Analisi 2 per CdS in IADA

A.A. 2023/2024

Scritto 14/06/2024

SOLUZIONI

(1) Posto $f(x) = e^{1/x^2} \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|^4$ e $\alpha = 4$, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2}\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|^4 \cdot x^4 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{1/x^2}}_{\to 1} \left[\underbrace{\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\frac{1}{x}}}_{\to 1}\right]^4 = 1$$

Essendo dunque il limite $L = 1 \in [0;+\infty[$ si ha per il criterio dell'ordine di infinitesimo che f è integrabile in senso generalizzato e dunque l'integrale è finito.

(2) • Convergenza puntuale

- Se $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Se $x > 0$ $\quad f_n(x) = x^n e^{-n^2 x} = e^{n\cdot\log(x) - n^2 x}$

Osserviamo che ad x fissato l'esponente

$$n\log(x) - n^2 x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

e dunque $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\log(x) - n^2 x} = 0$

Dunque possiamo concludere che f_n converge puntualmente a $f \equiv 0$ in $[0;+\infty[$

• Convergenza uniforme

Dobbiamo valutare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;+\infty[} |f_n(x)-0|$$

Fissato n, valutiamo $\sup_{x\in[0;+\infty[} |f_n(x)-0| = \sup_{x\in[0;+\infty[} f_n(x)$

osserviamo che

- $f_n(0)=0$
- $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{n\log(x)-n^2x} = 0$

Cerchiamo max e min locali

$$f_n'(x) = e^{n\log(x)-x^2\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{x}-n^2\right)$$

$$f_n'(x)=0 \iff \frac{1}{x}-n=0 \iff x=\frac{1}{n}$$

È facile verificare che il punto $\left(\frac{1}{n}, f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ è un punto di massimo locale ed assoluto.

Si ha che $f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-n^2\cdot 1/n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n\cdot e^{-n} = (ne)^{-n}$

Dunque

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} |f_n(x)-0| = \sup_{x\in[0;+\infty[} f_n(x) = \max_{x\in[0;+\infty[} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = (ne)^{-n}$$

Dunque passando al limite per $n\to+\infty$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0;+\infty[} |f_n(x)-0| = \lim_{n\to+\infty} (ne)^{-n} = 0$$

Infatti $(ne)^{-n} = e^{\log[(ne)^{-n}]} = e^{-n\log(ne)}$

$\lim_{n\to+\infty} -n\log(ne) = -\infty$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} (ne)^{-n} = 0$$

Possiamo dunque concludere che f_n convergono ad $f\equiv 0$ anche uniformemente in $[0;+\infty[$.

3. Osserviamo che lungo la curva $y=x^3$ il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot x^3}{x^6+x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

e dunque essendo $\lim_{x\to 0} f(x,x^3) \neq f(0,0)=0$

si ha che f non è continua nell'origine.
Non essendo continua nell'origine non è nemmeno ivi differenziabile.

4. $$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + e^x \\ y(0)=3 \end{cases} \qquad (PC)$$

Risolviamo prima l'equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(x) = -y(x) + e^x$.
Sappiamo che una soluzione generale della completa è

$$y(x) = c e^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} e^{A(x)-A(t)}\cdot b(t)\,dt$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)=-1$ e $b(x)=e^x$
Dunque scegliendo $A(x)=-x$, $x_0=0$ si ha che

$$y(x) = c e^{-x} + \int_0^x e^{-x+t}\cdot e^t\,dt =$$

$$= ce^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^{2t}\,dt = ce^{-x} + e^{-x}\left[\frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^x\right] =$$

$$= ce^{-x} + e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\right) = ce^{-x} + \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} = ke^{-x} + \frac{e^x}{2}$$

Imponiamo ora la validità della condizione iniziale

$$3 = y(0) = ke^0 + \frac{e^0}{2} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow k = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$$

Dunque la soluzione del (PC) è

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{2}e^{-x} + \frac{e^x}{2}}$$