

Esercizi Vacanze di Natale – Programmazione in Python

1. Classe con metodi – Contatore di progressione aritmetica

Crea una classe Python chiamata `ProgressioneAritmetica` che rappresenta una progressione aritmetica definita da:

- un valore iniziale a_0 ;
- una ragione r .

La classe deve avere:

- un costruttore che riceve a_0 e r ;
- un metodo `termine(n)` che restituisce il valore del termine di indice n della progressione;
- un metodo `somma(n)` che restituisce la somma dei primi n termini;
- un metodo `successivo()` che restituisce il termine successivo della progressione rispetto all'ultimo calcolato;
- un metodo `reset()` che riporta la progressione al termine iniziale.

Spiegazione matematica:

In una progressione aritmetica:

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

e la somma dei primi n termini è:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_0 + (n-1)r)$$

Nota sui valori di n :

Il parametro n rappresenta l'indice del termine o il numero di termini considerati. Si assume che:

- n sia un **intero**;
- $n \geq 0$;
- l'indice $n = 0$ corrisponda al termine iniziale a_0 .

Valori negativi di n non hanno significato nel contesto della progressione aritmetica e non devono essere considerati.

Nota sullo stato dell'oggetto:

L'oggetto `ProgressioneAritmetica` deve mantenere al suo interno un **attributo aggiuntivo** che rappresenta il valore corrente della progressione.

Questo attributo:

- viene inizializzato al valore a_0 nel costruttore;
- viene aggiornato ogni volta che il metodo `successivo()` viene chiamato;
- viene riportato al valore iniziale a_0 quando viene chiamato il metodo `reset()`.

In questo modo la progressione può essere percorsa termine dopo termine, senza dover specificare ogni volta l'indice n .

ESEMPIO:

Si consideri una progressione aritmetica con:

$$a_0 = 3 \quad r = 2$$

I primi termini della progressione sono:

$$3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

- `termine(0)` → 3
- `termine(1)` → 5
- `termine(4)` → 11
- `somma(4)` → 24 (somma di $3 + 5 + 7 + 9$)
- `successivo()` → 3 (prima chiamata)
- `successivo()` → 5 (seconda chiamata)
- `reset()` riporta il valore corrente a 3

2. Funzione 1 – Somma dei divisori (matematica)

Crea una funzione in Python `somma_divisori(n)` che riceve un intero positivo n e restituisce la somma di tutti i suoi divisori positivi (inclusi 1 e n).

ESEMPIO:

$$n = 12 \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.$$

3. Funzione 2 – Conteggio coppie con MCD = 1

Crea una funzione in Python `conta_coppie_coprime(N)` che riceve un intero positivo N e restituisce il numero di **coppie ordinate** (a, b) tali che:

$$1 \leq a \leq N \quad \text{e} \quad 1 \leq b \leq N$$

e per le quali il **Massimo Comune Divisore** (MCD) tra a e b è uguale a 1.

Due numeri sono detti **coprime** se non hanno divisori comuni maggiori di 1 (cioè il loro unico divisore comune è 1).

Le coppie sono **ordinate**, quindi (a, b) e (b, a) sono considerate **coppie diverse** se $a \neq b$.

La funzione deve:

- considerare tutte le possibili coppie (a, b) con a e b compresi tra 1 e N ;
- verificare per ciascuna coppia se a e b sono coprime;
- contare quante coppie soddisfano questa proprietà;
- restituire il conteggio finale.

ESEMPIO:

Se $N = 3$, le coppie possibili sono:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

Tra queste, sono coprima le coppie:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$$

La coppia (2, 2) non è coprima perché $\gcd(2, 2) = 2$, la coppia (3, 3) non è coprima perché $\gcd(3, 3) = 3$.
(N.B. $\gcd = \text{Greatest Common Divisor}$) Quindi la funzione deve restituire:

$$\text{output} = 7$$

4. **Funzione 3 – Approssimazione di π con somma finita (doppio for non necessario)**

Crea una funzione in Python `pi_leibniz(k)` che riceve un intero positivo k e restituisce l'approssimazione di π usando la serie di Leibniz:

$$\pi \approx 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

usando esattamente k termini della somma (cioè i primi k addendi).

ESEMPIO:

$$k = 1 \rightarrow 4 \quad k = 2 \rightarrow 4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2.6666\dots$$

Riposatevi e svolgete un po' di esercizi ogni tanto, senza pressione, magari ascoltando della musica o guardando un film o serie tv preferita nel mentre.

Cosa più importante: festeggiate e divertitevi!

Buon Natale e Buon Anno Nuovo a voi e alle vostre famiglie!