

Esercitazione 15 - Gruppo AC

Misura della costante di Boltzmann attraverso misure di rumore

Marco Cilibrasi

Tommaso Pajero

14 maggio 2015

Scopo dell'esercitazione è effettuare una misura della costante di Boltzmann attraverso la misura del rumore termico in una serie di resistenze con valori diversi.

1 Schema a blocchi e accorgimenti generali

Per effettuare la misura abbiamo montato il circuito schematizzato in figura 1, effettuando il montaggio per stadi e verificando volta per volta il funzionamento di ciascuno.



Figura 1: Schema a blocchi del circuito utilizzato per la misura della costante di Boltzmann.

Per minimizzare il rumore introdotto nel circuito da elementi diversi dalla resistenza R , abbiamo cercato di utilizzare collegamenti corti e schiacciati sulla basetta. Abbiamo anche montato un sistema di filtraggio delle tensioni di alimentazione ponendo tra la tensione $V_+ = 5.05 \pm 0.03 \text{ V}$ e massa una resistenza $R_+ = 987 \pm 8 \Omega$ e un condensatore $C_+ = 107 \pm 4 \text{ nF}$, e tra $V_- = -5.04 \pm 0.03 \text{ V}$ e massa una resistenza $R_- = 974 \pm 9 \Omega$ e un condensatore $C_- = 101 \pm 4 \text{ nF}$.

2 Implementazione dei blocchi del circuito

2.a Pre-amplificatore

Abbiamo montato il circuito in figura 2 (formato dalla serie di due amplificatori), utilizzando i componenti elencati in tabella 1, un OpAmp AD708 e un *precision instrumentation amplifier* INA114.

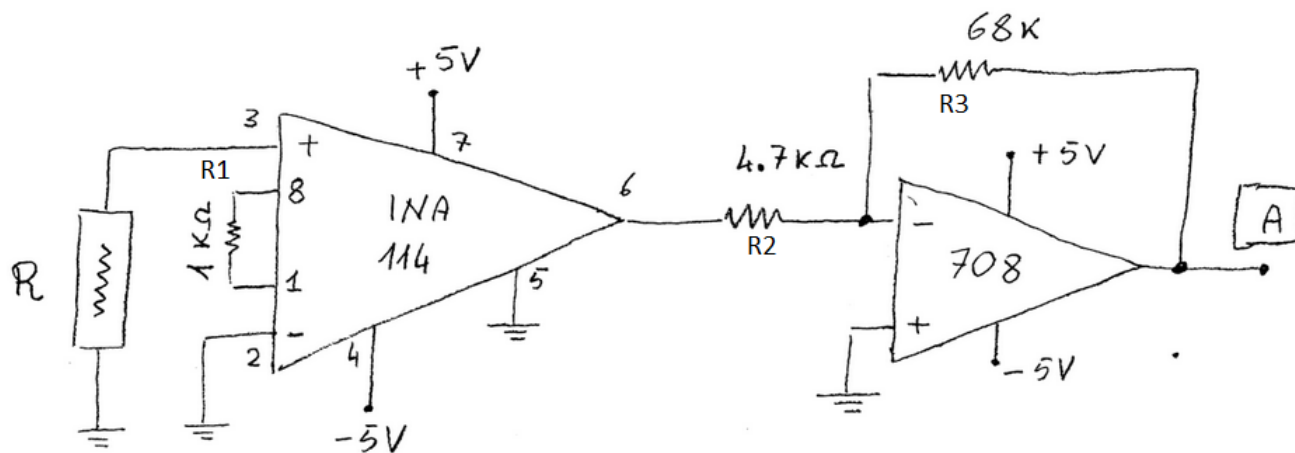
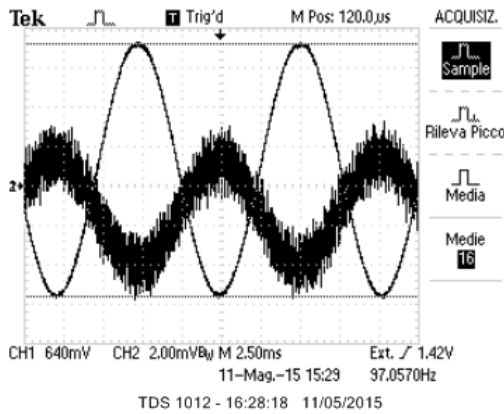


Figura 2: Schema circuitale del pre-amplificatore.

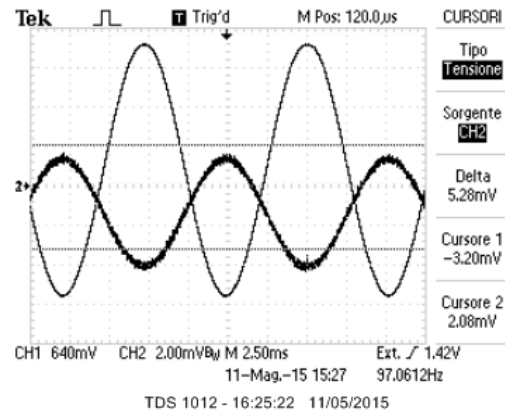
Tabella 1: Componenti utilizzati nel montaggio del pre-amplificatore.

Componente	Valore
R_1	$978 \pm 9 \Omega$
R_2	$4.68 \pm 0.04 k\Omega$
R_3	$66.9 \pm 0.5 k\Omega$

Per misurare la risposta in frequenza del circuito abbiamo inviato all'ingresso 3 dell'integrato INA114 un segnale sinusoidale di frequenza variabile tra 10 Hz e 200 kHz. Per evitare di saturare gli OpAmp (il segnale amplificato in uscita non deve superare l'ampiezza di 10 V picco-picco dell'alimentazione), il segnale di ingresso deve essere di ampiezza minore di $\frac{10 V}{52.1 \cdot 14.3} \simeq 13 \text{ mV}$, dove $52.1 \pm 0.8 = 1 + \frac{50 k\Omega}{R_1}$ e $14.3 \pm 0.2 = \frac{R_3}{R_2}$ sono i fattori di amplificazione attesi dei due amplificatori¹. Poiché il generatore di funzioni introduce sulle onde di ampiezza dell'ordine della decina di millivolt una distorsione non trascurabile, si è preferito porre in ingresso un partitore 10:1 con due resistenze da $986 \pm 9 \Omega$ e $9.96 \pm 0.09 k\Omega$, regolando poi il generatore per ottenere un segnale in ingresso di ampiezza $V_{pp} = 5.3 \pm 0.3 \text{ mV}$ ². In figura 3 si possono osservare il segnale in ingresso V_{in} e il segnale in uscita V_A così ottenuti. Le misure di V_A in funzione della frequenza sono riportate in tabella 2 e nel grafico in figura 4³.



(a) Segnale in modalità di acquisizione "sample".



(b) Segnale mediato su 16 acquisizioni.

Figura 3: Segnale V_A sul CH1 e V_{in} sul canale CH2. Si è acquisito il segnale in modalità "sample" per stimare l'incertezza su V_{in} , e mediato su 16 ripetizioni per stimare il valore di V_{in} . Nelle immagini è evidente un malfunzionamento dell'oscilloscopio al momento dell'acquisizione dell'immagine al computer: i cursori segnano la posizione dell'onda sullo schermo, ma al momento dell'acquisizione il segnale trasla verso il basso; una volta che l'immagine è stata acquisita dal computer il funzionamento ritorna alla normalità.

Abbiamo eseguito e rappresentato in figura due *fit* lineari utilizzando i primi otto dati e gli ultimi tre. Essi sono poco significativi per motivi differenti: il primo non ha alcuna significatività poiché tutti i punti utilizzati per l'interpolazione hanno ordinata identica e medesima incertezza, la retta decrescente perché ci sono prese solo tre misure nella zona di interesse.

Come atteso l'amplificazione, inizialmente costante, diminuisce per alte frequenze, con pendenza vicina a 30 dB/decade, a causa della finitezza del GBW *product* degli OpAmp. La frequenza di taglio, stimata osservando il grafico, si colloca intorno a $f_T \simeq 17 \text{ kHz}$. Come vedremo, questa frequenza è ben maggiore della frequenza di taglio superiore del prossimo stadio del circuito, il filtro passa-banda. Abbiamo stimato l'amplificazione di questo stadio del circuito in $A = \frac{4.1 \pm 0.1 V}{V_{in}} = 774 \pm 48^4$, in accordo con il valore atteso $A_{att} = \left(1 + \frac{50 k\Omega}{R_1}\right) \cdot \frac{R_3}{R_2} = 745 \pm 15$.

2.b Filtro passa-banda e post-amplificatore

Si è montato il circuito in figura 5 utilizzando le componenti elencate in figura 3. Il circuito è formato da un filtro passa-banda posto in serie a un amplificatore non invertente e a un *voltage follower*. Ci si attende per il filtro passa-banda una funzione di trasferimento (ottenuta applicando il principio del cortocircuito virtuale

¹Si veda il *datasheet* dell'amplificatore INA114.

²Dove non altrimenti specificato, le misure di tensione eseguite all'oscilloscopio sono da intendersi relative a valori picco-picco.

³Durante le misure abbiamo verificato che il valore di V_{in} si mantenesse costante entro l'incertezza.

⁴Siamo consapevoli che sarebbe più corretto scrivere $(7.7 \pm 0.5) \cdot 10^2$, ma useremo la notazione sopra per semplicità.

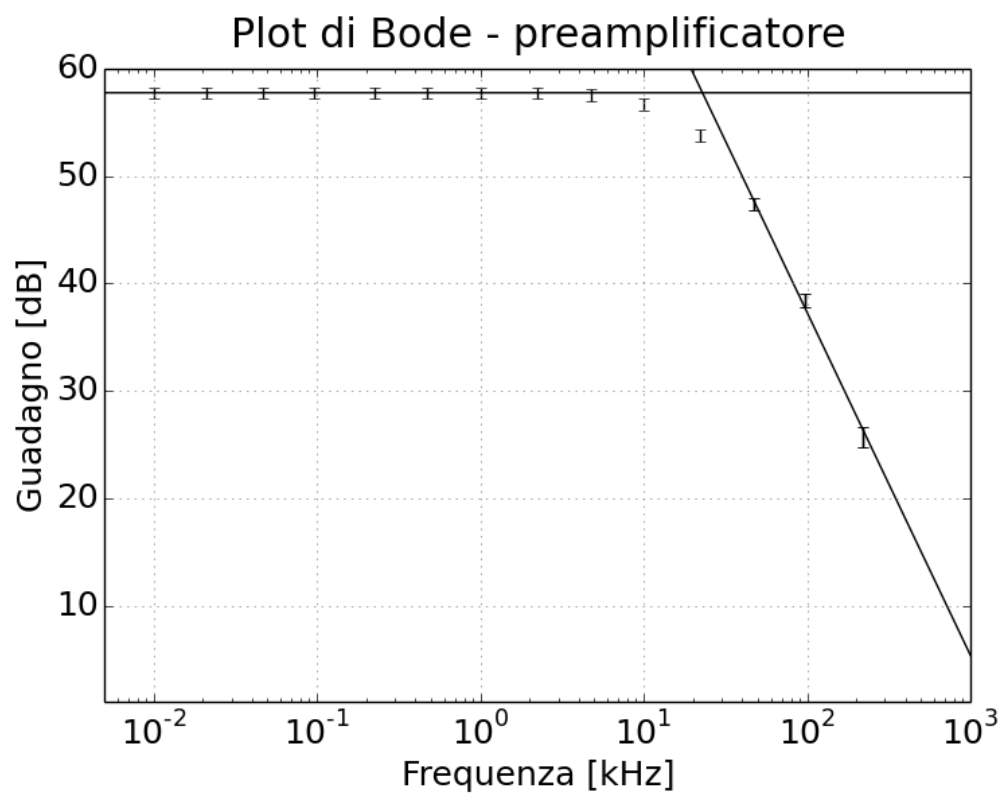


Figura 4: Risposta in frequenza del preamplificatore e fit con le due rette caratteristiche di un passa-basso.

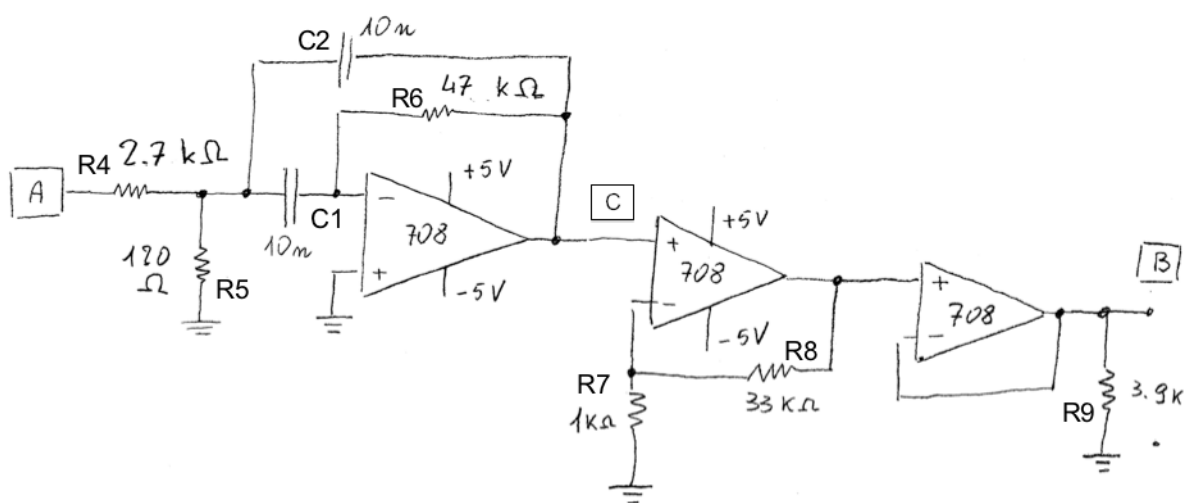


Figura 5: Filtro passa-banda, amplificatore e *voltage follower*.

Tabella 2: Risposta in frequenza del preamplificatore.

$f [kHz]$	$V_A [V]$
0.0100 ± 0.0001	4.1 ± 0.1
0.0210 ± 0.0001	4.1 ± 0.1
0.0470 ± 0.0005	4.1 ± 0.1
0.097 ± 0.001	4.1 ± 0.1
0.225 ± 0.002	4.1 ± 0.1
0.470 ± 0.005	4.1 ± 0.1
1.00 ± 0.01	4.1 ± 0.1
2.23 ± 0.02	4.1 ± 0.1
4.74 ± 0.05	4.0 ± 0.1
10.0 ± 0.1	3.6 ± 0.1
22.1 ± 0.2	2.60 ± 0.09
47.1 ± 0.5	1.25 ± 0.04
98 ± 1	0.44 ± 0.02
219 ± 2	0.10 ± 0.01

Tabella 3: Componenti utilizzati per montare il circuito in figura 5.

Componente	Valore
R_4	$2.65 \pm 0.02 \text{ k}\Omega$
R_5	$121 \pm 1 \text{ }\Omega$
R_6	$46.4 \pm 0.4 \text{ k}\Omega$
R_7	$986 \pm 8 \text{ }\Omega$
R_8	$32.9 \pm 0.3 \text{ k}\Omega$
R_9	$3.84 \pm 0.03 \text{ k}\Omega$
C_1	$10.1 \pm 0.4 \text{ nF}$
C_2	$10.2 \pm 0.4 \text{ nF}$

all'OpAmp nella soluzione del circuito):

$$A_1(\omega) = \left| \frac{V_C}{V_A} \right| = \frac{\omega C_1 R_6}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_4}{R_5} - \omega^2 C_1 C_2 R_4 R_6\right)^2 + [\omega(C_1 + C_2)R_4]^2}}$$

La frequenza corrispondente al massimo dell'amplificazione è:

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{R_4}{R_5} + 1}{C_1 C_2 R_4 R_6}} = 6.8 \pm 0.2 \text{ kHz}$$

$$A_{1,max} = \frac{C_1 R_6}{(C_1 + C_2) R_4} = 8.7 \pm 0.3$$

L'amplificatore non invertente, invece, è caratterizzato da un fattore di amplificazione $A_2 = R_7/R_8 + 1 = 34.4 \pm 0.4$. In conclusione, ci aspetteremmo per il circuito nel suo complesso un'amplificazione a centro banda:

$$A_{max} = A_{1,max} \cdot A_2 = 299 \pm 11$$

Si è mandato in A un segnale sinusoidale di ampiezza $V_A = 38.0 \pm 1.6 \text{ mV}^5$, e si sono prese misure di V_B per valori di f compresi fra 1 kHz e 33 kHz, intensificandole in prossimità della frequenza di centro banda e delle due frequenze di taglio. I risultati sono riportati in tabella 4; in particolare, si sono misurate $A_{max}^{exp} = 211 \pm 12$, $f_{max}^{exp} = 6.41 \pm 0.06 \text{ kHz}$, $f_{T,L}^{exp} = 6.06 \pm 0.06 \text{ kHz}$ e $f_{T,H}^{exp} = 6.80 \pm 0.07 \text{ kHz}$.

Si è effettuato un *fit* dei dati⁶ utilizzando la funzione:

$$A(f) = \frac{f}{\sqrt{(a - b \cdot f^2)^2 + (c \cdot f)^2}}$$

⁵Anche in questo caso, si è prestata attenzione a non saturare gli OpAmp, e si è cercato di utilizzare un'onda che fosse il più regolare possibile, utilizzando il generatore di funzioni e un partitore di tensione.

⁶Eccetto gli ultimi due, che si discostavano palesemente dall'andamento previsto, probabilmente a causa del *GBW product* finito degli OpAmp utilizzati (tra l'altro, le frequenze relative a tali dati sono vicine ai 17 kHz indicati come frequenza di taglio degli OpAmp al punto 2.a).

Tabella 4: Valori di V_B in funzione della frequenza, per $V_A = 38.0 \pm 1.6$ mV.

f [kHz]	σ_f [kHz]	V_B [V]	σ_{V_B} [V]
0.99	0.01	0.16	0.02
1.53	0.02	0.28	0.02
2.22	0.02	0.40	0.02
3.02	0.03	0.59	0.02
4.21	0.04	1.10	0.04
5.12	0.05	2.02	0.08
5.53	0.05	2.9	0.1
5.78	0.06	4.0	0.1
5.85	0.06	4.3	0.1
5.95	0.06	4.9	0.2
6.06	0.06	5.7	0.2
6.16	0.06	6.6	0.2
6.42	0.06	8.0	0.3
6.51	0.07	7.7	0.3
6.60	0.07	7.1	0.2
6.80	0.07	5.7	0.2
6.86	0.07	5.2	0.2
7.03	0.07	4.3	0.1
7.21	0.07	3.6	0.1
7.52	0.08	2.7	0.1
8.27	0.08	1.74	0.07
10.0	0.1	0.94	0.03
13.6	0.1	0.47	0.02
20.1	0.2	0.24	0.02
32.8	0.3	0.10	0.01

La funzione di trasferimento attesa e quella ottenuta nella procedura di *fit* sono riportate, in sovrapposizione ai dati, in figura 6.

Si confrontano qui sotto i valori attesi per i parametri di *fit* e quelli ottenuti:

- $a_{att} = \frac{1+R_4/R_5}{2\pi C_1 R_6} \cdot \frac{1}{A_2} = 0.23 \pm 0.01$ kHz $a_{fit} = 0.263 \pm 0.004$ kHz
- $b_{att} = 2\pi C_2 R_4 \cdot \frac{1}{A_2} = (4.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}$ kHz⁻¹ $b_{fit} = (6.4 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ kHz⁻¹
- $c_{att} = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{R_4}{R_6} \cdot \frac{1}{A_2} = (3.3 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ $c_{fit} = (4.7 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$
- $\chi^2/\nu = 19.7/20$
- Matrice di covarianza (si sottointendono le unità di misura, potenze del kHz): $10^{-6} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0.46 & -0.22 \\ 0.46 & 0.012 & -0.0057 \\ -0.22 & -0.0057 & 0.019 \end{pmatrix}$.

Come si può vedere, i parametri sono dello stesso ordine di grandezza di quelli attesi, ma più grandi. Inoltre, essi non sono semplicemente riscalati di un fattore⁷; purtroppo, non si è riusciti a render ragione di questo fatto. In particolare, l'amplificazione a centro banda e la relativa frequenza sono entrambe inferiori a quanto previsto.

Si è verificato numericamente che le frequenze di centro banda e quelle di taglio della funzione di *fit* coincidessero con quelle misurate all'oscilloscopio; tuttavia, poiché non si è saputa valutare l'incertezza su questa stima ottenuta per via numerica, si sono preferiti utilizzare i valori ottenuti precedentemente all'oscilloscopio:

- $\Delta f = f_{T,H} - f_{T,L} = 0.74 \pm 0.09$ kHz
- $A_{max} = 211 \pm 12$

2.c Convertitore RMS

Successivamente, abbiamo montato il convertitore RMS utilizzando l'integrato AD736 come illustrato in figura 7, usando i componenti riportati in tabella 5.

⁷Non si riportano i valori attesi per i rapporti fra i parametri e quelli ottenuti, incompatibili, per non appesantire la relazione.

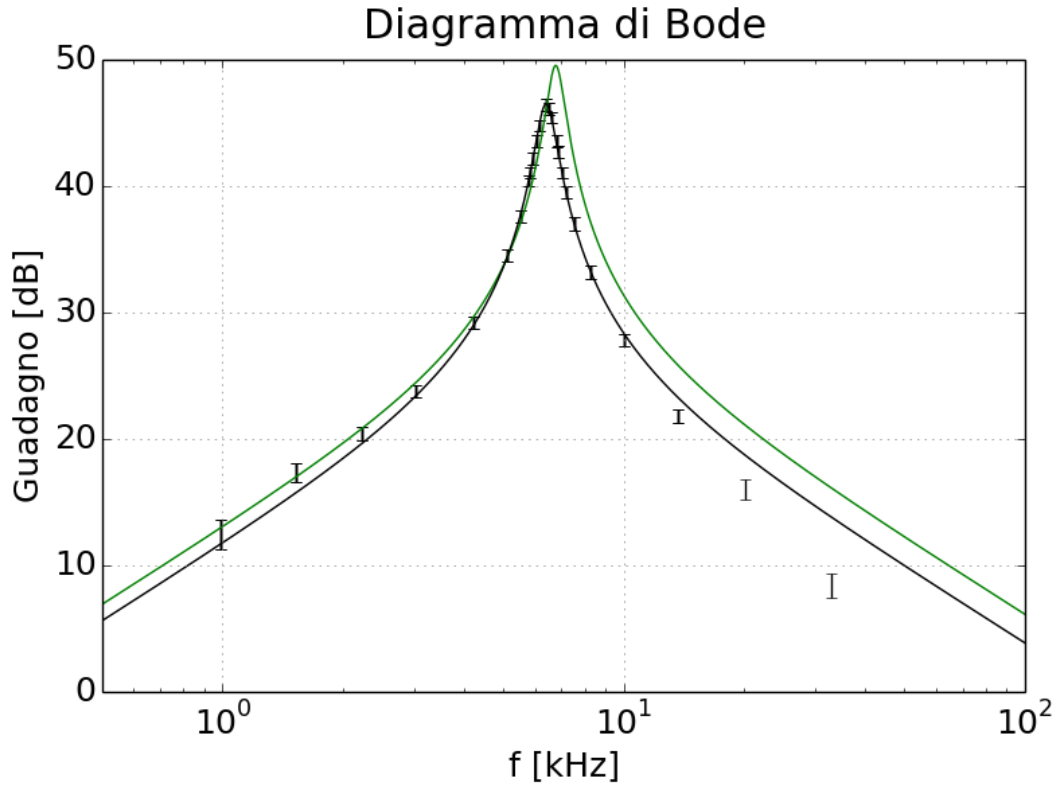


Figura 6: Diagramma di Bode del filtro passa-banda e del postamplificatore in figura 5.

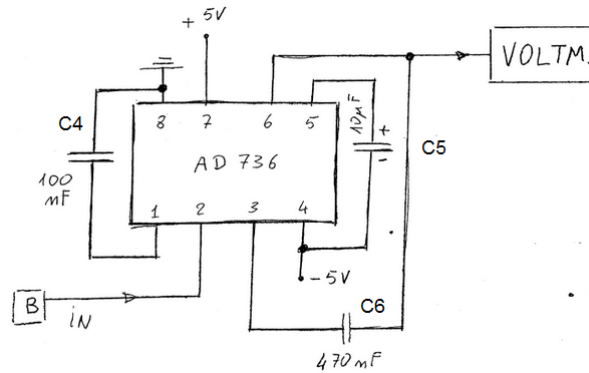


Figura 7: Schema circuitale del convertitore RMS.

Tabella 5: Componenti utilizzati nel montaggio del convertitore RMS. C_5 è un condensatore elettrolitico.

Componente	Valore
C_4	$104 \pm 4 \text{ nF}$
C_5	$10 \pm 2 \text{ } \mu\text{F}$
C_6	$0.47 \pm 0.2 \text{ } \mu\text{F}$

Abbiamo quindi verificato il corretto comportamento del blocco circuitale mandando all'ingresso B un'onda sinusoidale di ampiezza $V_{pp} = 258 \pm 9 \text{ mV}$ e di frequenza compresa tra 6 e 7 kHz⁸. Abbiamo ottenuto in uscita un segnale continuo di tensione, osservabile in figura 8 e uguale per tutte le frequenze esplorate, pari a $V_{RMS} = 93.5 \pm 0.5 \text{ V}$ ⁹. Dunque il rapporto tra la tensione in entrata e quella in uscita vale $\frac{V_{max}}{V_{RMS}} = 1.38 \pm 0.05$, in

⁸Abbiamo scelto frequenze comprese tra le frequenze di taglio del filtro passa-banda perché saranno quelle di maggior ampiezza ad arrivare all'ingresso del convertitore quando il circuito sarà completato.

⁹Misurata con il multimetro digitale per avere una maggiore precisione.

accordo con il valore previsto ($\sqrt{2}$) entro l'incertezza¹⁰. Abbiamo poi esplorato i limiti di questo comportamento ideale, notando che V_{RMS} rimaneva pressochè invariata tra 3 e 10 kHz, raggiungendo $\sim 92 \text{ mV}$ a 1 kHz e $\sim 94 \text{ mV}$ a 20 kHz.

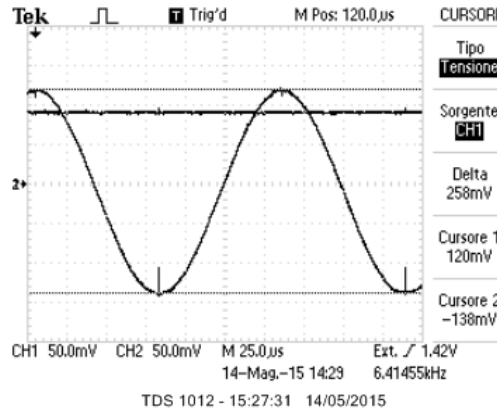


Figura 8: Segnale in entrata al convertitore su CH1 e in uscita su CH2.

3 Misura della costante di Boltzmann

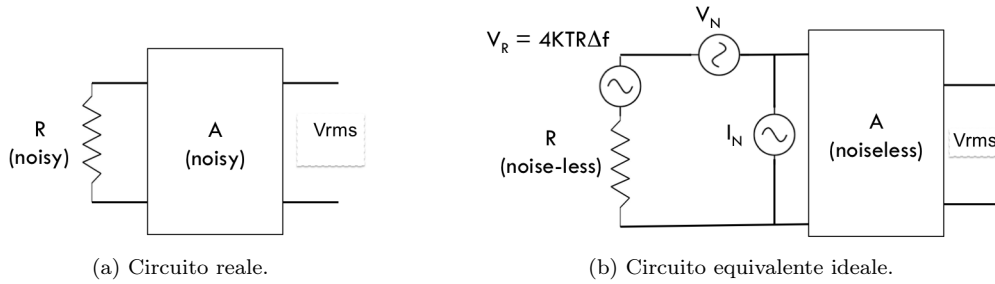


Figura 9: Modello utilizzato nella la misura del rumore Johnson della resistenza R ; il primo circuito comprende un amplificatore passa-banda non ideale (che introduce un rumore); il secondo, formato esclusivamente da componenti ideali, modella le non idealità del primo introducendo i rumori V_R , V_N e I_N .

Dopo aver verificato il corretto funzionamento dei vari blocchi del circuito li abbiamo collegati in serie, ponendo l'ingresso del pre-amplificatore a terra attraverso una resistenza R . Vorremmo misurare il rumore Johnson associato a tale resistenza; per fare ciò ci avvaliamo del modello rappresentato in figura 9, che tiene conto dei rumori introdotti dal circuito di amplificazione. In particolare, esso consente di distinguere, a partire dalla misura di V_{RMS} , la componente del rumore dovuta a R . Infatti, ci aspettiamo che valga la relazione¹¹:

$$V_{RMS} = V_{0N} \sqrt{1 + \frac{R}{R_T} + \frac{R^2}{R_N^2}} \quad (1)$$

dove:

- R è la resistenza d'ingresso;
- $V_{0N} = A_0 V_N$ è il rumore in uscita a resistenza R nulla;
- $R_T = \frac{V_{0N}^2}{4k_B T A_0^2 \Delta f}$;
- $R_n = \frac{I_N}{V_N}$.

¹⁰Ovviamente $V_{max} = \frac{V_{pp}}{2}$.

¹¹Le seguenti equazioni sono derivate dall'equazione $V_{RMS}^2 = A^2(V_N^2 + R^2 I_N^2 + 4k_B T R \Delta f)$, ottenuta supponendo che i tre rumori introdotti nel modello figura (9.b) siano scorrelati.

Noi conosciamo l'amplificazione totale A_0 del circuito, che è il prodotto delle amplificazione dei suoi singoli blocchi, e la larghezza della banda passante Δf . Dopo aver preso delle misure di V_{RMS} al variare di R , possiamo quindi interpolare i dati per mezzo della funzione equazione (1) e ricavare dal fit i parametri V_{0N} , R_T e R_N . Invertendo la relazione per R_T possiamo poi ricavare k_B . I risultati delle misure sono riportati in tabella 6 e nel grafico in figura 10.

Tabella 6: Misure di V_{RMS} in funzione di R ; l'incertezza su V_{RMS} è la somma di quelle dovute alla precisione del voltmetro, alla fluttuazione dei valori letti e alla precisione del convertitore AD736.

$R [k\Omega]$	$V_{RMS} [V]$
1.797 ± 0.014	69 ± 3
2.64 ± 0.02	72 ± 3
4.72 ± 0.04	79 ± 3
8.04 ± 0.06	90 ± 3
9.88 ± 0.08	96 ± 4
14.7 ± 0.1	104 ± 4
21.8 ± 0.2	126 ± 5
33.7 ± 0.3	149 ± 5
55.8 ± 0.4	193 ± 7
80.0 ± 0.6	238 ± 9
99.4 ± 0.8	265 ± 13
146 ± 1	325 ± 16
212 ± 2	385 ± 19

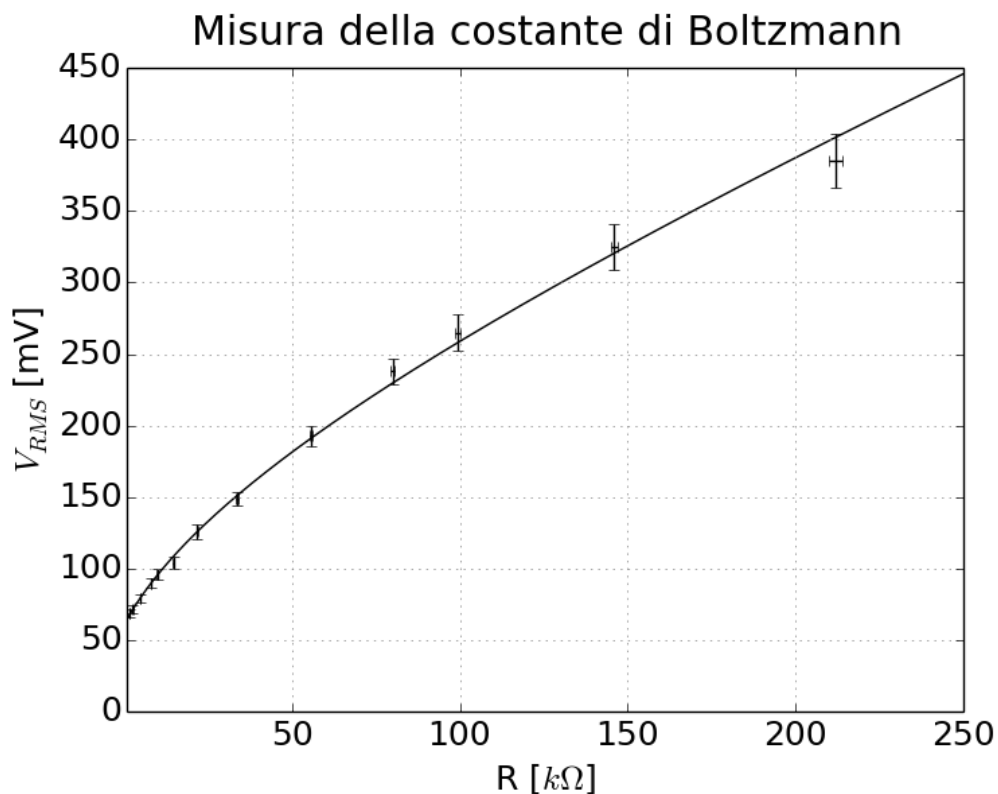


Figura 10: Misure di V_{RMS} in funzione di R e fit eseguito con la funzione (1).

I risultati del fit sono stati i seguenti:

- $V_{0N} = 60.9 \pm 1.4 \text{ mV}$
- $R_T = 6.9 \pm 0.6 \text{ k}\Omega$
- $R_N = 61 \pm 6 \text{ k}\Omega$

- $\chi^2/n_{dof} = 3.6/10$

Per calcolare il valore di k_B usiamo il valore $\Delta f = 0.74 \pm 0.09$ kHz calcolato al punto 2.b e prendiamo per la temperatura il valore $T = 298 \pm 3K$. Per l'amplificazione totale dobbiamo cambiare leggermente i valori rispetto a quelli trovati nelle sezioni precedenti perché, nell'esecuzione di queste ultime misure, a causa di alcuni problemi tecnici (basetta difettosa e conseguenti contatti instabili) abbiamo dovuto sostituire alcuni componenti dell'amplificatore passa-banda con reofori troppo corti. Dopo aver rimisurato i valori massimi dei guadagni otteniamo¹² $A_0 = (774 \pm 48) \cdot (240 \pm 15) = (186 \pm 16) \cdot 10^3$.

In definitiva:

$$k_B = \frac{V_{0n}^2}{4R_T T A_0^2 \Delta f} = (1.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-23} JK^{-1} \quad (2)$$

Il nostro risultato è in buon accordo con il valore atteso $k_B^{att} = 1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$. L'incertezza sul risultato è circa del 20%, ed è dovuta principalmente a quelle su Δf e A_0 . Per ottenere un risultato più preciso, sarebbe quindi necessario raffinare la misura di queste ultime due grandezze.

Ad ogni modo, sarebbe difficile eseguire delle misure molto accurate con l'apparato sperimentale montato in quest'esercitazione: il modello teorico utilizzato, infatti, suppone che:

- A_0 sia la stessa per tutte le frequenze (mentre nell'intervallo Δf diminuisce, allontanandosi dalla frequenza di centro banda, fino a $A_0/\sqrt{2}$);
- le frequenze al di fuori della banda passante del circuito passa-banda siano sopresse.

Gli effetti dovuti alla non validità di queste due approssimazioni tendono a compensarsi ($A_{efficace}$ è più bassa di A_0 , mentre $\Delta f_{efficace}$ è più ampia); bisognerebbe però analizzare meglio in che misura lo facciano per sperare di ottenere dei risultati precisi.

¹²Abbiamo verificato che il comportamento in funzione della frequenza, e in particolare le frequenze di taglio, rimanessero invariate.