Progetto Fondamenti di Automatica

Traccia n° 106 (A.A. 2021-22)

Francesco Lazzaro

Matricola 220810

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{23}{9} & -\frac{188}{27} & -\frac{100}{27} & -\frac{98}{27} \\ \frac{23}{9} & \frac{215}{27} & \frac{127}{27} & \frac{125}{27} \\ -\frac{46}{9} & -\frac{322}{27} & -\frac{173}{27} & -\frac{169}{27} \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. i modi naturali del sistema;
2. la risposta libera nello stato nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento del sistema, i suoi poli e zeri;
5. la risposta all'impulso del sistema;
6. la risposta al gradino ed il suo grafico;
7. la risposta forzata al segnale periodico $u(t) = \sin(t)\,1(t)$;
8. un possibile modello i/u a partire dalla funzione di trasferimento ottenuta;
9. determinare lo stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino coincide con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria).

1.0 Analisi di un sistema LTI-TC

Nell'esercizio proposto, ci si propone di condurre un'analisi approfondita su un sistema lineare, stazionario e a tempo continuo. Tale sistema è caratterizzato da una rappresentazione ingresso/stato/uscita. Tra i parametri forniti è possibile identificare tre matrici di rilevanza cruciale:

- la matrice A, che costituisce la matrice dinamica del sistema;
- la matrice B, che rappresenta la matrice di ingresso del sistema;
- la matrice C, che indica la matrice di uscita del sistema.

Occorre sottolineare che il sistema in esame è caratterizzato da quattro variabili di stato, il che implica che il sistema presenta una natura di tipo SISO (single input – single output) e richiede una specifica approfondita analisi al fine di comprenderne le peculiarità e i comportamenti intrinseci.

1.1 Ricerca dei modi naturali del sistema

Nei sistemi lineari a tempo continuo (LTI-TC), i modi naturali rappresentano i comportamenti intrinseci del sistema quando viene applicato un ingresso, attraverso una combinazione lineare nella risposta transitoria e a regime. I modi naturali sono determinati dagli autovalori della matrice dinamica A del sistema, attraverso la ricerca degli zeri del polinomio caratteristico. In base al tipo di autovalori si hanno tre casi:

- Se gli autovalori della matrice A sono reali e distinti, ogni autovalore rappresenta un modo naturale indipendente. Ogni modo naturale rappresenta un'oscillazione caratteristica del sistema nel tempo. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$e^{\lambda_i t}$$

- Quando gli autovalori sono complessi e coniugati, si ottengono due modi naturali correlati. Questi modi rappresentano oscillazioni sinusoidali complesse nel tempo, che influenzano la risposta del sistema. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$e^{\sigma t} cos(\omega t) \text{ e } e^{\sigma t} sin(\omega t)$$

- Nel caso in cui gli autovalori siano reali non distinti, si ha un unico modo naturale che provoca una risposta oscillante del sistema senza smorzamento nel tempo. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$e^{\lambda_i t} \frac{t^{\eta}}{\eta!} \text{ con } 0<\eta<n$$

  Dove "n" è la dimensione della matrice dinamica del sistema.

I modi naturali sono funzioni definite per istanti di tempo $t \geq 0$ per questo prendono il nome di "right-sided". Conoscendo la natura della funzione esponenziale su un orizzonte di lungo periodo i modi naturali tenderanno a zero e convergeranno se la parte reale degli autovalori associati è strettamente negativa, divergeranno altrimenti.
La comprensione dei modi naturali è essenziale per analizzare il comportamento dinamico dei sistemi LTI-TC. Forniscono informazioni sulle caratteristiche oscillatorie del sistema, che possono essere utili per la progettazione e il controllo dei sistemi in vari settori ingegneristici.

Nell'esercizio preso in esame la matrice A genera:

- Un autovalore reale e distinto
- Un autovalore con molteplicità algebrica pari a 3

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{1}{3}$$

Poiché è presente un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno un primo passo è quello di determinare la sua molteplicità geometrica, per poter verificare la diagonalizzabilità della matrice A. Per determinare quindi la molteplicità geometrica si può calcolare la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore, ovvero:

$$dim(Ker(A - \lambda I))$$

$$\left\{\left\{-\frac{4}{15}, \frac{1}{6}, -\frac{17}{15}, 1\right\}\right\}$$

La molteplicità geometrica risulta essere pari ad uno, pertanto la matrice non è diagonalizzabile e per proseguire nell'analisi dei modi naturali del sistema si deve ricorrere ad una particolare forma canonica che generalizza il concetto di forma canonica diagonale, ovvero la forma di Jordan. I blocchi di Jordan sono matrici quadrate che hanno l'autovalore corrispondente sulla diagonale e uno o più elementi unitari sopra la diagonale. Questi blocchi forniscono informazioni sulla struttura degli autospazi associati all'autovalore, consentendo di comprendere meglio il comportamento del sistema.
La forma di Jordan della matrice A è:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Tale matrice è composta da due blocchi di Jordan, il primo composto da un unico mini-blocco ovvero l'autovalore reale e distinto -2, il secondo, composto sempre da un unico mini-blocco, in quanto la molteplicità geometrica è pari ad uno, di dimensione 3x3, data dalla molteplicità algebrica dell'autovalore -⅓.

Dall'analisi della matrice di Jordan si può dedurre che i modi naturali indipendenti che l'autovalore -⅓ genera sono tre, ovvero:

$$e^{-\frac{1}{3}t} \qquad t \cdot e^{-\frac{1}{3}t} \qquad \frac{t^2}{2!} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

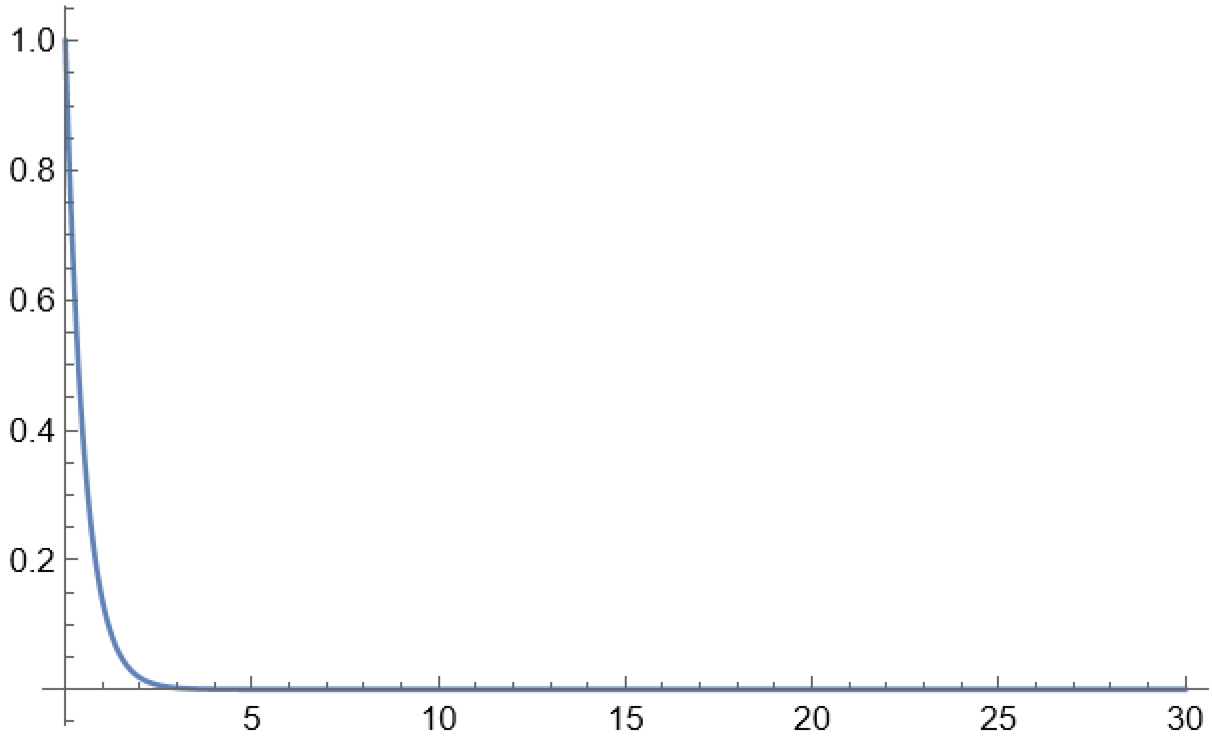
Come ulteriore prova, o metodo alternativo, è possibile ottenere il numero di modi naturali indipendenti generati dall'autovalore osservando la molteplicità algebrica di tale autovalore nel polinomio minimo.
Questa corrisponde infatti al grado del fattore lineare associato all'autovalore ripetuto. Questo grado indica il numero di modi naturali indipendenti generati.
In questo caso il polinomio minimo è uguale al polinomio caratteristico:

$$\frac{1}{27}(2 + \lambda)(1 + 3\lambda)^3$$

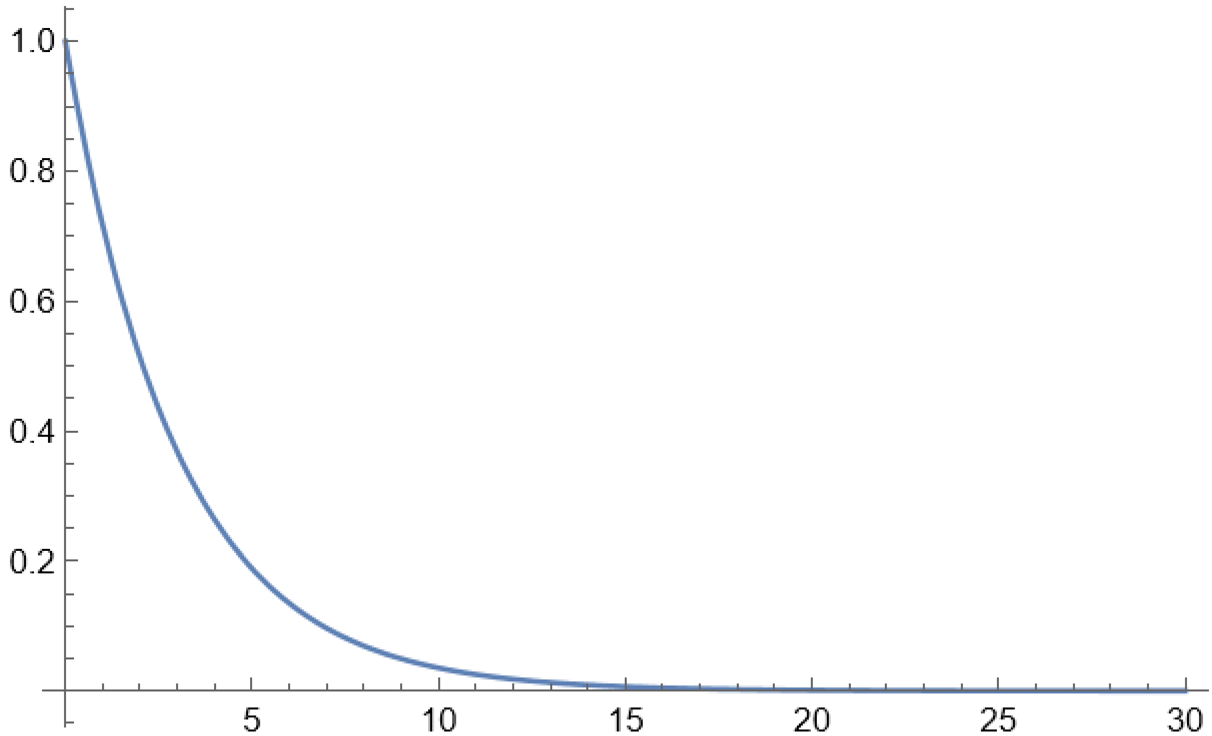
Confermando quanto scritto precedentemente.

In conclusione i modi naturali del sistema sono:

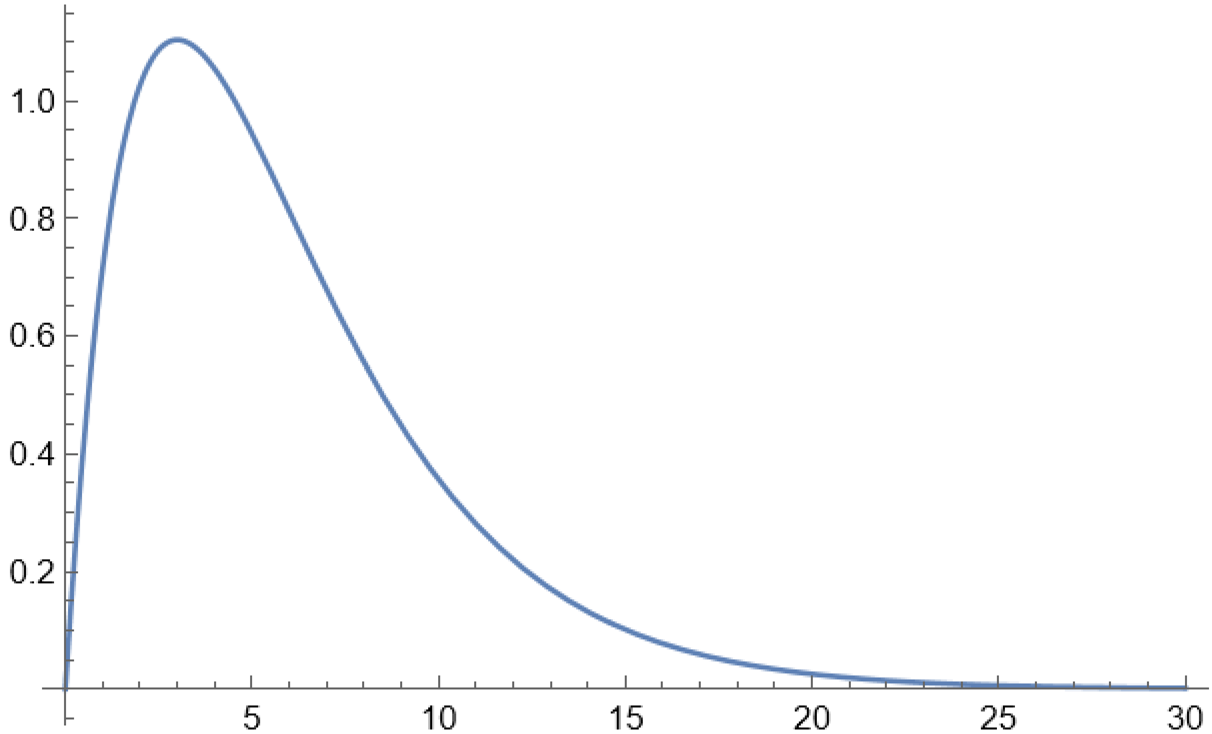
- e^{-2t}



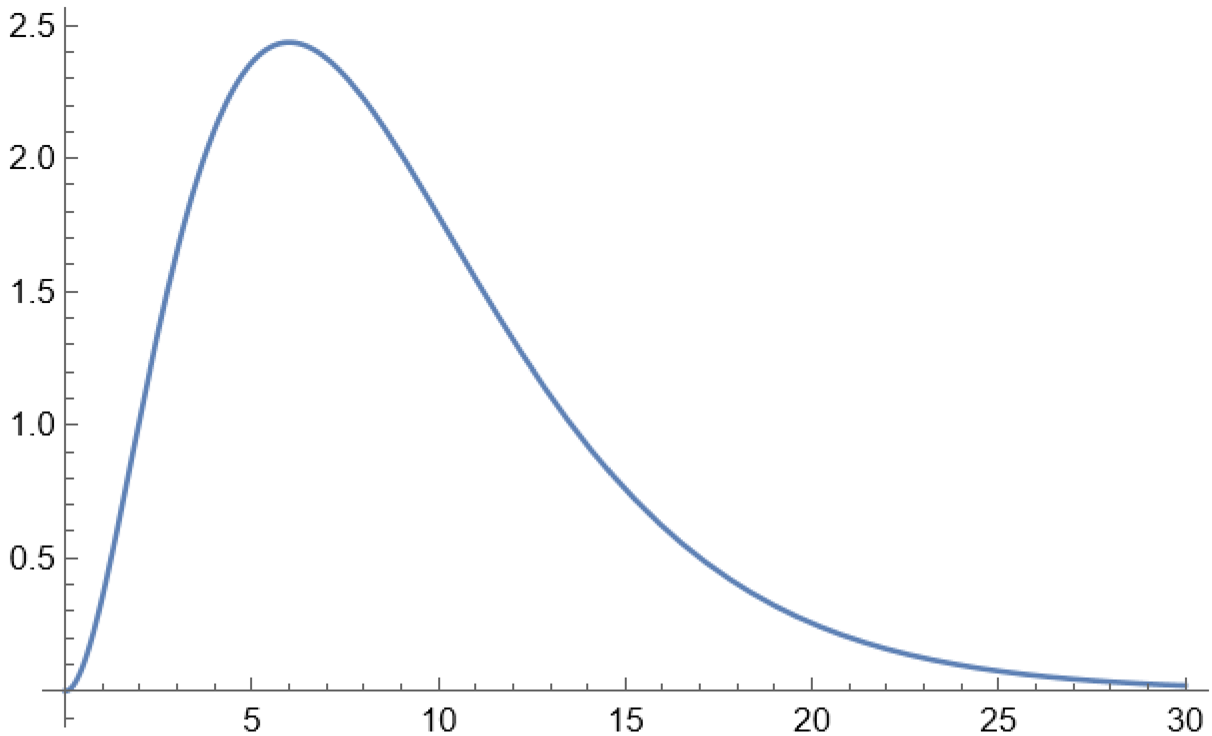
- $e^{-\frac{1}{3}t}$



- $t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$



- $\frac{t^2}{2!} \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$



I modi naturali ottenuti hanno tutti e quattro come argomento della funzione esponenziale un numero negativo, pertanto per $t \rightarrow \infty$ questi tenderanno a zero.

1.2 Analisi della risposta libera nello stato

La risposta nello stato di un qualsiasi sistema dinamico lineare stazionario è data dalla somma di due quantità, la risposta libera e la risposta forzata dello stato. Essa rappresenta l'evoluzione nel tempo delle variabili di stato del sistema quando non è presente un ingresso esterno.
L'equazione generale per descrivere la risposta libera nello stato di un sistema LTI-TC è:

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0$$

Poiché utilizzare direttamente la matrice dinamica A porta a delle complicazioni sul lato analitico, si può utilizzare la matrice nella forma di Jordan, simile ad A attraverso una matrice T_j di cambiamento di base:

$$A \cdot T_j = T_j \cdot A_j$$

$$e^{At} \cdot T_j = T_j \cdot e^{A_j t}$$

$$e^{At} = T_j \cdot e^{A_j t} \cdot T_j^{-1}$$

$$x(t) = T_j \cdot e^{A_j t} \cdot T_j^{-1} \cdot x_0$$

Rinomino $z_0 = T_j^{-1} \cdot x_0$ che rappresenta un vettore stato iniziale ma visto da una prospettiva diversa (x_0 è la base canonica) della base degli autovettori destri di A. Si ottiene:

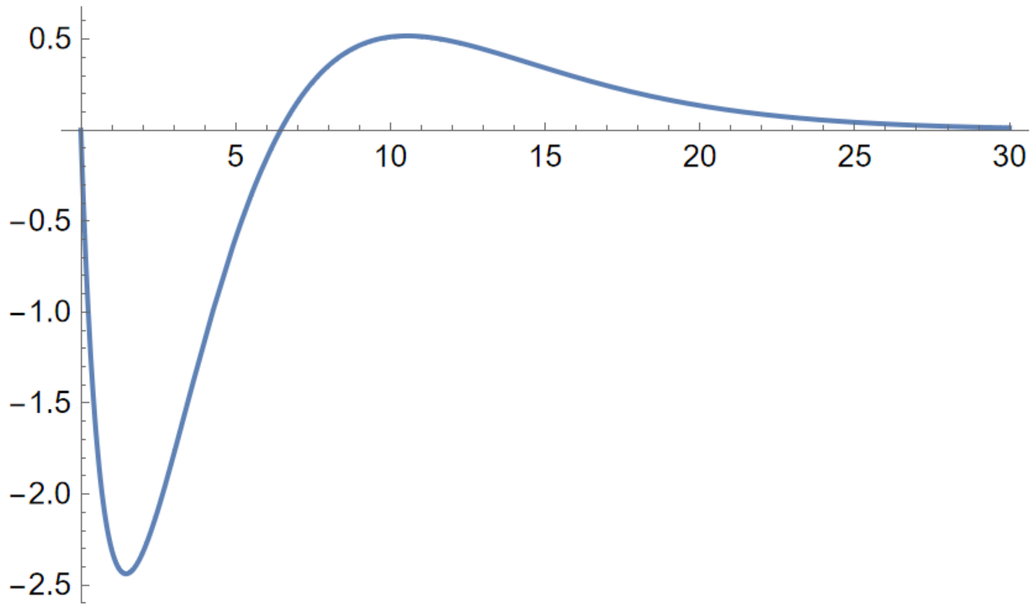
$$\begin{pmatrix} \frac{17}{25} \\ -\frac{17}{25} \\ \frac{32}{15} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si osserva che nessun elemento si annulla, pertanto tutti e quattro i modi naturali saranno presenti nella risposta libera. Considerando lo stato iniziale dell'esercizio, la risposta libera nello stato sarà determinata come segue:

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}\left(918+e^{5t/3}\left(207-970t+100t^2\right)\right)}{1125} \\ \frac{1}{450} e^{-2t}\left(-612+e^{5t/3}\left(612+130t-25t^2\right)\right) \\ \frac{e^{-2t}\left(1989+e^{5t/3}\left(-1989-2435t+425t^2\right)\right)}{1125} \\ \frac{1}{75} e^{-2t}\left(51+e^{5t/3}\left(-51+160t-25t^2\right)\right) \end{pmatrix}$$

Esempio di una rappresentazione grafica di una componente della risposta libera:

```
Plot[x1[t][[3]], {t, 0, 30}, PlotRange → All]
```



1.3 Analisi di particolari configurazioni dello stato iniziale

Per ottenere una risposta libera che sia combinazione lineare di determinati modi naturali si deve considerare uno stato iniziale che sia una combinazione lineare delle colonne di T_j.

Per selezionare solo il modo naturale collegato al primo autovalore reale scelgo come stato iniziale la prima colonna di T_j moltiplicata per un numero reale, ad esempio 5:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calcolando z_0 si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nella risposta libera apparirà dunque un solo modo naturale e avrà questa forma:

$$\begin{pmatrix} 6\,e^{-2t} \\ -10\,e^{-2t} \\ 13\,e^{-2t} \\ 5\,e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Se si vuole invece selezionare uno dei modi naturali generato dal secondo autovalore si può ad esempio prendere in considerazione la terza colonna di T_j ,moltiplicata per -10:

$$\begin{pmatrix} -\frac{22}{5} \\ -1 \\ \frac{19}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolando z_0 si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nella risposta libera apparirà dunque un solo modo naturale e avrà questa forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{15}\,e^{-t/3}\,(-33+20\,t) \\ -\frac{1}{3}\,e^{-t/3}\,(3+5\,t) \\ \frac{1}{15}\,e^{-t/3}\,(57+170\,t) \\ -10\,e^{-t/3}\,t \end{pmatrix}$$

1.4 Funzione di Trasferimento del sistema

La funzione di trasferimento per un sistema lineare tempo-invariante (LTI) è una descrizione matematica del comportamento del sistema. È una funzione razionale che collega la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema alla trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema.
La trasformata di Laplace è un'operazione matematica che associa una funzione di una variabile reale (nel dominio del tempo) a una funzione di una variabile complessa. Essa è ampiamente utilizzata nell'analisi dei sistemi lineari a tempo continuo.
La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$ è denotata solitamente con la lettera $F(s)$ o $L[f(t)]$, dove s è una variabile complessa. La trasformata di Laplace di $f(t)$ è definita come:

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

e presenta varie proprietà utili che semplificano l'analisi dei sistemi.

La funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Dove $Y(s)$ è la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema e $U(s)$ è la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema.
Per procedere al calcolo della FdT attraverso i parametri del sistema si utilizza la formula:

$$G(s) = C \cdot (s \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B + D$$

In questo caso $D = 0$ e $n = 4$, ovvero la dimensione della matrice dinamica del sistema.
La Funzione di Trasferimento del sistema risulta essere:

$$\frac{27}{(2+s)\ (1+3\,s)^3}$$

I poli e gli zeri della funzione di trasferimento sono i valori di s in cui si annullano rispettivamente il denominatore e il numeratore della funzione. I poli e gli zeri influenzano il comportamento del sistema, in particolare i poli determinano la stabilità del sistema, mentre gli zeri influenzano la risposta in frequenza del sistema.
In questo caso non sono presenti zeri, mentre i numeri complessi che annullano il denominatore detti appunto poli di $G(s)$ sono:

$$\left\{\{s \to -2\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

Una prima osservazione che si può fare una volta ottenuti i poli della FdT riguarda il concetto di stabilità del sistema. Se i poli di un sistema sono tutti numeri complessi con parte reale negativa (si trovano a sinistra del piano complesso), come in questo caso, ciò indica che il sistema è asintoticamente stabile. Un sistema è asintoticamente stabile se, a seguito di condizioni iniziali o di un ingresso, l'uscita tende a convergere a un valore stabile nel tempo ovvero il sistema ritorna a uno stato di equilibrio senza oscillazioni o divergenze.

1.5 Risposta all'impulso del sistema

La risposta forzata di un sistema LTI rappresenta la parte dell'uscita del sistema che è influenzata solo dall'ingresso esterno. In altre parole, è la risposta del sistema quando viene applicato un segnale di ingresso arbitrario. Se si vuole analizzare la risposta forzata all'impulso di un sistema LTI-TC, si deve considerare l'impulso di Dirac unitario come ingresso.
L'impulso di Dirac è una funzione ideale che ha un'ampiezza infinita e una durata infinitesimale, rappresentata come $\delta(t)$ la cui trasformata di Laplace è 1.

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$$

Si ottiene una funzione che vale 0 quando $t \neq 0$ e $NON\ DEFINITA$ quando $t = 0$. L'impulso non è una funzione Laplace-trasformabile in quanto in 0 assume un valore indeterminato. Si può ovviare a questo problema calcolando prima la Laplace-trasformata generica in ε e poi il limite per $\varepsilon \to 0$, il valore ottenuto è pari ad 1. Possiamo concludere che l'impulso di Dirac ha trasformata di Laplace unitaria. La risposta all'impulso del sistema coincide dunque con la funzione di trasferimento:

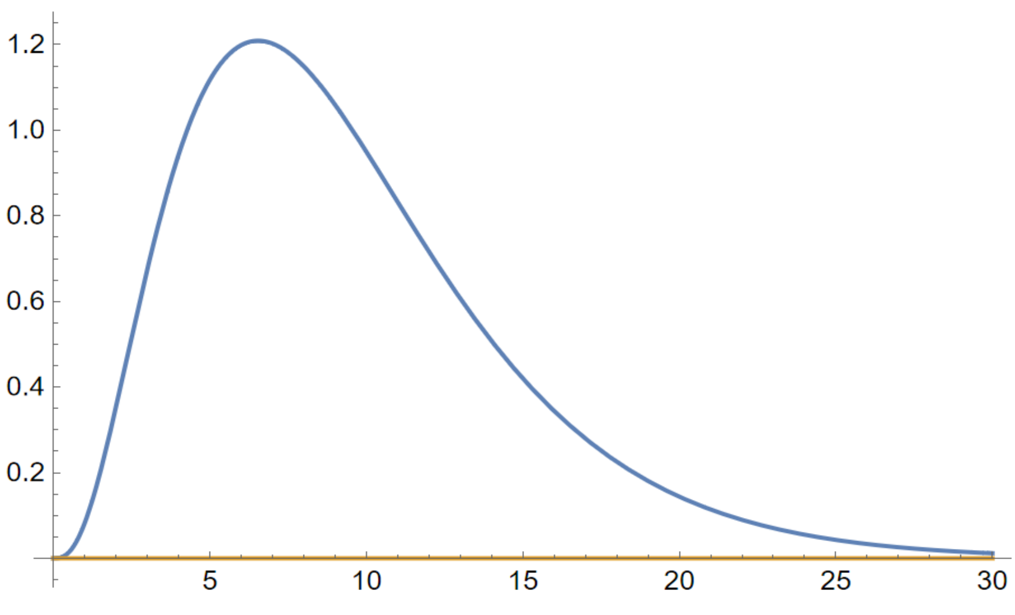
$$Y(s) = G(s) \cdot 1$$

Un primo metodo per ottenere la risposta all'impulso è quello di scomporre la funzione in fratti semplici, ottenendo così L-Trasformate di funzioni note, per poi risalire alla risposta nel dominio del tempo grazie alla linearità della L-Trasformata.

$$Y(s)_f = \frac{C_1}{2+s} + \frac{C_{23}}{(1+3s)^3} + \frac{C_{22}}{(1+3s)^2} + \frac{C_{21}}{1+3s}$$

Ora si possono calcolare i vari coefficienti attraverso la formula di Heaviside generale e successivamente risalire alla risposta all'impulso del sistema attraverso l'antitrasformata.
Un secondo metodo che può essere applicato e risulta anche essere più semplice è quello di calcolare direttamente l'antitrasformata della Funzione di Trasferimento. In questo caso le si assegna il simbolo $g(t)$ e vale:

$$\frac{1}{250} e^{-2t} \left(-54 + e^{5t/3} \left(54 - 90t + 75t^2\right)\right)$$



Un metodo per capire se il risultato ottenuto sia corretto è quello di utilizzare il teorema del valore finale. Tale teorema permette di calcolare il valore finale di una funzione nel dominio del tempo. Esso afferma che se una funzione $y(t)$ ha una trasformata di Laplace $F(s)$, allora il valore finale di y(t) quando il tempo tende all'infinito può essere calcolato prendendo il limite di $sF(s)$ mentre s tende a zero.
Formalmente, il teorema del valore finale può essere espresso come:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

Una delle condizioni necessarie per poter applicare questo teorema è che i poli abbiano parte reale strettamente negativa, e nel caso in esame questa è rispettata. Pertanto si ottiene:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = 0$$

Confermando la correttezza della funzione scritta in precedenza.

1.6 Risposta al gradino del sistema

Nel contesto dei sistemi lineari tempo invarianti (LTI) nella teoria dei controlli, la risposta forzata al gradino è la parte della risposta totale di un sistema che è dovuta all'ingresso di un segnale a gradino unitario.
La funzione gradino, spesso indicata come $1(t)$ o $step(t)$, è una funzione definita come segue:

$$1\,(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

In altre parole, la funzione gradino è una funzione right-sided che assume il valore zero per tutti i tempi precedenti allo zero e il valore di uno per tutti i tempi successivi o uguali a zero. Rappresenta un segnale che cambia istantaneamente dal valore zero al valore unitario al tempo $t = 0$. Il segnale a gradino viene utilizzato per valutare la risposta del sistema quando viene applicato un cambiamento istantaneo nel tempo, da cui è possibile ottenere informazioni sulle proprietà del sistema, come il tempo di assestamento, l'overshoot, la stabilità e la risposta in frequenza. La sua trasformata di Laplace è $1/s$.

Esiste un importante rapporto tra la risposta all'impulso e la risposta al gradino di un sistema lineare tempo invariante TC. In effetti, la risposta al gradino può essere ottenuta integrando la risposta all'impulso.
In effetti la risposta all'impulso caratterizza completamente un sistema LTI ed una delle sue proprietà più importanti è che può essere utilizzata per determinare la risposta del sistema a qualsiasi ingresso arbitrario attraverso la convoluzione.

La convoluzione è un'operazione matematica che combina due funzioni per ottenere una terza funzione che rappresenta l'effetto di una funzione sulle altre.
Matematicamente, la convoluzione tra due funzioni $g(t)$ e $u(t)$ nel dominio continuo del tempo è definita come:

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\,u(t - \tau)\,d\tau$$

In modo intuitivo, la convoluzione calcola l'area della sovrapposizione tra le due funzioni $g(\tau)$ e $u(t - \tau)$ in diversi istanti di tempo, ponderata dall'andamento delle funzioni stesse. Il risultato è una nuova funzione che rappresenta l'interazione dei due segnali nel dominio del tempo.
Si può dunque provare che esista tale rapporto tra le due risposte, la risposta al gradino di un sistema LTI-TC, indicata come $y_{-1}(t)$, può essere ottenuta integrando la risposta all'impulso nel dominio del tempo. Matematicamente, la relazione tra la risposta al gradino e la risposta all'impulso può essere espressa come segue:

$$y_{-1}(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$

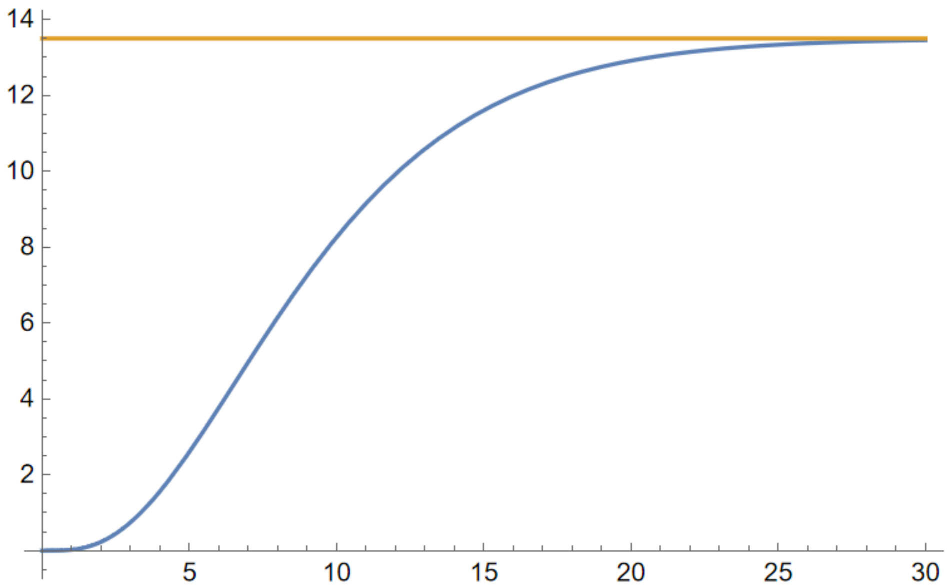
dove $g(\tau)$ è la risposta all'impulso e τ rappresenta la variabile di integrazione.
Un altro modo per ottenere tale risposta sarebbe calcolare l'antitrasformata di $G(s) \cdot \frac{1}{s}$.
Nel caso in esame il risultato ottenuto dall'integrale e dunque la risposta al gradino è:

$$\frac{27 \times 1[t]}{2} + \frac{27}{250} e^{-2t} 1[t] - \frac{1701}{125} e^{-t/3} 1[t] - \frac{108}{25} e^{-t/3} t\, 1[t] - \frac{9}{10} e^{-t/3} t^2\, 1[t]$$

Il valore della risposta a regime e' un gradino di ampiezza pari a $G(0)$, ovvero:

$$\frac{27}{2}$$

=



Come si può notare dopo una fase transitoria, la risposta al gradino raggiunge il suo valore di regime $y = \frac{27}{2}$ che prende il nome di Risposta a regime. I membri restanti dell'equazione della risposta al gradino prendono insieme il nome di Risposta Transitoria.
Per avere la certezza assoluta che il risultato ottenuto sia corretto si ricorre nuovamente al teorema del valore finale che afferma:

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} s\, F(s)$$

A condizione che i poli di s F(s) abbiano tutti parte reale strettamente negativa. In questo caso questa condizione è verificata e si ottiene:

$$y_{\infty} = \lim_{s \to 0} s\, G(s) \frac{1}{s} = \frac{27}{2}$$

1.7 Risposta forzata al segnale periodico $u(t) = sin(t)\, 1(t)$

La risposta di un sistema a un segnale periodico elementare può fornire informazioni utili sul comportamento del sistema in risposta a quel tipo di segnale e a comprendere le caratteristiche del sistema e valutare le sue prestazioni.
La risposta di un sistema a un segnale periodico elementare può essere utilizzata per valutare il comportamento del sistema in regime stazionario. Se il sistema raggiunge uno stato stabile dopo un certo periodo di tempo, si possono analizzare l'ampiezza, la fase e altre caratteristiche rilevanti.
Per procedere con l'analisi del segnale assegnato $u(t) = sin(t)\, 1(t)$ si deve calcolare la sua trasformata di Laplace, che in questo caso è:

$$U(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

La risposta forzata, di conseguenza, tenendo conto delle relazioni e delle proprietà della risposta all'impulso, è uguale a:

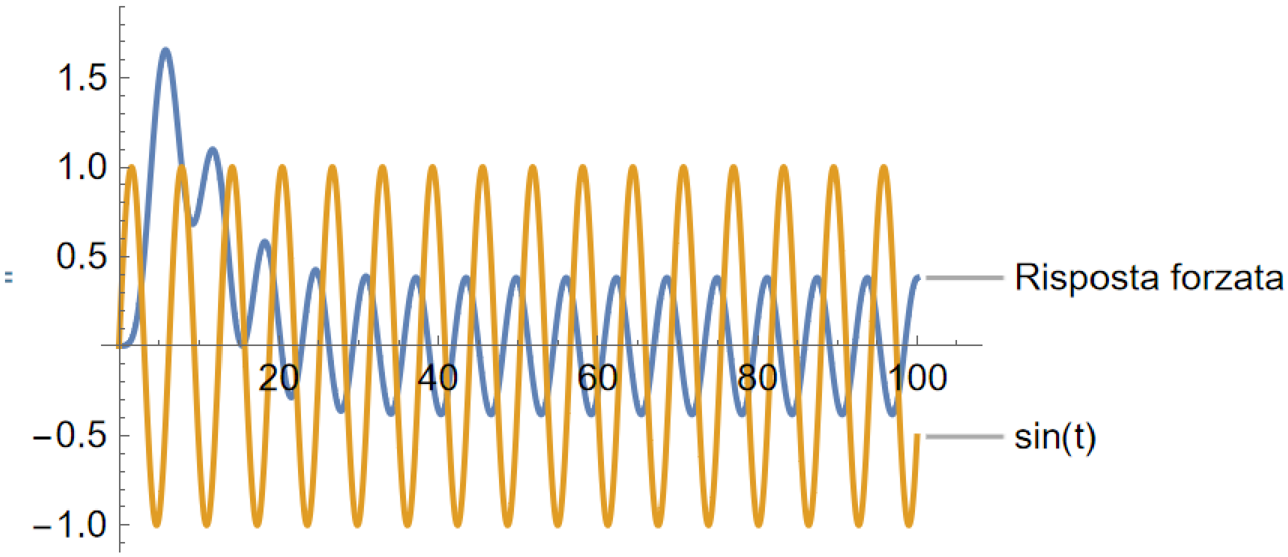
$$Y_f = G(s) \cdot U(s)$$

ovvero:

$$\frac{27}{(2+s)\ (1+3\,s)^3\ \left(1+s^2\right)}$$

Procedendo con il calcolo della sua antitrasformata di Laplace si ottiene la funzione:

$$-\frac{27}{625}\,e^{-2t} - \frac{729\,e^{-t/3}}{2500} + \frac{27}{100}\,e^{-t/3}\,t^2 + \frac{837\,\mathrm{Cos}[t]}{2500} - \frac{459\,\mathrm{Sin}[t]}{2500}$$



Come si può notare la risposta forzata, una volta che la componente transitoria si esaurisce, continua ad essere un segnale periodico con la stessa pulsazione di quello di ingresso ma con fase ed ampiezza diverse.

In questo caso non si può applicare il teorema del valore finale poiché sono presenti due poli con parte reale uguale a zero, mentre è condizione necessaria che siano tutti strettamente minori di zero.

$$\left\{\{s \to -2\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{s \to -\frac{1}{3}\right\},\ \{s \to -i\},\ \{s \to i\}\right\}$$

1.8 Rappresentazione modello I/U

La rappresentazione I/U, o rappresentazione corrente-tensione, è una forma di rappresentazione di un sistema che descrive la relazione tra la corrente di ingresso (I) e la tensione di uscita (U) del sistema.
Poiché il sistema in esame è un sistema SISO è possibile passare al modello I/U. Per ricavare tale modello, si utilizza la relazione tra la funzione di trasferimento e la risposta forzata:

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} = \frac{27}{(2+s)\,(1+3s)^3}$$

Da cui è possibile ricavare una equazione nel dominio s tra risposta forzata e trasformata dell'ingresso:

$$Y_f(s) \cdot (2 + s) \cdot (1 + 3s)^3 = 27 \cdot U(s)$$

$$Y_f(s) \cdot (2 + 19s + 63s^2 + 81\,s^3 + 27s^4) = 27 \cdot U(s)$$

$$2\,Y_f(s) + 19s\,Y_f(s) + 63s^2\,Y_f(s) + 81\,s^3\,Y_f(s) + 27s^4\,Y_f(s) = 27 \cdot U(s)$$

Da questa relazione è possibile passare nel dominio del tempo sfruttando il teorema della derivata n-esima della Trasformata di Laplace ottenendo:

$$2\,y(t) + 19\,y'(t) + 63\,y''(t) + 81\,y'''(t) + 27\,y'''(t) = 27 \cdot u(t)$$

Che rappresenta il modello Ingresso Uscita di questo sistema LTI-TC.

Un altro modo per ottenere la rappresentazione del modello I/U è quella di passare attraverso il calcolo di due matrici:

- θ, che rappresenta la Matrice di Osservabilità, la quale descrive la capacità di un sistema di essere osservato o misurato a partire dalle sole misurazioni dell'uscita.

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Γ, che rappresenta la Matrice di Trasferimento, la quale collega gli ingressi del sistema alle uscite del sistema.

$$\begin{bmatrix} D & 0 & \dots & & 0 \\ CB & D & \dots & & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & 0 \\ CA^{n-2}B & & & & D \end{bmatrix}$$

Con la formula che lega le due matrici:

$$\bar{y} = \Theta \cdot x + \Gamma \cdot \bar{u}$$

è possibile dunque risalire alla eq differenziale $y^{(n-1)}(t)$, eliminando lo stato x, la quale derivata ulteriormente genera la rappresentazione I/U.

1.9 Ricerca dello stato iniziale della risposta al gradino in assenza di componente transitoria (valore in regime)

In un sistema dinamico LTI, la risposta totale nell'uscita $y(t)$ può essere scomposta in risposta libera, che dipende dallo stato iniziale e risposta forzata:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

La risposta forzata a sua volta è scomponibile in risposta transitoria e risposta a regime:

$$y_f = y_t(t) + y_\infty(t)$$

$$y(t) = y_l(t) + y_t(t) + y_\infty(t)$$

Ora per poter far coincidere la risposta totale al gradino $y(t)$ con il valore di regime sarà necessario annullare sia la risposta libera che la risposta transitoria, ovvero:

$$y_l(t) + y_t(t) = 0 \; \forall t \in \Re$$

Si procede dunque con il calcolo della risposta forzata.
Nel dominio della trasformata di Laplace, poiché l'ingresso è il gradino unitario, la risposta forzata è:

$$Y_f(s) = \frac{G(s)}{s} = Y_t(s) + Y_\infty(s)$$

La risposta a regime è un semplice scalare k legato alla componente di ingresso, ovvero:

$$Y_\infty(s) = k \cdot \frac{1}{s}$$

$$k = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{G(s)}{s} = G(0) = \frac{27}{2}$$

Avendo già calcolato precedentemente la risposta forzata è possibile ricavare la risposta transitoria semplicemente sottraendo la risposta a regime:

$$\frac{27\, e^{-2t}}{250} - \frac{1701\, e^{-t/3}}{125} - \frac{108}{25} e^{-t/3} t - \frac{9}{10} e^{-t/3} t^2$$

o nel dominio della trasformata:

$$\frac{27}{250\,(2+s)} - \frac{243}{5\,(1+3s)^3} - \frac{972}{25\,(1+3s)^2} - \frac{5103}{125\,(1+3s)}$$

Ora non resta che calcolare la risposta libera all'uscita nel dominio immagine, trattando lo stato iniziale come incognita:

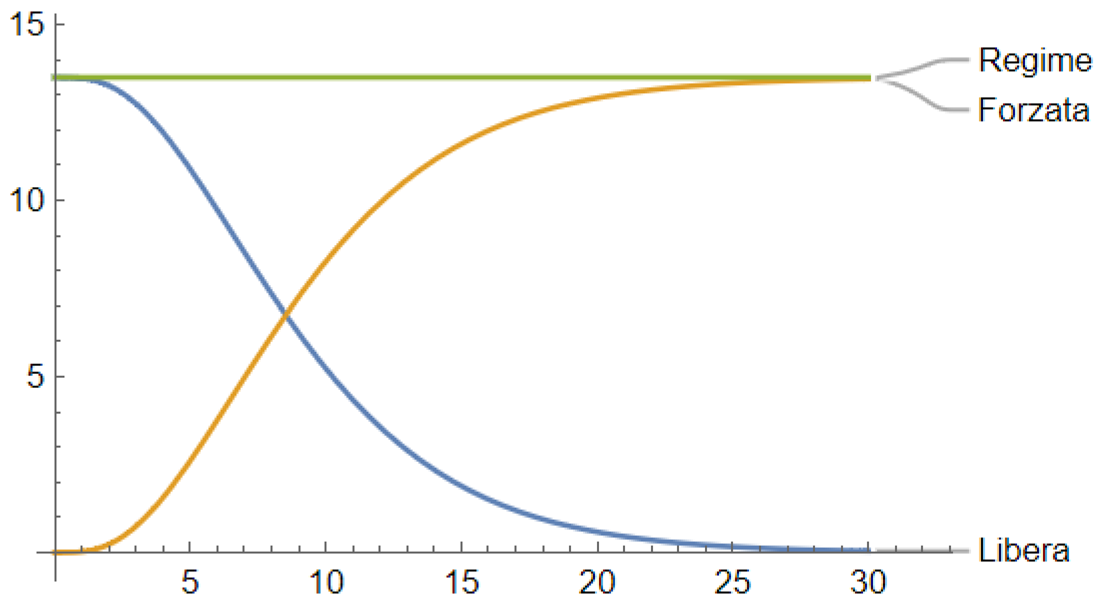
$$Y_l(s) = C \cdot (s \cdot I_4 - A)^{-1} \cdot x_0$$

Sommando quindi la risposta transitoria e ponendo le componenti uguali a zero, si ottiene il seguente risultato:

$$x_1 \to 0,\ x_2 \to 0,\ x_3 \to \frac{27}{2},\ x_4 \to -\frac{27}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{27}{2} \\ -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

Procedendo dunque con il calcolo effettivo della risposta libera, e conoscendo già la risposta forzata e la risposta a regime è possibile visualizzarle graficamente, rendendo ancora più ovvia la relazione che intercorre nel caso specifico:



Le due risposte appaiono opposte, e annullandosi a vicenda fanno emergere solo la componente a regime.

-

b. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{22}{63} & \frac{38}{63} & \frac{1}{63} & \frac{47}{126} \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ \frac{41}{63} & \frac{38}{63} & \frac{65}{126} & \frac{47}{126} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. i modi naturali del sistema;
2. la risposta libera nello stato nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento del sistema, i suoi poli e zeri;
5. la risposta all'impulso del sistema;
6. la risposta al gradino ed il suo grafico;
7. la risposta alla rampa;
8. un possibile modello i/u a partire dalla funzione di trasferimento ottenuta;
9. tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all'ingresso

$$u(k) = 1(-k)$$

2.0 Analisi di un sistema LTI-TD

Nell'esercizio proposto, ci si propone di condurre un'analisi approfondita su un sistema lineare, stazionario e a tempo discreto. Tale sistema è caratterizzato da una rappresentazione ingresso/stato/uscita. Tra i parametri forniti è possibile identificare tre matrici di rilevanza cruciale:

- la matrice A, che costituisce la matrice dinamica del sistema;
- la matrice B, che rappresenta la matrice di ingresso del sistema;
- la matrice C, che indica la matrice di uscita del sistema.

Occorre sottolineare che il sistema in esame è caratterizzato da quattro variabili di stato, il che implica che il sistema presenta una natura di tipo SISO (single input – single output) e richiede una specifica approfondita analisi al fine di comprenderne le peculiarità e i comportamenti intrinseci.

2.1 Ricerca dei modi naturali del sistema

Nel caso dei sistemi lineari a tempo discreto (LTI-TD), i modi naturali rappresentano i comportamenti intrinseci del sistema quando viene applicato un ingresso, attraverso una combinazione lineare nella risposta transitoria e a regime. I modi naturali sono determinati dagli autovalori della matrice dinamica A del sistema, attraverso la ricerca degli zeri del polinomio caratteristico. In base al tipo di autovalori si hanno tre casi:

- Se gli autovalori della matrice A sono reali e distinti, ogni autovalore rappresenta un modo naturale indipendente. Ogni modo naturale rappresenta un'oscillazione caratteristica del sistema nel tempo. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$\lambda_i^k$$

- Quando gli autovalori sono complessi coniugati, si ottengono due modi naturali correlati. Questi modi rappresentano oscillazioni sinusoidali complesse nel tempo, che influenzano la risposta del sistema. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$\rho^k cos(\theta k)\ e\ \rho^k sin(\theta k)$$

  dove ρ è il modulo dell'autovalore, θk è la frequenza angolare corrispondente, e k rappresenta l'istante di tempo discreto.

- Nel caso in cui gli autovalori siano reali non distinti, si ha un unico modo naturale che provoca una risposta oscillante del sistema senza smorzamento nel tempo. I modi del sistema saranno definiti dalla funzione:

$$\binom{k}{\eta} \lambda_i^{k-\eta} \text{ con } 0 < \eta < n$$

  Dove η è la dimensione della matrice dinamica del sistema.

I modi naturali sono funzioni definite per istanti di tempo interi $k \geq 0$, per questo prendono il nome di right-sided. Conoscendo la natura della successione nel tempo discreto, i modi naturali tenderanno a zero e convergeranno se il modulo dell'autovalore associato è strettamente inferiore a 1, divergeranno altrimenti.
La comprensione dei modi naturali è essenziale per analizzare il comportamento dinamico dei sistemi LTI-TD. Forniscono informazioni sulle caratteristiche oscillatorie del sistema, che possono essere utili per la progettazione e il controllo dei sistemi in vari settori ingegneristici.

Nell'esercizio preso in esame la matrice A genera:
- Due autovalori reali e distinti
- Un autovalore con molteplicità algebrica pari a 2

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{3} \quad \lambda_4 = \frac{1}{7}$$

Poiché è presente un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno un primo passo è quello di determinare la sua molteplicità geometrica, per poter verificare la diagonalizzabilità della matrice A. Per determinare quindi la molteplicità geometrica si può calcolare la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore, ovvero:

$$dim(Ker(A - \lambda I))$$

$$\left\{\left\{\frac{6}{5}, \frac{1}{10}, -3, 1\right\}\right\}$$

La molteplicità geometrica risulta essere pari ad uno, pertanto la matrice non è diagonalizzabile e per proseguire nell'analisi dei modi naturali del sistema si deve ricorrere ad una particolare forma canonica che generalizza il concetto di forma canonica diagonale, ovvero la forma di Jordan.

La forma di Jordan della matrice A è:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Tale matrice è composta da tre blocchi di Jordan, il primo composto da un unico mini-blocco (molteplicità geometrica) di dimensione 2×2 (molteplicità algebrica) in cui compare l'autovalore ripetuto, il secondo, composto da un unico mini-blocco che rappresenta l'autovalore 1/7 e il terzo ed ultimo sempre composto da un unico mini-blocco che rappresenta l'autovalore ½.

Dall'analisi della matrice di Jordan si può dedurre che i modi naturali indipendenti che l'autovalore -⅓ genera sono 2, ovvero:

$$-\frac{1}{3}^{k} \qquad k \cdot (-\frac{1}{3})^{k-1}$$

Come ulteriore prova, o metodo alternativo, è possibile ottenere il numero di modi naturali indipendenti generati dall'autovalore osservando la molteplicità algebrica di tale autovalore nel polinomio minimo.

Questa corrisponde infatti al grado del fattore lineare associato all'autovalore ripetuto. Questo grado indica il numero di modi naturali indipendenti generati.

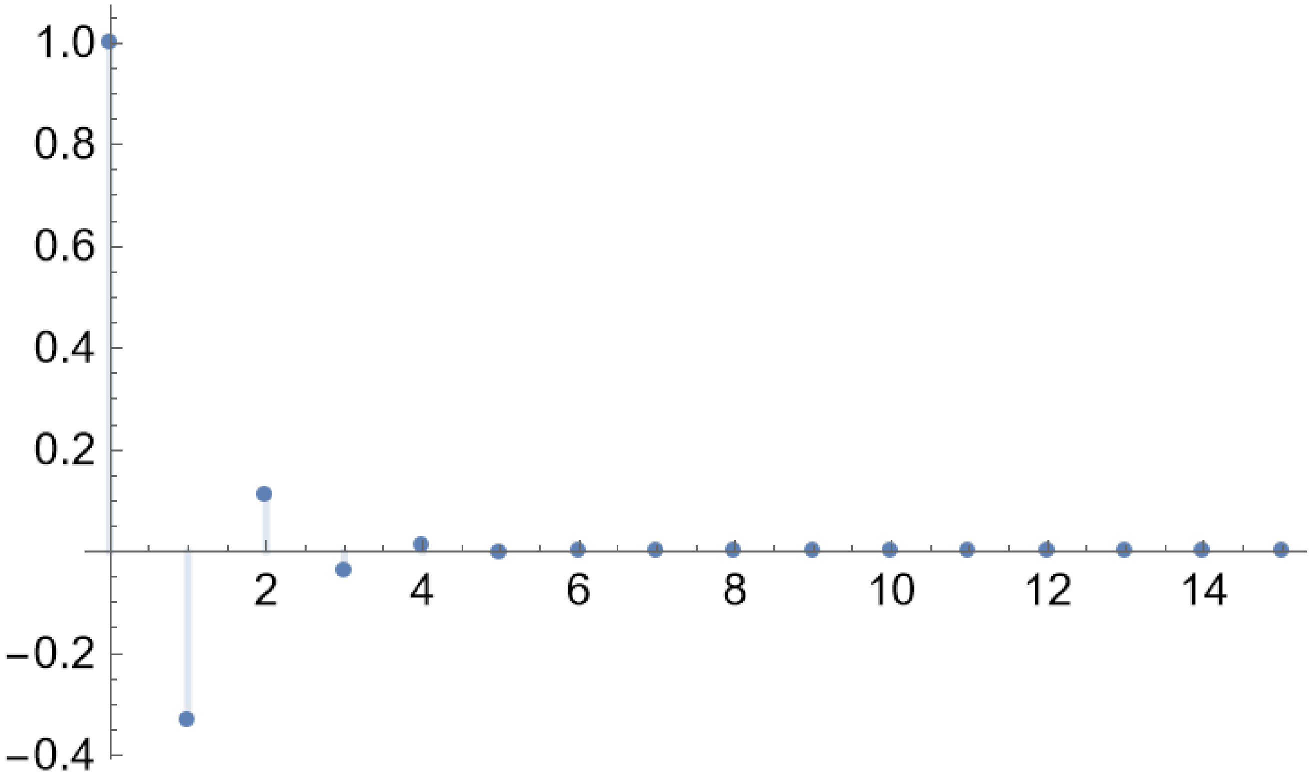
In questo caso il polinomio minimo è uguale a:

$$\frac{1}{126}(-1 + 2\lambda)(1 + 3\lambda)^{2}(-1 + 7\lambda)$$

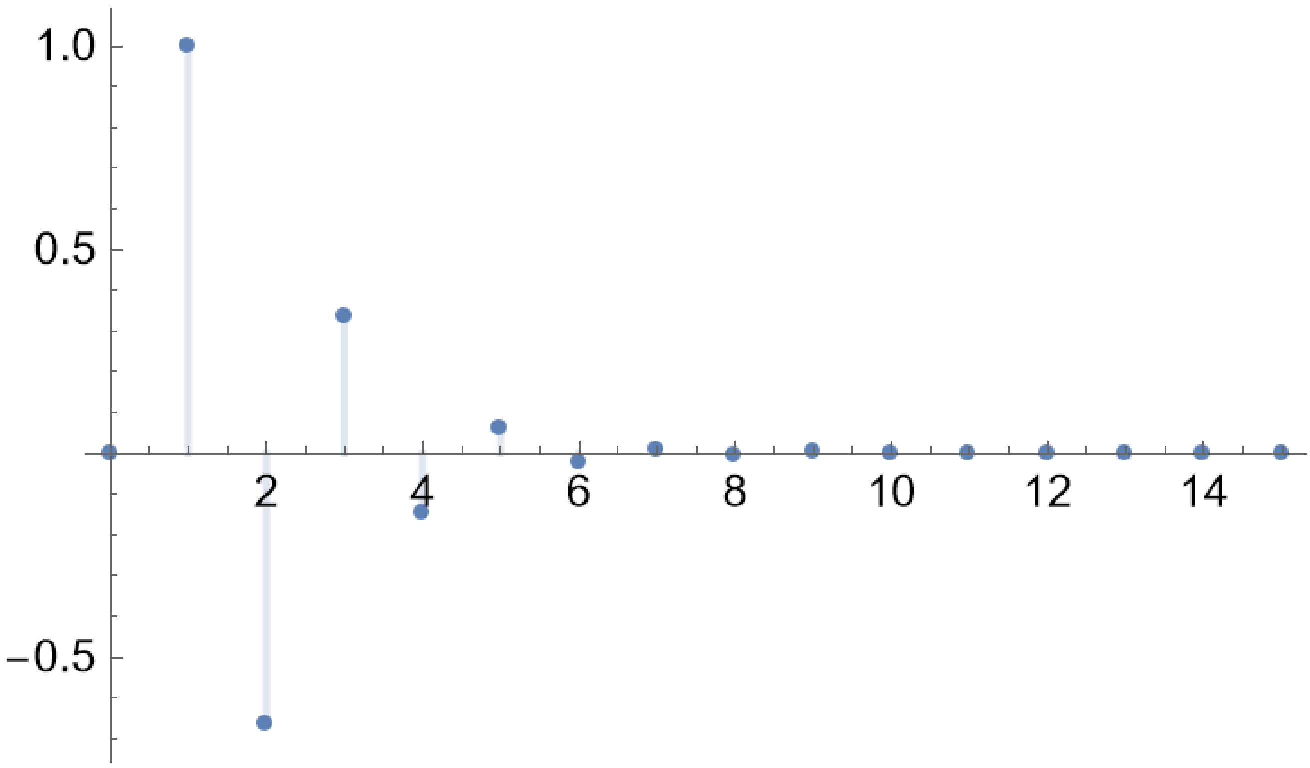
Confermando quanto scritto precedentemente.

In conclusione i modi naturali del sistema sono:

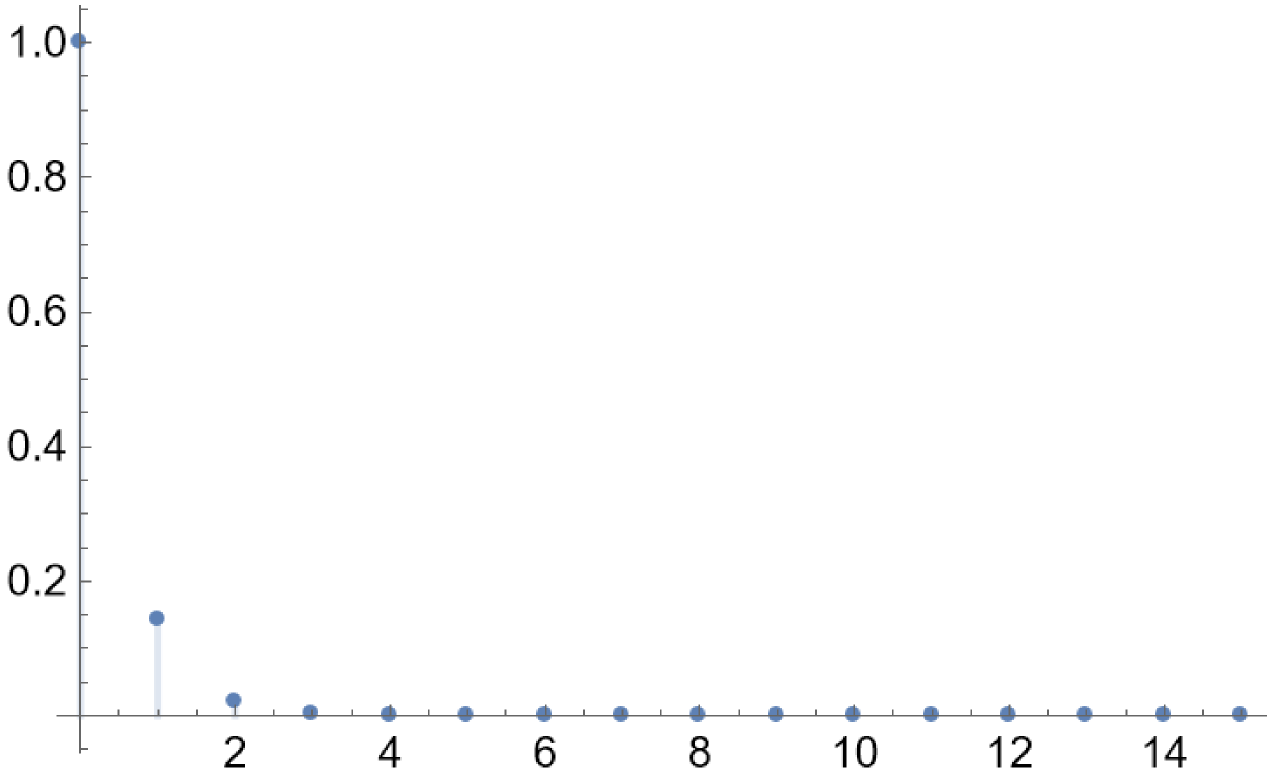
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$



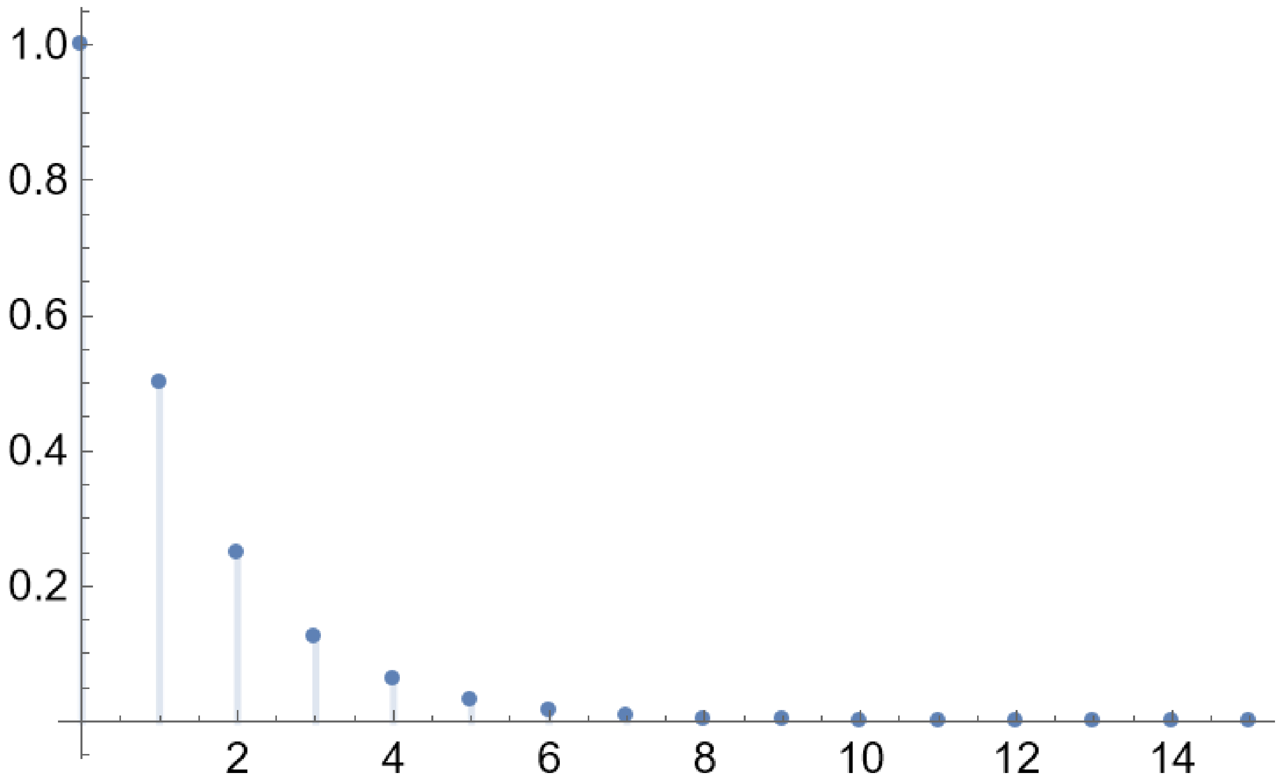
- $k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$



- $\left(\frac{1}{7}\right)^k$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^k$



I modi naturali ottenuti hanno tutti e quattro come argomento della successione potenza un numero in modulo < 1, pertanto per $k \to \infty$ questi tenderanno a zero.

2.2 Analisi della risposta libera nello stato

La risposta nello stato di un qualsiasi sistema dinamico lineare stazionario è data dalla somma di due quantità, la risposta libera e la risposta forzata dello stato. Essa rappresenta l'evoluzione nel tempo delle variabili di stato del sistema quando non è presente un ingresso esterno.

L'equazione generale per descrivere la risposta libera nello stato di un sistema LTI-TD è:

$$x(k) = A^k \cdot x_0$$

Poiché utilizzare direttamente la matrice dinamica A porta a delle complicazioni sul lato analitico, si può utilizzare la matrice nella forma di Jordan, simile ad A attraverso una matrice T_j di cambiamento di base:

$$A \cdot T_j = T_j \cdot A_j$$

$$A^k \cdot T_j = T_j \cdot A_j^k$$

$$A^k = T_j \cdot A_j^k \cdot T_j^{-1}$$

$$x(k) = T_j \cdot A_j^k \cdot T_j^{-1} \cdot x_0$$

Rinomino $z_0 = T_j^{-1} \cdot x_0$ che rappresenta un vettore stato iniziale ma visto da una prospettiva diversa (x_0 è la base canonica) della base degli autovettori destri di A. Si ottiene:

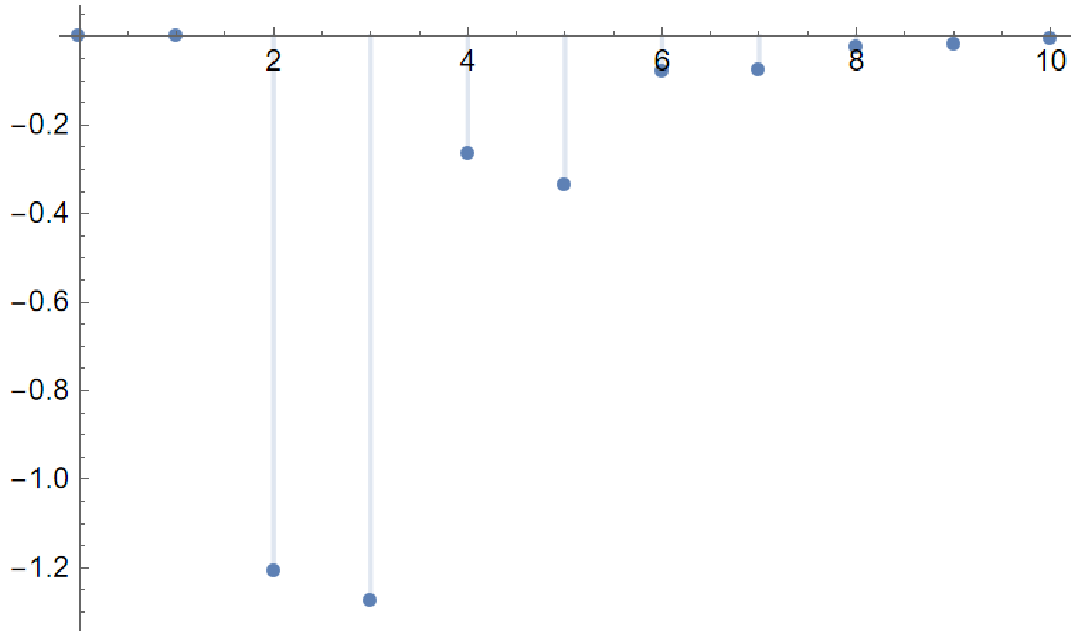
$$\begin{pmatrix} \frac{116}{25} \\ \frac{34}{45} \\ -\frac{52}{5} \\ \frac{144}{25} \end{pmatrix}$$

Si osserva che un elemento si annulla, pertanto non saranno presenti tutti e quattro i modi naturali nella risposta libera. Considerando lo stato iniziale dell'esercizio, la risposta libera nello stato sarà determinata come segue:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{250}\left(1103\left(-\frac{1}{3}\right)^k + 3\times 2^{9-k} - 377\times 7^{1-k} - 680\left(-\frac{1}{3}\right)^k k\right) \\ \frac{1}{375}\left(27\times 2^{4-k} - 78\times 7^{-k} + 7\times 3^{1-k} e^{i k \pi} - 85\left(-\frac{1}{3}\right)^k k\right) \\ \frac{1}{25}\left(-263\left(-\frac{1}{3}\right)^k - 3\times 2^{6-k} + 65\times 7^{1-k} + 170\left(-\frac{1}{3}\right)^k k\right) \\ \frac{2}{75}\left(27\times 2^{3-k} + 58\,(-1)^k 3^{1-k} - 390\times 7^{-k} - 85\left(-\frac{1}{3}\right)^k k\right) \end{pmatrix}$$

Esempio di una rappresentazione grafica di una componente della risposta libera:

```
DiscretePlot[x1[k][[3]], {k, 0, 10}, PlotRange → All]
```



2.3 Analisi di particolari configurazioni dello stato iniziale

Per ottenere una risposta libera che sia combinazione lineare di determinati modi naturali si deve considerare uno stato iniziale che sia una combinazione lineare delle colonne di T_j.

Scelgo come stato iniziale la terza colonna di T_j moltiplicata per un numero reale, ad esempio 200:

$$\begin{pmatrix} 203 \\ 4 \\ -350 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Calcolando z_0 si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nella risposta libera apparirà dunque un solo modo naturale e avrà questa forma:

$$\begin{pmatrix} 29 \times 7^{1-k} \\ 4 \times 7^{-k} \\ -50 \times 7^{1-k} \\ 200 \times 7^{-k} \end{pmatrix}$$

2.4 Funzione di Trasferimento del sistema

La funzione di trasferimento per un sistema lineare tempo-invariante (LTI) è una descrizione matematica del comportamento del sistema. È , come nel caso TC, una funzione razionale che collega in questo caso la trasformata Zeta dell'uscita del sistema alla trasformata Zeta dell'ingresso del sistema.
La trasformata Zeta è un'operazione matematica che associa una funzione di una variabile reale (nel dominio del tempo) a una funzione di una variabile complessa. Essa è ampiamente utilizzata nell'analisi dei sistemi lineari a tempo discreto.
La trasformata Zeta di una funzione $f(k)$ è denotata solitamente con la lettera $F(k)$ o $Z[f(k)]$, dove z è una variabile complessa. La trasformata Zeta di $f(k)$ è definita come:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k}$$

e presenta varie proprietà utili che semplificano l'analisi dei sistemi.

La funzione di trasferimento $G(z)$ è definita come:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Dove $Y(s)$ è la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema e $U(z)$ è la trasformata Zeta dell'ingresso del sistema.
Per procedere al calcolo della FdT attraverso i parametri del sistema si utilizza la formula:

$$G(z) = C \cdot (z \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B + D$$

In questo caso $D = 0$ e $n = 4$, ovvero la dimensione della matrice dinamica del sistema.
La Funzione di Trasferimento del sistema risulta essere:

$$\frac{126}{(1 + 3\,z)^2\,(-1 + 7\,z)}$$

I poli e gli zeri della funzione di trasferimento sono i valori di z in cui si annullano rispettivamente il denominatore e il numeratore della funzione. I poli e gli zeri influenzano il comportamento del sistema, in particolare i poli determinano la stabilità del sistema, mentre gli zeri influenzano la risposta in frequenza del sistema.
In questo caso non sono presenti zeri, mentre i numeri complessi che annullano il denominatore detti appunto poli di $G(z)$ sono:

$$\left\{z \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{z \to -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{z \to \frac{1}{7}\right\}$$

Una prima osservazione che si può fare una volta ottenuti i poli della FdT riguarda il concetto di stabilità del sistema. Se i poli di un sistema sono tutti numeri complessi con modulo della parte reale < 1 (si trovano all'interno del cerchio unitario nel piano complesso), come in questo caso, ciò indica che il sistema è asintoticamente stabile. Una seconda osservazione è l'assenza del polo associato a ½: se un autovalore non compare come polo nella funzione di trasferimento, ciò significa che quel valore non influenza direttamente il comportamento del sistema. Potrebbe indicare che l'autovalore è un polo cancellato o non è associato a un comportamento significativo del sistema nel dominio discreto.

2.5 Risposta all'impulso del sistema

La risposta forzata di un sistema a tempo discreto rappresenta la parte dell'uscita del sistema che è influenzata solo dall'ingresso esterno. In altre parole, è la risposta del sistema quando viene applicato un segnale di ingresso arbitrario. Se si vuole analizzare la risposta forzata all'impulso di un sistema LTI-TD, si deve considerare l'impulso di Kronecker come ingresso.
L'impulso di Kronecker è una funzione ideale che ha un'ampiezza unitaria e una durata infinitamente breve, rappresentata come $\delta[k]$ la cui trasformata Zeta è 1.

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \; con \; k = 0 \\ 0 \;\; con \; k \neq 0 \end{cases}$$

Si ottiene una funzione definita come una sequenza infinita di valori, in cui il valore è 1 per $k = 0$ e 0 per tutti gli altri valori di k. La risposta all'impulso del sistema coincide dunque con la funzione di trasferimento:

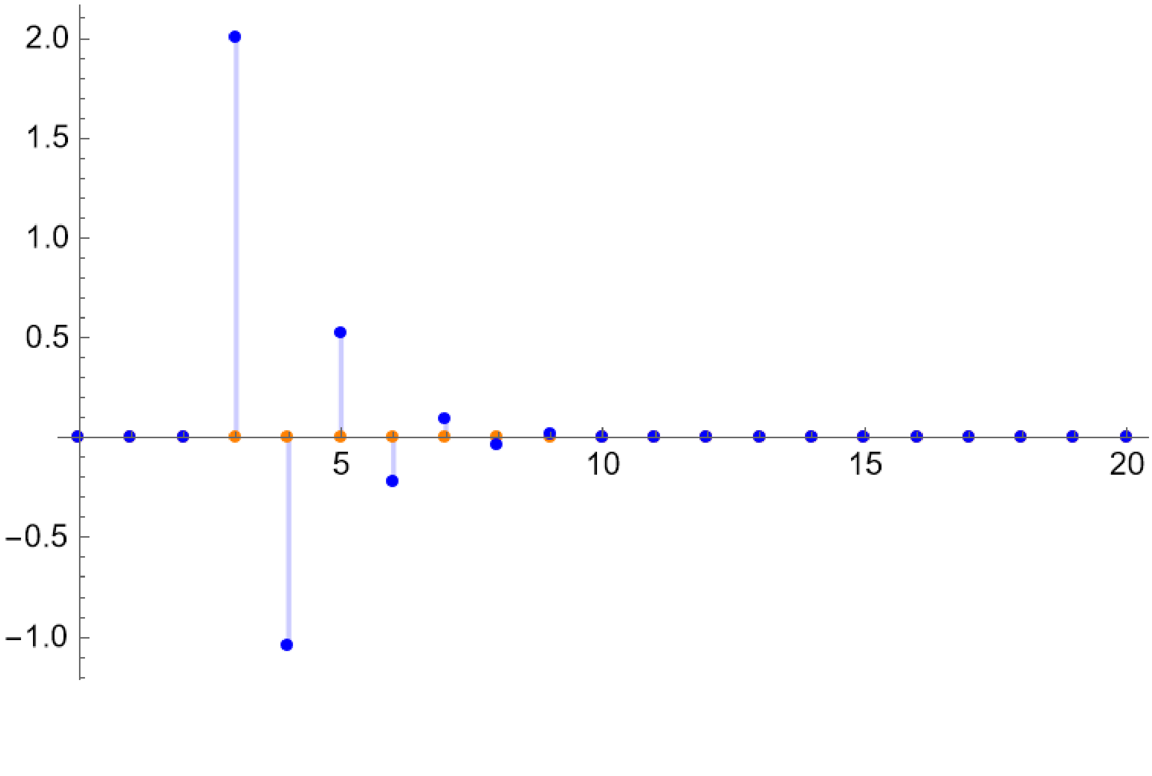
$$Y(z) = G(z) \cdot 1$$

Un primo metodo per ottenere la risposta all'impulso è quello di scomporre la funzione in fratti semplici, ottenendo così L-Trasformate di funzioni note, per poi risalire alla risposta nel dominio del tempo grazie alla linearità della L-Trasformata.

$$Y(z)_f = \frac{C_1}{-1+7z} + \frac{C_{23}}{(1+3z)^2} + \frac{C_{22}}{1+3z}$$

Ora si possono calcolare i vari coefficienti attraverso la formula di Heaviside generale e successivamente risalire alla risposta all'impulso del sistema attraverso l'antitrasformata.
Un secondo metodo che può essere applicato e risulta anche essere più semplice è quello di calcolare direttamente l'antitrasformata della Funzione di Trasferimento. In questo caso le si assegna il simbolo $g(k)$ e vale:

$$\frac{1}{50} \times 3^{2-k} \times 7^{1-k} \left(51\,(-7)^k + 49 \times 3^k - 30\,(-7)^k\, k\right)\,(1 - \mathrm{UnitStep}[-k])$$



Si può notare come essa sia zero esatto per i primi 3 campioni (differenza fra numero di poli e zeri della FdT). Un metodo per capire se il risultato ottenuto sia corretto è quello di utilizzare il teorema del valore finale. Tale teorema permette di calcolare il valore finale di una funzione nel dominio del tempo. Esso afferma che se una funzione $y(k)$ ha una trasformata di Zeta $F(z)$, allora il valore finale di y(k) quando il tempo tende all'infinito può essere calcolato prendendo il limite di $(1 - z^{-1})F(z)$ mentre z tende ad uno.
Formalmente, il teorema del valore finale può essere espresso come:

$$y_{\infty} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

Una delle condizioni necessarie per poter applicare questo teorema è che i poli abbiano modulo della parte reale strettamente minore di uno, e nel caso in esame questa è rispettata. Pertanto si ottiene:

$$y_{\infty} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})G(z) = 0$$

Confermando la correttezza della funzione scritta in precedenza.

2.6 Risposta al gradino del sistema

Nel contesto dei sistemi lineari tempo invarianti (LTI) nella teoria dei controlli, la risposta forzata al gradino è la parte della risposta totale di un sistema che è dovuta all'ingresso di un segnale a gradino unitario.
La funzione gradino, spesso indicata come $1(k)$ o $step(k)$, è una funzione definita come segue:

$$1\,(k) = \begin{cases} 1 \text{ per } k \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

In altre parole, la funzione gradino è una funzione right-sided che assume il valore zero per tutti i tempi precedenti allo zero e il valore di uno per tutti i tempi successivi o uguali a zero. Rappresenta un segnale che cambia istantaneamente dal valore zero al valore unitario al tempo $k = 0$. Il segnale a gradino viene utilizzato per valutare la risposta del sistema quando viene applicato un cambiamento istantaneo nel tempo, da cui è possibile ottenere informazioni sulle proprietà del sistema, come il tempo di assestamento, l'overshoot, la stabilità e la risposta in frequenza.

Esiste un importante rapporto tra la risposta all'impulso e la risposta al gradino di un sistema lineare tempo invariante TD. In effetti la risposta al gradino può essere ottenuta attraverso la sequenza di convoluzione tra la risposta all'impulso del sistema e la sequenza del gradino unitario.

La convoluzione è un'operazione matematica che combina due funzioni per ottenere una terza funzione che rappresenta l'effetto di una funzione sulle altre.
Matematicamente, la convoluzione tra due funzioni $g(k)$ e $u(k)$ nel dominio discreto del tempo è definita come:

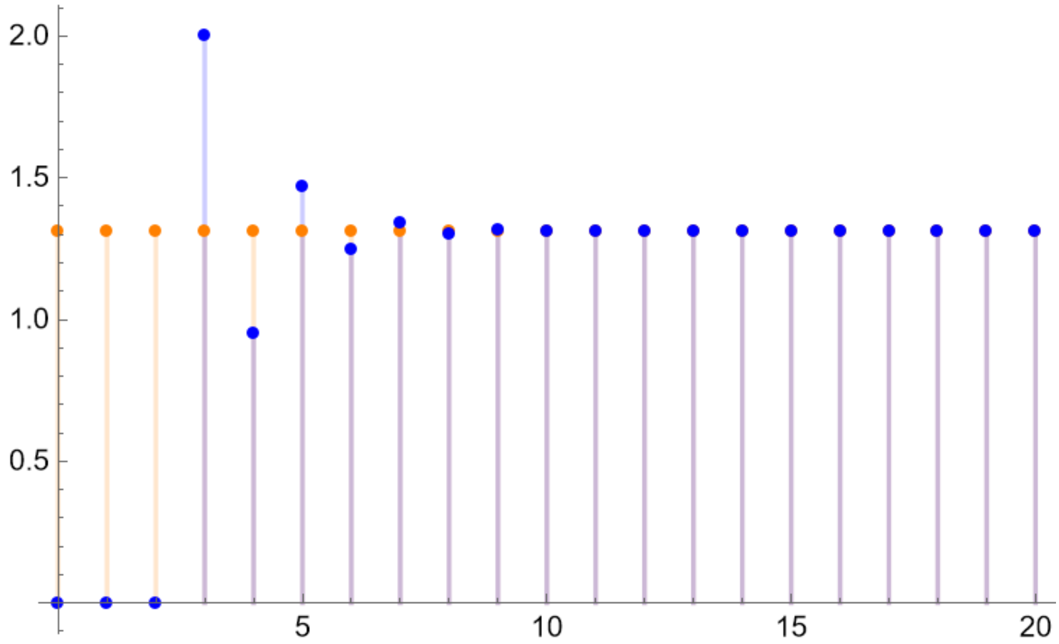
$$(g * u)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k)\, u(n - k)$$

In modo intuitivo, la sequenza di convoluzione nel tempo discreto calcola la somma ponderata delle sovrapposizioni tra due sequenze discrete $g(n)$ e $u(n - k)$ in diversi istanti di tempo, dove k rappresenta lo spostamento temporale. Queste sovrapposizioni vengono pesate dall'andamento delle sequenze stesse. Il risultato della convoluzione è una nuova sequenza che rappresenta l'interazione delle due sequenze nel dominio del tempo discreto.
Si può dunque provare che esista tale rapporto tra le due risposte, la risposta al gradino di un sistema LTI-TD, indicata come $y_{-1}(k)$, può essere ottenuta applicando la sequenza di convoluzione alla risposta all'impulso nel dominio del tempo.
Matematicamente, la relazione tra la risposta al gradino e la risposta all'impulso può essere espressa come segue:

$$y_{-1}(k) = \sum_{n=0}^{k} g(k)$$

Dove $g(k)$ è la risposta all'impulso.
Un altro modo per ottenere tale risposta sarebbe calcolare l'antitrasformata di $G(z) \cdot \frac{z}{z-1}$.
Nel caso in esame il risultato ottenuto dall'antitrasformata e dunque la risposta al gradino è:

$$\frac{1}{400} \times 21^{1-k} \left(171\ (-7)^k - 196 \times 3^k + 25 \times 21^k - 180\ (-7)^k\, k\right)$$



Come si può notare dopo una fase transitoria, la risposta al gradino raggiunge il suo valore di regime $y = \frac{21}{16}$ che prende il nome di Risposta a regime. I membri restanti dell'equazione della risposta al gradino prendono insieme il nome di Risposta Transitoria.
Per avere la certezza assoluta che il risultato ottenuto sia corretto si ricorre nuovamente al teorema del valore finale che afferma:

$$y_{\infty} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

A condizione che i poli di $(1 - z^{-1})$ F(z) abbiano tutti modulo reale strettamente < 1. In questo caso questa condizione è verificata e si ottiene:

$$y_{\infty} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})G(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{21}{16}$$

2.7 Risposta alla rampa del sistema

Nel contesto dei sistemi lineari tempo invarianti (LTI) nella teoria dei controlli, la risposta forzata alla Rampa è la parte della risposta totale di un sistema che è dovuta all'ingresso di un segnale a rampa.
Una rampa è un segnale che varia linearmente nel tempo. In particolare, un segnale di rampa a tempo discreto viene definito come una sequenza di valori che aumentano o diminuiscono in modo lineare con il passare del tempo.

$$f(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa legge matematica può essere rappresentata anche dalla seguente relazione:

$$f(k) = k \cdot 1(k)$$

Rendendo quindi evidente lo stretto rapporto che intercorre tra risposta all’impulso e risposta alla rampa.
La trasformata Zeta di questa funzione è uguale a:

$$U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

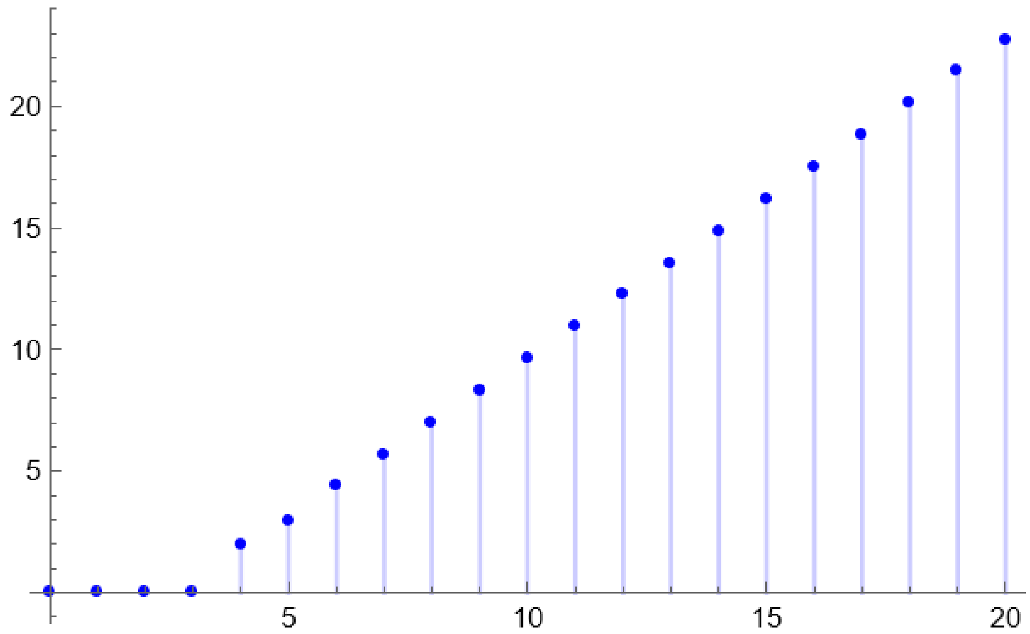
Pertanto, calcolando l’antitrasformata di $Y(z)$, derivante dalla seguente relazione:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$Y(z) = G(z) \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

Si ottiene la risposta alla rampa del sistema:

$$-\frac{7}{2} - \frac{7}{200}(-1)^k 3^{5-k} + \frac{7^{4-k}}{200} + \frac{21\,k}{16} + \frac{7}{80}(-1)^k 3^{4-k}\,k$$



2.8 Rappresentazione modello I/U

La rappresentazione I/U, o rappresentazione corrente-tensione, è una forma di rappresentazione di un sistema che descrive la relazione tra la corrente di ingresso (I) e la tensione di uscita (U) del sistema.
Poiché il sistema in esame è un sistema SISO è possibile passare al modello I/U. Per ricavare tale modello, si utilizza la relazione tra la funzione di trasferimento e la risposta forzata:

$$G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)} = \frac{126}{(1+3z)^2(-1+7z)}$$

Da cui è possibile ricavare una equazione nel dominio z tra risposta forzata e trasformata dell'ingresso:

$$Y_f(z) \cdot (1 + 3z)^2(-1 + 7z) = 126 \cdot U(z)$$

$$Y_f(z) \cdot (-1 + z + 33z^2 + 63z^3) = 126 \cdot U(z)$$

$$-Y_f(z) + zY_f(z) + 33z^2 Y_f(z) + 63z^3 Y_f(z) = 126 \cdot U(z)$$

Da questa rappresentazione è possibile passare al dominio discreto attraverso l'applicazione del teorema dell'anticipo generalizzato della trasformata Zeta, ottenendo:

$$-y_f(k) + y_f(k+1) + 33\,y_f(k+2) + 63\,y_f(k+3) = 126 \cdot u(k)$$

Che rappresenta il modello Ingresso Uscita di questo sistema LTI-TD.

Un altro modo per ottenere questo risultato sarebbe quello di utilizzare le due matrici θ e Γ denominate rispettivamente matrice di osservabilità e matrice di trasferimento.

2.9 Risposta all'ingresso $u(k) = 1(-k)$ attraverso la rappresentazione I/U

Il segnale $u(k) = \delta(-k)$ è conosciuto come impulso unitario ritardato. È utilizzato per valutare la risposta forzata di un sistema lineare tempo-invariante (LTI) a tempo discreto.

Per poter valutare la risposta a tale ingresso, bisogna prima assicurarsi che il sistema sia almeno B.I.B.O. stabile. Il criterio della asintotica stabilità afferma che un sistema LTI-TD è asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento hanno modulo strettamente minore di 1. Poiché questo criterio è rispettato si può dire che il sistema sia asintoticamente stabile e di conseguenza BIBO stabile, in quanto:

$$Asintotica\ Stabilità \Rightarrow BIBO\ Stabilità$$

Di conseguenza si può affermare che per $k \rightarrow -\infty$ il sistema è asintoticamente stabile, quindi la componente libera e la componente transitoria della risposta tenderanno a zero. Per $k < 0$ sarà presente solo la componente a regime della risposta a un normale gradino unitario.

$$y(k) = \begin{cases} y_{regime} \text{ per } k < 0 \\ y_{libera} \text{ per } k \geq 0 \end{cases}$$

La risposta a regime è uguale a $G(1)$ ed è uguale a $\frac{21}{16}$, come calcolato in precedenza.

Ora per calcolare la risposta libera utilizzando il modello I/U sarà necessario impostare le condizioni iniziali pari ad y_{regime} ed ovviamente l'ingresso pari a zero:

$$\begin{cases} -y(0) + y(1) + 33y(2) + 63y(3) = 0 \\ y(0) = y_{regime} \\ y(1) = y_{regime} \\ y(2) = y_{regime} \\ y(3) = y_{regime} \end{cases}$$

Ora è possibile calcolare la risposta libera sfruttando la Z-trasformata, e il "teorema dello shifting sinistro":

$$Z[-y(0) + y(1) + 33y(2) + 63y(3)] =$$
$$= -Y_l(z) + (z \cdot Y_l(z) - z \cdot y_l(0)) + 33(z^2 \cdot Y_l(z) - z^2 \cdot y_l(0) - z \cdot y_l(1)) +$$
$$+ 63(z^3 \cdot Y_l(z) - z^3 \cdot y_l(0) - z^2 \cdot y_l(1) - z \cdot y_l(2)) = 0$$

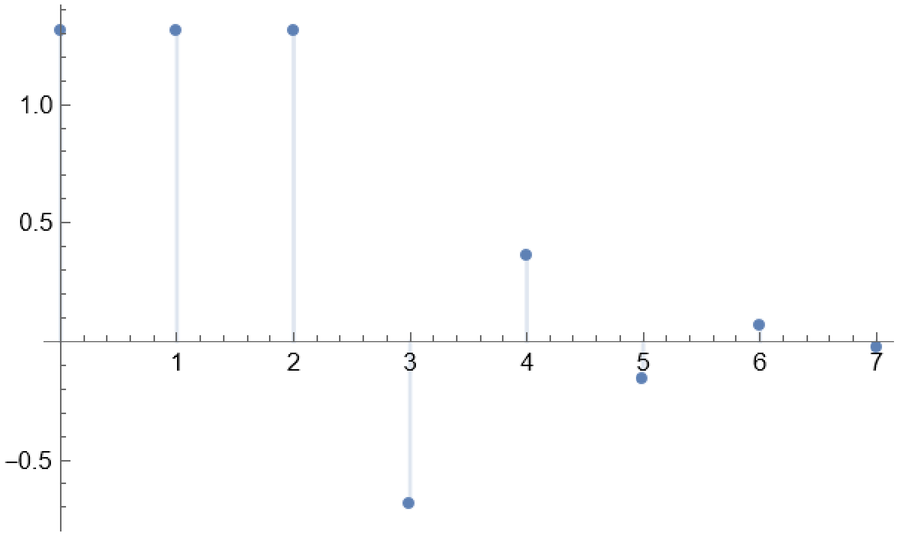
Sostituendo ora le condizioni iniziali e raggruppando per $Y_l(z)$ si ottiene:

$$(-1 + z + 33z^2 + 63z^3)Y_l(z) = \frac{2037}{16}z + 126z^2 + \frac{1323}{16}z^3$$

$$Y_l(z) = \frac{\frac{2037}{16}z + 126z^2 + \frac{1323}{16}z^3}{-1 + z + 33z^2 + 63z^3}$$

Da cui si ricava la risposta libera nel dominio del tempo attraverso l'antitrasformata Z.

$$\frac{1}{400} \times 21^{1-k} \left(-171\,(-7)^k + 196 \times 3^k + 180\,(-7)^k\,k\right)$$



Come si può notare dal grafico ottenuto la risposta risulta essere shiftata, pertanto questa deve essere corretta agendo sul punto di innesco della risposta libera:

$$y_{ris}[k\_] := \begin{cases} G[1] & k < 0 \\ y_{libera}[k+2] & k \geq 0 \end{cases}$$