Esercizi su successioni e serie di funzioni

- Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2} \text{ su } \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2} \text{ su } \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \operatorname{arctg}(x+n) \text{ su } [0,+\infty[.$$

- Studiare la convergenza puntuale e uniforme delle serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \text{ su } [1,+\infty[; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2+n} \text{ su } \mathbb{R}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \text{ su } [0,\pi].$$

- Determinare l'insieme di convergenza delle serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}(x-1)^n; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^{2n}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^n; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!}(x-e)^n.$$

- Determinare l'insieme di convergenza e la somma delle serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

- Sviluppare in serie di Taylor-MacLaurin e determinare l'insieme di convergenza dello sviluppo di:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}; \quad f(x) = \log(1+x^2).$$

- Approssimare a meno di 10^{-2} gli integrali:

$$\int_0^1 e^{-x^3}\,dx; \quad \int_0^1 \cos(x^2)\,dx; \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1+x)}{x}\,dx.$$