

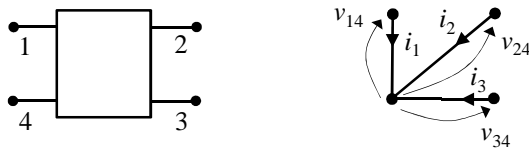
## 5. Doppi bipoli adinamici

Doppi bipoli propri, impropri, tripolari. Doppi bipoli adinamici lineari inerti (omogenei) e tempo invarianti. Rappresentazioni  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}'$ . Esistenza delle rappresentazioni. Formule di conversione tra le rappresentazioni. Doppi bipoli in serie, in parallelo, in parallelo-serie, in serie-parallelo, in cascata. Reciprocità di un circuito. Condizioni di reciprocità di doppi bipoli lineari. Simmetria. Condizioni di simmetria di doppi bipoli lineari. Trasformatore ideale. Soluzione di circuiti con grafo non connesso. Soluzione di circuiti contenenti doppi bipoli.

1

### Quadripolo

Si consideri un componente a quattro poli. In generale per esso sono specificabili tre tensioni e tre correnti rappresentative, identificabili attraverso il grafo a cespuglio associato al componente.



Il comportamento del componente è specificabile attraverso un insieme di tre equazioni costitutive che coinvolgono, in generale, le tre tensioni e le tre correnti rappresentative.

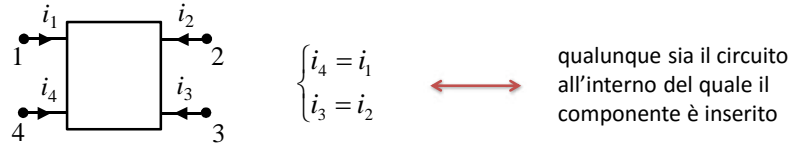
$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \\ f_3(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \end{cases}$$

2

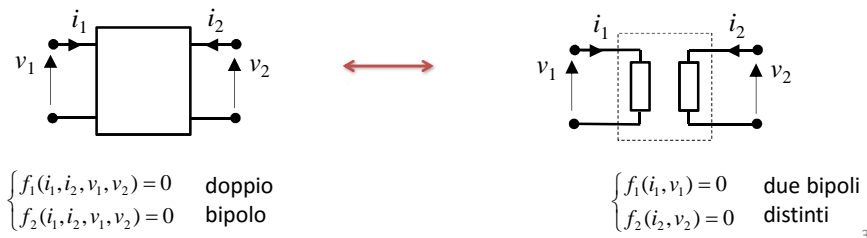


## Doppio bipolo proprio

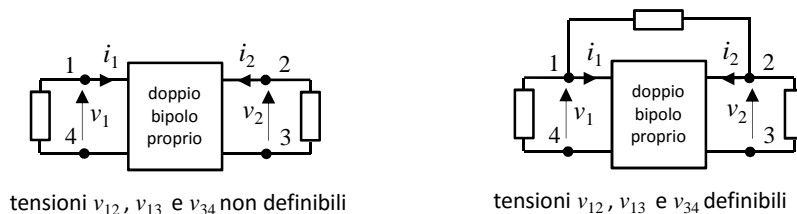
Un doppio bipolo proprio è un componente a quattro poli la cui struttura interna è tale da creare le condizioni di porta tra due coppie di terminali.



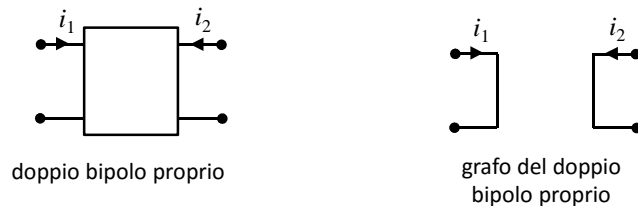
Per quanto riguarda le equazioni topologiche un doppio bipolo proprio è equivalente a due bipoli distinti. La differenza emerge nelle equazioni costitutive. Per 2 bipoli sono definibili due equazioni ciascuna delle quali coinvolge solo la propria corrente e la propria tensione, mentre per il doppio bipolo proprio sono definibili due equazioni che coinvolgono (in generale) le correnti e le tensioni di entrambe le porte.



Un doppio bipolo proprio è un componente intrinsecamente diverso dal quadrupolo in quanto esso non stabilisce, intrinsecamente, nessuna connessione tra nodi appartenenti a porte distinte. Ciò comporta che le tensioni interporta ( $v_{12}$ ,  $v_{13}$ ,  $v_{34}$  e  $v_{24}$ ) non siano definibili. Tali tensioni risultano definibili solo se il circuito nel quale il doppio bipolo è inserito è tale da creare una connessione fisica tra nodi appartenenti a due porte distinte.

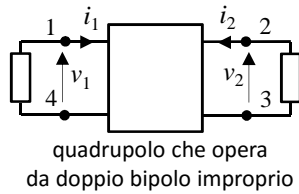


L'indeterminazione della tensione tra nodi appartenenti a porte distinte di un doppio bipolo proprio ha un chiaro riscontro nel fatto che il grafo del componente risulta non connesso



## Doppio bipolo improprio

Un doppio bipolo improprio è un quadripolo connesso a due bipoli (o più in generale a due porte proprie) tali da creare le condizioni di porta tra due coppie di terminali

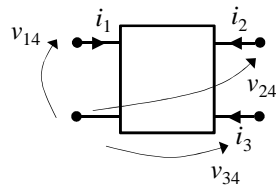


$$\begin{cases} i_4 = i_1 \\ i_3 = i_2 \end{cases}$$

per via del circuito nel quale il componente è inserito

È evidente che la condizione di porta non è intrinsecamente imposta dal componente, per cui a rigore non è possibile definire un doppio bipolo improprio se non si è specificato il circuito in cui opera.

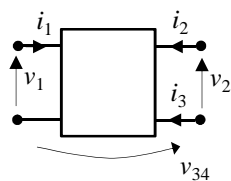
Il comportamento del quadripolo è specificabile attraverso tre equazioni che coinvolgono, in generale, le tre tensioni e le tre correnti rappresentative.



$$\begin{cases} f_a(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \\ f_b(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \\ f_c(i_1, i_2, i_3, v_{14}, v_{24}, v_{34}) = 0 \end{cases}$$

5

Le equazioni costitutive di un doppio bipolo possono essere riformulate sostituendo in esse le condizioni di porta e utilizzando, in alternativa alle tre tensioni  $v_{14}$ ,  $v_{24}$  e  $v_{34}$ , le due tensioni di porta  $v_1$ ,  $v_2$  e la tensione  $v_{34}$



$$\begin{aligned} v_{14} &= v_1 \\ v_{24} &= v_2 + v_{34} \\ v_{34} &= v_{34} \\ i_3 &= -i_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'_a(i_1, i_2, -i_2, v_1, v_2, v_{34}) = 0 \\ f'_b(i_1, i_2, -i_2, v_1, v_2, v_{34}) = 0 \\ f'_c(i_1, i_2, -i_2, v_1, v_2, v_{34}) = 0 \end{cases}$$

Questi tre vincoli consentono di determinare tre tra le variabili  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_{34}$  quando siano note le altre due. Le tre tensioni  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_{34}$  consentono poi di determinare la tensione tra qualunque coppia di nodi.

La conoscenza della  $v_{34}$  è indispensabile per valutare la tensione tra nodi appartenenti a due porte distinte. Nel caso in cui tale informazione non sia di interesse si può rinunciare a conoscere la  $v_{34}$  e rinunciare quindi ad una delle equazioni costitutive. Queste si riducono allora a due soli vincoli che coinvolgono le sole variabili di porta  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,

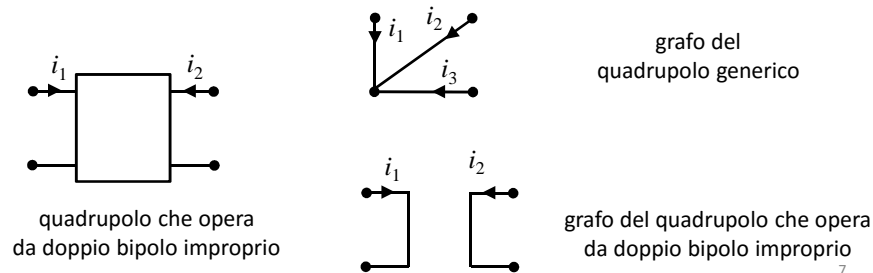
$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \end{cases}$$

6

In pratica considerare un generico quadripolo come un doppio bipolo, rappresentandolo quindi attraverso due sole equazioni anziché tre, equivale a rinunciare a conoscere la tensione che sussiste tra due nodi appartenenti a porte diverse (si noti che tale tensione sarebbe fisicamente definibile in quanto una connessione fisica tra questi nodi esiste internamente al componente)

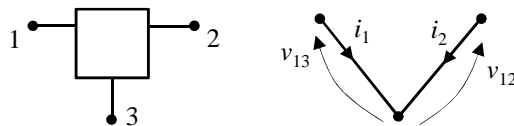
È chiaro però che ciò è possibile solo se la terza corrente rappresentativa del quadripolo non è indipendente dalle altre due, ossia solo se il circuito a cui il quadripolo è collegato è tale da imporre, impropriamente, la condizioni di porta.

L'indeterminazione della tensione tra nodi appartenenti a porte distinte di un doppio bipolo improprio ha riscontro nel fatto che il grafo associato al componente risulta non connesso



## Doppio bipolo tripolare

Un tripolo è un componente a tre terminali e come tale è rappresentabile attraverso due tensioni e due correnti (identificabili attraverso il grafo a cespuglio)

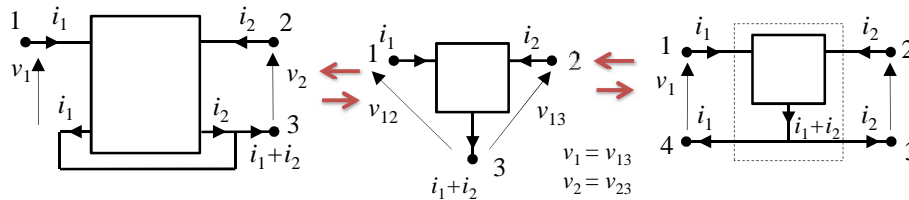


Il comportamento del tripolo è specificabile attraverso due equazioni costitutive che coinvolgono, in generale, le due correnti e le due tensioni rappresentative

$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_{13}, v_{23}) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_{13}, v_{23}) = 0 \end{cases}$$



Un tripolo è concepibile come un doppio bipolo proprio i cui terminali di uscita siano posti in comune. Se si immagina infatti di sdoppiare il terminale di uscita di un tripolo in due terminali distinti si ottiene un componente quadripolare per il quale sussistono le due condizioni di porta. Alle due porte sono associate due tensioni che coincidono con le tensioni rappresentative del tripolo



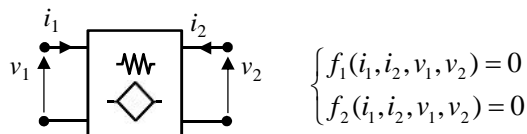
Il doppio bipolo così ottenuto prende il nome di doppio bipolo tripolare ed è definito dalle due relazioni costitutive del tripolo da cui deriva

$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_{13}, v_{23}) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_{13}, v_{23}) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \end{cases}$$

Si noti che per il doppio bipolo tripolare i terminali (e i nodi) di uscita delle due porte non sono in realtà distinti. Pertanto la tensione tra nodi appartenenti a porte distinte risulta sempre determinabile. Ciò trova riscontro nel fatto che il grafo del tripolo è connesso. <sup>9</sup>

### Doppi bipoli adinamici lineari, inerti e tempo invarianti

Nel seguito si introducono i doppi bipoli adinamici (detti anche doppi bipoli resistivi) ossia doppi bipoli caratterizzati da una relazione costitutiva che non coinvolge le derivate delle correnti o delle tensioni rappresentative. Non sarà fatta nessuna distinzione sulla natura del doppio bipolo (proprio, improprio, tripolare)



Restriangeremo per il momento la nostra attenzione ai doppi bipoli lineari, inerti (o omogenei) e tempoinvarianti, ossia caratterizzati da relazioni costitutive lineari, a coefficienti costanti e prive di termini impressivi (i.e. omogenee) che in generale possono essere espresse come

$$\begin{cases} h_{11}^i i_1 + h_{12}^i i_2 + h_{11}^v v_1 + h_{12}^v v_2 = 0 \\ h_{21}^i i_1 + h_{22}^i i_2 + h_{21}^v v_1 + h_{22}^v v_2 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{H}^i \mathbf{i} + \mathbf{H}^v \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Questa forma delle relazioni costitutive è detta **rappresentazione implicita del doppio bipolo**

Appartengono alla categoria dei doppi bipoli lineari, inerti e tempoinvarianti anche le quattro sorgenti pilotate introdotte a suo tempo. <sup>10</sup>



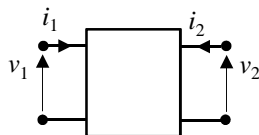
La rappresentazione implicita del doppio bipolo coinvolge quattro variabili (le 2 correnti e le 2 tensioni caratteristiche). Si definisce **rappresentazione esplicita** (o semplicemente rappresentazione) del doppio bipolo una versione delle equazioni costitutive in cui due variabili sono espresse esplicitamente in funzione delle altre due. Sono possibili le sei rappresentazione seguenti

	variabili indipendenti	variabili dipendenti
in corrente (mediante matrice <b>R</b> )	$i_1, i_2$	$v_1, v_2$
in tensione (mediante matrice <b>G</b> )	$v_1, v_2$	$i_1, i_2$
ibrida diretta (mediante matrice <b>H</b> )	$i_1, v_2$	$v_1, i_2$
ibrida inversa (mediante matrice <b>H'</b> )	$v_1, i_2$	$i_1, v_2$
trasmissione diretta (mediante matrice <b>T</b> )	$-i_2, v_2$	$i_1, v_1$
trasmissione inversa (mediante matrice <b>T'</b> )	$-i_1, v_1$	$i_2, v_2$

Un doppio bipolo può, in generale, non ammettere alcune delle rappresentazioni

11

## Rappresentazione in corrente



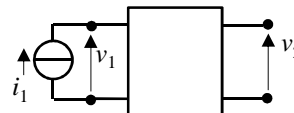
$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{i}$$

**R** matrice di resistenza,  $\Omega$

$$r_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

$$r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

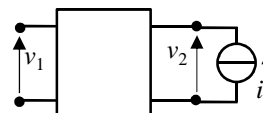


resistenza di  
ingresso a vuoto,  $\Omega$

resistenza di  
trasferimento a vuoto,  $\Omega$

$$r_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

$$r_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

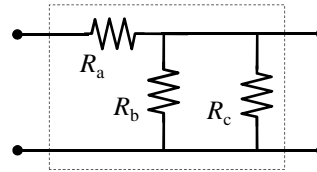


12

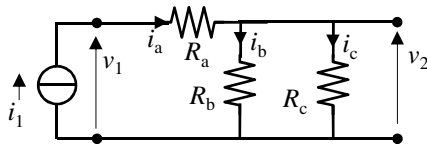


Si vuole determinare a titolo di esempio la rappresentazione in corrente del doppio bipolo di figura

$$\begin{cases} v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases}$$



1ª condizione:  $i_1$  imposta e  $i_2 = 0$



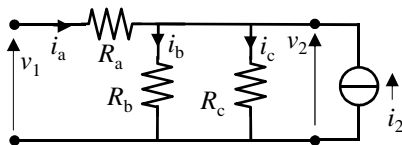
$$\begin{aligned} i_a &= i_1 \\ i_b &= \frac{R_c}{R_b + R_c} i_1 \\ i_c &= \frac{R_b}{R_b + R_c} i_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= R_a i_a + R_b i_b = \left( R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} \right) i_1 \\ v_2 &= R_c i_c = \frac{R_c R_b}{R_b + R_c} i_1 \end{aligned}$$

$$r_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}; \quad r_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_c R_b}{R_b + R_c};$$

13

2ª condizione:  $i_2$  imposta e  $i_1 = 0$



$$\begin{aligned} i_a &= 0 \\ i_b &= \frac{R_c}{R_b + R_c} i_2 \\ i_c &= \frac{R_b}{R_b + R_c} i_2 \end{aligned}$$

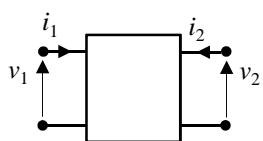
$$\begin{aligned} v_1 &= R_a i_a + R_b i_b = \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} i_2 \\ v_2 &= R_c i_c = \frac{R_c R_b}{R_b + R_c} i_2 \end{aligned}$$

$$r_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}; \quad r_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{R_b R_c}{R_b + R_c};$$

14



## Rappresentazione in tensione



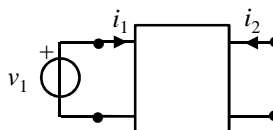
$$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} v_2 \\ i_2 = g_{21} v_1 + g_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{G} \mathbf{v}$$

$\mathbf{G}$  matrice di conduttanza, S

$$g_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

$$g_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

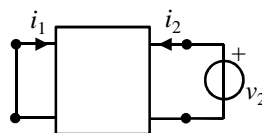


conduttanza di ingresso  
in corto circuito, S

conduttanza di trasferimento  
in corto circuito, S

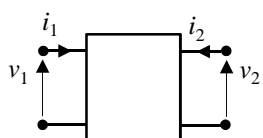
$$g_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0}$$

$$g_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0}$$



15

## Rappresentazione ibrida diretta



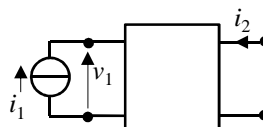
$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}$  matrice ibrida diretta

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$

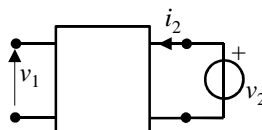


resistenza di ingresso  
in corto circuito,  $\Omega$

guadagno di corrente  
in corto circuito, --

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0}$$

$$g_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0}$$



conduttanza di ingresso  
a vuoto, S

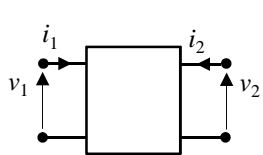
guadagno di tensione  
a vuoto, --

16





## Rappresentazione ibrida inversa



$$\begin{cases} i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 \\ v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}' \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

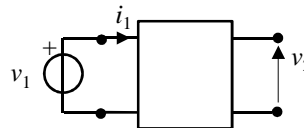
$\mathbf{H}'$  matrice ibrida inversa

$$h'_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0}$$

conduttanza di ingresso  
a vuoto, S

$$h'_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0}$$

guadagno di tensione  
a vuoto, --

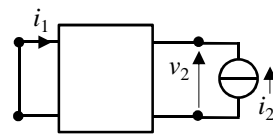


$$h'_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0}$$

resistenza di ingresso  
in corto circuito,  $\Omega$

$$h'_{12} = \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_1=0}$$

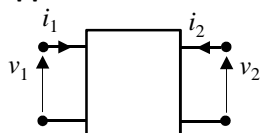
guadagno di corrente  
in corto circuito, --



17

## Rappresentazione di trasmissione diretta

È consuetudine considerare  $-i_2$  anziché  $i_2$  come variabile rappresentativa

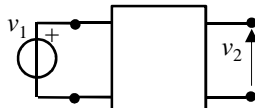


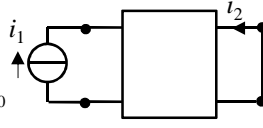
$$\begin{cases} v_1 = t_{11}(-i_2) + t_{12} v_2 \\ i_1 = t_{21}(-i_2) + t_{22} v_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} -i_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

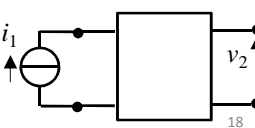
$\mathbf{T}$  matrice di trasmissione diretta

Al fine di determinare i coefficienti della matrice  $\mathbf{T}$  non è possibile adoperare direttamente la definizione perché ciò richiederebbe l'imposizione di entrambe le grandezze alla porta di ingresso, il che è impossibile. Ad esempio, per determinare  $t_{11}$  occorrerebbe imporre una generica corrente  $i_2$  alla seconda porta mediante un generatore e imporre al contempo  $v_2 = 0$  mediante un collegamento di corto circuito. Per determinare i coefficienti si procede nel modo seguente

$$\frac{1}{t_{11}} = \left. \frac{-i_2}{v_1} \right|_{v_2=0}$$

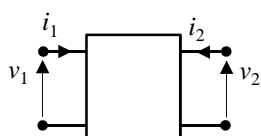
$$\frac{1}{t_{12}} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0}$$


$$\frac{1}{t_{21}} = \left. \frac{-i_2}{i_1} \right|_{v_2=0}$$


$$\frac{1}{t_{22}} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0}$$


18

## Rappresentazione di trasmissione inversa



È consuetudine considerare  $-i_1$  anziché  $i_1$  come variabile rappresentativa

$$\begin{cases} v_2 = t'_{11}(-i_1) + t'_{12}v_1 \\ i_2 = t'_{21}(-i_1) + t'_{22}v_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}' \begin{pmatrix} -i_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{T}'$  matrice di trasmissione diretta

Al fine di determinare i coefficienti della matrice  $\mathbf{T}'$  non è possibile adoperare direttamente la definizione perché ciò richiederebbe l'imposizione di entrambe le grandezze alla porta di ingresso, il che è impossibile. Ad esempio, per determinare  $t'_{11}$  occorrerebbe imporre una generica corrente  $i_1$  alla prima porta mediante un generatore e imporre al contempo  $v_1 = 0$  mediante un collegamento di corto circuito.

Per determinare i coefficienti si procede in modo analogo a quanto esposto per la matrice  $\mathbf{T}$ .

19

## Relazione tra le varie rappresentazioni

Sussistono le seguenti relazioni tra le matrici  $\mathbf{R}$ -,  $\mathbf{G}$ -,  $\mathbf{H}$ -,  $\mathbf{H}'$  e  $\mathbf{T}$ - $\mathbf{T}'$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\downarrow$$
  

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}' \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\downarrow$$
  

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}^{-1}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} -i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}' \begin{pmatrix} -i_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\downarrow$$
  

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T}^{-1}$$
  

con  $i_{12}$  e  $t'_{21}$  cambiati di segno

Ciascuna rappresentazione impone due relazioni tra le quattro variabili  $i_1, i_2, v_1, v_2$  rappresentative del doppio bipolo. Sotto opportune condizioni tali relazioni possono essere invertite algebricamente e due qualsiasi delle variabili possono essere espresse in funzione delle altre due

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 - h_{12}v_2 = h_{11}i_1 \\ h_{22}v_2 = -h_{21}i_1 + i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{22}}i_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}}i_2 \\ v_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}}i_1 + \frac{1}{h_{22}}i_2 \end{cases}$$

rapp.  $\mathbf{H}$   $h_{22} \neq 0$  → rapp.  $\mathbf{R}$

20



Sotto opportune condizioni sui coefficienti delle matrici è dunque possibile passare da ciascuna rappresentazione ad un'altra. Le formule per effettuare le varie trasformazioni sono riportate sotto. Le condizioni di fattibilità di ciascuna trasformazione si ottengono dall'analisi dei denominatori che compaiono nelle formule.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_{22}}{\det \mathbf{G}} & \frac{-g_{12}}{\det \mathbf{G}} \\ \frac{-g_{21}}{\det \mathbf{G}} & \frac{g_{11}}{\det \mathbf{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{H}}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{-h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h'_{11}} & \frac{-h'_{12}}{h'_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h'_{11}} & \frac{\det \mathbf{H}'}{h'_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{11}}{t_{21}} & \frac{\det \mathbf{T}}{t_{21}} \\ \frac{1}{t_{21}} & \frac{t_{22}}{t_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t'_{22}}{t'_{21}} & \frac{-1}{t'_{21}} \\ \frac{t'_{21}}{t'_{21}} & \frac{t'_{11}}{t'_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{r_{22}}{\det \mathbf{R}} & \frac{-r_{12}}{\det \mathbf{R}} \\ \frac{-r_{21}}{\det \mathbf{R}} & \frac{r_{11}}{\det \mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & \frac{-h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\det \mathbf{H}}{h_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{H}'}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ \frac{-h'_{21}}{h'_{22}} & \frac{1}{h'_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{22}}{t_{12}} & \frac{-\det \mathbf{T}}{t_{12}} \\ \frac{-1}{t_{12}} & \frac{t_{11}}{t_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t'_{11}}{t'_{12}} & \frac{1}{t'_{12}} \\ \frac{\det \mathbf{T}'}{t'_{12}} & \frac{-t'_{22}}{t'_{12}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{R}}{r_{22}} & \frac{r_{12}}{r_{22}} \\ \frac{r_{22}}{-r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g_{11}} & \frac{-g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\det \mathbf{G}}{g_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h'_{22}}{\det \mathbf{H}'} & \frac{-h'_{12}}{\det \mathbf{H}'} \\ \frac{-h'_{21}}{\det \mathbf{H}'} & \frac{h'_{11}}{\det \mathbf{H}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{12}}{t_{22}} & \frac{\det \mathbf{T}}{t_{22}} \\ \frac{-1}{t_{22}} & \frac{t_{21}}{t_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t'_{12}}{t'_{11}} & \frac{1}{t'_{11}} \\ \frac{-\det \mathbf{T}'}{t'_{11}} & \frac{-t'_{21}}{t'_{11}} \end{bmatrix}$$

21

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{-r_{12}}{r_{11}} \\ \frac{r_{21}}{\det \mathbf{R}} & \frac{r_{11}}{\det \mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{G}}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ \frac{-g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_{22}}{\det \mathbf{H}} & \frac{-h_{12}}{\det \mathbf{H}} \\ \frac{-h_{21}}{\det \mathbf{H}} & \frac{h_{11}}{\det \mathbf{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{21}}{t_{11}} & \frac{-\det \mathbf{T}}{t_{11}} \\ \frac{1}{t_{11}} & \frac{t_{12}}{t_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-t'_{21}}{t'_{22}} & \frac{-1}{t'_{22}} \\ \frac{\det \mathbf{T}'}{t'_{22}} & \frac{-t'_{12}}{t'_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{r_{21}} & \frac{\det \mathbf{R}}{r_{21}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{r_{22}}{r_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-g_{22}}{g_{21}} & \frac{-1}{g_{21}} \\ \frac{\det \mathbf{G}}{g_{21}} & \frac{-g_{11}}{g_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\det \mathbf{H}}{h_{21}} & \frac{-h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{21}} & \frac{-1}{h_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h'_{21}} & \frac{h'_{22}}{h'_{21}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{21}} & \frac{\det \mathbf{H}'}{h'_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t'_{22}}{\det \mathbf{T}'} & \frac{-t'_{12}}{\det \mathbf{T}'} \\ \frac{-t'_{21}}{\det \mathbf{T}'} & \frac{t'_{11}}{\det \mathbf{T}'} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \frac{r_{22}}{r_{12}} & \frac{-\det \mathbf{R}}{r_{12}} \\ \frac{-1}{r_{12}} & \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-g_{11}}{g_{12}} & \frac{1}{g_{12}} \\ \frac{\det \mathbf{G}}{g_{12}} & \frac{-g_{22}}{g_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{-h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{-h_{22}}{h_{12}} & \frac{\det \mathbf{H}}{h_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\det \mathbf{H}'}{h'_{12}} & \frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ \frac{h'_{11}}{h'_{12}} & \frac{-1}{h'_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_{22}}{\det \mathbf{T}} & \frac{-t_{12}}{\det \mathbf{T}} \\ \frac{-t'_{21}}{\det \mathbf{T}} & \frac{t'_{11}}{\det \mathbf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix}$$

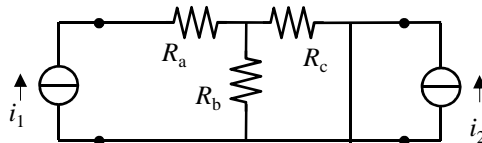
22



## Esistenza delle rappresentazioni

Un doppio bipolo può non ammettere una data rappresentazione. Ciò si verifica se non è possibile imporre liberamente le variabili indipendenti relative alla rappresentazione.

Si consideri a titolo di esempio il doppio bipolo di figura. Affinché esista la rappresentazione mediante matrice  $\mathbf{R}$  deve essere possibile calcolare le tensioni che si stabiliscono alle porte quando si impongono ad arbitrio le correnti. Ciò comporta che il circuito ottenuto applicando un generatore di corrente su ciascuna porta non deve essere patologico.

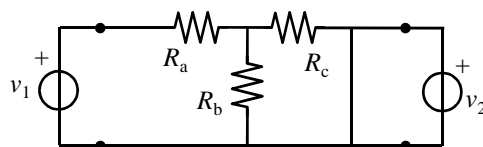


Ciò sussiste senz'altro per il caso in esame. La matrice  $\mathbf{R}$  è dunque calcolabile e risulta

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23

Lo stesso doppio bipolo non ammette tuttavia la rappresentazione mediante matrice  $\mathbf{G}$ . Non è infatti possibile calcolare le correnti che si stabiliscono alle porte quando si impongono ad arbitrio le tensioni. Ciò accade perché il circuito ottenuto applicando un generatore di tensione su ciascuna porta (ed in particolare sulla seconda) risulta patologico. Per la stessa ragione risulta impossibile anche la rappresentazione mediante la matrice  $\mathbf{H}$ .



Circuito patologico

Rappresentazione in tensione impossibile

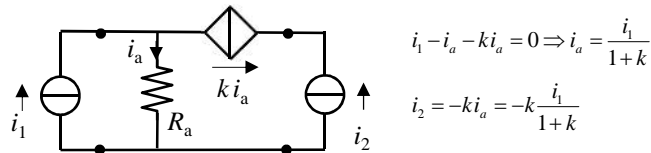
Si noti che relativamente alla rappresentazione mediante matrice  $\mathbf{R}$  risulta  $\det(\mathbf{R}) = 0$  e  $r_{22} = 0$ . Dalle formule di conversione da una rappresentazione ad un'altra si deduce quindi che, coerentemente con quanto detto, né la matrice  $\mathbf{G}$  né la matrice  $\mathbf{H}$  sono ottenibili dalla matrice  $\mathbf{R}$  (sia  $\det(\mathbf{R})$  che  $r_{22}$  appaiono al denominatore).

24



Si noti che la non esistenza di alcune rappresentazioni può essere dovuta alla presenza di generatori pilotati all'interno del doppio bipolo.

Si consideri ad esempio il doppio bipolo di figura. Affinché esista la rappresentazione mediante matrice **R** il circuito ottenuto applicando un generatore di corrente su ciascuna porta deve essere non patologico.



Non è possibile imporre ad arbitrio entrambe le correnti (il circuito è patologico). Non esiste dunque la rappresentazione **R**.

Il doppio bipolo ammette comunque la matrice **G** che risulterà non invertibile non esistendo **R**.

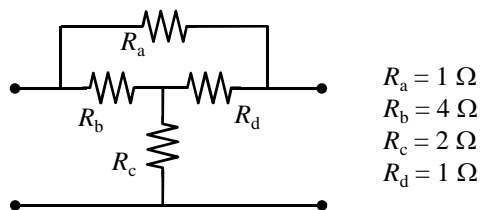
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1+k}{R_a} & 0 \\ -\frac{k}{R_a} & 0 \end{bmatrix}$$

Dall'analisi delle formule di conversione tra le varie rappresentazioni si deduce che, data la presente matrice **G**, il doppio bipolo ammette le matrici **H** e **T'** e non ammette le matrici **R**, **H'** e **T**

25

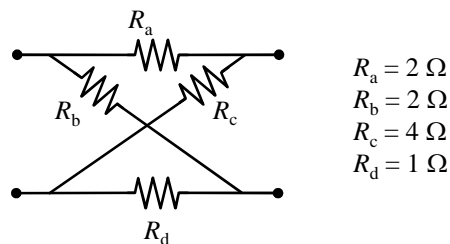
### Esercizio 5.1

Determinare la matrice **G** del doppio bipolo improprio di figura



### Esercizio 5.2

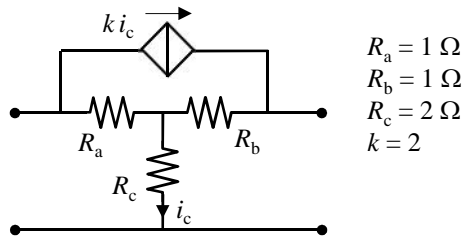
Determinare la matrice **H** del doppio bipolo improprio di figura



26

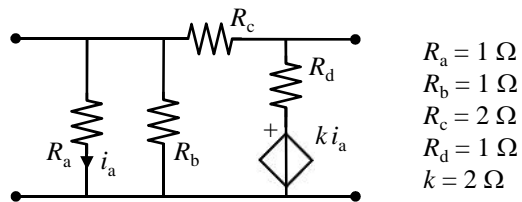
### Esercizio 5.3

Determinare le matrici  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{H}$  del doppio bipolo improprio di figura



### Esercizio 5.4

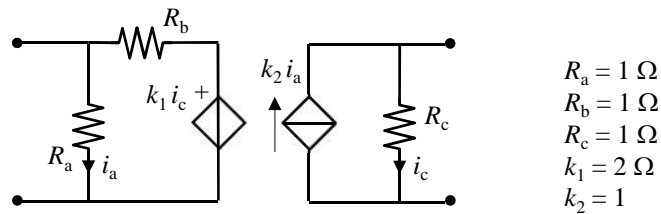
Determinare le matrici  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}'$  del doppio bipolo improprio di figura



27

### Esercizio 5.5

Determinare le matrici  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{H}$  del doppio bipolo proprio di figura

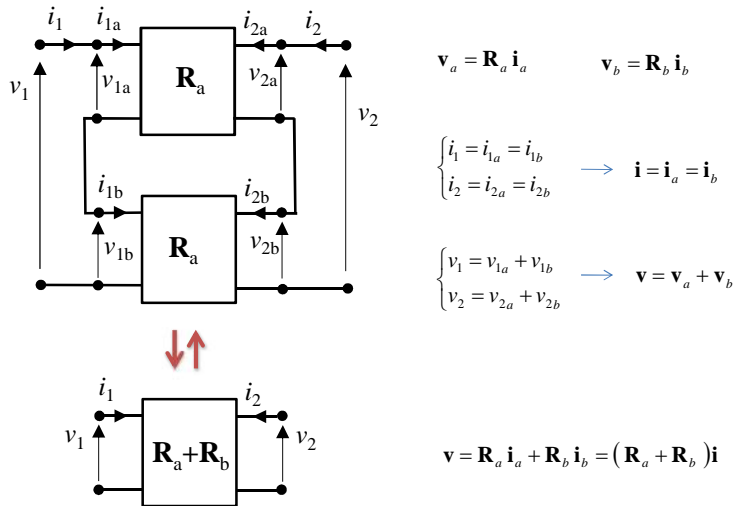


28



## Doppi bipoli in serie

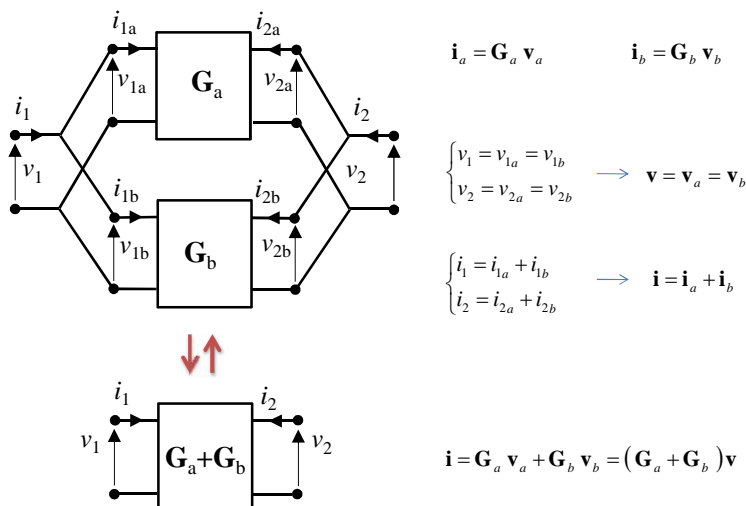
Due doppi bipoli si dicono in serie quando sia le porte di ingresso che quelle di uscita sono collegate in serie. Tale collegamento dà luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice delle resistenze è data dalla somma delle singole matrici



29

## Doppi bipoli in parallelo

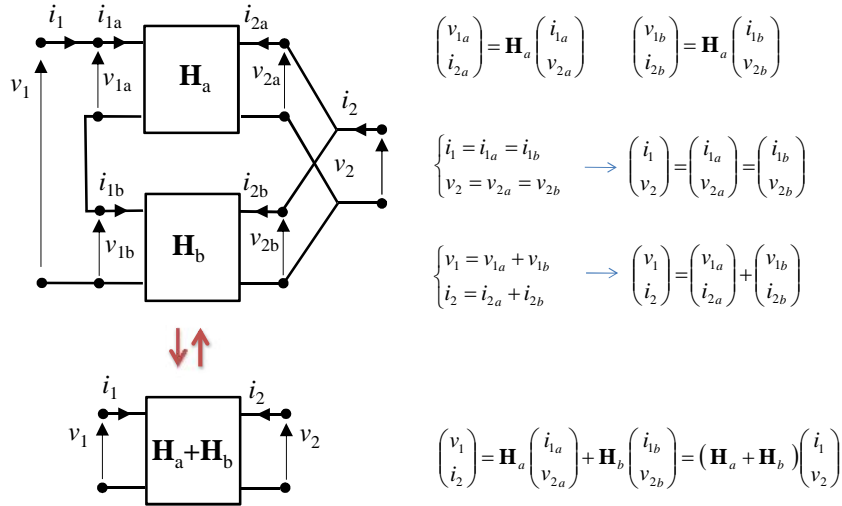
Due doppi bipoli si dicono in parallelo quando sia le porte di ingresso che quelle di uscita sono collegate in parallelo. Tale collegamento dà luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice delle conduttanze è data dalla somma delle singole matrici



30

## Doppi bipoli in serie-parallelo

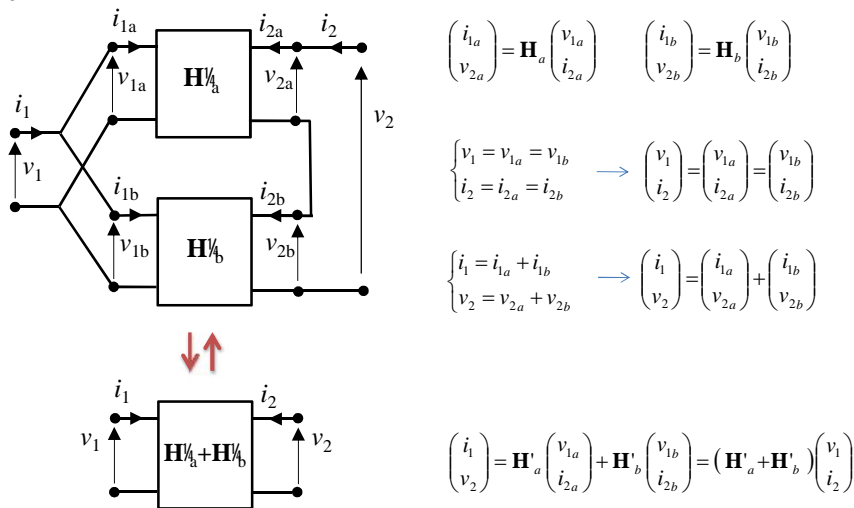
Due doppi bipoli si dicono in serie-parallelo quando le porte di ingresso sono collegate in serie e quelle di uscita sono collegate in parallelo. Tale collegamento dà luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice ibrida diretta è data dalla somma delle singole matrici



31

## Doppi bipoli in parallelo-serie

Due doppi bipoli si dicono in parallelo-serie quando le porte di ingresso sono collegate in parallelo e quelle di uscita sono collegate in serie. Tale collegamento dà luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice ibrida inversa è data dalla somma delle singole matrici

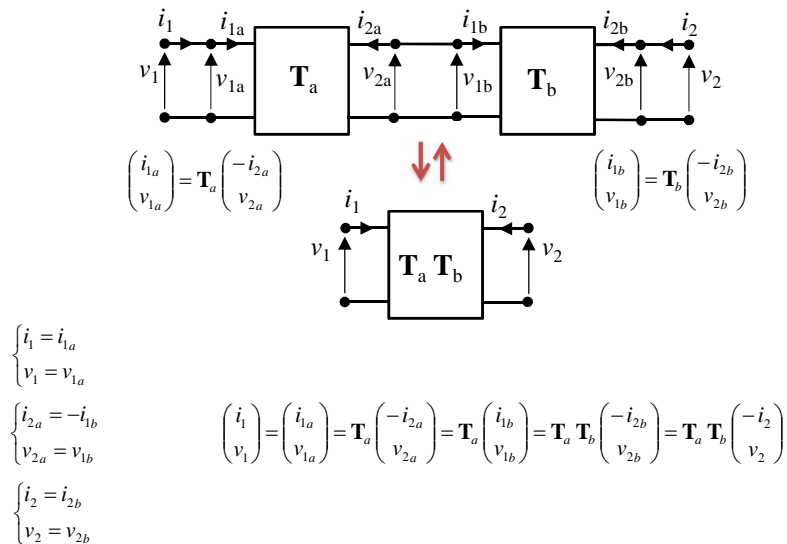


32



## Doppi bipoli in cascata

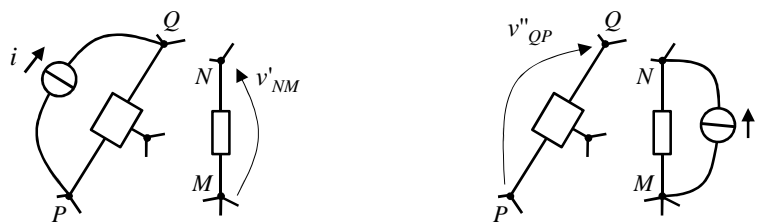
Due doppi bipoli si dicono in cascata quando la porta di ingresso dell'uno è collegata a quella di uscita dell'altro. Tale collegamento dà luogo ad un doppio bipolo equivalente la cui matrice di trasmissione diretta è data dal prodotto delle singole matrici



33

## Reciprocità

In termini generali la reciprocità consiste nella interscambiabilità tra causa ed effetto. Per quanto riguarda i circuiti la reciprocità si estrinseca come segue

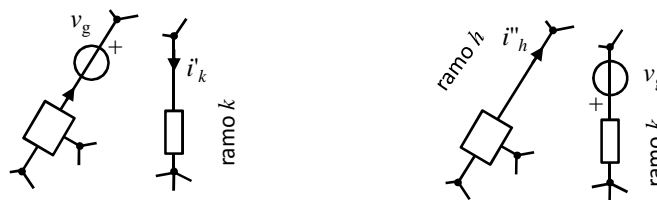


Si consideri un qualsiasi circuito. Si spengano in esso tutti i generatori di tensione e di corrente indipendenti. Si disponga tra i generici nodi  $P$  e  $Q$  un generatore di corrente di valore  $i$  orientato da  $P$  verso  $Q$ . A causa di tale generatore tra i generici nodi  $M$  e  $N$  si stabilirà la tensione  $v'_{NM}$ . Si disponga poi il medesimo generatore tra i generici nodi  $M$  e  $N$  orientato da  $M$  verso  $N$ . Come conseguenza tra i nodi  $P$  e  $Q$  si stabilirà la tensione  $v''_{QP}$

Il circuito si dice "reciproco rispetto alle coppie di nodi  $P$ - $Q$  ed  $M$ - $N$ " se è risulta:  $v''_{QP} = v'_{NM}$

In pratica un circuito è reciproco rispetto a due coppie di nodi se scambiando la posizione di un generatore di corrente e di un voltmetro l'indicazione di quest'ultimo non muta

34



Analogamente, si consideri un qualsiasi circuito e si spengano in esso tutti di generatori di tensione e di corrente indipendenti. Si disponga sul generico ramo  $h$  un generatore di tensione di valore  $v_g$  orientato concordemente con il ramo. A causa di tale generatore nel ramo  $k$  circolerà la corrente  $i'_k$ . Si disponga poi il medesimo generatore sul ramo  $h$  orientandolo concordemente con esso. Come conseguenza nel ramo  $h$  circolerà la corrente  $i''_h$ .

Il circuito si dice "reciproco  
rispetto ai rami  $h$  e  $k$ " se risulta:  $i''_h = i'_k$

In pratica un circuito è reciproco rispetto ad un paio di rami se scambiando la posizione di un generatore di tensione e di un amperometro l'indicazione di quest'ultimo non muta

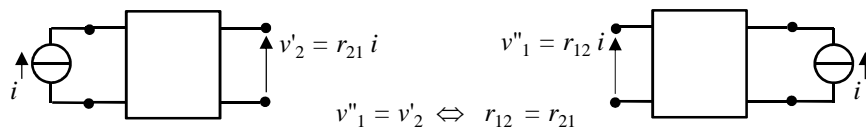
Se un circuito è reciproco rispetto a qualsiasi paio di coppie di nodi e a qualsiasi paio di rami allora si dice reciproco (senza ulteriori specificazioni)

35

Dalle definizioni introdotte risulta che un circuito composto da un solo bipolo alimentato da un generatore (di tensione o di corrente) è necessariamente reciproco. Ciò si esprime più semplicemente dicendo che un bipolo è necessariamente reciproco.

Più in generale è possibile dimostrare che un circuito composto solo da bipoli lineari è necessariamente reciproco.

Si consideri ora un circuito composto da un doppio bipolo alimentato alle due porte da due generatori. Sulla base della prima definizione introdotta il circuito risulta reciproco se  $r_{12} = r_{21}$



Ciò si esprime più semplicemente dicendo che un doppio bipolo è reciproco se e solo se

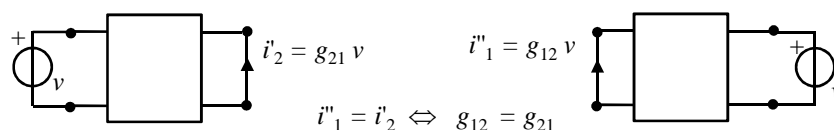
$$r_{12} = r_{21}$$

In altri termini un doppio bipolo è reciproco se e solo se la matrice delle resistenze è simmetrica

36



Sulla base della seconda definizione introdotta il circuito risulta reciproco se



Un doppio bipolo è reciproco se e solo se

$$g_{12} = g_{21}$$

In altri termini un doppio bipolo è reciproco se e solo se la matrice delle conduttanze è simmetrica

Si noti che la prima e la seconda condizione di reciprocità non sono indipendenti l'una dall'altra ma sono tra di loro equivalenti. Dalle formule di conversione tra le rappresentazioni in corrente ed in tensione risulta infatti

$$g_{12} = g_{21} \Leftrightarrow \frac{-r_{12}}{\det \mathbf{R}} = \frac{-r_{21}}{\det \mathbf{R}} \Leftrightarrow r_{12} = r_{21}$$

37

In generale, utilizzando le condizioni di reciprocità appena dedotte in termini di parametri  $\mathbf{R}$  o  $\mathbf{G}$  e adoperando le formule di conversione tra le varie rappresentazioni è possibile ottenere le seguenti condizioni di reciprocità sulla base dei parametri di ciascuna rappresentazione (purché questa esista)

matrice $\mathbf{R}$	matrice $\mathbf{G}$	matrice $\mathbf{H}$	matrice $\mathbf{H'}$	matrice $\mathbf{T}$	matrice $\mathbf{T'}$
$r_{12} = r_{21}$	$g_{12} = g_{21}$	$h_{12} = -h_{21}$	$h'_{12} = -h'_{21}$	$\det \mathbf{T} = 1$	$\det \mathbf{T'} = 1$

È opportuno precisare che proprio la reciprocità dei doppi bipoli è alla base della varietà delle funzioni che con essi si possono realizzare, in particolare nel trattamento del segnale

38



Consideriamo ora due generiche coppie di correnti e tensioni di porta tali da soddisfare le relazioni di definizione di un doppio bipolo lineare (esprese ad esempio attraverso la matrice  $\mathbf{R}$ )

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix}$$

Ci proponiamo di valutare sotto quali condizioni la seguente relazione è soddisfatta indipendentemente dal valore assunto dalle correnti di porta

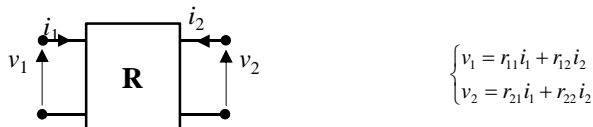
$$\begin{aligned} v_1'' i_1' + v_2'' i_2' &= v_1' i_1'' + v_2' i_2'' \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}'' \mathbf{i}' &= \mathbf{v}' \mathbf{i}'' \quad \forall (\mathbf{i}', \mathbf{i}'') \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}'' \mathbf{i}' &= \mathbf{i}'' \mathbf{v}' \\ \Leftrightarrow (\mathbf{R} \mathbf{i}')^t \mathbf{i}'' &= \mathbf{i}'' (\mathbf{R} \mathbf{i}'') \\ \Leftrightarrow \mathbf{i}'' \mathbf{R}^t \mathbf{i}' &= \mathbf{i}'' \mathbf{R} \mathbf{i}'' \\ \Leftrightarrow \mathbf{R}^t &= \mathbf{R} \Leftrightarrow r_{12} = r_{21} \end{aligned}$$

L'uguaglianza della somma dei prodotti *vi* incrociati è dunque soddisfatta se e solo se è soddisfatta la condizione di reciprocità  $r_{12} = r_{21}$  e pertanto può essere adoperata come una definizione equivalente della reciprocità di un doppio bipolo lineare

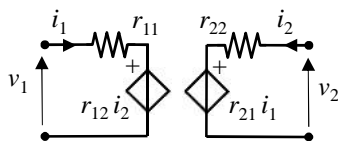
Si specifica che in generale, qualunque sia la rappresentazione utilizzata per il doppio bipolo lineare, l'uguaglianza della somma dei prodotti *vi* incrociati sussiste (per qualunque valore delle variabili indipendenti) se e solo se è soddisfatta la condizione di reciprocità espressa attraverso i parametri della rappresentazione adoperata. L'uguaglianza della somma dei prodotti *vi* incrociati costituisce dunque una definizione alternativa della reciprocità.

## Circuiti equivalenti di doppi bipoli lineari a T e a $\pi$

Si consideri un doppio bipolo rappresentato mediante la matrice delle resistenze



Le equazioni di definizione sono interpretabili attraverso il seguente modello circuitale

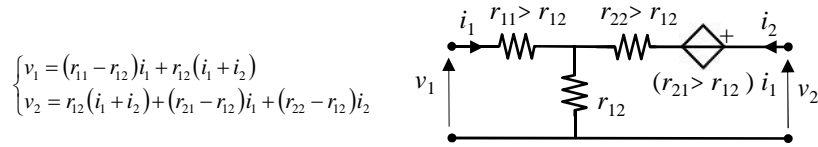


Le equazioni di definizione possono essere riscritte come

$$\begin{cases} v_1 = (r_{11} - r_{12}) i_1 + r_{12} (i_1 + i_2) \\ v_2 = r_{12} (i_1 + i_2) + (r_{21} - r_{12}) i_1 + (r_{22} - r_{12}) i_2 \end{cases}$$

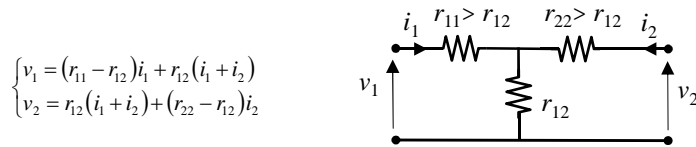


Ciò dà luogo al seguente modello circuitale



Un doppio bipolo lineare che ammette la matrice  $R$  è schematizzabile attraverso un circuito equivalente costituito da tre resistori collegati a stella (o a T) e da un generatore di tensione pilotato in corrente

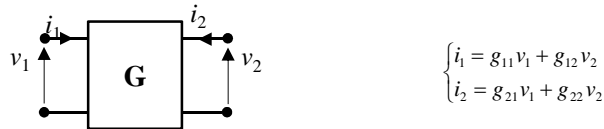
Se il doppio bipolo è reciproco allora  $r_{12} = r_{21}$  e il circuito equivalente si riduce a



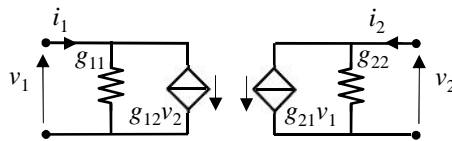
Un doppio bipolo lineare reciproco che ammetta la matrice  $R$  è equivalente a tre resistori collegati a stella

41

Si consideri un doppio bipolo rappresentato mediante la matrice delle conduttanze



Le equazioni di definizione sono interpretabili attraverso il seguente modello circuitale



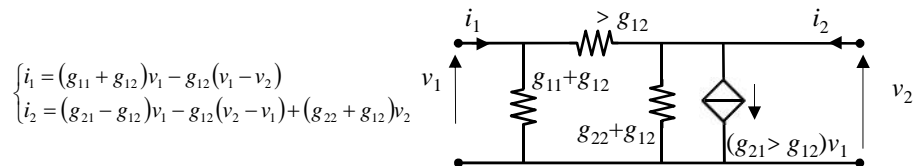
Le equazioni di definizione possono essere riscritte come

$$\begin{cases} i_1 = (g_{11} + g_{12})v_1 - g_{12}(v_1 - v_2) \\ i_2 = (g_{21} - g_{12})v_1 - g_{12}(v_2 - v_1) + (g_{22} + g_{12})v_2 \end{cases}$$

42

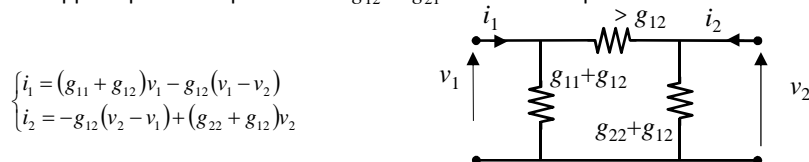


Ciò dà luogo al seguente modello circuitale (alternativo ma equivalente al precedente)



Un doppio bipolo lineare che ammette la matrice  $G$  è schematizzabile attraverso un circuito equivalente costituito da tre resistori collegati a triangolo (o a  $\Pi$ ) e da un generatore di corrente pilotato in tensione

Se il doppio bipolo è reciproco allora  $g_{12} = g_{21}$  e il circuito equivalente si riduce a



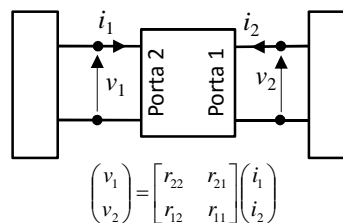
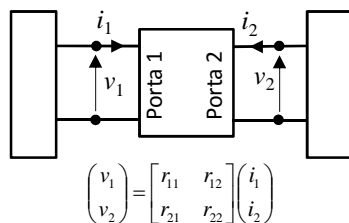
Un doppio bipolo lineare reciproco che ammetta la matrice  $G$  è equivalente a tre resistori collegati a triangolo

Dato un doppio bipolo lineare reciproco è possibile passare dalla sua rappresentazione mediante tre resistori a stella a quella (equivalente) mediante tre resistori a triangolo e viceversa adoperando le formule di trasformazione precedentemente discusse

43

## Doppi bipoli simmetrici

Un doppio bipolo si dice simmetrico se scambiando la porta 2 con la porta 1 il comportamento del circuito nel quale è inserito non muta



Dalla definizione segue che le condizioni sui parametri  $r$  affinché un dipolo sia simmetrico sono

$$\begin{cases} r_{22} = r_{11} \\ r_{21} = r_{12} \end{cases}$$

44



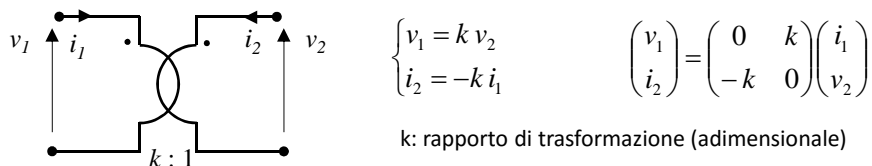
Utilizzando le condizioni di simmetria dedotte in termini di parametri **R** e adoperando le formule di conversione tra le varie rappresentazioni è possibile ottenere le seguenti condizioni di simmetria sulla base dei parametri di ciascuna rappresentazione (purché questa esista)

matrice <b>R</b>	matrice <b>G</b>	matrice <b>H</b>	matrice <b>H'</b>	matrice <b>T</b>	matrice <b>T'</b>
$r_{11} = r_{22}$ $r_{12} = r_{21}$	$g_{11} = g_{22}$ $g_{12} = g_{21}$	$\det \mathbf{H} = 1$ $h_{12} = -h_{21}$	$\det \mathbf{H}' = 1$ $h'_{12} = -h'_{21}$	$t_{11} = t_{22}$ $\det \mathbf{T} = 1$	$t'_{11} = t'_{22}$ $\det \mathbf{T}' = 1$

Dal confronto tra le condizioni di reciprocità e quelle di simmetria si deduce che un doppio bipolo simmetrico è anche reciproco

45

### Trasformatore ideale



Il trasformatore ideale è un doppio bipolo proprio, lineare, reciproco ( $h_{21} = > h_{12}$ ) e non simmetrico

La potenza complessivamente assorbita da un trasformatore ideale è sempre nulla

$$p_a = v_1 i_1 + v_2 i_2 = v_1 i_1 + (v_1 / k) (> k i_1) = v_1 i_1 + v_1 i_1 = 0$$

$$\emptyset \quad p_1(t) = p_2(t) \quad \forall t$$

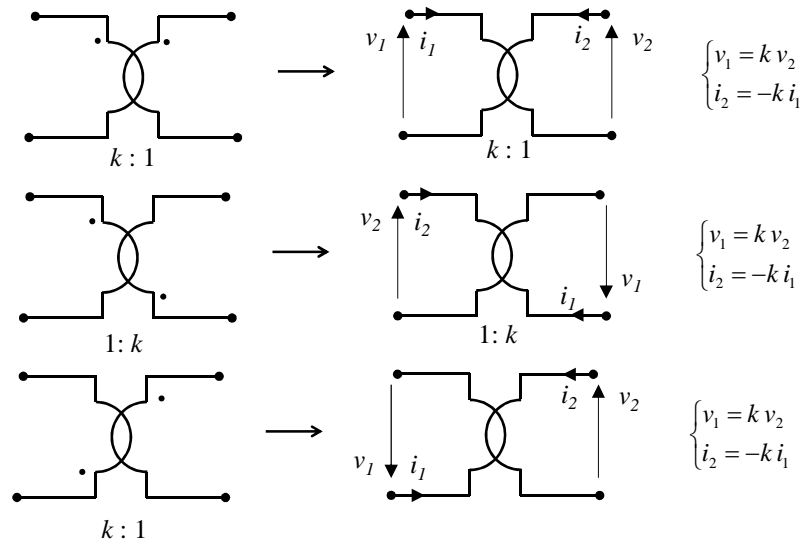
Ciò comporta che la potenza assorbita alla prima porta sia sempre uguale e opposta a quella assorbita alla seconda. Il trasformatore consente quindi di trasferire integralmente una data potenza  $p$  dalla porta 1 alla porta 2 variandone i parametri  $v$  e  $i$ .

Nei trasformatori reali in uso nelle reti elettriche, operanti in regime di corrente alternata, il trasferimento della potenza tra due avvolgimenti privi di contatto fisico avviene attraverso l'intermediazione di un campo magnetico variabile nel tempo. Tali dispositivi sono schematizzabili con buona approssimazione attraverso il trasformatore ideale. Si noti che trattandosi di un doppio bipolo proprio non esiste alcuna connessione tra la porta 1 la porta 2.

46

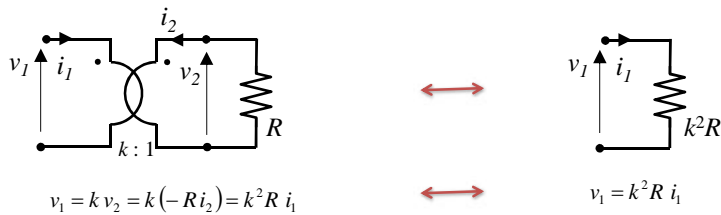


**Convenzioni sui versi:** Il verso delle tensioni e delle correnti da adoperare alle due porte per la definizione del trasformatore di solito non è indicato esplicitamente. In tal caso sono indicati dei puntini che consentono di risalire ai versi da adoperare. Alcuni esempi:

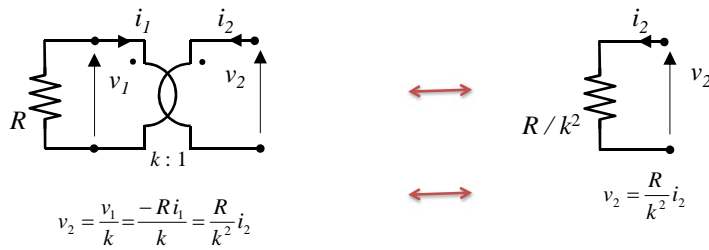


47

Se alla porta 2 del trasformatore è collegato un resistore di valore  $R$  la porta 1 può essere vista come un resistore di valore  $k^2 R$



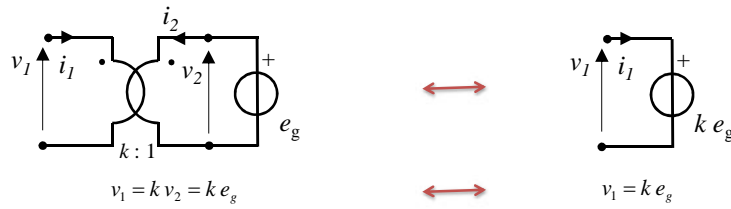
Analogamente se alla porta 1 del trasformatore è collegato un resistore di valore  $R$  la porta 2 può essere vista come un resistore di valore  $R/k^2$



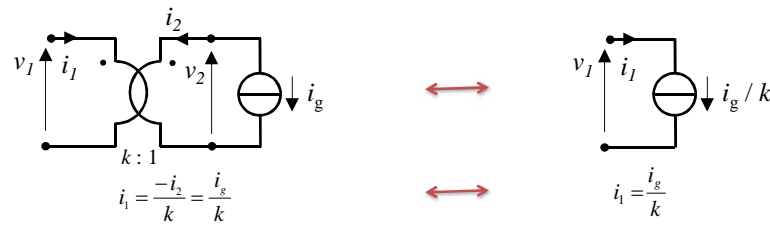
48



Se alla porta 2 (porta 1) del trasformatore è collegato un generatore di tensione di valore  $e_g$  la porta 1 (porta 2) può essere vista come un generatore di tensione di valore  $k e_g$  ( $e_g/k$ )

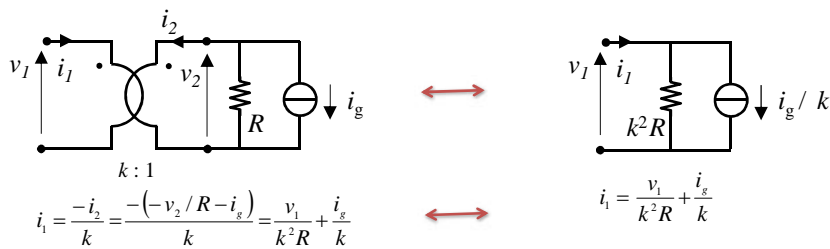
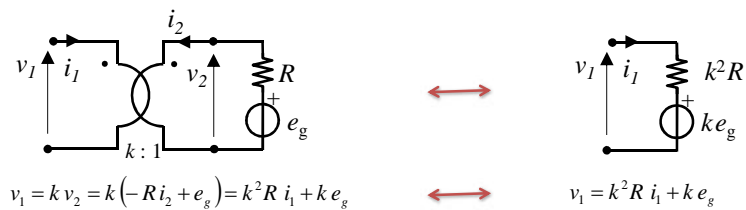


Se alla porta 2 (porta 1) del trasformatore è collegato un generatore di corrente di valore  $i_g$  la porta 1 (porta 2) può essere vista come un generatore di corrente di valore  $i_g/k$  ( $k i_g$ )



49

Sussistono inoltre le seguenti uguaglianze

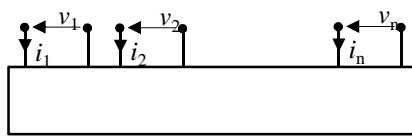


50



## m-porte adinamici lineari, inerti e tempo invarianti

Tutto quanto esposto fino ad ora relativamente ai doppi bipoli lineari, inerti e tempoinvarianti è generalizzabile ai componenti a m-porte



$$\begin{cases} h_{11}^v v_1 + h_{12}^v v_2 + \dots + h_{1m}^v v_m + h_{11}^i i_1 + h_{12}^i i_2 + \dots + h_{1m}^i i_m = 0 \\ h_{21}^v v_1 + h_{22}^v v_2 + \dots + h_{2m}^v v_m + h_{21}^i i_1 + h_{22}^i i_2 + \dots + h_{2m}^i i_m = 0 \\ \dots \\ h_{m1}^v v_1 + h_{m2}^v v_2 + \dots + h_{mm}^v v_m + h_{m1}^i i_1 + h_{m2}^i i_2 + \dots + h_{mm}^i i_m = 0 \end{cases}$$

rappresentazione implicita

$$\mathbf{H}^v \mathbf{v} + \mathbf{H}^i \mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Per gli n-porte lineari e omogenei sono definibili le rappresentazioni in corrente ( $\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{i}$ ), in tensione ( $\mathbf{i} = \mathbf{G} \mathbf{v}$ ) e ibride

Un n porte è reciproco se e solo se la matrice  $\mathbf{R}$  e la matrice  $\mathbf{G}$  sono simmetriche

Utilizzando le rappresentazioni ibride si può affermare che un n porte è reciproco se e solo se  
 $h_{ij} = h_{ji}$  se  $h_{ij}$  rappresenta una transresistenza o transconduttanza  
 $h_{ij} = -h_{ji}$  se  $h_{ij}$  rappresenta un guadagno di tensione o di corrente

51

## Soluzione di un circuito contenente doppi bipoli

In presenza di doppi bipoli sia propri che impropri (o in generale di componenti multipolari) si procede in modo del tutto analogo a quanto visto per i circuiti contenenti solo bipoli. In particolare per individuare il sistema risolvibile è necessario

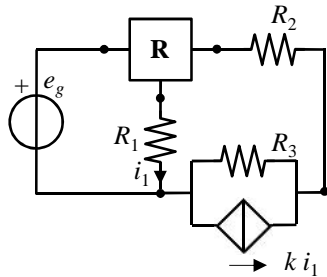
1. Individuare le  $R$  correnti e le  $R$  tensioni incognite che si stabiliscono nel circuito
2. Individuare le  $R$  equazioni topologiche indipendenti ( $(N > I)$  LKC e  $R > (N > I)$  LKT)
3. Aggiungere alle precedenti  $R$  equazioni topologiche le  $R$  relazioni costitutive dei componenti

Per effettuare senza ambiguità i passaggi (1) e (2) è utile adoperare il grafo del circuito

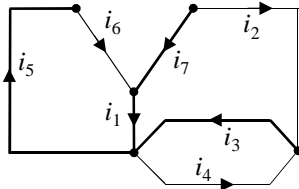
incognite		equazioni
$R$ correnti di ramo ( $\mathbf{i}$ )	$\left. \begin{array}{l} \text{2R equazioni} \\ \text{R eq.} \\ \text{R eq.} \end{array} \right\}$	$\mathbf{T} \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad \leftarrow N > I \text{ LKC}$
$R$ tensioni di ramo ( $\mathbf{v}$ )		$\mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \leftarrow R - (N > I) \text{ LKT}$
<u><math>2R</math> incognite</u>		$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \leftarrow R \text{ Rel. costitutive dei componenti}$

52





Si considera a titolo di esempio il circuito di figura costituito da 5 bipoli e da un doppio bipolo improprio (tripolo) interconnessi mediante 5 nodi



correnti di albero  $i_2, i_4, i_6$   
correnti di coalbero  $i_1, i_3, i_5, i_7$

Si introduce il grafo del circuito. Questo è costituito da 7 rami afferenti a 5 nodi ( $R=7$ ,  $N=5$ ). Si introduce un nome e un verso per le correnti. Si assume che i versi delle tensioni siano associati a quelli delle correnti secondo la convenzione dell'utilizzatore. In questo modo è necessario indicare esplicitamente le tensioni sul disegno. Si introduce quindi una suddivisione del grafo in albero e coalbero

53

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_6 = 0 \\ i_3 - i_2 - i_4 = 0 \\ i_5 - i_6 = 0 \\ i_7 + i_2 = 0 \end{cases}$$

si introducono le equazioni topologiche

$N > I$  LKC

$$\begin{cases} v_2 + v_3 - v_1 - v_7 = 0 \\ v_4 + v_3 = 0 \\ v_6 + v_1 + v_5 = 0 \end{cases}$$

$R - (N > I)$  LKT

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ i_4 = k i_1 \\ v_5 = -e_g \\ v_6 = r_{11} i_6 + r_{12} i_7 \\ v_7 = r_{21} i_6 + r_{22} i_7 \end{cases}$$

si introducono le relazioni costitutive dei componenti

$R$  Rel. cost. comp.

2R equazioni

2R incognite:  $R$  correnti ( $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ ),  
 $R$  tensioni ( $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ )

Il sistema così ottenuto consente di determinare tutte le correnti e tutte le tensioni di interesse del circuito

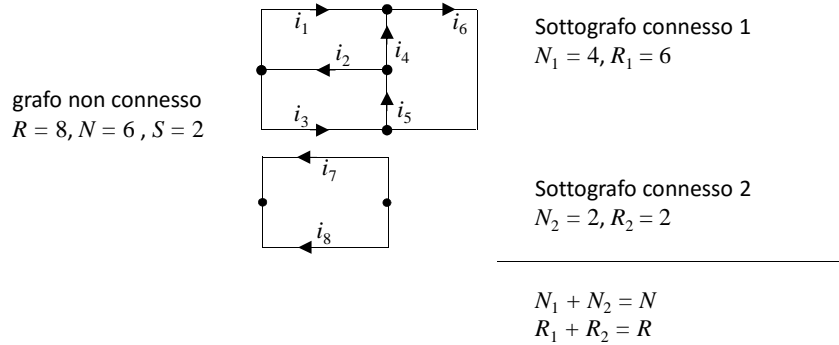
54



## Soluzione di un circuito non connesso

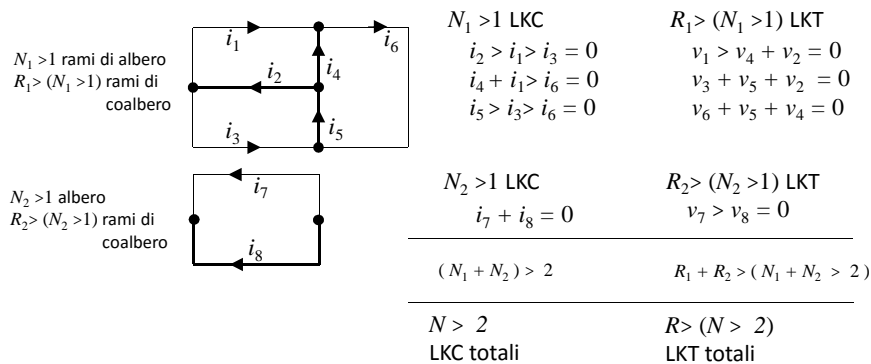
In presenza di doppi bipoli propri (non tripolari o impropri) o più in generale in presenza di m-  
porte propri il grafo del circuito può risultare non connesso. In tal caso non è possibile, a  
rigore, suddividere il grafo in albero e coalbero al fine di individuare univocamente l'insieme  
massimale di LKC e LKT indipendenti (non essendo il circuito connesso non è possibile trovare  
un sottografo connesso che tocchi tutti i nodi)

Si consideri un grafo non connesso avente  $R$  rami e  $N$  nodi. Sia  $S$  il numero dei sottografi  
connessi e disgiunti di cui il grafo è costituito. Siano  $N_i$  ed  $R_i$  il numero di nodi e di rami di  
ciascuno di tali sottografi.



55

Ciascun sottografo connesso è scomponibile in albero e coalbero. Ciò consente di individuare  
un insieme di LKC e un insieme di LKT indipendenti per ciascuno di essi. Tali insiemi sono tra  
di loro necessariamente indipendenti essendo relativi a tensioni e a correnti diverse.



56



In generale se il circuito possiede un grafo non connesso avente  $R$  rami ed  $N$  nodi costituito da  $S$  sottografi connessi e disgiunti è possibile formulare  $N > S$  LKC indipendenti e  $R > (N > S)$  LKT indipendenti, per un totale di  $R$  equazioni indipendenti. Per determinarle è sufficiente considerare distintamente ciascuna parte connessa di cui il grafo è costituito. Risulta infatti

Numero di LKC indipendenti: 
$$\sum_{i=1}^S (N_i - 1) = \left( \sum_{i=1}^S N_i \right) - S = N - S$$

Numero di LKT indipendenti: 
$$\sum_{i=1}^S (R_i - (N_i - 1)) = \left( \sum_{i=1}^S R_i - \sum_{i=1}^S N_i \right) + S = R - (N - S)$$

In pratica le  $R$  equazioni topologiche indipendenti sono ottenibili considerando i tagli e le maglie fondamentali individuabili attraverso lo «pseudo-albero» costituito dall'unione degli alberi di ciascun sottografo connesso. L'unica differenza tra tale «pseudo-albero» e un albero vero e proprio è che esso non è connesso, ma questo non ha nessuna influenza sulla deduzione delle LKC e LKT.

57

Il sistema risolvante di un circuito il cui grafo, avente  $R$  rami ed  $N$  nodi, è non connesso ed è composto da  $S$  sottografi connessi e disgiunti o è così costituito.

incognite		equazioni
$R$ correnti di ramo ( <b>i</b> )	$\left. \begin{array}{c} 2R \text{ equazioni} \\ \left\{ \begin{array}{l} R \text{ eq.} \\ R \text{ eq.} \end{array} \right. \end{array} \right\}$	$N > S$ LKC
$R$ tensioni di ramo ( <b>v</b> )		$R - (N > S)$ LKT
$2R$ incognite		$R$ Rel. cost. componenti

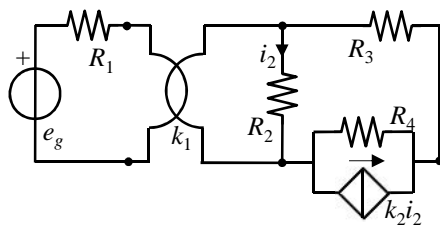
Il sistema risolvante è composto, in pratica, dall'unione dei sistemi risolvanti parziali definibili indipendentemente per ciascuna porzione connessa da cui il circuito è formato.

Tali sistemi risolvanti parziali non possono essere risolti indipendentemente in quanto le relazioni costitutive sono tali da introdurre dei vincoli tra correnti e/o tensioni appartenenti a porzioni distinte.

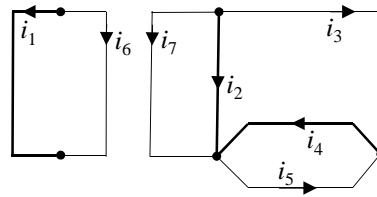
58



Si consideri a titolo di esempio il seguente circuito



$$R=7, N=5, S=2$$



$$\begin{cases} i_1 + i_6 = 0 \\ i_2 + i_3 + i_7 = 0 \\ i_4 - i_3 - i_5 = 0 \end{cases} \quad N>2 \text{ LKC}$$

$$\begin{cases} v_6 - v_1 = 0 \\ v_7 - v_2 = 0 \\ v_3 + v_4 - v_2 = 0 \\ v_5 + v_4 = 0 \end{cases} \quad R - (N>2) \text{ LKT}$$

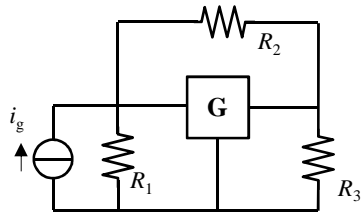
$R$  equazioni topologiche

$$\begin{cases} v_1 = e_g + R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_3 = R_3 i_3 \\ v_4 = R_4 i_4 \\ i_5 = k_2 i_2 \\ v_6 = k_1 v_7 \\ i_7 = -k_1 i_6 \end{cases} \quad R \text{ rel. cost.}$$

59

### Esercizio 5.6

Risolvere il circuito di figura

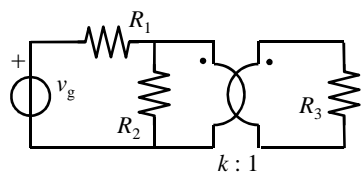


$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \, \Omega \\ R_2 &= 2 \, \Omega \\ R_3 &= 2 \, \Omega \\ i_g &= 2 \, \text{A} \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{S}$$

### Esercizio 5.7

Risolvere il circuito di figura

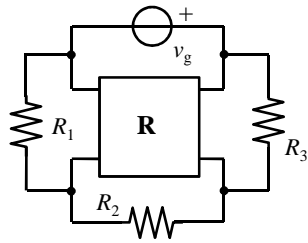


$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \, \Omega \\ R_2 &= 1 \, \Omega \\ R_3 &= 2 \, \Omega \\ k &= 2 \\ v_g &= 8 \, \text{V} \end{aligned}$$

60

### Esercizio 5.8

Impostare il sistema risolvante del circuito di figura contenente un doppio bipolo proprio



### Esercizio 5.9

Impostare il sistema risolvante del circuito di figura contenente un tripolo e un doppio bipolo proprio

