Foglio 5: risoluzione

Derivate parziali

- $f(x,y) = \log(1+x^2+y^4)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}$;

- $f(x,y,z) = e^x y z$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x y z$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^x z$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^x y$;

- $f(x,y) = x^2|y|$: esiste per ogni $(x,y)^T$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x|y|$,

  esiste per ogni $(x,y)^T$ $\underline{\text{con } y \neq 0}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } y>0 \\ -x^2 & \text{se } y<0 \end{cases}$

  non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}$

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x^2} - 0\right) = \frac{1}{x^2} \to +\infty \Rightarrow \text{non esiste finita } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{1}{y}(0-0) = 0 \Rightarrow \text{esiste } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Derivate direzionali

- $f(x,y) = x^2+y^3$, $\underline{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, $\underline{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$:

  $\nabla f(x,y) = (2x, 3y^2)^T$, $\nabla f(1,-1) = (2,3)^T$, $\nabla f(1,2) = (1,12)^T$;

  $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(1,-1) = \langle \nabla f(1,-1), \underline{u} \rangle = 2\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

  $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), \underline{v} \rangle = \frac{1}{2} + 6\sqrt{3}$

- $f(x,y) = x e^{y}$, $\quad \underline{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, $\quad \underline{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$, $\quad \underline{x}^0 = (1,-1)^T$:

$\nabla f(x,y) = (e^y, x e^y)^T$, $\nabla f(1,-1) = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, $\nabla f(1,2) = (e^2, e^2)^T$;

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(1,-1) = \langle \nabla f(1,-1), \underline{u} \rangle = \frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{e}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), \underline{v} \rangle = e^2 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} e^2 = (1+\sqrt{3})\frac{e^2}{2}$$

- $f(x,y,z) = \log(xyz)$, $\quad \underline{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$:

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)^T$, $\nabla f(-1,1,-1) = (-1,1,-1)^T$;

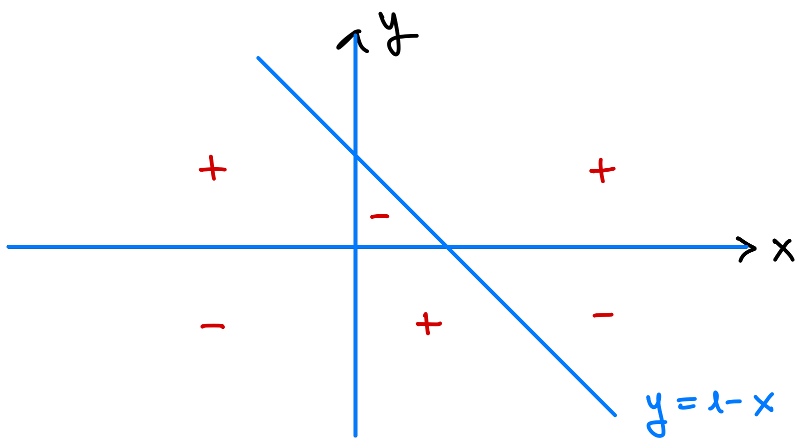
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{w}}(-1,1,-1) = \langle \nabla f(-1,1,-1), \underline{w} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Studio di $f(x,y) = x^2 y + x y^2 - x y$

- $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^2$;
- segni f : $\quad x^2 y + x y^2 - x y = x y (x + y - 1)$;

$f(x,y) = 0 \iff x = 0 \ \vee\ y = 0 \ \vee\ y = 1 - x$;

$$f(x,y) > 0 \iff \begin{cases} xy > 0 \\ y > 1 - x \end{cases} \vee \begin{cases} xy < 0 \\ y < 1 - x \end{cases};$$



- $\nabla f(x,y) = (2xy + y^2 - y,\ x^2 + 2xy - x)^T$;

- $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$, $\qquad Hf(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

- $\nabla f(1,2) = (7,4)^T$, $\ \underline{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$, $\ \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(1,2) = 7\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\frac{1}{2} = 7\frac{\sqrt{3}}{2} - 2$;

- polinomio di Taylor del I ordine in $(1,2)^T$:

$$f(1,2) + \left\langle \nabla f(1,2), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 + 7(x-1) + 4(y-2) \ ;$$

- polinomio di Taylor del II ordine in $(1,2)^T$:

$$f(1,2) + \left\langle \nabla f(1,2), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle Hf(1,2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 4 + 7(x-1) + 4(y-2) + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 4(x-1)+5(y-2) \\ 5(x-1)+2(y-2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 4 + 7(x-1) + 4(y-1) + \frac{1}{2}\left(4(x-1)^2 + 10(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2\right) \ ;$$

- equazione del piano tangente a $G(f)$ in $(1,2,4)^T$:

$$z = 4 + 7(x-1) + 4(y-2) \iff z = 7x + 4y - 11$$

- $\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = y - y^2 \\ 2xy = x - x^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - x^2 = y - y^2 \\ 2xy = x - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 - (x-y) = 0 \\ 2xy = x - x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0 \\ 2xy = x - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 = x - x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1-x \\ 2x(1-x) = x - x^2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = y \\ 3x^2 - x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1-x \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

- punti critici : $(0,0)^T$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$, $(0,1)^T$, $(1,0)^T$

- natura dei punti critici :

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det = -1$: indefinita

$(0,0)^T$ punto di sella

$Hf(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\det = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} > 0$: definita positiva

$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$ punto di minimo relativo

$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det < 0$: indefinita

$(0,1)^T$ punto di sella

$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det < 0$: indefinita

$(1,0)^T$ punto di sella

- $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$,

infatti: $f(x,x) = 2x^3 - x^2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x,x) = -\infty$

$\Rightarrow \quad -\infty = \inf_{\mathbb{R}} f(x,x) \geq \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$ e

$+\infty = \sup_{\mathbb{R}} f(x,x) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Estremi relativi e assoluti

- $f(x,y) = x^2 - x^2y - y^2 + 1$, $\text{dom } f = \mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (2x - 2xy, \ -x^2 - 2y)^T$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

punti critici : $(0,0)^T$, $(-\sqrt{2},1)^T$, $(\sqrt{2},1)^T$;

natura dei punti critici :

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det = -4 < 0$: indefinita

$(0,0)^T$ punto di sella

$Hf(-\sqrt{2},1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\det = -8 < 0$: indefinita

$(-\sqrt{2},1)^T$ punto di sella

$Hf(\sqrt{2},1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$, $\det = -8 < 0$: indefinita

$(\sqrt{2},1)^T$ punto di sella

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$,

infatti $f(x,x) = -x^3 + 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x,x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x,x) = -\infty$

$\Rightarrow \quad -\infty = \inf_{\mathbb{R}} f(x,x) \geq \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$, $\quad +\infty = \sup_{\mathbb{R}} f(x,x) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$

• $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 3$, $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}^3$

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 - 6x,\ 3y^2 - 6y,\ -6z)^T$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 & 0 \\ 0 & 6y-6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \underline{0} \iff \begin{cases} x(x-2)=0 \\ y(y-2)=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

punti critici : $(0,0,0)^T, (2,0,0)^T, (0,2,0)^T, (2,2,0)^T$

natura dei punti critici :

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{ definita negativa}$$

$(0,0,0)^T$ punto di massimo relativo

$$H(2,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{ indefinita}$$

$(2,0,0)^T$ punto di sella

$$H(0,2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{ indefinita}$$

$(0,2,0)^T$ punto di sella

$$H(2,2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} : \text{ indefinita}$$

$(2,2,0)^T$ punto di sella

$\inf_{\mathbb{R}^3} f = -\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f = +\infty$, infatti: $f(x,0,0) = x^3 - 3x^2$

$-\infty = \inf_{\mathbb{R}} f(x,0,0) \geq \inf_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)$, $\quad +\infty = \sup_{\mathbb{R}} f(x,0,0) \leq \sup_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)$

Estremi assoluti e coercività

- $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$, $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (4x^3-4y,\ 4y^3-4x)^T$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x^9 - x = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^8-1) = 0 \\ y = x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

punti critici : $(0,0)^T$, $(1,1)^T$, $(-1,-1)^T$;

natura dei punti critici :

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, det < 0 : indefinita

$(0,0)^T$ punto di sella

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$, det > 0, $12 > 0$: definita positiva

$(1,1)^T$ punto di minimo

$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$, det > 0, $12 > 0$: definita positiva

$(-1,-1)^T$ punto di minimo

f coerciva : usando coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, si ha

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = \rho^4\cos^4\vartheta + \rho^4\sin^4\vartheta - \rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta$$

$$\geq \rho^4(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta) - \rho^2|\cos\vartheta||\sin\vartheta|$$

$$\geq m\rho^4 - \rho^2,$$

con $\quad m = \min_{[0,2\pi]} (\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta) > 0$

Poiché $\lim_{\rho\to+\infty} (m\rho^4 - \rho^2) = +\infty$, si conclude che

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y) = +\infty.$$

$\Rightarrow$ esiste $\min_{\mathbb{R}^2} f$

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = -2 = f(1,1) = f(-1,-1), \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$

- $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^2 - xz + 1, \quad \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^3$

$\nabla f(x,y,z) = (2x - z,\ 4y^3 + 2y,\ 2z - x)^T$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 12y^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2x = z \\ y(2y^2+1) = 0 \\ 2z = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

punti critici : $(0,0,0)^T$

natura dei punti critici :

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \ \vee \ \lambda_2 = 1 \ \vee \ \lambda_3 = 3 \quad$: definita positiva

$(0,0,0)^T$ punto di minimo relativo

f coerciva, infatti:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^2 - xz = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\left(x^2+z^2-2xz\right) + y^2 + y^4$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}(x-z)^2}}_{\geq 0} + \frac{1}{2}y^2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}y^2 + y^4}}_{\geq 0}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) \to +\infty, \quad \text{se} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to +\infty$$

$\Rightarrow$ esiste $\min\limits_{\mathbb{R}^3} f$

$\sup\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) = +\infty$, $\inf\limits_{\mathbb{R}^3} f = \min\limits_{\mathbb{R}^3} f = f(0,0,0) = 1$, essendo $(0,0,0)^T$ l'unico punto critico di f.

Segui ed estremi

- $f(x,y) = (x^2-y)(2x^2-y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$, $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}^2$

$\nabla f(x,y) = (8x^3 - 6xy, \ -3x^2 + 2y)^T$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x(4x^2-3y) = 0 \\ 2y = 3x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y = 4x^2 \\ 2y = 3x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y = 4x^2 \\ \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

punti critici: $\quad (0,0)^T$

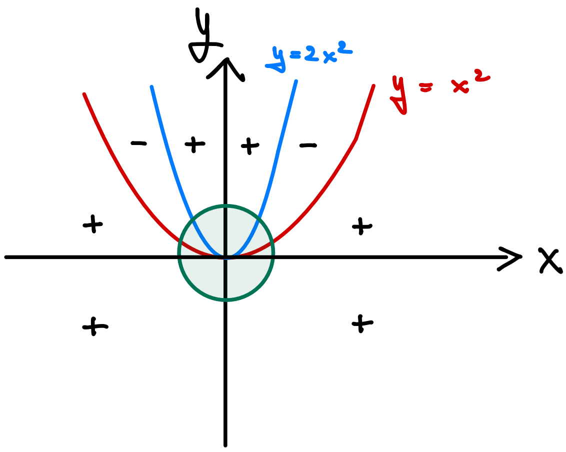
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non è definita (positiva o negativa) né indefinita: il test della matrice Hessiana non si può applicare

segni di f:

$f(x,y) = 0 \iff y = x^2 \ \vee \ y = 2x^2$,

$f(x,y) > 0 \iff y > 2x^2 \ \vee \ y < x^2$



In ogni intorno di $(0,0)^T$ ci sono punti dove la funzione è positiva e punti dove la funzione è negativa: $(0,0)^T$ non è punto di massimo né di minimo.

Inoltre $(0,0)^T$ non è punto di sella. Infatti le restrizioni di f a ogni retta passante per $(0,0)^T$ ha in $(0,0)^T$ un punto di minimo:

$x = 0$: $\quad f(0,y) = y^2 > 0$ se $y \neq 0$ e $f(0,0) = 0$,

$y = mx$: $\quad f(x, mx) = 2x^4 - 3m x^3 + m^2 x^2 = x^2(m^2 - 3mx + 2x^2) > 0$

se $|x| < \frac{1}{4}|m|$ e $f(0,0) = 0$;

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$, infatti

$f(0,y) = y^2 \to +\infty$ se $y \to +\infty \Rightarrow +\infty = \sup_{\mathbb{R}} f(0,y) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$

$f(x, \frac{3}{2}x^2) = 2x^4 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{9}{4}x^4 = -\frac{1}{4}x^2 \to -\infty$ se $x \to +\infty$

$\Rightarrow \quad -\infty = \inf_{\mathbb{R}} f(x, \frac{3}{2}x) \geq \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

- $f(x,y,z) = x^2 - 2xz + z^2 + 3y^2$, $\quad \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}^3$

$\nabla f(x,y,z) = (2x-2z,\ 6y,\ -2x+2z)^T$

$\nabla f(x,y,z) = \underline{0} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

punti critici : tutti i punti della retta $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ sono critici

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 4\right] = (6-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 0$$

Quindi la matrice Hessiana non è definita (positiva o negativa) né indefinita: il test della matrice Hessiana non si può applicare.

segni di f:

$f(x,y,z) = (x-z)^2 + 3y^2 \geq 0$ in $\mathbb{R}^3$,

$f(x,y,z) = (x-z)^2 + 3y^2 = 0 \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$.

Quindi tutti i punti della retta $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ sono punti di minimo assoluto.

$\inf_{\mathbb{R}^3} f = \min_{\mathbb{R}^3} f = 0$ e $\sup_{\mathbb{R}^3} f = +\infty$, dato che

$f(0,y,0) = 3y^2 \to +\infty$, se $y \to +\infty$ e

$+\infty = \sup_{\mathbb{R}} f(0,y,0) \leq \sup_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)$

Distanza punto - piano

Se $(x,y,z)^T$ è il generico punto del piano π di equazione $x+y-z=1$, la distanza di $(2,1,-1)^T$ da π è

$$\min_{(x,y,z)^T \in \pi} \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

dove $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$ è la distanza di $(x,y,z)^T$ da $(2,1,-1)^T$. Poiché $z = x+y-1$, si ha

$$\min_{(x,y,z)^T \in \pi} \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2} = \min_{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2} \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)^2}$$

Inoltre ricercare i punti di minimo di

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)^2}$$

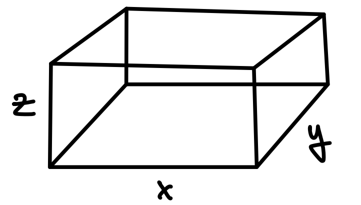
equivale, per la crescenza della radice, a ricercare i punti di minimo di

$$g(x,y) = (x-2)^2+(y-1)^2+(x+y)^2.$$

Si ha $$g(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2$$
$$\geq (x-2)^2 + (y-1)^2 \longrightarrow +\infty \quad \text{se } \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty,$$
cioè g è coerciva. Poichè
$$\nabla g(x,y) = \left(2(x-2) + 2(x+y),\ 2(y-1) + 2(x+y)\right)^T$$
e
$$\nabla g(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x-2+x+y=0 \\ y-1+x+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases},$$
l'unico punto critico $(1,0)^T$ è il punto di minimo assoluto di g.

Quindi $(1,0,0)^T$ è il punto di minimo assoluto di
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$
e il valore minimo, cioè la distanza di $(2,1,-1)^T$ dal piano π è $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

Dimensioni parallelepipedo



Si ha $V = xyz$ e $S = xy + 2xz + 2yz$, con $x>0, y>0, z>0$.

Fissato il volume V si vuol minimizzare l'area delle facce. Poichè $z = \frac{V}{xy}$, si ricerca il minimo di
$$f(x,y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$
su $A = \{(x,y,z)^T : x>0, y>0, z>0\}$. Si ha
$$\nabla f(x,y) = \left(y - \frac{2V}{x^2},\ x - \frac{2V}{y^2}\right)^T \quad \text{e}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \text{ in } A \iff \begin{cases} y = \frac{2V}{x^2} \\ x = \frac{2V}{y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} yx^2 = xy^2 \\ xy^2 = 2V \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \end{cases}$$

$Hf(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: definita positiva $\Rightarrow$

$(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})^T$ punto di minimo relativo di g,

con $g(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

Poiché $g(x,y) = \dfrac{(xy)^2 + 2Vx + 2Vy}{xy}$ e $\lim\limits_{(x,y)^T \to \mathrm{fr}A} g(x,y) = +\infty$,

si conclude che $3\sqrt[3]{4V^2}$ è il minimo assoluto di g.

In conclusione le dimensioni che minimizzano l'area sono $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$.