Poiché $f(1,0)=f(0,1)=f(-1,0)=f(0,-1)=0$ e

$$f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac14$$

segue che i punti $(0,1)$; $(1,0)$; $(0;-1)$; $(-1,0)$ sono punti di minimo di f su S e $(1/\sqrt2, 1/\sqrt2)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt2};-\frac{1}{\sqrt2}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt2};-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ sono punti di massimo di f su S.

3 Usiamo il metodo di separazione delle variabili

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 y^3 \\ y(1)=3 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{y^3} = x^2 \cdot dx$$ e incorporando la condizione iniziale

$$\int_3^y \frac{dz}{z^3} = \int_1^x s^2 \cdot ds$$

$$\frac{1}{(-2)} z^{-2}\Big|_3^y = \frac{s^3}{3}\Big|_1^x$$

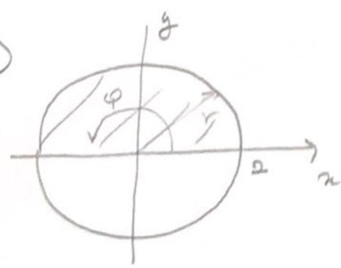
$$\frac{1}{y^2} = \frac{-6x^3+7}{9} \rightarrow y^2 = \frac{9}{-6x^3+7}$$

Poiché $1 \in$ al dominio e $y(1)=3>0$ scelgo

$$y(x) = +\frac{3}{\sqrt{7-6x^3}} \quad \left(\text{e } \underline{\text{non}} \quad y(x) = -\frac{3}{\sqrt{7-6x^3}} \right)$$

Inoltre verifico che $y(1)=3$ ✓.

4



Considero coordinate polari

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

La Jacobiana della trasform. è r

$$\iint_T e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^\pi e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \pi\int_0^2 r\, e^{-r^2} dr =$$

$$= \pi\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^2 = \pi\left[-\frac{e^{-4}}{2}+\frac12\right] = \frac{\pi}{2}\left[1-e^{-4}\right]$$

Analisi 2 per il CdS in

Intelligenza Artificiale & Data Analytics

Scritto - 22 gennaio 2024

1 - Convergenza puntuale

Se $0 \le x < 1$ si ha che $f_n(x) \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

Se $x = 1$ " " " $f_n(x) = 1$ $\forall n$

Dunque f_n convergono puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

- Non c'è convergenza uniforme in quanto se ci fosse ed essendo le f_n continue anche la funzione limite f lo dovrebbere essere e invece non lo è.

2 L'insieme S è un compatto ed f è una funzione continua quindi esistono $\min_S f$ e $\max_S f$ per il teorema di Weierstrass.

Poniamo $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. (S è una una curva regolare in f.l.).

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ 2yx^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(y^2 + \lambda) = 0 \\ y(x^2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo dei casi

- Se $x = 0$ allora $y^2 = 1$ e dunque trovo $(0,1)$, $(0,-1)$
- Se $y = 0$ allora $x^2 = 1$ " " " $(1,0)$, $(-1,0)$
- Se $x \ne 0, y \ne 0$ allora $y^2 + \lambda = 0 = x^2 + \lambda \Rightarrow x^2 = y^2$ e trovo da $x^2 + y^2 - 1 = 0$ che $2x^2 - 1 = 0$ e dunque $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Trovo i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$