

Filtri RC e Python

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 4 - FF, 27 novembre 2015)

Questa nota riporta istruzioni e commenti sulla costruzione del diagramma di Bode di un filtro RC usando Python e fa riferimento all'esperienza pratica di progettazione e costruzione di filtri RC "a un polo" (passa-basso o passa-alto, con un solo elemento resistivo e un solo elemento capacitivo).

I. INTRODUZIONE

Un filtro RC è un dispositivo passivo; infatti i suoi componenti non sono in grado di produrre amplificazione di segnali, per cui, in ogni caso, il filtro si comporta come un elemento che attenua, e sfasa, il segnale in uscita V_{out} rispetto a quello in ingresso V_{in} . La relazione tra uscita e ingresso è contenuta nella cosiddetta *funzione di trasferimento* o *funzione di risposta* del circuito, $T(\omega)$, generalmente complessa.

Nell'ambito del metodo simbolico, cioè supponendo segnali sinusoidali in uscita e in ingresso ed usando la forma fasoriale per esprimerli, si ha: $V_{\omega,out} = T(\omega)V_{\omega,in}$. Le ampiezze (ovvero i valori picco-picco, il comportamento è ovviamente lo stesso per ampiezze e picco-picco) sono determinate dai moduli dei fasori considerati: $|V_{\omega,out}| = |T(\omega)V_{\omega,in}| = A(\omega)|V_{\omega,in}|$, dove abbiamo introdotto la funzione (reale) $A(\omega) = |T(\omega)|$ che, essendo pari al rapporto tra ampiezza in uscita e ampiezza in ingresso, mostra proprio quanto vale il *guadagno* in ampiezza all'uscita rispetto all'ingresso. Per i filtri passivi, è sempre $A(\omega) \leq 1$, motivo per cui si usa qualche volta il termine *attenuazione* invece che guadagno. Dal punto di vista linguistico, questo nome è non corretto, dato che l'attenuazione è evidentemente più rilevante per valori sempre più piccoli di $A(\omega)$. Tuttavia useremo spesso, qui e altrove, la denominazione di attenuazione invece che guadagno per questa funzione.

A. decibel

Molto spesso si ha a che fare con guadagni, o attenuazioni, che hanno valori numerici molto piccoli o molto grandi. Un'unità di misura opportuna in tali situazioni è il *decibel* (dB). Il guadagno, o attenuazione, dell'ampiezza del segnale in dB è definita nel seguente modo:

$$A(\omega) \text{ [dB]} = 20 \log_{10} \left(\frac{V_{out}}{V_{in}} \right), \quad (1)$$

dove V_{out} e V_{in} rappresentano le *ampiezze* dei segnali in uscita e in ingresso [1].

II. PASSA-BASSO E PASSA-ALTO

Un filtro passa-basso di quelli considerati qui è composto dalla serie di un resistore e di un condensatore. L'in-

gresso è collegato al generatore di forme d'onda, l'uscita misura la d.d.p. ai capi del condensatore.

La funzione di trasferimento complessa per il circuito considerato (stiamo trascurando la resistenza interna del generatore e gli effetti di quella dello strumento di misura) è del tipo:

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_T}, \quad (2)$$

dove abbiamo definito la frequenza angolare di taglio $\omega_T = 1/(RC)$. Ricordando il legame tra frequenza angolare e frequenza, $\omega = 2\pi f$, e definendo la *frequenza di taglio* $f_T = \omega_T/(2\pi) = 1/(2\pi RC)$, si ha anche

$$T(f) = \frac{1}{1 + jf/f_T}. \quad (3)$$

Lo sfasamento $\Delta\phi$ tra i fasori $V_{\omega,out}$ e $V_{\omega,in}$ è legato al rapporto tra parte immaginaria e parte reale della funzione di trasferimento, cioè

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{\text{Im}\{T(f)\}}{\text{Re}\{T(f)\}} = -\frac{f}{f_T}, \quad (4)$$

Si ha $\Delta\phi \rightarrow 0$ per $f \rightarrow 0$, $\Delta\phi \rightarrow -\pi/2$ per $f \rightarrow \infty$; inoltre è $\Delta\phi_T = -\pi/4$ per $f = f_T$. Notate che i segni negativi che compaiono negli sfasamenti richiedono attenzione per essere determinati dal punto di vista sperimentale, e spesso è sufficiente, e generalmente più semplice, misurarli in valore assoluto.

Per determinare il guadagno, o attenuazione, $A(f)$ delle ampiezze occorre considerare il *modulo* dei fasori (appunto le ampiezze delle forme d'onda), che, come già affermato, è determinato dal *modulo* della funzione di trasferimento. Si ha per un filtro passa-basso:

$$A(f) = |T(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}}. \quad (5)$$

Si vede facilmente che $A(f) \rightarrow 1$ per $f \rightarrow 0$, $A(f) \rightarrow 0$ per $f \rightarrow \infty$; inoltre è $A_T = 1/\sqrt{2}$ per $f = f_T$. Spesso si definisce un'ulteriore frequenza caratteristica dei filtri, $f_{1/2}$, che equivale alla frequenza a cui l'attenuazione vale $A(f_{1/2}) = 1/2$. Si vede anche facilmente che $f_{1/2} = \sqrt{3}f_T$ (e inoltre a tale frequenza si ha $\Delta\phi_{1/2} = -\pi/3$).

Un filtro passa-alto di quelli qui considerati è fatto ancora dalla serie di un resistore e di un condensatore, ma stavolta l'uscita è presa ai capi del resistore. La funzione

di trasferimento è, in questo caso

$$T(f) = \frac{1}{1 + jf_T/f}, \quad (6)$$

a cui corrispondono l'attenuazione

$$A(f) = |T(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_T/f)^2}}, \quad (7)$$

e lo sfasamento

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{\text{Im}\{T(f)\}}{\text{Re}\{T(f)\}} = \frac{f_T}{f}. \quad (8)$$

Si vede facilmente che $A(f) \rightarrow 1$ per $f \rightarrow \infty$, $A(f) \rightarrow 0$ per $f \rightarrow 0$; inoltre è $A_T = 1/\sqrt{2}$ per $f = f_T$ e $A_{1/2} = 1/2$ per $f_{1/2} = f_T/\sqrt{3}$ (e inoltre a tale frequenza si ha $\Delta\phi_{1/2} = \pi/3$).

III. MISURE SUL FILTRO PASSA-BASSO

Ho costruito e fatto misure [2] su un filtro passa-basso realizzato con $R = (3.27 \pm 0.03)$ kohm (misurata con multimetro digitale) e $C = 0.1 \mu\text{F}$ con tolleranza 10%. Per questo filtro ci si aspetta $f_{T,att} = (487 \pm 53)$ Hz, essendo l'incertezza dovuta principalmente alla tolleranza sulla capacità. Notate che l'uso di un valore di resistenza ben più alto della resistenza interna del generatore ($r = 50$ ohm) ci permette di considerare *approssimativamente* trascurabile quest'ultima. Infatti l'impedenza del circuito vale, in modulo, $|Z_{tot}| = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$, che, per la scelta fatta, è sempre ben maggiore di r a qualsiasi valore della frequenza esplorato nell'esperimento. Dunque d'ora in avanti considererò ideale il generatore.

In primo luogo ho determinato sperimentalmente la frequenza di taglio f_T : a questo scopo ho misurato l'ampiezza picco-picco del segnale in ingresso $V_{in} = (9.9 \pm 0.4)$ V, dove l'incertezza tiene conto dell'errore di calibrazione dato dal costruttore e della difficoltà di posizionare correttamente i cursori dell'oscilloscopio sui picchi. Quindi ho cercato al variare della frequenza (girando lentamente la manopola del generatore di forme d'onda) il valore per cui questa ampiezza si riduceva di un fattore $1/\sqrt{2}$, che è la frequenza di taglio. Ho ottenuto $f_T = (480 \pm 10)$ Hz, valore in accordo con le attese. L'incertezza qui è dovuta non solo alla precisione con cui si determina la frequenza (il frequenzimetro integrato nell'oscilloscopio ha una precisione nominale dello 0.01%, quella del frequenzimetro integrato nel generatore di forme d'onda, debitamente termalizzato, è 20 ppm $\equiv 0.002\%$) o alla stabilità del generatore (che fa "ballare" qualche cifra significativa sui display dei frequenzimetri), ma soprattutto all'errore che si compie nella misura dell'ampiezza e nell'accuratezza con cui può essere determinata la frequenza generata. Infatti basta sfiorare la manopola per vedere sensibili cambiamenti di frequenza, pur mantenendosi pressoché inalterata la condizione richiesta sull'ampiezza. Ho ripetuto

varie volte la misura e stimato di conseguenza l'incertezza dallo scarto dei risultati. Ho anche misurato lo sfasamento a questa frequenza, ottenendo $\Delta\phi_T = -(0.26 \pm 0.03)\pi$ rad, dove l'incertezza è dovuta principalmente alla difficoltà di individuare l'istante in cui le tracce passano per il livello di zero (le tracce sono spese).

Inoltre ho individuato la frequenza $f_{1/2}$ alla quale l'ampiezza in uscita è la metà di quella in ingresso, trovando $f_{1/2} = (876 \pm 12)$ Hz [sfasamento corrispondente $\Delta\phi_{1/2} = -(0.32 \pm 0.03)\pi$ rad]. I valori di f_T e $f_{1/2}$ sono in accordo con le attese basate sui valori nominali di progetto. Inoltre gli sfasamenti misurati sono anche in accordo con le aspettative (rispettivamente $-\pi/4$ e $-\pi/3$). A causa della difficoltà nel determinare il segno dello sfasamento, che necessita di porre attenzione su quale forma d'onda fa scattare il trigger dell'oscilloscopio, sarebbe stato accettabile anche darne una misura in valore assoluto.

Ho quindi misurato le ampiezze picco-picco $V_{in,j}$ e $V_{out,j}$ del segnale in uscita dal filtro a diverse frequenze f_j e ho quindi fatto determinare a Python l'attenuazione $A_j = V_{out,j}/V_{in,j}$. Avendo in mente di dover spazzare un range piuttosto ampio e di dover produrre un grafico in carta bilogarithmica, ho deciso di acquisire i dati a frequenze via via crescenti, l'una circa pari al doppio della precedente (cioè ho variato le frequenze di circa un'ottava alla volta). I dati sono mostrati in Fig. 1. Per le incertezze ΔA_j ho propagato l'incertezza delle misure di ampiezza, in cui ho tenuto conto sia della calibrazione (dato che ho usato diverse scale di portata su tutti i due canali dell'oscilloscopio) che dell'errore di lettura (cursori e spessore della traccia). Per la misura delle frequenze ho considerato un'incertezza pressoché trascurabile (inferiore all'1%), stimata osservando la cifra ballerina del display.

Nell'eseguire l'esperimento ho notato un aspetto fastidioso dal punto di vista sperimentale, legato alla progressiva riduzione del valore di ampiezza dell'onda prodotta dal generatore (a prescindere dal carico, è un problema di mancata stabilizzazione in temperatura) nel corso delle misure. Per minimizzarne gli effetti ho cercato di eseguire le misure rapidamente, ottenendo tuttavia variazioni di $V_{in,j}$ maggiori dell'errore di misura. La procedura di determinazione di A_j permette nominalmente di risolvere il problema, dato che il valore corrispondente risulta dal rapporto tra tensioni misurate "quasi" contemporaneamente.

Ho quindi eseguito un best-fit dei dati col metodo del minimo χ^2 usando la funzione Eq. 5 moltiplicata per una costante a , cioè la

$$A(f) = \frac{a}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}}, \quad (9)$$

e lasciando come parametri liberi di fit a e f_T .

Il best-fit riproduce in modo adeguato i dati sperimentali, come mostrato in Fig. 1, dove il pannello superiore riporta il grafico dei residui normalizzati (ho usato il complicato pacchetto `gridspace`, che si importa da

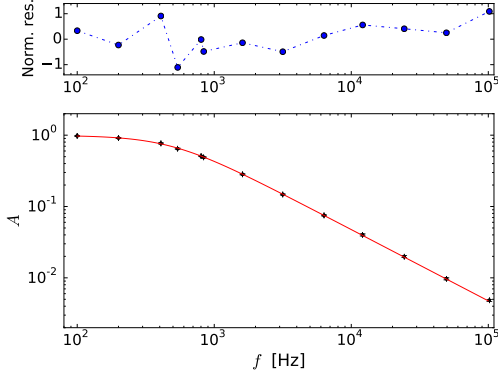


Figura 1. Dati sperimentali e risultato del best-fit a due parametri per le misure sul filtro passa-basso, eseguito come discusso nel testo. Il pannello superiore riporta il grafico dei residui normalizzati.

`matplotlib`, per creare subplots di diversa altezza). I risultati del best-fit sono

$$a = 0.995 \pm 0.007 \quad (10)$$

$$f_T = (479 \pm 5) \text{ Hz} \quad (11)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 5.3/11 \quad (12)$$

$$\text{norm. cov.} = -0.89. \quad (13)$$

Si nota che il parametro a è prossimo all'unità, come atteso, e che f_T è compatibile con $f_{T,att}$; a causa della possibile sovrastima delle incertezze dovuta all'impiego dell'errore sistematico (di calibrazione), si ha $\chi^2_{rid} < 1$. Infine i due parametri di fit sono fortemente (anti)correlati l'un l'altro. Per questo motivo un best-fit imponendo $a = 1$ e lasciando come solo parametro libero f_T è probabilmente più sensato. Il best-fit a un singolo parametro, cioè alla funzione Eq. 5, dà, ovviamente, un'uscita grafica praticamente indistinguibile da quella di Fig. 1 e fornisce i risultati

$$f_T = (476 \pm 2) \text{ Hz} \quad (14)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 4.9/12 \quad (15)$$

che sono in accordo con i precedenti (si noti la riduzione dell'incertezza sull'unico parametro libero f_T legata alla mancanza dell'altro parametro e, dunque, all'(anti)correlazione con esso - ricordate la definizione di covarianza).

A. Misure sul filtro passa-alto

Ho fatto le stesse operazioni (misura, grafico, best-fit) anche per un filtro passa-alto, costruito con $R = (672 \pm 5) \text{ ohm}$ e $C = 0.1 \text{ } \mu\text{F}$ (con tolleranza del 10%). Per questo filtro mi aspetto $f_T = (2370 \pm 256) \text{ Hz}$. La scelta della frequenza di taglio un po' più alta che non per il passa-basso aiuta a fare misure (qui sono interessanti i dati presi a $f < f_T$ e in questo modo si riesce a esplorare facilmente

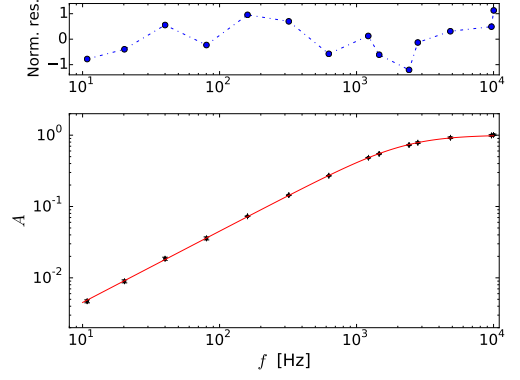


Figura 2. Dati sperimentali e risultato del best-fit a due parametri per le misure sul filtro passa-alto, eseguito come discusso nel testo. Il pannello superiore riporta il grafico dei residui normalizzati.

un buon intervallo di frequenze). Purtroppo, però, con la disponibilità di capacitori del laboratorio questo comporta di usare una resistenza relativamente prossima alla resistenza interna del generatore, che quindi potrebbe cominciare a comportarsi in maniera non ideale.

I valori delle frequenze caratteristiche ottenuti dalle misure, che sono tutti in buon accordo con le attese, sono: $f_T = (2220 \pm 10) \text{ Hz}$ [$\Delta\phi_T = (0.23 \pm 0.04) \pi \text{ rad}$], $f_{1/2} = (1280 \pm 12) \text{ Hz}$ [$\Delta\phi_{1/2} = (0.35 \pm 0.03) \pi \text{ rad}$].

In analogia con quanto riportato nella sezione precedente, ho anche qui fatto determinare a Python l'attenuazione A_j e il corrispondente array di incertezze ΔA_j , ho disegnato il grafico in rappresentazione bilogartimica e fatto un best-fit secondo la funzione Eq. 7 moltiplicata per il parametro a , cioè

$$A(f) = \frac{a}{\sqrt{1 + (f_T/f)^2}}, \quad (16)$$

lasciando come parametri liberi a e f_T .

Anche in questo caso il best-fit descrive in modo appropriato i dati sperimentali, come si vede in figura. I risultati sono

$$a = 1.003 \pm 0.008 \quad (17)$$

$$f_T = (2.23 \pm 0.03) \text{ kHz} \quad (18)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 6.3/12 \quad (19)$$

$$\text{norm. cov.} = 0.93, \quad (20)$$

e per essi valgono le considerazioni generali svolte per il filtro passa-basso. Anche qui la forte correlazione tra i parametri suggerisce di compiere un best-fit a un parametro, imponendo $a = 1$. I risultati sono in questo caso

$$f_T = (2.214 \pm 0.009) \text{ kHz} \quad (21)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 6.6/13. \quad (22)$$

IV. ATTENUAZIONE DI -20 DB/DECADE

Nel caso di $f \gg f_T$ il guadagno, o attenuazione, del filtro passa-basso si può approssimare con $A(f) \sim f_T/f$. Analogamente per il passa-alto, nel caso di $f \ll f_T$, il guadagno, o attenuazione, si può approssimare con $A(f) \sim f/f_T$. Notate che questi andamenti sono “universali”, nel senso che, una volta stabilita la frequenza di taglio, essi valgono per qualsiasi filtro RC “a un polo”.

Prendiamo un passa-basso e misuriamone l’attenuazione a due diverse frequenze (tutte e due *superiori* a f_T), f_1 e $f_2 = 10f_1$: si avrà $A_2 = A_1/10$, cioè l’ampiezza del segnale in uscita alla frequenza f_2 è $(f_2/f_1) = 10$ volte più piccola rispetto a quella a frequenza f_1 . Che questo sia confermato dalle misure si vede benissimo in Fig. 1. Analogamente nel caso del filtro passa-alto si vede come, per frequenze *inferiori* a f_T , la frequenza più bassa (f_1) è attenuata di un fattore (f_2/f_1) rispetto alla frequenza più alta (f_2).

Quando la frequenza viene moltiplicata per un fattore 10 si dice che essa è variata di una *decade*. Se si misura l’attenuazione in dB, a frequenze rispettivamente più alte o più basse di f_T (per passa-basso o passa-alto), si vede che, quando si varia la frequenza di una decade, l’attenuazione in dB è $20 \log_{10}(1/10) = -20$ dB. In altre parole questi filtri *attenuano di -20 dB per decade*, ovvero la pendenza della *curva di risposta* è di -20 dB/decade. Poiché una decade è composta da un po’ più di tre ottave, si dice anche che questi filtri *attenuano di -6 dB per ottava*.

Sempre ragionando in termini di dB, notate che alla frequenza di taglio l’attenuazione vale $20 \log_{10}(1/\sqrt{2}) \approx -3$ dB, e alla frequenza $f_{1/2}$ essa vale $20 \log_{10}(1/2) \approx -6$ dB.

A. Bode per il passa-basso

Finalmente arriviamo al diagramma di Bode. Esso è una rappresentazione dell’attenuazione in dB di un filtro in funzione della frequenza (o, qualche volta, del rapporto f/f_T), cioè è un grafico, in scala *semilogaritmica* (l’asse logaritmico è l’*orizzontale*, quello delle frequenze), della grandezza $AdB_j = 20 \log_{10}(A_j)$. Per costruire il diagramma di Bode occorre quindi graficare un array che contiene tale grandezza [e un array che contiene l’incertezza da attribuire ai dati, costruito usando le regole di propagazione dell’errore come $\Delta AdB_j = (20/\ln(10))(\Delta A_j/A_j)$]. Il risultato è mostrato in Fig. 3.

Per aggiungere ancora un po’ di pepe (o sale), ho deciso di eseguire un best-fit dei dati nella sola *regione di transizione*, quella in cui l’attenuazione segue l’andamento $A(f) \sim f_T/f$. Questa regione è quella che nel Bode plot ha un andamento lineare, così come era lineare l’andamento osservato in Fig. 1. Ho deciso arbitrariamente di considerare nel best-fit solo i dati acquisiti a $f > 1$ kHz,

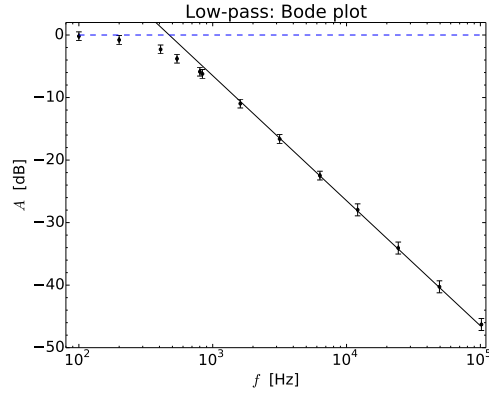


Figura 3. Diagramma di Bode e best-fit della regione di transizione per il filtro passa-basso, eseguito come descritto nel testo.

che corrisponde grosso modo al doppio della frequenza di taglio f_T determinata prima.

Per selezionare i punti da usare nel best-fit (solo nel best-fit, per la rappresentazione li voglio graficare tutti) ho costruito un array di supporto attraverso un ciclo `for` e una condizione sul valore f_j (la condizione è posta attraverso l’istruzione `if`, siete invitati a provare). Il best-fit di questi dati può essere eseguito sia in modo analitico (si tratta di un andamento lineare ed è consigliabile usare il calcolo analitico) che in modo numerico. Per semplicità, io ho usato il metodo numerico.

I dati che intendo fittare sono espressi in dB, cioè essi sono già stati modificati per l’estrazione del logaritmo a base 10 (e poi moltiplicati per 20, secondo la definizione). Dunque la funzione di fit, che chiamerò qui $g(f)$, *deve* essere espressa in maniera congrua. Essa può infatti essere determinata calcolando il $20 \log_{10}(A(f))$, con $A(f) = f_T/f$, cioè

$$g(f) = 20 \log_{10}\left(\frac{f_T}{f}\right) = \quad (23)$$

$$= \kappa - 20 \log_{10} f, \quad (24)$$

con $\kappa = 20 \log_{10} f_T$ unico parametro libero di fit.

Ovviamente, con questa scelta della funzione di best-fit, occorre fornire un valore iniziale adeguato alla routine di minimizzazione e inoltre, a best-fit eseguito, occorre riconvertire il valore del parametro di best-fit e della sua incertezza ai valori del “parametro fisico” $f_T = 10^{\kappa/20}$ e della sua incertezza $\Delta f_T = \Delta \kappa (\kappa/20) 10^{\kappa/20-1}$, dove $\Delta \kappa$ è l’incertezza sul parametro di fit.

La curva di best-fit è sovrapposta ai dati sperimentali (matematicamente trattati) in Fig. 3 e si nota un buon accordo. Il risultato del best-fit è

$$f_T = (473.4 \pm 11.4) \text{ Hz} \quad (25)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 1.1/6, \quad (26)$$

che è ancora in accordo con le attese (ma notate come sia l’incertezza nella valutazione di f_T che il χ^2 siano aumentati).

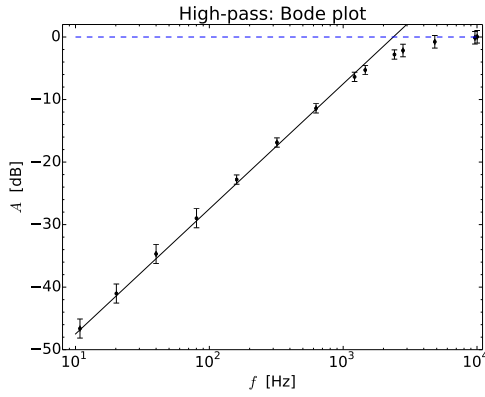


Figura 4. Diagramma di Bode e best-fit della regione di transizione per il filtro passa-alto, eseguito come descritto nel testo.

Come ultimo aspetto, il grafico di Fig. 3 mostra anche la cosiddetta *corner frequency* f_C , che corrisponde all'intercetta fra la curva che descrive l'attenuazione del filtro nella regione di transizione (la retta continua) e la retta $A \text{ [dB]} = 0$ (linea tratteggiata in blu). Avendo esegui-

to il best-fit della regione di transizione, è facile individuare analiticamente tale intercetta: deve infatti essere $f_C = 10^{\kappa/20}$. Osservate che questa frequenza *corrisponde* di fatto alla frequenza di taglio f_T così come è stata determinata sopra. Dunque $f_C = f_T$, come atteso per un filtro ben funzionante e ben descritto da un modello adeguato.

B. Bode per il passa-alto

Naturalmente il diagramma di Bode può essere costruito anche per il filtro passa-alto, usando lo stesso approccio messo a punto sopra e con la sola avvertenza di considerare, per il fit della regione di transizione, i dati corrispondenti a frequenze inferiori alla f_T (nell'esempio qui riportato, i dati sono quelli acquisiti per $f < 1.5 \text{ kHz}$).

Il Bode plot corrispondente è mostrato in Fig. 4. Il risultato del best-fit alla regione di transizione è

$$f_T = (2255 \pm 63) \text{ Hz} \quad (27)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 0.6/6, \quad (28)$$

ancora in ragionevole accordo con le attese; infine la corner frequency f_C determinata graficamente risulta compatibile con f_T .

[1] Occhio: esiste anche un'altra definizione di attenuazione in dB, che si riferisce però alle attenuazioni di potenze, o comunque di grandezze che dipendono quadraticamente dalle ampiezze. In questa definizione, il coefficiente che moltiplica il logaritmo a base 10 è un 10, e non un 20. Tutto questo ha lo scopo di provvedere a un'identica valutazione del guadagno, o attenuazione, in dB nel caso in cui si usino potenze o ampiezze. Proprio per dirla tutta, esistono ancora altre definizioni di dB (più propriamente

il simbolo da usare sarebbe diverso) che servono per valutare il livello *assoluto* di un segnale o di una potenza, o intensità, come ad esempio in acustica. Attenti a non fare confusione!

[2] Ho fatto poche misure: siete invitati a farne di più nelle vostre esperienze, privilegiando la *regione di transizione*. Infatti serve a poco aumentare il numero di misure alle frequenze che vengono lasciate passare dal filtro, ed è complicato (e rumoroso) aumentare il numero di quelle alle frequenze che vengono fortemente attenuate.