Analisi 2 per il CDS in Intelligenza Artificiale & Data Analytics

A A 2022/2023

Scritto 15 Settembre 2023

1

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Convergenza puntuale
  Fissato $\bar{x} \in \mathbb{R}$ $\exists\ \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ si ha che $\bar{x} \notin \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right)$

  Dunque $f_n(\bar{x}) \to 0$ per $n \to +\infty$.

  C'è convergenza puntuale verso $f(x) \equiv 0$

- Convergenza uniforme
  Stimiamo
  $$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sqrt{n}$$
  Dunque non c'è convergenza uniforme

2 Cerchiamo i punti critici

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} [4x - 2x(2x^2+y^2)] \cdot e^{-x^2-y^2} = 0 \\ [2y - 2y(2x^2+y^2)]\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{ll} 4x - 2x(2x^2+y^2) = 0 & (1) \\ 2y - 2y(2x^2+y^2) = 0 & (2) \end{array}$$

Distinguiamo due casi

- Se $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 4x - 4x^3 = 0 \quad x = \pm 1,\ x = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} (1,0), (-1,0), (0,0)$

- Se $y \neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - 2x^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$
  $4x - 2x(\cancel{2x^2} + 1 - \cancel{2x^2}) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$
  $(0,1),\ (0,-1)$

Dunque i punti critici sono ②

$P_1 = (0,0)$; $P_2 = (0,1)$; $P_3 = (0,-1)$; $P_4 = (1,0)$; $P_5 = (-1,0)$

Studiamo la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left[4 - 2(2x^2+y^2) - 2x(4x) - 2x(4x - 2x(2x^2+y^2))\right] e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left[-2x\,2y\right] e^{-x^2-y^2} + (-2y) e^{-x^2-y^2} \left(4x - 2x(2x^2+y^2)\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[2 - 2(2x^2+y^2) - 2y(2y)\right] e^{-x^2-y^2} +$$

$$+ \left[2y - 2y(2x^2+y^2)\right](-2y)\, e^{-x^2-y^2}$$

$$H(P_2) = H(P_3) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix} \qquad \det H(P_2) < 0$$

$$H(P_4) = H(P_5) = \begin{pmatrix} -8e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \qquad \det H(P_4) > 0$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H(P_1) > 0$$

I punti P_2 e P_3 sono punti di sella, mentre P_4 e P_5 sono punti di massimo relativo, P_1 è un punto di minimo relativo.

③
$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

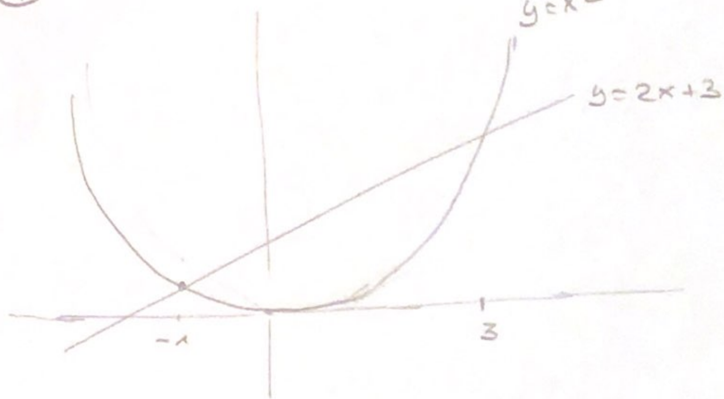
Risolviamo la ODE con il metodo di separazione delle variabili.

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int_1^y -\frac{dz}{z^2} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{1} = \arctan(x) - \arctan(0)$$

$$\frac{1}{y(x)} = \arctan(x) + 1 \rightarrow y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 1}$$

④



$$\iint_E x \cdot y \, dx\, dy = \int_{-1}^{3} \left[\int_{x^2}^{2x+3} xy \, dy \right] dx = \int_{-1}^{3} \frac{x}{2} \left[(2x+3)^2 - x^4 \right] dx$$

$$= \ldots = 53 + \frac{1}{3}$$