

# Esercitazione 2 - Gruppo BG

## Uso di Phyton per l'analisi dati

Tommaso Pajero

Alessandro Podo

24 ottobre 2014

L'esercitazione ha lo scopo di familiarizzare con il software Python, che è stato utilizzato per eseguire grafici di funzioni e insiemi di dati, nonché per effettuare fit lineari e non.

## 2. Rappresentazione grafica di funzioni

### 2.a Circuito passa-basso RC

Si sono realizzati i diagrammi di Bode e dello sfasamento in uscita in funzione della frequenza e infine il diagramma di Nyquist per un circuito passa-basso RC con valori  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$ . Ponendo per semplicità  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$ , si trovano facilmente le seguenti espressioni rispettivamente per il modulo dell'ampiezza e lo sfasamento della tensione in uscita e per la parte reale e immaginaria di tale ampiezza:

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}} \quad \phi = \arctan -f/f_T$$
$$\text{Re}\{A(f)\} = \frac{1}{1 + (f/f_T)^2} \quad \text{Im}\{A(f)\} = -\frac{f/f_T}{1 + (f/f_T)^2}$$

Graficando tali funzioni si sono realizzate le immagini 1, 2 e 3.

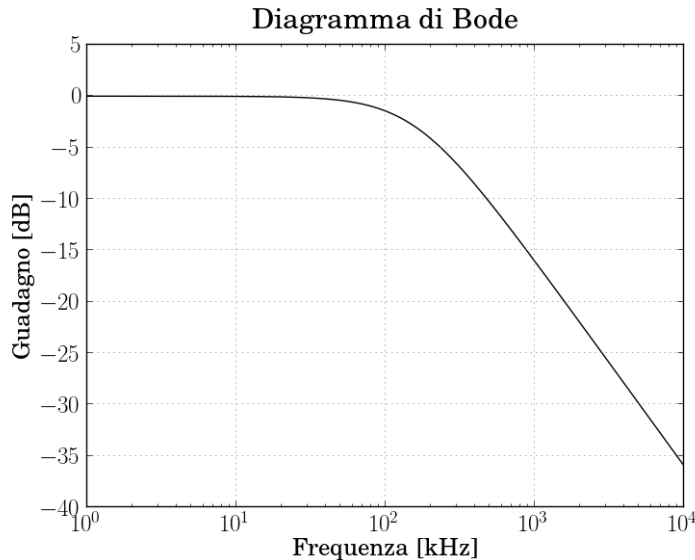


Figura 1: Diagramma di Bode per un circuito passa-basso RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

### 2.b Circuito passa-alto RC

Si è ripetuto il punto 2.a per un circuito passa-alto RC con gli stessi valori di resistenza e capacità. Le funzioni questa volta sono:

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_T/f)^2}} \quad \phi = \arctan f_T/f$$

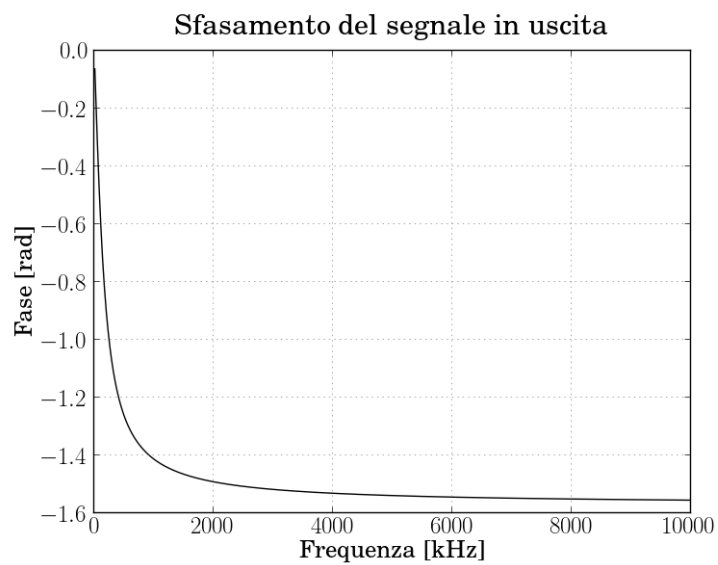


Figura 2: Diagramma dello sfasamento in uscita per un circuito passa-basso RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

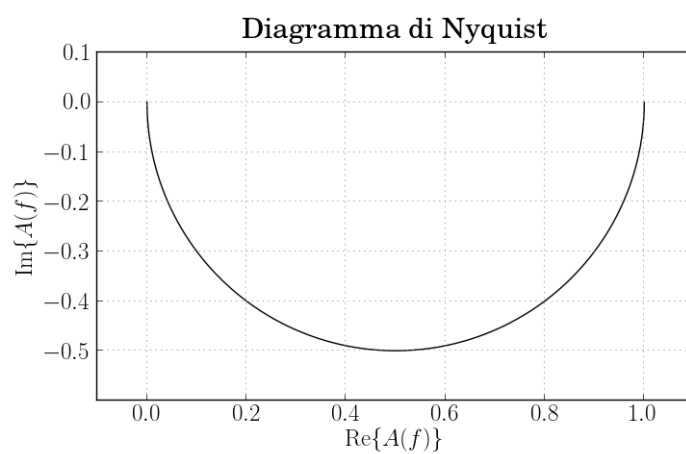


Figura 3: Diagramma di Nyquist per un circuito passa-basso RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

$$Re\{A(f)\} = \frac{1}{1 + (f_T/f)^2} \quad Im\{A(f)\} = \frac{f_T/f}{1 + (f_T/f)^2}$$

I relativi grafici sono riportati nelle figure 4, 5 e 6.

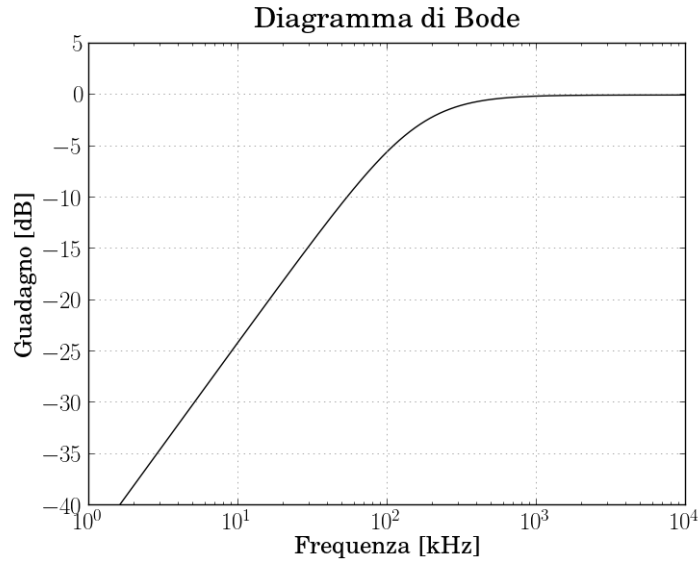


Figura 4: Diagramma di Bode per un circuito passa-alto RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

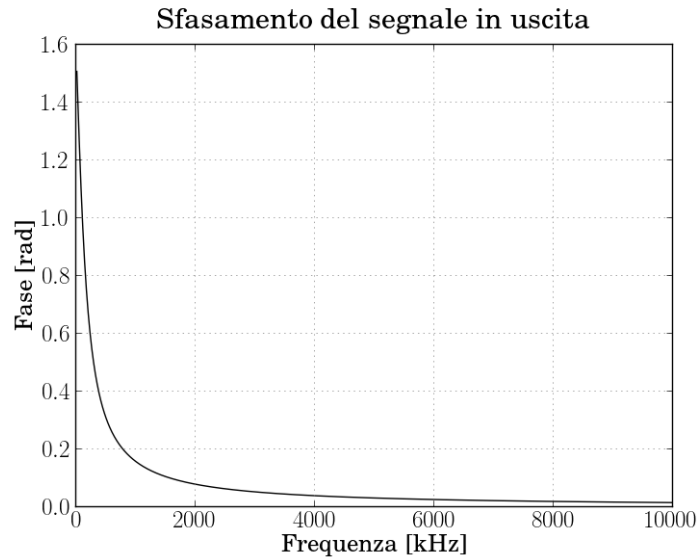


Figura 5: Diagramma dello sfasamento in uscita per un circuito passa-alto RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

### 3. Rappresentazione grafica di dati

Si è realizzata una rappresentazione grafica dei dati contenuti nei file, forniti dagli esercitatori, *force.dat* e *silver.dat*. Tali file non contenevano alcun'indicazione riguardo le unità di misura delle grandezze misurate. Si è deciso di agire nella seguente maniera:

1. Per quanto riguarda il file *force.dat*, si è supposto che la deflessione fosse espressa in radianti, le forze in Newton, e che la seconda e la terza colonna rappresentassero due forze distinte relative alla stessa deflessione. Dunque, sono state graficate, utilizzando simboli diversi, nella stessa figura 7.
2. In *silver.dat* le colonne di dati non riportavano alcuna indicazione circa la grandezza misurata, né la relativa unità di misura. In figura 8 sono dunque lasciate le etichette x e y, con unità arbitrarie.

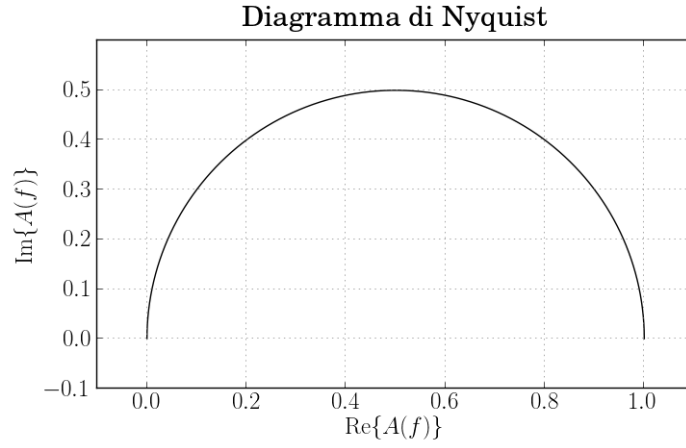


Figura 6: Diagramma di Nyquist per un circuito passa-alto RC con  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ nF}$

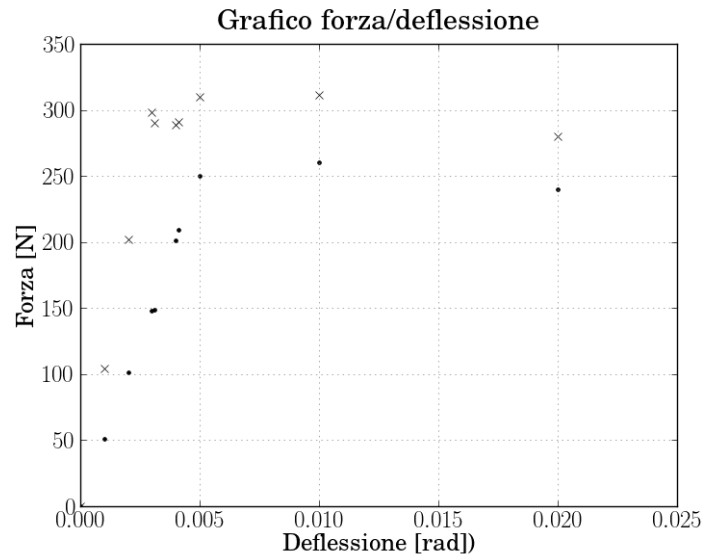


Figura 7: Rappresentazione dei dati contenuti in *force.dat*: *col force* (x) e *beam force* (.) in funzione della deflessione

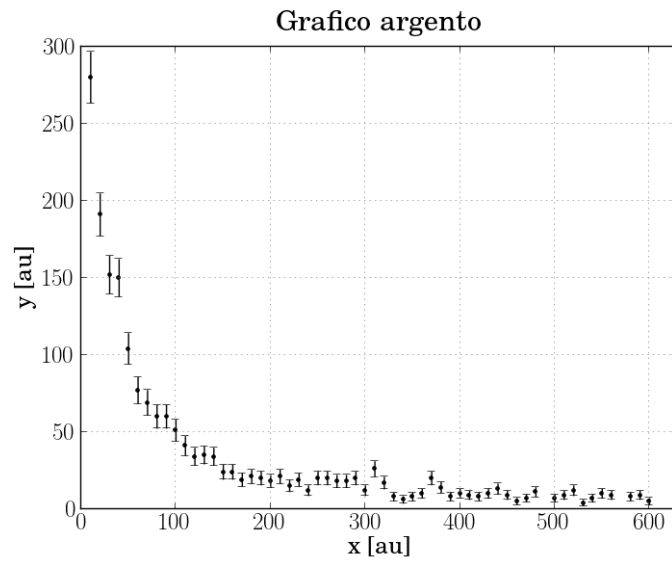


Figura 8: Rappresentazione dei dati contenuti nel file *silver.dat*

## 4. Rappresentazione grafica di dati bis

Si sono rappresentati i dati ottenuti nella sezione 2.b della prima esperienza e riportati in tabella 1 sul grafico in figura 9, con barre d'errore relative ad entrambi gli assi.

Tabella 1: Partitore di tensione con resistenze di circa 1 k $\Omega$ ; tutti i valori sono espressi in Volt

| $V_{in}$ | $\sigma_{V_{in}}$ | $V_{out}$ | $\sigma_{V_{out}}$ |
|----------|-------------------|-----------|--------------------|
| 0.360    | 0.002             | 0.1796    | 0.0009             |
| 1.274    | 0.006             | 0.635     | 0.003              |
| 2.09     | 0.01              | 1.04      | 0.005              |
| 3.28     | 0.02              | 1.644     | 0.008              |
| 4.01     | 0.02              | 2.00      | 0.01               |
| 5.00     | 0.03              | 2.49      | 0.01               |
| 6.24     | 0.03              | 3.11      | 0.02               |
| 7.31     | 0.04              | 3.64      | 0.02               |
| 8.18     | 0.04              | 4.07      | 0.02               |
| 9.01     | 0.05              | 4.49      | 0.03               |
| 9.99     | 0.05              | 4.98      | 0.03               |

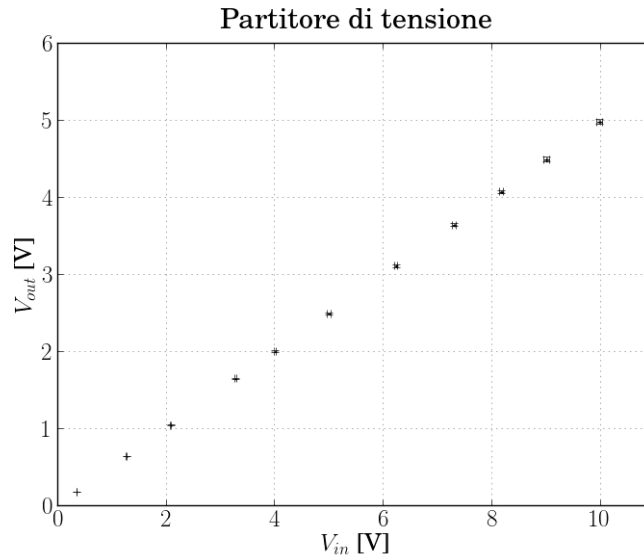


Figura 9: Partitore di tensione con resistenze di circa 1 k $\Omega$

## 5. Fit di dati<sup>1</sup>

Si sono eseguiti vari fit di una serie di dati rappresentanti il rapporto tra le ampiezze dei segnali in uscita e in entrata da un filtro passa-banda RC in funzione della frequenza. I valori scelti per il circuito sono  $R_1 = R_2 = 3.3$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 10$  nF e  $C_2 = 100$  nF. La funzione di trasferimento è:

$$A_{TOT} = A_1 A_2 \frac{1}{1 + (R_1/R_2) A_1 A_2}$$

dove

$$A_1 = \frac{1}{1 + jf/f_1} \quad A_2 = \frac{jf/f_2}{1 + jf/f_2} \quad f_i = \frac{1}{2\pi R_i C_i}$$

In particolare il modulo di tale ampiezza è, posto  $b = R_1/R_2$ :

<sup>1</sup>Per commenti sul metodo di fit utilizzato e sul valore delle incertezze dei parametri si veda l'ultimo paragrafo della relazione

$$|A_{TOT}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + b + \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{f}{f_1} - \frac{f_2}{f}\right)^2}} \quad (1)$$

Per il circuito in questione  $f_1 \simeq 4822$  Hz e  $f_2 \simeq 482$  Hz. La curva teorica che descrive il funzionamento del filtro in diagramma di Bode è riportata, congiuntamente ai dati in nostro possesso, nella figura 10.

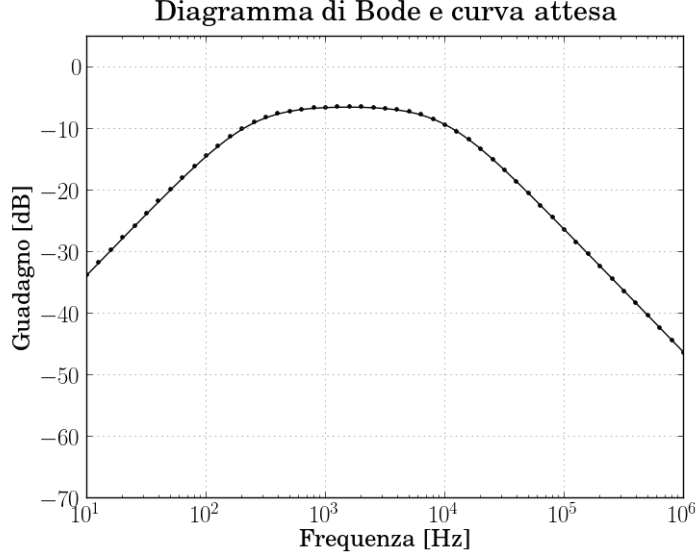


Figura 10: Diagramma di Bode per un filtro passa-banda RC con  $R_1 = R_2 = 3.3$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 10$  nF e  $C_2 = 100$  nF

Si definiscono  $f_L < f_H$  le due frequenze di taglio del filtro passa-banda.

### 5.a Fit lineari separati

Solo per questo paragrafo si è lavorato con i logaritmi decimali delle frequenze e con il guadagno anziché con le frequenze e con l'ampiezza. Si sono eseguiti tre fit lineari separati dei dati per i tre intervalli di frequenze  $f \ll f_1$  (si sono considerate le frequenze fino a 79 Hz, retta di fit  $y = m_1x + q_1$ ),  $f_2 \ll f \ll f_1$  (frequenze fra 0.79 kHz e 3.1 kHz, retta  $y = q_2$ ), e infine per  $f \gg f_1$  (frequenze maggiori di 39 kHz, retta di fit  $y = m_3x + q_3$ )<sup>2</sup>.

I fit restituiscono i valori dei parametri  $m_1 = 19.55 \pm 0.08$ ,  $q_1 = -53.1 \pm 0.1$ ,  $q_2 = -6.54 \pm 0.03$ ,  $m_3 = -19.87 \pm 0.03$  e infine  $q_3 = 72.90 \pm 0.15$ . Le matrici di covarianza per la prima e la terza retta sono rispettivamente  $\begin{pmatrix} 0.007 & -0.01 \\ -0.01 & 0.015 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0.0008 & -0.004 \\ -0.004 & 0.023 \end{pmatrix}$ .

Le tre rette sono state disegnate in sovrapposizione ai dati nella figura 11.

Le frequenze  $f_L$  e  $f_H$  si possono trovare come ascisse delle intersezioni rispettivamente delle prime due e delle ultime due rette. Chiamando  $x_0$  e  $y_0$  l'ascissa e l'ordinata di tali punti, si ha  $y_0 = m_i x_0 + q_i$ . Propagando l'errore tenendo conto della correlazione fra i parametri  $m_i$  e  $q_i$ , considerato che  $x_0 = \log f_0$ , si ottiene  $f_L = 241 \pm 3$  Hz e  $f_H = 9953 \pm 66$  Hz. Dunque  $\frac{f_L}{f_2} \simeq \frac{1}{2}$  e  $\frac{f_H}{f_1} \simeq 2$ .

Questo risultato è coerente con le attese teoriche.

### 5.b Fit unico basato sulla funzione di trasferimento $A_{TOT}$

Si è eseguito un fit unico dei dati utilizzando la funzione di trasferimento 1, avendo fissato il parametro  $b = 1$ , e lasciando variare  $f_1$  e  $f_2$ . Il fit restituisce  $f_1 = 4822.877062 \pm 0.000003$  Hz e  $f_2 = 482.287707 \pm 0.000001$  Hz. Si è dunque ripetuto il fit, lasciando però questa volta variare  $b$ . Il risultato è stato:  $f_1 = 4822.877061 \pm 0.000003$  Hz,  $f_2 = 482.287707 \pm 0.000001$  Hz,  $b = 1.0000000 \pm 0.0000001$ , fondamentalmente immutato.

### 5.c Fit unico alternativo

Si è eseguito infine un ultimo fit, utilizzando la funzione

$$|A_{TOT'}| = \frac{A}{\sqrt{[1 + (f/f_L)^2][1 + (f_H/f)^2]}}$$

<sup>2</sup>Si è usato il simbolo  $\ll$  non per indicare che i due membri debbano essere di ordini di grandezza diversi, ma per richiedere che alle frequenze in considerazione il circuito passa-basso e/o passa-alto modifichino l'ampiezza in modo rispettivamente inversamente e direttamente proporzionale alla frequenza, o non lo facciano affatto (naturalmente in prima approssimazione).

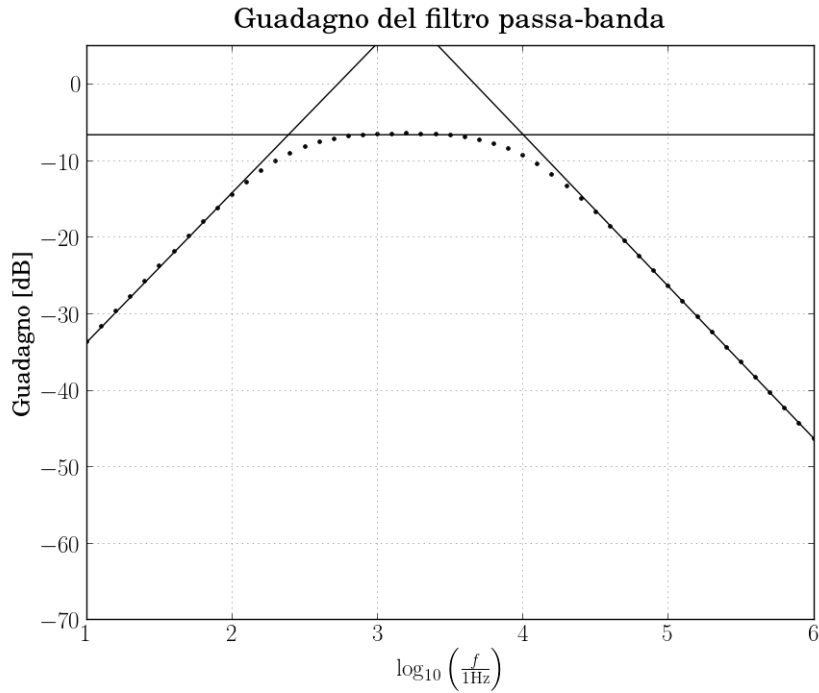


Figura 11: Fit a tre rette dei dati relativi a un filtro passa-banda RC con  $R_1 = R_2 = 3.3 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 10 \text{ nF}$  e  $C_2 = 100 \text{ nF}$

che corrisponde a una modellizzazione del filtro passa-banda come serie di un filtro passa-basso e di uno passa-alto non interagenti (in cui cioè l'impedenza in uscita del primo e quella in ingresso del secondo sono trascurabili) e di una resistenza, responsabile del guadagno  $A$ . I valori ottenuti per i tre parametri  $f_L$ ,  $f_H$  e  $A$  sono:  $f_L = 235.119020 \pm 0.000001 \text{ Hz}$ ,  $f_H = 9892.922809 \pm 0.000007 \text{ Hz}$ ,  $A = 0.487508 \pm 0.000001$ . Tali valori sono più precisi, ma non compatibili con quelli del punto 5.a<sup>3</sup>.

## 5.d Ripetizione dei fit unici

Si sono ripetuti i fit unici per un nuovo insieme di dati. In particolare, si sono ottenuti i valori:

1.  $f_1 = 4822.877062 \pm 0.000002 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 318.309886 \pm 0.000001 \text{ Hz}$ ,  $b = 1.0000000 \pm 0.0000001$  tramite il fit analogo a quello effettuato nel punto 5.b.
2.  $f_L = 188.698038 \pm 0.000001 \text{ Hz}$ ,  $f_H = 8135.587770 \pm 0.000004 \text{ Hz}$ ,  $A = a = 0.592812 \pm 0.000001$  tramite il fit analogo a quello del punto 5.c.

Si è infine eseguito un ultimo fit inserendo nell'equazione 1 i valori delle capacità e lasciando variare quelli delle due resistenze, ottenendo per queste i valori  $R_1 = 3.299999999 \pm 0.000000001 \text{ k}\Omega$  e  $R_2 = 5.000000000 \pm 0.000000001 \text{ k}\Omega$ .

## Commenti finali

I fit sono stati effettuati tramite il metodo dei minimi quadrati. Non si è riusciti a rintracciare il modo in cui il software Python fornisce le incertezze sui parametri per questo tipo di fit. In particolare, poiché i dati trattati non erano corredati da incertezza, è verosimile che le incertezze indicate da Python siano piuttosto arbitrarie e sottostimate, il che spiega l'incompatibilità dei risultati 5.a e 5.c.

<sup>3</sup>Per un'interpretazione di questo fatto si vedano i commenti finali