

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

TESI DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

TELETRASPORTO QUANTISTICO

AUTORE

FRANCESCO MARCHIORI

MATRICOLA 1164099

RELATORE

PROF. ROBERTO CORVAJA

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

*Ai miei familiari e ai miei amici
che mi hanno supportato
in questo percorso.*

SOMMARIO

In questa tesi saranno presentati i principali principi fisici che stanno alla base del teletrasporto quantistico, andando poi ad analizzarne il funzionamento e le applicazioni.

In particolare, verranno illustrati alcuni aspetti fondamentali della meccanica quantistica, come il qubit e alcune proprietà importanti come sovrapposizione e entanglement, soffermandosi poi sull'aspetto circuitale della computazione quantistica.

In seguito, verrà esposto il funzionamento vero e proprio del teletrasporto quantistico, indicandone protocollo e presentazione formale, per poi implementare questo metodo di comunicazione attraverso alcune simulazioni ed infine andando a presentare l'esperimento in un vero e proprio computer quantistico.

In conclusione, verranno esposti i principali ambiti in cui questa tecnologia può essere applicata, soffermandosi soprattutto su come possa essere utilizzata per rendere totalmente sicuro qualsiasi tipo di telecomunicazione.

Nel Capitolo 2 verranno affrontati ed analizzati i principi fondamentali della meccanica quantistica, soffermandosi principalmente sulla descrizione matematica di alcune proprietà come sovrapposizione e *entanglement*. Si tratteranno quindi sistemi di due qubit nelle varie combinazioni ponendo particolare attenzione agli stati di Bell, con i quali saranno descritti qubit correlati quantisticamente e che permettono una rappresentazione algebrica del fenomeno. Inoltre verrà investito l'aspetto circuitale del calcolo quantistico, in

modo da avere gli strumenti necessari per simulare e creare un circuito per il teletrasporto.

Nel Capitolo 3 invece, verrà trattato in maniera sostanziale il concetto di teletrasporto quantistico, fornendone prima una panoramica del sistema, soffermandosi sulle componenti necessarie per poterlo ottenere e dando una presentazione non formale del sistema. Verrà poi esposto il protocollo del teletrasporto, enunciando e descrivendo i vari punti che lo caratterizzano, per poi passare ad una dimostrazione matematica del processo. Infine verrà esposta un'implementazione circuitale attraverso il pacchetto software supportato da *IBM Quantum Experience*, in modo da simulare innanzitutto il circuito in un computer classico, utilizzando due sistemi di verifica diversi, per poi andare a sfruttare un computer quantistico per realizzare fisicamente il teletrasporto, andando poi ad analizzarne i risultati e l'effetto dell'eventuale rumore.

Nel Capitolo 4 infine verranno esposti in maniera più dettagliata 3 esempi di applicazione per il teletrasporto quantistico: si tratterà innanzitutto del Quantum Internet, una rete con la quale è possibile mettere in comunicazione computer quantistici in ogni parte del mondo, per la quale saranno necessari dei particolari ripetitori che utilizzeranno proprio la tecnologia trattata in questa tesi; si fornirà poi un esempio di applicazione per la crittografia, il quale consiste nel rendere assolutamente sicura una comunicazione tra due parti utilizzandone una terza; in conclusione verrà esposta una teoria molto recente che potrebbe permettere il trasferimento di energia utilizzando il teletrasporto.

INDICE

1	Introduzione	1
2	Principi di Calcolo Quantistico	5
2.1	Qubit e sovrapposizione	5
2.2	Entanglement Quantistico	7
2.3	Stati di Bell	8
2.3.1	Misura di Bell	10
2.4	Porte quantistiche e rappresentazione vettoriale	10
3	Teletrasporto di uno stato quantistico ignoto	15
3.1	Panoramica del sistema	15
3.2	Protocollo	17
3.3	Presentazione formale	17
3.4	Implementazione circuitale	20
3.4.1	Simulazione e verifica tramite confronti tra sfere di Bloch	22
3.4.2	Simulazioni e verifiche con QASM	24
3.4.3	Esecuzione del circuito in un computer quantistico . . .	25
4	Possibili applicazioni del teletrasporto quantistico	29
4.1	Quantum Internet	29
4.2	Quantum Cryptography	31
4.3	Quantum Energy Teleportation	33
5	Conclusioni	35
	Bibliografia	38

ELENCO DELLE FIGURE

2.1	Rappresentazione della sfera di Bloch.	7
2.2	Schema di una porta CNOT, dove <i>target</i> è il qubit su cui agirà l'operatore NOT nel caso in cui <i>controllo</i> si trovi nello stato $ 1\rangle$	12
2.3	Combinazione di H e CNOT.	13
3.1	Panoramica del sistema.	16
3.2	Struttura generale del circuito.	21
3.3	Stato iniziale $ \psi\rangle$ generato casualmente.	22
3.4	Circuito per la verifica con sfera di Bloch.	23
3.5	Stato finale di tutti i qubit dopo la simulazione del circuito.	23
3.6	Circuito per la verifica con QASM.	24
3.7	Risultato delle simulazioni con QASM.	25
3.8	Circuito per l'esecuzione in un computer quantistico.	26
3.9	Risultato delle esecuzioni del computer quantistico.	26
4.1	Schema di un canale di comunicazione con 3 ripetitori.	31
4.2	Panoramica del sistema per il teletrasporto quantistico con- trollato.	32

ELENCO DELLE FIGURE

INTRODUZIONE



Quando si parla di teletrasporto, si pensa a delle fiction fantascientifiche, dove sono presenti dispositivi che permettono ad una persona di scomparire in un determinato luogo per riapparire ad una grande distanza. Sebbene questa tecnologia sia attualmente impraticabile con le conoscenze scientifiche odierne, l'idea è sicuramente molto interessante e risolverebbe innumerevoli problemi di trasporto in tutto il mondo. Nel mondo quantistico però una tecnologia simile potrebbe già esistere, ma non prevede ancora il teletrasporto di oggetti, bensì di informazioni, o più precisamente di "stati" di un sistema. L'idea di un teletrasporto per esseri umani, sviluppato anche nella serie "Star Trek", consiste nella scansione di un oggetto o di una persona in un determinato luogo da cui poi scomparirà, per poi inviare queste informazioni ad un altro dispositivo il quale dovrà ricostruire l'oggetto del teletrasporto per creare una replica esatta. La fisica quantistica però afferma che ciò è impossibile, poiché la misura delle proprietà di un determinato sistema ne compromette l'integrità, e soprattutto il *principio di indeterminazione di Heisenberg* dimostra che è impossibile conoscere tutte le proprietà di un sistema con certezza assoluta: per esempio, si può conoscere esattamente la posizione o la quantità di moto di un elettrone, ma non entrambe.

Questo limite al sogno del teletrasporto però non è necessariamente un ostacolo invalicabile, e anzi, può essere sfruttato per ottenere qualcosa di diverso: dal momento che l'operazione di misura compromette lo stato di un sistema, basterà non eseguire misurazioni per poterlo trasmettere. Sarà necessario però un canale di comunicazione che permetta di inviare dell'informazione "incerta", e la meccanica quantistica fornisce lo strumento adatto a questa esigenza: l'*entanglement quantistico*.

Ma prima di analizzare questo fenomeno è importante fare alcune conside-

razioni su alcuni concetti molto importanti della fisica quantistica. Secondo questa teoria infatti, alcuni sistemi possono trovarsi in uno stato "sovrapposto", in cui possono assumere due forme diverse contemporaneamente, fino a che non si esegue una misura. L'esempio più famoso è sicuramente quello del gatto di Schrödinger: un gatto viene messo in una scatola con all'interno un dispositivo che ha il 50% di probabilità di uccidere l'animale; quando la scatola viene chiusa il gatto può essere rappresentato come una combinazione di "morto" e "vivo", poiché è impossibile sapere se il dispositivo si è azionato oppure no. Quando poi viene aperta la scatola per osservare se effettivamente il gatto è ancora vivo, questo assume istantaneamente uno dei due stati possibili, e solo in questo momento si può sapere se è sopravvissuto oppure no.

Precisando che il precedente era un esperimento mentale e che nessun animale è stato ucciso o ferito durante la dimostrazione di teorie quantistiche, questo esempio è importante per dimostrare lo stato *sovrapposto* di un sistema fino a che non viene eseguita una misura. Un bit quindi, il quale può essere rappresentato con 0 o 1, avrà un corrispettivo quantistico che potrà essere sia 0 che 1 contemporaneamente, fino a che non viene misurato e assumerà uno dei due stati.

Il fenomeno dell'*entanglement quantistico*, privo di un corrispettivo classico, costituisce uno dei più grandi misteri della fisica moderna: due particelle *entangled* infatti possono interagire tra di loro anche a grandissime distanze, e la misura di una delle due comporta la conoscenza dello stato dell'altra. Si supponga per esempio di avere due gatti di Schrödinger *entangled* tra di loro (ossia correlati quantisticamente). Dopo essere stati chiusi all'interno delle scatole, uno di questi viene tenuto sulla Terra, mentre l'altro viene spedito in una galassia molto lontana: se per esempio una delle scatole viene aperta e il gatto risulta vivo, si potrà conoscere con certezza lo stato dell'altro gatto, il quale invece sarà morto.

Questa proprietà della meccanica quantistica non è ancora stata spiegata e fu anche oggetto di innumerevoli controversie [1], ma è stata dimostrata innumerevoli volte [2] ed è stato osservato come si possono trovare in natura processi che permettano di creare particelle *entangled* tra di loro [3][4][5].

Questa caratteristica della fisica quantistica può essere utilizzata quindi per creare un canale di comunicazione tra due sistemi molto distanti tra di loro, e porta inoltre il vantaggio di una comunicazione istantanea e senza errori. Purtroppo però, il teletrasporto quantistico non può essere utilizzato per comunicazioni a velocità maggiori di quelle della luce. Per poter implementare questa tecnologia infatti è necessario avere, oltre ad una coppia di particelle correlate quantisticamente, un canale di comunicazione classico; quest'ultimo è necessario poiché le due parti hanno la necessità di scambiarsi informazione classica (sotto forma di bit), e questo aspetto limita la velocità della comunicazione. Un altro limite fondamentale è costituito dal teorema del *no-cloning*, il quale afferma che è impossibile copiare lo stato sovrapposto di un sistema, e di conseguenza il mittente per poter inviare l'informazione dovrà "distruggerla" (dove questa operazione di distruzione è costituita dalla misura e di conseguenza dal collasso dello stato del sistema).

Nonostante le limitazioni di questa tecnologia, il teletrasporto quantistico può trovare largo utilizzo come sistema di comunicazione tra computer quantistici e può essere inoltre sfruttato per fornire trasmissioni di dati sicure tra due interlocutori. In particolare il primo aspetto è di grande interesse, poiché negli ultimi anni il calcolo quantistico è diventato oggetto di ricerche sempre più frequenti, in quanto risulta nettamente in vantaggio rispetto alla computazione classica in determinati aspetti.

Un esempio molto importante è sicuramente quello della crittografia: il modello attuale infatti consiste nel cifrare un messaggio attraverso una chiave che è costituita da un numero intero molto grande, e per decifrarlo senza conoscere questa chiave è necessaria una fattorizzazione in numeri primi, processo estremamente lungo per un computer classico ma relativamente veloce per uno quantistico. Esistono quindi sistemi di crittografia quantistica, che, seguendo la natura probabilistica del modello fisico su cui si basano, promettono una comunicazione estremamente sicura. Altri campi di applicazioni possono essere trovati nella simulazione di sistemi complessi (come ad esempio reti neurali), previsioni dei mercati finanziari, sviluppo di intelligenze artificiali, miglioramenti nell'ambito del *machine learning* e addirittura supporto nella ricerca sull'Alzheimer [6].

Lo sviluppo dei computer quantistici presenta però molte difficoltà, poiché essi sono particolarmente sensibili a rumore e decoerenza quantistica, un fenomeno che descrive un'interazione termodinamica irreversibile tra sistemi quantici che comporta quindi la perdita di coerenza della funzione d'onda. Questi inconvenienti rallentano la corsa alla *quantum supremacy*, termine con cui ci si riferisce alla dimostrazione della superiorità e della convenienza di un dispositivo quantistico programmabile rispetto ad computer classico riguardo alla soluzione di un determinato problema: un esempio è costituito dall'algoritmo di Shor, con il quale è possibile calcolare la fattorizzazione in numeri primi per un numero intero a n bit con una complessità $O(n^3)$, mentre un computer classico risolve lo stesso problema con una complessità $O(2^{\frac{n}{3}+o(1)})$. Google aveva annunciato di poter ottenere la *quantum supremacy* entro la fine del 2017 [7], ma la conferma ufficiale arrivò il 23 ottobre 2019 [8]: Google sostiene di aver ottenuto la *quantum supremacy* con un array di 54 qubit di cui 53 funzionali, i quali sono stati utilizzati per eseguire una serie di operazioni in 200 secondi che un supercomputer avrebbe impiegato 10000 anni per completare; IBM tuttavia sostiene l'esagerazione di queste rivendicazioni suggerendo un tempo più ragionevole di 2.5 giorni rispetto ai 10000 anni [9].

Quest'ultima azienda, in particolare, è tra le più importanti nella ricerca sui computer quantistici, tanto che rendono disponibili alcuni dei loro sistemi a chiunque desideri testarli a fini di ricerca e sviluppo o utilizzarli per l'apprendimento del calcolo quantistico. La *IBM Quantum Experience* infatti permette di creare e simulare circuiti attraverso dei pacchetti software (Qiskit), per poi andarli ad eseguire su dei veri e propri computer quantistici, i quali possono possedere da qualche qubit fino a 15 qubit. È possibile quindi simulare e testare fisicamente il teletrasporto quantistico, andandone a rappresentare il circuito ed analizzarne i risultati, in modo da verificare se e in che quantità siano presenti errori e rumore.

PRINCIPI DI CALCOLO QUANTISTICO



In questo capitolo verranno descritti ed analizzati alcuni concetti fondamentali della meccanica e della fisica quantistica, in quanto le proprietà utilizzate per descrivere il funzionamento del teletrasporto si discostano molto dall'apparato deterministico che caratterizza la fisica classica.

2.1 QUBIT E SOVRAPPOSIZIONE

Poiché il teletrasporto quantistico può essere utilizzato per inviare e ricevere informazione anziché materia, sarà utile introdurre il concetto di *qubit*. Nella computazione classica infatti vengono usati dei *bit*, ovvero l'unità di informazione che viene utilizzata nei computer per costituire un qualsiasi tipo di messaggio o istruzione; questi bit (quando vengono considerati come cifre binarie) possono essere rappresentati come 0 e 1 e a livello fisico corrispondono al valore di tensione presente all'interno di un circuito o di una porta logica.

Nel calcolo quantistico vengono invece utilizzati i *qubit*: trattandosi del corrispettivo del modello classico, essi costituiscono la minima unità di informazione quantistica, ma la loro peculiarità risiede nel fatto che possono assumere sia il valore logico 0 che 1 finché non viene eseguita un'osservazione all'interno del sistema, la quale farà collassare lo stato del qubit in uno dei valori che può assumere. Poiché infatti la fisica quantistica si prefigge di descrivere la realtà con un modello casuale anziché deterministico, è possibile descrivere un qubit con una combinazione lineare dei due stati che può assumere, associando ad ognuno una sua probabilità. Chiamati quindi $|0\rangle$ e $|1\rangle$ gli stati

2.1. QUBIT E SOVRAPPOSIZIONE

che possono assumere e α e β due arbitrari coefficienti complessi, è possibile rappresentare un qubit come:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

È possibile notare che, considerando $|\psi\rangle$ come spazio vettoriale, $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ne costituiscono una base ortonormale, dove α e β sono due numeri complessi i cui moduli quadri rappresentano la probabilità associata al rispettivo stato quantico (ottenendo quindi una restrizione su $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Questo modo di rappresentare l'informazione è intrinsecamente legato al concetto di *sovrapposizione* (in inglese *superposition*), che costituisce il primo postulato della meccanica quantistica, il quale afferma che lo stato di un sistema quantistico è specificato da una funzione d'onda, la quale può essere espressa come un vettore in uno spazio di Hilbert complesso [10].

Un modo per rappresentare graficamente l'informazione contenuta all'interno di un qubit è l'utilizzo della *sfera di Bloch*, una rappresentazione tridimensionale che permette di visualizzare i quattro gradi di libertà di un qubit ($|0\rangle$, $|1\rangle$ e i due gradi dei numeri complessi α e β) rimuovendone uno grazie alla condizione su $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Un qubit quindi può essere rappresentato anche come:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (2.2)$$

dove lo stato $|\psi\rangle$ può essere rappresentato da un punto qualsiasi in questa sfera, ma ogni volta che viene eseguita una misura questo stato collassa in uno dei due possibili stati $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Una rappresentazione grafica della sfera di Bloch è presente in Figura 2.1.

L'obiettivo del teletrasporto quantistico sarà quindi quello di trasferire queste combinazioni di stati da un sistema ad un altro, senza andare a compiere alcun tipo di misura che andrebbe a far collassare la funzione d'onda ad uno degli stati possibili.

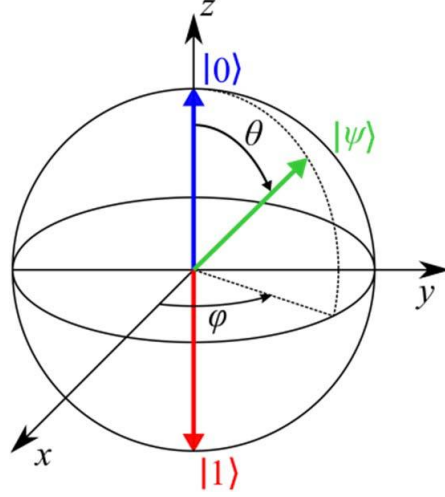


Figura 2.1: Rappresentazione della sfera di Bloch.

2.2 ENTANGLEMENT QUANTISTICO

Per fare in modo che le informazioni sullo stato quantico di un sistema vengano trasferite da un punto ad un altro è necessaria la presenza di una coppia di sistemi fisici correlati tra di loro attraverso un fenomeno fisico denominato *entanglement quantistico* (detto anche *correlazione quantistica*). Secondo la meccanica quantistica infatti, è possibile realizzare un sistema di due particelle che, facendole interagire in modo opportuno oppure generandole da uno stesso procedimento fisico (quale il decadimento di un atomo radioattivo), riescono ad influenzarsi istantaneamente anche a grandissima distanza; ciò significa che, data una coppia di particelle correlate quantisticamente il cui stato è ancora ignoto, se una di queste viene allontanata dall'altra di svariati anni luce (la distanza non è rilevante poiché questa proprietà è valida in qualsiasi punto dell'universo), nel momento in cui viene eseguita un'operazione di osservazione su una delle due, andando quindi a collassare la funzione d'onda dello stato sovrapposto in uno dei due stati possibili, si può determinare con una precisione del 100% lo stato dell'altra, il quale sarà opposto rispetto a quello osservato.

Si consideri per esempio una coppia di elettroni generati da uno stesso processo e quindi correlati quantisticamente, il cui stato di spin (che può essere

2.3. STATI DI BELL

$|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$) è ignoto. È possibile adesso distanziare indefinitamente questi elettroni, per poi misurare lo stato di uno dei due. Se quest'ultimo, per esempio, collassa in uno stato $|\uparrow\rangle$, si può conoscere a priori lo stato dell'altro, il quale sarà $|\downarrow\rangle$.

Questa proprietà della meccanica quantistica fu dimostrata sperimentalmente per elettroni [11] e addirittura gruppi di fotoni [12], ma il suo funzionamento rimane uno dei più grandi misteri della fisica moderna, tanto che fu discussa da Einstein (il quale chiamava questo fenomeno "spooky action at a distance") insieme a Podolsky e Rosen in uno studio [1] in cui elaborarono un esperimento mentale che divenne poi famoso col nome di "Paradosso di EPR" (dal nome dei fisici che lo idearono): in questo articolo gli scienziati mettono in discussione la teoria quantistica poiché, se un paio di particelle correlate quantisticamente tra di loro fossero poste ad una distanza enorme, nel momento in cui viene eseguita l'osservazione su una delle due, l'informazione sullo stato delle particelle dovrebbe viaggiare ad una velocità maggiore di quella della luce, violando così la teoria della relatività.

Dal nome del trattato scientifico e del paradosso ci si potrà riferire quindi ad una coppia di qubit o fotoni correlati quantisticamente come una *coppia EPR*.

2.3 STATI DI BELL

Nelle sezioni precedenti è stato esposto il concetto di qubit e la sua rappresentazione matematica in (2.1), in accordo col modello di *sovrapposizione*. Si consideri adesso un sistema di due qubit, $|\psi_A\rangle = \alpha_{0A}|0\rangle + \alpha_{1A}|1\rangle$ e $|\psi_B\rangle = \alpha_{0B}|0\rangle + \alpha_{1B}|1\rangle$. Poiché ogni qubit può assumere valore 0 e 1, si può rappresentare il sistema come:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (2.3)$$

dove $\sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2 = 1$, ottenendo quindi che, misurando lo stato di entrambi i qubit, si ottiene un sistema $|\psi'\rangle = |ij\rangle$ con probabilità $|\alpha_{ij}|^2$.

In un sistema a due elementi è anche possibile eseguire una misura solo sul

primo qubit. Per esempio, la probabilità che il primo qubit sia nello stato $|0\rangle$ è $P[\text{Primo qubit} = 0] = |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$. Si ottiene quindi un nuovo stato del sistema, il quale diventa:

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} \quad (2.4)$$

dove al denominatore è presente la radice della probabilità calcolata in precedenza, in modo che lo stato del sistema possa essere rappresentato nuovamente da un vettore unitario [13].

Si consideri adesso una coppia di qubit correlati quantisticamente. In questo caso la misura di uno dei due qubit, pur resituendo un risultato casuale, influenzerà direttamente la misura del secondo bit, ottenendo quindi 4 stati possibili (nel caso di correlazione a due qubit) chiamati *stati di Bell*. È stato trattato il caso in cui, ottenendo uno $|0\rangle$ dopo la misura sul primo qubit, si otteneva un valore opposto sul suo corrispettivo, ma è possibile anche che i due qubit si trovino nello stesso stato, ottenendo per esempio:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

dove quindi la misura sul primo qubit darà come risultato $|0\rangle$ o $|1\rangle$ con probabilità $\frac{1}{2}$, mentre poi il secondo qubit darà come risultato lo stesso stato del primo nel 100% dei casi. Le quattro basi per rappresentare gli stati di Bell nel caso di due qubit quindi sono:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Queste basi sono molto importanti per la comunicazione quantistica (con

2.4. PORTE QUANTISTICHE E RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

applicazioni in ambiti quali la codifica superdensa) e il teletrasporto quantistico, tuttavia il *principio di non segnalazione quantistica* (detto anche *teorema di non comunicazione* o in inglese *no-communication theorem*) impedisce la trasmissione di informazione a velocità maggiori di quelle della luce.

2.3.1 Misura di Bell

Un altro concetto che sarà fondamentale nel funzionamento del teletrasporto quantistico è la *misura di Bell* (traduzione dell'inglese *Bell state measurement*). La *misura di Bell* è una misurazione congiunta eseguita su un sistema di due qubit, che si risolve quindi in una proiezione dello stato del sistema in uno dei quattro stati di Bell mostrati in (2.6). Ogni sistema $|\psi'\rangle$ quindi può essere scritto come:

$$|\psi'\rangle = \alpha_+|\Phi^+\rangle + \alpha_-|\Phi^-\rangle + \beta_+|\Psi^+\rangle + \beta_-|\Psi^-\rangle \quad (2.7)$$

dove $|\alpha_\pm|^2$ e $|\beta_\pm|^2$ sono le probabilità associate ad ognuna delle basi. È interessante notare come, nel caso in cui due qubit non si trovino già in uno stato di Bell, essi verranno proiettati in uno di essi, e dato che questi stati sono correlati tra di loro, eseguire una misura di Bell corrisponde ad eseguire un'operazione di entanglement quantistico [14].

2.4 PORTE QUANTISTICHE E RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

Il teletrasporto quantistico può essere realizzato solamente in particolari computer chiamati *computer quantistici* i quali utilizzano qubit come unità di informazione. Per poter elaborare questi dati però sono necessarie, come nella computazione classica, alcune porte logiche, le cui combinazioni permettono di effettuare operazioni essenziali per processare l'informazione. Si tratteranno quindi alcune semplici porte logiche, che saranno poi necessarie per poter realizzare fisicamente il teletrasporto quantistico, sia in una simulazione che in un vero e proprio computer quantistico.

CAPITOLO 2. PRINCIPI DI CALCOLO QUANTISTICO

È stato esposto nella sezione 2.1 come i qubit, o in generale qualsiasi sistema quantistico che comprenda la sovrapposizione di due stati, possano essere espressi come dei vettori in uno spazio di Hilbert bidimensionale, dove (nel caso di (2.1) $|0\rangle$ e $|1\rangle$) ne costituiscono la base. Sarà comodo quindi esprimere questi sistemi come vettori colonna di due elementi, rappresentando quindi lo stato $|\psi\rangle$ in (2.1) come:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

In questo modo è possibile esprimere le porte logiche (a singolo qubit) come delle matrici 2x2, potendo quindi esprimere il risultato dell'operazione come una moltiplicazione matriciale.

La porta logica più semplice e fondamentale del calcolo è la porta NOT, la quale inverte il valore di un bit (da 0 a 1 o da 1 a 0). Nel caso di un qubit si vorrà ottenere quindi un passaggio da uno stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ a $|\bar{\psi}\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$. L'operatore NOT quindi può essere espresso come una matrice X, definita come:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ed, eseguendo l'operazione con il vettore colonna in (2.8) si ottiene:

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Un'altra importante porta "invertente" è la porta Z, la quale lascia invariato lo stato $|0\rangle$, ma inverte il segno dello stato $|1\rangle$. La matrice di Z è la seguente:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Queste due porte logiche verranno utilizzate nella loro forma a due qubit, dove uno di essi agisce come bit di controllo: per esempio la porta *controlled NOT* (detta CNOT o cX) esegue un'operazione NOT sul secondo qubit

2.4. PORTE QUANTISTICHE E RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

quando il primo si trova nello stato $|1\rangle$, altrimenti non agisce sul sistema. Lo stesso principio è utilizzato dalla porta cZ.

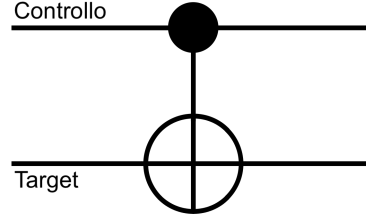


Figura 2.2: Schema di una porta CNOT, dove *target* è il qubit su cui agirà l'operatore NOT nel caso in cui *controllo* si trovi nello stato $|1\rangle$.

Un'altra porta fondamentale è la porta di Hadamard H . Questa agisce su un singolo qubit ed è rappresentata dalla seguente matrice:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Si può notare come, applicando questa porta ad uno stato $|\psi\rangle$ si ottiene:

$$H \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

e, passando alla notazione di Dirac, si ottiene:

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}|1\rangle = \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.14)$$

che si traduce quindi in un cambio di base da $|0\rangle$ e $|1\rangle$ a $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ e $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ creando quindi uno stato di sovrapposizione.

È interessante studiare un particolare circuito che sarà molto utilizzato per creare delle coppie EPR, il quale è rappresentato qui di seguito in Fig. 2.3

In Figura 2.3 è illustrato un esempio dove sono rappresentati due qubit allo stato $|0\rangle$: quando uno di questi passa attraverso una porta di Hadamard avviene un cambio di base che lo porta ad uno stato sovrapposto, il quale viene poi utilizzato per controllare il secondo qubit attraverso la porta CNOT, ottenendo infine uno stato sovrapposto per il sistema, determinato da $|00\rangle +$

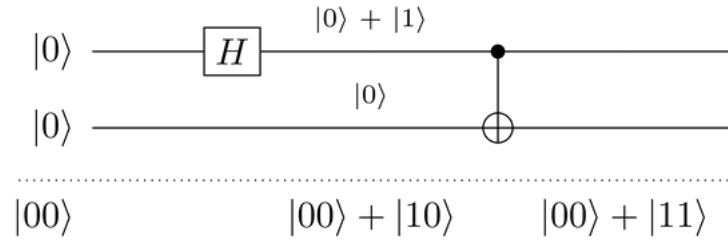


Figura 2.3: Combinazione di H e CNOT.

$|11\rangle$. In questo modo i due qubit sono stati correlati tra di loro, e si può dimostrare che con una qualsiasi combinazione in ingresso ($|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$) si ottiene sempre una coppia *entangled*. Questo tipo di circuito sarà usato quindi per creare *entanglement* tra due qubit, e sarà essenziale per la riuscita del teletrasporto quantistico.

2.4. PORTE QUANTISTICHE E RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE

TELETRASPORTO DI UNO STATO QUANTISTICO IGNOTO



In questo capitolo verranno trattati gli aspetti principali del funzionamento del "teletrasporto quantistico", termine coniato da Charles Bennet nel 1993 in [15] con cui ci si riferisce ad un modo per trasportare "istantaneamente" lo stato ignoto di un sistema ad un altro. Il termine "istantaneamente" è stato posto volontariamente tra virgolette, poiché questo tipo di teletrasporto presenta dei limiti: innanzitutto è ancora necessario un canale di comunicazione classico per poter trasferire alcune informazioni sullo stato quantistico dei sistemi, e di conseguenza questa tecnologia non può essere utilizzata per comunicazioni a velocità maggiori di quella della luce; inoltre il principio di indeterminazione di Heisenberg pone un limite su ciò che si può conoscere dello stato del sistema [16].

3.1 PANORAMICA DEL SISTEMA

Si supponga che Alice sia in possesso di uno stato quantistico $|\psi\rangle_C$ (che può essere per esempio lo stato di un qubit) e che voglia trasferire questo stato a Bob, il quale si trova ad una grande distanza. È importante notare come, dal momento che Alice vuole comunicare uno stato quantistico *ignoto*, non è possibile eseguire una misura per poi inviare il risultato a Bob, poiché in questo caso lo stato collasserebbe in uno dei possibili stati, inviando quindi un tipo di informazione diversa da quella che si voleva trasmettere. Per teletrasportare uno stato indefinito quindi non è possibile eseguire misure di tipo classico, e sono necessari due elementi importanti:

3.1. PANORAMICA DEL SISTEMA

- Una coppia di qubit precedentemente correlati quantisticamente tra di loro, uno in possesso ad Alice ed uno in possesso a Bob
- Un canale di comunicazione classico per la comunicazione tra Alice e Bob

In questo modo Alice è in possesso di due qubit (il qubit C il cui stato è oggetto del teletrasporto e il qubit A correlato con quello di Bob) mentre Bob ha solo il qubit B su cui verrà teletrasportato lo stato del qubit C. Il sistema è rappresentato graficamente nella Figura 3.1

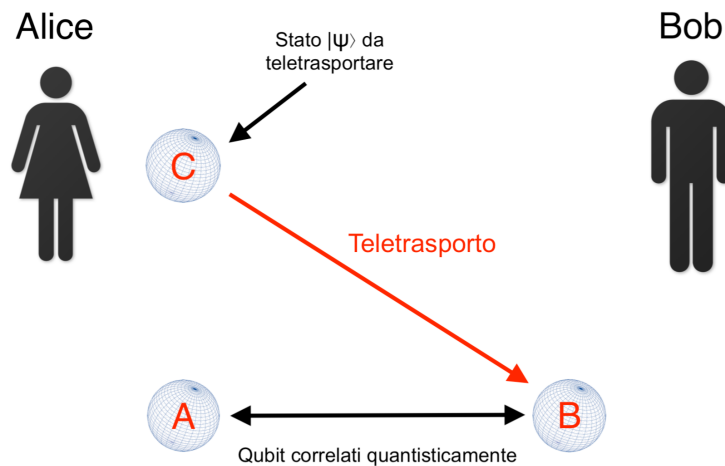


Figura 3.1: Panoramica del sistema.

L'idea generale prevede che Alice esegua una misura di Bell su entrambi i qubit in suo possesso, andando poi ad esprimere il risultato dell'operazione come combinazione lineare degli stati di Bell associati ai qubit correlati. Questa azione ha una conseguenza importante sul sistema, poiché in questo modo i qubit A e C (quelli su cui è stata eseguita la misura di Bell) saranno correlati tra di loro, spezzando così l'entanglement tra A e B [17]. Dopodiché, avendo individuato uno dei quattro possibili stati di Bell, viene inviato il risultato a Bob (attraverso il canale di comunicazione classico) il quale può

eseguire una trasformazione unitaria sul qubit in suo possesso, ottenendo con successo il teletrasporto di $|\psi\rangle_C$.

3.2 PROTOCOLLO

Dati i prerequisiti elencati in precedenza, il protocollo di comunicazione per il teletrasporto quantistico è il seguente:

1. Viene generata una *coppia EPR*, viene poi inviato un qubit ad Alice ed uno a Bob.
2. Alice compie una misura di Bell del qubit facente parte della coppia EPR e del qubit che sarà oggetto del teletrasporto, ottenendo come risultato uno dei quattro possibili risultati.
3. Dal momento che i possibili risultati sono quattro, possono essere espressi tramite due bit classici di informazione. Alice quindi invia questi due bit a Bob.
4. Come risultato della misura di Bell effettuata nel punto 2, il qubit facente parte della coppia EPR in possesso a Bob si può trovare in uno tra quattro possibili stati: di questi uno è identico allo stato originario del qubit che si vuole teletrasportare e gli altri tre sono strettamente correlati. Bob quindi compie una trasformazione unitaria sul suo bit (o non la compie affatto) in accordo con l'informazione ricevuta da Alice.

3.3 PRESENTAZIONE FORMALE

Alice è in possesso di un qubit C , il cui stato vuole inviare a Bob. Lo stato del qubit è il seguente:

$$|\psi\rangle_C = \alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C \quad (3.1)$$

3.3. PRESENTAZIONE FORMALE

Il punto 1 del protocollo prevede che sia generata una coppia di qubit correlati quantisticamente, e di conseguenza questi potranno trovarsi in uno dei quattro stati di Bell:

$$\begin{aligned}
|\Phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\
|\Psi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \\
|\Psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \\
|\Phi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Questa scrittura è equivalente a quella vista in (2.6).

A seguire si prenderà come esempio il caso in cui Alice e Bob condividano lo stato $|\Psi^+\rangle_{AB}$. Nel sistema quindi, lo stato complessivo di tutti i qubit è:

$$|\psi\rangle_C \otimes |\Psi^+\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \tag{3.3}$$

A questo punto, il secondo passo del protocollo prevede che Alice compia una misura di Bell sui due qubit in possesso, cioè A e C. In questo caso si possono ottenere quattro risultati diversi, ovvero $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$ e questi possono essere espressi come combinazioni lineari di stati di Bell, ottenendo quindi:

$$\begin{aligned}
|0\rangle_C \otimes |0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle_{CA} + |\Phi^-\rangle_{CA}) \\
|0\rangle_C \otimes |1\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle_{CA} + |\Psi^-\rangle_{CA}) \\
|1\rangle_C \otimes |0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle_{CA} - |\Psi^-\rangle_{CA}) \\
|1\rangle_C \otimes |1\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle_{CA} - |\Phi^-\rangle_{CA})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

CAPITOLO 3. TELETRASPORTO DI UNO STATO QUANTISTICO IGNOTO

Queste equazioni sono facilmente verificabili e qui in seguito è presente la dimostrazione del primo caso:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle_{CA} + |\Phi^-\rangle_{CA}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_C \otimes |0\rangle_A + |1\rangle_C \otimes |1\rangle_A) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_C \otimes |0\rangle_A - |1\rangle_C \otimes |1\rangle_A) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(2(|0\rangle_C \otimes |0\rangle_A)) \right) \\
 &= |0\rangle_C \otimes |0\rangle_A
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si può quindi riscrivere (3.3) eseguendo un cambio di base con quelle appena ricavate in 3.4, ottenendo quindi:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_C \otimes |\Psi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} \left[|\Phi^+\rangle_{CA} \otimes (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) + |\Phi^-\rangle_{CA} \otimes (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \right. \\
 &\quad \left. + |\Psi^+\rangle_{CA} \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + |\Psi^-\rangle_{CA} \otimes (\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La misura di Bell effettuata da Alice quindi proietterà il sistema su una delle basi $|\Phi^+\rangle_{CA}$, $|\Phi^-\rangle_{CA}$, $|\Psi^+\rangle_{CA}$ o $|\Psi^-\rangle_{CA}$ e, di conseguenza, la misura del sistema di tre qubit crollerà in uno dei quattro stati seguenti:

- $|\Phi^+\rangle_{CA} \otimes (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B)$
- $|\Phi^-\rangle_{CA} \otimes (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B)$
- $|\Psi^+\rangle_{CA} \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)$
- $|\Psi^-\rangle_{CA} \otimes (\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B)$

Si può notare come adesso i possibili stati del qubit B in possesso a Bob assomiglino molto allo stato del qubit C che voleva essere teletrasportato. Adesso quindi, seguendo il punto 3 del protocollo, Alice invierà due bit di informazione tramite il canale di comunicazione classico per illustrare a Bob

3.4. IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

in quale dei quattro stati appena presentati si trovano C ed A.

Bob adesso, conoscendo lo stato complessivo del sistema, può seguire l'istruzione 4 del protocollo, andando ad eseguire una trasformazione unitaria sullo stato del suo qubit per farlo combaciare con quello inviato da Alice. Si noti che in questo caso, se Alice determinasse che i suoi due qubit si trovano nello stato di Bell $|\Psi^+\rangle_{CA}$, Bob non dovrebbe fare nulla per completare correttamente il teletrasporto.

3.4 IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

Avendo dimostrato matematicamente il funzionamento del teletrasporto quantistico, è ora possibile andare a concretizzare questo processo attraverso alcune simulazioni, per poi andare ad applicare il protocollo in un circuito logico quantistico. Per poter realizzare ciò, è stato utilizzato un linguaggio di programmazione nominato *Python* e in particolare un software development kit open-source chiamato *Qiskit*, che permette non solo di creare e simulare circuiti, ma anche di inviare il codice a dei computer quantistici in possesso alla IBM, i quali possono eseguirlo e fornire dei risultati sperimentali.

Verranno realizzati tre tipi di circuiti diversi che implementano il teletrasporto in maniera diversa in base all'hardware su cui viene eseguito il programma e il metodo di verifica del corretto funzionamento del sistema. Questi circuiti condividono la stessa struttura generale e per concretizzarla sono necessari tre qubit e almeno due bit classici dove salvare l'informazione. Si può ora implementare ogni passo del protocollo con gli strumenti trattati nella sezione 2.4:

1. Per generare una coppia di qubit *entangled* è possibile utilizzare il circuito presentato in Figura 2.3, ponendo quindi una porta di Hadamard seguita da un controllo CNOT per l'altro qubit.
2. Alice ora può correlare lo stato $|\psi\rangle$ da inviare con il qubit A facente parte della coppia EPR, andando così a trasformare la misurazione della base di calcolo sui primi due qubit nella misurazione di Bell. Per

CAPITOLO 3. TELETRASPORTO DI UNO STATO QUANTISTICO IGNOTO

ottenere ciò utilizza lo stesso circuito usato per creare una coppia EPR, invertendo però CNOT e porta di Hadamard.

3. Alice compie una misurazione sui suoi due qubit e invia il risultato sul canale classico (rappresentato in questo caso da due linee diverse per ognuno dei bit).
4. Bob riceve i due bit di informazione in base al loro contenuto può applicare le seguenti porte:
 - $00 \rightarrow$ Nessuna porta
 - $01 \rightarrow$ Porta X
 - $10 \rightarrow$ Porta Z
 - $11 \rightarrow$ Porta Z e porta X

La struttura generale del circuito per il teletrasporto quantistico è quindi la seguente:

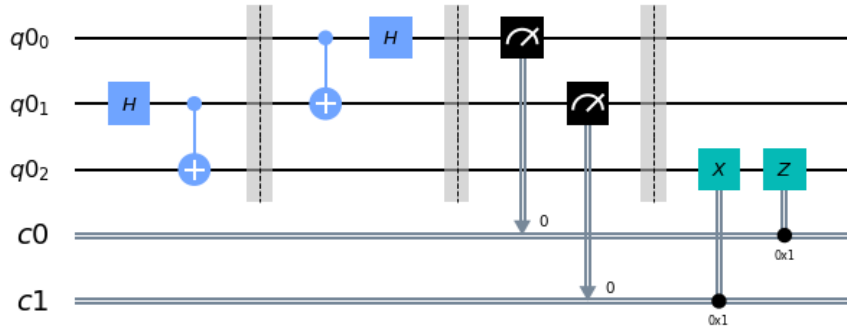


Figura 3.2: Struttura generale del circuito.

Le prime tre linee in Figura 3.2 rappresentano i tre qubit presenti nel sistema ($q0_0$ e $q0_1$ in possesso ad Alice e $q0_2$ in possesso a Bob), mentre le doppie linee in basso rappresentano i bit di informazione classica $c0$ e $c1$. Nelle prime due sezioni a partire da sinistra sono presenti rispettivamente il circuito di entanglement analizzato in Fig. 2.3 e l'implementazione circuitale della misura di Bell, mentre nella terza sezione i blocchi contenenti i contachilometri rappresentano l'operazione di misura dei qubit. Infine, nell'ultima

3.4. IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

sezione, sono presenti le porte X e Z controllate rispettivamente dal secondo e dal primo bit.

3.4.1 Simulazione e verifica tramite confronti tra sfere di Bloch

Si può cominciare con la simulazione del circuito, utilizzando come metodo di verifica del corretto funzionamento del sistema un confronto tra i qubit $|\psi\rangle_C$ e quello ottenuto da Bob, per esempio attraverso la loro rappresentazione sulla sfera di Bloch: generando infatti uno stato casuale $|\psi\rangle$, è possibile rappresentarlo nella sfera di Bloch, andando poi ad inizializzare questo valore al qubit 0 $q0_0$. È possibile poi andare a rappresentare sulla sfera tutti e tre i qubit dopo l'esecuzione del programma, e ci si aspetta che il qubit 2 di Bob $q0_2$ si trovi nello stesso stato di $|\psi\rangle$, mentre gli altri qubit, avendo subito una misura, si troveranno nello stato $|0\rangle$ o $|1\rangle$.

Si può quindi procedere alla generazione di uno stato casuale. Per fare ciò è stata utilizzata la funzione `random_state()` e viene generato il seguente stato $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} -0.68076 + 0.28831i \\ -0.0027 - 0.67338i \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

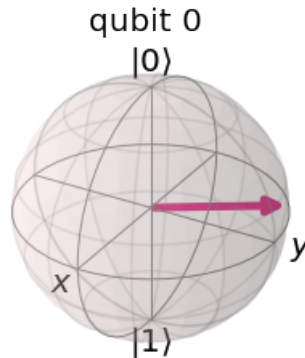


Figura 3.3: Stato iniziale $|\psi\rangle$ generato casualmente.

CAPITOLO 3. TELETRASPORTO DI UNO STATO QUANTISTICO IGNOTO

È ora possibile andare a simulare il circuito. Si può utilizzare lo stesso sistema presentato in Figura 3.2, con l'unica aggiunta dell'inizializzazione dello stato $|\psi\rangle$ appena generato al qubit 0 $q0_0$, costituita nel circuito dal blocco viola nella prima sezione di circuito. Si ottiene quindi:

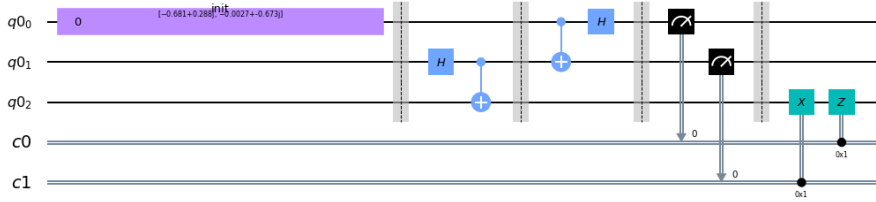


Figura 3.4: Circuito per la verifica con sfera di Bloch.

Dopo aver simulato il circuito (utilizzando come simulatore statevector simulator) è ora possibile andare a visualizzare lo stato di tutti e tre i qubit del sistema nella rappresentazione in sfera di Bloch, ottenendo il seguente risultato:

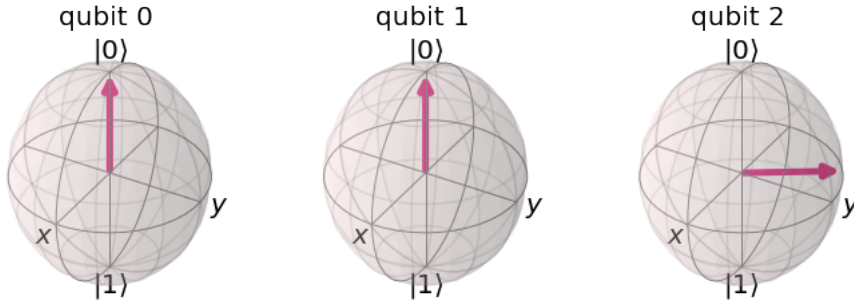


Figura 3.5: Stato finale di tutti i qubit dopo la simulazione del circuito.

È possibile notare che, come previsto, i primi due qubit si trovano in uno stato ben definito poiché è stata eseguita una misura su di loro, mentre il qubit 2 di Bob presenta lo stesso stato che era stato generato in Figura 3.3, confermando il successo dell'operazione. Si può anche verificare come il teorema del no-cloning sia stato rispettato, poiché $|\psi\rangle$ è stato teletrasportato dal qubit 0 al qubit 2, ma $q0_0$ non presenta più lo stato da teletrasportare, poiché la misura ha distrutto questo dato.

3.4. IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

3.4.2 Simulazioni e verifiche con QASM

Per la prossima esecuzione si utilizzerà un simulatore implementato in *Qiskit* chiamato QASM (Quantum Assembly Language), che permette di emulare l'esecuzione di un circuito su un vero dispositivo quantistico.

L'apparato sperimentale è molto simile a quello visto in Figura 3.4, con l'unica aggiunta di una funzione inversa per l'inizializzazione dello stato $|\psi\rangle$. Si è visto infatti che, come prima operazione, è stato inizializzato il qubit di Alice ad un valore casuale, oggetto del teletrasporto; si creerà ora una funzione che permetta di invertire questo processo, eseguendo quindi una conversione da uno stato $|\psi\rangle$ ad uno stato $|0\rangle$. Basterà poi misurare il qubit di Bob e verificare che il suo stato sia sempre $|0\rangle$ per ogni esecuzione del programma (a tal fine sarà aggiunto un bit di informazione classica, ovvero *c2*, dove poter salvare il risultato della misura).

Il circuito complessivo quindi risulta il seguente:

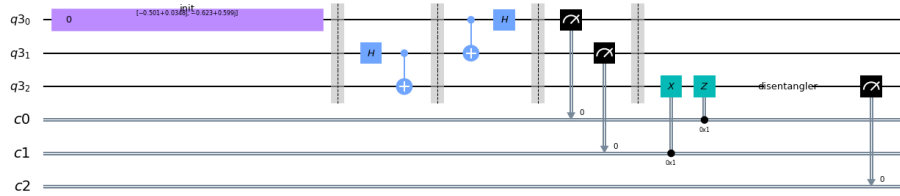


Figura 3.6: Circuito per la verifica con QASM.

dove *disentangler* si riferisce all'operazione di inversione dell'inizializzazione e in seguito viene effettuata la misura, salvandola sul terzo bit di informazione.

Il circuito poi è stato simulato con QASM per 1024 volte, e i valori dei possibili bit sono stati rappresentati in Figura 3.7.

L'ordine di lettura dei bit sull'asse x è (dal basso verso l'alto): $q3_2$, $q3_1$ e $q3_0$. Si può notare quindi come il qubit di Bob si trovi nello stato $|0\rangle$ nel 100% dei casi, mentre gli altri due si distribuiscono su quattro valori differenti circa con il $\sim 25\%$ di probabilità ciascuno, confermando quindi nuovamente il corretto funzionamento del circuito.

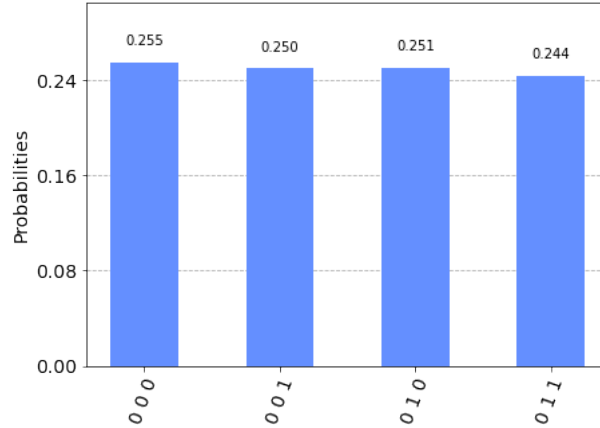


Figura 3.7: Risultato delle simulazioni con QASM.

3.4.3 Esecuzione del circuito in un computer quantistico

Dopo aver verificato che il circuito per il teletrasporto quantistico funziona nelle simulazioni, verificandolo con due metodi diversi, è ora possibile andare ad eseguire il programma in un vero e proprio computer quantistico. Questo è reso possibile grazie alla IBM Quantum Experience, servizio che permette a chiunque di realizzare ed eseguire un circuito quantistico per poi testarlo in uno dei computer messi a disposizione. Questi dispositivi possono avere caratteristiche diverse in base alle esigenze: posso avere da 1 a 15 qubit e possono avere determinate prestazioni e percentuali di errore su particolari porte logiche. L'esperimento presentato a seguire è stato realizzato da un computer quantistico a 5 qubit nominato "ibmq_london", il quale ha eseguito il codice alle ore 14:40 del 29 luglio 2020.

Il problema principale insorto durante la progettazione del circuito è il fatto che i computer quantistici della IBM non riescono ad eseguire qualsiasi tipo di istruzione dopo una misura di un qubit, e di conseguenza è impossibile eseguire i circuiti presentati in precedenza. Fortunatamente questo impedimento non compromette la realizzazione del teletrasporto, poiché, grazie al *principio di misurazione differita* discusso nel capitolo 4.4 di [17], è sempre possibile posporre le misure alla fine del circuito, ottenendo gli stessi risultati.

3.4. IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

Sarà necessario quindi modificare i punti 3 e 4 del protocollo: anziché misurare i qubit C e A dopo averli correlati tra di loro, per poi porre porte X e/o Z in base al loro valore, è possibile ottenere lo stesso risultato con delle porte cZ e cX, controllate rispettivamente dai qubit C ed A (ottenendo quindi lo stesso risultato dei punti 3 e 4 del protocollo). Si noti come in questo caso si perda la necessità del canale di comunicazione classico che inviava i valori dei due qubit C ed A attraverso due bit, perdendo quindi il beneficio di trasportare informazione quantistica attraverso un canale classico. Per verificare il corretto funzionamento del circuito si utilizzerà lo stesso metodo illustrato nella Sez. 3.4.2, sfruttando quindi il processo di inizializzazione inversa per poi andare a verificare che il qubit di Bob sia effettivamente nello stato $|0\rangle$. Il circuito complessivo sarà quindi il seguente:

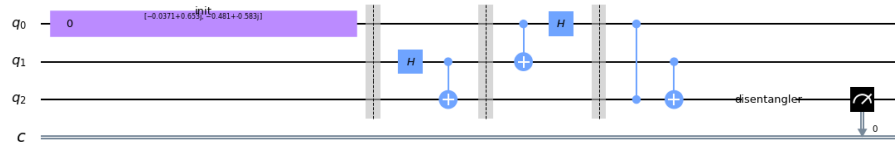


Figura 3.8: Circuito per l'esecuzione in un computer quantistico.

È ora possibile andare ad eseguire il programma sul computer quantistico, il quale, finite le operazioni, manda indietro il risultato di ogni misura (questo esperimento è stato eseguito 8192 volte). L'esito del test è il seguente:

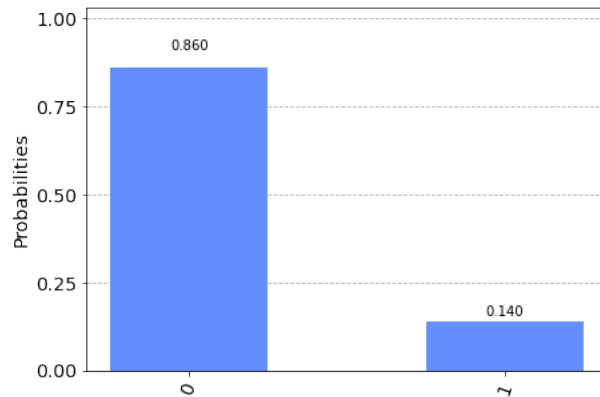


Figura 3.9: Risultato delle esecuzioni del computer quantistico.

CAPITOLO 3. TELETRASPORTO DI UNO STATO QUANTISTICO IGNOTO

Benché nella maggioranza dei casi il risultato corrisponde con il valore atteso, il 13.9892578125% delle volte il qubit di Bob presenta uno stato diverso da quello teletrasportato. Questa percentuale di errore è dovuta ad errori interni nelle porte logiche dei computer quantistici, i quali non riescono ad ottenere prestazioni perfette e conferma quindi come anche questo metodo di comunicazione non sia esente da errori o malfunzionamenti.

È importante fare una precisazione sull'esperimento appena effettuato. Questo test è stato dimostrativo del fatto che il teletrasporto quantistico è fisicamente realizzabile su apposite macchine e che presenta comunque una certa percentuale d'errore, ma tutto il sistema era situato in un unico processore di un unico computer, rendendo poco utile questo sistema di comunicazione ed eliminando il canale di comunicazione classico. Per poter realizzare questa tecnologia su grandi distanze è innanzitutto necessario che siano creati due qubit correlati quantisticamente e che siano inviati a ciascuno dei due computer che vogliono comunicare (Alice e Bob), dopodiché Alice può eseguire le operazioni illustrate nel punto 2 del protocollo per eseguire infine l'operazione di misura, rispettando così l'architettura degli attuali calcolatori quantistici. Sarà quindi nuovamente necessario un canale di comunicazione classico, in modo da far arrivare le informazioni a Bob, il quale può svolgere il punto 4 per realizzare con successo il teletrasporto (tenendo sempre conto del possibile errore).

3.4. IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

POSSIBILI APPLICAZIONI DEL TELETRASPORTO QUANTISTICO



Il teletrasporto quantistico è stato realizzato con successo in innumerevoli test, a partire dal 1997 con l'esperimento di Zeilinger [18], che riuscì a teletrasportare lo stato di un fotone, o con quello di De Martini, il quale nello stesso anno ottenne con successo il teletrasporto dello stato di un fotone limitando il numero di qubit a quelli della coppia *entangled*, imprimendo lo stato da teletrasportare con dei polarizzatori [19]. Più recentemente invece (2013), un gruppo di ricercatori dell'Università di Copenhagen è riuscito a teletrasportare informazioni tra due nubi di atomi di cesio poste ad una distanza di mezzo metro [20], e questa distanza è diventata sempre maggiore nel tempo, fino ad arrivare ai 1400 km di distanza ottenuti dalla Cina grazie al satellite Micius, il quale è riuscito a ricevere nel 2017 lo stato di un qubit generato in un laboratorio a Ngari (Tibet) [21].

In questo capitolo quindi verranno trattate le principali applicazioni per questa tecnologia, la quale promette di fornire comunicazioni assolutamente sicure e protette da qualsiasi attacco informatico.

4.1 QUANTUM INTERNET

Dal momento che il teletrasporto quantistico può essere utilizzato per inviare informazione quantistica, la prima applicazione che può venire in mente è quella di un *quantum internet*, ovvero un network di reti che permetta la

4.1. QUANTUM INTERNET

distribuzione e la comunicazione tra vari individui, esattamente come nel caso dell'internet "tradizionale". Chiaramente, il tipo di informazione che deve essere trasmessa è fondamentalmente diverso, dal momento che non si potranno trasmettere bit di informazione bensì qubit, e di conseguenza i terminali che potranno processarli dovranno essere necessariamente computer quantistici. Fortunatamente però, si possono utilizzare le fibre ottiche già usate per le comunicazioni classiche per trasferire informazione quantistica (nella forma di fotoni). Con questa tecnologia però, emergono alcuni problemi fondamentali:

- A causa del *no-cloning theorem*, in caso di errore l'informazione sarebbe definitivamente distrutta
- Sono necessari ripetitori per combattere l'attenuazione
- Sono necessari dispositivi dove salvare temporaneamente l'informazione

Il problema principale da risolvere è quindi l'attenuazione presente nella fibra, poiché utilizzando un classico amplificatore per rigenerare il segnale, questo andrebbe a distruggere le proprietà del fotone (quale l'*entanglement*); inoltre il teorema del no-cloning proibisce la copia di informazione quantistica. Pertanto, è necessario un approccio quantistico per superare la perdita di trasmissione: il ripetitore quantistico [22].

Il concetto di funzionamento del ripetitore quantistico è simile a quello di un ripetitore normale. Innanzitutto si divide il canale di trasmissione in segmenti dove l'attenuazione non è elevata, dopodiché si possono creare e separare coppie EPR in modo da "spezzare" la comunicazione in svariati teletrasporti. Si prenda come esempio il caso più semplice, in cui Alice vuole inviare uno stato $|C\rangle$ a Bob, ma l'attenuazione del canale è troppo grande e quindi lo si divide in due, ponendo al centro un ripetitore quantistico. Si creano ora due coppie EPR: $|A\rangle$ e $|R_a\rangle$, che verranno inviati rispettivamente ad Alice e al ripetitore, e $|R_b\rangle$ e $|B\rangle$, che verranno inviati rispettivamente al ripetitore e a Bob. Utilizzando adesso le proprietà del teletrasporto quantistico discusse nella Sez. 3.3, si può eseguire una misura di Bell sui fotoni del ripetitore, creando così un entanglement tra $|A\rangle$ e $|B\rangle$ [23]. Adesso basta eseguire un

ultimo teletrasporto tra $|C\rangle$ e $|B\rangle$, poiché il sistema è diventato equivalente a quello rappresentato in Fig. 3.1. Un esempio di un canale di comunicazione quantistico con tre ripetitori è rappresentato qui di seguito:

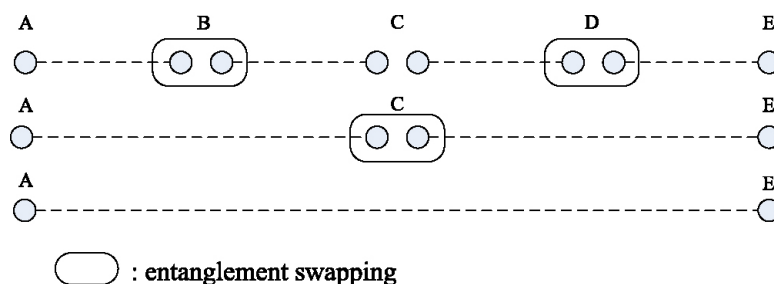


Figura 4.1: Schema di un canale di comunicazione con 3 ripetitori.

4.2 QUANTUM CRYPTOGRAPHY

La crittografia gioca un ruolo molto importante nelle comunicazioni odierne, poiché permette a due interlocutori di scambiarsi informazioni senza che una terza parte possa intercettare i messaggi. Per ottenere ciò con il calcolo classico, vengono utilizzate delle chiavi, le quali consistono sostanzialmente in numeri interi di grandi dimensioni che permettono di cifrare o decifrare un messaggio. Il problema principale di questo processo consiste nel fatto che scambiarsi queste chiavi può risultare difficoltoso in un canale di comunicazione classico, dal momento che una terza parte potrebbe intercettare la chiave e quindi decifrare le informazioni (in questo caso si può parlare di un attacco *man in the middle* o di *eavesdropping*). È importante precisare inoltre che le operazioni di cifratura e decifrazione consistono sostanzialmente in fattorizzazioni di numeri primi, le quali possono impiegare un'enorme quantità di tempo (dell'ordine di 10000 anni) per un computer classico che cerca di "indovinare" i fattori, ma possono essere molto semplici da risolvere per un computer quantistico, il quale può eseguire molte operazioni in parallelo. Per questo motivo negli ultimi anni sono stati proposti molti protocolli per la crittografia quantistica [24][25][26] (a partire dal primo presentato da Bennett e Brassard nel 1984 [27]), i quali si basano principalmente su un metodo

4.2. QUANTUM CRYPTOGRAPHY

di distribuzione a chiavi quantistiche (*quantum key distribution* o QKD), ma sono anche presenti alcuni articoli che sfruttano le proprietà del teletrasporto quantistico [28]. In quest'ultimo verrà utilizzata una modifica dell'apparato analizzato nella Sez. 3.1 che consiste nell'aggiunta di una terza parte, Charlie, il quale funge da canale di comunicazione sicuro. Sarà inoltre necessario che tra ognuna delle parti sia presente un canale di comunicazione classico, in modo che ognuno di essi possa comunicare con gli altri.

Si supponga quindi che Alice voglia inviare a Bob lo stato $|\psi\rangle_M$ di un qubit M, e che sia Alice che Bob che Charlie posseggano un qubit facente parte di un tripletto *entangled*. La panoramica del sistema è rappresentata qui di seguito:

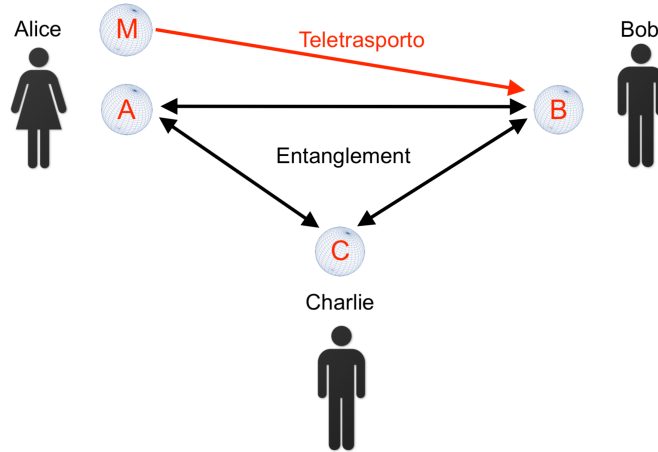


Figura 4.2: Panoramica del sistema per il teletrasporto quantistico controllato.

Si supponga inoltre che lo stato della terzina di qubit correlati quantisticamente sia:

$$|\xi\rangle_{ABC} = \frac{(|000\rangle + |110\rangle + |011\rangle + |101\rangle)_{ABC}}{2} \quad (4.1)$$

Lo stato congiunto del sistema quindi, dato $|\psi\rangle_M = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, diventa:

$$|\psi\rangle_M |\xi\rangle_{ABC} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_M \otimes \frac{(|000\rangle + |110\rangle + |011\rangle + |101\rangle)_{ABC}}{2} \quad (4.2)$$

Charlie adesso può misurare il suo qubit C, facendo collassare il suo stato in $|0\rangle_C$ o $|1\rangle_C$, e comunicando il risultato sia ad Alice che a Bob, il sistema può assumere rispettivamente i seguenti stati:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle_{MAB} &= |\psi\rangle_M |\xi\rangle_{ABC} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_M \otimes \frac{(|00\rangle + |11\rangle)_{AB}}{\sqrt{2}} \\ |\phi_2\rangle_{MAB} &= \psi\rangle_M |\xi\rangle_{ABC} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_M \otimes \frac{(|01\rangle + |10\rangle)_{AB}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Il sistema adesso può essere riscritto in maniera equivalente a quella trattata nell'Eq. (3.6), con l'unica differenza che anziché inviare lo stato del qubit C si vuole inviare lo stato del qubit M. Adesso quindi Alice può eseguire una misura di Bell su M ed A, andando a inviare il risultato a Bob, il quale poi può agire sul suo qubit in base a ciò che ha ricevuto.

Questa variazione dell'apparato tradizionale per il teletrasporto può quindi essere sfruttata per rendere sicura una comunicazione tra Alice e Bob: innanzitutto è necessario che Charlie (il quale può essere, per esempio, l'amministratore del server che viene utilizzato per la comunicazione) consenta la trasmissione di dati tra le due parti, poiché è necessaria una prima misura da parte sua per poter realizzare il teletrasporto con successo; inoltre l'*entanglement* tra i tre qubit A, B e C può essere testato per accertarsi del fatto che il sistema non sia stato compromesso da fattori esterni.

4.3 QUANTUM ENERGY TELEPORTATION

Una teoria che è stata sviluppata nell'ultimo decennio, ma che ancora non è stata sperimentata, è la *quantum energy teleportation* (QET), un'ipotesi fornita dal fisico giapponese Masahiro Hotta, il quale propone un protocollo per il teletrasporto di piccole quantità di energia utilizzando fluttuazioni quantistiche del vuoto cosmico [29][30][31]. Quando infatti viene eseguita un'operazione di misurazione nel vuoto assoluto, lo stato quantico del campo in quella regione viene disturbato ed eccitato, acquisendo quindi energia. Hotta suggerisce quindi di utilizzare l'informazione derivata dalla misurazione

4.3. QUANTUM ENERGY TELEPORTATION

ne per creare una corrente elettrica, la quale poi può essere teletrasportata in un'altra regione del vuoto cosmico, nel quale sono presenti particelle *entangled* e che quindi possono essere utilizzate come mezzo per il teletrasporto. Attualmente questa teoria presenta molte limitazioni, quali una massima distanza dell'ordine di qualche micrometro e una quantità di energia teletrasportabile che si limita a qualche centinaia di microelettronvolt, trovando quindi possibili applicazioni nella comunicazione all'interno di chip quantistici, piuttosto che promettersi come fonte di energia alternativa.

CONCLUSIONI



L'analisi teorica eseguita nel Capitolo 3 ha dimostrato come il teletrasporto quantistico costituisca un processo fisicamente realizzabile e possa essere utilizzato per comunicazioni a grandi distanze, a patto di possedere un canale classico preesistente tra i due interlocutori. Le simulazioni svolte su un normale computer hanno attestato inoltre la completa affidabilità di questa tecnologia a livello teorico, poiché ogni volta che la simulazione è stata eseguita il teletrasporto avveniva con successo e senza errore.

È stato possibile notare però come a livello pratico le prestazioni siano leggermente diverse. Quando lo stesso circuito che era risultato efficiente al 100% nelle simulazioni veniva eseguito in un vero computer quantistico, si poteva notare la comparsa di una percentuale di errore del $\approx 14\%$, ma questo valore può variare molto anche in base all'accuratezza nominale del computer quantistico. Questa percentuale rappresenta un problema sostanziale poiché, a causa del teorema del *no-cloning*, non è possibile recuperare l'informazione inviata, la quale è stata distrutta dall'operazione di misura e quindi è stata compromessa.

Fortunatamente, esistono sistemi di rivelazione e correzione degli errori che sono costituiti da modifiche parziali dell'apparato sperimentale: esistono infatti dei protocolli di correzione dell'errore per il teletrasporto (TEC o *Teleportation-based Error Correction*), e uno di questi è stato testato con successo su uno dei computer quantistici della IBM, permettendo di correggere errori operazionali su un computer a 14 qubit [32], mentre altri sono stati progettati specificamente per comunicazioni satellitari [33].

Queste misure sono necessarie per ottenere un teletrasporto efficace e saranno essenziali in future tecnologie come il quantum internet esposto nel Capitolo 4.1. La suscettibilità all'errore del teletrasporto (e più in generale dei

computer quantistici) è indice del fatto che sono necessarie ulteriori ricerche nel campo dell'informazione quantistica, disciplina ancora poco sviluppata a causa della grande quantità di energia e denaro necessaria per sostenerla. Se da un lato questo progresso non influenzerà la computazione utilizzata comunemente dall'utente medio, la quale si prevede seguirà ancora il modello classico, il calcolo quantistico promette di risolvere problemi su grande scala e raggiungere vette tecnologiche che sarebbero irraggiungibili per il più potente supercomputer realizzabile.

Un ultimo esempio molto attuale può essere sicuramente quello della lotta contro il coronavirus SARS-CoV-2. Questa pandemia che ha investito tutto il mondo a partire dai primi mesi del 2020 è ancora lontana dall'essere debellata, poiché non è ancora presente un vaccino ufficiale ed è necessaria ulteriore ricerca per trovare composti chimici che possano trattare il virus. Sono essenziali quindi simulazioni ad alta prestazione che permettano di accelerare questo processo, facendo uno screening di moltissimi agenti chimici per trovare un candidato farmaceutico, ed è stato esposto come il calcolo quantistico sia particolarmente adatto per questo tipo di operazioni, potendo eseguire moltissimi calcoli in parallelo. È questo lo scopo della ricerca di Swaroop Ghosh, leader dei ricercatori dell'Università pubblica in Pennsylvania, il quale vuole utilizzare il quantum machine learning per poter trovare un farmaco che possa aiutare a debellare la pandemia usando l'intelligenza artificiale [34].

Per funzionare efficacemente però queste tecnologie necessitano di quantità ingenti di informazioni, che in questo caso sono costituite da modelli e simulazioni di composti chimici e risultati sperimentali provenienti da altri laboratori, e per questo è sicuramente essenziale una rete di comunicazione tra i ricercatori. Il teletrasporto quantistico potrebbe fornire un supporto a questo network con una rete di comunicazione aggiuntiva tra computer quantistici attraverso il quantum internet, con il quale potrebbero scambiarsi informazioni utili e risultati delle simulazioni, potendo lavorare insieme ed unendo quindi gli sforzi dei vari laboratori.

È ragionevole pensare dunque che in un prossimo futuro le distanze sperimentali raggiunte per le comunicazioni attraverso il teletrasporto quantistico crescano ancora, diventando sempre più sicure ed affidabili, in modo da poter implementare nuove tecnologie ed aprire nuovi orizzonti in moltissimi campi scientifici. Negli ultimi anni infatti è stato possibile notare una crescita nell'interesse riguardo all'informazione quantistica, dal momento che sempre più aziende rendono disponibili computer quantistici all'uso pubblico. Le applicazioni per il calcolo quantistico sono già pronte, ma è necessario ancora molto lavoro di ricerca, e sarà importante tenere in forte considerazione le potenzialità fornite dal teletrasporto quantistico per una comunicazione efficace tra sistemi quantistici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, «Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?», *Physical review*, vol. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- [2] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, «Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem», *Physical review letters*, vol. 47, n. 7, p. 460, 1981.
- [3] E. Bleuler e H. Bradt, «Correlation between the states of polarization of the two quanta of annihilation radiation», *Physical Review*, vol. 73, n. 11, p. 1398, 1948.
- [4] C.-S. Wu e I. Shaknov, «The angular correlation of scattered annihilation radiation», *Physical Review*, vol. 77, n. 1, p. 136, 1950.
- [5] S. Prabhakar, T. Shields, A. C. Dada, M. Ebrahim, G. G. Taylor, D. Morozov, K. Erotokritou, S. Miki, M. Yabuno, H. Terai et al., «Two-photon quantum interference and entanglement at $2.1 \mu\text{m}$ », *Science Advances*, vol. 6, n. 13, 2020.
- [6] Y. H. Tung, «Quantum computing could help us tackle Alzheimer's disease: Dr Michio Kaku», accesso Agosto 2020. indirizzo: <https://e27.co/quantum-computing-help-us-tackle-alzheimers-disease-michio-kaku-20171108/>.
- [7] R. Courtland, «Google plans to demonstrate the supremacy of quantum computing», *IEEE Spectrum*, 2017.

BIBLIOGRAFIA

- [8] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell et al., «Quantum supremacy using a programmable superconducting processor», *Nature*, vol. 574, n. 7779, pp. 505–510, 2019.
- [9] D. M. Edwin Pednault John Gunnels e J. Gambetta, «On “Quantum Supremacy”», accesso Agosto 2020. indirizzo: <https://www.ibm.com/blogs/research/2019/10/on-quantum-supremacy/>.
- [10] J. Neumann, E. P. Wigner e R. Hofstadter, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton university press, 1955.
- [11] J. Markoff, «Sorry, Einstein. quantum study suggests ‘spooky action’ is real», *The New York Times*, vol. 21, 2015.
- [12] X.-C. Yao, T.-X. Wang, P. Xu, H. Lu, G.-S. Pan, X.-H. Bao, C.-Z. Peng, C.-Y. Lu, Y.-A. Chen e J.-W. Pan, «Observation of eight-photon entanglement», *Nature photonics*, vol. 6, n. 4, pp. 225–228, 2012.
- [13] U. V. Michael Crommie, «Bell States, Bell Inequalities», accesso Luglio 2020. indirizzo: <https://inst.eecs.berkeley.edu/~cs191/sp05/lectures/lecture2.pdf>.
- [14] Quantiki, «Bell measurement», accesso Luglio 2020. indirizzo: <https://www.quantiki.org/wiki/bell-measurement>.
- [15] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, «Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels», *Physical review letters*, vol. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- [16] S. Pirandola e S. L. Braunstein, «Physics: Unite to build a quantum Internet», *Nature*, vol. 532, n. 7598, pp. 169–171, 2016.
- [17] M. A. Nielsen e I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2002.
- [18] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, «Experimental quantum teleportation», *Nature*, vol. 390, n. 6660, pp. 575–579, 1997.

- [19] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, «Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels», *Physical Review Letters*, vol. 80, n. 6, p. 1121, 1998.
- [20] H. Krauter, D. Salart, C. Muschik, J. M. Petersen, H. Shen, T. Fernholz e E. S. Polzik, «Deterministic quantum teleportation between distant atomic objects», *Nature Physics*, vol. 9, n. 7, pp. 400–404, 2013.
- [21] J.-G. Ren, P. Xu, H.-L. Yong, L. Zhang, S.-K. Liao, J. Yin, W.-Y. Liu, W.-Q. Cai, M. Yang, L. Li et al., «Ground-to-satellite quantum teleportation», *Nature*, vol. 549, n. 7670, pp. 70–73, 2017.
- [22] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac e P. Zoller, «Quantum repeaters: the role of imperfect local operations in quantum communication», *Physical Review Letters*, vol. 81, n. 26, p. 5932, 1998.
- [23] N. Sangouard, C. Simon, H. De Riedmatten e N. Gisin, «Quantum repeaters based on atomic ensembles and linear optics», *Reviews of Modern Physics*, vol. 83, n. 1, p. 33, 2011.
- [24] A. K. Ekert, «Quantum cryptography based on Bell's theorem», *Physical review letters*, vol. 67, n. 6, p. 661, 1991.
- [25] C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail e J. Smolin, «Experimental quantum cryptography», *Journal of cryptology*, vol. 5, n. 1, pp. 3–28, 1992.
- [26] D. J. Bernstein, «Introduction to post-quantum cryptography», in *Post-quantum cryptography*, Springer, 2009, pp. 1–14.
- [27] C. H. Bennett e G. Brassard, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, 1984.
- [28] G. Ting, Y. Feng-Li e W. Zhi-Xi, «Controlled quantum teleportation and secure direct communication», *Chinese Physics*, vol. 14, n. 5, p. 893, 2005.
- [29] M. Hotta, «A protocol for quantum energy distribution», *Physics Letters A*, vol. 372, n. 35, pp. 5671–5676, 2008.

BIBLIOGRAFIA

- [30] —, «Quantum energy teleportation in spin chain systems», *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 78, n. 3, p. 034 001, 2009.
- [31] M. Hotta, J. Matsumoto e G. Yusa, «Quantum energy teleportation without a limit of distance», *Physical Review A*, vol. 89, n. 1, p. 012 311, 2014.
- [32] K. Anandu, M. Shaharukh, B. K. Behera e P. K. Panigrahi, «Demonstration of teleportation-based error correction in the IBM quantum computer», *arXiv preprint arXiv:1902.01692*, 2019.
- [33] W. Thacker e A. Gupta, «Quantum controlled error-correction teleportation (QCECT) scheme for satellite control and communication», *arXiv preprint arXiv:1512.00139*, 2015.
- [34] S. Small, «Researchers explore quantum computing to discover possible COVID-19 treatments», accesso Agosto 2020. indirizzo: <https://news.psu.edu/story/618250/2020/05/01/research/researchers-explore-quantum-computing-discover-possible-covid-19>.