

Esercitazione 15 - Gruppo AD

Misura della costante di Boltzmann attraverso misure di rumore

Alessandro Podo

Federica Maria Surace

11 maggio 2015

Lo scopo dell'esperienza è quello di misurare la costante di Boltzmann attraverso la misura del rumore termico in una serie di resistenze, mediante un amplificatore e un filtro passa banda.

1 Metodo di misura

Si vogliono misurare le fluttuazioni di tensione ai capi di una resistenza dovute al rumore termico a temperatura ambiente. Questo tipo di rumore, noto come rumore di Johnson-Nyquist, ha una densità spettrale di potenza costante (rumore bianco):

$$S_V(f) = 4kTR \quad S_I(f) = \frac{4kT}{R}$$

in cui k è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta e R è la resistenza in considerazione. Se si adopera un filtro passa banda, con una banda di frequenze passanti Δf^1 , ai capi della resistenza si ha una tensione quadratica media:

$$V_{RMS}^2 = 4kTR\Delta f$$

Misurando questo valore, nota la temperatura, il valore della resistenza e la banda passante, sarebbe in linea di principio possibile misurare la costante di Boltzmann in modo diretto. Tuttavia il segnale che si vuole misurare è debole ed è quindi necessario amplificarlo. L'introduzione di un amplificatore e del filtro passa banda è una nuova fonte di rumore che necessita di essere tenuta in debito conto.

Per fare questo si modella il circuito come un sistema ideale privo di rumore a cui sono associati un generatore rumore in serie V_N e un generatore di rumore in parallelo I_N . Ponendo una resistenza R in ingresso al circuito (figura 1), il segnale in uscita è $V_{RMS}^2 = A^2(V_N^2 + I_N^2 R^2 + 4kTR\Delta f)$ in cui A rappresenta l'amplificazione complessiva del circuito. Riscrivendo si ha

$$V_{RMS} = V_{0n} \sqrt{1 + \frac{R}{R_T} + \frac{R^2}{R_N^2}} \quad (1)$$

dove $V_{0n} = AV_N$, $R_T = V_{0n}^2/4kTA^2\Delta f$, $R_N = V_N/I_N$.

Misurando la tensione quadratica media in uscita per diverse resistenze ed eseguendo un fit con una funzione di questo tipo si possono ricavare i parametri sopra indicati. Misurando separatamente l'amplificazione e la banda passante del circuito e nota la temperatura è infine possibile ottenere una misura della costante di Boltzmann k .

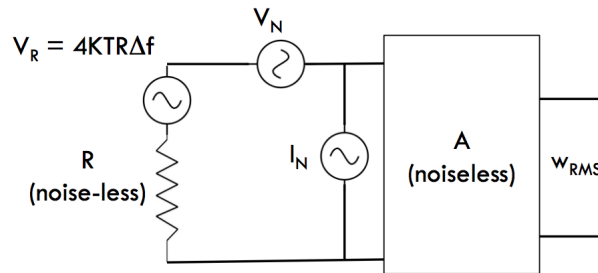


Figura 1: Modello astratto dell'apparato di misura.

¹La scelta della banda di frequenza permette di rendere trascurabili rumori di origine diversa come il rumore shot, il rumore $1/f$ e il rumore a 50 Hz. In questo modo si possono limitare errori di tipo sistematico derivanti dall'errata attribuzione del segnale misurato al rumore termico.

2 Implementazione dei blocchi di circuito

Per la misura della costante di Boltzmann il circuito di amplificazione è stato montato facendo particolare attenzione a utilizzare collegamenti corti e filtrando le tensioni di alimentazione tramite condensatori da $100nF$ e resistenze da $1k\Omega$ come in figura 2. In questo modo si riducono le fluttuazioni sulla tensione e si riesce ad effettuare in maniera più accurata la misura di rumore.

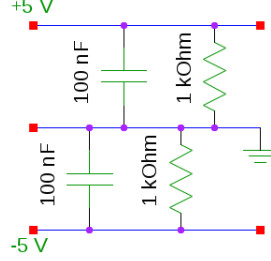


Figura 2: Filtro sulle alimentazioni.

Pre-amplificatore

Il preamplificatore è stato montato secondo lo schema in figura 3. Il primo stadio è costituito da un INA114 (Precision instrumentation amplifier) con un guadagno atteso di 51. Il secondo stadio utilizza un amplificatore invertente realizzato con un opamp AD708 e ha un guadagno teorico pari a $\frac{68k\Omega}{4.7k\Omega} = 14.5$.

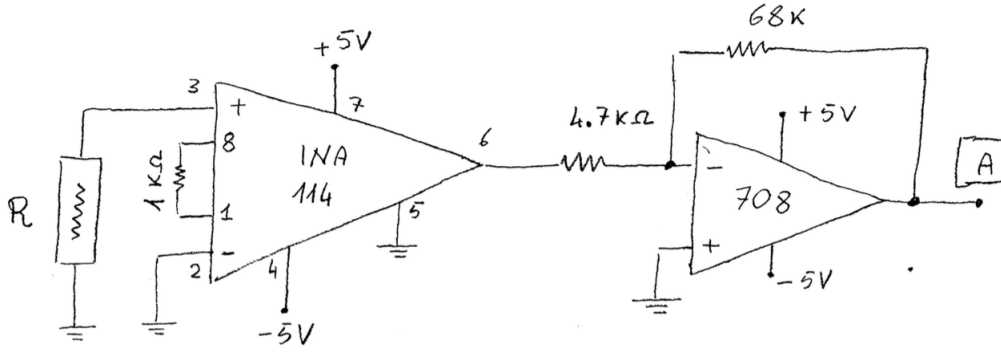


Figura 3: Schema circuitale del preamplificatore.

Il circuito è stato testato inviando, tramite il generatore di funzioni, un segnale oscillante con ampiezza sufficientemente piccola ($V_{in} = 10 \pm 1$ mV picco-picco), in modo da non saturare il circuito. Nel grafico 4 e nella tabella 1 si osserva la risposta in frequenza: il preamplificatore si comporta da filtro passabasso con un frequenza di taglio di 12 ± 1 kHz². L'amplificazione al di sotto di tale frequenza vale 760 ± 80 , contro un valore atteso di 739.5. L'errore sull'amplificazione è molto grande per via dell'incertezza su V_{in} , in quanto il segnale fornito dal generatore appare molto rumoroso.

Filtro passabanda e post-amplificatore

La parte successiva del circuito, illustrata in figura 5, funge da ulteriore amplificatore e da filtro passabanda, permettendo di selezionare una certa banda di larghezza Δf dove è possibile misurare il rumore. L'amplificazione massima attesa per questa parte di circuito è di $\frac{C_2 R_6}{R_4 (C_1 + C_2)} = \frac{47k\Omega}{2 \cdot 2.7k\Omega} = 8.7$ per il primo stadio in corrispondenza

della frequenza $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}{R_6 C_1 C_2}} = 6.4kHz$, e di $1 + \frac{R_8}{R_7} = 1 + \frac{33k\Omega}{1k\Omega} = 34$ per il secondo stadio. Il funzionamento del circuito è stato verificato anche in questo caso utilizzando un'onda sinusoidale fornita dal generatore.

Nel grafico 6 e nella tabella 2 si osserva la risposta in frequenza: il picco di amplificazione, come atteso, è centrato in $f_0 \simeq 6.4$ kHz. La tensione di ingresso ha un valore picco-picco di $40 \pm 2mV$ in modo da non

²La frequenza di taglio è stata ricavata dal fit delle due rette. Dal primo fit si ottiene l'amplificazione 57.6 ± 0.7 dB, dal secondo si ricava la pendenza della retta: 22 ± 1 dB/decade ($\chi^2_{red} = 0.1$).

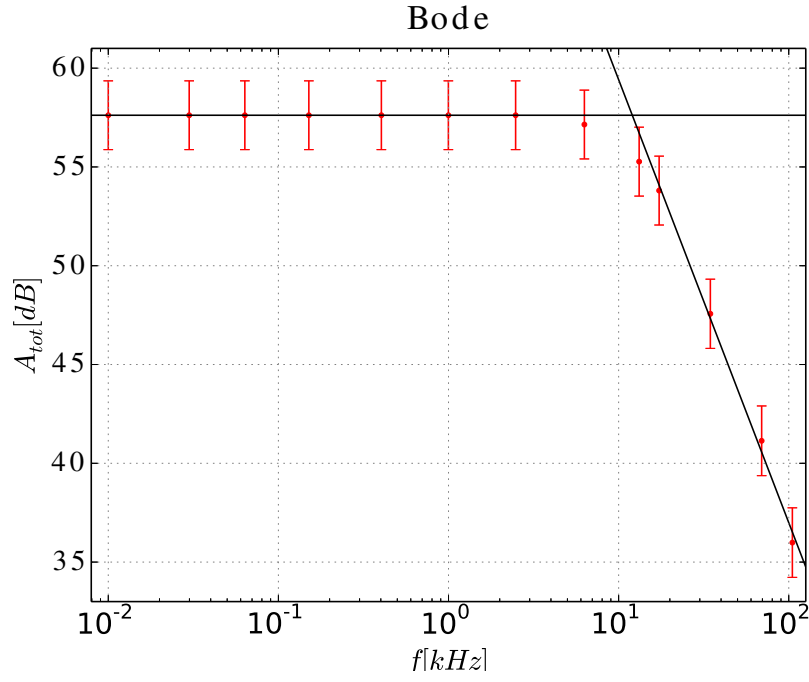


Figura 4: Plot di Bode del preamplificatore.

Tabella 1: Risposta in frequenza del preamplificatore.

f [kHz] $\pm 1\%$	V [V] picco-picco
0.0100	7.6 ± 0.1
0.0299	7.6 ± 0.1
0.0635	7.6 ± 0.1
0.151	7.6 ± 0.1
0.403	7.6 ± 0.1
0.998	7.6 ± 0.1
2.48	7.6 ± 0.1
6.29	7.2 ± 0.1
13.2	5.8 ± 0.1
17.3	4.90 ± 0.08
34.6	2.39 ± 0.06
69.3	1.14 ± 0.04
105	0.63 ± 0.02

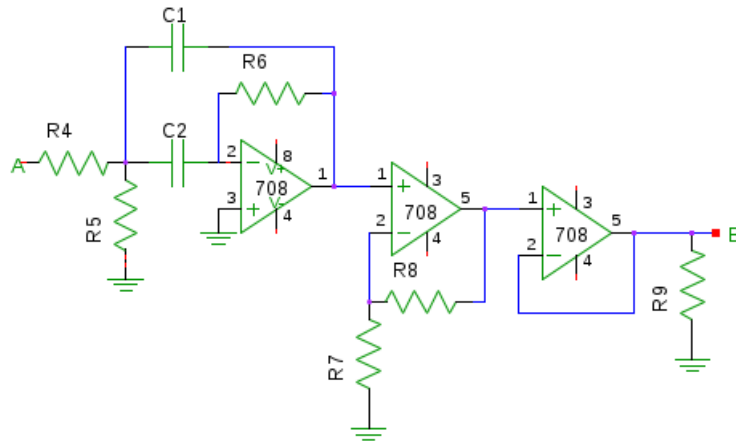


Figura 5: Schema circuitale del filtro passabanda e postamplificatore.

saturare il circuito.³ Sono state quindi misurate le frequenze a cui l'uscita era attenuata di -3 dB rispetto al picco: $f_{max} = 6.97 \pm 0.07$ kHz, $f_{min} = 5.85 \pm 0.06$ kHz, da cui $\Delta f = 1.1 \pm 0.1$ kHz. L'amplificazione misurata a centro banda è 148 ± 7 , che è sensibilmente più piccola di quella attesa, che vale 296. Anche la banda di frequenza si discosta da quella teorica pari a $\frac{C_1+C_2}{2\pi R_6 C_1 C_2} = 667$ Hz. Una possibile motivazione è che l'opamp non sia assimilabile a un opamp ideale: questo spiegherebbe anche il fatto che il fit dei dati con la funzione di trasferimento teorica⁴ non approssima bene i punti sperimentali ($\chi^2_{red} \simeq 50$).

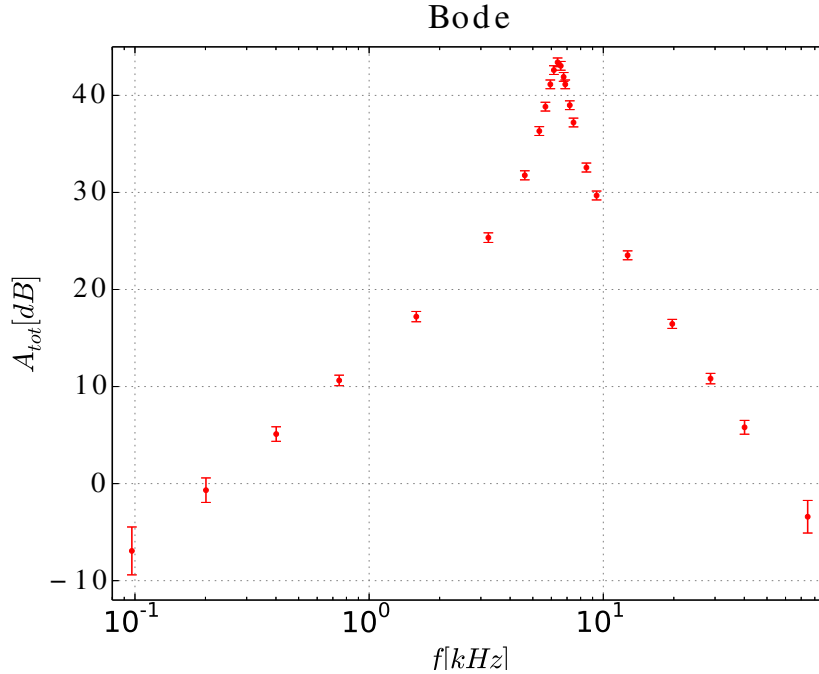


Figura 6: Plot di Bode del filtro passabanda e post-amplificatore.

Convertitore RMS

L'ultima parte del circuito, mostrata in figura 7 ha lo scopo di trasformare il segnale sinusoidale in una tensione continua pari al valore RMS. Il funzionamento del convertitore è stato verificato tramite un segnale sinusoidale fornito dal generatore (figura 8). Il convertitore forniva il valore corretto nell'intervallo di interesse (tra 1 kHz e 10 kHz).

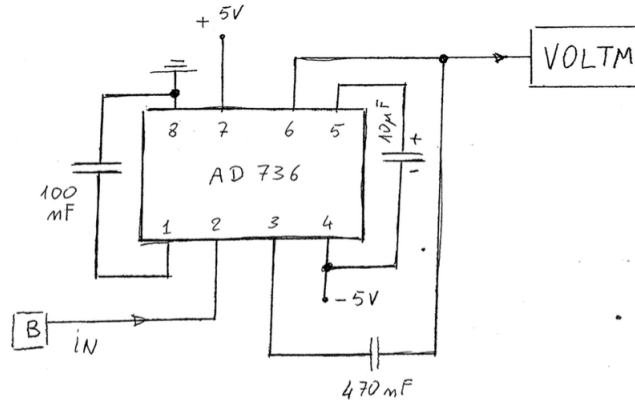


Figura 7: Schema circuitale del convertitore RMS.

³Le misure di V_{out} riportate in tabella erano soggette a un rumore di ampiezza $5mV$ a $50kHz$. Nel seguito dell'esperienza si è usato un diverso alimentatore che non presentava tale difetto.

⁴Per il primo stadio ci si aspetta un'amplificazione $A = \frac{a \cdot f}{\sqrt{(b-cf^2)^2 + f^2}}$ con $a = \frac{C_2 R_6}{C_1 + C_2}$, $b = \frac{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}{2\pi(C_1 + C_2)}$ e $c = \frac{2\pi R_6 C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Tabella 2: Risposta in frequenza del filtro passabanda e post-amplificatore.

f [kHz] $\pm 1\%$	V [V] picco-picco
0.097	0.018 ± 0.005
0.201	0.037 ± 0.005
0.401	0.072 ± 0.005
0.745	0.136 ± 0.005
1.59	0.29 ± 0.01
3.23	0.74 ± 0.02
4.62	1.55 ± 0.03
5.33	2.62 ± 0.04
5.66	3.50 ± 0.05
5.94	4.56 ± 0.06
6.15	5.40 ± 0.07
6.38	5.92 ± 0.08
6.58	5.68 ± 0.08
6.77	4.98 ± 0.07
6.88	4.56 ± 0.06
7.19	3.56 ± 0.05
7.46	2.90 ± 0.04
8.47	1.70 ± 0.03
9.36	1.22 ± 0.02
12.7	0.60 ± 0.01
19.7	0.266 ± 0.005
28.7	0.139 ± 0.005
40.1	0.078 ± 0.005
74.6	0.027 ± 0.005

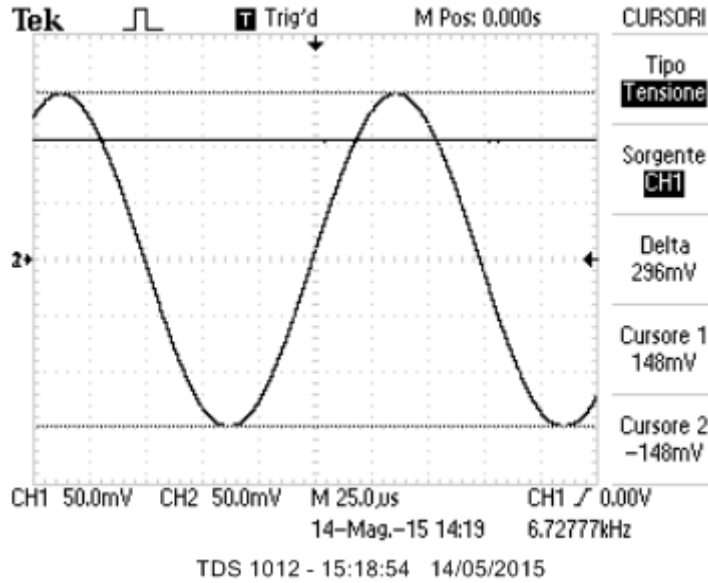


Figura 8: Verifica del funzionamento del convertitore RMS: si osserva in ingresso un'onda sinusoidale con $V_{pp} = 296 \pm 4$ mV, quindi $V_{rms} = \frac{V_{pp}}{2\sqrt{2}} = 105 \pm 1$ mV. Il convertitore fornisce una tensione continua a 106 ± 4 mV.

3 Misura della costante di Boltzmann

Una volta completato il montaggio e l'analisi del circuito, si è proceduto alla misura della tensione quadratica media in funzione della resistenza posta tra l'ingresso non invertente dell'integrato INA114 e la terra. Al variare di tale resistenza nell'intervallo tra 0.5 e 150 k Ω si è misurata la tensione all'uscita del convertitore RMS, per mezzo del multimetro digitale. I dati ottenuti sono riportati in tabella 3.

Si è provato ad eseguire un fit utilizzando la funzione (1). La procedura di fit converge e la curva ottenuta approssima bene i dati, tuttavia il parametro R_N assume un valore dell'ordine di 10^6 k Ω con un incertezza di 10^{10} k Ω . Questo sta ad indicare che il rumore parallelo dell'amplificatore è trascurabile rispetto al rumore in serie per resistenze nell'intervallo preso in considerazione. Pertanto si è ripetuto il fit (figura 9) omettendo il

Tabella 3: Tensione in uscita al convertitore RMS in funzione della resistenza utilizzata.

$R[\text{k}\Omega] \pm 1\%$	$V[\text{mV}]$
$0 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	40 ± 1
0.471	41 ± 1
0.667	41 ± 1
0.821	42 ± 2
0.984	43 ± 2
1.78	44 ± 2
2.64	47 ± 2
4.67	51 ± 2
8.20	58 ± 2
9.86	62 ± 3
14.8	69 ± 3
21.8	77 ± 3
33.1	94 ± 4
54.9	113 ± 4
81.5	138 ± 4
93.1	146 ± 4
149	182 ± 4

termine con R^2/R_N^2 , utilizzando come funzione

$$V_{RMS} = V_{0n} \sqrt{1 + \frac{R}{R_T}}$$

Dal fit si ottengono i valori dei parametri $V_{0n} = 39.8 \pm 0.2 \text{ mV}$, $R_T = 7.5 \pm 0.1 \text{ k}\Omega$, con $\chi_{red}^2 = 0.11$.

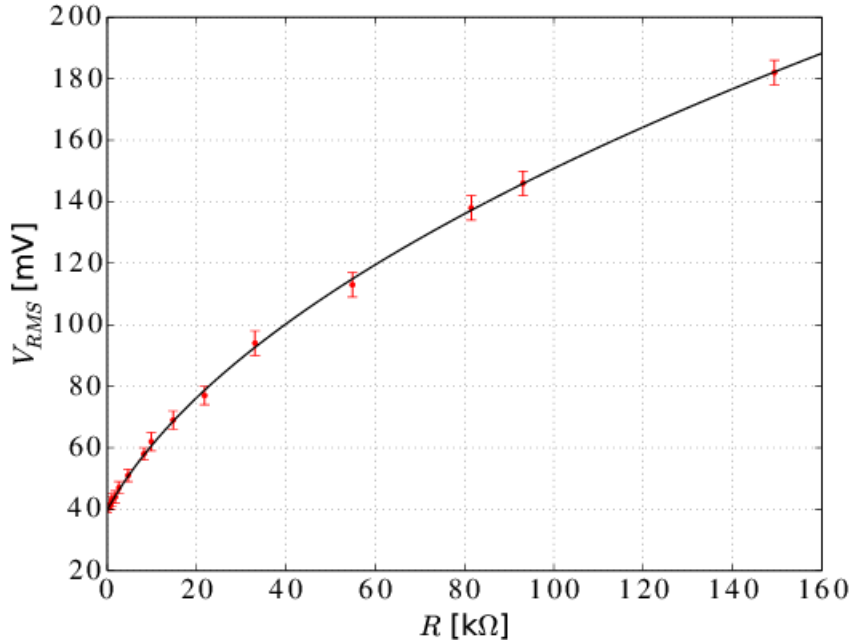


Figura 9: Tensione RMS misurata in funzione della resistenza.

Invertendo la definizione di R_T si può ricavare la costante di Boltzmann:

$$k = \frac{V_{0n}^2}{4R_T T A^2 \Delta f}$$

L'amplificazione complessiva del circuito è data dal prodotto delle amplificazioni dei singoli circuiti adoperati, in quanto gli operazionali hanno impedenza in ingresso molto alta (idealmente infinita) ed impedenza in uscita molto bassa (idealmente zero). Come banda di frequenza si assume la banda passante del circuito misurata

in precedenza. Per cui $A = (1.1 \pm 0.1) \cdot 10^5$, $\Delta f = 1.1 \pm 0.1$ kHz. Utilizzando i parametri ricavati dal fit e assumendo una temperatura $T = 298 \pm 3$ K si ottiene:

$$k = (1.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Il valore ottenuto è in ottimo accordo con il valore atteso per la costante di Boltzmann $k_{ATT} = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. L'incertezza deriva principalmente dall'incertezza sulla misura dell'amplificazione sul circuito (10%). Questo è dovuto al fatto che per misurare un'amplificazione molto grande, evitando che gli OpAmp vadano in saturazione, è necessario utilizzare segnali in ingresso di ampiezza molto piccola (pochi mV) e quindi con tanto rumore.