Analisi 2 per il CdS in AIDA

Scritto - 18 Gennaio 2023

1. • Convergenza puntuale

- se $x>0$ $\lim_{n\to+\infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$

- se $x=0$ $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n\cdot 0) = 0$

- se $x<0$ $\lim_{n\to+\infty} \arctan(nx) = -\pi/2$

• Non c'è convergenza uniforme in quanto se ci fosse la funzione limite dovrebbe essere continua essendo le f_n continue

2. Ponendo $y=mx$ si ha che

$$\frac{x^3\cdot y^3}{x^6+y^6} = \frac{x^3\cdot m^3x^3}{x^6+m^6x^6} = \frac{m^3x^6}{(1+m^6)\cdot x^6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^3\cancel{x^6}}{(1+m^6)\cancel{x^6}} = \frac{m^3}{(1+m^6)}$$

Il limite non esiste poichè il risultato dipende dalla direzione scelta, cioè da m.

3. Essendo $\Sigma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4=1\}$ un insieme compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette max e min (assoluti) su Σ.

Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$

$\nabla \varphi(x,y) = (4x^3, 4y^3)$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 4\lambda x^3 & \underline{1} \\ x^2 = 4\lambda y^3 & \underline{2} \\ x^4 + y^4 = 1 & \underline{3} \end{cases}$$

Da $\underline{1}$ si ha che $x(y - 2\lambda x^2) = 0$

- Se $x = 0$ da $\underline{3}$ si ha che $y = \pm 1$ e da $\underline{2}$ $\lambda = 0$.
  si ha che $f(0, \pm 1) = 0$

- Se $y - 2\lambda x^2 = 0$ allora da $\underline{2}$ $y(1 - 8\lambda^2 y^2) = 0$
  - se $y = 0$ da $\underline{3}$ $x = 0$ $\to$ impossibile perché $\underline{3}$ non è verificata
  - se $(1 - 8\lambda^2 y^2) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{8\lambda^2}$ allora da $y - 2\lambda x^2 = 0$
  si ha che $y^2 = 4\lambda^2 x^4$ e dunque $x^4 = \frac{y^2}{4\lambda^2} = \frac{1}{8\lambda^2} \cdot \frac{1}{4\lambda^2} =$
  $= \frac{1}{32\lambda^4}$

  Inserendo nel vincolo si ha che
  $x^4 + y^4 = 1$
  $1 = \frac{1}{64\lambda^4} + \frac{1}{32\lambda^4} = \frac{3}{64\lambda^4}$ $\quad \lambda^4 = \frac{3}{64}$ $\quad \lambda = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{64}}$

  Dunque da $y^2 = \frac{1}{8\lambda^2}$ otteniamo $y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ e
  dall'equazione ad esempio $x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$.

  Essendo $f\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ ed $f\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$

  otteniamo che $m = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ è minimo e
  $M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ è massimo.

7. Consideriamo l'equazione caratteristica

$\lambda^2 - 10 = 0 \qquad \lambda_1 = \sqrt{10} \quad e \quad \lambda_2 = -\sqrt{10}$

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{10} \cdot x} + c_2 e^{-\sqrt{10} x}$, la cui derivata è

$y'(x) = c_1\sqrt{10} \cdot e^{\sqrt{10} \cdot x} - c_2\sqrt{10}\, e^{-\sqrt{10} \cdot x}$

$y(0) = 0 \iff c_1 \cdot e^0 + c_2 e^0 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = c_1\sqrt{10} + c_2(-\sqrt{10}) = 1$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \quad e \quad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{10}}$