

Integratore/derivatore RC: impedenze e condizioni

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 3 - FF, 29 novembre 2014)

Questa nota fa riferimento al circuito integratore + derivatore RC in cascata realizzato in una esperienza pratica e intende mostrare un po' più nel dettaglio come il circuito completo possa essere trattato seguendo l'approccio del "metodo simbolico" ("fasori"). In particolare vengono sviluppate le considerazioni che riguardano il dimensionamento delle capacità che compaiono nel circuito.

I. INTRODUZIONE

Il circuito di riferimento è mostrato in Fig. 1(a): esso è costituito da due sotto-circuiti montati in cascata uno rispetto all'altro. Il progetto richiede che alla frequenza di lavoro prescelta, $f = \omega/(2\pi)$, il sotto-circuito A sia un integratore e B un derivatore.

A differenza di quanto realizzato nell'esperienza pratica, qui supporremo di lavorare con segnali alternati di tipo armonico, cioè *sinusoidale*, e lo faremo con l'obiettivo di studiare il circuito *nel dominio delle frequenze*. Pertanto ci occuperemo delle soluzioni *a regime*, trascurando i transitori dovuti a carica/scarica dei condensatori (all'istante iniziale e a quello finale). Vedremo poi più avanti (una specifica nota sarà dedicata a questo) come i risultati ottenuti in regime sinusoidale possano essere estesi per trattare altre forme d'onda *periodiche* grazie all'approccio della serie di Fourier.

Dunque l'ingresso è costituito dal generatore di funzioni che produce la forma d'onda sinusoidale $V_{\omega G}$ (è un fasore); $V_{\omega A}$ rappresenta l'uscita del derivatore e $V_{\omega B}$ quella dell'integratore. Nell'analisi nel dominio delle frequenze, integrazione e derivazione temporale corrispondono rispettivamente a sfasamenti del fasore di uscita rispetto a quello di ingresso di $-\pi/2$ o $\pi/2$.

A. Dimensionamento

Definiamo le *frequenze di taglio* per i due sotto-circuiti presi separatamente come $f_{TA,B} = 1/(2\pi R_{A,B} C_{A,B})$. Affinché essi si comportino nel modo desiderato (rispettivamente integratore e derivatore) occorre che $f_{TA} \ll f \ll f_{TB}$. Questa affermazione, che qui diamo per accettata, può essere facilmente dimostrata ragionando o nel dominio dei tempi, o nel dominio delle frequenze, facendo riferimento in questo caso a un filtro passa-basso per l'integratore e un passa-alto per il derivatore.

Dalla condizione sulle frequenze risulta $R_B C_B \ll R_A C_A$. Inoltre, come verificato nell'esperienza pratica, c'è un'ulteriore condizione sul rapporto C_B/C_A , che deve essere molto piccolo. Una giustificazione molto grossolana si può dare osservando che, in buona sostanza, il condensatore C_B si trova "in parallelo" a C_A , per cui l'integratore è effettivamente dotato di una capacità equivalente $C_{eq} = C_A + C_B$, e volendo che la frequenza di ta-

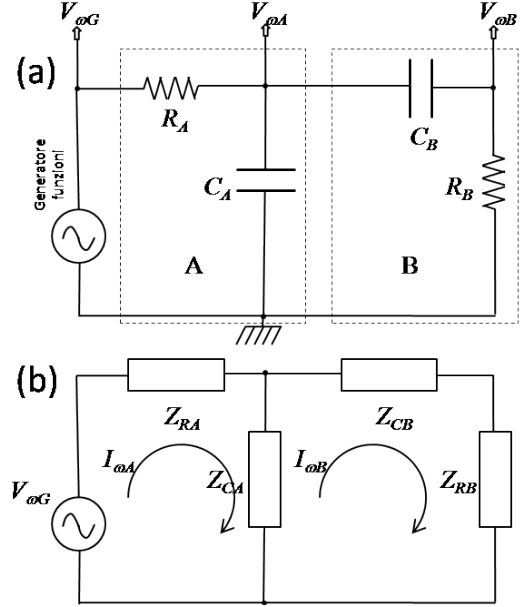


Figura 1. Circuito integratore/derivatore RC in cascata (a) e sua suddivisione in maglie (b). I rettangolini rappresentano componenti di impedenza Z .

glio f_{TA} sia quella di progetto, si può affermare che deve anche essere $C_B \ll C_A$.

Questa giustificazione può essere resa più ragionevole, o significativa, considerando l'*impedenza* equivalente Z_{eq} "vista dall'integratore". Il condensatore C_A , che ha impedenza $Z_{CA} = 1/(j\omega C_A)$, si trova in parallelo con l'impedenza Z_B della serie costituita da C_B e R_B . Si ha quindi

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_{CA}} + \frac{1}{Z_B} = j\omega C_A + j\omega C_B \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB}}, \quad (1)$$

dove $\omega_{TB} = 1/(R_B C_B)$. Nelle condizioni di lavoro prescelte è $\omega/\omega_{TB} \ll 1$, per cui, riarrangiando:

$$\frac{1}{Z_{eq}} \simeq j\omega(C_A + C_B) = j\omega C_A(1 + C_B/C_A). \quad (2)$$

Per $C_B \ll C_A$ si ha $Z_{eq} \approx Z_{CA}$, dunque effettivamente l'integratore funziona come se fosse indipendente, cioè come se ad esso non fosse collegato in cascata il derivatore.

II. CIRCUITO A DUE MAGLIE

Il bello del metodo simbolico risiede in gran parte nella circostanza che tutte le affermazioni, o tecniche, che sappiamo essere valide nel caso di circuiti resistivi, per i quali vale la “legge di Ohm”, possono essere “trasferite” allo studio di circuiti in alternata (in regime sinusoidale) che contengono anche componenti “reattivi”, per esempio capacitori.

Ri-disegniamo lo schema come in Fig. 1(b), dove i vari componenti sono stati rappresentati con rettangolini, ognuno dotato di una specifica impedenza. Notate che, per semplicità, le resistenze interne di generatore e gli effetti delle resistenze interne degli strumenti di misura (canali dell’oscilloscopio) sono trascurati. Lo schema mostra in maniera chiara come i due sotto-circuiti A e B costituiscano delle maglie, a ognuna delle quali attribuiamo una corrente descritta dai fasori $I_{\omega A}$ e $I_{\omega B}$. Il ramo che contiene C_A , ovvero il componente di impedenza $Z_{CA} = 1/(j\omega C_A)$, è in comune tra le due maglie, essendo attraversato dalle due correnti di maglia. Osservate che, per la scelta convenzionale del verso di percorrenza delle maglie, le due correnti si trovano a scorrere in verso opposto attraverso lo stesso componente.

Le equazioni delle due maglie recitano:

$$V_{\omega G} = (Z_{RA} + Z_{CA})I_{\omega A} - Z_{CA}I_{\omega B} \quad (3)$$

$$0 = -Z_{CA}I_{\omega A} + (Z_{RB} + Z_{CB} + Z_{CA})I_{\omega B} \quad (4)$$

EsPLICITANDO le espressioni delle impedenze, le due equazioni diventano

$$V_{\omega G} = (R_A + \frac{1}{j\omega C_A})I_{\omega A} - \frac{1}{j\omega C_A}I_{\omega B} \quad (5)$$

$$0 = -\frac{1}{j\omega C_A}I_{\omega A} + (R_B + \frac{1}{j\omega C_B} + \frac{1}{j\omega C_A})I_{\omega B} \quad (6)$$

ovvero, con un pizzico di algebra

$$V_{\omega G} = \frac{1 + j\omega/\omega_{TA}}{j\omega C_A}I_{\omega A} - \frac{1}{j\omega C_A}I_{\omega B} \quad (7)$$

$$0 = -\frac{1}{j\omega C_A}I_{\omega A} + (\frac{1 + j\omega/\omega_{TB}}{j\omega C_B} + \frac{1}{j\omega C_A})I_{\omega B} \quad (8)$$

dove $\omega_{TA} = 1/(R_A C_A)$.

Dalla seconda equazione del sistema si ottiene

$$I_{\omega B} = \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A} I_{\omega A} \quad (9)$$

che, inserita nella prima, conduce a

$$V_{\omega G} = \frac{1}{j\omega C_A} (1 + j\omega/\omega_{TA} - \quad (10)$$

$$- \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}) I_{\omega A} \quad (11)$$

Dunque il sistema delle due equazioni di maglia è stato risolto, dato che è possibile determinare le correnti di maglia in funzione del segnale applicato all’ingresso.

Notate che nella soluzione trovata non è stata ancora impiegata alcuna approssimazione, se non quella relativa alle resistenze interne.

La soluzione permette di determinare le d.d.p. tra qualsiasi coppia di punti del circuito, per esempio le $V_{\omega A, B}$. Si ha infatti

$$V_{\omega A} = \frac{1}{j\omega C_A} (I_{\omega A} - I_{\omega B}) = \quad (12)$$

$$= [(1 - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}) \times \quad (13)$$

$$\times (\frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TA} - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}})] V_{\omega G} \quad (14)$$

dove nell’ultimo passaggio si è usata un po’ di algebra.

Inoltre è anche

$$V_{\omega B} = R_B I_{\omega B} = \quad (15)$$

$$= R_B (\frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}) I_{\omega A} = \quad (16)$$

$$= [(\frac{j\omega/\omega_{TB}}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}) \times \quad (17)$$

$$\times (\frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TA} - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_{TB} + C_B/C_A}})] V_{\omega G} \quad (18)$$

Le due orribili equazioni appena scritte permettono di descrivere i fasori in uscita dal nostro circuito in funzione dell’ingresso e quindi consentono di predire tutto quello che si può, incluse attenuazioni e sfasamenti, come qualsiasi *funzione di trasferimento* complessa. Il problema è che determinare attenuazioni e sfasamenti da equazioni complicate come quelle di Eqs. 12,15 è una follia che richiede di consumare pagine e pagine di carta per rendere maneggiabili le espressioni. Una alternativa molto valida è quella di dare in pasto le equazioni a un qualche software che sappia maneggiare grandezze complesse, e questo vedremo se saremo in grado di farlo in futuro.

Per il momento, però, per capirci qualcosa dobbiamo accontentarci di far planare sulle equazioni le approssimazioni che derivano dalle condizioni di lavoro prescelte, cioè $\omega_{TA} \ll \omega \ll \omega_{TB}$ ed eventualmente l’approssimazione sulla scelta delle capacità, $C_B \ll C_A$.

A. Approssimazioni

Una premessa prima di usare materialmente le approssimazioni. È prassi comune quella di procedere con una certa disinvoltura quando, nelle relazioni complesse che si scrivono in questo ambito, si confrontano parte reale e parte immaginaria. Il senso è chiaro se si pensa alla rappresentazione delle grandezze complesse come vettori nel piano complesso (di Gauss): se, per esempio, il coefficiente della parte reale è numericamente molto più piccolo di quello della parte immaginaria, allora il vettore rappresentativo giace pressoché interamente sull’asse complesso, cioè, di fatto, si trascura la parte reale rispetto a quella immaginaria. Viceversa nel caso opposto.

Ispezioniamo rapidamente le Eqs. 12,15 supponendo per il momento solo ω/ω_{TB} molto piccolo (tendente a zero). Si ottiene facilmente

$$V_{\omega A} \simeq \left[\left(1 - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + C_B/C_A} \right) \times \right. \quad (19)$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{1 - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + C_B/C_A} + j\omega/\omega_{TA}} \right) \right] V_{\omega G} \quad (20)$$

$$V_{\omega B} \simeq \left[\frac{j\omega/\omega_{TB}}{1 - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + C_B/C_A} + j\omega/\omega_{TA}} \right] V_{\omega G} . \quad (21)$$

Immaginiamo ora anche ω/ω_{TA} molto grande, supponendo che, quando il termine $j\omega/\omega_{TA}$ compare a somma con altri termini, questi altri termini diventino trascurabili (la procedura non è proprio elegante, ma funziona). In altre parole, nei denominatori in cui compare $j\omega/\omega_{TA}$, questo è il solo termine che sopravvive, cioè i denominatori in questione diventano puramente immaginari. Con questa ulteriore approssimazione si ottiene

$$V_{\omega A} \simeq \left[\left(1 - \frac{C_B}{C_A} \frac{1}{1 + C_B/C_A} \right) \left(\frac{1}{j\omega/\omega_{TA}} \right) \right] V_{\omega G} = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{1 + C_B/C_A} \frac{1}{j\omega/\omega_{TA}} V_{\omega G} \quad (23)$$

$$V_{\omega B} \simeq \frac{j\omega/\omega_{TB}}{j\omega/\omega_{TA}} V_{\omega G} = \frac{\omega_{TA}}{\omega_{TB}} V_{\omega G} . \quad (24)$$

La prima equazione ci dice che all'uscita del sotto-circuito A si trova un fasore sfasato di $-\pi/2$ (ricordate: $1/j = -j$!) rispetto all'ingresso, che è il comportamento atteso per un integratore. L'ampiezza del fasore in uscita è attenuata di un fattore $(1/(1 + C_B/C_A))(\omega_{TA}/\omega)$, che

dipende dalla frequenza e dal rapporto delle capacità. In particolare, nel caso $C_B \ll C_A$ tale attenuazione tende proprio a $\omega_{TA}/\omega = f_{TA}/f$, che è l'espressione attesa per un integratore (in regime sinusoidale). Con questa ulteriore approssimazione si ottiene quindi:

$$V_{\omega A} \simeq \frac{1}{j\omega/\omega_{TA}} V_{\omega G} \quad (25)$$

$$V_{\omega B} \simeq \frac{\omega_{TA}}{\omega_{TB}} V_{\omega G} = j\omega/\omega_{TB} V_{\omega A} , \quad (26)$$

dove abbiamo riscritto anche la seconda equazione (non interessata dall'approssimazione). Essa ci dice che il fasore in uscita da B è sfasato di $\pi/2$ rispetto a quello in uscita da A, dunque la maglia A esegue una derivazione temporale del segnale, attenuandone l'ampiezza per un fattore $\omega/\omega_{TB} = f/f_{TB}$. Infine, paragonato al fasore in ingresso all'intero circuito, quello che esce da B è in fase e la sua ampiezza risulta attenuata del fattore $\omega_{TA}/\omega_{TB} = f_{TA}/f_{TB}$, indipendente dalla frequenza di lavoro. Alcune di queste approssimazioni sono state ben confermate nell'esperienza pratica con onde non sinusoidali.

Infine, tornando indietro ad esempio all'Eq. 9, si può osservare come, nelle approssimazioni utilizzate, si abbia $|I_{\omega B}| \ll |I_{\omega A}|$, cioè il sotto-circuito B “assorbe” una corrente trascurabile dal sotto-circuito A, ovvero ancora il sotto-circuito B “influenza” in modo trascurabile il funzionamento del sotto-circuito A. Questa constatazione, che è una conseguenza della scelta $C_B \ll C_A$, si può leggere come una verifica del corretto “accoppiamento” fra i diversi stadi del circuito, in cui l'impedenza di ingresso del secondo è molto maggiore dell'impedenza di uscita del primo, come si può facilmente verificare.