Analisi 2 per il CdS
in Intelligenza Artificiale & Data Analytics.

1. Se $x=0$ $f_n(0) = 1 \cdot e^{0/n} = 1$

Se $0 < x \leq 1$ $f_n(x) = (x^2+1)e^{x/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2+1$

Il limite puntuale della successione è $f(x) = x^2+1$

Proviamo che f_n converge ad f uniformemente in $[0,1]$

$$|(x^2+1)e^{x/n} - x^2+1| = |(x^2+1)(e^{x/n}-1)| \leq 2|e^{x/n}-1| \quad (S)$$

Osservando che per $x \in [0,1]$ si ha

$$0 \leq e^{x/n} - 1 \leq e^{1/n} - 1$$

$$(S) \quad 2(e^{1/n}-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Dunque f_n converge uniform. ad f in $[0,1]$.

2. Caso $\alpha = 1$ $f(x,y) = \dfrac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}$

Proviamo che il limite è zero.

$$\left|\frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} + \frac{|x^3+y^2|x||}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq |y| + |x|\frac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |y|+|x| \longrightarrow 0$$

se $(x,y) \to (0,0)$

Dunque $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2} = 0.$

Caso $\alpha = 2$ $f(x,y) = \dfrac{x^2(y-x)}{(x^2+y^2)^2}$

Scegliendo l'avvicinamento $y = 2x$ si ha

$$\frac{x^2(2x-x)}{(x^2+4x^2)^2} = \frac{x^3}{(5x^2)^2} = \frac{x^3}{25x^4} = \frac{1}{25x} \begin{cases} +\infty & \text{se } x \to 0^+ \\ -\infty & \text{se } x \to 0^- \end{cases}$$

Dunque il limite non esiste

(3) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

che ha come radici $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 1$

Dunque la soluzione ha la forma

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$. Imponendo le condizioni iniziale si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 3c_2 = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad c_1 = \frac{1}{4} \quad c_2 = -\frac{1}{4}$$

Dunque $y(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-3t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

(4)

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$$

$$\|\gamma'(t)\| = \left((e^t \cos(t) - e^t \sin(t))^2 + (e^t \sin(t) + e^t \cos(t))^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(2e^{2t} \cos^2(t) + 2e^{2t} \sin^2(t) \right)^{1/2} = \sqrt{2}\, e^t$$

Dunque la lunghezza della curva è

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^t\, dt = \sqrt{2}\left[e^{2\pi} - 1 \right]$$