particolare frequenza v_L .

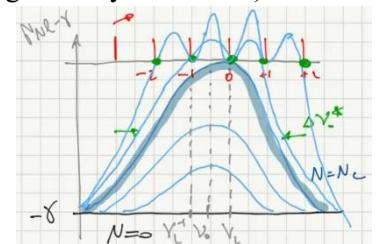
Quindi nel caso di un materiale homogeneously broadened, l'emissione è MONOCROMATICA cioè avviene solo ad una delle frequenze dei modi del risonatore.

In questo caso il laser viene detto SINGLE MODE LASER (LASER MONOMODALE).

- Se il profilo di guadagno è allargato in modo non-omogeneo (materiale inhomogeneously broadened).

Per il modo 0 abbiamo $N_c = \frac{\gamma}{\sigma(v_c)\ell}$ e $R_{pc} = \frac{N_c}{\tau}$.

In questo caso, se aumentiamo il pumping rate $R_p > R_{pc}$, solo gli emettitori che hanno una sezione di emissione centrata sulla frequenza v_L interagiranno con i fotoni all'interno della cavità, mentre tutti gli altri emettitori che hanno una sezione di emissione centrata ad una frequenza ottica $\neq v_L$ non interagiranno con i fotoni. Quello che succede è che aumentiamo il gain profile, ma andiamo a creare un buco sullo stesso dovuto al fatto che gli emettitori a quella frequenza v_L non possono aumentare la popolazione perché hanno raggiunto l'inversione critica.



Dopo un certo tempo la condizione di Barkhausen per il modo -1 viene raggiunta e quando l'inversione di popolazione raggiunge il livello $N_c^{(-1)} = \frac{\gamma}{\sigma(v_L^{(-1)})\ell}$, il modo -1 inizierà ad emettere un raggio (lasing).

Inoltre, $N_c^{(-1)} > N_c$ in quanto $\sigma(v_L^{(-1)}) < \sigma(v_L)$.

Se il materiale è inhomogeneously broadened possiamo aumentare ulteriormente il gain profile e questo smetterà di crescere solo in corrispondenza dei modi che iniziano ad emettere luce. Questo processo di continuare a crescere il gain profile e di formare dei buchi sullo stesso prende il nome di SPECTRAL HOLE BURNING. Quindi se continuiamo a far crescere il pumping rate siamo in grado di attivare un numero di modi che è definito come

$$n = \frac{\Delta v_0^*}{\Delta v_{FS}}$$

che quindi rappresenta il NUMERO DI MODI ATTIVATI e può arrivare a valori fino a $10^5 - 10^6$.

Nel caso in cui più nodi sono attivati ed emettono luce, il laser prende il nome di LASER MULTIMODALE.

CONCLUSIONE: in principio, se vogliamo un laser monomodale dobbiamo utilizzare un materiale homogeneously broadened, mentre se vogliamo un laser multimodale dobbiamo usare un materiale inhomogeneously broadened.

REMARK: nel caso di un materiale homogeneously broadened abbiamo detto che quando raggiungiamo $G_{loop} = 1$ il profilo di guadagno smette di crescere, ma c'è anche un effetto secondario problematico che dobbiamo considerare che prende il nome di SPATIAL HOLE BURNING e causa un'emissione multimodale anche nel caso di un materiale homogeneously broadened.

SPATIAL HOLE BURNING

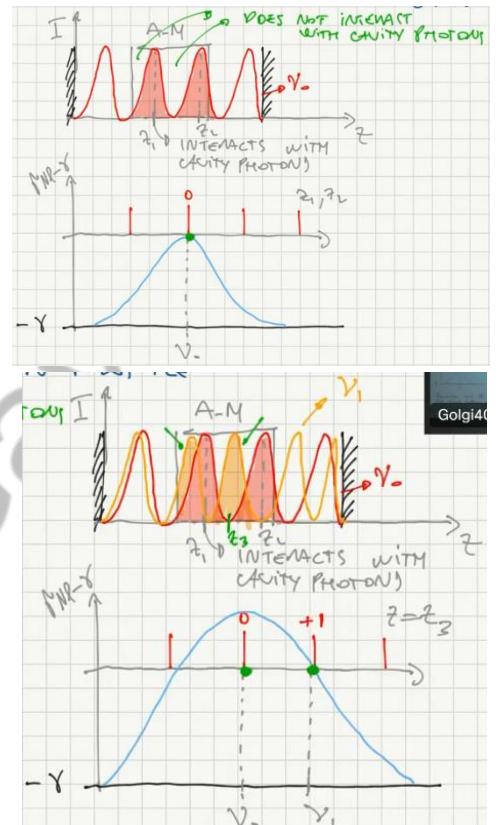
Immaginiamo di avere un risonatore bidirezionale, quindi l'intensità dell'onda all'interno della cavità non sarà uniforme, ma avrà un comportamento sinusoidale. Quindi non tutto il materiale interagirà con i fotoni all'interno della cavità, ma solo le porzioni di materiale in cui abbiamo intensità alta, o almeno non nulla.

Le condizioni di Barkhausen sono soddisfatte solo per le porzioni di materiale centrate in z_1 e z_2 .

Se invece consideriamo la parte centrale del materiale (cioè la posizione spaziale z_3), siccome questa è un minimo dell'interference pattern alla frequenza ν_0 (il materiale in quella posizione spaziale e per quella frequenza non è coperto), i fotoni non interagiscono con il modo 0 e di conseguenza il gain profile può continuare a crescere e a un certo punto può eventualmente soddisfare le condizioni di Barkhausen per il modo 1.

In particolare, le condizioni di Barkhausen sono soddisfatte alla frequenza ν_1 , cioè per il modo 1, se l'interference pattern corrispondente a ν_1 non si sovrappone a quello corrispondente a ν_0 , all'interno del materiale.

In altre parole, tutte le porzioni del materiale che non sono soggette ad un'alta intensità, a causa della distribuzione spaziale dell'intensità dei fotoni alla frequenza ν_0 , possono in principio subire l'azione del laser ad una frequenza diversa se l'interference pattern a quella frequenza copre la porzione di materiale che non era coperta dall'interference pattern alla frequenza ν_0 .



LASER TUNING

Quando abbiamo un laser multimodale, quello che vogliamo fare è fare un tuning della frequenza di emissione centrale, in base all'applicazione in cui andremo ad utilizzare il laser.

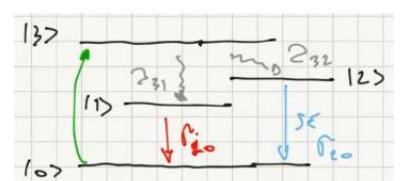
Il materiale potrebbe presentare diverse sezioni di emissioni che possono essere sottoposte contemporaneamente a un'emissione stimolata.

Se il livello 3 è efficientemente accoppiato ad entrambi i livelli 1 e 2 tramite decadimento non radioattivo, l'emissione del raggio laser può avvenire da entrambi questi livelli e quindi avremo due sezioni che sono sottoposte ad emissione stimolata e di conseguenza avremo anche due gain profile: uno centrato alla frequenza ν_1 e il secondo centrato alla frequenza ν_2 .

Per scegliere quale frequenza ottica amplificare quello che possiamo fare è selezionare le perdite della cavità al fine di far prevalere uno dei due processi.

Possiamo modificare le perdite, in modo da avere alte perdite alla frequenza ν_1 e basse perdite alla frequenza ν_2 . In questo modo riusciamo a sopprimere l'emissione alla frequenza ν_1 e a permettere solo quella alla frequenza ν_2 .

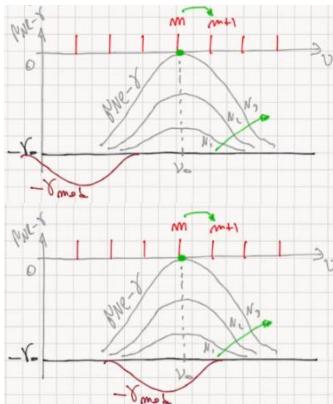
Per introdurre delle PERDITE DIPENDENTI DALLA FREQUENZA, possiamo utilizzare degli specchi che presentano un'alta riflettività solo alla frequenza di emissione desiderata e quindi che presentino basse perdite a quella determinata frequenza.



BREVE RIASSUNTO: abbiamo detto che possiamo rappresentare la condizione di Barkhausen in frequenza attraverso il gain profile. Quando abbiamo $N = 0$, abbiamo solo perdite quindi la curva inizia a $-\gamma_0$ e poi cresce fino a che non raggiunge lo zero in corrispondenza del m-esimo nodo e inizia ad emettere il raggio laser.

In cosa consiste il laser tuning? Vogliamo shiftare il centro di emissione e quindi in pratica vogliamo passare dal modo m-esimo al modo (m+1)-esimo ad esempio. Per farlo come abbiamo detto dobbiamo aggiungere delle perdite dipendenti dalla frequenza e se vogliamo fare il tuning della lunghezza d'onda del raggio, mentre il laser sta emettendo, dobbiamo essere in grado di fare il tuning di queste perdite e quindi dobbiamo essere in grado di muovere lungo l'asse delle frequenze. Ovviamente non possiamo ridurre le perdite, ma possiamo solo aumentare le perdite in una particolare regione del laser in cui vogliamo sopprimere l'emissione.

Se le perdite si trovano in questa posizione in frequenza, ovviamente il picco di emissione non viene in alcun modo intaccato.



Ma cosa succede se muoviamo le perdite vicino al picco di emissione?

Se spostiamo le perdite vicino al picco di emissione, con il massimo delle perdite a sinistra del massimo del guadagno, quello che succede è che il picco di emissione si sposta verso destra, cioè verso frequenze maggiori.

In questo modo però abbiamo anche una diminuzione del picco del guadagno e quindi non riusciamo più a raggiungere lo zero e quindi le condizioni di Barkhausen. Pertanto

se vogliamo continuare a raggiungere le condizioni di Barkhausen dobbiamo aumentare il pumping rate. In questo modo possiamo raggiungere la condizione di Barkhausen in corrispondenza del modo (m+1)-esimo.

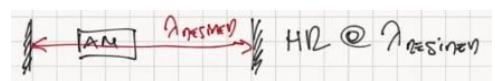
Quindi, facendo il tuning delle perdite, siamo stati in grado di sopprimere l'emissione del modo m-esimo e attivarla al modo (m+1)-esimo.

Prima di parlare del modo in cui possiamo introdurre queste perdite, dobbiamo dire che questo processo di tuning delle perdite è possibile sia per laser multimodali che monomodali. Nel caso di laser ad un solo modo di emissione, quando spostiamo le perdite da fuori la banda di guadagno del laser a vicino il picco di guadagno, quello che succede è che abbiamo un salto discreto dal modo m-esimo al modo (m+1)-esimo che prende il nome di MODE HOP, e non abbiamo un passaggio continuo da un modo all'altro. Se abbiamo un laser monomodale e vogliamo passare da un modo all'altro in maniera continua, senza fare un salto, l'unico modo è quello di cambiare il FSR della cavità del laser. Siccome $\Delta\nu_{FSR} = c/2L_e$, cambiando la lunghezza ottica della cavità, man mano che facciamo il tuning in frequenza delle perdite, siamo grado di passare da un modo di emissione all'altro in modo continuo e non discreto.

(il mod hop è un comportamento indesiderato del laser)

TUNABLE FREQUENCY DEPENDENT LOSSES

1. Un modo per introdurre perdite è quello di costruire un mirror che abbia alta riflettività alla lunghezza d'onda desiderata, ma in questo modo le perdite non sono tunable.



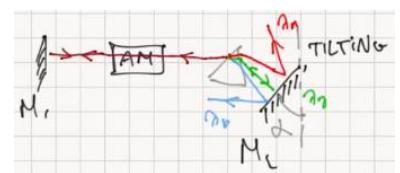
2. Un modo per introdurre perdite tunable è quello di introdurre in qualche modo un elemento all'interno della cavità che permetta di eseguire una sorta di selezione in frequenza. Nel range del visibile e nelle vicinanze dell'infrarosso (near-infrared) possiamo fare questo inserendo un PRISMA all'interno della cavità.

NOTA: quando inseriamo qualcosa all'interno della cavità è sempre meglio lavorare all'angolo di Brewster che nel caso di un prisma corrisponde anche all'angolo di massima dispersione.

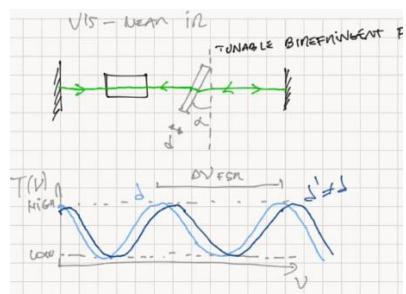
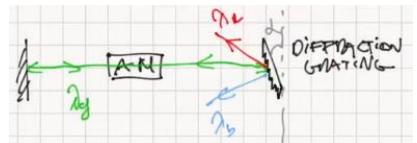
Quando il beam colpisce il prisma, la lunghezza d'onda che compone il beam si divide in diverse lunghezze d'onda e posizionando uno specchio in "uscita" dal prisma, siamo in grado di selezionare quale lunghezza d'onda venga riflessa all'indietro (sullo stesso percorso), mentre le altre due lunghezze d'onda verranno riflesse con un certo angolo fuori dalla cavità.

A seconda dell'angolo con cui pieghiamo lo specchio, siamo in grado di inserire alte perdite per le due lunghezze d'onda (in questo caso la blu e la rossa).

Queste perdite prendono il nome di ALIGNMENT DEPENDENT LOSSES perché siamo in grado di selezionare la lunghezza d'onda variando l'allineamento, cioè l'inclinazione dello specchio.



- Se ci troviamo nel mid-infrared (ma possiamo utilizzarlo anche se ci troviamo nel near-infrared), dobbiamo sostituire uno specchio con un DIFFRACTION GRATING.
Anche in questo caso si parla di perdite dipendenti dall'allineamento.
- Se ci troviamo nel range del visibile o nel near-infrared un altro modo per avere delle perdite tunable è quello di inserire all'interno della cavità un TUNABLE BIREFRINGENT FILTER.
Cambiando l'angolo di inclinazione e cambiando lo spessore...



SINGLE LASER MODE SELECTION

Il laser tuning funziona sia per i laser monomodali che per quelli multimodali. Un problema però è che quando costruiamo un laser con un materiale che presenta un gain profile altamente inomogeneo, ad esempio, se vogliamo far lavorare questo laser come laser monomodale dobbiamo trovare un modo per selezionare solo uno dei possibili modi di emissione. Questo problema prende il nome di SINGLE LASER MODE SELECTION. Ovviamente per selezionare un singolo modo abbiamo bisogno di un filtro con una banda molto stretta e un filtro di questo tipo può essere realizzato utilizzando un FABRY-PEROT ETALON, cioè un interferometro di FP.

L'etalon è inserito dopo il materiale attivo con un certo angolo di inclinazione α . Il free spectral range del FP etalon è

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{2d_{eff}(\alpha)}$$

Quindi modificando l'angolo di inclinazione siamo in grado di modificare il FSR.

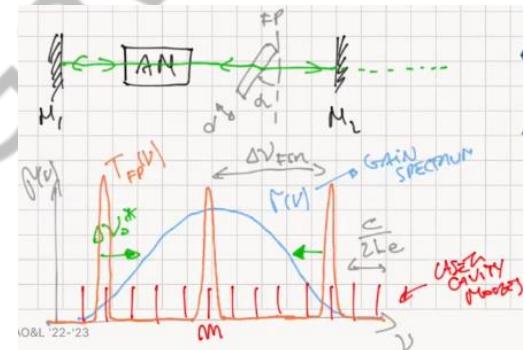
Le condizioni per selezionare un singolo modo del laser sono:

- Avere lo spettro della trasmissione del FP con una risoluzione abbastanza stretta da selezionare un solo modo della cavità.
Quindi la risoluzione dello spettro trasmisivo del FP deve essere inferiore alla distanza tra due modi

$$\Delta\nu_{RES} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\Im} < \frac{c}{2L_e}$$

- Avere il FSR abbastanza largo e in particolare tale che

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{2d_{eff}(\alpha)} > \Delta\nu_0^*$$



In conclusione, per fare il tuning, cioè selezionare il modo del laser, dobbiamo variare l'angolo di inclinazione α del FP, e anche in questo caso per evitare salti discreti (mode hops) man mano che modifichiamo l'angolo dobbiamo variare anche la lunghezza ottica della cavità L_e così da avere un passaggio continuo da un modo all'altro e non discreto.

Usando il FP etalon siamo in grado di ottenere due cose contemporaneamente:

- Fare il tuning del modo
- Essere sicuri che il laser si comporti come un laser monomodale

Perché è così importante potere fare il tuning della frequenza di emissione del laser?

Essenzialmente per 2 ragioni:

- Lavorare alla frequenza ottica richiesta dall'applicazione
- Sopprimere il rumore in frequenza del laser

LASER FREQUENCY NOISE DI UN CW LASER (SINGLE MODE)

Il FSR del laser $\Delta\nu_{FSR,LASER} = \frac{c}{2L_e}$ dipende strettamente dalla lunghezza ottica della cavità $L_e = L + (n - 1)\ell$.

Quindi se la lunghezza fisica della cavità, l'indice di rifrazione o la lunghezza del materiale attivo cambiano, ad esempio perché fluttuazioni della temperatura provocano una variazione dello spessore del substrato dello specchio e

quindi provocano lo spostamento dello specchio stesso e pertanto della lunghezza fisica della cavità, o provocano variazioni della lunghezza del materiale attivo o la variazione dell'indice di rifrazione, il FSR della cavità del laser cambia. Quindi possiamo scrivere le grandezze come

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \delta L(T, P_e) \\ \ell &= \ell_0 + \delta \ell(T, P_e) \\ n &= n_0 + \delta n(T, P_e, P_p) \end{aligned}$$

dove T è la temperatura ambientale, P_e è la pressione ambientale (che include la pressione acustica che pertanto ha un impatto sul sistema) e P_p è la potenza del pompaggio (la potenza di pompaggio ha effetto sulla popolazione degli emettitori all'interno del materiale attivo e se varia la popolazione varia anche l'indice di rifrazione).

La variazione della lunghezza fisica della cavità può essere scritta come

$$\delta L = L_0 \alpha T \Rightarrow L = L_0(1 + \alpha T)$$

dove α è il coefficiente di espansione termica che per gran parte dei materiali ha un valore di $\alpha = 10^{-6} K^{-1}$, ma possiamo anche utilizzare ultra low expansion (ULE) glasses che presentano un valore di $\alpha = 10^{-9} K^{-1}$.

Tutti questi parametri, la temperatura, la potenza di pompaggio e la potenza ambientale, sono funzioni del tempo

$$T = T(t), \quad P_p = P_p(t), \quad P_e = P_e(t)$$

La temperatura varia molto lentamente, mentre la potenza di pompaggio varia molto lentamente nel caso di laser allo stato solido e molto velocemente nel caso di laser a semiconduttori e la pressione ambientale cambia lentamente se consideriamo la pressione atmosferica e velocemente se consideriamo le variazioni di pressione causate dal rumore acustico. Si parla di

- SLOW DRIFTS se $\tau_D > 1s \rightarrow f_D < 1Hz$
- FAST JITTERS se $\tau_J < 10ms \rightarrow f_J > 100Hz \rightarrow 1kHz \rightarrow MHz$

Come viene intaccata la frequenza di emissione dalle variazioni di questi parametri?

La frequenza di emissione nel caso di un cw laser (single mode) è una dei modi

$$\nu_L = m \cdot \frac{c}{2L_e} \Rightarrow \delta \nu_L = -m \frac{c}{2L_e^2} \delta L_e = \nu_L \cdot \left(-\frac{\delta L_e}{L_e} \right) \Rightarrow \frac{\delta \nu_L}{\nu_L} = -\frac{\delta L_e}{L_e}$$

quindi la variazione relativa della frequenza di emissione è uguale (a meno di un segno) alla variazione relativa della lunghezza ottica della cavità. La variazione della lunghezza ottica della cavità è una funzione del tempo e dipende da due contributi, cioè dalla variazione della lunghezza ottica dovuta da dal drift e la variazione della lunghezza ottica dovuta dal jitter

$$\delta L_e(t) = \delta L_{e,D}(t) + \delta L_{e,J}(t)$$

Questo significa che la frequenza del laser è uguale a ica che la frequenza del laser è uguale a

$$\nu_L(t) = \bar{\nu}_L + \delta \nu_{L,D}(t) + \delta \nu_{L,J}(t)$$

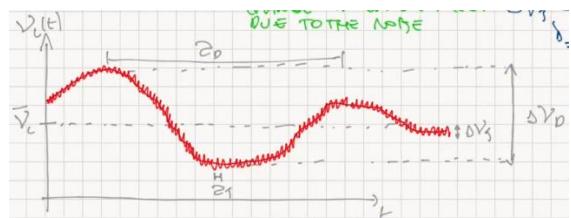
dove $\bar{\nu}_L$ è un valore stabile non affetto da rumore.

È importante notare che queste variazioni sono variazioni nella frequenza ottica causate dal rumore e è noto che il drift provoca variazioni della frequenza ottica più grandi di quelle provocate dal jitter, infatti abbiamo $\Delta \nu_D = MHz - GHz$, mentre $\Delta \nu_J = 1kHz - 100kHz$ nel caso di laser allo stato solido e $\Delta \nu_J = 10MHz$ nel caso di laser semiconduttori.

Abbiamo 2 principali sorgenti di rumore che sono il RUMORE DOVUTO ALLA TEMPERATURA e il RUMORE DOVUTO ALLE VIBRAZIONI. La temperatura varia lentamente nel tempo quindi ha impatto sulla frequenza con slow drifts, quindi sul lungo tempo, mentre i jitters hanno effetto sulla frequenza su tempi corti, ma l'ammontare della variazione dovuta agli slow drifts è maggiore di quella dovuta ai jitters. Questo è dovuto al fatto che i contributi di drift sono considerati come rumore 1/f.

Se grafichiamo la frequenza del laser in funzione del tempo, vediamo che questa ha un comportamento oscillatorio.

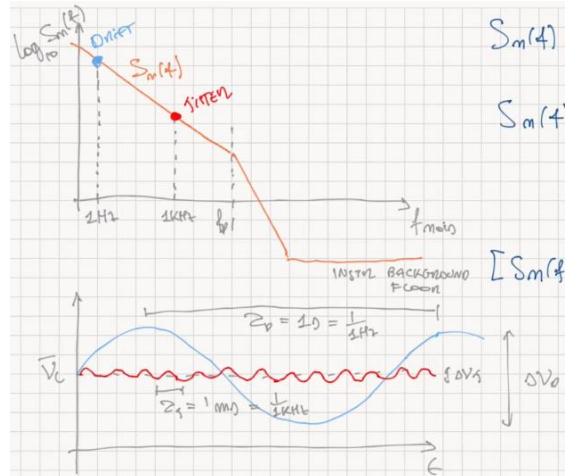
Possiamo rappresentare questa fluttuazione, cioè il frequency noise, in un diagramma di Bode, andando a graficare il frequency noise power spectrum density $S_n(f)$.



Ad ogni frequenza, lo spettro di potenza rappresenta la deviazione standard della fluttuazione della frequenza ottica causata dal rumore a quella particolare frequenza, cioè $S_n(f) = \langle \Delta\nu_{noise}^2(f) \rangle$, pertanto la sua unità di misura è $[S_n(f)] = \frac{[Hz]^2}{Hz}$.

Che cosa significa che il rumore di frequenza decresce linearmente con la frequenza?

Significa che aumentando la frequenza, l'entità della fluttuazione diminuisce.



EFFETTO DEL RUMORE DI FREQUENZA SULLO SPETTRO DI EMISSIONE DEL LASER

Linewidth = larghezza dello spettro di emissione del laser

Idealmente la curva di emissione del laser è molto stretta. Il problema è che se guardiamo questa linea di emissione nel tempo, questa si muove a causa dei drifts e dei jitters. Se integriamo tutte le posizioni di questa linea nel tempo, abbiamo una linea di emissione integrata (integrated emission line) che è molto più larga di quella ideale a causa del rumore, cioè $\Delta\nu_{FWHM,LASER}$ è affetto della densità di potenza di rumore $S_n(f)$.

Possiamo dire che i contributi di rumore alla frequenza f modulano la frequenza di emissione con una frequenza di modulazione f . Questo significa che possiamo pensare alla frequenza di uscita del laser come una frequenza modulata e questa modulazione è dovuta alle frequenze di rumore.

Se chiamiamo $\omega_L = 2\pi\bar{\nu}_L$ la frequenza angolare centrale di emissione del laser e abbiamo una componente di rumore alla frequenza angolare $\Omega = 2\pi f$, allora la frequenza istantanea del laser può essere scritta come

$$\omega_L(t) = \omega_L + \Delta\omega(t)$$

dove $\Delta\omega(t) = \omega_L\gamma \cos(\Omega t)$ e γ è la modulation depth (profondità di modulazione) del contributo di rumore.

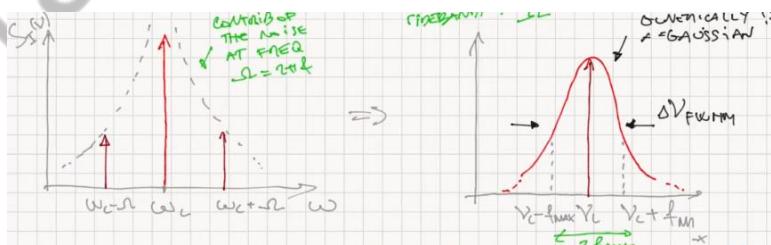
Quindi il fasore del campo elettrico del laser può essere scritto come $\tilde{E}_{LASER}(t) = E_0 e^{j\phi(t)}$, dove la fase del campo elettrico può essere scritta come $\phi(t) = \int_0^t \omega_L(t) dt = \omega_L t + \frac{\gamma}{\Omega} \sin(\Omega t)$.

Quindi il campo elettrico reale può essere scritto come $E_{LASER}(t) = E_0 \cos\left(\omega_L t + \omega_L \frac{\gamma}{\Omega} \sin(\Omega t)\right)$.

Questa funzione che è una funzione sinusoidale che dipende a sua volta da un'altra funzione sinusoidale può essere sviluppata in serie di Bessel e se γ/Ω è piccolo, possiamo approssimare e stoppare la serie al primo ordine e dopo alcune semplificazioni il campo elettrico reale può essere scritto come

$$E_{LASER}(t) = E_0 \cos(\omega_L t) - E_0 \frac{\omega_L \gamma}{2\Omega} \{ \cos[(\omega_L - \Omega)t] - \cos[(\omega_L + \Omega)t] \}$$

che è un segnale modulato in frequenza, dove $\cos(\omega_L t)$ è la portante, poi abbiamo due sidebands a $\omega_L \pm \Omega$ la cui ampiezza è $\frac{\omega_L \gamma}{2\Omega}$.



Siccome abbiamo un sacco di frequenze modulanti che hanno effetto sul sistema in modo randomico, se guardiamo lo spettro ottico integrato su un lungo periodo di tempo abbiamo che $\Delta\nu_{FWHM}$ dipende dalla massima frequenza di rumore. Quindi questa curva avrà un andamento Gaussiano a causa del carattere randomico del rumore che va ad impattare sulla posizione di questa curva in modo casuale e f_{MAX} avrà un ordine di grandezza di

- kHz – 100kHz nel caso di un laser allo stato solido o un laser a fibra
- MHz – 10MHz nel caso di un laser a semiconduttore

Quindi possiamo approssimare e scrivere $\Delta\nu_{FWHM} \approx 2f_{MAX}$.

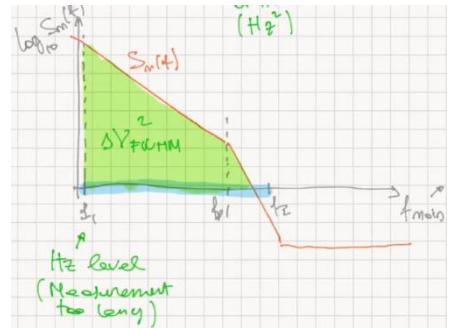
Se vogliamo compensare l'effetto del rumore abbiamo bisogno di un sistema retroazionato (feedback) con una larghezza di banda più alta della massima frequenza di rumore f_{MAX} .

Per misurare la linewidth, possiamo procedere in 2 modi

- Possiamo utilizzare un analizzatore di spettro ottico che misura direttamente lo spettro ottico

- Possiamo ricavarlo dal rumore $\Delta\nu_{FWHM} = \sqrt{\langle\Delta\nu_{NOISE}^2\rangle} = \int_{f_1}^{f_2} S_n(f) df$

dove $\Delta\nu_{NOISE}^2$ è la deviazione standard del noise floor, f_1 è limitata dall'ammontare di tempo sul quale vogliamo integrare (se vogliamo integrare fino a 1Hz dobbiamo accumulare le misure per 1s), quindi $f_1 = 1/\tau_{MAX}$, in cui τ_{MAX} è il massimo tempo di durata della misura, e f_2 è chiamata frequenza significativa massima di rumore misurabile. Siccome solitamente abbiamo $\tau_{MAX} \leq 1s$, solo i jitters contribuiscono alla linewidth del laser, ma ancora l'average position della frequenza di emissione può variare a causa dei drifts.



STABILIZZAZIONE DELLA FREQUENZA DI EMISSIONE

Per stabilizzare la frequenza di emissione del laser dobbiamo compensare le fluttuazioni di rumore con un'azione esterna e pertanto per farlo abbiamo bisogno di:

1. Inserire degli ATTUATORI al fine di fare un tuning attivo della frequenza di uscita del laser (al fine di compensare le fluttuazioni del rumore).

Supponiamo di scegliere degli attuatori controllati in tensione (ad esempio attuatori piezoelettrici) che fanno il tuning della frequenza di emissione andando a variare la distanza tra gli specchi e quindi la lunghezza della cavità risonante (\rightarrow attuatori piezometrici posizionati sugli specchi).

Allora, se la grandezza in ingresso al sistema è la tensione $V_{in}(t)$ e la funzione di trasferimento del sistema è β , il contributo sulla frequenza di emissione da parte dell'attuatore sarà $\beta V_{in}(t)$ e quindi possiamo scrivere la frequenza di emissione del laser come

$$\nu_L(t) = \bar{\nu}_L + \delta\nu_{NOISE}(t) + \beta V_{in}(t)$$

Possiamo usare diversi tipi di attuatori:

- Attuatori piezometrici \rightarrow frequenza di modulazione/cut-off: $f_c \simeq kHz$.
- Modulatori acusto-ottici $\rightarrow f_c \simeq MHz$

Questi due tipi di attuatori sono molto veloci ma provocano una variazione della frequenza $\Delta\nu_{actuator}$ piccola. Altrimenti possiamo utilizzare:

- Motori passo-passo
- Forni / celle di Peltier
- ...

Questi attuatori sono lenti ma provocano delle variazioni grandi di frequenza.

2. Frequenze di riferimento stabili (sia a RF che ottica)

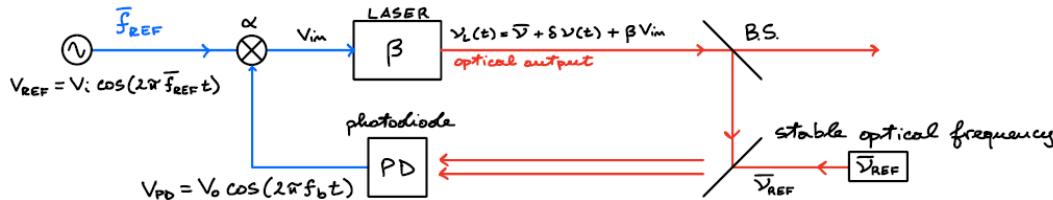
Per ottenere queste frequenze stabili vengono utilizzati:

- Nel caso della frequenza di riferimento a RF:
 - Per avere stabilità nel breve tempo \rightarrow oscillatori a RF stabili (come oscillatori al quarzo o al rubidio) che presentano una frequenza di oscillazione nel range $f_{RF} \simeq 10 - 100MHz$ e una variazione relativa della frequenza $\frac{\Delta f}{f} \simeq 10^{-12} - 10^{-13}$. Questi dispositivi si trovano in commercio.
 - Per avere stabilità nel lungo tempo \rightarrow orologi atomici al cesio che presentano $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{CS} \simeq 10^{-16}$. Questi dispositivi, a differenza dei precedenti, non si trovano in commercio e pertanto le frequenze di riferimento ottenute in questo modo vengono fornite tramite dei collegamenti ottici dai centri nazionali di ricerca (INRIM, NIST).
- Nel caso della frequenza di riferimento ottica:
 - Si utilizzano laser stabili (che si trovano in commercio)
 - Si prende questa frequenza di riferimento tramite dei collegamenti ottici dai centri nazionali di ricerca.

3. Negative feedback loop.

Quello che facciamo è confrontare la frequenza instabile del nostro laser alla frequenza stabile di riferimento in modo, calcolare l'errore e portare questo in ingresso ai nostri attuatori in modo che questi vadano a modificare la frequenza di emissione e la rendano uguale a quella di riferimento, compensando l'effetto delle fluttuazioni.

La negative feedback network è composta da



- 2 BS (beam-splitters)
 - Un beam di riferimento (cioè alla frequenza di riferimento)
 - Un fotodiodo che rileva il beam proveniente dal laser e quello di riferimento e calcola la bit note (nota di bit), cioè la frequenza di modulazione del segnale laser. Quindi l'uscita del fotodiodo avrà la frequenza della bit note che è data dalla differenza tra la frequenza ottica del laser e la frequenza ottica di riferimento: $f_b = v_L(t) - \bar{v}_{REF}$. Questo segnale in uscita dal fotodiodo, quindi la bit note, si trova ovviamente nel range delle radiofrequenze
 - Un oscillatore a RF stabile che fornisce la frequenza a RF di riferimento.
 - Un rilevatore di fase e frequenza che prende in ingresso il segnale dell'oscillatore e quello in uscita dal fotodiodo e ne fa il prodotto, ma il prodotto in frequenza è un segnale modulato in frequenza che ha 2 sidebands e che può essere scritto come $V_\alpha = \alpha \cdot [f_1 - f_2] = \alpha \cdot [\bar{f}_{REF} - f_b(t)] = \varepsilon$.
- Questo segnale rappresenta il nostro segnale errore che diamo in ingresso al laser (quindi agli attuatori) al fine di eseguire la compensazione.

Dobbiamo trovare la funzione di trasferimento a ciclo chiuso del sistema.

Abbiamo detto che $\varepsilon = \alpha[\bar{f}_{REF} - f_b(t)]$, dove $f_b(t) = v_L(t) - \bar{v}_{REF}$ e $v_L(t) = \bar{v} + \delta v(t) + \beta V_{in}$ dove $V_{in} = \varepsilon$.

Quindi sostituendo otteniamo

$$\varepsilon = \alpha[\bar{f}_{REF} + \bar{v}_{REF} - \bar{v} - \delta v - \beta \varepsilon] \Rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha[\bar{f}_{REF} + \bar{v}_{REF} - \bar{v} - \delta v]}{1 + \alpha\beta}$$

Di conseguenza possiamo scrivere la frequenza di emissione del laser come

$$v_L(t) = \bar{v} + \delta v(t) + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} [\bar{v}_{REF} + \bar{f}_{REF} - \bar{v} - \delta v(t)]$$

in cui $\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}$ è il closed-loop gain del negative feedback system, quindi $G_{open-loop} = \alpha\beta$ e $G_{loop} = \alpha\beta$.

Se

$$\begin{cases} G = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \Rightarrow G = G_{id} = 1 \\ \alpha\beta \gg 1 \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} v_L(t) &= \bar{v} + \delta v(t) + 1[\bar{v}_{REF} + \bar{f}_{REF} - \bar{v} - \delta v(t)] = \bar{v} + \delta v(t) + \bar{v}_{REF} + \bar{f}_{REF} - \bar{v} - \delta v(t) \\ &\Rightarrow v_L(t) = \bar{v}_{REF} + \bar{f}_{REF} \end{aligned}$$

Quindi la frequenza di emissione del laser è limitata dalla stabilità delle frequenze di riferimento ottica e a RF.

REMARKS:

1. Questo negative feedback network funziona solo se $G = G_{id} = 1$, cioè se $\alpha\beta \gg 1$.

Quindi se grafichiamo in un diagramma di Bode il forward gain vediamo che abbiamo un polo dovuto agli attuatori alla frequenza di cut-off degli stessi. Vediamo che il punto di intersezione tra il forward gain e l'ideal gain è la soglia dopo la quale la retroazione del sistema non funziona più.

Quindi la funzione di trasferimento a ciclo chiuso sarà uguale al guadagno ideale fino al GBWP e poi cadrà con 20dB/dec seguendo il guadagno a ciclo aperto. Quindi il polo del sistema (cioè del guadagno a ciclo chiuso G) sarà data da $\alpha\beta(0) = G_{id}f_p$ e quindi sarà uguale a $f_p = f_c \cdot \alpha\beta(0)$.

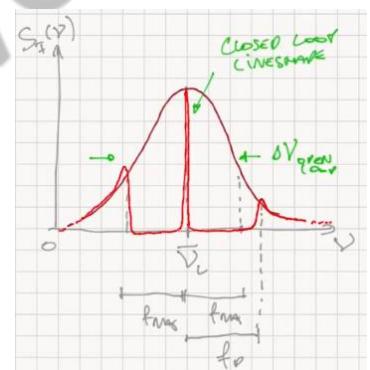
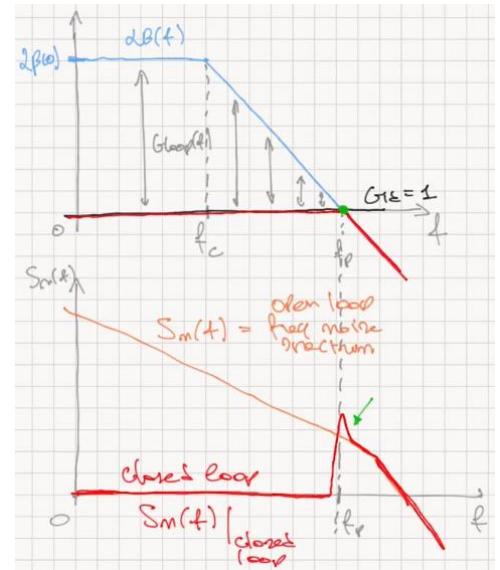
Solitamente abbiamo $f_p \approx 500\text{kHz}$ nel caso di laser allo stato solido e $f_p \approx \text{MHz}$ per i laser a semiconduttori.

La frequenza f_p rappresenta la frequenza massima alla quale può operare il sistema, cioè la frequenza massima fino la quale la rete retroazionata funziona e il rumore viene compensato. Dopo questa frequenza il rumore non viene più compensato.

Se compariamo il guadagno del sistema con lo spettro di potenza del rumore vediamo che fino a f_p riusciamo a rimuovere tutto il rumore e dopo questa frequenza il rumore aumenta e abbiamo inizialmente un piccolo overshoot e poi il rumore segue l'andamento dello spettro di potenza.

L'overshoot è dovuto al fatto che quando siamo vicini al polo a ciclo chiuso del sistema, il margine di fase diventa più grande di 90 gradi e abbiamo un po' di feedback positivo quindi invece che rimuovere il rumore ne aggiungiamo ancora.

Infine se guardiamo lo spettro di intensità del laser che è centrato in \bar{v}_L , siccome in closed loop operation riusciamo a compensare tutto il rumore fino alla frequenza f_p , vediamo che:



TRANSIENT LASER BEHAVIOR

Quando abbiamo trattato le equazioni di velocità ci eravamo messi nella condizione di regime stazionario, cioè avevamo supposto che i transitori fossero esauriti e quindi che le equazioni di velocità fossero indipendenti dal tempo. Ora però andiamo a considerare il comportamento in regime transitorio del laser e questo per 2 principali ragioni:

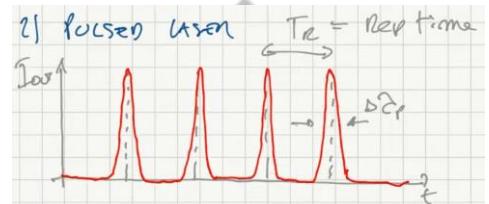
1. Se consideriamo un CW LASER (o laser monomodale)
 - a. Possiamo comunque avere fluttuazioni della frequenza
 - b. Possiamo avere fluttuazioni di intensità:

Le fluttuazioni dell'intensità sono dovute al fatto che quando accendiamo il laser, il laser vuole iniziare subito ad operare, ma c'è un transitorio e anche quando questo raggiunge a causa dell'instabilità ambientale, l'intensità non avrà un valore stabile nel tempo ma presenterà delle fluttuazioni, cioè sarà affetto da rumore di intensità.



2. Vogliamo far operare il laser come un laser ad impulsi

In questo caso l'intensità del raggio in uscita sarà composta da diversi impulsi i quali sono caratterizzati da un TEMPO DI RIPETIZIONE T_R e ovviamente dalla FREQUENZA DI RIPETIZIONE $f_R = 1/T_R$ e dalla DURATA DELL'IMPULSO $\Delta\tau_P$.



Esistono fondamentalmente 2 tecniche per fare operare un laser in regime ad impulsi:

- i. **Q-SWITCHING** → questa consente di ottenere picchi di intensità molto alta $I_P \approx 100 \text{ kW}$, una frequenza di ripetizione $f_R \approx 1\text{kHz} - 100\text{kHz}$ e una durata dell'impulso $\Delta\tau_P \approx 10 \text{ ns} (10^{-8}\text{s})$. La tecnica del q-switching inoltre produce impulsi che NON SONO COERENTI tra loro, cioè non c'è correlazione tra le portanti di impulsi diversi. Questo fa sì che i laser ad impulsi di tipo q-switched vengano utilizzati in applicazioni di potenza dove la coerenza tra gli impulsi non rappresenta una specifica richiesta.
- ii. **MODE-LOCKING** → permette di ottenere picchi di intensità uguale al q-switching $I_P \approx 100 \text{ kW}$, una frequenza di ripetizione molto più alta $f_R \approx 10\text{MHz} - 100\text{MHz} - \text{GHz}$ e una durata dell'impulso molto più breve $\Delta\tau_P \approx fs (10^{-15}\text{s})$. La tecnica del mode-locking invece produce impulsi che presenta un'ALTA COERENZA TEMPORALE. Questi tipi di laser vengono utilizzati in applicazioni di spettroscopia dove la coerenza temporale tra gli impulsi è fondamentale.

EQUAZIONI DI VELOCITÀ DIPENDENTI DAL TEMPO → OSCILLAZIONE DI RILASSAMENTO

Ricordiamo che le equazioni di velocità di un laser descrivono l'evoluzione della popolazione dell'upper laser level del materiale attivo e quella del numero di fotoni all'interno della cavità e possono essere scritte come

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = R_p - B\phi N - \frac{N}{\tau} = f(N, \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = B \cdot V_a N \phi - \frac{\phi}{\tau_c} = g(N, \phi) \end{cases}$$

dove:

- R_p : pumping rate
- $B\phi N$: termine di emissione stimolata che provoca lo svuotamento del upper laser level ed è composto da
 - o B
 - o ϕ : numero di fotoni
 - o N : popolazione dell'upper state
- N/τ : termine che tiene conto dei fenomeni di decadimento
- $B \cdot V_a N \phi$: di nuovo un termine legato all'emissione stimolata che provoca l'aumento dei fotoni all'interno della cavità
- $\frac{\phi}{\tau_c}$: termine che tiene in considerazione le perdite della cavità

Sia f che g sono due equazioni non lineari e pertanto abbiamo un sistema non lineare.

Per trovare una soluzione analitica al sistema, possiamo linearizzare il sistema attorno ad un valore stabile.

Se scriviamo $N(t) = \bar{N} + \delta N(t)$ e $\phi(t) = \bar{\phi} + \delta\phi(t)$ con $\delta N \ll \bar{N}$ e $\delta\phi \ll \bar{\phi}$, possiamo usare queste due equazioni per linearizzare le equazioni di velocità. Ovviamente i valori stabili \bar{N} e $\bar{\phi}$ sono le soluzioni delle equazioni di velocità stesse in regime stazionario, cioè quando $\frac{dN}{dt} = 0$ e $\frac{d\phi}{dt} = 0$.

NOTA: Per semplificare la trattazione indicheremo le derivate (cioè le velocità) in questo modo

$$\frac{dN(t)}{dt} = \dot{N}(t)$$

Sostituendo le due soluzioni approssimate nelle equazioni di velocità e trascurando i termini al secondo ordine, cioè

$$\begin{cases} \delta\dot{N}(t) = \frac{\delta f}{\delta N}\Big|_{\bar{N}, \bar{\phi}} \delta N + \frac{\delta f}{\delta \phi}\Big|_{\bar{N}, \bar{\phi}} \delta\phi \\ \delta\dot{\phi}(t) = \frac{\delta g}{\delta N}\Big|_{\bar{N}, \bar{\phi}} \delta N + \frac{\delta g}{\delta \phi}\Big|_{\bar{N}, \bar{\phi}} \delta\phi \end{cases}$$

Ognuna delle due equazioni rappresenta la linearizzazione del sistema.

Risolvendo una delle due equazioni (si arriva allo stesso risultato), otteniamo il seguente risultato

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{N} \\ \delta\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(B\bar{\phi} + \frac{1}{\tau}) & -B\bar{N} \\ BV_a\bar{\phi} & BV_a\bar{N} - \frac{1}{\tau_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta\phi \end{bmatrix}$$

che rappresenta un SISTEMA LINEARE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Le soluzioni del sistema sono funzioni esponenziali dove gli esponenti sono gli autovalori del sistema

$$\begin{aligned} \delta\phi(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ \delta N(t) &= Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

dove λ sono gli AUTOVALORI del sistema e A è la MATRICE DEI COEFFICIENTI del sistema.

Come troviamo gli autovalori del sistema?

Li troviamo ponendo il determinante della matrice dei coefficienti uguale a zero:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{\tau} & B\bar{N} \\ -BV_a\bar{\phi} & \lambda - \left(BV_a\bar{N} - \frac{1}{\tau_c}\right) \end{vmatrix} = 0$$

dove I è la matrice unitaria diagonale.

Possiamo separare le soluzioni in 2 regioni: prima della soglia di attivazione del laser e dopo la soglia.

1. LASER SOTTO SOGLIA: $\bar{N} < N_c = \frac{\gamma}{\sigma\rho}$, $\bar{\phi} = 0$

In questo caso possiamo semplificare la matrice degli autovalori in questo modo

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{\tau} & B\bar{N} \\ 0 & \lambda - \left(BV_a\bar{N} - \frac{1}{\tau_c}\right) \end{vmatrix}$$

Questa è una matrice diagonale (in quanto tutti gli elementi sotto la diagonale sono nulli) e quindi il determinante è semplicemente il prodotto degli elementi sulla diagonale, cioè

$$|\lambda I - A| = \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)\left(\lambda - BV_a\bar{N} + \frac{1}{\tau_c}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{\tau} \\ \lambda_2 = BV_a\bar{N} - \frac{1}{\tau_c} \end{cases}$$

Il primo autovalore è sempre minore di zero $\lambda_1 < 0$ e porta sempre ad una soluzione stabile.

Il secondo autovalore invece può essere minore o maggiore di zero

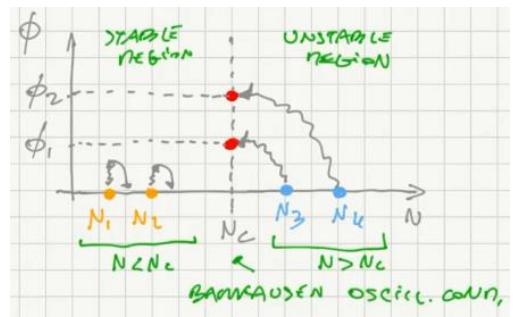
- Se $\bar{N} < \frac{1}{BV_A\tau_c} = N_c \rightarrow \lambda_2 < 0 \rightarrow$ soluzione stabile
- Se $\bar{N} > \frac{1}{BV_A\tau_c} = N_c \rightarrow \lambda_2 > 0 \rightarrow$ soluzione instabile

Quindi la popolazione critica rappresenta anche la soglia tra la soluzione stabile e la soluzione instabile.

Quando il laser è sottosoglia, possiamo rappresentare il numero di fotoni all'interno della cavità in questo modo.

Se pompamo il laser sotto il valore critico, anche se siamo capaci di aumentare il numero dei fotoni all'interno della cavità per un breve intervallo di tempo la soluzione (che è rappresentata dal pallino giallo) è stabile e torna sempre ad un valore sotto soglia.

Se invece pompamo il laser sopra il valore critico, siccome un autovalore è >0 , il sistema è molto instabile e evolve fino a una condizione in cui $\phi > 0, N = N_c$. $N = N_c$ è la condizione di oscillazione di Barkhausen



2. LASER SOPRA SOGLIA: $\bar{\phi} \neq 0, \bar{N} = N_c = \frac{1}{BV_a \tau_c} = \frac{\gamma}{\sigma \ell}$

In questo modo possiamo semplificare la matrice degli autovalori in questo modo

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + B \left(\bar{\phi} + \frac{1}{\tau} \right) & -BN_c \\ BV_a \bar{\phi} - \frac{1}{\tau_c} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calcolando il determinante troviamo

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \left(B\bar{\phi} - \frac{1}{\tau} \right) \lambda - BV_a N_c \bar{\phi} = 0$$

dove indichiamo $\left(B\bar{\phi} - \frac{1}{\tau} \right)$ come il fattore I e $BV_a N_c \bar{\phi}$ come il fattore II.

Quindi i due autovalori quando il laser lavora sopra soglia si trovano risolvendo questa equazione del secondo grado.

Al fine di trovare le soluzioni dobbiamo ricordare che la soluzione in regime stazionario per il numero di fotoni (che si trova ponendo le equazioni di velocità uguali a zero $\frac{dN}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = 0$) è

$$\bar{\phi} = \frac{1}{BN_c} [R_p - R_{cp}] = \frac{R_{cp}}{BN_c} \left[\frac{R_p}{R_{cp}} - 1 \right]$$

dove $R_{cp} = \frac{N_c}{\tau} \rightarrow \frac{R_{cp}}{N_c} = \frac{1}{\tau}$.

Ponendo $\frac{R_p}{R_{cp}} = x$ che chiamiamo PARAMETRO SOPRA SOGLIA, possiamo riscrivere la soluzione in regime stazionario come

$$\bar{\phi} = \frac{1}{B\tau} [x - 1]$$

Sostituendo possiamo riscrivere i fattori I e II come

$$\begin{aligned} \text{I} &\left\{ B\bar{\phi} + \frac{1}{\tau} = B \cdot \frac{1}{B\tau} [x - 1] + \frac{1}{\tau} = \frac{x}{\tau} = \frac{2}{t_0} \right. \\ \text{II} &\left\{ BN_c V_a \bar{\phi} = \frac{1}{\tau \tau_c} [x - 1] = \Omega^2 \right. \end{aligned}$$

dove $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\tau \tau_c} [x - 1]}$ è detta FREQUENZA NATURALE DI RILASSAMENTO e $t_0 = \frac{2\tau}{x}$ è detto TEMPO

DI SMORZAMENTO DELL'OSCILLAZIONE (li capiremo tra un attimo).

Sostituendo otteniamo

$$\lambda^2 + \frac{2}{t_0} \lambda + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{t_0} \left[1 \pm j \sqrt{\Omega^2 t_0^2 - 1} \right]$$

A seconda del valore del determinante gli autovalori possono essere reali (avremo una soluzione esponenziale decrescente) o complessi coniugati (avremo una soluzione oscillatoria).

- Se $\Omega^2 t_0^2 < 1 \rightarrow$ autovalori reali e negativi \rightarrow SOLUZIONE ESPONENZIALE NEGATIVA DECRESCENTE / SOVRA-SMORZATA
- Se $\Omega^2 t_0^2 > 1 \rightarrow$ autovalori complessi e coniugati \rightarrow SOLUZIONE OSCILLATORIA / SOTTO-SMORZATA

Sostituendo i valori di Ω e t_0 troviamo che

- $\Omega^2 t_0^2 < 1 \rightarrow \Omega < \frac{1}{t_0} \equiv t_0 < \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \tau < \tau_c : (1)$

→ la soluzione sovra-smorzata avviene quando il tempo di vita dell'upper laser level è minore del tempo di vita dei fotoni nella cavità

- $\Omega^2 t_0^2 > 1 \rightarrow \Omega > \frac{1}{t_0} \equiv t_0 > \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \tau > \tau_c : (2)$

→ la soluzione sotto-smorzata avviene quando il tempo di vita dell'upper laser level è maggiore del tempo di vita dei fotoni nella cavità

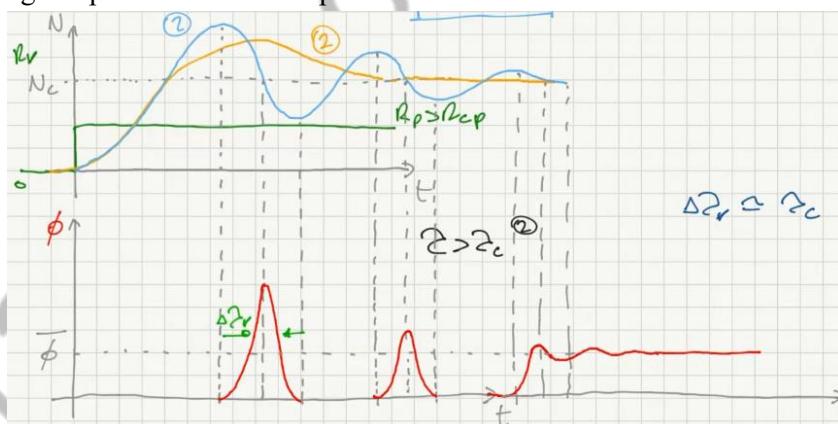
Nel caso di autovalori reali e negativi, cioè di soluzione sovra-smorzata/esponenziale decrescente, o equivalentemente di $\tau < \tau_c$, quando iniziamo a pompare il laser la popolazione inizia a crescere e dopo un overshoot si stabilizza alla popolazione critica. (CURVA GIALLA)

Nel caso di autovalori complessi e coniugati, cioè di soluzione sotto-smorzata/oscillatoria, o equivalentemente di $\tau > \tau_c$, abbiamo ancora una soluzione stabile, ma la raggiungiamo con un'oscillazione attorno al valore di popolazione critica. (CURVA CELESTE)

DINAMICA DEL NUMERO DI FOTONI ALL'INTERNO DELLA CAVITÀ: Nel caso di comportamento oscillatorio della popolazione ($\tau > \tau_c$) (CURVA CELESTE), ovviamente finché la popolazione è sotto soglia non abbiamo fotoni all'interno della cavità, poi superata la soglia, quando la popolazione raggiunge il suo massimo, il processo di emissione stimolata ha luogo e i fotoni iniziano a crescere, raggiungendo il massimo nel punto di attraversamento della popolazione del livello critico, dopo il quale iniziano a decrescere finché non tornano a zero (quando la popolazione raggiunge il minimo relativo) e il laser si spegne. Questo processo si ripete ogni volta che abbiamo un overshoot sopra il livello critico, ma ad ogni ripetizione il numero massimo di fotoni che si raggiunge all'interno della cavità diminuisce.

Ad un certo punto i fotoni non riescono più a tornare a zero perché la popolazione oscilla molto velocemente attorno al valore critico fino a diventare uguale ad esso e quindi non abbiamo più impulsi di fotoni.

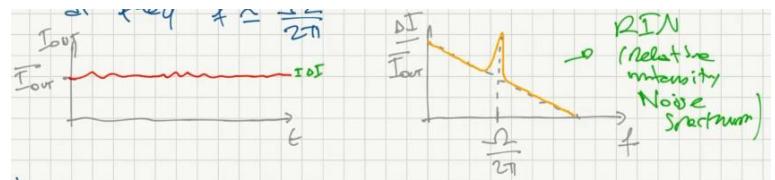
Il tempo di durata degli impulsi è dato dal tempo di vita dei fotoni all'interno della cavità $\Delta\tau_p \simeq \tau_c$.



Da questo riusciamo proprio a capire la differenza tra il comportamento in regime stazionario (cw laser/laser monomodale) e il comportamento in regime transitorio. Appena accendiamo il laser e iniziamo a pomparlo abbiamo degli impulsi di fotoni e quindi ci troviamo in regime transitorio, ma dopo un certo intervallo di tempo la popolazione si stabilizza alla popolazione critica e il numero di fotoni si stabilizza al valore $\bar{\phi}$ e quindi ci troviamo in regime stazionario.

REMARKS:

1. Se guardiamo l'intensità, ci accorgiamo che l'intensità non è mai stabile in realtà, ma presenterà sempre delle fluttuazioni (rumore di intensità) dovute a variazioni ambientali.
2. Se $\tau > \tau_c$ (NOTA: questo solitamente avviene per laser allo stato solido che hanno τ molto grande e per laser a semiconduttori che hanno τ_c molto piccolo) il rumore di frequenza avrà un picco alla frequenza $f \simeq \Omega/2\pi$.



FUNZIONAMENTO DEL LASER Q-SWITCHING

Possiamo sfruttare questo comportamento iniziale del laser, cioè quello di avere impulsi di fotoni, e forzare il laser di lavorare in questa condizione, evitando che questo vada in regime stazionario. Quello che facciamo è accendere il laser, questo emette il primo impulso, poi blocchiamo la cavità inserendo un otturatore (shutter) al suo interno, così aumentiamo le perdite ad un livello così alto che il numero di fotoni cala drasticamente, poi la popolazione supera nuovamente il livello critico e noi apriamo improvvisamente l'otturatore ottenendo un secondo impulso molto alto.

Quindi, quello che facciamo è forzare il laser ad operare in CONDIZIONE DI Q-SWITCHING.

L'otturatore $\gamma(t)$ è un modulatore di intensità ottica e funziona in questo modo.

Partiamo con un quality factor della cavità basso:

$$\text{LOW } Q: \begin{cases} \gamma(t) = \gamma_H \rightarrow \text{HIGH LOSSES} \rightarrow \text{SHUTTER CLOSED} \\ N_c = \frac{\gamma_H}{\sigma\ell} \Rightarrow \bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

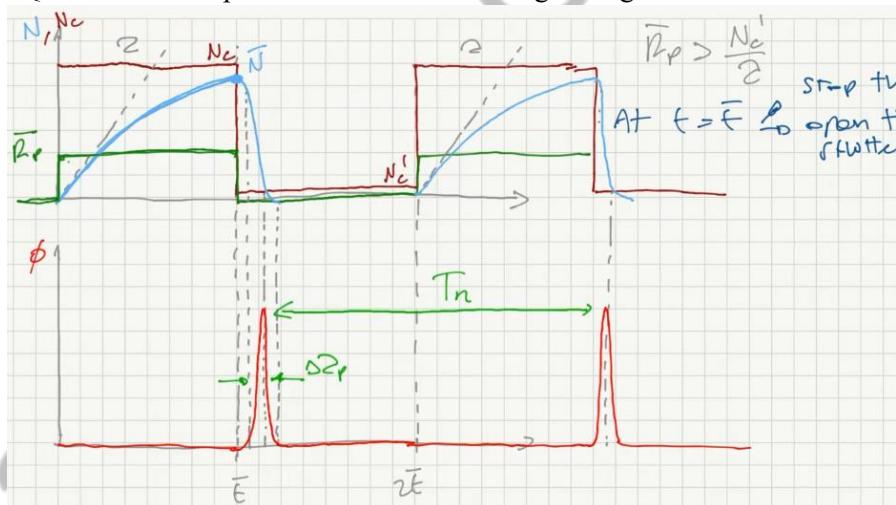
siccome N_c in questa condizione assume un valore molto alto che non siamo in grado di raggiungere avremo $\bar{\phi} = 0$ e in questa condizione siamo in grado di aumentare un sacco la popolazione del upper laser level.

Ad un certo punto switchiamo il quality factor della cavità ad un valore alto

$$\text{HIGH } Q: \begin{cases} \gamma(t) = \gamma_L \rightarrow \text{LOW LOSSES} \rightarrow \text{SHUTTER OPEN} \\ N'_c = \frac{\gamma_L}{\sigma\ell} \ll N_c \Rightarrow \bar{\phi} \gg 0 \end{cases}$$

Quindi Q-SWITCHING significa che switchiamo il quality factor della cavità tra un valore basso e un valore alto in modo da aprire e chiudere l'otturatore e avere gli impulsi.

Il funzionamento di un laser Q-SWITCHING può essere riassunto nel seguente grafico.



Quando raggiungiamo il tempo \bar{t} stoppiamo il pompaggio ed apriamo l'otturatore.

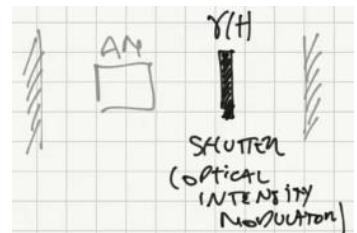
Quando raggiungiamo il tempo $2\bar{t}$ riniziamo il pompaggio e chiudiamo l'otturatore.

Il processo è perfettamente periodico e gli impulsi si ripetono identici ogni T_R , il quale è limitato dal tempo necessario per accumulare la popolazione sul upper laser level, in quanto non ha assolutamente senso aprire l'otturatore prima di aver raggiunto una elevata popolazione su questo livello, poiché più alta sarà la popolazione raggiunta più alta sarà il picco di intensità dell'impulso. Quindi T_R è limitato da τ e possiamo pertanto scrivere $T_R \simeq \tau$.

Mentre come avevamo già accennato la durata dell'impulso è limitata dal tempo di vita dei fotoni all'interno della cavità $\Delta\tau_p \simeq \tau_c$.

Quindi, come abbiamo già detto, per avere impulsi molto alti dobbiamo avere τ molto lungo. Infatti, siccome $N_c = R_p\tau$, maggiore è τ maggiore è la popolazione che siamo in grado di accumulare sul upper laser level.

Valori tipici sono $\tau \simeq ms$, $f_R \simeq 1kHz - 100kHz$ e $\tau_c \simeq 1ns$ (quindi gli impulsi non sono poi così corti).



SLOW-SWITCHING CONDITION (REMARK SUL Q-SWITCHING)

Abbiamo visto che per far operare il laser in modalità q-switching e quindi per emettere impulsi, dobbiamo switchare velocemente il q-factor della cavità tra un valore basso e un valore alto.

Che cosa succede se l'otturatore non è tanto veloce quanto il tempo di vita dei fotoni all'interno della cavità? Se questo avviene ci troviamo nella SLOW-SWITCHING CONDITION.

Iniziamo con un valore alto della popolazione critica e vogliamo variarlo ad un valore basso al fine di emettere gli impulsi; quindi, al tempo \bar{t} andiamo a variare le perdite della cavità agendo sull'otturatore in modo da far diminuire N_c , ma in questo caso supponiamo di farlo lentamente rispetto a τ_c .

Quello che succede è che una volta che la popolazione N raggiunge il valore critico, smette di crescere e inizia a svuotarsi, in quanto inizia ad aumentare il numero di fotoni all'interno della cavità (abbiamo il primo impulso).

Una volta che la popolazione scende sotto il valore critico N_c , questa smette di diminuire e rimane costante finché il valore della popolazione critica N_c non scende al di sotto del valore reale della popolazione N .

A quel punto il laser si attiva nuovamente e abbiamo un nuovo aumento di fotoni (il secondo impulso) e raggiungiamo il massimo quando la popolazione reale incrocia nuovamente la popolazione critica.

Questo leak causa l'emissione di diversi impulsi parassiti che sono dannosi al normale funzionamento del laser in modalità q-switching.

Al fine di evitare questo comportamento dobbiamo usare uno switch veloce (dove per switch si intende un modulatore di intensità, cioè l'otturatore) con $\tau_{OFF} < \tau_c$.

Esistono 3 tipi/tecniche di switch:

1. ACTIVE Q-SWITCHING

È una tecnica di q-switching che fa uso di modulatori attivi, che possono essere:

- Electro-optical modulator (EOM)

Questi modulatori hanno un tempo di switching molto veloce $\tau_{OFF} \simeq ns$, ma hanno insertion losses (perdite di inserzione) molto alte, in quanto usano una coppia di polarizzatori che introducono tipicamente delle perdite, e sono molto costosi

- Acousto-optical modulator (AOM)

Sono leggermente più lenti degli EOM $\tau_{OFF} < \mu s$, hanno insertion losses basse in quanto non utilizzano polarizzatori e sono sempre molto costosi

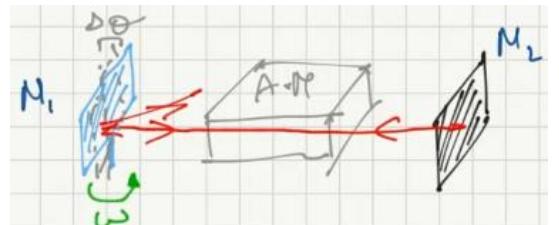
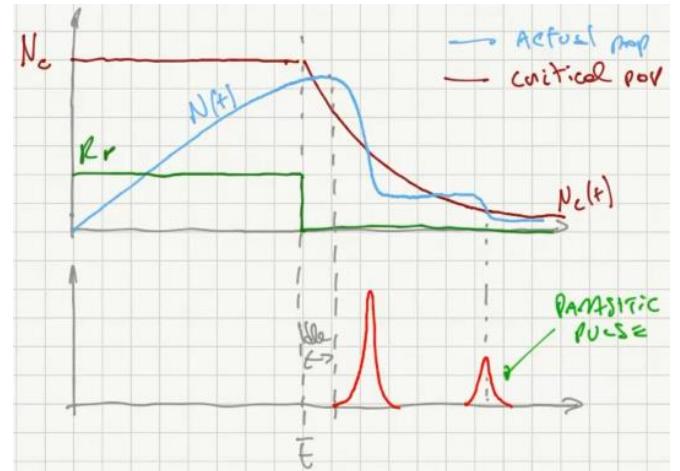
- Rotating mirror/prism

Hanno sempre un tempo di switching molto veloce $\tau_{OFF} \simeq 10ns$, hanno insertion losses basse e sono molto economici.

I rotating mirrors sono ovviamente basati sul principio delle alignment dependent losses (perdite dipendenti dall'allineamento) e sono realizzati con uno specchio fisso ed uno specchio che può girare attorno ad un suo asse con una frequenza di rotazione $f_r = \frac{\omega}{2\pi} < 1kHz$.

È facilmente intuitibile che se i due specchi sono

perfettamente allineati tra loro, cioè perfettamente paralleli, abbiamo perdite basse, altrimenti il beam viene riflesso fuori della cavità. Quindi abbiamo un ANGOLO DI ACCETTAZIONE di rotazione dello specchio $\Delta\theta$ molto piccolo entro il quale possiamo considerare gli specchi allineati e di avere basse perdite $\Delta\theta \simeq mrad$. Quindi l'idea è quella di avere high-Q solo quando M1 è parallelo a M2 (e quindi di avere l'emissione dell'impulso) e di avere low-Q in tutto il restante periodo di rotazione dello specchio (e quindi di avere l'accumulazione della popolazione).



2. PASSIVE Q-SWITCHING

Questa tecnica si basa sull'uso di SESAM (semiconductor saturable absorber modulator) cioè un materiale schematizzabile come un sistema a 2 livelli, il cui coefficiente di assorbimento varia al a seconda dell'intensità che colpisce lo colpisce. Maggiore è l'intensità in ingresso minore è il coefficiente di assorbimento del materiale. L'intensità che dimezza il valore del coefficiente di assorbimento iniziale/a riposo è detta intensità di saturazione I_{sat} . Siccome questo materiale è un sistema a 2 livelli, il coefficiente di assorbimento può essere scritto come

$$\alpha = \sigma_{12}(N_1 - N_2)d = \sigma_{12}\Delta Nd$$

e può essere dimostrato che

$$\alpha = \sigma_{12}\Delta Nd = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I_{in}}{I_{sat}}}$$

Questo tipo di materiale introduce delle perdite ma non alte quanto quelle introdotte da qualsiasi altro modulatore attivo.

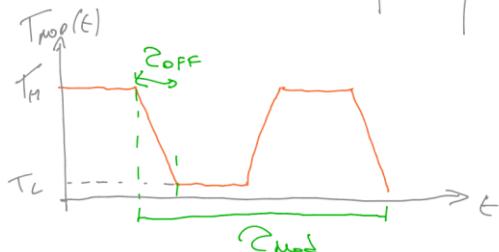
Quando la popolazione vera raggiunge la popolazione critica, il numero di fotoni inizia ad aumentare e man mano che i fotoni aumentano all'interno della cavità, il coefficiente di assorbimento del SESAM diminuisce così come le perdite introdotte da questo. Quando il numero di fotoni va a zero e il laser si spegne, le perdite $\gamma(t)$ tornano alte e quindi la popolazione critica $N_c = \gamma(t)/\sigma\ell$ cresce nuovamente. Le perdite del sesam seguono il profilo dell'impulso nel tempo.

La passività del sistema assicura $T_R \approx \tau$, $\tau_{OFF} \approx \tau_c$.



INTENSITY MODULATIONS / OPTICAL SWITCHES SUMMARY TABLE

MODULATOR	τ_{Mod}	f_{Mod}	$\tau_{On/Off}$	INJECTION LOSSES γ	APPLICATION
- BIREFRINGENT TUNABLE FILTER <small>MOTOR DRIVEN PIERO</small>	\uparrow \downarrow $\sim ms$	Hf \downarrow $1kHz$	\uparrow \downarrow $\sim ms$	HIGH	LASER TUNING
- POCKELS CELL (ELECTRO-OPTICAL MOD.)	ms	$6Hz$	ns	HIGH polarizer	ACTIVE Q-SWITCH "MOVE LOCK-IN PHASE ADJ"
- ACUSTO OPTICAL MODULATOR (AOM)	ms	MHz	$\sim 10ms$	LOW	ACTIVE Q-SWITCH USING FREQUENCY STABILIZATION (SHIFTER)
- ROTATING MIRROR	ms	KHz	$100ms$	LOW	Q-Switching



REMARK: la velocità di modulazione (o periodo di modulazione) può essere molto diversa dal tempo di switch-on e quello di switch-off. Se consideriamo la trasmissione del laser, cioè il rapporto tra l'intensità in uscita e quella in ingresso in funzione del tempo, vediamo che il TEMPO DI SWITCH-OFF è il tempo necessario per variare da T_H a T_L .

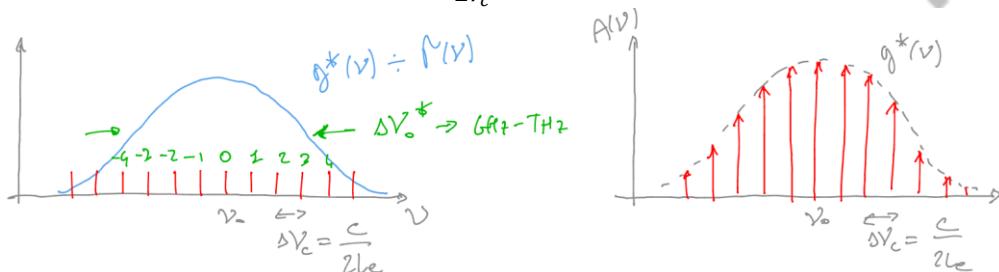
TECNICA DI MODE LOCKING

(SVELTO CH8)

I vantaggi della tecnica di MODE LOCKING rispetto a quella di Q-SWITCHING sono i seguenti:

1. Velocità di ripetizione più alta ($20\text{MHz} - 1\text{GHz}$)
2. Gli impulsi sono più corti
3. Gli impulsi sono coerenti
4. La potenza di picco è più alta e arriva fino a 100kW

Supponiamo di accendere un laser che è basato su un materiale IB con profilo di guadagno Gaussiano $g^*(v) \div \sigma(v)$ che ha una larghezza $\Delta\nu_0^* \simeq \text{GHz} - \text{THz}$. Ovviamenete la cavità presenterà diversi modi oscillanti e solo i modi all'interno del range di frequenze del FWHM sono in grado di soddisfare la condizione di Barkhausen e provocare l'azione del laser. Il modo centrale si troverà alla frequenza ν_0 e la distanza tra i modi sarà $\Delta\nu_c = c/2L_e$, pertanto il numero di modi oscillanti "sotto" il FWHM sarà $N_{\#} = \frac{\Delta\nu_0^*}{\Delta\nu_c} \simeq 10^5 \div 10^6$.



Se osserviamo lo spettro di ampiezza del laser in mode locking vediamo che questo è limitato da un inviluppo definito dal profilo di guadagno $g^*(v)$ che è discreto, cioè è composto da linee, cioè una sequenza di delta di Dirac centrata in ν_0 , dove le delta sono separate di $\Delta\nu_c$ e la loro ampiezza è determinata dall'inviluppo.

Possiamo scrivere lo spettro di ampiezza del laser del laser in questo modo:

$$A(v) = g^*(v) \cdot \text{comb}(v, f_R)$$

dove f_R è la frequenza di ripetizione di questi modi ed è uguale a $f_R = \Delta\nu_c = c/2L_e$.

Il campo elettrico del raggio risultante del laser è dato dall'anti-trasformata di Fourier dello spettro di ampiezza

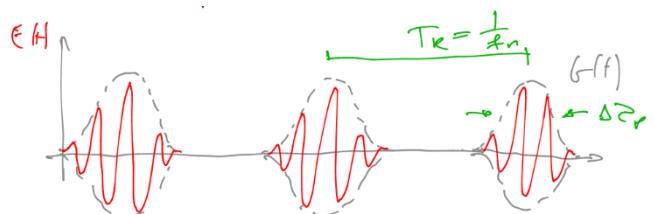
$$E(t) = \mathcal{F}^{-1}\{A(v)\} = E_0 e^{j2\pi\nu_0 t} \cdot G(t) * \text{comb}(t, T_R)$$

dove $T_R = 1/f_R$ è il periodo di ripetizione nel dominio del tempo e $G(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g^*(v)\}$ è l'inviluppo nel dominio del tempo.

NOTA: siccome l'inviluppo nel dominio della frequenza, cioè il profilo di guadagno $g^*(v)$, ha un andamento Gaussiano, la sua trasformata inversa di Fourier sarà a sua volta una Gaussiana. Quindi, $G(t)$ è una Gaussiana.

Quindi il campo elettrico risultante nel tempo è composto da una sequenza di impulsi uniformemente distribuiti nel tempo con un periodo di ripetizione T_R e definiti dall'inviluppo $G(t)$ di larghezza $\Delta\tau_p = 1/\Delta\nu_0^*$ dove $\Delta\nu_0^*$ è come abbiamo visto prima il FWHM di $g^*(v)$.

La portante ha l'andamento in rosso.

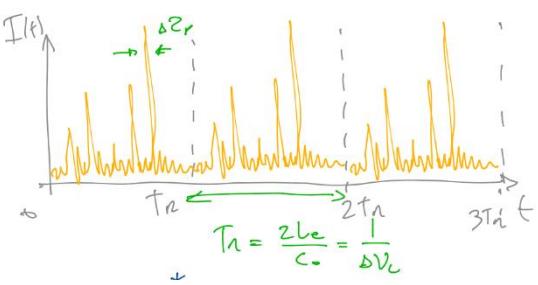


Siccome lo spettro di questo laser è discreto, l'onda in uscita da questo laser sarà un'onda pulsata.

L'intensità in uscita dal laser sarà affetta da molto rumore e presenterà di tanto in tanto dei picchi (spikes).

Se registriamo questa traccia temporale utilizzando un fotodiodo ed un oscilloscopio e guardiamo attentamente, possiamo notare che questa traccia è randomica, cioè affetta da rumore, ma si ripete

periodicamente nel tempo ogni $t = T_R = \frac{2L_e}{c} = \frac{1}{\Delta\nu_0^*}$.



Se misuriamo la durata di uno di questi picchi troviamo che $\Delta\tau_p = \frac{1}{\Delta\nu_0^*}$.

Da cosa deriva l'andamento randomico?

All'interno della cavità abbiamo diversi modi oscillanti ($N_{\#}$), ognuno dei quali va considerato indipendente dagli altri e quando accendiamo il laser ognuno di questi modi inizia ad oscillare con una fase random. Quindi le fasi iniziali dei modi sono incorrelate tra loro e da questo deriva il comportamento randomico dell'intensità in uscita dal laser.

Dobbiamo trovare un modo di creare una relazione di fase tra tutti questi modi.

Consideriamo il modo di indice ℓ che ha una fase φ_{ℓ} e supponiamo di essere in grado di fissare la differenza di fase tra un modo e il successivo, cioè di fissare $\varphi_{\ell+1} - \varphi_{\ell} = \bar{\varphi}$.

La fase di ogni modo può essere scritta come $\varphi_{\ell} = \varphi_0 + \ell\bar{\varphi}$ e supponiamo che la fase iniziale sia nulla $\varphi_0 = 0$, quindi possiamo scrivere la fase di ogni modo come un multiplo interno della fase costante: $\varphi_{\ell} = \ell\bar{\varphi}$.

Inoltre, dato che la frequenza angolare è $\omega = 2\pi\nu$, possiamo scrivere la variazione di frequenza angolare come $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$.

Quindi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrico complesso associato al modo ℓ -esimo può essere scritto come

$$\tilde{E}_{\ell}(t) = E_0 e^{j[\omega_0 + \ell\Delta\omega]t + \varphi_{\ell}} = E_0 e^{j[\omega_0 + \ell\Delta\omega]t + \ell\bar{\varphi}}$$

dove supponiamo che il campo complesso abbia ampiezza costante E_0 .

Quindi il campo elettrico complessivo può essere scritto come

$$\tilde{E}_{tot}(t) = \sum_{\ell=-N_{\#}/2}^{N_{\#}/2} E_0 e^{j\omega_0 t} e^{j\ell(\Delta\omega t + \bar{\varphi})}$$

Per semplificare la nostra equazione possiamo chiamare $\in \omega t + \bar{\varphi} = \Delta\omega t' \Rightarrow t = t' + \frac{\bar{\varphi}}{\Delta\omega}$ dove $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$, mentre $\Delta\omega \simeq MHz - GHz$ a seconda della lunghezza della cavità L_e . Quindi $\frac{\bar{\varphi}}{\Delta\omega} \simeq 0 \Rightarrow t \simeq t' \Rightarrow \Delta\omega t + \bar{\varphi} \simeq \Delta\omega t$.

Quindi possiamo semplificare il campo elettrico complessivo e riscrivere come

$$\tilde{E}_{tot}(t) \simeq E_0 e^{j\omega_0 t} \left\{ \sum_{\ell=N_{\#}/2}^{N_{\#}/2} e^{j\ell\Delta\omega t} \right\} = \tilde{G} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

dove il secondo termine della prima uguaglianza è una serie geometrica che converge al valore $\tilde{G}(t)$ cioè l'inviluppo complesso del campo elettrico complesso.

Quindi $\tilde{G}(t) = E_0 \sum_{\ell=N_{\#}/2}^{N_{\#}/2} e^{j\ell\Delta\omega t} \Rightarrow G(t) = \Re\{\tilde{G}(t)\} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{N_{\#}\Delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}$ che è l'INVILUPPO DEGLI IMPULSI DEL

CAMPO ELETTRICO IN USCITA DAL LASER se siamo in grado di fissare la differenza di fase tra due modi consecutivi.

Questa funzione assomiglia ad un sinc, ma ha un andamento periodico in quanto è data dal rapporto tra due funzioni periodiche.

- La posizione dei picchi dell'inviluppo si trova settando il denominatore a zero:

$$D = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\Delta\omega t_m}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega t_m}{2} = m\pi \Rightarrow t_m = m \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

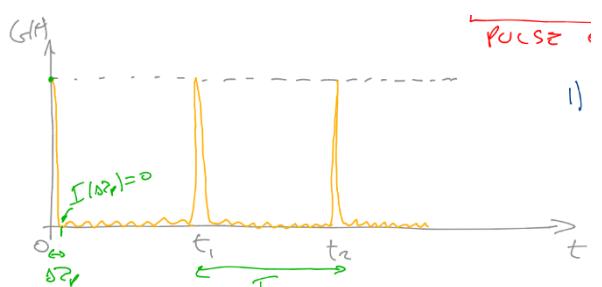
$$\Rightarrow t_m = m \frac{1}{\Delta\nu_c}$$

$$T_R = t_{m+1} - t_m = \frac{1}{\Delta\nu_c}$$

- Se $I(\Delta\tau_p) = 0$, la durata temporale dei picchi $\Delta\tau_p$ si trova settando il numeratore a zero:

$$Num = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{N_{\#}\Delta\omega t}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{N_{\#}\Delta\omega t}{2} = \pi \Rightarrow \Delta\tau_p = \frac{2\pi}{N_{\#}\Delta\omega} = \frac{1}{N_{\#}\Delta\nu_c}$$

$$\text{e dato che } N_{\#} \cdot \Delta\nu_c = \Delta\nu_0^*, \text{ possiamo scrivere } \Rightarrow \Delta\tau_p = \frac{1}{\Delta\nu_0^*}$$



Se siamo in grado di aumentare la correlazione tra i modi possiamo evolvere in una situazione in cui il campo elettrico nel dominio del tempo diventa una sequenza di impulsi con un periodo di ripetizione fisso e una durata temporale dell'impulso molto corta.

PUNTO DI VISTA FASORIALE

Possiamo pensare ogni modo come un fasore rotante e quindi possiamo pensare il campo elettrico complessivo come la somma di questi fasori rotanti.

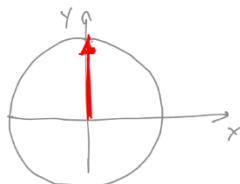
Possiamo scrivere elettrico fasoriale associato ad un modo come

$$\tilde{E}_\ell(t) = E_0 e^{j\varphi_\ell(t)} = E_0 e^{j\ell \Delta\omega t}$$

e supponiamo per semplicità che la differenza di fase tra un modo e il successivo sia uguale a zero $\bar{\varphi} = 0$.

Questo significa che all'istante $t = 0$ tutti i fasori, indipendentemente dall'indice, iniziano con fase nulla.

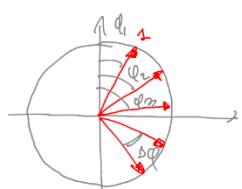
Quindi avremo 4 diverse situazioni:



- 1) $t = 0 \Rightarrow \tilde{E}_\ell(0) = E_0 e^{j0} = E_0$.

Tutti i modi sono in fase tra loro (hanno la stessa fase).

Questa condizione rappresenta il primo impulso del campo elettrico complessivo.



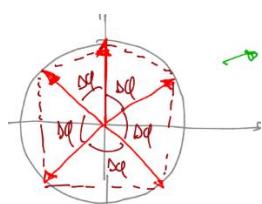
- 2) $t > 0 \Rightarrow \varphi_\ell = \ell \cdot \Delta\omega t = \omega_\ell t$ dove $\omega_\ell = \ell \Delta\omega$.

(All'aumentare del tempo i modi iniziano a ruotare e a distribuirsi lungo il cerchio.)

Questo significa che la fase del primo modo sarà $\varphi_1 = \Delta\omega t$, quella del secondo modo sarà $\varphi_2 = 2\Delta\omega t$, quella del terzo $\varphi_3 = 3\Delta\omega t$ e così via.

Quindi la differenza di fase tra ogni modo e il successivo sarà $\Delta\varphi = \varphi_{\ell+1} - \varphi_\ell = \Delta\omega t$.

I modi si diffonderanno lungo la circonferenza mantenendo la stessa distanza tra loro, cioè la stessa differenza di fase $\Delta\varphi = \varphi_1$.

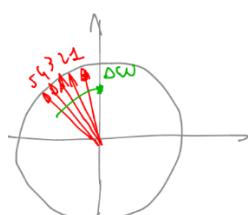


- 3) Prima o poi si raggiungerà la condizione in cui il modo più veloce compie un'intera rotazione attorno al cerchio.

Quindi al tempo $t = \bar{t}_1$ il modo più veloce, il $N_\#$ -esimo compierà un'intera rivoluzione attorno alla circonferenza, cioè $\Rightarrow \phi_{N_\#} = N_\# \Delta\omega \bar{t}_1 = 2\pi$.

In questa condizione i modi descrivono un figura regolare (nel nostro caso un pentagono dato che stiamo considerando solo 5 modi) e questo significa che la somma di tutti questi vettori nel piano complesso sarà nulla $\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{N_\#} \tilde{E}_\ell(\bar{t}_1) = 0$.

Questa condizione rappresenta il primo zero del campo elettrico complessivo.



- 4) Al passare del tempo avremo che il fasore più lento (1), avrà quasi compiuto un giro completo del cerchio e tutti gli altri modi seguono. Quindi i fasori stanno approcciando nuovamente la situazione in cui sono in fase.

Quando si troveranno nuovamente in fase, al tempo $t = t_1$ la fase del modo più lento sarà $\varphi_1 = \Delta\omega t_1 = 2\pi \Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu_c}$.

In questa condizione la fase del modo ℓ -esimo sarà $\varphi_\ell = \ell \Delta\omega t = \ell \cdot 2\pi$.

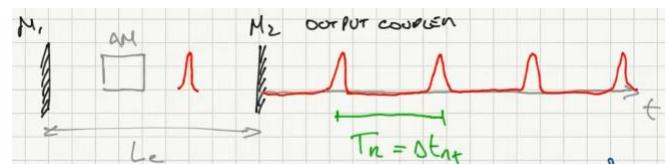
Questo significa che quando il modo più lento, il modo 1, ha compiuto un intero giro, tutti i modi saranno nuovamente sovrapposti come nella condizione 1), ma ogni modo avrà compiuto un numero di giri pari al suo indice, cioè il modo 2 avrà compiuto 2 giri, il modo 3 avrà compiuto 3 giri e così via.

Questa condizione rappresenta il secondo impulso di campo elettrico complessivo.

PUNTO DI VISTA NEL DOMINIO DEL TEMPO

Nel dominio del tempo possiamo immaginare che tutti i fotoni all'interno della cavità siano confinati spazialmente in un singolo impulso che rimbalza avanti e indietro all'interno della cavità e quindi l'impulso in uscita sarà dovuto a questo impulso di fotoni che rimbalza dentro la cavità.

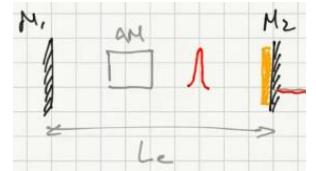
Quindi, possiamo immaginare l'intensità in uscita come una sequenza di impulsi, dove questi si verificano quando l'impulso di fotoni all'interno della cavità raggiunge lo specchio M2 (output coupler) e questo (l'impulso) viene parzialmente trasmesso fuori dalla cavità.



Il tempo che impiega l'impulso per percorrere un giro all'interno della cavità, cioè il round-trip time è $\Delta t_{RT} = \frac{2L_e}{c_0}$ e corrisponde al tempo di ripetizione degli impulsi in uscita dalla cavità $T_R = \Delta t_{RT}$. Quindi, la frequenza di ripetizione degli impulsi in uscita sarà $f_R = \frac{1}{\Delta t_{RT}} = \frac{c_0}{2L_e}$ e se $L_e = 1m \Rightarrow f_r = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{2m} = 150MHz$. Aumentando la lunghezza ottica della cavità possiamo aumentare il tempo di ripetizione degli impulsi in uscita, in quanto aumentiamo il round-trip time.

FUNDAMENTAL MODE-LOCKING

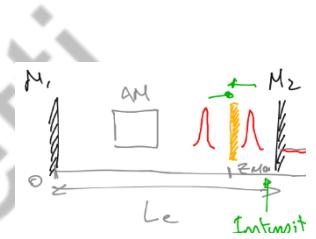
Possiamo settare la differenza di fase tra i modi che ci permette di ottenere l'emissione degli impulsi, posizionando un modulatore di intensità/otturato all'interno della cavità. Questo modulatore viene attaccato ad uno dei due specchi e deve essere trasparente solo quando l'impulso di fotoni all'interno della cavità lo colpisce. In questo modo ci assicuriamo che solo un impulso alla volta esca dalla cavità.



HARMONIC MODE-LOCKING

Se cambiamo la posizione del modulatore all'interno della cavità, posizionandolo più centralmente, avremo più impulsi di fotoni che si propagano all'interno, uno che si muove verso destra ed uno verso sinistra. Ogni volta che questi impulsi sbattono sullo specchio M2 avremo un impulso in uscita.

Quindi, raddoppiando il numero degli impulsi che si propagano all'interno della cavità stiamo aumentando la frequenza di ripetizione degli impulsi in uscita.



ACTIVE MODE-LOCKING

Ma in che modo la modulazione dell'intensità provoca la variazione di fase dei modi (phase-locking)?

Per capirlo plottiamo le perdite del modulatore.

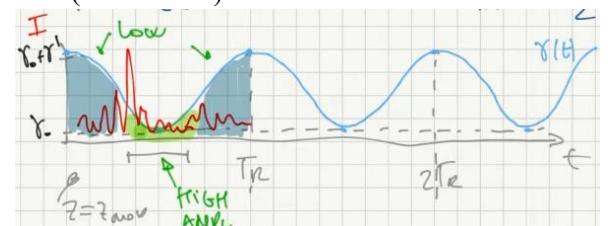
Quello che dobbiamo fare è sincronizzare le perdite del modulatore con la frequenza di ripetizione degli impulsi.

Le perdite complessive della cavità possono essere scritte come

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \frac{\gamma'}{2} [1 + \sin(2\pi f_R t)]$$

Supponiamo di azionare il laser e che questo inizi ad oscillare su tutti i suoi modi attivi (quelli "sotto" il FWHM) con una fase randomica/casuale. Quindi avremo un'intensità in uscita casuale (curva rossa).

Possiamo osservare che, a causa del fatto che le perdite dipendono dal tempo, l'intensità all'interno della cavità verrà amplificata diversamente. Durante l'intervallo di tempo in cui le perdite sono alte (evidenziato in celeste), l'intensità all'interno della cavità soffre di alte perdite e quindi verrà amplificata meno rispetto all'intervallo di tempo più centrale in cui le perdite sono basse (evidenziato in verde). In modo equivalente possiamo dire che l'intensità all'interno della cavità viene smorzata meno dove le perdite sono più basse (alta amplificazione) e di più dove le perdite sono più alte (bassa amplificazione).

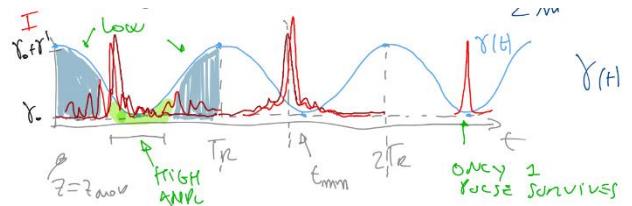


Siccome l'oscillazione, o equivalentemente il profilo di intensità, è un processo randomico, ad un certo punto avremo un picco di intensità nella regione in cui abbiamo basse perdite (=basso smorzamento/alta amplificazione). Questo picco verrà amplificato mentre l'intensità al di fuori dell'intervallo con basse perdite verrà attenuato.

Questo comporta che al periodo successivo avremo, cioè dopo un round-trip, osserveremo uno spostamento del picco di intensità verso la zona a basse perdite.

Fondamentalmente, dopo diversi round-trips all'interno della cavità, l'unica porzione del profilo di intensità che sopravvive a questo processo di amplificazione/attenuazione (OSS: UNA SORTA DI FILTRAGGIO) è quello che passa attraverso il modulatore quando questo introduce le minori perdite.

Stiamo amplificando l'intensità in un modo tale che il laser è forzato a variare la fase di ogni modo al fine di avere un singolo impulso che passa attraverso il modulatore ottico, quando questo presenta le più basse perdite possibili.



Se chiamiamo t_{MIN} l'istante di tempo al quale il modulatore presenta le perdite minime, il laser è forzato a settare la fase dei modi al fine di avere la massima intensità quando $t = m \cdot t_{MIN}$.

In altre parole ancora, il fatto che le perdite siano periodiche, forza il sistema ad avere il massimo guadagno quando le perdite sono minime e quindi ad amplificare la luce solo quando le perdite sono minime. Quindi questo meccanismo funziona come una sorta di NEGATIVE FEEDBACK LOOP.

Per ottenere ACTIVE MODE LOCKING viene usato un electro-optical modulator all'interno della cavità e si ottengono $f_R \simeq 10MHz - GHz$ e $\Delta\tau_p \geq 100fs$, quindi il PROBLEMA di questa tecnica è che non si riescono ad ottenere impulsi ultra corti e questo è dovuto essenzialmente a 2 ragioni:

1. Il tempo di switch-on e switch-off del modulatore non può essere infinitamente piccolo
2. Problema nel sincronizzare la frequenza di modulazione con la frequenza di ripetizione della cavità e ciuoè con il round-trip time. Questo problema è dovuto alla presenza di rumore e quindi al jitter.

PASSIVE MODE-LOCKING

Con questa tecnica riusciamo ad ottenere una perfetta sincronizzazione tra la frequenza di modulazione e la frequenza di ripetizione della cavità, in quanto il modulatore riesce ad adattarsi automaticamente.

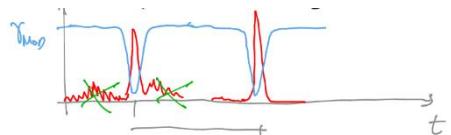
Esistono diversi modi per ottenere ciò

1. SESAM

Quando l'impulso di fotoni all'interno della cavità raggiunge il sesam, le perdite da esso introdotte si riducono a causa del fatto che le perdite del sesam sono proporzionali al coefficiente di assorbimento

$$\gamma_{SESAM} \div \alpha_{SESAM} = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$$

Siccome le perdite seguono il profilo di intensità, questo viene automaticamente sincronizzato con le perdite.

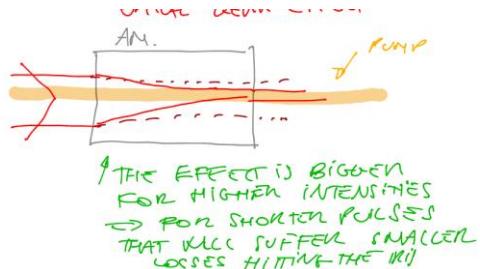
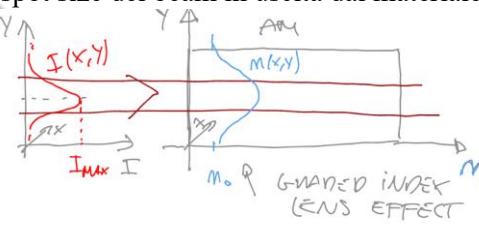


2. KERR-LENS MODE-LOCKING

La tecnica del mode-locking attraverso le lenti di Kerr sfrutta un effetto non-lineare del terzo ordine che prende il nome di EFFETTO OTTICO DI KERR. A causa di questo effetto l'indice di rifrazione n di ogni mezzo, e in particolare del mezzo attivo all'interno della cavità in questo caso, diventa linearmente proporzionale all'intensità della luce che passa attraverso esso

$$n(I) = n_0 + n_2 I$$

Il beam che colpisce il materiale attivo all'interno della cavità ha una sorta di profilo di intensità spaziale che presenta un massimo al centro del beam e può essere pensata come una Gaussiana. Quando il beam colpisce il materiale indurrà una ridistribuzione dell'indice di rifrazione del materiale che andrà ad assumere la stessa forma del profilo di intensità spaziale del beam. A causa del generarsi di questo profilo dell'indice di rifrazione all'interno del materiale quando il beam lo colpisce avremo un effetto chiamato LENS EFFECT (EFFETTO LENTE) (o più precisamente graded index lens effect) per il quale il materiale opera effettivamente come una lente positiva e concentra l'intensità del beam all'interno del materiale stesso, riducendo lo spot size del beam in uscita dal materiale.



L'effetto è maggiore per impulsi più corti, in quanto questo hanno un picco di intensità maggiore.

Quindi per l'impulso a più alta intensità all'interno della cavità abbiamo la messa a fuoco maggiore possibile all'interno del materiale. Possiamo quindi mettere un'iride all'uscita del materiale che stoppa la luce se questa ha una distribuzione spaziale troppo grande. Quindi, dopo diversi cicli all'interno della cavità, solo un impulso sopravviverà e sarà quello con la massima intensità possibile, cioè il più corto possibile.

NOTA: al giorno d'oggi non viene usata un'iride, ma viene usato un narrow pump beam.

LASER ALLO STATO SOLIDO

SLIDE

SISTEMI DI POMPAGGIO

(SVELTO CH6)

POMPAGGIO A LAMPADA

POMPAGGIO TRASVERSALE

EFFICIENZA RADIOATTIVA (sovraposizione spettrale)

- ➔ Bassa sovrapposizione spaziale e spettrale

POMPAGGIO A LASER

POMPAGGIO LONGITUDINALE

- ➔ Alta sovrapposizione spaziale e spettrale

MATERIALI ATTIVI

(SVELTO CH9)

ACTIVE IONS + HOST MATRIX

Francesco Gavetti

PARTE 2: FISICA DEI LASER E OTTICA AVANZATA

MODELLAZIONE QUANTOMECCANICA DEI PROCESSI DI ITERAZIONE RADIAZIONE-MATERIA

RIPASSO CONCETTI DI MECCANICA QUANTISTICA

La meccanica quantistica nasce all'inizio del 1900 quando alcuni scienziati (Einstein, Plank,...) iniziarono ad eseguire alcuni esperimenti.

Gli esperimenti più importanti si suddividono essenzialmente in 2 gruppi:

- Esperimenti sul **comportamento corpuscolare delle radiazioni**
 1. EFFETTO FOTOELETTRICO (Einstein, 1905)
 2. RADIAZIONE DI CORPO NERO (Plank, 1901)
 3. EFFETTO COMPTON (1923): collisione tra fotoni ed elettroni liberi
- Esperimenti sul **comportamento ondulatorio della materia**
 4. ESPERIMENTO DI DAVISSON & GERMAN (1905): diffrazione di elettroni caldi da un singolo cristallo di Nickel → ha dimostrato il carattere ondulatorio della materia

Gli esperimenti (1) e (2) si basano sull'assunzione che il campo elettromagnetico è quantizzato con un'energia quantica/di quantizzazione pari all'energia del fotone $E_{ph} = h\nu$ (IPOTESI DI EINSTEIN PLANK).

Gli esperimenti (3) e (4) invece si basano sull'IPOTESI DI DE BROGLIE per cui il momento di una particella può essere scritto come $p = h/\lambda$.

Il risultato di tutti questi esperimenti è che sia il moto della materia che quello della radiazione può essere descritto con la funzione d'onda

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{j(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t)}$$

Come ricaviamo questa funzione d'onda?

Vogliamo trovare un'equazione che ci permetta di trovare λ e ν , i quali dipendono dalle condizioni al contorno del problema fisico.

Questa funzione d'onda deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. Deve soddisfare i postulati di Einstein e de Broglie → $E_{ph} = h\nu$ e $p = h/\lambda$
2. Deve essere lineare → quindi deve valere il principio di sovrapposizione degli effetti
3. Deve soddisfare la conservazione delle proprietà formali → conservazione dell'energia: l'energia complessiva di una particella deve essere uguale alla somma della sua energia cinetica e dell'energia potenziale

$$E_{tot} = U_k + U(x)$$

Se scriviamo la funzione d'onda in questo modo

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

abbiamo che la costante di propagazione è $k = 2\pi/\lambda$ e la frequenza angolare è $\omega = 2\pi\nu$.

Possiamo riscrivere il postulato di de Broglie come $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$ e il postulato di Einstein come $E_{tot} = \hbar\omega$.

L'energia cinetica della particella può essere scritta come

$$U_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

Quindi è possibile riscrivere la conservazione dell'energia come

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + U(x)$$

questa è la CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA CONSIDERANDO I POSTULATI DI EINSTEIN-DE BROGLIE.

Come possiamo operare sulla funzione d'onda al fine di ottenere una costante di propagazione e una frequenza angolare che soddisfano la conservazione dell'energia?

Calcoliamo la derivata seconda della funzione d'onda rispetto alla posizione spaziale

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} \psi(x, t) = -k^2 \psi(x, t)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $-\frac{\hbar^2}{2m}$, otteniamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \psi(x, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x, t)$$

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2}$ è l'operatore per l'energia cinetica.

Possiamo fare lo stesso per l'energia totale.

Se deriviamo la funzione d'onda rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{\delta}{\delta t} \psi(x, t) = -j\omega \psi(x, t)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $j\hbar$, otteniamo

$$j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \psi(x, t) = \hbar \omega \psi(x, t)$$

$\Rightarrow j\hbar \frac{\delta}{\delta t}$ è l'operatore per l'energia totale.

Sommando $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(x) + -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \psi(x, t) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x, t) + j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \psi(x, t) = \hbar \omega \psi(x, t)$, otteniamo
 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x) \right] \psi(x, t) = j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \psi(x, t)$

che prende il nome di EQUAZIONE DI SHRÖDINGER.

Risolvendo l'equazione di Schrödinger per le condizioni al contorno che sono date dall'energia potenziale, è possibile ricavare la funzione d'onda $\psi(x, t)$.

REMARKS:

- L'equazione di Schrödinger è un'equazione complessa, quindi la soluzione, cioè la funzione d'onda $\psi(x, t)$ sarà una funzione complessa.

- INTERPRETAZIONE DI MAX BORN

La prima interpretazione della funzione d'onda complessa è stata data da Max Born, secondo il quale la funzione d'onda può essere interpretata come una funzione densità di probabilità di trovare la particella

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t) = f(x, t)$$

Pertanto, la probabilità di trovare una particella subatomica (es. elettrone) tra le posizioni $x_0 \leftrightarrow x_0 + \Delta x$, al tempo t è

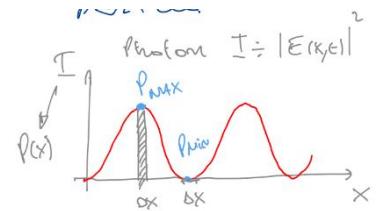
$$P[x_0 \leftrightarrow x_0 + \Delta x, t] = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x, t) dx = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |\psi(x, t)|^2 dx$$

Questa interpretazione ci porta anche a risolvere il problema della localizzazione dell'ampiezza della funzione d'onda. In quanto dato che abbiamo una probabilità unitaria di trovare la particella nello spazio (probabilità certa), la normalizzazione dell'ampiezza può essere scritta in questo modo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Questa interpretazione ha posto un altro problema che Einstein tentò di risolvere. Questa interpretazione, infatti, è in contrasto con il concetto deterministico di evoluzione fisica di un sistema. In accordo a questa interpretazione il moto di una particella è governato da leggi probabilistiche, ma la funzione d'onda probabilistica è determinata in modo deterministico risolvendo l'equazione di Schrödinger.

Per un fotone consideriamo che il campo elettrico, soluzione dell'equazione d'onda, rappresenta l'equazione d'onda stessa e che l'intensità rappresenta il quadrato del valore assoluto del campo $I \div |E(x, t)|^2$, cioè la funzione densità di probabilità. Guardiamo l'onda stazionaria, la cui intensità varia tra un minimo e un massimo. Quindi l'interpretazione di Max Born ci dice che la distribuzione della densità ci dice che è più probabile trovare la particella dove l'intensità è massima rispetto a dove è minima.



2. PROPRIETÀ DELLA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

- Tipicamente, quando l'equazione di Schrödinger viene risolta con opportune condizioni al contorno, cioè data un'opportuna energia potenziale $U(x)$, l'equazione restituisce un insieme discreto di soluzioni $\psi_m(x, t)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) che sono continue e derivabili.

Le soluzioni funzioni d'onda possono anche essere rappresentate con questa notazione $|\psi_m(x, t)\rangle$ (notazione di Ket) e sono autovettori dello spazio funzionale definito dalla SE (Schrödinger equation). Essendo dei vettori, le soluzioni godono delle seguenti proprietà:

- Prodotto scalare tra soluzioni della SE:

$$\langle \psi_m / \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x, t) \cdot \psi_n(x, t) dx \Rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ 1, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Quindi il prodotto scalare può essere scritto come la delta di Kronecker

$$\langle \psi_m / \psi_n \rangle = \delta_{nm}$$

Facendo il prodotto scalare di un vettore con se stesso, possiamo anche definire la norma del vettore

$$\langle \psi_n / \psi_n \rangle = \|\psi_n\|^2 = 1$$

dove $\|\psi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x, t)|^2 dx$.

- Questa proprietà ci dice che l'insieme delle soluzioni della SE per un dato problema (cioè per date condizioni al contorno, cioè per una data energia potenziale) definisce uno SPAZIO DI HILBERT e l'insieme di vettori $|\psi_m(x, t)\rangle$ rappresenta una BASE ORTONORMALE dello spazio di Hilbert.
- Facciamo un'analogia con lo spazio Euclideo. Nello spazio euclideo, grazie al principio di sovrapposizione ogni combinazione lineare delle soluzioni rimane una soluzione ($\vec{v} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y + c\vec{u}_z$) e lo stesso può essere fatto nello spazio di Hilbert con l'unica differenza che in questo caso i coefficienti sono dipendenti dal tempo. In questo modo definiamo la GENERICA FUNZIONE D'ONDA

$$|\psi_g(x, t)\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle + a_3|\psi_3\rangle + \dots$$

Ovviamente, anche la generica funzione d'onda deve rispettare le proprietà sopra citate

$$\langle \psi_g / \psi_g \rangle = \|\psi_g\|^2 = 1$$

Questo significa che il BRA della funzione d'onda può essere scritto come

$$\langle \psi_g | = \sum_{i=1}^N a_i^*(t) \langle \psi_i(x, t) |$$

dove N è la dimensione dello spazio.

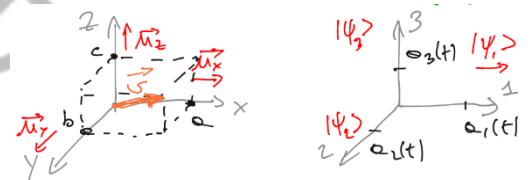
Quindi possiamo scrivere il prodotto scalare tra due generiche funzioni d'onda come il prodotto tra il BRA e il PRA, cioè come

$$\begin{aligned} \langle \psi_g / \psi_g \rangle &= \left(\sum_{i=1}^N a_i^*(t) \langle \psi_i(x, t) | \right)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^N a_i(t) |\psi_i(x, t)\rangle \right)^2 = \\ &= \sum_{k,i=1}^N a_i^*(t) a_k(t) \langle \psi_i / \psi_k \rangle = \sum_{k,i=1}^N a_i^*(t) a_k(t) \delta_{i,k} = \\ &= \sum_{i=1}^N |a_i(t)|^2 = 1 \end{aligned}$$

dove $|a_i(t)|^2$ rappresenta la probabilità di trovare la particella sullo stato $|\psi_i(x, t)\rangle$.

GATTO DI SCHRÖDINGER:

- SCATOLA CHIUSA $\rightarrow |\psi_{cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|Alive\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|Dead\rangle$
- SCATOLA APERTA $\rightarrow |\psi_{cat}\rangle = 1|Alive\rangle$ o $|\psi_{cat}\rangle = 1|Dead\rangle$
quando osserviamo il sistema questo collassa in uno dei due stati.



- VALORI ATTESI e OPERATORI DI OSSERVABILI FISICHE

In meccanica quantistica, esistono diverse osservabili fisiche (grandezze fisiche osservabili).

Possiamo calcolare il VALORE MEDIO di una osservabile fisica come:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \cdot x \cdot \psi(x, t) dx = \\ &= \langle \psi(x, t) / x / \psi(x, t) \rangle\end{aligned}$$

Nel caso del momento abbiamo

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \cdot \hat{p} \cdot \psi(x, t) dx = \\ &= \langle \psi(x, t) / \hat{p} / \psi(x, t) \rangle\end{aligned}$$

dove \hat{p} è l'operatore momento ed è definito come $\hat{p} = -j\hbar \frac{\delta}{\delta x}$.

Data una generica soluzione $|\psi_g\rangle$, se a questa applichiamo l'operatore momento otteniamo

$$\hat{p}|\psi_g\rangle = p(x, t)|\psi_g\rangle$$

che sembra molto simile ad un'equazione agli autovalori, ma $p(x, t)$ è un valore del momento dipendente dallo spazio e dal tempo.

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \langle \psi(x, t) / \hat{p} / \psi(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \cdot \hat{p} \cdot \psi(x, t) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) |\psi_g|^2 dx\end{aligned}$$

REMARK: STATI STAZIONARI PER UN OPERATORE

per un operatore esistono degli stati stazionari per i quali (es. momento)

Se $|\psi_n\rangle$ è tale per cui $\hat{p}|\psi_n\rangle = \bar{p}_n|\psi_n\rangle \Rightarrow$ questa equazione è un'equazione agli autovalori dove il valore della osservabile fisica \bar{p}_n (che nel nostro caso è il momento, ma vale per qualsiasi operatore) è costante ed è autovalore dell'equazione.

Se calcoliamo il valore medio

$$\langle p \rangle = \langle \psi_n | \hat{p} | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | \bar{p}_n | \psi_n \rangle = \bar{p}_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \bar{p}_n$$

Quindi, fondamentalmente il valore istantaneo dell'osservabile è uguale al suo valore medio.

Se risolviamo un sistema e applichiamo per esempio un operatore momento angolare e troviamo che quando applicato alla funzione d'onda (ricavata risolvendo l'equazione di Schrödinger) da origine ad un'equazione agli autovalori nella quale gli autovalori sono i valori del momento angolare, significa che per quel particolare sistema, il momento angolare è costante. Questo avviene per qualsiasi operatore.

In generale, se abbiamo un operatore quantomeccanico \hat{A} associato alla osservabile fisica a , se $\hat{A}\psi_n(x, t) = \bar{a}_n\psi_n(x, t)$ allora \bar{a}_n è un autovalore costante e gli stati $\psi_n(x, t)$ sono stati stazionari per l'operatore \hat{A} .

REMARK: TEOREMA DI EHRENFEST: è un teorema che esprime matematicamente il principio della permanenza delle proprietà formali.

Enunciato: il valore atteso che ricaviamo dal trattamento quantomeccanico di un sistema deve coincidere con il valore classico della corrispondente osservabile fisica.

$$\begin{aligned}x_{classical}(t) &= \langle x(t) \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx \\ v_{classical} &= \frac{dx_{classical}}{dt} = \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle \\ v_{classical} &= \frac{p_{classical}}{m} = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \hat{p} \psi dx\end{aligned}$$

FUNZIONI D'ONDA STAZIONARIE

È un caso particolare in cui la distribuzione spaziale è dipendente dal tempo.

In analogia con il campo elettromagnetico è la corrispettiva di un'onda stazionaria.

Le funzioni d'onda stazionarie si possono dividere in due parti: la prima parte dipende solo dallo spazio e la seconda dipende solo dal tempo.

$$\psi(x, t) = \psi(x) \cdot \eta(t)$$

Se applichiamo l'equazione di Schrödinger a questa onda particolare, otteniamo

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x) \right] \psi(x) \eta(t) &= -j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \psi(x) \eta(t) \\ \eta(t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x) \right] \psi(x) &= \left[-j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \eta(t) \right] \psi(x) \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per $\psi(x)\eta(t)$, otteniamo

$$\frac{1}{\psi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x) \right] \psi(x) = \frac{1}{\eta(t)} \left[-j\hbar \frac{\delta}{\delta t} \eta(t) \right]$$

In questa equazione abbiamo il primo membro che dipende esclusivamente dallo spazio e il secondo membro che dipende esclusivamente dal tempo; quindi, l'unico modo per cui i due membri siano uguali è che questi siano delle costanti.

1. COMPONENTE TEMPORALE DELLA FUNZIONE D'ONDA

in accordo a quanto detto sopra possiamo scrivere

$$-j\hbar \frac{\delta \eta(t)}{\delta t} = E \cdot \eta(t)$$

che è un'equazione agli autovalori dove E è la costante di separazione (ed è un autovalore) e la soluzione di questa equazione differenziale del primo ordine è

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{j}{\hbar} E dt \Rightarrow \eta(t) = \eta_0 e^{j\frac{E}{\hbar}t}$$

che è la variabile che determina la variazione temporale della funzione d'onda. La velocità/frequenza angolare di questa funzione è $\omega = \frac{E}{\hbar}$, quindi l'autovalore E può essere scritto come

$$E = \hbar\omega = h\nu$$

che è l'ENERGIA TOTALE DELLA PARTICELLA (per l'ipotesi di Einstein-Plank).

2. COMPONENTE SPAZIALE DELLA FUNZIONE D'ONDA

Possiamo scriverla come

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Anche questa è un'equazione agli autovalori che può essere scritta nella forma

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

dove $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + U(x)$ è l'HAMILTONIANA (funzione di Hamilton) del sistema, $\psi_n(x)$ è un insieme di autovettori e E_n sono gli autovalori del sistema e sono i valori dell'energia totale.

Quindi, se applichiamo la funzione di Hamilton alla parte spaziale della funzione d'onda otteniamo una equazione agli autovalori, le cui autosoluzioni sono funzioni d'onda stazionarie che corrispondono a stati di energia ben definita e costante.

Come risolviamo questa equazione?

Riscriviamo la funzione di Hamilton in questo modo

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\delta^2}{\delta x^2} + [E - U(x)] \right\} \psi(x) = 0$$

dove $E - U(x) = U_k$ è l'energia cinetica e l'equazione corrisponde all'espressione di un oscillatore armonico

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

dove k è la costante elastica della molla e sappiamo che

- Se $k > 0 \Rightarrow$ soluzione oscillatoria
- Se $k < 0 \Rightarrow$ soluzione evanescente

Quindi lo stesso accadrà per la parte spaziale della funzione d'onda

- Se $E - U(x) > 0 \Rightarrow U_k > 0 \Rightarrow$ CLASSICAL ALLOWED REGION FOR THE PARTICLE
⇒ soluzione oscillatoria
- Se $E - U(x) < 0 \Rightarrow U_k < 0 \Rightarrow$ CLASSICAL FORBIDDEN REGION FOR THE PARTICLE

Esempio:

Se rappresentiamo l'energia in funzione della posizione osserviamo che

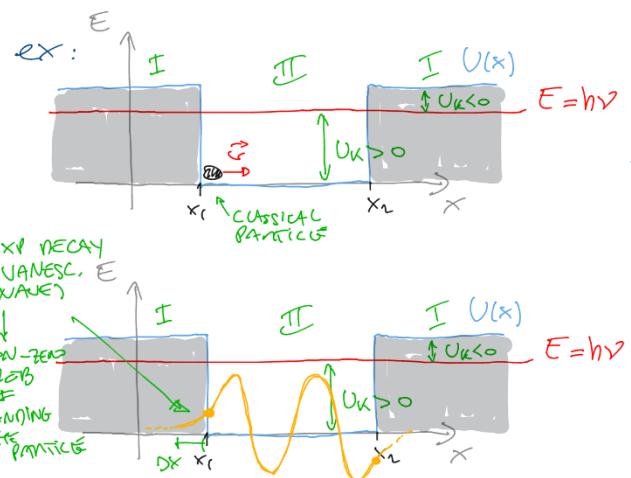
- Se $x < x_1 \cup x > x_2 \Rightarrow U_k < 0 \rightarrow$ classical forbidden
- Se $x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow U_k > 0 \rightarrow$ classical allowed

Una particella classica può muoversi solo dentro la classical allowed region, avanti e indietro a velocità costante, mentre nel caso di una particella quantomeccanica abbiamo una soluzione oscillatoria che ha probabilità non nulla di trovarsi nella classical forbidden region.

La profondità di penetrazione è proporzionale all'inverso dell'energia cinetica

$$\Delta x \div \frac{1}{E - U(x)} = \frac{1}{U_k}$$

Quindi maggiore è l'energia cinetica minore è la profondità di penetrazione.



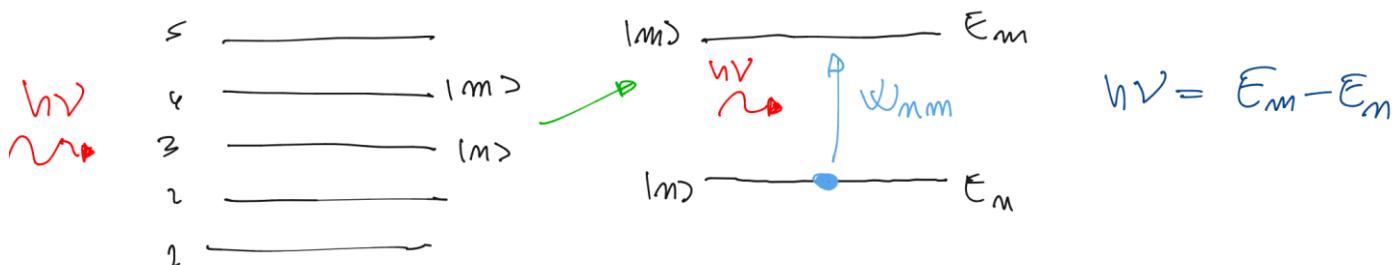
INTERAZIONE DELLA RADIAZIONE CON GLI ATOMI

TEORIA DI PERTURBAZIONE TEMPO-DIPENDENTE

È un approccio teoretico dello studio dell'interazione tra radiazione e materia.

Studiamo da un punto di vista quantomeccanico come una radiazione interagisce con un sistema atomico.

Possiamo considerare un SISTEMA ATOMICO come formato da diversi livelli energetici



Assumiamo che

1. APPROCCIO SEMICLASSICO

- La materia è considerata quantizzata, cioè formata da diversi livelli discreti (che sono il risultato dell'equazione di Schrödinger applicata al sistema, la quale restituisce diverse autofunzioni che danno diversi livelli energetici stabili che sono indipendenti dal tempo).
- Il campo elettromagnetico è considerato in modo classico, cioè abbiamo un campo elettrico oscillatorio $\vec{E}(\vec{r}, t)$, il quale è composto da fotoni che immaginiamo essere risonanti con i livelli (m) e (n), cioè consideriamo $h\nu = E_m - E_n$

2. CAMPO ELETTRICO MONOCROMATICO

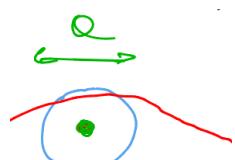
→ l'interazione deve avvenire per un intervallo di tempo infinito, altrimenti il campo non può più essere considerato monocromatico (avere un campo monocromatico significa che questo deve oscillare per un tempo infinito)

3. LA LUNGHEZZA D'ONDA DEL CAMPO EM È MOLTO PIÙ GRANDE DELLA DIMENSIONE ATOMICA

$$\lambda_{EM} \gg a$$

dove a è la dimensione atomica del sistema.

→ il campo elettrico può essere considerato costante nello spazio atomico $\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \vec{E}(t)$



Queste prime tre ipotesi (1+2+3) ci permettono di considerare il campo elettrico come un campo armonico di ampiezza costante

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t)$$

dove $\omega \simeq \omega_0 = \frac{E_m - E_n}{\hbar} = \frac{\hbar\nu}{\hbar}$.

4. L'atomo è preparato (con probabilità 1) su uno dei due stati, ad esempio (n)

5. INTERAZIONE DEBOLE TRA L'ATOMO E IL CAMPO ELETTRICO (ipotesi più importante)

→applichiamo la TEORIA DELLA PERTURBAZIONE secondo la quale inizialmente abbiamo un SISTEMA ISOLATO composto da livelli energetici discreti, poi passiamo a considerare il SISTEMA PERTURBATO che è dato dall'interazione del sistema isolato con un campo ottico, ma questa interazione non è così forte da "distruggere" completamente i livelli energetici del sistema isolato, i livelli energetici rimangono gli stessi, questa interazione cambia semplicemente la probabilità dell'atomo di trovarsi in uno di questi stati.

Quindi, la teoria della perturbazione ci dice che l'interazione del sistema isolato con il campo ottico non è così forte da distruggere le autofunzioni del sistema isolato stesso.

Consideriamo la autofunzione del sistema isolato/non-perturbato

$$\hat{H} |\psi_k(x, t)\rangle = j\hbar \frac{\delta}{\delta t} |\psi_k(x, t)\rangle$$

dove la autofunzione $|\psi_k(x, t)\rangle$ costituisce uno spazio di Hilbert e la funzione di Hamiltone \hat{H} è l'operatore di energia totale.

Assumiamo ora di applicare una PICCOLA PERTURBAZIONE che può essere considerata come un valore aggiuntivo \tilde{H}' (la tilde indica che è una componente oscillatoria), all'operatore energia totale

$$[\hat{H} + \tilde{H}'] |\psi\rangle = j\hbar \frac{\delta}{\delta t} |\psi\rangle$$

→quindi consideriamo l'interazione come la somma dell'energia originale del sistema più una componente di energia oscillatoria

A causa del fatto che stiamo considerando una piccola perturbazione, la nuova autofunzione $|\psi\rangle$ può ancora essere considerata come una combinazione lineare delle autofunzioni originali del sistema non perturbato

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^N a_k(t) |\psi_k(x, t)\rangle$$

Sostituendo, otteniamo l'equazione di Schrödinger del nuovo sistema

$$\sum_{k=1}^N a_k(t) \hat{H} |\psi_k\rangle + \sum_{k=1}^N a_k(t) \tilde{H}' |\psi_k\rangle = j\hbar \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{da_k(t)}{dt} |\psi_k\rangle + \sum_{k=1}^N a_k(t) \frac{\delta |\psi_k\rangle}{\delta t} \right\}$$

Le componenti $\sum_{k=1}^N a_k(t) \hat{H} |\psi_k\rangle$ e $\sum_{k=1}^N a_k(t) j\hbar \frac{\delta |\psi_k\rangle}{\delta t}$ devono essere identiche perché entrambe sono soluzioni del sistema non perturbato. Quindi ci rimane

$$\sum_{k=1}^N a_k(t) \tilde{H}' |\psi_k\rangle = j\hbar \sum_{k=1}^N \frac{da_k(t)}{dt} |\psi_k\rangle$$

Possiamo semplificare ulteriormente questa espressione facendo la proiezione di questi stati sullo stato $|m\rangle$

$$\langle \psi_m | \sum_{k=1}^N a_k(t) \tilde{H}' |\psi_k\rangle = \langle \psi_m | j\hbar \sum_{k=1}^N \frac{\delta a_k(t)}{\delta t} |\psi_k\rangle$$

$$\sum_k a_k(t) \langle \psi_m | \tilde{H}' |\psi_k\rangle = j\hbar \sum_k \frac{da_k(t)}{dt} \langle \psi_m | \psi_k\rangle = j\hbar \sum_m \frac{da_m}{dt}$$

dove $\langle \psi_m | \tilde{H}' |\psi_k\rangle$ è il valore atteso di \tilde{H}' tra $|\psi_m\rangle$ e $|\psi_k\rangle$ e $\langle \psi_m | \psi_k\rangle = \delta_{mk} = 1$ solo se $m = k$.

Quindi otteniamo

$$\frac{da_m}{dt} = -\frac{j}{\hbar} \sum_k a_k(t) \langle \psi_m | \tilde{H}' |\psi_k\rangle$$

Siccome stiamo considerando un'interazione debole tra il campo ottico e il sistema e il sistema è preparato sullo stato $|\psi_n\rangle$, il che significa che la probabilità dello stato quando $t = 0$, cioè all'inizio dell'interazione è $|a_n(0)|^2 = 1$, mentre la probabilità degli altri stati è $|a_k(0)|^2 = 0$ (queste sono le CONDIZIONI INIZIALI). Siccome l'interazione è debole, anche il coefficiente $a_n(t)$ varierà molto poco durante l'interazione e rimarrà $a_n(t) \approx 1$, cioè abbiamo una probabilità molto bassa di transizione, cioè $a_k(t) \approx 0$. Quindi possiamo scrivere

$$\frac{da_m}{dt} = -\frac{j}{\hbar} \langle \psi_m | \tilde{H}' | \psi_n \rangle$$

Possiamo esplicitare la dipendenza dal tempo di tutte le componenti di questa espressione

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= |n\rangle \cdot e^{j\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{E_n}{\hbar} \\ |\psi_m\rangle &= |m\rangle \cdot e^{j\omega_m t}, \quad \omega_m = \frac{E_m}{\hbar} \\ \langle \psi_m | &= \langle m | \cdot e^{-j\omega_m t} \\ \tilde{H}' &= H'_0 \cdot \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad \omega = 2\pi\nu \end{aligned}$$

dove $|n\rangle, |m\rangle, ecc$ sono autofunzioni dipendenti dallo spazio.

Sostituendo nell'equazione precedente otteniamo

$$\frac{da_m(t)}{dt} = -\frac{j}{2\hbar} \langle m | H'_0 | n \rangle \{ e^{j(\omega - \omega_0)t} + e^{-j(\omega + \omega_0)t} \}$$

dove $\omega_0 = \omega_m - \omega_n = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$ è la frequenza di risonanza e $\langle m | H'_0 | n \rangle = H'_{nm}$ è l'INTERACTION MATRIX

ELEMENT che rappresenta il valore atteso dell'ampiezza dell'energia di interazione tra due particolari stati, ma considerando tutti gli stati diventa una matrice.

Siamo interessati alla derivata prima rispetto al tempo della probabilità di occupazione dello stato m , cioè $\frac{d}{dt} |a_m(t)|^2$, in quanto questa derivata rappresenta la VELOCITÀ DI TRANSIZIONE DEL SISTEMA.

Ricordando la velocità di variazione della popolazione può essere scritta come

$$\frac{dN}{dt} = W_{nm} M$$

dove W_{nm} rappresenta il transition rate e può essere quindi scritto come

$$W_{nm} = \frac{1}{dt} \frac{dN}{N}$$

dove $\frac{dN}{N} = d|a_m(t)|^2$, quindi avremo

$$W_{nm} = \frac{d}{dt} |a_m(t)|^2$$

Quindi avremo

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_m(t) &= \int_0^t \frac{da_m}{dt} = a_m(t) - a_m(0) = -\frac{j}{2\hbar} H'_{nm} \left\{ \int_0^t e^{j\Delta\omega t} dt + \int_0^t e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \right\} \\ \Rightarrow a_m(t) &= -\frac{j}{2\hbar} H'_{nm} \left\{ \frac{e^{j\Delta\omega t} - 1}{j\Delta\omega} + \frac{e^{-j(\omega + \omega_0)t} - 1}{-(\omega + \omega_0)} \right\} \end{aligned}$$

Siccome $\Delta\omega \ll \omega + \omega_0$, abbiamo che il primo termine tra parentesi è molto più grande del secondo, quindi il secondo può essere trascurato e finiremo con

$$\Rightarrow a_m(t) = -\frac{j}{2\hbar} H'_{nm} e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} \frac{e^{j\Delta\omega t} - 1}{2j\frac{\Delta\omega}{2}} e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t}$$

Chiamando $e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} = \alpha$ e $e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t} = \beta$, dove ovviamente $\alpha \cdot \beta = 1$, possiamo riscrivere l'equazione in questo modo

$$a_m(t) = -\frac{j}{2\hbar} H'_{nm} e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} t \cdot \frac{e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t}}{2j\frac{\Delta\omega}{2}t}$$

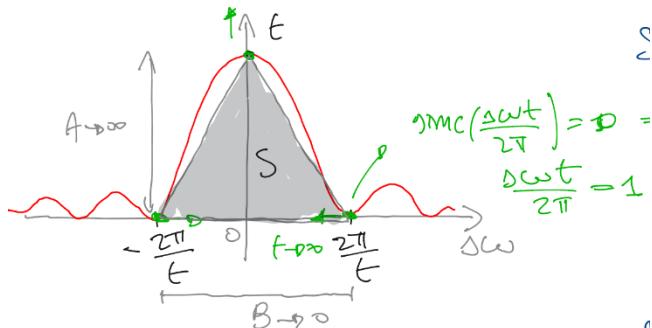
dove $\frac{e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} - e^{-j\frac{\Delta\omega}{2}t}}{2j} = \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right)$, quindi avremo

$$\Rightarrow a_m(t) = -\frac{j}{2\hbar} H'_{nm} e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} t \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right)$$

Quindi ricaviamo la probabilità

$$|a_m(t)|^2 = |H'_{nm}|^2 \cdot \frac{t^2}{4\hbar^2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right)$$

Se facciamo il plot della funzione $t \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right)$ in funzione di $\Delta\omega$, vediamo che



L'interazione ha luogo per $t \rightarrow \infty$ e per $t \rightarrow -\infty$ i due zeri della funzione si muovono verso l'origine e man mano che questo avviene l'area sottesa dal lobo principale diventa sempre più simile ad un triangolo di area

$$S_{triangle} = \frac{BA}{2}$$

dove $B = \frac{4\pi}{t}$ e $A = t$.

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{BA}{2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \frac{4\pi}{t} t \right\} = 2\pi$$

Quindi man mano che questo avviene la funzione tende ad una delta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right) \right\} = 2\pi \cdot \delta(\Delta\omega)$$

Pertanto, sostituendo, otteniamo

$$|a_m(t)|^2 = |H'_{nm}|^2 \cdot \frac{t}{4\hbar^2} \cdot 2\pi \cdot \delta(\Delta\omega) = |H'_{nm}|^2 \cdot \frac{t}{2\hbar^2} \cdot \pi \cdot \delta(\Delta\omega)$$

La VELOCITÀ DI TRANSIZIONE può dunque essere scritta come

$$W_{nm} = \frac{d}{dt} |a_m(t)|^2 = \frac{\pi}{2\hbar^2} \cdot |H'_{nm}|^2 \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

La velocità di transizione è proporzionale a $|H'_{nm}|^2 \cdot \delta(\omega - \omega_0)$, il che significa che la transizione può avvenire solo se la frequenza di eccitazione del campo EM è esattamente identica a quella di risonanza ω_0 .

In conclusione

1. La transizione può avvenire solo se $\omega \equiv \omega_0$
2. $W_{nm} \propto |H'_{nm}|^2$, cioè è proporzionale al valore atteso dell'energia di interazione tra i due stati $|m\rangle$ e $|n\rangle$

MATRIX INTERACTION ELEMENT \Rightarrow FERMI'S GOLDEN RULE

Vogliamo ricavare l'espressione di questo elemento.

Abbiamo detto che ogni valore atteso in meccanica quantistica deve corrispondere al valore classico della corrispondente osservabile fisica.

Quindi il valore atteso $H'_{nm} = \langle m | H'_0 | n \rangle$ deve corrispondere all'energia di interazione classica tra il campo elettrico e il dipolo oscillante, cioè

$$H'_{nm} = \langle m | H'_0 | n \rangle = \vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}_0$$

dove $\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}_0$ è l'energia classica di interazione tra il campo elettrico \vec{E}_0 ed il dipolo $\vec{\mu}$ e $\vec{\mu}_{nm}$ è il momento elettrico del dipolo che può quindi essere scritto come

$$\vec{\mu}_{nm} = \langle m | e \cdot \vec{r} | n \rangle$$

dove $e \cdot \vec{r}$ è il momento di dipolo classico.

Quindi

$$|H'_{nm}|^2 = |\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}_0|^2 = |\vec{\mu}_{nm}|^2 E_0^2 \cos^2 \theta$$

Siccome i momenti dei dipoli in un materiale sono orientati in modo randomico, osserviamo che la media dell'energia di interazione sul solid angle $\Omega = 4\pi$ è

$$|H'_{nm}|_{\Omega=4\pi}^2 = |\vec{\mu}_{nm}|^2 E_0^2 \langle \cos^2 \theta \rangle_{\Omega=4\pi} = \frac{1}{3} |\vec{\mu}_{nm}|^2 E_0^2$$

Quindi la velocità di transizione diventa

$$W_{nm} = \frac{\pi}{6\hbar^2} \cdot |\vec{\mu}_{nm}|^2 E_0^2 \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

Siccome $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \delta(\Delta\omega) = 2\pi\delta(\Delta\nu)$, perché l'area delle due delta deve rimanere la stessa, possiamo finalmente scrivere

$$W_{nm} = \frac{\pi^2}{3h^2} \cdot |\vec{\mu}_{nm}|^2 E_0^2 \cdot \delta(\nu - \nu_0)$$

dove $h = 2\pi\hbar$.

Questa espressione prende il nome di FERMI'S GOLDEN RULE PER IL TRANSITION RATE W_{nm} .

REMARKS

- 1) Cosa succede se invertiamo i due stati?

L'unica grandezza che dipende dagli indici nella formula è il momento di dipolo

$$\begin{aligned} \mu_{nm} &= \langle m | e \vec{r} | n \rangle \\ \Rightarrow \mu_{mn} &= \langle n | e \vec{r} | m \rangle = \langle m | e \vec{r} | n \rangle^* \\ \Rightarrow \mu_{mn} &= \mu_{nm}^* \\ \Rightarrow |\mu_{mn}| &= |\mu_{nm}| \\ \Rightarrow W_{mn} &= W_{nm} \end{aligned}$$

Cioè il transition rate non cambia!!

- 2) TRANSITION RULES

Al fine di avere $W_{mn} \neq 0$, il momento del dipolo deve essere $\mu_{mn} \neq 0$ e il momento di dipolo è il valore atteso

$$\mu_{mn} = \langle m | ex | n \rangle = e \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^*(x) x \varphi_n(x) dx$$

dove le funzioni $\varphi_m^*(x)$ e $\varphi_n(x)$ sono autofunzioni altamente simmetriche, cioè sono pari o dispari.

Siccome x è una funzione dispari, il prodotto deve essere pari al fine di avere $\mu_{mn} \neq 0$, cioè le funzioni φ_m e φ_n devono avere opposta parità. Se questo è vero la transizione è detta PARITY ALLOWED TRANSITION, altrimenti, se φ_m e φ_n hanno stessa parità, la transizione è detta PARITY FORBIDDEN TRANSITION e $\mu_{mn} = 0$.

DIFFERENT EXPRESSIONS OF FERMI'S GOLDEN RULE

- A) ESPRESSIONE RISPETTO L'INTENSITÀ

Sappiamo che l'intensità è $I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 n E_0^2$, quindi possiamo esprimere il transition rate come

$$W_{nm} = \frac{2\pi^2 |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h^2} I \delta(\nu - \nu_0) = C I \delta(\nu - \nu_0)$$

dove abbiamo indicato il coefficiente di proporzionalità $C = \frac{2\pi^2 |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h^2}$.

- B) ESPRESSIONE RISPETTO IL FLUSSO DI FOTONI

Sappiamo che l'intensità è legata al flusso di fotoni dalla relazione $I = h\nu \cdot \Phi$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} W_{nm} &= C \cdot \delta(\nu - \nu_0) \cdot h\nu \cdot \Phi \\ \Rightarrow W_{nm} &= \sigma_{nm} \Phi \end{aligned}$$

dove la sezione di transizione può essere scritta come $\sigma_{nm} = C \cdot \delta(\nu - \nu_0) \cdot h\nu = \frac{2\pi^2 v |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h} \cdot \delta(\nu - \nu_0)$.

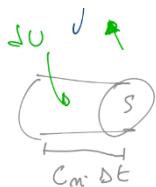
Tipicamente, in un caso ideale, la sezione di transizione è una delta, in quanto la transizione può avvenire solo alla frequenza di risonanza, ma vedremo in seguito che a causa di non idealità avremo un allargamento di questa delta-like function.

C) ESPRESSIONE RISPETTO ALLA DENSITÀ DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA $\rho(v)$

La densità di energia em è scritta come $\rho(v) = \Delta E_{EM}/\Omega$.

Quando valutiamo l'energia em in una regione di spazio possiamo dire che questa è uguale a

$$dU = \rho(v)dv\Omega$$



$$\left\{ \begin{array}{l} dI = \frac{dU_1}{\Delta t} \frac{1}{S} \\ dU = \rho(v)dvS c_n \Delta t \end{array} \right. \Rightarrow dI = c_n \rho(v)dv$$

Quindi quando consideriamo la velocità di transizione tra due stati, per ogni intervallo abbiamo una piccola probabilità di transizione che è data da

$$dW_{nm} = \frac{2\pi^2 |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h^2} \cdot dI \cdot \delta(v - v_0)$$

dove $dI = I = c_n \rho(v)dv \in [v, v + dv]$.

Al fine fine di avere la transition rate, cioè la probabilità di transizione per unità di tempo, dobbiamo integrare su tutte le possibili frequenze

$$\int dW_{nm} = \int \frac{2\pi^2 |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h^2} \cdot c_n \rho(v) \cdot \delta(v - v_0) dv$$

dove $\rho(v)\delta(v - v_0) = \rho(v_0)$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow W_{nm} = \frac{2\pi^2}{3\varepsilon_0 h^2} |\mu_{nm}|^2 \rho(v_0) \\ &\Rightarrow W_{nm} = \bar{B}_{nm} \cdot \rho(v_0) \end{aligned}$$

dove $\bar{B}_{nm} = \frac{2\pi^2}{3\varepsilon_0 h^2} |\mu_{nm}|^2$ è detto COEFFICIENTE DI EINSTEIN PER L'ASSORBIMENTO/L'EMISSIONE STIMOLATA IN CASO DI RADIAZIONE BROADBAND.

Ora che abbiamo questi strumenti possiamo studiare diversi fenomeni fisici.

EMISSIONE SPONTANEA (EINSTEIN ARGUMENT)

(Svelto chap 2.4.4, pag41-43)

Quando abbiamo studiato i laser abbiamo detto che tra i livelli 1 e 2 possiamo avere assorbimento, emissione stimolata o decadimento per emissione spontanea.

Per l'emissione spontanea l'equazione di velocità è

$$\frac{dN_2}{dt} \Big|_{sp} = AN_2 = \frac{N_2}{\tau_{sp}}$$

dove A è il coefficiente di Einstein.

Se il sistema atomico è all'equilibrio termodinamico, il numero di assorbimenti nell'unità di tempo deve essere uguale al numero di emissione per unità di tempo

$$W_{12}N_1 = W_{21}N_2 + AN_2$$

Siccome $W_{nm} = \bar{B}_{nm}\rho(v_0)$, possiamo scrivere

$$\bar{B}_{12}\rho(v_0)N_1 = \bar{B}_{21}\rho(v_0)N_2 + AN_2$$

Sappiamo anche che $\bar{B}_{12} = \bar{B}_{21} = B$, quindi

$$\begin{aligned} \rho(v_0)N_1 &= \rho(v_0)N_2 + \frac{A}{B}N_2 \\ \Rightarrow \rho(v_0) &= \frac{A}{B} \frac{N_2}{N_1 - N_2} = \frac{A}{B} \frac{1}{\frac{N_1}{N_2} - 1} \end{aligned}$$

Il rapporto tra le due popolazioni per la distribuzione di Boltzmann all'equilibrio termodinamico può essere scritto come

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{N_2} &= e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \quad E_2 - E_1 = h\nu_0 \\ \Rightarrow \rho(v_0) &= \frac{A}{B} \frac{1}{e^{\frac{-h\nu_0}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

Abbiamo detto che all'equilibrio termodinamico a causa dell'emissione termica è presente una radiazione di fondo (background radiation), data dalla TEORIA DELLA RADIAZIONE DI CORPO NERO

$$\Rightarrow \rho(\nu_0) = h\nu_0 \frac{8\pi\nu_0^2}{c_n^3} \frac{1}{e^{-\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}$$

dove $h\nu_0$ è l'energia dei fotoni, $\frac{8\pi\nu_0^2}{c_n^3}$ è la densità dei modi em alla frequenza ν_0 e $e^{-\frac{h\nu_0}{kT}-1}$ è la DISTRIBUZIONE DI BODE/EINSTEIN che dà la probabilità di occupazione di questi stati.

Quindi otteniamo

$$\begin{cases} \frac{A}{B} = \frac{8\pi\nu_0^2 n^3 h}{c_0^3} \\ B = \frac{2\pi^2}{3\varepsilon_0 n^2 h^2} |\mu|^2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{16\pi^3 n \nu_0^3 |\mu_{nm}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 h}$$

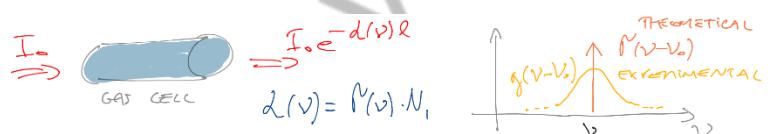
che è il COEFFICIENTE DI EINSTEIN PER L'EMISSIONE SPONTANEA.

IL TEMPO DI DECADIMENTO PER EMISSIONE SPONTANEA è

$$\tau_{sp} = \frac{1}{A} = \frac{3\varepsilon_0 c_0 h}{16\pi^3 n \nu_0^3 |\mu_{nm}|^2}$$

TRANSITION LINE-BROADENING MECHANISMS

Quando abbiamo studiato i laser abbiamo detto che la sezione di assorbimento/emissione dovrebbe essere una delta, ma se eseguiamo un esperimento sull'assorbimento, ad esempio, cioè prendiamo una cella di gas, facciamo passare della luce attraverso questa e misuriamo il coefficiente di assorbimento che è proporzionale alla sezione di assorbimento, vediamo che questa presenta un allargamento spettrale, cioè ha un andamento tipicamente Gaussiano o Lorentziano $g(\nu - \nu_0)$.



Questo effetto prende il nome di LINE BROADENING e può essere di 2 tipi:

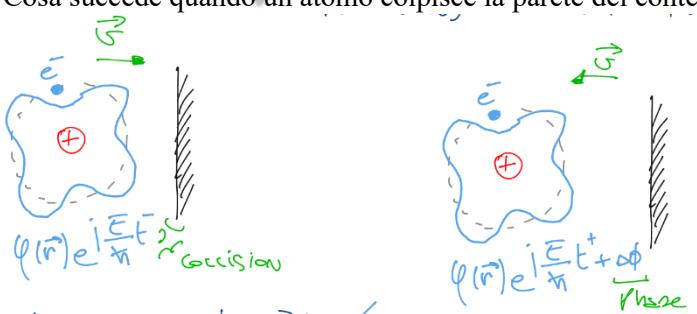
- HOMOGENEOUS BROADENING (HB)
 - ogni sistema ha un profilo allargato → comporta una LORENTZIAN LINESHAPE
- INHOMOGENEOUS BROADENING (IB)
 - ogni sistema ha un profilo di assorbimento/emissione simile ad una delta, ma è presente una distribuzione della frequenza di risonanza \nu'_0 → comporta una GAUSSIAN LINESHAPE

HOMOGENEOUS BROADENING MECHANISM 1 → COLLISIONAL BROADENING

Il collisional broadening è un effetto tipico della fase gassosa, dove a causa dell'energia termica, gli atomi/molecole sono soggetti a un movimento traslazionale che causa collisioni tra gli atomi e le molecole o tra atomi/molecole e le pareti del contenitore.

Questo effetto può anche avvenire allo stato solido e in questo caso le collisioni avvengono tra gli ioni e i fononi della host matrix.

Cosa succede quando un atomo colpisce la parete del contenitore?



attorno al nucleo dell'atomo abbiamo gli elettroni. La funzione d'onda dell'elettrone immediatamente prima della collisione è

$$\varphi(\vec{r}) e^{j \frac{E}{\hbar} t^-}$$

Ad un certo punto l'elettrone collide con la parete del contenitore e viene rimbalzato indietro, quindi inverte la propria velocità e si allontana dalla parete del contenitore.

Quello che cambia nell'atomo tra l'istante immediatamente prima la collisione e quello immediatamente dopo è la fase della funzione d'onda dell'elettrone; quindi, dopo la collisione avremo

$$\varphi(\vec{r}) e^{j \frac{E}{\hbar} t^+} + \Delta\phi$$

dove $\Delta\phi$ è il phase shift della funzione d'onda dell'elettrone dovuto al fatto che durante la collisione con la parete la funzione d'onda si è arrestata per un intervallo di tempo a causa dell'interazione colombiana con gli atomi del contenitore che provoca la perdita della fase della funzione d'onda. Quindi quando la funzione d'onda si riprende, questa si riprende con una fase casuale/randomica.

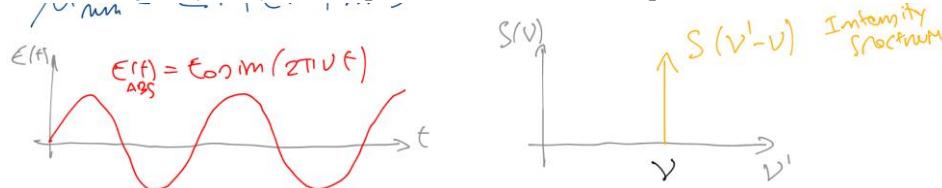
Immaginiamo di avere un'onda monocromatica che interagisce con questo atomo. A causa del fatto che la sezione di transizione dipende dal momento di dipolo elettrico di questo atomo, allora questa dipenderà dalla fase relativa tra la fase della funzione d'onda e quella del momento di dipolo

$$\mu_{nm} = \langle n | e \vec{r} | m \rangle$$

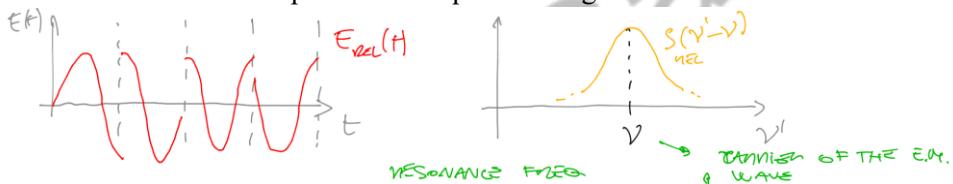
Cambiando la fase di questa funzione d'onda cambiamo anche la fase del momento di dipolo.

Questo effetto possiamo vederlo in 2 modi diversi

- In un riferimento di frequenza assoluto (dal mondo esterno) possiamo vedere un campo perfettamente monocromatico $E(t) = E_0 \sin(2\pi\nu t)$, il cui spettro di intensità in frequenza sarà una delta centrata in ν



- In un riferimento di frequenza relativo, cioè che si muove con l'elettrone stesso, l'elettrone non percepisce la variazione della sua fase, ma subisce la variazione del campo elettrico del mondo esterno. Quindi, dal punto di vista del sistema atomico, non abbiamo una variazione di fase nella funzione d'onda ma abbiamo cambiamenti di fase randomici del campo em con il quale interagisce l'atomo



Il cambiamento di fase, dal punto di vista esterno, deriva dal fatto che la fase delle autofunzioni $\langle n | e \vec{r} | m \rangle$ cambiano. Quindi, il dipolo dell'atomo non è più oscillatorio alla stessa frequenza dell'onda perché a causa di cambiamenti randomici della fase delle autofunzioni anche il dipolo elettrico avrà un cambiamento di fase. Stiamo perturbando la periodicità. Ogni volta che l'atomo colpisce le pareti o un altro atomo, diamo un colpo al dipolo e cambiamo in modo randomico la fase.

Dal nostro punto di vista, se siamo all'interno del dipolo vogliamo percepire che è la nostra fase a cambiare, ma è la fase del campo con cui il dipolo interagisce a cambiare. Abbiamo ancora una velocità di transizione delta-like, cioè abbiamo ancora una sezione monocromatica

$$W_{12} = CI\delta(\nu' - \nu_0)$$

ma ora l'intensità non è più un'onda monocromatica, ma si espande sull'asse ottico.

$$\int dI = \int S(\nu' - \nu) d\nu$$

Integrando questa intensità differenziale otteniamo l'intensità complessiva dell'onda elettromagnetica

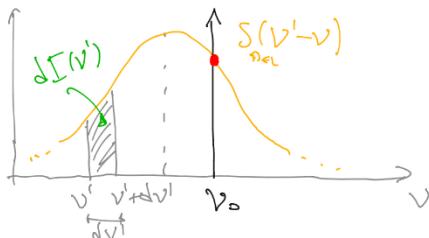
$$I = \int S(\nu' - \nu) d\nu$$

E dividendo tutto per l'intensità otteniamo uno SPETTRO DELL'INTENSITÀ NORMALIZZATO

$$\bar{g}(\nu' - \nu) = \frac{S(\nu' - \nu)}{I}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\nu' - \nu) d\nu = 1$$



Ogni piccolo intervallo $d\nu'$ fornisce una piccola intensità $dI(\nu')$ e ognuna di queste piccole intensità contribuisce alla velocità di transizione in questo modo

$$dW_{12} = CdI(\nu')\delta(\nu' - \nu)$$

dove $dI(\nu') = S_{REL}(\nu' - \nu)d\nu'$ è lo spettro relativo

Quindi abbiamo

$$dW_{12} = CS_{REL}(\nu' - \nu)\delta(\nu' - \nu)d\nu'$$

dove $\nu' = \nu_0$.

Al fine di ottenere la probabilità totale di transizione dobbiamo integrare sull'intero spettro di frequenze

$$W_{12} = C \cdot S_{REL}(\nu_0 - \nu) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu' - \nu)d\nu'$$

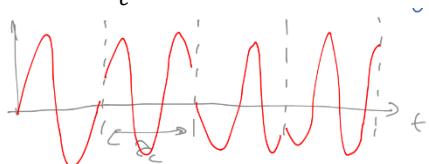
dove $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu' - \nu)d\nu' = 1$ e $S_{REL}(\nu_0 - \nu) = \bar{g}(\nu_0 - \nu)I$, in cui $\bar{g}(\nu - \nu_0) = \bar{g}(\nu_0 - \nu)$, quindi

$$W_{12} = CI\bar{g}(\nu - \nu_0)$$

Guardando la formula iniziale $W_{12} = CI\delta(\nu' - \nu_0)$, il risultato finale di tenere in considerazione il meccanismo di allargamento (broadening) è di sostituire la funzione delta con questo shape più smussato $\bar{g}(\nu - \nu_0)$.

REMARK: LINESHAPE OF $\bar{g}(\nu - \nu_0)$

Quando abbiamo studiato la coerenza, abbiamo visto il caso di un'onda monocromatica con salti di fase randomici ad intervalli τ_c



$$\Gamma(\tau) = E_0^2 e^{j\omega_0 \tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)$$

E abbiamo visto che per il teorema di Wiener-Kitchine

$$S(\nu - \nu_0) = \Im\{\Gamma(\tau)\}$$

Nel caso di un atomo in fase gassosa, la velocità di questo atomo è randomica, quindi l'intervallo di tempo nel quale questo collide con altri atomi delle pareti del contenitore non è identica, ma c'è una certa probabilità per unità di tempo che questi collidano, con un tempo di collisione medio pari a τ_c

$$p(\tau) = \frac{1}{\tau_c} e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

dove $\tau_c = \langle p(\tau) \cdot \tau \rangle$.

Otteniamo che la funzione di autocorrelazione per questo tipo di campo elettrico è

$$\Gamma(\tau) = E_0^2 e^{j\omega_0 \tau} e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

Quindi lo spettro è

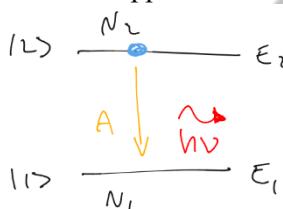
$$S(\nu - \nu_0) = \Im\{\Gamma(\tau)\} = I \frac{2\tau_c}{4\pi^2 \tau_c^2 (\nu - \nu_0)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow g(\nu - \nu_0) = \frac{S(\nu - \nu_0)}{I} = \frac{2\tau_c}{4\pi^2 \tau_c^2 (\nu - \nu_0)^2 + 1}$$

che è una funzione Lorentziana normalizzata.

HOMOGENEOUS BROADENING MECHANISM 2 → SPONTANEOUS BROADENING

Consiste nell'allargamento della linea di emissione a causa del tempo di vita finito dell'upper laser level, dovuto al fatto che l'upper level è accoppiato al lower level per mezzo dell'emissione spontanea.



$$\frac{dN_2}{dt} \Big|_{sp} = \frac{N_2}{\tau_{sp}} \rightarrow \frac{dN_2}{N_2} = \frac{dt}{\tau_{sp}} \Rightarrow N_2(t) = N_2(0)e^{-\frac{t}{\tau_{sp}}}$$

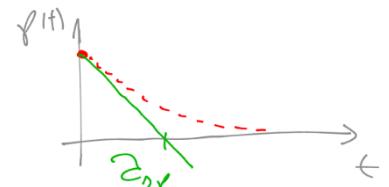
Siccome ogni sistema atomico che decade in questo modo emette un fotone, l'intensità emessa per emissione spontanea è proporzionale alla velocità di decadimento di questa popolazione

$$I \div \frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2(0)}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_{sp}}}$$

Quindi l'intensità emessa per emissione spontanea decresce esponenzialmente.

Da un punto di vista quantomeccanico l'intensità è proporzionale al modulo quadro del campo elettrico ($I \div |E(t)|^2$), il quale da un punto di vista quantomeccanico corrisponde alla funzione d'onda; quindi, possiamo fare un confronto tra l'intensità e il modulo quadro della funzione d'onda che rappresenta la probabilità per unità di tempo di emissione di un fotone. La probabilità di emissione di un fotone per unità di tempo può essere scritta come

$$p(t) \div \frac{I(t)}{I_0} \div e^{-\frac{t}{\tau_{sp}}}$$



Guardando al campo elettrico classico di un'intensità che decresce esponenzialmente nel tempo

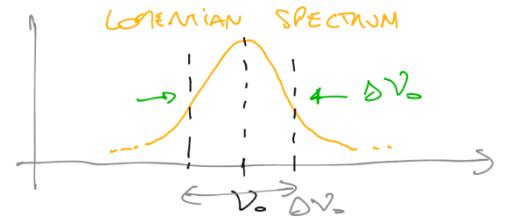
$$E(t) = E_0 e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau_{sp}}}$$

dove $\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$. Quindi il campo elettrico è un campo oscillante alla portante ω_0 che decade esponenzialmente con una costante di decadimento che è doppia di quella di decadimento dell'intensità.

Lo spettro di intensità corrispondente è una funzione lorentziana

$$S(\nu - \nu_0) \propto \left| \frac{1}{4\pi^2 \tau_{sp}^2 (\nu - \nu_0)^2 + 1} \right|^2$$

$$\text{dove } \Delta\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau_{sp}}$$



Possiamo considerare l'intervallo di tempo τ_{sp} come un'indeterminazione del tempo di vita del livello a causa dell'emissione spontanea

$$\Delta t_{indet} \simeq \tau_{sp}$$

e causa dell'indeterminazione sul tempo di emissione del fotone, abbiamo anche un'indeterminazione sulla frequenza di emissione perché siccome abbiamo uno spettro allargato, il fotone emesso può avere qualsiasi energia tra le frequenze

$$E_{ph} \in \left[h \left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu_0}{2} \right), h \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu_0}{2} \right) \right]$$

Quindi abbiamo un'indeterminazione dell'energia del fotone che è

$$\Delta E_{indet} \simeq h\Delta\nu_0$$

Se facciamo il prodotto di queste due quantità otteniamo

$$\Delta t_{indet} \cdot \Delta E_{indet} = h\tau_{sp}\Delta\nu_0 = \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

Questo è il duale dell'indeterminazione spaziale tra il momento e la posizione della particella $\Delta p \cdot \Delta x = \hbar$.

In meccanica quantistica è sempre possibile trovare una coppia di osservabili fisiche per le quali il prodotto di indeterminazione tra le due variabili è costante e tipicamente proporzionale o uguale a \hbar

INHOMOGENEOUS BROADENING MECHANISM

Cause di IB:

- 1) EFFETTO STARK (avviene allo stato solido)

Questo effetto è tipicamente dovuto alla inomogeneità dell'ambiente circondante il sistema atomico.

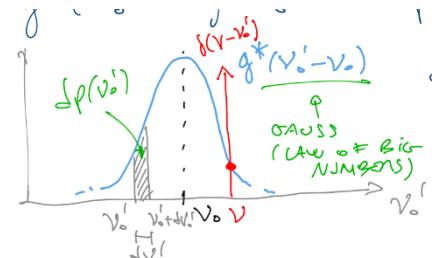
Se l'ambiente ospitante ha una perfetta simmetria traslazionale non abbiamo effetto Stark.

Se abbiamo dei difetti nella struttura del cristallo o se la struttura del cristallo è interrotta a causa della presenza di difetti cristallini (dovuti al droggaggio pesante del cristallo ad esempio), abbiamo inomogeneità che si riflettono sul campo elettrico locale che agisce su ogni sistema atomico e ogni variazione di questo campo elettrico esterno provoca una variazione della frequenza di risonanza e quindi una variazione dei livelli di energia e della distanza tra questi. Quindi la deviazione dalla perfetta periodicità del reticolo del cristallo crea delle variazioni del campo elettrico che agiscono sul sistema atomico → spreading della frequenza di risonanza ν'_0 .

Possiamo definire una funzione che rappresenta la distribuzione di probabilità di trovare la frequenza di risonanza nell'intervallo $\nu_0 \pm \nu'_0$

$$g^*(\nu'_0 - \nu_0) d\nu'_0 = dp(\nu'_0)$$

Se moltiplichiamo questa distribuzione di probabilità per l'intervallo di frequenze, otteniamo una probabilità molto piccola ($dp(\nu'_0)$) di trovare un sistema atomico nel range di frequenza $d\nu'_0$.



A causa di questo spreading della frequenza di risonanza, avremo diverse velocità di transizione che sono diffuse lungo questo sistema e la probabilità di transizione dell'insieme dei sistemi che risuonano a ν'_0 è

$$dW_{12}|_{\nu'_0} = C \cdot I \cdot \delta(\nu - \nu'_0) \cdot g^*(\nu'_0 - \nu_0) d\nu'_0$$

Quindi la velocità di transizione complessiva causata da tutti i sistemi atomici nel materiale sarà data dalla somma di tutti questi contributi di transizione integrata sull'asse ν'_0

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} dW_{12}|_{v'_0} = \int_{-\infty}^{\infty} C \cdot I \cdot \delta(\nu - v'_0) \cdot g^*(v'_0 - v_0) dv'_0$$

dove la delta campiona la funzione g^* alla posizione $v'_0 = \nu$, quindi

$$W_{12} = CIg^*(\nu - v_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - v'_0) dv'_0$$

dove $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - v'_0) dv'_0 = 1$, quindi

$$\begin{aligned} W_{12} &= CIg^*(\nu - v_0) \\ \Rightarrow W_{12} &= \frac{2\pi|\mu_{12}|^2}{3\varepsilon_0 c_0 n h^2} Ig^*(\nu - v_0) \end{aligned}$$

Quindi l'effetto dello spreading della frequenza di risonanza dei singoli sistemi all'interno del materiale risulta in una velocità di transizione che è identica a quella ideale ad eccezione del fatto che la funzione delta è sostituita da una funzione normalizzata che rappresenta la distribuzione di probabilità della frequenza di risonanza all'interno del materiale.

2) EFFETTO DOPPLER (avviene in fase gassosa)

è un effetto dovuto alla velocità relativa tra l'onda e l'osservatore, cioè è dovuto al fatto che la frequenza percepita dall'osservatore dipende dalla velocità relativa tra la sorgente e l'osservatore stesso

$$v_{REL} = \nu \left[1 - \frac{v_z}{c_n} \right]$$

Se l'osservatore si muove nella stessa direzione dell'onda, questo percepisce una frequenza inferiore, mentre se si muove in direzione opposta percepisce una frequenza maggiore.

Affinché il sistema ottico subisca la transizione dobbiamo avere $v_{REL} = v_0$ dove v_0 è la frequenza di risonanza del sistema. Se chiamiamo v'_0 la frequenza del campo em, affinché la transizione avvenga dobbiamo avere

$$v_{REL} = v_0 = v'_0 \left[1 - \frac{v_z}{c_n} \right] \Rightarrow v'_0 = \frac{v_0}{1 - \frac{v_z}{c_n}}$$

Se $v_z \ll c_n$ possiamo approssimare $\frac{v_z}{c_n} \rightarrow 0$ e moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per $1 + \frac{v_z}{c_n}$, otteniamo

$$\Rightarrow v'_0 = \frac{v_0}{1 - \left(\frac{v_z}{c_n} \right)^2} \left(1 + \frac{v_z}{c_n} \right) \simeq v_0 \left[1 + \frac{v_z}{c_n} \right]$$

Dobbiamo ora considerare la probabilità dell'atomo di avere questa velocità v_z

$$p(v_z) dz = \text{probabilità per l'atomo di avere } v_z \in [v_z, v_z + dv_z]$$

E la distribuzione di probabilità $p(v_z)$ può essere scritta come

$$p(v_z) = \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{Mv_z^2}{2kT}}$$

dove T è la temperatura assoluta del gas e M è la massa dell'atomo o della molecola.

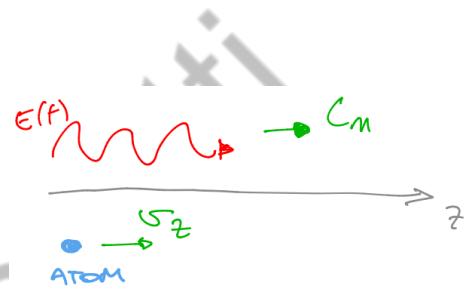
Dall'equazione sulla frequenza possiamo dire che

$$\begin{aligned} v_z &= c_n \left(\frac{v'_0}{v_0} - 1 \right) \Rightarrow dv_z = \frac{c_n}{v_0} dv'_0 \\ \Rightarrow p(v_z) dv_z &= \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{Mv_z^2}{2kT}} \cdot \frac{c_n}{v_0} dv'_0 = g^*(v'_0 - v_0) dv'_0 \end{aligned}$$

Quindi

$$g^*(v'_0 - v_0) = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{Mc_n^2}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{Mc_n^2}{2kT} (v'_0 - v_0)^2 \right)}{v_0^2}}$$

che rappresenta la DISTRIBUZIONE GAUSSIANA DELLA FREQUENZA DI RISONANZA v'_0 ATTORNO ALLA FREQUENZA CENTRALE v_0 .



Ragionando sullo shift in frequenza dovuto all'effetto Doppler e considerando la probabilità dell'atomo di avere una particolare distribuzione di velocità arriviamo ad una distribuzione della frequenza di risonanza relativa, la quale possiede un andamento Gaussiano.

$$\Delta\nu_0^* = FWHM \text{ di } g^* = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT \ln(2)}{Mc_n^2}}$$

Ordini di grandezza tipici:

$$\Delta\nu_0(\text{HeNe}) = 640 \text{ kHz (HB)}$$

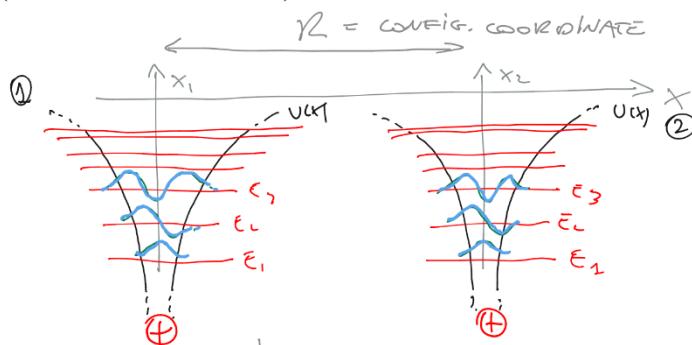
$$\Delta\nu_0^*(\text{HeNe})_{\text{doppler}} @ 300 \text{ K} = 1.7 \text{ GHz}$$

$$\Delta\nu_0^*(\text{Nd} - \text{YAG})_{\text{stark}} = 140 \text{ GHz}$$

$$\Delta\nu_0^*(\text{Nd} - \text{glass})_{\text{stark}} = 5.4 \text{ THz}$$

CONFIGURAZIONI ENERGETICHE DELLE MOLECOLE

(SVELTO CH 3 P.81-91)



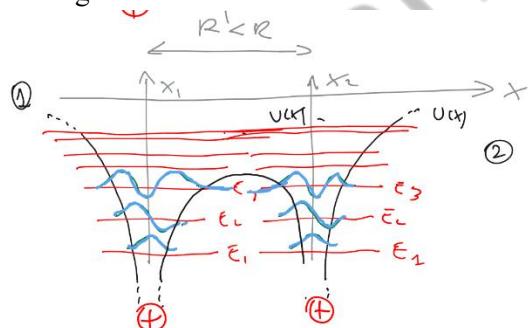
Nell'immagine possiamo vedere i due atomi isolati (1) e (2) posti nelle posizioni x_1 e x_2 nello spazio monodimensionale dove R è la nuclear distance tra i due atomi.

I due atomi sono considerati separati quando le code dei pozzi di potenziale energetico (energy potential wells) non si sovrappongono.

Per ogni atomo possiamo definire per ogni atomo un Hamiltoniana e valutare i livelli energetici.

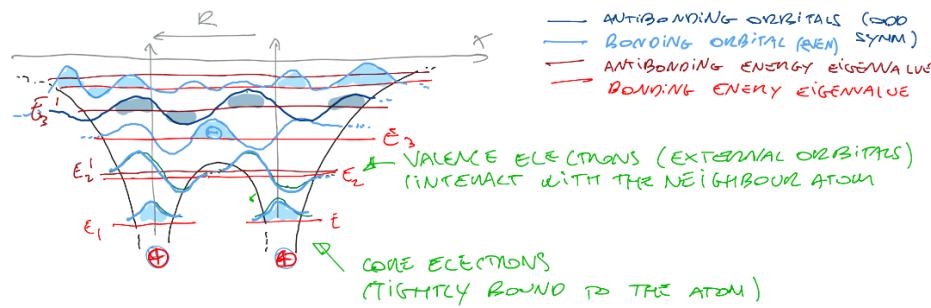
Siccome gli atomi sono identici, anche le soluzioni dei due sistemi atomi sono identiche e quello che deriviamo applicando l'Hamiltoniana o equivalentemente l'equazione di Schrödinger ai due atomi separati sono due set identici di autofunzioni, i cui autovalori sono i livelli energetici. Quindi abbiamo un set di n livelli energetici degenerati, dove degenerati significa che i due sistemi hanno gli stessi livelli energetici $E_{n,1} \equiv E_{n,2}$.

Cosa succede quando i due sistemi vengono messi vicini, cioè quando diminuiamo la distanza e i sistemi iniziano ad interagire?



Quando gli atomi iniziano ad interagire i pozzi di potenziale, a causa del principio di sovrapposizione, si piegheranno nella regione di "contatto" tra i due sistemi, causando l'abbassamento del potenziale in quella regione.

Anche le autofunzioni dei due sistemi iniziano ad interagire tra loro.



Il risultato finale è che le parti finali delle autofunzioni dei due sistemi iniziano a sovrapporsi e il degenerare tra i livelli corrispondenti iniziano a rimuoversi.

I livelli E_2 ed E_3 , i quali corrispondono alle autofunzioni che iniziano a sovrapporsi, tendono a

separarsi in quanto non possono più essere considerati soluzioni dei sistemi separati.

Maggiore è l'interazione tra i due sistemi, maggiore sarà l'effetto sulle autofunzioni e gli autovalori, cioè sui livelli di energia. Questo effetto interessa solo gli elettroni di valenza, cioè gli elettroni a più alta energia, mentre gli elettroni a più bassa energia, cioè quelli confinati più vicino al nucleo, detti CORE ELECTRONS, presentano ancora autofunzioni ben separate che non contribuiscono alla configurazione energetica della molecola.

REMARKS

- 1) L'autofunzione dell'intero sistema può essere considerata come una sovrapposizione di autofunzioni dei due singoli atomi e questa combinazione lineare può essere simmetrica o antisimmetrica.

La configurazione simmetrica è chiamata BONDING MOLECULAR ORBITALS e questi bonding orbitals sono chiamati in questo modo perché l'elettrone presenta la più alta probabilità di trovarsi nella regione di mezzo tra i due nuclei e di agire come bounding coulombic potential.

Questi orbitali di legame presentano un'energia complessiva che è inferiore a quella degli ANTI-BONDING MOLECULAR ORBITALS (orbitali di anti-legame), cioè gli orbitali che corrispondono alla configurazione antisimmetrica (simmetria dispari). Gli elettroni che appartengono agli orbitali di anti-legame presentano una più bassa probabilità di trovarsi nella regione di mezzo tra i due atomi.

- 2) Quando aumentiamo l'energia totale, l'autofunzione diventa tale per cui vi è una maggiore probabilità per l'elettrone di essere al limite della funzione potenziale. Questo avviene perché l'elettrone diventa sempre meno legato all'atomo e sempre più simile ad una particella libera e man mano che gli elettroni diventano sempre meno legati con gli atomi, anche la distribuzione di probabilità diventa più simile alla distribuzione di probabilità classica, in cui abbiamo una più alta probabilità di trovare gli elettroni vicino i punti di inversione del moto. Questo è vero per autofunzioni sia elettroniche che vibrazionali.

Nello schema qui a fianco abbiamo disegnato la molecola come due nuclei legati tra loro da l'elettrone che ha la più alta probabilità di trovarsi nella regione di mezzo tra i due nuclei. Questa attrazione colombiana agisce come una forza di legame (come in un mass-spring system), pertanto il sistema non avrà solo un'energia elettronica, ma anche una componente di energia vibazionale dovuta al fatto che i nuclei possono vibrare e la distanza tra loro può variare nel tempo.



Il fatto che la distanza tra i due nuclei, cioè la DISTANZA INTERNUCLEARE R può variare periodicamente nel tempo permette di associare alla molecola anche un'energia vibazionale.

Un'altra componente di energia è l'energia rotazionale, in quanto la molecola non è un sistema monodimensionale, ma un sistema tridimensionale che può anche ruotare.

Quindi l'ENERGIA TOTALE DELLA MOLECOLA è data dalla somma di tre contributi, quello elettronico, quello vibazionale e quello rotazionale che sono presenti contemporaneamente

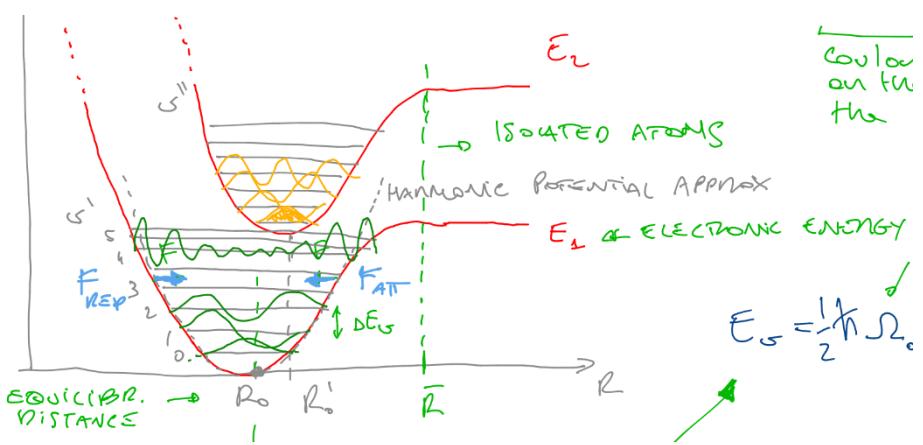
$$E_{\text{molecule}} = E_e + E_v + E_r$$

Il contributo elettronico dipende dalla configurazione elettronica (cioè da quali orbitali sono occupati dagli elettroni), il contributo vibazionale dipende dall'entità della vibrazione della molecola ovviamente e il contributo rotazionale dipende dal momento angolare della molecola.

Per valutare il contributo vibazionale dobbiamo graficare l'energia elettronica in funzione della distanza internucleare R .

Quando i due atomi sono separati ($R > \bar{R}$) i due livelli energetici non dipendono dalla distanza internucleare tra i due atomi.

Quando i potenziali iniziano ad interagire (e quindi anche



le autofunzioni elettroniche iniziano ad interagire) il livello energetico E_1 diminuisce, raggiunge un minimo e poi cresce nuovamente. Questo perché man mano che gli atomi si avvicinano, questi iniziano a formare i bonding molecular orbitals e l'energia totale della molecola è minore dell'energia dell'energia degli atomi considerati separatamente.

Se diminuiamo troppo la distanza internucleare tra i due atomi, i nuclei iniziano a sentire la repulsione causata dalla presenza degli altri nuclei.

Esiste una DISTANZA INTERNUCLEARE DI EQUILIBRIO R_0 per cui l'energia totale della molecola è minima per il livello energetico E_1 .

Possiamo fare lo stesso per il livello energetico E_2 , ma aumentando l'energia elettronica, passando da E_1 a E_2 , la distanza internucleare di equilibrio diventa maggiore R'_0 , in quanto ...

Sulla destra della distanza di equilibrio abbiamo una forza che tende a portare gli atomi più vicini tra loro, mentre sulla sinistra abbiamo una forza opposta che tende a muovere i nuclei più lontani tra loro. Questa forza può essere scritta come la derivata prima dell'energia potenziale rispetto alla posizione spaziale

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Questo è molto simile ad un potenziale armonico, pertanto vicino alla posizione di equilibrio possiamo approssimare con una funzione parabolica.

Siccome la distanza internucleare può cambiare attorno alla posizione di equilibrio, possiamo definire diversi livelli energetici vibrazionali i quali possono essere valutati risolvendo la corrispondente equazione di Schrödinger per un potenziale armonico. La soluzione è un set di livelli energetici vibrazionali equidistanti tra loro ΔE_v . Il numero quantico è v' per il primo livello, v'' per il secondo livello e così via.

L'ENERGIA VIBRAZIONALE può essere scritta come

$$E_v = \frac{1}{2} \hbar \Omega_0 + v \hbar \Omega_0$$

dove $\frac{1}{2} \hbar \Omega_0$ è il ground vibrational energy level e Ω_0 è la frequenza di risonanza di questo potenziale armonico.

L'ENERGIA ELETTRONICA, che è una funzione della posizione, può essere approssimata come un potenziale armonico nella forma

$$E(x) = \frac{1}{2} \mu \Omega_0^2 (R - R_0)^2$$

dove $\mu = \frac{M}{2}$ è la massa ridotta (reduced mass) della molecola, dove M è la massa della molecola.

Per ogni autovalore vibrazionale, possiamo definire un insieme di autofunzioni vibrazionali, le quali sono alternativamente pari e dispari. Le autofunzioni vibrazionali corrispondono alla probabilità di trovare i due nuclei ad una particolare distanza. Per le autofunzioni vibrazionali più basse è maggiore la probabilità che i due nuclei si trovino a distanza di equilibrio, ma man mano che aumentiamo l'energia vibrazionale, questa probabilità tende a distribuirsi agli estremi, distante da R_0 .

ORDINI DI GRANDEZZA PER I CONTRIBUTI DI ENERGIA E_e, E_v, E_r

ENERGIA ELETTRONICA ΔE_e

Possiamo schematizzare la molecola come una particella in un box system nel quale consideriamo il bonding potential tra i due nuclei come un pozzo rettangolare con pareti infinite.

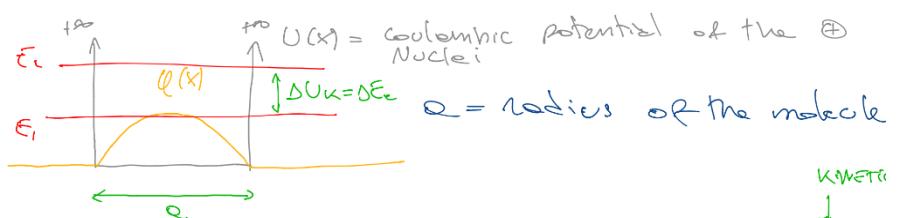
La autofunzione elettronica è $\varphi(x)$ e se

a è il raggio della molecola, gli elettroni di questa molecola possono muoversi solo dentro questa regione confinata e per il principio di indeterminazione abbiamo che il prodotto tra l'indeterminazione del momento e l'indeterminazione della posizione sarà

$$\Delta p \cdot \Delta x \simeq \hbar$$

Essendo l'indeterminazione della posizione pari al raggio della molecola $\Delta x = a$, l'indeterminazione del momento può essere scritta come

$$\Delta p = \frac{\hbar}{a}$$



Siccome l'energia cinetica dell'elettrone è $U_k = \frac{p^2}{2m_e}$, allora l'indeterminazione dell'energia cinetica, che per questo tipo di pozzi di potenziale è dello stesso ordine di grandezza della separazione tra i livelli energetici, sarà uguale a

$$\Delta U_k = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \Delta E_e \Rightarrow \Delta E_e = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2}$$

Siccome la massa dell'elettrone è $m_e \simeq 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ e $a \simeq 5\text{\AA} - 1nm$, avremo che la separazione tra i livelli energetici sarà dell'ordine $\Delta E_e \simeq 2 - 6eV$.

Quindi la lunghezza d'onda corrispondente nel caso di transizione elettronica che risulta dall'assorbimento/emissione di un fotone è dell'ordine $\lambda_e \simeq \frac{1240nm}{\Delta E_e[eV]} \Rightarrow \lambda_e \simeq 600nm - 200nm$.

Quindi a causa del contributo elettronico dovuto alla configurazione elettronica della molecola, la transizione elettronica corrisponde ad una lunghezza d'onda nel range del visibile/uv.

Siccome la popolazione del livello elettronico dipende dalla statistica di Boltzmann secondo la legge $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E_e}{kT}}$,

siccome all'equilibrio termodinamico $kT \simeq 25mV$, allora questo rapporto è circa zero $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E_e}{kT}} \simeq 0$ e questo significa che all'equilibrio termodinamico solo il primo livello elettronico è popolato.

ENERGIA VIBRAZIONALE ΔE_v

Per l'approssimazione parabolica/armonica dell'energia vibazionale $U(R - R_0)$, possiamo scrivere

$$U(R - R_0) = \frac{1}{2} \mu \Omega_0^2 (R - R_0)^2$$

L'energia vibazionale è $E_v = \frac{1}{2} \hbar \Omega_0 + v \hbar \Omega_0^2$, quindi la separazione dell'energia vibazionale è $\Delta E_v = \hbar \Omega_0^2$ che è proporzionale alla curvatura di questo potenziale parabolico.

Se consideriamo livelli vibazionali molto alti, l'energia vibazionale è molto simile alla separazione energetica tra due livelli elettronici (vedere figura 2 pagine precedenti).

Noi raggiungiamo questo alto livello energetico quando la vibrazione della molecola, quindi lo scostamento tra la posizione di equilibrio e la posizione reale tra i due nuclei è dello stesso ordine di grandezza della dimensione del raggio della molecola, cioè

$$\text{se } (R_{MAX} - R_0) \simeq a \Rightarrow U(R_{MAX} - R_0) \simeq \Delta E_e$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned} U(R_{MAX} - R_0) &= \frac{1}{2} \mu \Omega_0^2 a^2 = \Delta E_e = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \\ \Rightarrow \Delta E_v &= \hbar \Omega_0 = \sqrt{\frac{m_e}{\mu}} \cdot \Delta E_e \end{aligned}$$

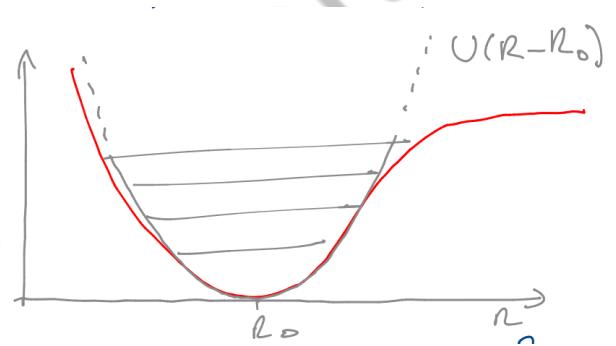
Siccome la massa della molecola è maggiore della massa del protone $\mu > m_p = 1.7 \cdot 10^{-27} kg$, mentre la massa dell'elettrone è $m_e \simeq 9.1 \cdot 10^{-31} kg$, abbiamo che $\frac{m_e}{\mu} \simeq 10^{-4} \Rightarrow \Delta E_v \simeq 10^{-2} \cdot \Delta E_e$.

Il che significa che l'ordine di grandezza dell'energia vibazionale è $\Delta E_v = 10meV - 60meV$ che corrisponde ad una lunghezza d'onda nell'ordine $\lambda_v \simeq 3 - 20nm$.

Finora abbiamo considerato una molecola biatomica che ha un solo modo vibazionale tra i due nuclei, i quali possono muoversi in un'unica direzione e in versi opposti, cioè possono solo avvicinarsi o allontanarsi. Se però consideriamo delle molecole più complesse, composte da più atomi, abbiamo più modi vibazionali. Ad esempio, se consideriamo una molecola di diossido di carbonio CO_2 che quindi è composta da 3 atomi abbiamo che questa molecola può vibrare in diversi modi

- Con l'atomo di carbonio fisso e gli atomi di ossigeno che si muovono in versi opposti, cioè si avvicinano o si allontanano entrambi → SYMMETRIC STRETCHING MODE
- Con l'atomo di carbonio fisso e gli atomi di ossigeno che si muovono nello stesso verso, cioè con uno che si avvicina e l'altro che si allontana → ANTSYMMETRIC STRETCHING MODE
- Con gli atomi di ossigeno fissi e l'atomo di carbonio che si muove verticalmente rispetto all'asse di simmetria della molecola → BENDING MODE

Il numero di possibili modi vibazionali è proporzionale alla complessità della molecola, cioè da quanti atomi questa è composta.



ENERGIA ROTAZIONALE ΔE_r

L'energia di rotazione da un punto di vista quantomeccanico può essere scritta come

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

dove J è il NUMERO QUANTICO ROTAZIONALE e $I = \mu a^2$ è il MOMENTO INERZIALE, dove $\mu = \frac{M}{2}$ è la massa ridotta. Se esplicitiamo il momento inerziale possiamo scrivere

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} J(J+1) \Rightarrow \Delta E_r = E_r(J) - E_r(J-1) = \frac{\hbar^2}{\mu a^2} \cdot J$$

Quindi l'energia rotazionale è proporzionale al quadrato del numero quantico rotazionale $E_r \div J^2$ e la distanza tra i livelli rotazionali invece cresce linearmente con il numero quantico rotazionale $\Delta E_r \div J$.

Per il livello rotazionale più basso $J = 1$, abbiamo l'aumento di energia rotazionale da un livello all'altro che è uguale a $\Delta E_r = \frac{\hbar^2}{\mu a^2}$ e possiamo compararlo con la separazione tra i livelli energetici elettronici che è data da $\Delta E_e = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2}$. Facendo il rapporto otteniamo

$$\Rightarrow \Delta E_r = \frac{\hbar^2}{\mu a^2} \cdot \frac{2m_e a^2}{\hbar^2} \Delta E_e = 2 \left(\frac{m_e}{\mu} \right) \cdot \Delta E_e \simeq 10^{-4} \Delta E_e$$

Siccome $\Delta E_v \simeq 10^{-2} \Delta E_e \Rightarrow \Delta E_r \simeq 10^2 \Delta E_v$.

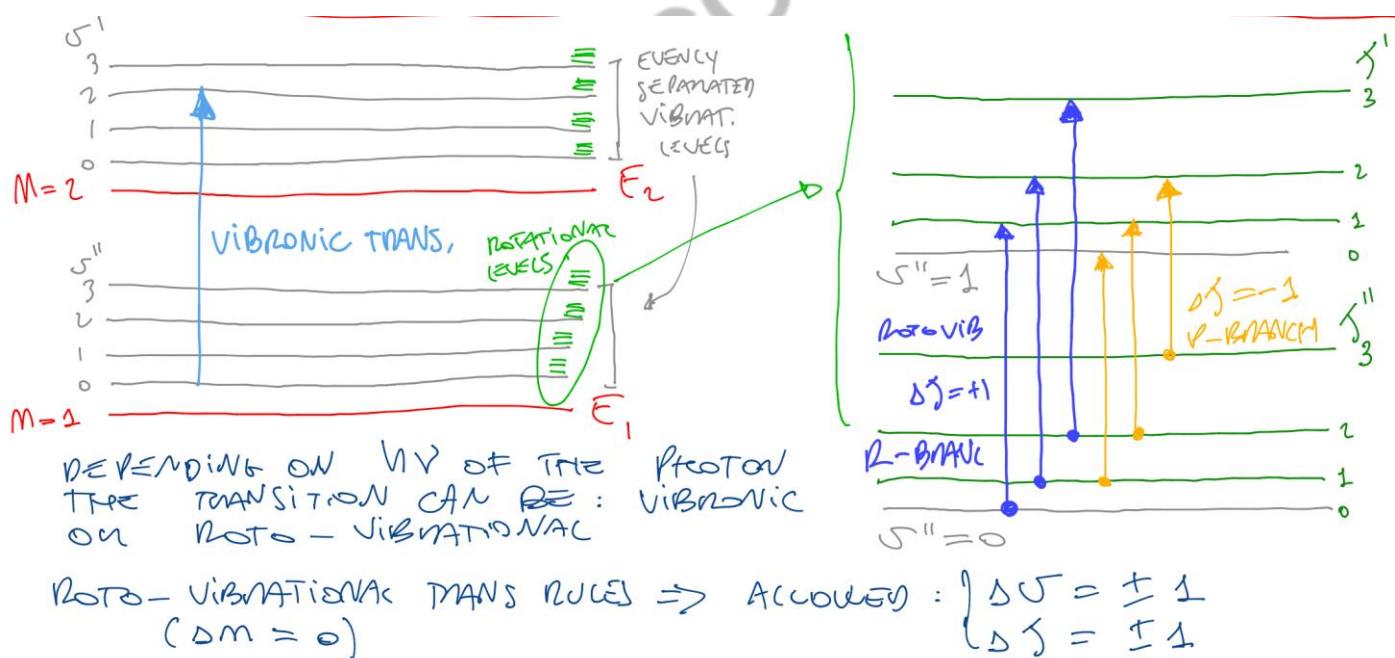
Quindi l'ordine di grandezza del rotational jump è $\Delta E_r \simeq 0.2 \text{ meV} - 0.6 \text{ meV} \ll 25 \text{ meV} = kT$.

La lunghezza d'onda corrispondente è nella regione delle microonde $WN_r \simeq 1 - 2 \text{ cm}^{-1}$.

REMARK: Degenerazione dei livelli rotazionali.

Se fissiamo il numero quantico rotazionale J , abbiamo un numero di livelli degenerati, cioè livelli con la stessa energia ma diversa configurazione rotazionale, $g(J) = 2J + 1$, ma $E_r \div J^2$, quindi $g(E_r) = 1 + \beta \sqrt{E_r}$.

IMMAGINE COMPLETA DEI LIVELLI ELETTRONICI+VIBRAZIONALI+ROTAZIONALI



Per ogni livello energetico elettronico (E_1 ed E_2) abbiamo diversi livelli energetici vibrazionali che sono equispaziati e questi corrispondono rispettivamente ai numeri quantici vibrazionali v' e v'' (a seconda se sono riferiti al ground state o allo stato eccitato). Infine, per ogni livello energetico vibrazionale abbiamo diversi livelli energetici rotazionali i quali corrispondono rispettivamente ai numeri quantici rotazionali J' e J'' . I livelli rotazionali non sono equispaziati in quanto $E_r \div J^2$.

A seconda dell'energia del fotone $h\nu$, la transizione può essere VIBRONIC o ROTO-VIBRATIONAL.

Vibronic significa che la transizione avviene tra livelli vibrazionali di diversi livelli elettronici, mentre roto-vibrational significa che la transizione avviene all'interno dello stesso livello elettronico, ma tra diversi livelli vibrazionali.

REGOLE DELLA TRANSIZIONE ROTO-VIBRAZIONALE

A causa della conservazione dell'energia e del momento, le transizioni ammesse sono

$$\begin{cases} \Delta v = \pm 1 \\ J = \pm 1 \end{cases}$$

Se $\Delta J = +1 \Rightarrow R - BRANCH \Rightarrow \Delta E_{roto-vib} > \Delta E_{vib} = E_{v=1} - E_{v=0}$

Se $\Delta J = -1 \Rightarrow P - BRANCH \Rightarrow \Delta E_{roto-vib} < \Delta E_{vib}$

L'energia di transizione totale di tipo roto-vibrazionale è

$$\Delta E_{roto-vib} = \Delta E_v \pm (J'' + 1) \cdot \Delta \bar{E}_r$$

dove J'' è il numero quantico di rotazione iniziale e $\Delta \bar{E}_r = \Delta E|_{J''=1}$.

Ora guardiamo lo spettro di assorbimento per una molecola all'equilibrio termodinamico e vediamo che questo è composto da linee di assorbimento centrate in ΔE_v e equispaziate di $\Delta \bar{E}_r = \Delta E|_{J''=1}$.

Per trovare le linee di assorbimento, mettiamo le molecole in fase gassosa in una cella e facciamo passare della luce con intensità I_0 attraverso questa. In uscita avremo un'intensità ridotta $I_0 e^{-\alpha \ell}$, in cui il fattore di assorbimento è

$$\alpha(v) = \sigma_{ABS}(v) \cdot N_{10J''}$$

dove $N_{10J''}$ è il numero di molecole nel ground state e la sezione $\sigma_{ABS}(v)$ tiene in considerazione tutte le possibili transizioni roto-vibrazionali e pertanto avrà un picco dove ci sono le transizioni consentite.

Siccome la transizione dipende dal numero quantico di rotazione iniziale J'' , possiamo pensare che se iniziamo con un numero quantico iniziale più basso avremo una più alta popolazione a causa della distribuzione di Boltzmann e poi aumentando J'' avremo una popolazione sempre più bassa nel ground level, cioè ci aspettiamo una popolazione che decresce esponenzialmente all'aumentare del numero quantico rotazionale iniziale J'' .

Se misuriamo lo spettro di

assorbimento troviamo che l'intensità di assorbimento, all'aumentare di J'' , cresce all'inizio e poi decresce lentamente e questo a causa della degenerazione dei livelli rotazionali.

Se consideriamo la popolazione per un'energia rotazionale E_r , questa è uguale a

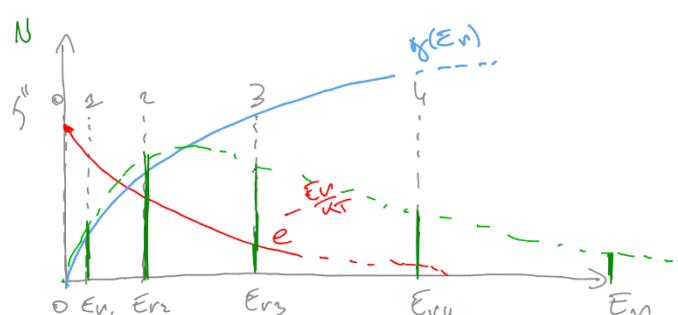
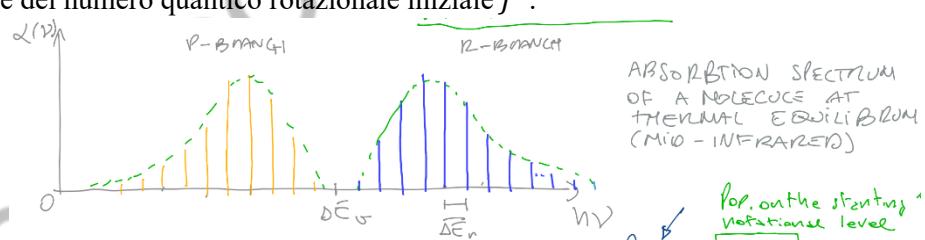
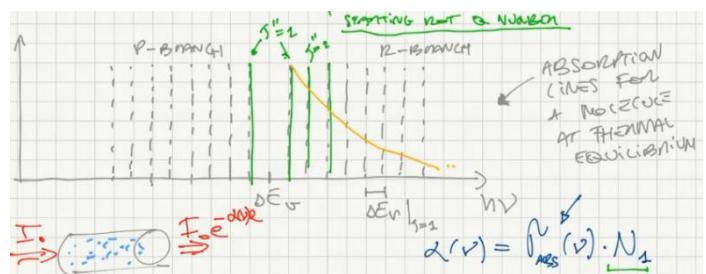
$$N(E_r) = N_{100} \cdot g(E_r) e^{-\frac{E_r}{kT}} = N_{100} \cdot (1 + \beta \sqrt{E_r}) e^{-\frac{E_r}{kT}}$$

dove N_{100} è la popolazione nel ground state ($n = 1, v'' = 0, J'' = 0$), $g(E_r)$ è la degenerazione dei livelli energetici corrispondenti all'energia E_r e $e^{-\frac{E_r}{kT}}$ è il contributo di Boltzmann.

Se grafichiamo i livelli rotazionali in funzione della loro energia e il loro numero quantico rotazionale J'' , vediamo che

$$N(E_r J) = N_{10J''} g(E_r) e^{-\frac{E_r}{kT}}$$

La popolazione è data dall'inviluppo del prodotto del contributo blu e quello rosso. L'inviluppo della popolazione è lo stesso delle linee di assorbimento.



VIBRONIC TRANSITIONS

Se consideriamo una molecola al ground state all'equilibrio termodinamico, questa sarà nel livello elettronico più basso e al livello vibrazionale più basso corrispondente

Le transizioni vibroniche seguono essenzialmente solo 2 regole di selezione:

1. PRINCIPIO DI FRANK-CONDON

Il quale asserisce che la transizione ottica tra due stati vibronici è verticale. Questo significa che la transizione coinvolge il riordinamento della distribuzione degli elettroni, i quali hanno una massa molto più piccola di quella dei nuclei e pertanto questa riorganizzazione della configurazione elettronica avviene quasi istantaneamente rispetto al moto nei nuclei, cioè la transizione è quasi istantanea.

Questo significa che quando avviene l'assorbimento, la molecola si muove istantaneamente da E_1 a E_2 senza cambiare durante la transizione la sua configurazione.

2. La probabilità di transizione è proporzionale all'integrale di sovrapposizione tra la funzione d'onda vibrazionale ($U(R)$) al ground state, cioè $U_0(R)$, e quella allo stato eccitato E_2 , cioè $U'_v(R)$. Quindi il transition rate è proporzionale al modulo quadro dell'integrale di sovrapposizione

$$W_{12} \div \left| \int_0^{\infty} U_0(R) \cdot U'_v(R) dR \right|^2 = |\langle U_0 | U'_v \rangle|^2$$

Questa regola ci dice che la transizione (quella blu, cioè parliamo di transizione di assorbimento) è più probabile, maggiore è la sovrapposizione nello spazio tra la funzione d'onda al ground state e quella allo stato eccitato.

Le funzioni d'onda che si sovrappongono maggiormente non sono quelle dello stato vibrazionale di terra del livello elettronico di ground e quella dello stato vibrazionale di terra del livello elettronico eccitato, perché queste due funzioni presentano uno scostamento e non si sovrappongono molto o quasi per nulla.

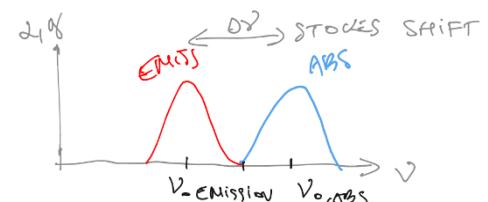
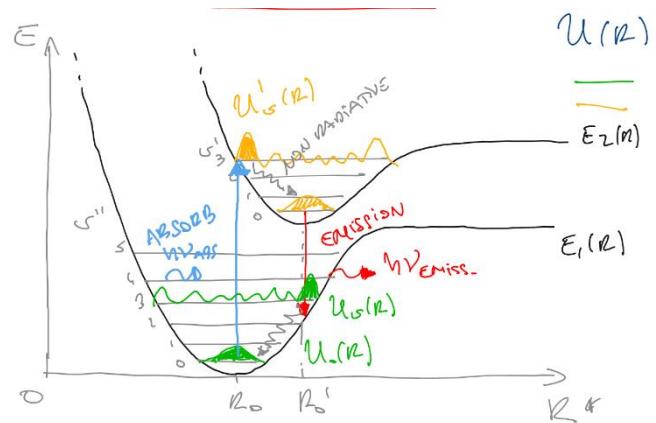
La funzione dello stato vibrazionale di terra del livello elettronico di ground sovrappone molto bene con quella dello stato vibrazionale più alto del livello elettronico eccitato, cioè quella verde si sovrappone molto bene con quella gialla.

Quando avviene la transizione viene rilasciata nell'ambiente energia vibazionale dal livello vibrazionale più alto dello stato elettronico eccitato e la molecola può decadere molto velocemente al livello vibrazionale di ground dello stato elettronico eccitato.

Dopo questa transizione non radioattiva, la molecola si troverà in uno stato eccitato e potranno verificarsi una transizione stimolata (emissione stimolata) o un decadimento spontaneo (emissione spontanea).

Questa ultima transizione di emissione dovrà seguire il principio di Frank-Condon e avviene dal livello vibrazionale di ground dello stato elettronico eccitato a un livello vibrazionale eccitato dello stato elettronico di ground.

Questo processo comporta una separazione tra la banda di emissione e quella di assorbimento della molecola.



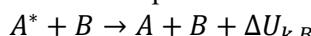
MECCANISMI DI DECADIMENTO NON RADIOATTIVI

1. DISATTIVAZIONE COLLISIONALE

Questo meccanismo di decadimento non radioattivo avviene tipicamente in fase gassosa.

Quando abbiamo 2 specie: la specie A^* che si trova in uno stato elettronico o vibrazionale eccitato e la specie B che si trova in uno stato non eccitato.

Se queste due specie collidono, come risultato la specie eccitata rilascia la sua energia di eccitazione sotto forma di energia cinetica alla specie B



Quindi la specie B aumenta la propria energia cinetica.

Questa collisione è l'opposto di una collisione elastica dove l'energia cinetica viene trasformata in energia interna del sistema, qui un po' dell'energia interna del sistema viene trasformata in energia cinetica. Pertanto, questo tipo di collisioni sono chiamate **COLLISIONI SUPER-ELASTICHE**. L'efficienza di questo processo è proporzionale al rapporto tra la massa della specie eccitata e la massa della specie non eccitata

$$\eta_{CD} \propto m_A/m_B$$

Ovviamente, durante la collisione il momento deve essere preservato e da questo possiamo calcolare la variazione di velocità della specie B e quindi la quantità di energia cinetica che viene ceduta

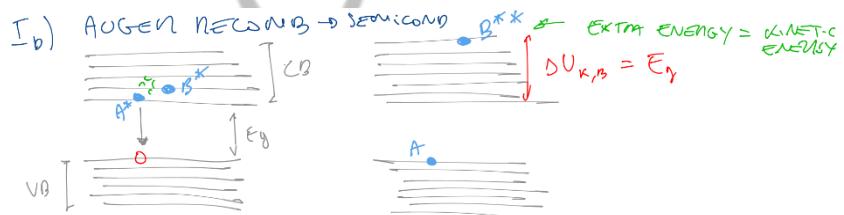
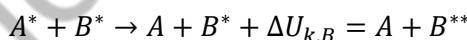
$$p_A + p_B = \text{costante} \Rightarrow \Delta v_B = \frac{m_A}{m_B} \Delta v_A \Rightarrow \Delta U_{k,B} = \frac{1}{2} \frac{m_A^2}{m_B} \Delta v_A^2$$

Maggiore è il rapporto tra la massa della specie inizialmente eccitata e la massa della specie non eccitata, maggiore è la quantità di energia cinetica che viene trasferita.

Nei semiconduttori avviene un processo simile che prende il nome di

RICOMBINAZIONE DI AUGER. Nei semiconduttori abbiamo due bande, quella di conduzione e quella di valenza.

Consideriamo 2 elettroni in banda di conduzione che pertanto possono entrambi essere considerati come specie inizialmente eccitate A^* e B^* . Se questi collidono, l'energia di una delle due specie può essere trasferita all'altra specie e la specie che trasferisce la propria energia può ricombinarsi con una lacuna e cadere in banda di valenza.

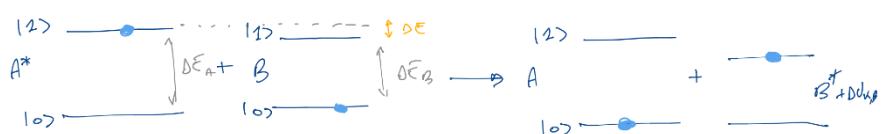


2. TRASFERIMENTO DI ENERGIA QUASI-RISONANTE

Questo meccanismo di decadimento non radioattivo può avvenire sia in fase gassosa, tra atomi o molecole, o allo stato solido, in semiconduttori 2D come il grafene o 1D come nanotubi di carbonio o polimeri conduttori.

Partiamo sempre da due specie, una eccitata A^* e una non eccitata B . Quello che succede è che quando queste due specie sono abbastanza vicine, queste

interagiscono in un modo tale per cui l'energia di eccitazione della specie A^* viene trasferita alla specie B . Quindi quello che succede dopo l'interazione è che la molecola eccitata decade allo stato di ground e quella non eccitata si muove allo stato eccitato.



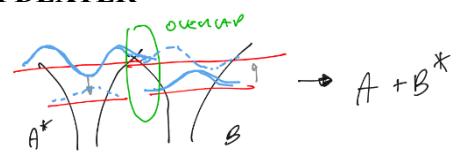
L'efficienza di questo processo è maggiore, più gli energy gap ΔE_A e ΔE_B sono vicini tra loro. La differenza di energia tra i due stati $\Delta E = \Delta E_A - \Delta E_B$ (in giallo) viene rilasciata come energia cinetica $\Delta U_{k,B}$. Abbiamo 2 possibilità:

- Se $\Delta E \ll kT \rightarrow$ il processo che avviene è un **TRASFERIMENTO DI ENERGIA QUASI-RISONANTE**
- Se $\Delta E \gg kT \rightarrow$ il processo che avviene è una **DISATTIVAZIONE COLLISIONALE** (se in fase gassosa)

Il processo di trasferimento quasi-risonante ($\Delta E \ll kT$) può avvenire in 2 modi diversi:

A) SHORT RANGE ENERGY TRANSFER → TRASFERIMENTO DI DEXTER

Avviene quando le due specie sono così vicine che le funzioni d'onda degli elettroni esterni interagiscono tra loro, cioè le code delle funzioni d'onda si sovrappongono (questo avviene quando la separazione è di soli pochi Å)

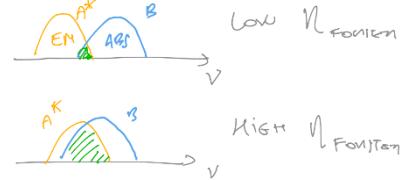


B) LONG RANGE ENERGY TRANSFER → TRASFERIMENTO DI FORSTER

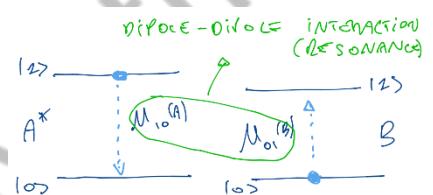
Avviene quando la separazione è di diversi nm, tipicamente fino a 10nm.

L'efficienza del trasferimento di Forster dipende dalla sovrapposizione dello spettro di emissione della specie A^* e quello di assorbimento della specie B .

Il processo è analogo ad un processo radiativo (in cui la specie A^* decade radiativamente, ad esempio per emissione spontanea, e il fotone emesso è assorbito dalla specie B), ma in questo caso il processo avviene senza l'emissione di un fotone, semplicemente a causa della risonanza dei dipoli elettrici delle due specie.



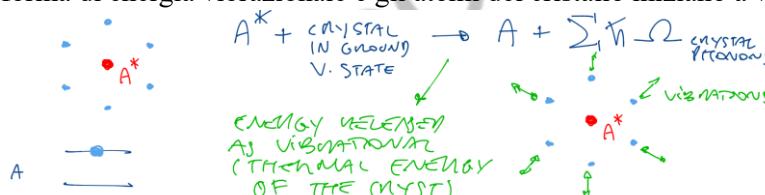
Durante la transizione la specie B può sviluppare un dipolo elettrico $\mu_{01}(B)$ e la specie A può sviluppare un dipolo elettrico $\mu_{10}(A)$ e questi dipoli possono interagire e risuonare.



3. DISATTIVAZIONE TERMICA (VIBRAZIONALE)

Questo meccanismo di decadimento non radioattivo avviene in fase solida.

È quello che succede tipicamente quando abbiamo un cristallo che si trova nello stato vibrazionale di ground (cioè non si muove) che ospita ioni attivi che sono eccitati radiativamente A^* . L'energia di eccitazione della specie A^* viene rilasciata al cristallo sotto forma di energia vibrazionale e gli atomi del cristallo iniziano a vibrare.



Possiamo pensare a questo processo come il corrispettivo allo stato solido del processo di disattivazione collisionale.

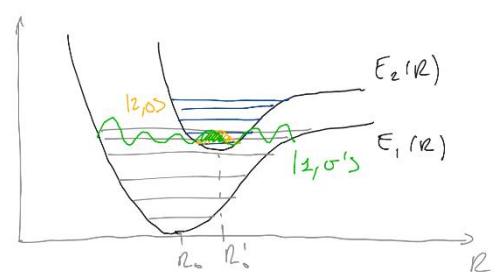
4. CONVERSIONE INTERNA / THERMAL QUENCHING

Questo ultimo meccanismo di decadimento non radioattivo è molto simile al precedente e avviene tipicamente nelle molecole.

Consideriamo una molecola che si trova allo stato elettronico di ground o allo stato elettronico eccitato E_2 .

L'energia elettronica può essere rilasciata se abbiamo un livello vibrazionale eccitato del livello elettronico inferiore che si sovrappone molto bene al livello vibrazionale di ground del livello elettronico eccitato.

Se chiamiamo lo stato della molecola $|n, v\rangle$ dove n è il NUMERO QUANTICO ELETTRONICO e v è il NUMERO QUANTICO VIBRAZIONALE, diciamo che questo processo trasforma la molecola che si trova allo stato $|2, 0\rangle$, in una molecola che si troverà allo stato $|1, v'\rangle$ dove $v' \gg 0$.



Solamente per il fatto che la molecola vibra, questa può decadere, il che significa che la configurazione elettronica interna cambia e viene rilasciata dell'energia sotto forma di vibrazione della molecola stessa $\Delta E_e = \Delta E_v$. Questa energia vibrazionale extra può ovviamente essere trasferita ad altre molecole o all'ambiente.

PROPAGAZIONE DIFFRATTIVA DELLA LUCE, FASCI DI GAUSS E RISONATORI OTTICI

TEORIA DELLA PROPAGAZIONE DIFFRATTIVA DELLA LUCE

DEFINIZIONE DI DIFFRAZIONE (SOMMERFELD 1868-1951): La diffrazione è ogni deviazione della direzione di propagazione della luce da un percorso rettilineo che non può essere interpretata come riflessione o rifrazione.

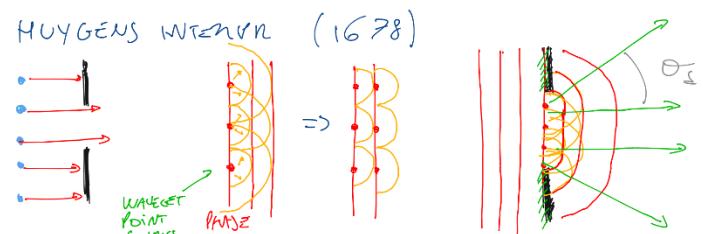
→ Ogni volta che vediamo un raggio di luce che si piega e questo processo di flessione non è attribuibile ad un fenomeno di riflessione o rifrazione, significa che stiamo assistendo ad un processo di diffrazione.

Tipicamente, questo fenomeno è visibile quando un raggio di luce attraversa una piccola apertura (dove per piccola si intende di dimensioni comparabili alla lunghezza d'onda della luce). In questo caso possiamo osservare che l'immagine proiettata dopo l'apertura su uno schermo è più grande delle dimensioni dell'apertura e possiamo osservare un pattern di diffrazione, cioè dei cerchi.

INTERPRETAZIONE DI HUYGENS DEL FENOMENO DELLA DIFFRAZIONE

La prima interpretazione di questo comportamento ondulatorio della luce viene data da Huygens nel 1678.

Se consideriamo la luce come un insieme di particelle che si propagano con direzione rettilinea e supponiamo di far passare il raggio di luce attraverso un'apertura, avremo che alcune particelle verranno bloccate dalle pareti ed altre passeranno preservando la propria traiettoria rettilinea. Quindi l'interpretazione corpuscolare della luce non permette di spiegare questo fenomeno e per spiegarlo dobbiamo considerare la luce come un'onda.



Nel caso di un'onda piana, nella quale i fronti di fase sono piani (il che significa che la direzione di propagazione del raggio è ortogonale a questi fronti di fase), immaginiamo che ogni punto dei fronti di fase rappresenti una sorgente di onde sferiche. Siccome per un fronte di fase possiamo considerare un numero infinito di punti e quindi c'è un numero infinito di sorgenti di onde sferiche, possiamo considerare che la somma dei fronti di fase di tutte queste onde sferiche costituisca un secondo fronte di fase piano. Oppure più semplicemente possiamo considerare che il raggio ha diversi fronti di fase ed ogni fronte di fase è costituito da un infinito numero di sorgenti di onde sferiche.

Questa interpretazione spiega cosa succede quando il raggio di luce incontra un'apertura. Quando il fronte di fase colpisce lo schermo in cui è presente un'apertura, la porzione del fronte in corrispondenza delle pareti viene bloccata, ma la porzione del fronte in corrispondenza dell'apertura continuerà ad emettere luce.

A causa di questa modulazione del fronte di fase però non abbiamo più un numero infinito di punti che possono interferire costruttivamente per formare un nuovo fronte di fase piano, in quanto la wavelet al centro dell'apertura darà origine ad un fronte di fase piano, ma le wavelet alle estremità non saranno compensate da altre wavelet e quindi il fronte di fase alle estremità sarà sferico e non piano.

Quindi in uscita dall'apertura avremo un ANGOLO DI DIFFRAZIONE θ_d .

Quella di Huygens è un'interpretazione logico-filosofica del fenomeno della diffrazione, la cui dimostrazione matematica verrà fornita più tardi grazie al contributo di numerosi fisici e matematici come Sommerfeld, Rayleigh, Kirchhoff e Dirac.

TEORIA SCALARE DELLA DIFFRAZIONE

La soluzione matematica al problema della diffrazione è conosciuta come teoria scalare della diffrazione e si basa su 3 ipotesi principali:

- Il campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ è POLARIZZATO LINEARMENTE, così che possiamo considerare solo la sua ampiezza scalare.
- Il campo è ARMONICO $\tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}(\vec{r})e^{-j\omega t}$ e quindi possiamo separare il contributo di ampiezza dipendente dallo spazio dal termine oscillatorio e possiamo considerare soluzioni complesse.
- Supponendo che l'asse principale di propagazione dell'onda sia l'asse z, noi andiamo a valutare la distribuzione del campo elettrico di questa onda em su piani ortogonali alla direzione z, cioè su piani xy, e le condizione al contorno del problema è che sul piano $z = 0$ viene posizionato lo schermo con l'apertura di forma Σ e quindi la distribuzione del campo elettrico su questo piano iniziale è limitata dalla forma dell'apertura e viene indicata come $\tilde{E}(x_0, y_0, 0)$.

Immaginiamo di posizionare un secondo schermo (senza apertura → piano di osservazione) ad una distanza z e di valutare la distribuzione del campo elettrico su di esso, cioè $\tilde{E}(x, y, z)$.

Al fine di risolvere il problema dobbiamo valutare l'ampiezza del campo e per la propagazione consideriamo una variabile che è il VETTORE POSIZIONE \vec{r} che è il vettore che connette la sorgente puntiforme (x_0, y_0) sul piano iniziale al punto generico (x, y) sul piano di osservazione.

Il vettore posizione può essere scritto come $\vec{r} = z\vec{u}_z + (x - x_0)\vec{u}_x + (y - y_0)\vec{u}_y$.

Per la soluzione del problema iniziamo formula della funzione d'onda del campo elettromagnetico, che può essere scritta come $\nabla^2 \tilde{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_n^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \tilde{E}(\vec{r}, t) = 0$ (dove $\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$) e applichiamo l'ipotesi (2):

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_n^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \tilde{E}(\vec{r}, t) = 0 \\ \tilde{E}(\vec{r}, t) = \tilde{E}(\vec{r})e^{-j\omega t} \\ \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \tilde{E}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c_n}\right)^2 \tilde{E}(\vec{r}, t) \\ \frac{\omega}{c_n} = k \end{cases} \Rightarrow (\nabla^2 + k^2) \tilde{E}(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$

Questa equazione prende il nome di EQUAZIONE DI HELMOTZ (equazione d'onda dipendente dallo spazio).

Omettendo la dimostrazione, possiamo dire che la soluzione all'equazione di Helmotz, cioè la distribuzione del campo elettrico sul piano di osservazione, è

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_0, y_0, 0) \frac{e^{jkr}}{r} \cos(\vec{u}_z, \vec{r}) dx_0 dy_0$$

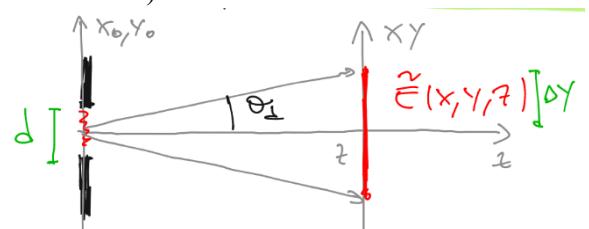
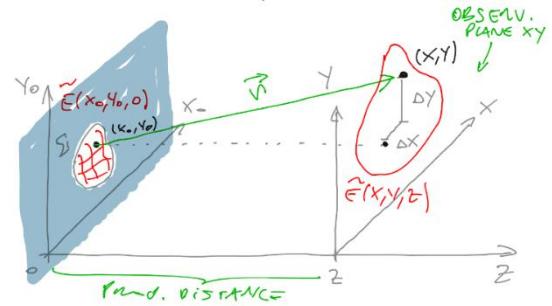
Questa soluzione è conosciuta come INTEGRALE DI SOMMERFELD-KIRCHHOFF-RAYLEIGH e risulta di facile interpretazione. La forma finale del campo elettrico, cioè la distribuzione di campo elettrico sul piano di osservazione, è data dalla somma di diverse onde sferiche (e^{jkr}), con ampiezza inversamente proporzionale al vettore di posizione r (per la conservazione dell'energia), con sfasamento tra la sorgente e l'onda sferica è $1/j\lambda$, cioè 90 gradi, e il termine $\cos(\vec{u}_z, \vec{r})$ rappresenta il dipole emission envelope (spatial).

Questo integrale può essere approssimato in diversi modi:

- APPROXIMAZIONE PARASSIALE (o DI FRESNEL o NEAR-FIELD)

Supponiamo di andare molto distanti dall'apertura e di osservare la distribuzione di campo elettrico sul piano xy dopo una distanza di propagazione z.

Se le dimensioni dell'apertura sono piccole e la distanza di propagazione alla quale osserviamo il campo è abbastanza grande e se la distribuzione $\tilde{E}(x, y, z)$ è confinata sulla



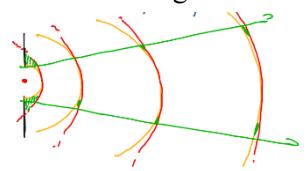
dimensione lineare Δy , possiamo approssimare l'angolo di diffrazione in questo modo

$$\theta_d \simeq \tan(\theta_d) \simeq \frac{\Delta y_{MAX}}{z}$$

Quindi, se $z \gg \Delta y_{MAX}$ e se $\Delta y_{MAX} \gg d$, cioè se $z \gg d$, cioè se l'angolo di diffrazione non è molto grande

$$\theta_d \simeq \frac{\Delta y_{MAX}}{z} \rightarrow 0, \text{ possiamo considerare } \cos(\vec{u}_z, \vec{r}) \simeq 1.$$

Inoltre, se siamo distanti dalla sorgente, cioè dall'apertura, possiamo approssimare il fronte di fase sferico con un fronte di fase parabolico. $z \gg d$ è una buona condizione per avere fare questa approssimazione.



Il range of curvature che è l'ampiezza del vettore posizione \vec{r} può essere scritto come

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2}{z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{z^2}}$$

Per l'approssimazione che abbiamo fatto (approssimazione di Fresnel) il termine $\frac{(y - y_0)^2}{z^2}$ è molto piccolo e possiamo considerare un'approssimazione quadratica al range of curvature

$$\Rightarrow r \simeq z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2} \right] = z + \frac{(x - x_0)^2}{2z} + \frac{(y - y_0)^2}{2z}$$

Ne segue che il termine onda-sferica dell'integrale (e^{jkr}) diventa

$$e^{jkr} = e^{jkz} e^{jk \left[\frac{(x-x_0)^2}{2z} + \frac{(y-y_0)^2}{2z} \right]}$$

Pertanto, la soluzione all'equazione di Helmholtz può essere approssimata come

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{\Sigma} \tilde{E}(x_0, y_0, 0) e^{jk \frac{k}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0$$

Questa espressione prende il nome di INTEGRALE DI SOMMERFELD IN APPROXIMAZIONE PARASSIALE/FRESNEL.

Ordini di grandezza → approssimazione near-field $z \gg d$, quindi se $d = 2mm \Rightarrow z \simeq 1 - 10cm$.

2. APPROXIMAZIONE DI FRAUNHOFER (o FAR FIELD)

Possiamo approssimare ulteriormente l'integrale precedente adottando l'approssimazione di Fraunhofer, cioè

$$z \gg \frac{\Sigma}{\lambda}$$

Siccome possiamo scrivere $\Sigma = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2$, se la lunghezza d'onda è $\lambda \simeq 600nm$ e $d = 1mm$, affinché questa approssimazione venga soddisfatta dobbiamo avere $z \gg 10m$.

Sviluppando l'esponente all'interno dell'integrale precedente otteniamo

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_0, y_0, 0) e^{jk \frac{k}{2z} [x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0]} dx_0 dy_0$$

dove alcuni termini sono indipendenti da x_0 e y_0 e possono essere portati fuori dall'integrale che quindi diventa

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \cdot e^{jk \frac{x^2 + y^2}{2z}} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_0, y_0, 0) e^{jk \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2)} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda z} (xx_0 + yy_0)} dx_0 dy_0$$

dove $\frac{e^{jkz}}{j\lambda z} = \tilde{C}(z)$ (è un termine che non dipende dalle coordinate x, y, ma solo dalla distanza di propagazione z) e $k \frac{x^2 + y^2}{2z} = \varphi(x, y)$ (componente di fase trasversale) e dove abbiamo sostituito $k = 2\pi/\lambda$.

Osserviamo che $\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{\lambda z} = \frac{\Sigma}{z} \rightarrow 0$ (per l'approssimazione di Fraunhoer) e quindi per l'approssimazione $e^{jk \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2)} \rightarrow 1$.

Quindi l'integrale può essere riscritto come

$$\tilde{E}(x, y, z) = \tilde{C}(z) \cdot e^{jk\varphi(x, y)} \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_0, y_0, 0) e^{-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)} dx_0 dy_0$$

dove abbiamo chiamato $f_x = \frac{x}{\lambda z}$ e $f_y = \frac{y}{\lambda z}$. Questo è l'INTEGRALE DI SOMMERFELD IN APPROXIMAZIONE DI FRAUNHOFER.

NOTA: questa espressione è molto simile ad una trasformata di Fourier; quindi, possiamo scrivere

$$\tilde{E}(x, y, z) = \tilde{C}(z) e^{j\varphi(x, y)} \mathfrak{F}\{\tilde{E}(x_0, y_{0,0})\}_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

Se valutiamo l'intensità del campo elettrico "in uscita", abbiamo

$$I(x, y, z) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c_0 n |\tilde{E}(x, y, z)|^2 = \frac{\varepsilon_0 c_0 n}{2 \lambda^2 z^2} \cdot \left| \mathfrak{F}\{\tilde{E}(x_0, y_{0,0})\}_{f_x=\frac{x}{\lambda z}, f_y=\frac{y}{\lambda z}} \right|^2$$

dove la costante moltiplicativa $\frac{\varepsilon_0 c_0 n}{2 \lambda^2 z^2}$ tiene in considerazione la conservazione dell'energia.

L'intensità in uscita è proporzionale all'ampiezza al quadrato della trasformata di Fourier del campo in ingresso.

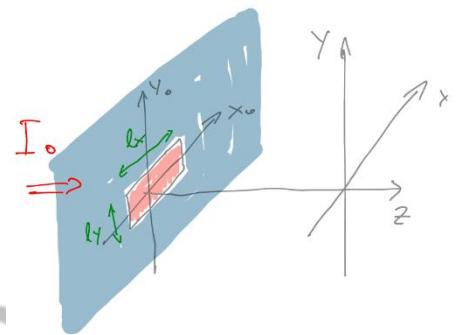
ESEMPIO: DIFFRAZIONE DA UN'APERTURA RETTANGOLARE

Se abbiamo un'apertura illuminata da un'intensità costante, cioè se abbiamo un'apertura illuminata da un'onda piana, avremo che l'ampiezza del campo sarà costante su tutta la superficie dell'apertura e sarà uguale a

$$\tilde{E}(x_0, y_{0,0}) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{x_0}{\ell_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y_0}{\ell_y}\right)$$

Applicando l'integrale di Sommerfeld nell'approssimazione di Fraunhofer, il campo elettrico in uscita sarà proporzionale a

$$\tilde{E}(x, y, z) \div \mathfrak{F}\left\{A \cdot \text{rect}\left(\frac{x_0}{\ell_x}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y_0}{\ell_y}\right)\right\}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}}$$



Questo significa che il campo elettrico in uscita sarà proporzionale a

$$\tilde{E}(x, y, z) \div \text{sinc}(\ell_x \cdot f_x) \text{sinc}(\ell_y \cdot f_y) = \text{sinc}\left(\frac{\ell_x \cdot x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{\ell_y \cdot y}{\lambda z}\right)$$

Quindi l'intensità in uscita sarà

$$I(x, y, z) \div |\tilde{E}(x, y, z)|^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\ell_x \cdot x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\ell_y \cdot y}{\lambda z}\right)$$

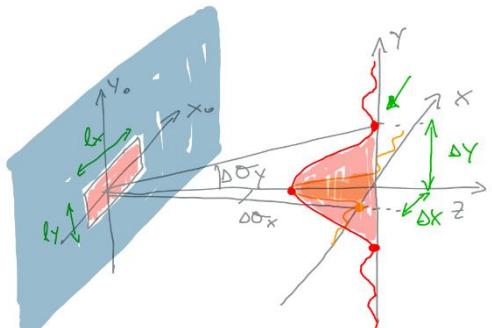
Possiamo considerare l'intensità in uscita come confinata al primo zero, cioè possiamo considerare solo il primo lobo sia per l'asse x che per l'asse y.

Possiamo definire due angoli di divergenza, uno per l'asse x ed uno per l'asse y, considerando che il massimo angolo di divergenza è l'angolo che connette l'origine della distribuzione di campo in ingresso con i primi zeri delle funzioni sinc nella distribuzione di campo in uscita.

Per trovare gli zeri del sinc dobbiamo porre l'argomento del sinc uguale a 1

$$\frac{\ell_x \cdot \Delta x}{\lambda z} = 1 \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda z}{\ell_x}$$

$$\frac{\ell_y \cdot \Delta y}{\lambda z} = 1 \Rightarrow \Delta y = \frac{\lambda z}{\ell_y}$$



Quindi gli ANGOLI DI DIVERGENZA per i due assi sono

$$\Delta\theta_x = \frac{\Delta x}{z} = \frac{\lambda}{\ell_x}$$

$$\Delta\theta_y = \frac{\Delta y}{z} = \frac{\lambda}{\ell_y}$$

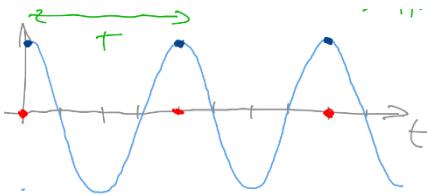
REMARK TRASFORMATA DI FOURIER 2D

1D: Nella trasformata di Fourier 1D solitamente lavoriamo con una variabile temporale e facciamo una somma infinita di armoniche temporali pesate

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\tilde{G}(f) = \mathfrak{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

dove $\tilde{G}(f)$ è lo spettro di ampiezza di $g(t)$ e $e^{j2\pi f t} = \tilde{h}(t)$ è la funzione armonica che è graficata come segue



Da questa possiamo individuare i punti dove la fase è massima e i punti corrispondenti sull'asse del tempo

$$2\pi f T_m = m \cdot 2\pi$$

$$T_m = m \cdot \frac{1}{f} = m \cdot T$$

dove T è il dominio temporale dell'armonica

2D: Nella trasformata di Fourier 2D, possiamo pensare la funzione $g(x, y)$ come una somma infinita di armoniche spaziali pesate, cioè possiamo scrivere

$$a(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$

$$\tilde{A}(f_x, f_y) = \mathfrak{F}\{a(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} a(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$

dove $\tilde{A}(f_x, f_y)$ è lo spettro d'ampiezza bidimensionale.

ARMONICHE BIDIMENSIONALI

L'armonica bidimensionale è $\tilde{h} = e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}$, i cui massimi di fase sono a $2\pi(f_x x + f_y y) = m \cdot 2\pi$.

Il LUOGO DEI MASSIMI DI FASE è $y = -\frac{f_x}{f_y}x + \frac{m}{f_y}$, cioè sono linee rette inclinate con un coefficiente angolare che è il rapporto $\frac{f_x}{f_y}$ e sono traslate di $\frac{m}{f_y}$ rispetto all'origine sull'asse y.

Se consideriamo la retta corrispondente a $m = 1$, i punti in cui questa retta intercetta i due assi sono

$$\begin{aligned} A. \quad y = 0 &\Rightarrow x_A = \frac{1}{f_x} \\ B. \quad x = 0 &\Rightarrow y_B = \frac{1}{f_y} \end{aligned}$$

I punti di intersezione delle linee con gli assi si ripetono periodicamente e la periodicità è:

- PERIODICITÀ SULL'ASSE X $\rightarrow \lambda_x = \frac{1}{f_x}$
- PERIODICITÀ SULL'ASSE Y $\rightarrow \lambda_y = \frac{1}{f_y}$

Se consideriamo la DIREZIONE PRINCIPALE DELL'ARMONICA che è ortogonale a questi fronti d'onda, cioè alle linee di fase massima, se questa direzione forma un angolo θ con l'asse x, possiamo definire una lunghezza d'onda lungo la direzione principale che indichiamo con λ_θ (e ovviamente corrisponde alla distanza geometrica tra i fronti di fase), la quale può essere scritta come

$$\begin{aligned} - \quad \lambda_\theta &= \frac{1}{f_x} \cos \theta \Rightarrow \cos^2 \theta = (f_x \lambda_\theta)^2 \\ - \quad \lambda_\theta &= \frac{1}{f_y} \sin \theta \Rightarrow \sin^2 \theta = (f_y \lambda_\theta)^2 \end{aligned}$$

Sommendo queste due espressioni otteniamo

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = \lambda_\theta^2 (f_x^2 + f_y^2) \Rightarrow \lambda_\theta = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

che prende anche il nome di PERIODO SPAZIALE EFFETTIVO.

Di conseguenza possiamo anche definire la FREQUENZA SPAZIALE EFFETTIVA come

$$f_\theta = \frac{1}{\lambda_\theta} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

FILTRAGGIO SPAZIALE (2D/OTTICO)

1D: possiamo rappresentare il sistema con la sua risposta impulsiva $h(t)$ e possiamo scrivere il segnale in uscita come

$$g_{out}(t) = g_{in}(t) * h(t)$$

possiamo descrivere il sistema anche nel dominio della frequenza

$$\tilde{G}_{out}(f) = \tilde{G}_{in}(f)\tilde{H}(f)$$

All'uscita del sistema possiamo applicare un filtro con una risposta in frequenza $\tilde{T}(f)$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{out}(f) &= \tilde{G}'_{out}(f)\tilde{T}(f) = \tilde{H}(f)\tilde{T}(f)\tilde{G}_{in}(f) \\ g_{out}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{G}_{out}(f)\}\end{aligned}$$

2D: nel dominio ottico è possibile fare lo stesso, ma in questo caso il sistema è descritto da una risposta in frequenza bidimensionale e quindi possiamo scrivere

$$\tilde{A}'_{out}(f_x, f_y) = \tilde{H}(f_x, f_y)\tilde{A}_{in}(f_x, f_y)$$

$$\tilde{A}_{out}(f_x, f_y) = \tilde{T}(f_x, f_y)\tilde{A}'_{out}(f_x, f_y) = \tilde{T}(f_x, f_y)\tilde{H}(f_x, f_y)\tilde{A}_{in}(f_x, f_y)$$

dove $\tilde{H}(f_x, f_y) = \mathcal{F}_{2D}\{h(x, y)\}$ è la risposta in frequenza del sistema e $\tilde{T}(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{\tilde{t}(x, y)\}$ è la risposta in frequenza del FILTRO SPAZIALE.

FILTRAGGIO OTTICO DI ONDE EM

Sappiamo che se guardiamo la distribuzione di campo elettrico sul piano di uscita, se ci troviamo nelle condizioni dell'approssimazione di Fraunhofer, abbiamo che

$$\tilde{E}(x, y, z) \div \mathcal{F}_{2D}\{\tilde{E}(x_0, y_0, 0)\} \frac{x}{\lambda z} \frac{y}{\lambda z}$$

possiamo applicare direttamente sul piano di uscita una maschera di fase, la cui risposta in frequenza può essere espressa come

$$\tilde{T}(x, y) = T(x, y)e^{j\Delta\phi(x, y)}$$

Fondamentalmente questa maschera è un dielettrico e per cambiare la fase possiamo cambiare lo spessore del dielettrico, cambiare il materiale dielettrico con uno con un diverso indice di rifrazione o cambiare la trasmissività locale del materiale

$$\Delta\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n\ell$$

dove ℓ è lo spessore del dielettrico.

Se ci troviamo nell'approssimazione di Fraunhofer la distanza di propagazione alla quale valutiamo la distribuzione del campo è dell'ordine di grandezza di 10 – 100 m.

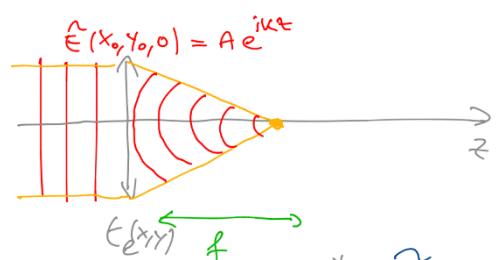
Possiamo fare affidamento su un elemento ottico che può accorciare la distanza di propagazione alla quale valutiamo il campo e questo elemento ottico è la LENTE che ci permette di "muovere" la trasformata di Fourier del campo in ingresso da una distanza molto lunga ad una molto corta, cioè la lunghezza focale della lente.

Questa proprietà prende il nome di PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER DELLE LENTI.

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER DELLE LENTI

quando entriamo sulla lente con fronti di fase piani $\tilde{E}(x_0, y_0, 0) = Ae^{jkz}$, la lente trasforma questi fronti di fase piani in fronti di fase sferici che convergono su un punto appartenente all'asse ottico della lente, che prende il nome di PUNTO FOCALE (FOCAL POINT).

La distanza del punto focale dalla lente prende il nome di LUNGHEZZA FOCALE.



Se siamo nell'approssimazione di Fresnel possiamo considerare i fronti di fase dopo la lente come fronti parabolici con una curvatura negativa.

La funzione di trasferimento della lente è

$$t_\ell(x, y) = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_0} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x^2+y^2}{2f}}$$

dove f è la lunghezza focale e Δ_0 rappresenta il massimo spessore della lente.

Cosa succede quando il campo colpisce la lente?

il campo alla lunghezza focale è

$$\tilde{E}(x, y, f) = (\) \iint E(x_0, y_0, 0) t_\ell(x, y) e^{j\frac{\pi x^2 + y^2}{\lambda f}} e^{-j2\pi(\frac{x}{\lambda f}x_0 + \frac{y}{\lambda f}y_0)} dx_0 dy_0$$

che prende il nome di INTEGRALE DI FRESNEL IN $z = f$.

È facile osservare che la funzione di trasferimento della lente si semplifica con il

fattore di extra-curvatura $e^{j\frac{\pi x^2 + y^2}{\lambda f}}$, ottenendo

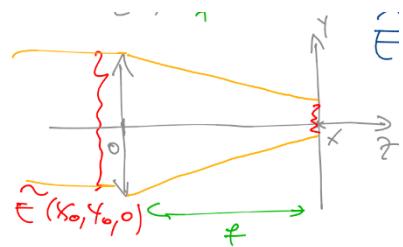
$$\tilde{E}(x, y, f) = (\) \iint E(x_0, y_0, 0) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \Delta_0} e^{-j2\pi(\frac{x}{\lambda f}x_0 + \frac{y}{\lambda f}y_0)} dx_0 dy_0$$

Quindi alla fine otteniamo che il campo elettrico valutato alla distanza focale può essere scritto come

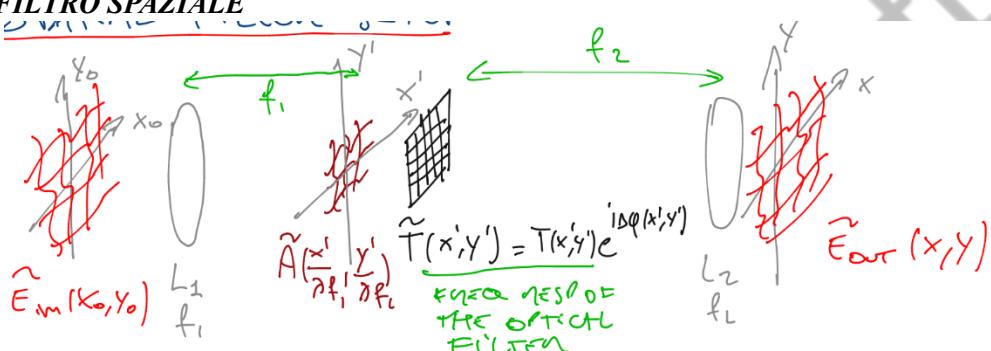
$$\tilde{E}(x, y, f) = \mathfrak{F}_{2D}\{E(x_0, y_0, 0)\}_{f_x = \frac{x}{\lambda z}, f_y = \frac{y}{\lambda z}} = \tilde{A}(f_x, f_y)$$

che rappresenta in tutto e per tutto la proprietà della trasformata di Fourier della lente.

Il piano focale della lente, cioè il piano alla distanza focale, è anche detto PIANO DI FOURIER.



SETUP DI UN FILTRO SPAZIALE



Iniziamo da una distribuzione di campo elettrico sul piano iniziale, di fronte al quale poniamo una lente ed andiamo ad osservare la trasformata di Fourier del campo in ingresso sul piano focale, cioè il piano di Fourier ad una distanza f_1 . Davanti al piano di Fourier posizioniamo un filtro, cioè la maschera di fase, e ad una distanza f_2 andiamo a posizionare una seconda lente, dopo la quale andiamo a valutare la distribuzione del campo in uscita:

$$\tilde{E}_{out}(x, y) = \mathfrak{F} \left\{ \tilde{A} \left(\frac{x'}{\lambda f_1}, \frac{y'}{\lambda f_1} \right) \cdot \tilde{T}(x', y') \right\} = \mathfrak{F} \left\{ \mathfrak{F} \{ \tilde{E}_{in}(x_0, y_0) \} \right\}_{\frac{x}{\lambda f_1}, \frac{y}{\lambda f_1}} * \mathfrak{F} \{ \tilde{T}(x', y') \}_{\frac{x}{\lambda f_1}, \frac{y}{\lambda f_1}}$$

Se chiamiamo FATTORE DI INGRANDIMENTO il rapporto tra le due lunghezze focali

$$M = -\frac{f_2}{f_1}$$

Possiamo riscrivere il CAMPO ELETTRICO FILTRATO IN USCITA come

$$\tilde{E}_{out}(x, y) = \frac{1}{M^2} \tilde{E}_{in} \left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M} \right) * \tilde{t} \left(\frac{x}{\lambda f_2}, \frac{y}{\lambda f_2} \right)$$

dove \tilde{t} è la risposta impulsiva del filtro ottico $\tilde{t} = \mathfrak{F}_{2D}\{\tilde{T}\}$.

- Se $T_{LP}(x', y') = \text{rect}\left(\frac{x'}{\ell_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{\ell_y}\right)$ \rightarrow LOW PASS
- Se $T_{HP}(x', y') = 1 - T_{LP} = 1 - \text{rect}\left(\frac{x'}{\ell_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{\ell_y}\right)$ \rightarrow HIGH PASS

IMPLICAZIONI PER UN SISTEMA DI OPTICAL IMAGING

Abbiamo un oggetto che può essere illuminato in due modi, in trasmissione o in riflessione, e in entrambi i casi abbiamo della luce che viene riflessa dall'oggetto. In uscita dall'oggetto abbiamo un campo elettrico $\tilde{E}_{in}(x_0, y_0)$ che è modulato dalle proprietà ottiche del materiale. Ad una certa distanza p abbiamo una lente che concentra il campo elettrico dell'oggetto sul sensore (che può essere anche la stessa retina dell'occhio umano).

Ad una certa distanza q abbiamo il piano focale su cui osserviamo la distribuzione del campo elettrico in uscita.

Deve valere la relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

dove f è la lunghezza focale della lente.

In questo caso il fattore di ingrandimento è $M = -\frac{q}{p} < 0$ perché $p \gg q$ tipicamente.

Condizione tipica è

$$\left\{ \begin{array}{l} p \gg q \Rightarrow |M| \ll 1 \\ p \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \simeq \frac{\pi}{2} \\ \text{Fraunhofer approx} \Rightarrow \tilde{E}(x', y', p) = \tilde{A}\left(\frac{x'}{\lambda p}, \frac{y'}{\lambda q}\right) \end{array} \right.$$

Siccome il PIANO DI IMMAGINE, cioè il piano del sensore sul quale viene formata l'immagine, è il piano di Fourier della lente, il campo in uscita può essere scritto come

$$\tilde{E}_{out}(x, y, \frac{\pi}{2}) = \mathfrak{F}_{2D} \left\{ \tilde{A}\left(\frac{x'}{\lambda p}, \frac{y'}{\lambda q}\right) \cdot D(x', y') \right\} = \frac{1}{M^2} \tilde{E}_{in}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) * d\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

dove $\tilde{E}_{in}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) \Rightarrow$ immagine scalata e $d\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \mathfrak{F}_{2D}\{D(x', y')\}_{\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}} \Rightarrow D(x', y')$ è una funzione LPF che può essere scritta come $D(x', y') = rect\left(\frac{x'}{\ell_x}, \frac{y'}{\ell_y}\right)$.

NOTA: in questo caso non abbiamo un filtraggio dello spettro ottico del campo elettrico in ingresso, ma la lente agisce comunque come un filtro a causa delle sue dimensioni finite, anche se non mettiamo alcuna maschera di fase. Questo perché a causa delle sue dimensioni finite, la lente agisce come un DIAFRAMMA che taglia le frequenze ottiche alte, cioè agisce come una sorta di filtro passa basso. Se fossimo in grado di utilizzare una lente con dimensioni infinite, non incorreremmo in questo effetto.

Quindi possiamo scrivere

$$d\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \mathfrak{F}_{2D}\{D(x', y')\}_{\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}} = \ell_x \ell_y \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_x x}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_y y}{\lambda f}\right)$$

Quindi l'OGGETTO VISUALIZZATO IN CASO DI DIAFRAMMA RETTANGOLARE è

$$\tilde{E}_{out} = \frac{\ell_x \ell_y}{M^2} \tilde{E}_{in}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) * \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_x x}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_y y}{\lambda f}\right) \right]$$

Se il diaframma ha dimensioni infinite, la risposta impulsiva della lente diventa una delta e otteniamo esattamente la replica dell'oggetto

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } \ell_x, \ell_y \rightarrow \infty \Rightarrow d\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \rightarrow \delta\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \\ \tilde{E}_{out} = \frac{\ell_x \ell_y}{M^2} \tilde{E}_{in}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) * \delta\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) = \frac{\ell_x \ell_y}{M^2} \tilde{E}_{in}\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) \end{array} \right.$$

Ma se ℓ_x, ℓ_y sono finite, l'immagine in uscita diventa una replica filtrata low-pass dell'oggetto.

Qual è la risoluzione di questa immagine low-pass filtered?

Possiamo immaginare che l'oggetto sia un oggetto molto piccolo e quindi che la distribuzione di campo iniziale sia approssimabile ad una delta di Dirac. Ovviamene dato che il campo è convoluto con la funzione sinc, nel caso di un filtro rettangolare (gated integrator), ci aspettiamo che il campo sia una funzione sinc anche sul piano di uscita.

Se $\tilde{E}_{in}(x_0, y_0) = \delta(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \tilde{E}_{out} = \frac{\ell_x \ell_y}{M^2} \delta\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) * \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_x x}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_y y}{\lambda f}\right) \right]$$

dove $\delta\left(\frac{x}{M}, \frac{y}{M}\right) = M^2 \delta(x, y)$

$$\Rightarrow \tilde{E}_{out}(x, y) = \ell_x \ell_y \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_x x}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\ell_y y}{\lambda f}\right)$$

Questa è l'IMMAGINE DI UNA DELTA DI DIRAC IN INPUT, cioè è la RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA.

Quindi la RISOLUZIONE è

$$\Delta x_{RES}: \frac{\ell_x \cdot \Delta x_{RES}}{\lambda f} = 1 \Rightarrow \Delta x_{RES} = \frac{\lambda f}{\ell_x} \div \frac{1}{\ell_x}$$



$$\Delta y_{RES}: \frac{\ell_y \cdot \Delta y_{RES}}{\lambda f} = 1 \Rightarrow \Delta y_{RES} = \frac{\lambda f}{\ell_y} \div \frac{1}{\ell_y}$$

Nel caso di una LENTE CIRCOLARE, la cui funzione di trasferimento può essere approssimata ad un quadrato, quindi $\ell_x = \ell_y = \ell$ e l'APERTURA NUMERICA della lente è $NA = \frac{\ell}{2f}$ dove ℓ è quindi il diametro della lente

$$\Delta x_{RES} = \Delta y_{RES} = \frac{\lambda}{2NA}$$

Al fine di avere una risoluzione molto elevata e visualizzare piccoli dettagli dell'oggetto vogliamo avere una lente con un'apertura numerica molto grande e quindi un diametro molto grande e una distanza focale molto piccola, e vogliamo avere luce con una piccola lunghezza d'onda.

APPLICAZIONE DEL FILTRAGGIO SPAZIALE: MICROSCOPIO A CONTRASTO DI FASE DI ZERNIKE

Un microscopio è un dispositivo di visualizzazione con un fattore di ingrandimento molto elevato.

Tipicamente questo microscopio è usato per visualizzare campioni biologici, la cui funzione di trasmissione è immaginaria

$$t(x_0, y_0) = |t(x_0, y_0)| e^{j\Delta(x, y)}$$

dove $t = 1$ e $\Delta(x, y)$ è molto piccola. Quindi i campioni biologici sono molto difficili da visualizzare perché sono quasi trasparenti e hanno effetto sul campo ottico quasi esclusivamente perché ne provocano un cambio di fase. Quindi come detto abbiamo

$$|t(x_0, y_0)| = 1$$

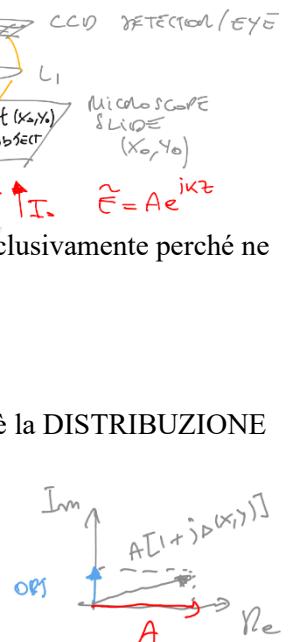
$$\Delta(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} n(x, y) d(x, y) \simeq 0$$

dove $n(x, y)$ è la DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELL'INDICE DI RIFRAZIONE e $d(x, y)$ è la DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELLO SPESSORE.

Se guardiamo il campo elettrico

$$\tilde{E}(x_0, y_0) = A \cdot e^{j\Delta(x, y)} \simeq A \cdot [1 + j\Delta(x, y)]$$

dove la parte reale è l'ILLUMINAZIONE DI FONDO e la parte immaginaria è l'OBJECT FIELD.



L'intensità di questo campo è

$$I(x, y) \div |\tilde{E}(x_0, y_0)|^2 = A^2 [1 + \Delta^2(x, y)] = A^2 + A^2 \Delta^2(x, y)$$

dove $A^2 \Delta^2(x, y) \simeq 0$.

Il contrasto è

$$contrast = \frac{I(x, y) - I_{bckgrnd}}{I_{bckgrnd}} = \frac{A^2 + A^2 \Delta^2(x, y) - A^2}{A^2} = A^2 \Delta^2(x, y) \simeq 0$$

PROBLEMA: Quindi senza un filtraggio ottico adeguato le immagini di questi campioni biologici risultano praticamente trasparenti e non possono essere viste

SOLUZIONE: La soluzione è quella di adottare una MASCHERA DI FASE

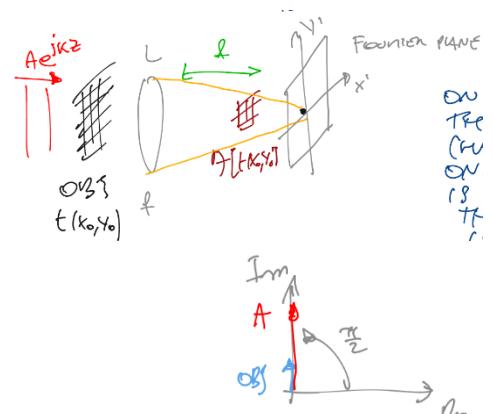
$$t_f(x', y') = \begin{cases} 1, & \forall (x', y') \neq 0 \\ e^{\pm j\frac{\pi}{2}}, & x, y = 0 \end{cases}$$

Solo la fase del background è cambiata di $\frac{\pi}{2}$ perché solo l'illuminazione di fondo uniforme è concentrata completamente nel mezzo della maschera di fase (cioè il filtro).

L'uscita del filtro può essere scritta come

$$\tilde{E}_{FILTERED} = A \left[e^{\pm j\frac{\pi}{2}} + j\Delta(x, y) \right] = A \cdot j[1 \pm \Delta(x, y)]$$

Quindi quello che fa questa maschera di fase è rifasare ...



Ora il background A si somma coerentemente con l'oggetto come un oscillatore locale coerente.

L'intensità filtrata sarà

$$I_{FILTERED}(x, y) \div A^2 [1 \pm \Delta(x, y)]^2 = A^2 [1 \pm 2\Delta(x, y) + \Delta^2(x, y)]$$

dove $\Delta^2(x, y) \simeq 0$, quindi

$$I_{\text{FILTERED}}(x, y) = A^2[1 \pm 2\Delta(x, y)]$$

Quindi il contrasto dell'immagine può essere scritto come

$$\text{contrast} = \frac{I_{\text{FILTERED}} - A^2}{A^2} = \pm 2\Delta(x, y)$$

dove con il + otteniamo l'immagine a contrasto positivo e con il - quella a contrasto negativo.

FASCI GAUSSIANI (GAUSSIAN BEAMS)

(SVELTO CH4)

DEF: I fasci gaussiani sono autosoluzioni dell'integrale di Sommerfeld in approssimazione parassiale.

Per parlare dei fasci gaussiani dobbiamo introdurre 2 strumenti:

1. Queste autosoluzioni mantengono la propria forma quando attraversano qualsiasi sistema ottico, anche se questo contiene degli elementi ottici discreti come lenti o specchi. Pertanto, abbiamo bisogno di una descrizione matematica valida per ogni sistema ottico in approssimazione parassiale e questa descrizione ci viene data dall'OTTICA MATRICIALE (matrix optics), cioè un particolare formalismo matematico che permette di ricavare la traiettoria di un fascio luminoso (in approssimazione parassiale) all'interno di un sistema ottico.
2. Come secondo strumento, noi andremo a derivare una descrizione analitica della distribuzione del campo trasversale in approssimazione parassiale.

Un campo elettrico in approssimazione parassiale può essere scritto come

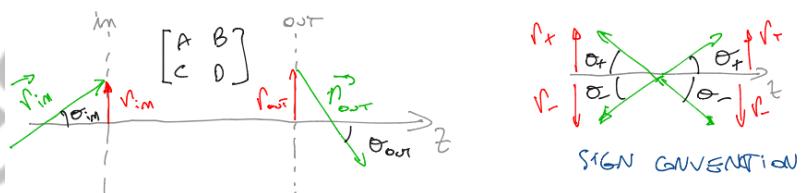
$$\tilde{E}(x, y, z) \simeq \tilde{U}(x, y, z) \cdot e^{-jkz}$$

dove \tilde{U} è una distribuzione trasversale lentamente variabile in direzione z e e^{-jkz} è il FATTORE DI ONDA PIANA.

1. APPROCCIO MATEMATICO ALL'OTTICA GEOMETRICA (OTTICA MATRICIALE)

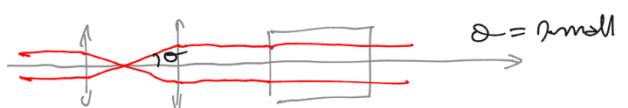
consideriamo un sistema ottico tra due piani e al fine di rappresentare il sistema in ottica matriciale, dobbiamo considerare due variabili in ingresso e due in uscita; quindi, in ingresso considereremo la posizione fascio in ingresso e l'angolo con cui il fascio entra nel sistema e in modo analogo in uscita considereremo la posizione del fascio di uscita e l'angolo con cui il fascio esce dal sistema. In approssimazione parassiale il sistema può essere rappresentato con la matrice ABCD, cioè la matrice per cui si ha

$$\begin{bmatrix} r_{out} \\ \theta_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{in} \\ \theta_{in} \end{bmatrix}$$



essendo in approssimazione parassiale l'angolo sarà sempre piccolo e pertanto possiamo approssimarne in questo modo

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{\Delta r}{\Delta z} = \frac{dr}{dz} \Rightarrow \theta = \frac{dr}{dz} = r'$$



dove Δr è il cambiamento di posizione verticale del fascio; quindi l'angolo può essere approssimato con la derivata prima della posizione rispetto del fascio rispetto a z .

La forma finale della rappresentazione matriciale del sistema pertanto è

$$\begin{bmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{bmatrix}$$

che è la RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE DEL SISTEMA OTTICO.

EX1: PROPAGAZIONE NELLO SPAZIO LIBERO

la posizione del fascio in uscita può essere scritta come

$$r_{out} = r_{in} + \Delta r$$

E sfruttando la legge di Snell della rifrazione possiamo scrivere

$$\sin \theta_t = \frac{n_0}{n_1} \sin \theta_{in}$$

dove $\sin \theta_{in} \approx \tan \theta_{in} = r'_{in}$ e

$$\Delta r = L \cdot \tan \theta_t \approx L \cdot \sin \theta_t = L \cdot \frac{n_0}{n_1} \cdot r'_{in}$$

Quindi possiamo scrivere la posizione del fascio in uscita e la sua derivata prima rispetto a z come

$$r_{out} = r_{in} + \Delta r = r_{in} + L \cdot \frac{n_0}{n_1} \cdot r'_{in}$$

$$r'_{out} = \sin \theta_{out} = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_t = \frac{n_1 n_0}{n_2 n_1} \cdot r'_{in} = \frac{n_0}{n_2} \cdot r'_{in}$$

Quindi otteniamo la seguente rappresentazione matriciale

$$\begin{bmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \cdot \frac{n_0}{n_1} \\ 0 & \frac{n_0}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{bmatrix}$$

che è la RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE DELLA PROPAGAZIONE NELLO SPAZIO LIBERO.

REMARK: se prendiamo il determinante della matrice

$$\det M = |M| = \begin{vmatrix} 1 & L \cdot \frac{n_0}{n_1} \\ 0 & \frac{n_0}{n_2} \end{vmatrix} = \frac{n_0}{n_2}$$

Questo è un risultato generale, cioè è vero per ogni sistema rappresentato in questo modo.

EX2: LENTE POSITIVA (SOTTILE)

Essendo la lente sottile, possiamo considerare il piano in ingresso e quello in uscita coincidenti.

Il fascio in ingresso che parte da una sorgente distante p dalla lente sarà concentrato su un punto a distanza q dalla stessa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

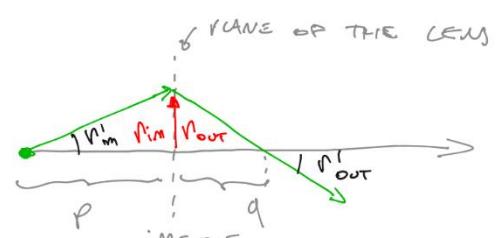
dove f è la distanza focale della lente.

Siccome $r_{in} = r_{out}$, $r'_{in} = \frac{r_{in}}{p}$ e $r'_{out} = -\frac{r_{in}}{q}$, possiamo scrivere

$$r'_{in} - r'_{out} = \frac{r_{in}}{p} + \frac{r_{in}}{q} = \frac{1}{f} \cdot r_{in} \Rightarrow r'_{out} = -\frac{1}{f} r_{in} + r'_{in}$$

Quindi otteniamo la seguente rappresentazione matriciale

$$\begin{bmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{bmatrix}$$

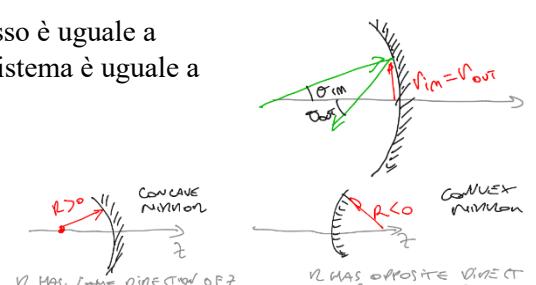


EX3: SPECCHIO SFERICO

Come nel caso della lente positiva sottile, la posizione del fascio in ingresso è uguale a quella del fascio in uscita $r_{in} = r_{out}$, quindi la matrice ABCD di questo sistema è uguale a quella della lente

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$

dove $f = \frac{R}{2}$, in cui R è il raggio di curvatura dello specchio.



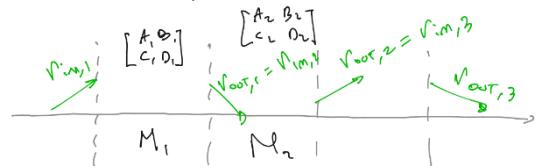
PROPRIETÀ 1: CASCATA DI DIVERSI SISTEMI OTTICI (o ELEMENTI)

Consideriamo ad esempio 3 sistemi in cascata.

Possiamo scrivere la rappresentazione matriciale per questo sistema complessivo facendo il prodotto delle matrici ottiche dei sistemi in ordine inverso, cioè partendo dall'ultima ad arrivare alla prima

$$\begin{bmatrix} r_{out,3} \\ r'_{out,3} \end{bmatrix} = M_N \cdot M_{N-1} \cdots M_2 \cdot M_1 \begin{bmatrix} r_{in,1} \\ r'_{in,1} \end{bmatrix}$$

dove N è il numero di sistemi ottici nella cascata.

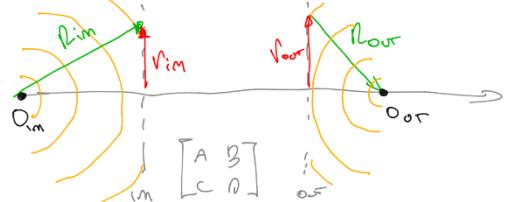


PROPRIETÀ 2: TRASFORMAZIONE DI FRONTI D'ONDA SFERICI

Il raggio di curvatura dei fronti d'onda sferici in uscita è

$$R_{out} = \frac{AR_{in} + B}{CR_{in} + D}$$

- $R > 0$ se i raggi divergono dall'asse z
- $R < 0$ se i raggi convergono sull'asse z



PROPRIETÀ 3: MATRICE DI PROPAGAZIONE INVERTITA

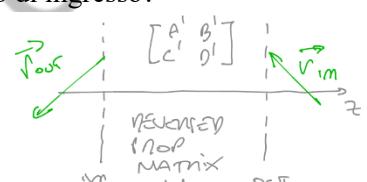
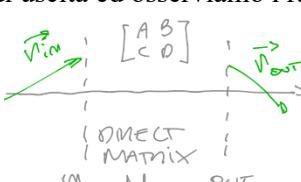
Cosa succede se entriamo nel sistema dal piano di uscita ed osserviamo i raggi sul piano di ingresso?

La MATRICE DI PROPAGAZIONE

INVERTITA è

$$M_i = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

Quindi $A' = D$, $B' = B$, $C' = C$, $D' = A$.



2. DESCRIZIONE ANALITICA DELLA DISTRIBUZIONE DEL CAMPO TRASVERSALE IN APPROXIMAZIONE PARASSIALE

Come abbiamo già anticipato, in approssimazione parassiale possiamo dividere la dipendenza spaziale del campo dalla direzione di propagazione z in due termini:

$$\tilde{E}(x, y, z) = e^{-jkz} \cdot \tilde{U}(x, y, z)$$

dove e^{-jkz} è il FATTORE DI ONDA PIANA e $\tilde{U}(x, y, z)$ è l'INVILUPPO (che è una funzione complessa che varia lentamente lungo z).

Ovviamente questo campo elettrico deve essere soluzione all'equazione di Helmotz:

$$(\nabla^2 + k^2)\tilde{E}(x, y, z) = 0$$

Possiamo dividere l'operatore ∇^2 in 2 componenti

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

dove $\nabla_\perp^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}$ che è detto OPERATORE NABLA-QUADRO TRASVERSALE.

Quindi l'equazione di Helmotz diventa

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\delta^2}{\delta z^2} + k^2 \right) e^{-jkz} \cdot \tilde{U}(x, y, z) = 0$$

Sviluppando le derivate parziali seconde possiamo semplificare l'espressione e arrivare a

$$\nabla_\perp^2 \tilde{U}(x, y, z) - 2jk \frac{\delta \tilde{U}(x, y, z)}{\delta z} + \frac{\delta^2 \tilde{U}(x, y, z)}{\delta z^2} = 0$$

dove, siccome l'inviluppo varia lentamente rispetto a z , possiamo dire che $\frac{\delta^2 \tilde{U}(x, y, z)}{\delta z^2} \ll 2jk \frac{\delta \tilde{U}(x, y, z)}{\delta z}$ e quindi possiamo trascurare l'ultimo termine e scrivere l'EQUAZIONE DI HELMOTZ IN APPROXIMAZIONE PARASSIALE semplicemente come

$$\nabla_\perp^2 \tilde{U}(x, y, z) - 2jk \frac{\delta \tilde{U}(x, y, z)}{\delta z} = 0$$

Risolvendo questa equazione utilizzando lo stesso metodo usato da Sommerfeld, arriviamo allo stesso integrale di Sommerfeld.

Consideriamo un sistema ottico tra i piani di ingresso e di uscita, descritto dalla matrice ABCD (possibile perché ci troviamo in approssimazione parassiale).

Risolvendo l'equazione di Helmotz otteniamo che l'inviluppo della distribuzione di campo sul piano di uscita è data da

$$\tilde{U}(x, y, z) = \frac{j}{B\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(x_0, y_0, 0) e^{-jk[A(x_0^2 + y_0^2) + D(x^2 + y^2) - 2x_0 x - 2y_0 y]} dx_0 dy_0$$

che è l'**INTEGRALE DI SOMMERFELD IN APPROSSIMAZIONE PARASSIALE PER UN SISTEMA OTTICO ABCD** e rappresenta la trasformazione dell'inviluppo del campo in ingresso nell'inviluppo del campo d'uscita.

Noi cerchiamo una eigensolution del sistema, cioè vogliamo trovare l'inviluppo $\tilde{U}(x_0, y_0, 0)$ che preserva la propria forma dopo la propagazione, cioè tale per cui

$$\tilde{U}(x, y, z) = \tilde{U}(x_0, y_0, 0)\tilde{a}(z)$$

dove il fattore di moltiplicazione $\tilde{a}(z)$ rappresenta un termine di ampiezza e fase costante su (x, y) .

È dimostrabile che questa soluzione esiste se \tilde{U}_{in} è una distribuzione Gaussiana, cioè se

$$\tilde{U}(x_0, y_0, 0) = U_0 e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2q_0}}$$

dove $e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2q_0}}$ è una funzione Gaussiana su (x, y) e q_0 è un parametro complesso.

In questo caso, l'inviluppo del campo in uscita sarà

$$\tilde{U}(x, y, z) = \frac{U_0}{A + \frac{B}{q_0}} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2q_z}}$$

dove $q_z = \frac{Aq_0+B}{Cq_0+D}$. Quando abbiamo in ingresso una distribuzione Gaussiana, in uscita avremo sempre una

distribuzione Gaussiana in cui l'ampiezza è affetta dal sistema in questo modo $\frac{U_0}{A + \frac{B}{q_0}}$ e il parametro complesso ne è

affetto in questo modo $q_z = \frac{Aq_0+B}{Cq_0+D}$.

CONFRONTO DI UN CAMPO GAUSSIANO CON UN'ONDA SFERICA

Il campo elettrico di un'onda sferica può essere scritto come

$$\tilde{E}_s(x, y, z) = e^{-jkr}$$

dove consideriamo solo la componente spaziale, in cui $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{z^2}} \simeq z\left(1 + \frac{x^2+y^2}{2z^2}\right)$ dove in approssimazione parassiale possiamo approssimare i fronti di fase sferici in fronti di fase parabolici.

Quindi il campo elettrico sferico in approssimazione parassiale può essere scritto come

$$\tilde{E}_s(x, y, z) = e^{-jkr} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2z}}$$

E siccome in approssimazione parassiale la distanza di propagazione è pressoché identica al raggio di curvatura dell'onda sferica $z \simeq R$, possiamo scrivere

$$\tilde{E}_s(x, y, z) = e^{-jkr} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2R}}$$

che rappresenta l'**ONDA SFERICA IN APPROSSIMAZIONE PARASSIALE**, in cui $e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2R}} = \tilde{U}_s(x, y, z)$.

Quindi abbiamo

$$\tilde{U}_s(x, y, z) = e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2R}} \Rightarrow \text{inviluppo sferico}$$

$$\tilde{U}_g(x, y, z) = e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2q_z}} \Rightarrow \text{inviluppo gaussiano}$$

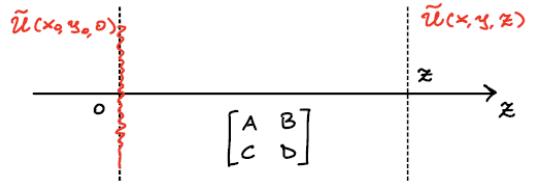
L'unica differenza tra questi due inviluppi è che per un'onda sferica il raggio di curvatura è un numero reale, mentre per l'inviluppo gaussiano il parametro q è complesso.

Segue che un fascio Gaussiano può essere considerato come un'onda sferica con un raggio di curvatura complesso!!! Siccome q è complesso possiamo dividerlo in una parte reale ed una immaginaria

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2}$$

dove R è il raggio di curvatura dei fronti di fase e w viene definito lo SPOT SIZE del fascio Gaussiano.

Così facendo possiamo riscrivere l'inviluppo gaussiano in questo modo



$$\tilde{U}_g(x, y, z) = \tilde{U}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2R}}$$

dove abbiamo sostituito $\tilde{U}_0 = \frac{U_0}{\frac{A+B}{q_0}}$ e $k = 2\pi/\lambda$.

Si conclude che possiamo considerare il fascio gaussiano come un'onda sferica, con la modulazione della modulazione trasversa del campo con una forma Gaussiana $\left(e^{-j\frac{x^2+y^2}{w^2}}\right)$.

Se grafichiamo l'ampiezza fase vediamo che

$$|\tilde{U}_g(x, y, z)| = U_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}$$

dove il termine w rappresenta la distanza dall'origine per la quale

$$\text{se } x^2 + y^2 = w^2 \Rightarrow |\tilde{U}_g(x, y, z)| = \frac{U_0}{e}$$

Per quanto riguarda la fase, possiamo rappresentare la distribuzione di fase del campo gaussiano

$$E_g(x, y, z) = e^{-jkz} e^{-jk\frac{x^2+y^2}{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}$$

come

$$\varphi(x, y, z) = k \cdot \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R} \right)$$

Se guardiamo alle superfici a fase costante, cioè ad esempio ai piani con fase massima abbiamo

$$\varphi_{MAX}(x, y, z) = m \cdot 2\pi$$

Quindi i PIANI CON FASE MASSIMA sono

$$z = -\frac{x^2 + y^2}{2R} + m\lambda$$

che sono PARABOLOIDI ROTAZIONALI ATTORNO ALL'ASSE z .

PROPAGAZIONE DI UN FASCIO GAUSSIANO NELLO SPAZIO LIBERO

Ricordiamo che il parametro complesso dopo la propagazione è $q_z = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$, mentre la matrice di propagazione nello spazio libero (free space: FS) in un mezzo omogeneo ($n_0 = n_1 = n_2 = 1$) è $M_{FS} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, quindi possiamo scrivere

$$q_z = \frac{q_0 + z}{0 + 1} = q_0 + z$$

quindi il parametro cresce linearmente con la distanza di propagazione.

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{q_z} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{1}{q_0 + z}$$

Se il raggio di curvatura iniziale $R(z=0) \rightarrow \infty$, cioè iniziamo la propagazione in $z=0$ con un fascio gaussiano che ha fronti di fase piani, cioè iniziamo con un parametro q_0 tale che

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{R(0)} - j \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \Rightarrow \frac{1}{q_0} = -j \frac{\lambda}{\pi w_0^2}$$

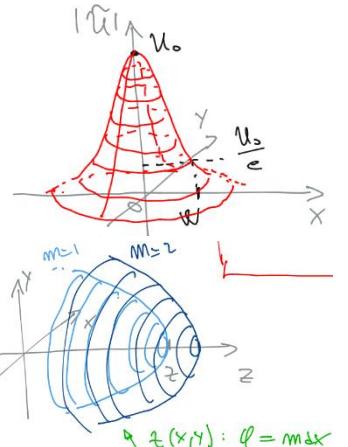
dove w_0 rappresenta il BEAM WAIST, cioè lo spot size che corrisponde a $R \rightarrow \infty$.

Se indichiamo $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ che chiamiamo DISTANZA DI RAYLEIGH DEL FASCIO GAUSSIANO, possiamo scrivere

$$q_0 = jz_R$$

Pertanto, potremo scrivere il parametro complesso dopo la propagazione come

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q_0 + z} = \frac{1}{(z + jz_R)} \cdot \frac{z - jz_R}{z - jz_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - j \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$



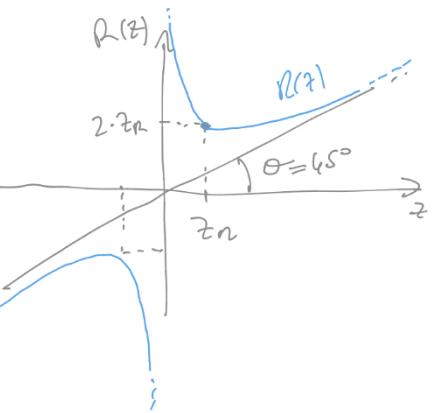
Quindi dopo la distanza di propagazione z nello spazio libero, il raggio di curvatura dei fronti di fase del fascio gaussiano può essere scritto come

$$R(z) = \frac{z}{z^2 + z_R^2} = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$

mentre lo spot size può essere scritto come

$$\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \Rightarrow w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$

- Se $z = 0 \Rightarrow R(0) \rightarrow \infty$
- Se $z = z_R \Rightarrow R(z_R) = 2z_R$ (raggio di curvatura minimo)
- Se $z \rightarrow \infty \Rightarrow R(z) \rightarrow z$



Per quanto riguarda lo spot size

- Se $z = 0 \Rightarrow w(z) = w_0$ (spot size minimo)
- Se $z \gg z_R \Rightarrow w(z) = w_0 \cdot \frac{z}{z_R}$

NOTA: Quindi, come possiamo vedere la distanza di Rayleigh agisce come discriminante tra onde piane e onde sferiche.

L'ANGOLO DI DIVERGENZA del fascio gaussiano è

$$\theta_d = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R} \cdot \frac{z}{z} \Rightarrow \theta_d = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

NOTA: i raggi gaussiani sono raggi con divergenza minima

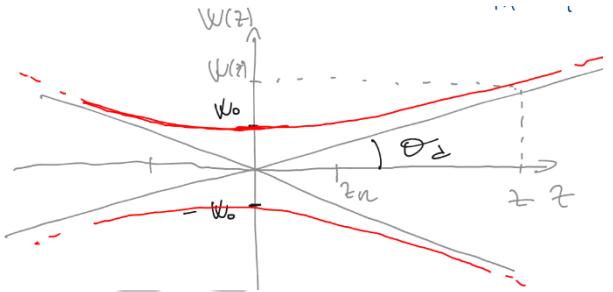
RIASSUNTO SUI FASCI GAUSSIANI

Il fascio gaussiano è simmetrico rispetto alla posizione del beam waist, cioè lo spot size minimo nel mezzo del beam gaussiano. Quindi il beam viene inizialmente concentrato e poi, una volta raggiunto il beam waist, inizia a divergere.

Nella regione 1, tra $-z_R$ e z_R , possiamo approssimare il beam gaussiano ad un'onda piana, perché in questa regione abbiamo

1. $\begin{cases} R(z) \rightarrow \infty \\ w(z) = w_0 \end{cases} \Rightarrow \text{ONDA PIANA}$

$$\text{RIC: } R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \text{ e } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$$



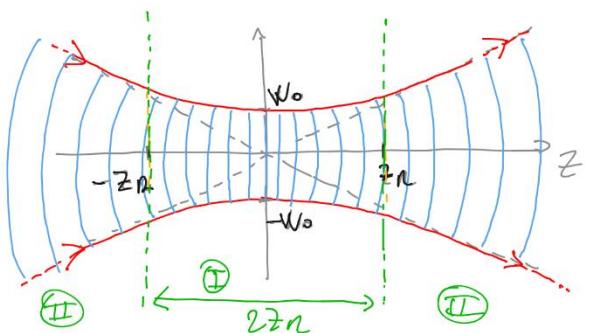
Nelle regioni 2, invece possiamo approssimare il beam gaussiano con un'onda sferica, in quanto abbiamo

2. $\begin{cases} R(z) \approx z \\ w(z) = \frac{w_0}{w_z} z \end{cases} \Rightarrow \text{ONDA SFERICA}$

REMARK: COEFFICIENTE DI AMPIEZZA E FASE

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(x, y, z) = \frac{U_0}{A + \frac{B}{q_0}} e^{jk \left(\frac{x^2 + y^2}{2\tilde{q}_z} \right)} \\ \text{propagazione nello spazio libero} \Rightarrow A = 1, B = z \\ \tilde{q}_0 = jz_R, \quad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \end{array} \right.$$

dove $\tilde{u}(z) = \frac{U_0}{A + \frac{B}{q_0}}$ e $\tilde{q}_z = \frac{A\tilde{q}_0 + B}{C\tilde{q}_0 + D}$.



Tenendo conto di tutte queste considerazioni possiamo scrivere

$$\tilde{\alpha}(z) = \frac{U_0}{1 - j \frac{z}{z_R}} = \frac{U_0}{\sqrt{q + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} e^{j \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)}$$

dove $U_0 / \sqrt{q + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$ è il termine che tiene in considerazione la

conservazione dell'energia e il termine di fase, cioè $\phi(z) = j \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$

può essere graficato come a fianco.

Quando la distanza di propagazione è più piccola di z_R la fase cambia linearmente da 0 a 45 gradi, mentre per $z \gg z_R$ abbiamo

$$\alpha(z) = U_0 \frac{z_R}{z} e^{j \frac{\pi}{2}}$$

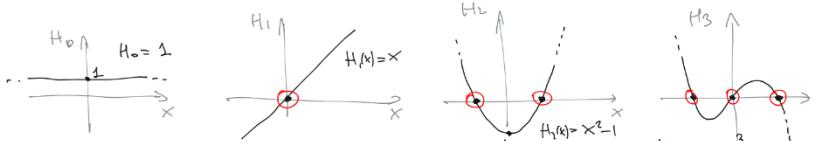
cioè lo sfasamento diventa lo stesso di un'onda sferica (che ha uno sfasamento di 90 gradi rispetto al dipolo oscillante che la genera).

REMARK: RAGGI DI HERMITE-GAUSS

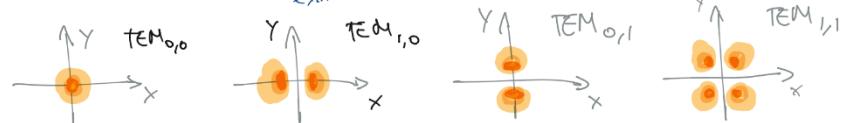
the most general eigen-solution for the S. Propag equation
use gaus functions multiplied by Hermite-Polynomials (normalized)*

$$U_{e,m}(x, y, z) = \frac{U_0}{W(z)} H_e \left[\frac{x}{W(z)} \right] H_m \left[\frac{y}{W(z)} \right] e^{-\frac{x^2+y^2}{W(z)^2}} e^{-j k \frac{x^2+y^2}{2 W(z)^2}} e^{j(1+e+m)\phi(z)}$$

e, m are the numbers of zeros corresponding to the degree of the Hermite polynomials:



GAUSSIAN MODES: TEM_{e,m}



RISONATORI OTTICI

(PRINCIPLES OF LASERS CHAP5)

Caratteristiche principali dei risonatori ottici sono

1. I RISONATORI OTTICI SONO RISONATORI APERTI

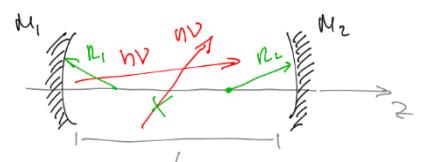
(a differenza dei risonatori a microonde per esempio)

Questa è un'importante conseguenza dei modi ottici che possono risuonare all'interno del risonatore.

Se il risonatore è aperto, l'energia propagherà solo in prossimità dell'asse ottico del risonatore, cioè con una direzione di propagazione molto vicina all'asse ottico.

Quindi, il fatto che il risonatore sia aperto:

- Limita il numero di modi ottici consentiti, dove per modi si intende le forme della distribuzione del campo trasversale.
- La direzione di propagazione della luce deve essere vicino all'asse ottico $z \rightarrow$ questo comporta che possiamo studiare il risonatore ottico in approssimazione parassiale.



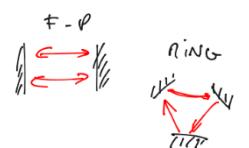
2. CLASSIFICAZIONE GEOMETRICA DEI RISONATORI

I risonatori possono essere classificati da un punto di vista geometrico per

○ DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

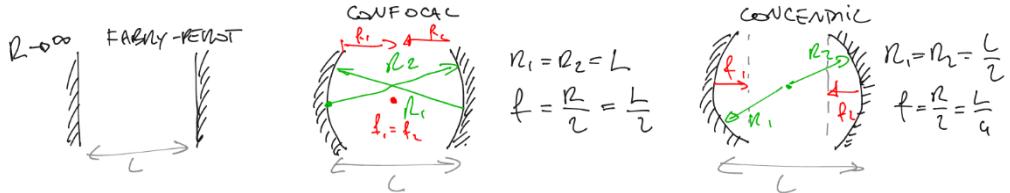
- BIDIREZIONALE → Fabry-Perot
- UNIDIREZIONALE → risonatore in configurazione ad anello

- RAGGIO DI CURVATURA (risonatori simmetrici se $R_1 = R_2$)



(o il rapporto tra il raggio di curvatura e la separazione degli specchi)

- Configurazione Fabry-Perot $\rightarrow R \rightarrow \infty$
- Configurazione confocale $\rightarrow R_1 = R_2 = L$ e $f = \frac{R}{2} = \frac{L}{2}$
→ i due specchi condividono lo stesso punto focale
- Configurazione concentrica $\rightarrow R_1 = R_2 = \frac{L}{2}$ e $f = \frac{R}{2} = \frac{L}{4}$
→ i due specchi condividono lo stesso centro di curvatura



3. CLASSIFICAZIONE DEI RISONATORI IN TERMINI DI STABILITÀ

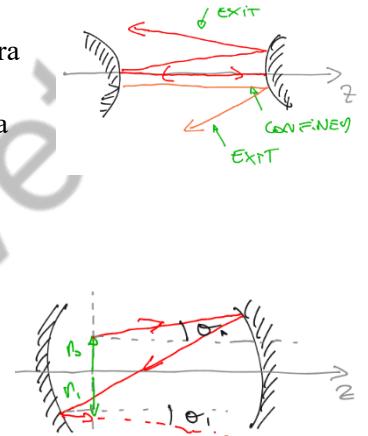
- RISONATORE INSTABILE:

se il generico raggio di luce uscirà dal risonatore dopo alcuni rimbalzi tra gli specchi. Un esempio emblematico è un risonatore composto da due specchi complessi in cui il raggio si propaga su una direzione diversa da quella dell'asse ottico (se si propagasse esattamente sull'asse il raggio rimarrebbe confinato).

- RISONATORE STABILE:

è un risonatore per cui esistono raggi che vengono rimbalzati al di fuori che interi set di raggi che rimangono confinati all'interno del risonatore durante la propagazione (per sempre, non importa quante volte rimbalzeranno sugli specchi)

Se consideriamo il piano β all'interno del risonatore e un raggio che ha origine con una posizione r_0 e un angolo $\theta_0 = r'_0$ rispetto l'asse ottico, questo una volta essere stato riflesso dallo specchio M2 passerà nuovamente per il piano β con una posizione r_1 , colpirà lo specchio M1 e verrà riflesso da questo con un angolo $\theta_1 = r'_1$ rispetto all'asse ottico.



Pertanto, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{bmatrix}$$

Dopo n rimbalzi all'interno del risonatore abbiamo

$$\begin{bmatrix} r_n \\ r'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{bmatrix}$$

Come possiamo definire la condizione di stabilità?

Possiamo usare il TEOREMA DI SYLVESTER, il quale asserisce che

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} A \sin(n\theta) - \sin\{(n-1)\theta\} & B \sin(n\theta) \\ C \sin(n\theta) & D \sin(n\theta) - \sin\{(n-1)\theta\} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \cos \theta = \frac{A+D}{2} \right.$$

Siccome

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(n\theta) = \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{2j} \\ \text{il risonatore per rimanere stabile } A_n, B_n, C_n, D_n \text{ devono rimanere finiti anche se } n \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

→ se θ è reale $\Rightarrow -1 < \sin(n\theta) < 1$, altrimenti divergerà esponenzialmente al crescere di n .

→ per avere θ reale dobbiamo avere $-1 < \cos \theta < 1$

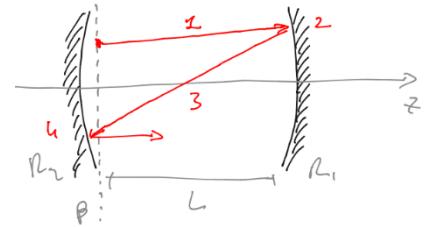
Si conclude che siccome $\cos \theta = \frac{A+D}{2}$, la CONDIZIONE DI STABILITÀ BASATA SULLA MATRICE DI ROUND-TRIP DEL RISONATORE è

$$-1 < \frac{A+D}{2} < 1$$

Visualizziamo questa condizione di stabilità per un risonatore a 2 specchi (R_1 e R_2).

Abbiamo

- 1: propagazione nello spazio libero
- 2: rimbalzo sullo specchio R_1
- 3: propagazione nello spazio libero
- 4: rimbalzo sullo specchio R_2



La matrice di round-trip complessiva, come sappiamo, inizia dall'ultima situazione

$$\mathcal{M}_{RT} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{II} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{bmatrix}}_{III} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{IV} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{2}{R_2} & -\frac{2}{R_1}L + 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{2}{R_1} & -\frac{2}{R_1}L + 1 \end{bmatrix}}_{II} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

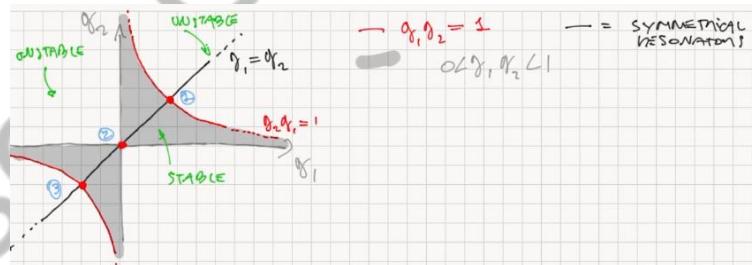
Dove $A = 1 - \frac{2}{R_1}L$ e $D = -\frac{2}{R_1}L \rightarrow \frac{A+D}{2} = 2\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right) - 1 = 2g_1g_2 - 1$

Dove $g_1 = \left(1 - \frac{L}{R_1}\right)$ e $g_2 = \left(1 - \frac{L}{R_2}\right)$ sono i COEFFICIENTI GEOMETRICI DEL RISONATORE.

Quindi per avere stabilità, cioè $-1 < \frac{A+D}{2} < 1$, dobbiamo avere

$$0 < g_1g_2 < 1$$

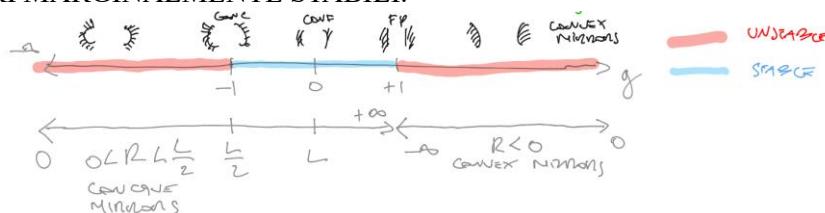
I coefficienti geometrici del risonatore dipendono da 2 parametri e pertanto possono essere graficati su un piano cartesiano.



Nel caso di risonatore simmetrico ($g_1 = g_2 = g$) abbiamo 3 possibilità:

1. $g = 1 \Rightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow$ Fabry-Perot
2. $g = 0 \Rightarrow R = L \Rightarrow$ configurazione confocale
3. $g = -1 \Rightarrow R = \frac{L}{2} \Rightarrow$ configurazione concentrica

Queste 3 configurazioni sono posizionate ai confini della regione di stabilità e pertanto sono anche conosciuti come RISONATORI MARGINALMENTE STABILI.



AUTOMODI (EIGENMODES) ED AUTOVALORI DI UN RISONATORE STABILE