Analisi 2 per il CdS in Intelligenza Artificiale & Data Analytics (1)

A. A. 2023/2024

1. Osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi (non negativi) ed inoltre vale la seguente stima

$$0 \leq \underbrace{\frac{2^{n+1}-4}{3^n}}_{a_n} \leq \underbrace{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{b_n}$$

b_n è il termine generale di una serie geometrica di ragione $q = \frac{2}{3}$ e dunque convergente.

Per il criterio del confronto deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è una serie convergente.

2. a) La funzione non è continua nell'origine infatti calcolando il limite lungo la direzione $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} m}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

il limite dipende da m e dunque il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

b) Osserviamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{0} + h\underline{e_1}) - f(\underline{0})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h \cdot 1, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Dunque f ammette $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$

Analogamente

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{0}+h\underline{e_2})-f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$ Dunque f ammette $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$

3. $\begin{cases} y' = -3y+1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Risolviamo con il metodo di separazione delle variabili

$$\int_0^y \frac{dt}{-3t+1} = \int_0^x ds$$

$$-\frac{1}{3} \ln|1-3t| \Big|_0^y = x$$

$$-\frac{1}{3} \ln|1-3y| = x$$

$$\ln|1-3y| = -3x$$

Poiché la condizione iniziale iniziale è $y(0)=0$ si avrà che $1-3y>0$ nell'intervallo di $\exists$ e dunque

$$\ln(1-3y) = -3x$$

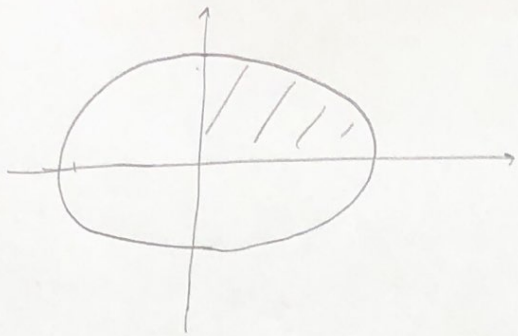
$$1-3y = e^{-3x} \Rightarrow y(x) = \frac{1-e^{-3x}}{3}$$

4. $\int_E xy \, dx\, dy$ $\quad E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2<1, x>0, y>0\}$

operiamo il seguente cambio di variabile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases} \qquad J\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$|\det J\phi| = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\cos^2\theta + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin^2\theta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$$



$0<\rho<1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\int_E xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\, d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$