SOLUZIONI SCRITTO Analisi Matematica 2

Intelligenza Artificiale & Data Analytics

27 Settembre 2022

1. Si ha che

$$a_n = \frac{3\sqrt{n} + \sin(n^4)}{7n^5 - 1} = \frac{3\sqrt{n}\overbrace{\left(1 + \frac{\sin(n^4)}{3\sqrt{n}}\right)}^{\nearrow 1}}{7n^5\underbrace{\left(1 - \frac{1}{7n^5}\right)}_{\to 1}}$$

Osservando che

$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot n^{9/2} = \frac{3}{7}$ e applicando il criterio

dell'ordine di infinitesimo con $p = \frac{9}{2} > 1$

concludiamo che la serie è convergente.

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^6}{4x^6 + y^{12}}$$

- $x=0$ $\lim_{y\to 0} \frac{0}{4x^6} = 0$

- Consideriamo un altro avvicinamento all'origine

$x = y^2$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^6 \cdot y^6}{4y^{12} + y^{12}} = \frac{1}{5}$$

Poiché $1/5 \neq 0$ deduco che il limite non esiste

3. Cerchiamo i punti critici

$\nabla f(x,y) = (2x+y-2,\ x+2y-1)$

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ 3x-3=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è $(1,0)$

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(1,0) = 4-1 = 3 > 0$

$a_{11} = 2 > 0$

Dunque $(1,0)$ è un punto di minimo relativo.

4. Vogliamo far vedere che

$y'(t) = f(t, y(t))$ con $y(t) = \lambda x\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ e x soluzione

Dunque

$$y'(t) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} x'\left(\frac{t}{\lambda}\right) \overset{x \text{ è soluzione}}{=} f\left(\frac{t}{\lambda}, x\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right) =$$

$$= f\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\lambda x\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right) \underset{\substack{f \text{ è omogenea} \\ \text{di grado zero} \\ f\left(\frac{1}{\lambda}t,\ \frac{1}{\lambda}z\right) = f(t,z)}}{=} f\left(t, \lambda x\left(\frac{t}{\lambda}\right)\right) =$$

$$= f(t, y(t)) \quad \checkmark$$