

Esercitazione 1 - Gruppo BG

Misure di tensione, corrente, tempi, frequenza

Tommaso Pajero

Alessandro Podo

17 ottobre 2014

L'esercitazione ha lo scopo di familiarizzare con la strumentazione presente in laboratorio (multimetri, oscilloscopio, generatori di corrente e di funzioni, piastra millefori) e con alcune tecniche di misurazione.

2. Misure di tensione e corrente

2.b Partitore di tensione con resistenze da 1 k Ω

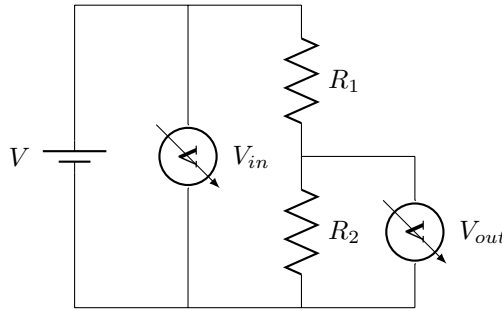


Figura 1: Circuito 2b e 2c

Si è montato il circuito in figura 1 con resistenze di valore, misurato con il multimetro digitale: $R_1 = 981 \pm 8 \Omega$ e $R_2 = 974 \pm 8 \Omega$. L'incertezza è stata stimata seguendo le indicazioni del manuale ($0.8\% \oplus 1$ cifra)¹. Dall'analisi del circuito, trascurando l'impedenza in ingresso R_T del multimetro, ci aspetteremmo $\alpha \equiv V_{out}/V_{in} = \frac{1}{1+R_1/R_2} = 0.498 \pm 0.004$. L'approssimazione è giustificata dal fatto che la resistenza interna del multimetro per le misure di tensione è, secondo il manuale, $R_T = 10 \text{ M}\Omega$, dunque $R_1/R_T \simeq R_2/R_T \simeq 10^{-3} \ll 1$.

Si sono misurati i valori di V_{in} e V_{out} inserendo il multimetro digitale alternativamente nelle due posizioni indicate nella figura 1, per undici valori di V_{in} compresi fra circa 0.5 V e 10 V. La tabella 1 e la figura 2 riportano i dati di tali misure; l'incertezza sulle tensioni è quella indicata dal manuale ($0.5\% \oplus 1$ cifra)².

Il fit lineare dei dati fornisce $\alpha = 0.499 \pm 0.001$ ($\chi^2_{rid} = 0.09$)³, in accordo con le previsioni.

2.c Partitore di tensione con resistenze da 4 M Ω

Si sono ripetute allo stesso modo le misure del punto precedente, usando resistenze di valore $R_1 = 3.87 \pm 0.04 \text{ M}\Omega$ e $R_2 = 3.78 \pm 0.04 \text{ M}\Omega$. A differenza di prima, però, trascurare l'impedenza in ingresso del multimetro nella misura di V_{out} non è più un'approssimazione lecita. Infatti, $R_1/R_T \simeq R_2/R_T \simeq 0.2 \sim 1$. La dipendenza tra V_{out} e V_{in} resta però lineare: con facili conti, sostituendo a R_2 il parallelo $R_2 // R_T$ si trova:

$$V_{out} = V_{in} \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 // R_T}} \equiv V_{in} \alpha \quad (1)$$

V_{in} resta invece pressoché inalterata, poiché la resistenza interna del generatore è molto inferiore a quella complessiva del circuito, sia che il multimetro sia collegato, sia altrimenti.

I valori ottenuti sono riportati nella tabella 2 e nella figura 3. Il fit lineare eseguito restituisce $\alpha = 0.412 \pm 0.001$ ($\chi^2_{rid} = 0.08$)⁴.

¹D'ora in poi non lo si ripeterà più

²idem

³Per i commenti sul valore del χ^2_{rid} si veda la sezione finale

⁴idem

Tabella 1: Partitore di tensione con resistenze di circa 1 k Ω ; tutti i valori sono espressi in Volt

V_{in}	$\sigma_{V_{in}}$	V_{out}	$\sigma_{V_{out}}$
0.360	0.002	0.1796	0.0009
1.274	0.006	0.635	0.003
2.09	0.01	1.04	0.005
3.28	0.02	1.644	0.008
4.01	0.02	2.00	0.01
5.00	0.03	2.49	0.01
6.24	0.03	3.11	0.02
7.31	0.04	3.64	0.02
8.18	0.04	4.07	0.02
9.01	0.05	4.49	0.03
9.99	0.05	4.98	0.03

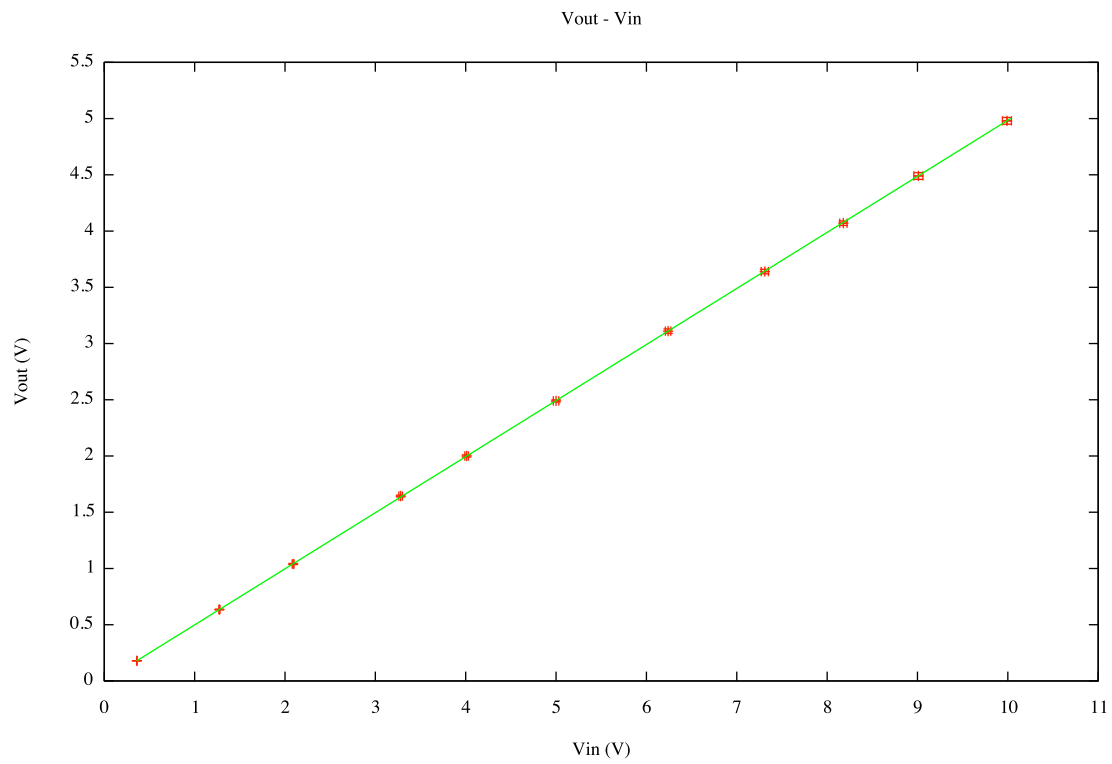


Figura 2: Partitore di tensione con resistenze di circa 1 k Ω

Tabella 2: Partitore di tensione con resistenze di circa 4 M Ω ; tutti i valori sono espressi in Volt

V_{in}	$\sigma_{V_{in}}$	V_{out}	$\sigma_{V_{out}}$
0.354	0.002	0.146	0.004
1.287	0.005	0.531	0.004
2.35	0.01	0.973	0.008
3.11	0.02	1.285	0.008
4.21	0.02	1.74	0.01
5.39	0.03	2.22	0.01
6.30	0.03	2.59	0.02
7.16	0.04	2.94	0.02
8.40	0.04	3.46	0.02
9.30	0.05	3.82	0.02
10.20	0.05	4.20	0.03

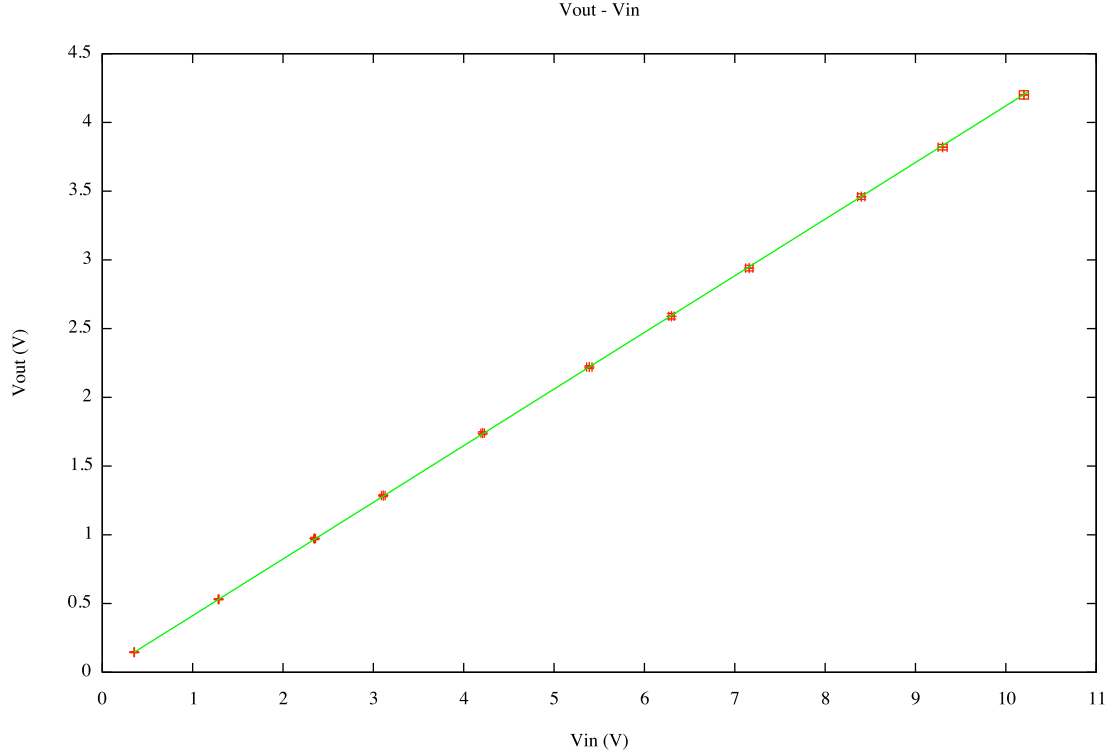


Figura 3: Partitore di tensione con resistenze di circa $4 \text{ M}\Omega$

2.d Determinazione della resistenza in ingresso del tester

Dall'equazione (1) si ricava facilmente

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) - \frac{1}{R_2} \quad (2)$$

Sostituendo nell'espressione i dati relativi al punto 2c si trova il valore $R_T = 9.6 \pm 0.7 \text{ M}\Omega$, compatibile con quello fornito dal costruttore di $10 \text{ M}\Omega$. Lo stesso procedimento non può essere applicato con profitto ai dati del punto 2b, poiché in questo caso la resistenza in ingresso del tester non altera quasi il funzionamento del circuito. Se si fanno i calcoli, si trova che l'errore relativo su R_T è superiore al 1000% e dunque il valore ottenuto non fornisce di fatto nessuna informazione, se non un limite superiore molto blando al valore di R_T .

2.e Partitore di corrente

Si è montato il circuito in figura 4 con resistenze $R_1 = 564 \pm 5 \Omega$, $R_2 = 218 \pm 2 \Omega$ e $R_3 = 98.8 \pm 0.8 \text{ k}\Omega$ (tutte misurate con il multimetro digitale). Si è dunque posto il tester a misurare V_{in} e si sono misurate I_1 e I_2 per valori di tensione in ingresso variabili tra 0.5 V e 10 V attraverso il multimetro analogico, sostituendo alternativamente gli amperometri 1 e 2 della figura 4 con dei cortocircuiti. I valori ottenuti sono riportati nella tabella 3; l'incertezza sull'intensità di corrente è quella indicata dal manuale (1% del valore di fondo scala in corrente continua).

Chiamiamo R_A la resistenza dell'amperometro. Poiché $R_1, R_2, R_A \ll R_3$, si è supposto sempre $I_{tot} = V_{in}/R_3$ (con un errore dello $0.6\% = \max\{R_1, R_2\}/R_3$). Se la resistenza interna dell'amperometro fosse trascurabile rispetto alle resistenze dei due rami del partitore, ci aspetteremmo:

$$I_{1,2} = \frac{V_{in}}{R_3} \frac{R_{2,1}}{R_1 + R_2} \equiv V_{in} \alpha_{1,2}$$

Nel nostro caso, invece, si è usata la scala dei $50 \mu\text{A}$, per i quali il manuale del multimetro prevede una caduta di potenziale di 100 mV , da cui si ricava $R_A = 2 \text{ k}\Omega$, maggiore sia di R_1 , sia di R_2 . La formula corretta per le correnti nei rami è dunque:

$$I_{1,2} = \frac{V_{in}}{R_3} \frac{R_{2,1}}{R_1 + R_2 + R_A} \equiv V_{in} \alpha_{1,2} \quad (3)$$

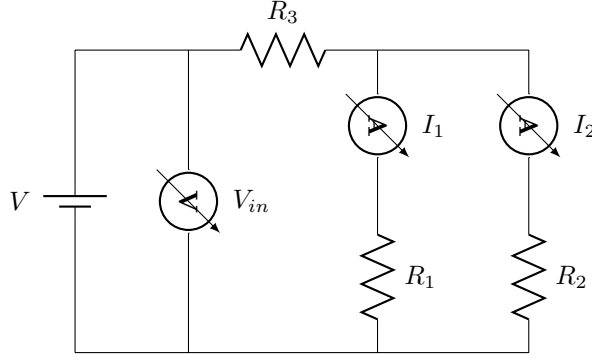


Figura 4: Circuito 2e

Tabella 3: Partitore di corrente con resistenze di circa 560Ω e 220Ω

V_{in} (V)	$\sigma_{V_{in}}$ (V)	I_1 (μA)	σ_{I_1} (μA)	I_2 (μA)	σ_{I_2} (μA)
3.15	0.02	2.9	0.5	6.7	0.5
4.65	0.02	4.0	0.5	9.5	0.5
5.71	0.03	4.9	0.5	11.8	0.5
6.72	0.03	5.7	0.5	13.8	0.5
7.72	0.04	6.2	0.5	15.8	0.5
8.93	0.05	7.2	0.5	18.0	0.5
10.29	0.05	8.2	0.5	20.3	0.5
11.50	0.06	9.1	0.5	23.2	0.5
12.73	0.06	10.0	0.5	25.8	0.5
14.07	0.07	11.2	0.5	27.3	0.5

In entrambi i casi la dipendenza di $I_{1,2}$ da V_{in} è lineare. I due fit eseguiti hanno fornito $\alpha_1 = 0.80 \pm 0.02 \text{ M}\Omega^{-1}$ ($\chi_{rid}^2 = 0.21$) e $\alpha_2 = 2.00 \pm 0.02 \text{ M}\Omega^{-1}$ ($\chi_{rid}^2 = 0.69$); i relativi grafici sono riportati nella figura 5.

I risultati confermano che la resistenza interna dell'amperometro perturba fortemente il circuito. Infatti, se R_A fosse trascurabile, dovrebbe valere $\alpha_1 + \alpha_2 = 1/R_3$. Invece $\alpha_1 + \alpha_2 = 2.80 \pm 0.04 \text{ M}\Omega^{-1} \neq 10.1 \pm 0.1 \text{ M}\Omega^{-1} = 1/R_3$ e la differenza è di quasi un ordine di grandezza.

Dall'equazione 3 si ricava, per i due valori α_1 e α_2 :

1. $R_A = 2.0 \pm 0.3 \text{ k}\Omega$
2. $R_A = 2.1 \pm 0.3 \text{ k}\Omega$

che sono valori compatibili fra loro e con l'indicazione del manuale $R_A = 2 \text{ k}\Omega$.

3. Uso dell'oscilloscopio

3.b Partitore di tensione

Si è rimontato il circuito in figura 1 con le resistenze, misurate con il multimetro digitale: $R_1 = 3.78 \pm 0.04 \text{ M}\Omega$ e $R_2 = 3.85 \pm 0.04 \text{ M}\Omega$. Si sono dunque prese due coppie di misure di tensioni per mezzo dell'oscilloscopio (accoppiamento DC):

1. $V_{in} = 4.8 \pm 0.2 \text{ V}$, $V_{out} = 0.85 \pm 0.03 \text{ V}$ $\rightarrow \alpha_1 = 0.18 \pm 0.01$
2. $V_{in} = 9.8 \pm 0.4 \text{ V}$, $V_{out} = 1.71 \pm 0.07 \text{ V}$ $\rightarrow \alpha_2 = 0.17 \pm 0.01$

dove si è assunta come incertezza la risoluzione di spostamento dei cursori.

3.c Confronto fra misura in DC e in AC

Ovviamente, se si esegue la misura in modalità AC il condensatore posto in ingresso all'oscilloscopio elimina la componente continua del segnale, che scompare quasi del tutto: si osserva solo un minimo rumore di fondo oscillante.

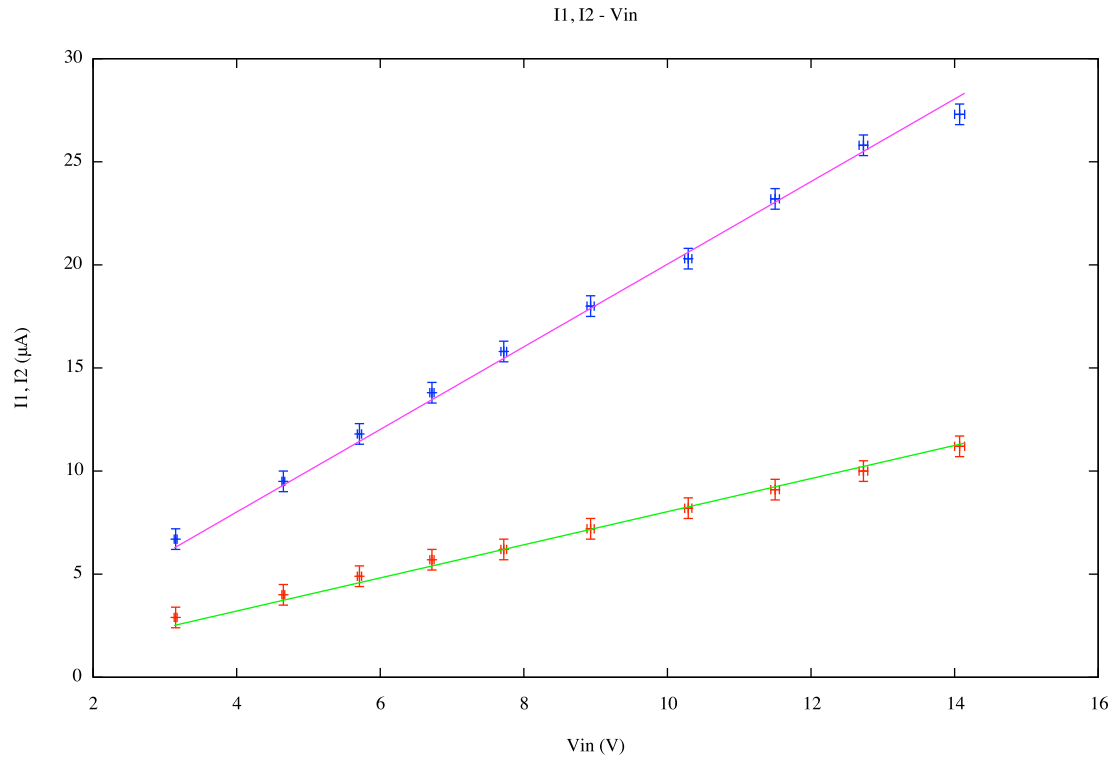


Figura 5: Partitore di corrente con resistenze di circa $220\ \Omega$ e $220\ \Omega$. Correnti nei due rami in funzione di V_{in} ; in rosso e in verde I_1 , in blu e viola I_2

3.d Valutazione dell'impedenza in ingresso

Utilizzando l'equazione (2) si trova per le due coppie di misure:

1. $R_T = 1.06 \pm 0.09\ \text{M}\Omega$
2. $R_T = 0.97 \pm 0.08\ \text{M}\Omega$

La loro media pesata dà $R_T = 1.01 \pm 0.06\ \text{M}\Omega$, che è una buona stima dell'impedenza in ingresso in corrente continua dell'oscilloscopio, compatibile con quella fornita dal costruttore di $1\ \text{M}\Omega$.

4. Misure di frequenza, di tempo

4.b Misure di frequenza

Si è collegato il generatore di funzioni all'oscilloscopio per mezzo di un cavo coassiale e si sono fatte diverse misure della frequenza, fatta variare fra $1\ \text{kHz}$ e $1\ \text{MHz}$, di onde sinusoidali. Si sono utilizzati due approcci diversi. Il primo consiste nella misura di due periodi tramite l'utilizzo dei cursori, posizionati all'intersezione dell'onda mediata dallo strumento su sedici periodi con l'asse della terra (l'incertezza utilizzata è stata la risoluzione dello spostamento dei cursori, inferiore a quella dovuta all'individuazione dei punti di intersezione). Tale valore è stato quindi diviso per due e invertito, ottenendo i valori di f_1 riportati nella tabella 4. I valori di f_2 sono stati invece ottenuti per mezzo del frequenzimetro integrato nell'oscilloscopio. In questo caso si è assunta come incertezza la semidispersione dei valori visualizzati sullo schermo, sempre oscillanti (il costruttore garantisce un'incertezza minore di questa, e comunque solo per intervalli di tempo superiori al microsecondo).

I valori ottenuti attraverso i due diversi metodi sono compatibili in tutti i casi, e hanno tutti una precisione compresa tra il 0.3% e il 0.5%. Il frequenzimetro integrato sembrerebbe fornire risultati leggermente più precisi, ma ciò non è affatto sicuro, poiché lo strumento potrebbe inserire un'incertezza maggiore dell'oscillazione di valore osservata sullo schermo, sulla cui entità il manuale non fornisce garanzia alcuna.

Tabella 4: Misure di frequenza tramite oscilloscopio TDS1012B

T (μ s)	σ_{f_1} (μ s)	f ₁ (kHz)	σ_{f_1} (kHz)	f ₂ (kHz)	σ_{f_2} (kHz)
995	5	1.005	0.005	1.007	0.001
99.5	0.5	10.05	0.05	10.02	0.04
10.00	0.05	100.0	0.5	99.9	0.4
0.970	0.005	1031	5	1030	3

5. Trigger dell'oscilloscopio

5.a Metodi di utilizzo del trigger

Si è impostato il generatore di funzioni sulla forma d'onda sinusoidale. Il punto cui corrisponde l'inizio della presa dati è individuato sullo schermo da due frecce poste alle sue estremità (in alto e a destra). Agendo sulla manopola di *level* dell'oscilloscopio (senza spostare l'origine dei tempi), l'onda trasla orizzontalmente fino a scomparire quando il livello di trigger supera la sua ampiezza.

Se la modalità di trigger è impostata su *fronte* il segnale in ingresso viene acquisito indipendentemente dalla frequenza dell'onda. Il comando *pendenza* decide se la rilevazione inizia quando il livello di trigger viene raggiunto da una tensione in crescita o in diminuzione.

Quando invece è attiva la modalità *impulso* vengono visualizzate solo le onde che, a seconda dell'opzione utilizzata, hanno frequenza minore, maggiore o circa uguale a una frequenza scelta arbitrariamente nella finestra *durata impulso*.

5.b Utilizzo del segnale di pulse per il trigger

Si sono collegati l'uscita standard e l'uscita di pulse del generatore di funzioni rispettivamente al Ch1 e al Ch2 dell'oscilloscopio per mezzo di cavi coassiali. Si è dunque impostato il Ch2 come sorgente del trigger e si sono fatte le seguenti osservazioni:

1. l'onda di pulse ha la stessa frequenza di quella principale
2. la forma è quella di un'onda quadra con $V_{\min} = 0$ V e $V_{\max} = 5$ V costante al variare dell'ampiezza dell'onda principale (le misure si sono prese a spanne, senza valutare l'incertezza)
3. la salita del fronte dell'onda di pulse avviene in corrispondenza del raggiungimento del massimo dell'onda principale se questa è sinusoidale, e del minimo se invece è triangolare o quadra

5.c Tempo di salita e di discesa di un'onda quadra

La misura del tempo di salita e di discesa è stata effettuata utilizzando un'onda quadra a 1 MHz, mediata su 16 oscillazioni. La funzione di misura integrata nell'oscilloscopio ha fornito rispettivamente i valori 65.4 ± 0.2 ns e 62.2 ± 0.2 ns (l'incertezza è la semidispersione dei valori oscillanti forniti dalla funzione di misura; non siamo riusciti a rintracciare indicazioni sull'incertezza intrinseca allo strumento nel manuale). Si è poi eseguita una misura utilizzando i cursori, seguendo le indicazioni del manuale dell'oscilloscopio. I valori ottenuti sono rispettivamente (l'incertezza è sempre la risoluzione dello spostamento dei cursori): 64 ± 4 ns e 62 ± 2 ns, entrambi compatibili con quelli precedenti, ma meno precisi.

6. Ritardo dei cavetti

6.b Stima del tempo di percorrenza di un cavo coassiale da parte di un'onda e.m.

Si è collegata l'uscita pulse⁵ del generatore di funzioni, per mezzo di uno sdoppiatore a T, alla serie di due cavi assiali e ad un cavo singolo, collegati a loro volta ai due canali in ingresso dell'oscilloscopio. Si è dunque misurato lo sfasamento temporale fra l'inizio dell'impulso visualizzato sui canali 1 e 2, mediato su 16 impulsi, ottenendo 6.0 ± 0.2 ns (l'incertezza è data dalla risoluzione di spostamento dei cursori). Il ritardo dovuto al passaggio del segnale in un cavo coassiale è dunque in perfetto accordo col dato fornito dal costruttore (6.0 ns).

⁵Si vedano i commenti finali per il motivo di questa scelta

Commenti finali

Valori del χ^2 dei punti 2.b e 2.c

I valori del χ^2_{rid} ottenuti nei primi due fit sono molto bassi. Ciò è dovuto probabilmente ai seguenti fatti:

1. per il calcolo delle incertezze ci si è attenuti alle indicazioni del manuale del tester, che fornisce l'errore massimo e non lo scarto quadratico medio relativo alla misura, contrariamente a quanto sarebbe necessario per effettuare un corretto test del χ^2 , il cui valore è dunque diminuito artificialmente
2. in particolare tali incertezze non sono di natura statistica ma prevalentemente sistematica (legata alla calibrazione dello strumento), e dunque il test del minimo χ^2 non ha senso per il caso in esame

I valori non sono invece tanto bassi nel caso dei fit inerenti le intensità di corrente, sia poiché la precisione del multimetro analogico è minore di quella del digitale, sia poiché l'osservatore introduce in questo caso un seppur piccolo errore statistico legato all'incertezza nella lettura (errori di parallasse ecc.).

Scelta della sorgente nel punto 6.b

Provando a ripetere l'esperimento 6.b con un'onda quadra proveniente dall'uscita standard del generatore di funzioni, non si è riusciti a rilevare nessun ritardo apprezzabile fra i due segnali. Non si è altresì riusciti a trovare un'interpretazione soddisfacente di questo fenomeno.