Simulazione compito d'Esame AM2 per gli studenti del corso di Artificial Intelligence & Data Analytics

14 giugno 2025

Il compito è suddiviso in più sezioni. Ogni sezione contiene un certo numero di esercizi, ordinati per difficoltà crescente. È richiesto lo svolgimento di **un solo esercizio per ciascuna sezione**. Nel caso in cui vengano svolti più esercizi all'interno della stessa sezione, **verrà preso in considerazione, ai fini della valutazione, solo quello con il punteggio più alto**. Il voto finale sarà calcolato sulla base della somma dei punteggi ottenuti nei singoli esercizi selezionati. **Se il punteggio totale è maggiore o uguale a 31**, verrà **attribuita la lode**.

Studio di successioni e serie di funzioni

1) Verificare se la successione $f_n(x) = e^{-nx^2}$ converge uniformemente nell'intervallo $\left[1, \sqrt{2}\right]$.

Punteggio: 3 punti

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Punteggio: 5 punti

3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_{x^2-\frac{1}{n}}^{x^2+\frac{1}{n}} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt.$$

Punteggio: 7 punti

Studio di funzioni in due variabili

1) Determinare gli estremi assoluti ed eventuali estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = \arcsin\left(xy^2 - x^2y\right)$$

nel suo dominio.

Punteggio: 4 punti

2) Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = ye^{2x}$$

sotto il vincolo $2x^2 + 3y^2 = 1$.

Punteggio: 5 punti

3) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^5 y^7 \log\left(x^2 + y^2\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile nel suo dominio.

Punteggio: 5 punti

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

1) Risolvere la seguente equazione differenziale con condizione al contorno:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{2x^2 + 3} = 0 \\ y'(1) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Punteggio: 3 punti

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \cos(x - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Punteggio: 7 punti

Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

1) Determinare le soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Punteggio: 3 punti

2) Determinare le soluzioni del problema:

$$\begin{cases} y'' + y = \sin^2 x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Punteggio: 7 punti

Calcolo di integrali doppi

1) Calcolare l'integrale doppio:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

dove D è la regione del piano delimitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 2x$.

$\boxed{\textbf{Punteggio: 3 punti}}$

2) Calcolare l'integrale

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\, dx\, dy,$$

dove $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

$\boxed{\textbf{Punteggio: 6 punti}}$

3) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{|4x^2 + y^2 - 1|}}$$

nel dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 2,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

$\boxed{\textbf{Punteggio: 8 punti}}$

Studio di successioni e serie di funzioni

1)

Convergenza puntuale:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0 \quad \forall x \in [1, \sqrt{2}]$$

Convergenza uniforme:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\sqrt{2}]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

La successione converge uniformemente nell'intervallo $[1, \sqrt{2}]$.

2)

Convergenza puntuale:

$$\frac{e^{-nx^2}}{n+1} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

La serie proposta è quindi a segno alterno.

$$\frac{e^{-nx^2}}{n+1} > \frac{e^{-(n+1)x^2}}{n+2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} > e^{-x^2}$$

La precedente diseguaglianza risulta valida $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n+1} = 0$$

Pertanto la serie converge per il criterio di Leibniz $\forall x \in \mathbb{R}$.

Convergenza uniforme: Si consideri la:

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n+1} \right| \leq \lim_{N\to\infty} \left| \frac{e^{-(N+1)x^2}}{N+2} \right|$$

Conclusione: Convergenza uniforme $\forall x \in \mathbb{R}$.

3)

Convergenza puntuale: Dallo studio delle funzioni integrabili secondo Riemann, è nota la seguente catena di diseguaglianze

$$\frac{2}{n} \inf_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right| < \int_{x^2-\frac{1}{n}}^{x^2+\frac{1}{n}} \frac{1-\cos t}{t^2} dt < \frac{2}{n} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right|$$

Essendo la funzione integranda limitata sia inferiormente che superiormente, applicando il teorema dei carabinieri, si dimostra che la successione di funzioni proposta converge alla funzione identicamente nulla $\forall x \in \mathbb{R}$.

Convergenza uniforme:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{x^2-\frac{1}{n}}^{x^2+\frac{1}{n}} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \right| < \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{x^2-\frac{1}{n}}^{x^2+\frac{1}{n}} \left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right| dt <$$

$$< \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{2}{n} \sup_{t\in[x^2-\frac{1}{n},x^2+\frac{1}{n}]} \left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right| \right] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1-\cos x}{x^2} \right|$$

Essendo $\frac{1-\cos t}{t^2}$ una funzione limitata, il limite risulta nullo per il teorema dei carabinieri
Conclusione: Convergenza uniforme $\forall x \in \mathbb{R}$.

Studio delle funzioni in due variabili

1)

Dominio: $|xy^2 - x^2y| \leq 1$

$$f(x, y) = \arcsin(xy(y - x))$$

Punti critici: Si calcoli il gradiente della funzione:

$$\partial_x f = \frac{y^2 - 2xy}{\sqrt{1 - (xy^2 - x^2y)^2}}, \quad \partial_y f = \frac{2xy - x^2}{\sqrt{1 - (xy^2 - x^2y)^2}}$$

Risolvendo $\partial_x f = 0$, $\partial_y f = 0$ si ottiene la soluzione $(0, 0)$, in cui la funzione assume il valore 0. Se $0 < x < y$, la funzione è positiva. Se $0 < y < x$ la funzione è negativa. Pertanto il punto $(0, 0)$ è di sella.
Conclusione: La funzione assume il valore massimo nei punti che soddisfano la condizione $xy^2 - x^2y = 1$, e in tali punti il suo valore è $\frac{\pi}{2}$.
Analogamente, la funzione ammette un valore minimo nei punti per cui $xy^2 - x^2y = -1$, e in corrispondenza di essi vale $-\frac{\pi}{2}$.

2)

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange
Si consideri la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

e si determini il minino di tale funzione rispetto alle variabili x, y e λ.

$$\begin{cases} 2ye^{2x} + 4\lambda x = 0 \\ e^{2x} + 6\lambda y = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del precedente sistema fornisce i seguenti punti stazionari: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. In tali punti la funzione assume i valori

$$f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}e$$

Conclusione: Minimo $-\frac{e}{\sqrt{6}}$, massimo $\frac{e}{\sqrt{6}}$.

3)

La forma funzionale dell'argomento del logartimo suggerisce di utilizzare le coordinate polari:

$$2\cos^5\theta \sin^7\theta \lim_{\rho\to 0} \rho^{12} \ln \rho = 0$$

La funzione $f(x,y)$ è continua.
Le derivate parziali nel punto $(0,0)$ sono entrambe nulle. Per la differenziabità, si consideri il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^5k^7\ln\left(h^2+k^2\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\cos^5\theta\sin^7\theta\rho^{12}\ln\rho}{\rho} = 0$$

Conclusione: Funzione differenziabile in $(0,0)$.

Equazioni differenziali a variabili separabili

1)

La condizione $y'(1) = \frac{1}{5}$ è equivalente a $y(1) = 1$, allora

$$\int_1^y \frac{1}{z}dz = \int_1^x \frac{1}{2t^2+3}dt$$

da cui si ottiene facilmente

$$\boxed{y(x) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right]\right).}$$

2)

Si ponga $u = x - y \Rightarrow y = x - u \Rightarrow y' = 1 - u'$:

$$1 - u' = \cos u \Rightarrow u' = 1 - \cos u$$

con la condizione inziale $u(0) = 0$. Allora

$$\int_0^u \frac{1}{1-\cos z}dz = \int_0^x dt \Rightarrow \int_0^u \frac{1+\cos z}{\sin^2 z}dz = \int_0^x dt \Rightarrow \left[-\cot z - \frac{1}{\sin z}\right]_0^u = x \Rightarrow -\frac{1+\cos u}{\sin u} = x$$

Ricordando le identità: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ e $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, si ottiene

$$\tan\frac{u}{2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow u = -2\arctan\frac{1}{x}$$

Soluzione: $\boxed{y = x + 2\arctan\frac{1}{x}}$

Equazioni differenziali del secondo ordine

1)

Si consideri il polinomio associato all'equazione differenziale

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \Rightarrow y(x) = A\cos x + B\sin x$$

Dalla risoluzione del problema di Cauchy, si ottiene

$$y(0) = A = 1, \quad y'(x) = -A\sin x + B\cos x \Rightarrow y'(0) = B = 0$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \cos x}$

2)

Si consideri la seguente identità

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \Rightarrow y'' + y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Allora la soluzione particolare assume la forma

$$y_p = A + B\cos(2x) + C\sin(2x)$$

Sostituendo tale espressione nell'equazione differenziale si ottiene

$$y_p'' + y_p = A - 3B\cos(2x) - 3C\sin(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ -3B = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$$

Quindi la soluzione completa dell'equazione differenziale è

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x).$$

Per quanto riguarda il problema di Cauchy:

$$y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(0) \Rightarrow y(0) = c_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$$

$$y'(x) = -c_1\sin(x) + c_2\cos(x) - \frac{1}{3}\sin(2x) \Rightarrow y'(0) = c_2 = 0$$

Soluzione completa: $\boxed{y(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)}$

Calcolo di integrali doppi

1)

Si determinino i punti di intersezione tra le due curve:

$$x^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 2$$

Quindi il dominio è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\ x^2 < y < 2x\}$. Allora l'integrale da risolvere è il seguente

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{6}x^6 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{14}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7} \right]_0^2 = \frac{216}{35}$$

Conclusione: $\boxed{\iint_D (x^2+y^2)\,dA = \frac{216}{35}}$

2)

Si consideri il seguente cambiamento di coordinate

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta, \quad \text{con } r \in [0,1],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Il dominio } D \text{ diventa } r \in [0,1],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = abr$$

L'integrale diventa

$$\iint_D (x^2+y^2)\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left[r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\cdot e^{-r^2}\cdot abr\right] dr\,d\theta$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)\int_0^1 r^3 e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

Si consideri l'integrale rispetto alla variabile r. Si ponga $u = r^2 \Rightarrow dr = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$..

$$\int_0^1 r^3 e^{-r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^1 ue^{-u}du = -\frac{1}{2}\left(\left[ue^{-u}+e^{-u}\right]_0^1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

Ricordando che

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Conclusione: $\boxed{\iint_D (x^2+y^2)\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy = \frac{\pi ab}{8}\left(a^2+b^2\right)\left(1-\frac{2}{e}\right)}$

3)

Si scelga il seguente cambiamento di coordinate: $x = \frac{1}{2}r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, in cui $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quindi:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r\cos\theta}{\sqrt{|r^2-1|}}\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{\sqrt{|r^2-1|}}\,dr\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{\sqrt{|r^2-1|}}\,dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{\sqrt{|r^2-1|}}\,dr = \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr + \int_1^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,dr$$

Si consideri il primo integrale. Si usi il cambio di variabile $r = \sin u$, con $dr = \cos u\,du$:

$$\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{\cos u}\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,du = \frac{\pi}{4}$$

Si consideri il secondo integrale. Si usi il cambio di variabile $r = \cosh\xi$, con $dr = \sinh\xi\,d\xi$. Poiché:

$$\cosh 0 = 1, \quad \cosh\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \sqrt{2},$$

i limiti per r sono da 1 a $\sqrt{2}$, quindi per ξ da 0 a $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Allora:

$$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,dr = \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\frac{\cosh^2\xi}{\sqrt{\cosh^2\xi-1}}\sinh\xi\,d\xi = \int_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\cosh^2\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\xi + \sinh\xi\cosh\xi\right]_0^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Conclusione: $\boxed{\iint_D f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{|4x^2+y^2-1|}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}$