Analisi 2 - CdS IADA

A.A. 2023/2024

Scritto - 4 luglio 2024

1. Convergenza puntuale

- Se $x \le -1$ allora $f_n(x)$ non ammette limite
- Se $x > -1$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1<x<1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Dunque $f_n(x)$ converge puntualm. in $(-1,1)$ alla funzione nulla.

Convergenza uniforme

- Non c'è convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ perché non c'è nemmeno convergenza puntuale su tutto $\mathbb{R}$
- Osserviamo invece che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-\delta,\delta]} |n^3 x^n - 0| = \lim_{n\to+\infty} n^3\delta^n = 0$$

Dunque nell'intervallo $[-\delta,\delta]$ c'è convergenza uniforme.

2. Osserviamo che il vincolo

$$\Sigma = \{(x,y):\ x^2+y^2=9\}$$

è un insieme compatto di $\mathbb{R}^2$ ed essendo la funzione f continua per il teorema di Weierstrass si ha che esistono max e min assoluti di f su Σ.

Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\, \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad \text{dove } \varphi(x,y) = x^2+y^2-9$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x & \to \quad 2x(1-\lambda)=0 \quad (1) \\ 4y-4 = 2\lambda y & (2) \\ x^2+y^2=9 & (3) \end{cases}$$

Da (1) $\Rightarrow$ o $x=0$ o $\lambda=1$

- Se $x=0$ allora da (3) si ha che $y=\pm 3$
  Di conseguenza individuo due punti $(0,-3)$ e $(0,3)$

- Se $\lambda=1$ allora da (2) si ha che $4y-4=2y \Rightarrow 2y-4=0$
  $\Rightarrow y=2$ da (3) individuo $x=\pm\sqrt{5}$ e cioè due
  punti $(-\sqrt{5},2)$ e $(\sqrt{5},2)$.

Valutando la f nei punti trovati si ha che

$f(0,3)=6$

$f(0,-3)=30 \to$ max assoluto

$f(\sqrt{5},2)=5$

$f(-\sqrt{5},2)=5$

$\to$ min assoluto.

3. $y''-4y'+13y = xe^x$

Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$y''-4y'+13y=0$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2-4\lambda+13=0$$

$$\lambda_{1,2} = 2\pm 3i$$

Dunque la soluzione generale dell'omogenea è

$$c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x)$$

Tornando alla completa osservo che il secondo membro è nella forma

$$c(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

con $P(x) = x$ polinomio di grado 1

$\alpha = 1$

$\beta = 0$

osservo che $\xi = \alpha + i\beta = 1$ non è soluzione del polinomio caratteristico. Di conseguenza cerco soluzioni del tipo

$$y(x) = e^x (Ax + B)$$

$$y'(x) = e^x (Ax + B) + e^x (A) = e^x (Ax + A + B)$$

$$y''(x) = e^x (Ax + A + B) + e^x \cdot A =$$
$$= e^x (Ax + 2A + B)$$

Imponiamo che sia soluzione

$$e^x (Ax + 2A + B) - 4\, e^x (Ax + A + B) + 13\, e^x (Ax + B) = x e^x$$

$$Ax + 2A + B - 4Ax - 4A - 4B + 13Ax + 13B = x$$

$$\boxed{10Ax - 2A + 10B = x}$$

- Se $x = 0$ allora $2A = 10B \Rightarrow A = 5B$ $(*)$
- Se $x = 1$ allora $10A - 2A + 10B = 1$ e da $(*)$ si ha che

$$10A - \cancel{2A} + \cancel{2A} = 1 \Rightarrow 10A = 1 \quad A = \frac{1}{10}$$

e dunque $B = \frac{1}{50}$

Quindi una soluzione particolare è

$y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{10} x \right)$, quindi la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \sin(3x) + e^x \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{10} x \right)$$

4 Consideriamo il seguente cambio di variabile

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = 3x - y \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 4 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array}$$

Consideriamo la trasformazione

$$\phi : (u,v) \longmapsto \Big(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x} , \underbrace{\frac{3u+v}{2}}_{y} \Big)$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad |\det J\phi| = \left| 1/4 - 3/4 \right| = \frac{1}{2}$$

Dunque

$$\iint_E (3x-y)^2 \cdot \left(-\frac{x}{4} + \frac{y}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 v^2 \, dv \right) \left(\int_0^4 \frac{u}{4} \, du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{v^3}{3} \Big|_0^1 \right] \cdot \left[\frac{u^2}{8} \Big|_0^4 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{16}{8} \right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cancel{2} = \frac{1}{3}$$