Esercizi di Probabilità e Statistica

M. Barchiesi

29 marzo 2025

Indice

1 Probabilità base **5**

1.1 Probabilità condizionale 5

1.2 Schema delle prove ripetute ed indipendenti 9

1.3 Variabili aleatorie discrete 11

Capitolo 1

Probabilità base

1.1 Probabilità condizionale

Esercizio 1.1 (Trasmissione disturbata di bit)**.** Lungo un canale di trasmissione vengono spediti dei segnali in formato di bit $\{0, 1\}$. Il canale è disturbato e a volte capita che si trasmetta uno 0 e si riceva un 1 o, viceversa, si trasmetta un 1 e si riceva uno 0. Si stima che, se si trasmette uno 0, questo venga ricevuto correttamente con probabilità 0.95, mentre, se si trasmette un 1, questo venga ricevuto correttamente con probabilità 0.75. Si sa che il 70% dei segnali trasmessi sono 0.

Venendo spedito un segnale lungo il canale, calcoliamo le probabilità che:

(a) venga ricevuto uno 0;

(b) si verifichi un errore di trasmissione;

(c) il segnale spedito fosse uno 0, sapendo che è stato ricevuto uno 0.

Soluzione 1.1. Per rispondere a queste domande, definiamo i seguenti eventi:

$$T_0 := \{\text{viene trasmesso uno } 0\}, \quad R_0 := \{\text{viene ricevuto uno } 0\},$$

cosicché dal testo ricaviamo

$$\mathbb{P}(R_0 \mid T_0) = 0.95, \quad \mathbb{P}(R_0^c \mid T_0^c) = 0.75, \quad \mathbb{P}(T_0) = 0.7.$$

Risposta alla domanda a). Dobbiamo calcolare R_0. Usando la formula delle probabilità totali (nella versione con dicotomia), otteniamo

$$\mathbb{P}(R_0) = \mathbb{P}(R_0 \mid T_0)\mathbb{P}(T_0) + \mathbb{P}(R_0 \mid T_0^c)\mathbb{P}(T_0^c),$$

e sostituendo i vari valori di $\mathbb{P}(R_0 \mid T_0)$, $\mathbb{P}(R_0 \mid T_0^c) = 1-\mathbb{P}(R_0^c \mid T_0^c)$, $\mathbb{P}(T_0)$ e $\mathbb{P}(T_0^c) = 1-\mathbb{P}(T_0)$, otteniamo $\mathbb{P}(R_0) = 0.74$.

Risposta alla domanda b). Sia $E := \{\text{si verifica un errore di trasmissione}\}$. Possiamo scrivere

$$E = (T_0 \cap R_0^c) \cup (T_0^c \cap R_0),$$

e l'unione è disgiunta. Quindi, per l'additività di P e la formula delle probabilità totali, otteniamo

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(T_0 \cap R_0^c) + \mathbb{P}(T_0^c \cap R_0) = \mathbb{P}(R_0^c \mid T_0)\mathbb{P}(T_0) + \mathbb{P}(R_0 \mid T_0^c)\mathbb{P}(T_0^c) = 0.11.$$

Risposta alla domanda c). Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(T_0 \mid R_0)$. Usiamo la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(T_0 \mid R_0) = \frac{\mathbb{P}(R_0 \mid T_0)\mathbb{P}(T_0)}{\mathbb{P}(R_0)} = 0.9,$$

dove il valore del numeratore è dato dal testo, mentre quello del denominatore l'abbiamo ricavato al punto a) tramite la formula delle probabilità totali.

Esercizio 1.2 (Screening). Per individuare la presenza di una malattia viene effettuato un test di screening. Il test ha:

- *sensibilità* 97%: se la malattia è presente, il test è positivo con 97% di probabilità (falsi negativi 3%);
- *specificità* 90%: se la malattia non è presente, il test è negativo con 90% di probabilità (falsi positivi 10%).

A priori, si stima che lo 0.2% delle persone abbia la malattia.

Un individuo effettua il test. È positivo. Qual è la probabilità che abbia la malattia?

Soluzione 1.2. Scriviamo lo spazio degli eventi elementari:

$$\Omega = \{(m,+),(m,-),(s,+),(s,-)\},$$

dove "m" vuol dire "malato", "s" vuol dire "sano", "+" vuol dire "test positivo", "−" vuol dire "test negativo". Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} M &= \text{"il soggetto è malato"} = \{(m,+),(m,-)\}, \\ S &= \text{"il soggetto è sano"} = \{(s,+),(s,-)\}, \\ P &= \text{"il test è positivo"} = \{(m,+),(s,+)\}, \\ N &= \text{"il soggetto è negativo"} = \{(m,-),(s,-)\}. \end{aligned}$$

Per la malattia sappiamo che

$$\mathbb{P}(M) = 0.2\%, \quad \mathbb{P}(S) = 1 - \mathbb{P}(M) = 1 - 0.2\% = 99.8\%.$$

Le caratteristiche del test sono

$$\mathbb{P}(P|M) = 97\%, \quad \mathbb{P}(N \mid S) = 90\%.$$

Da queste possiamo anche calcolare, usando il fatto che la probabilità condizionata è una misura di probabilità,

$$\mathbb{P}(N|M) = 1 - \mathbb{P}(P \mid M) = 3\%, \quad \mathbb{P}(P \mid S) = 1 - \mathbb{P}(N \mid S) = 10\%.$$

Calcoliamo con la formula di Bayes la probabilità di avere la malattia sapendo che il test è positivo:

$$\mathbb{P}(M \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P \mid S)\mathbb{P}(S)} = \frac{97\% \cdot 0.2\%}{97\% \cdot 0.2\% + 10\% \cdot 99.8\%} \simeq 1.91\%.$$

Esercizio 1.3. È stato chiesto agli studenti e alle studentesse del I anno di Ingegneria Gestionale quale sia il segreto per passare l'esame di Probabilità e Statistica. Le risposte sono state le seguenti:

- primo gruppo: il 50% ha risposto "studiare bene";
- secondo gruppo: il 40% ha risposto "fortuna";
- terzo gruppo: il 10% ha risposto "copiare".

Inoltre:

- $\frac{3}{4}$ del primo gruppo ha superato l'esame al primo appello;
- $\frac{1}{2}$ del secondo gruppo ha superato l'esame al primo appello;
- $\frac{1}{8}$ del terzo gruppo ha superato l'esame al primo appello.

Intervistiamo uno studente scelto a caso. Ci dice che ha superato l'esame al primo appello. Qual è la probabilità che abbia copiato? E la probabilità che abbia studiato bene?

Soluzione 1.3. Definiamo lo spazio degli eventi elementari:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2)\ :\ \omega_1 \in \{g_1, g_2, g_3\}, \omega_2 \in \{1, 0\}\},$$

dove g_1, g_2, g_3 sono i tre gruppi e $1 =$ "esame superato al primo appello", $0 =$ "esame non superato al primo appello". Definiamo gli eventi

$$G_1 = \{(g_1, 1), (g_1, 0)\}, \quad G_2 = \{(g_2, 1), (g_2, 0)\}, \quad G_3 = \{(g_3, 1), (g_3, 0)\},$$

$$S = \{(g_1, 1), (g_2, 1), (g_3, 1)\}.$$

Le ipotesi sono:

$$\mathbb{P}(G_1) = 50\%, \quad \mathbb{P}(G_2) = 40\%, \quad \mathbb{P}(G_3) = 10\%,$$

$$\mathbb{P}(S \mid G_1) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(S \mid G_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(S \mid G_3) = \frac{1}{8}.$$

Utilizziamo la formula di Bayes per calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_3 \mid S) &= \frac{\mathbb{P}(S \mid G_3)\mathbb{P}(G_3)}{\mathbb{P}(S \mid G_1)\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(S \mid G_2)\mathbb{P}(G_2) + \mathbb{P}(S \mid G_3)\mathbb{P}(G_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{8} \cdot 10\%}{\frac{3}{4} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 40\% + \frac{1}{8} \cdot 10\%} \simeq 2.13\%\end{aligned}$$

e per calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_1 \mid S) &= \frac{\mathbb{P}(S \mid G_1)\mathbb{P}(G_1)}{\mathbb{P}(S \mid G_1)\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(S \mid G_2)\mathbb{P}(G_2) + \mathbb{P}(S \mid G_3)\mathbb{P}(G_3)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot 50\%}{\frac{3}{4} \cdot 50\% + \frac{1}{2} \cdot 40\% + \frac{1}{8} \cdot 10\%} \simeq 63.83\%.\end{aligned}$$

Conviene studiare bene.

Esercizio 1.4 (Filtro antispam)**.** Un sistema di filtraggio della posta elettronica classifica i messaggi come "spam" o "legittimi". Il sistema ha le seguenti caratteristiche:

- Tra tutte le email ricevute, il 70% sono messaggi legittimi e il 30% sono spam.
- Se un'email è legittima, il sistema la classifica correttamente con una probabilità del 95%.
- Se un'email è spam, il sistema la classifica correttamente con una probabilità dell'85%.

Per un'email appena arrivata, calcolare:

(a) la probabilità che il sistema la classifichi come spam;

(b) la probabilità che il sistema commetta un errore di classificazione;

(c) la probabilità che l'email sia effettivamente legittima, sapendo che è stata classificata come spam.

Soluzione 1.4. Per rispondere a queste domande, definiamo i seguenti eventi:

$$L := \{\text{l'email è legittima}\}, \quad S := \{\text{l'email è classificata come spam}\},$$

cosicché dal testo ricaviamo

$$\mathbb{P}(L) = 0.7, \quad \mathbb{P}(S \mid L^c) = 0.85, \quad \mathbb{P}(S^c \mid L) = 0.95.$$

Risposta alla domanda a). Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(S)$. Usando la formula delle probabilità totali, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S \mid L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(S \mid L^c)\mathbb{P}(L^c) = (1 - \mathbb{P}(S^c \mid L))\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(S \mid L^c)\mathbb{P}(L^c) \\ &= 0.05 \cdot 0.7 + 0.85 \cdot 0.3 = 0.29.\end{aligned}$$

Risposta alla domanda b). Sia $E := \{\text{si verifica un errore di classificazione}\}$. Possiamo scrivere

$$E = (L \cap S) \cup (L^c \cap S^c),$$

e l'unione è disgiunta. Quindi, per additività e la formula delle probabilità totali, otteniamo

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(L^c \cap S^c) = \mathbb{P}(S \mid L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(S^c \mid L^c)\mathbb{P}(L^c) = 0.05 \cdot 0.7 + 0.15 \cdot 0.3 = 0.08.$$

Risposta alla domanda c). Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(L \mid S)$ Usiamo la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}(L \mid S) = \frac{\mathbb{P}(S \mid L)\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0.05 \cdot 0.7}{0.29} \simeq 0.12,$$

dove il valore del denominatore l'abbiamo ricavato al punto a) tramite la formula delle probabilità totali.

1.2 Schema delle prove ripetute ed indipendenti

Esercizio 1.5. In un'analisi di laboratorio un esperimento ha il 30% di probabilità di dare una risposta positiva. Quante prove occorre fare per avere una probabilità del 90% di avere una risposta positiva?

Soluzione 1.5. Abbiamo $q = 3/10$ la probabilità di ottenere una risposta positiva in una singola prova, e quindi la probabilità di ottenere una risposta negativa in una singola prova è $1 - q = 7/10$.

Vogliamo determinare il numero di prove n tale che la probabilità di avere almeno una risposta positiva in n prove sia almeno $9/10$, cioè:

$$\mathbb{P}\{\text{almeno una positiva in } n \text{ prove}\} \geq \tfrac{9}{10}.$$

La probabilità di avere *almeno una risposta positiva* è il complementare dell'evento *tutte le risposte negative*, per cui:

$$\mathbb{P}\{\text{almeno una positiva in } n \text{ prove}\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{tutte negative in } n \text{ prove}\} = 1 - (7/10)^n.$$

Pertanto, dobbiamo imporre la seguente condizione $1 - (7/10)^n \geq 9/10$ che fornisce il valore numerico $6,45$ circa. Poiché n deve essere un intero, occorre arrotondare per eccesso: sono necessarie 7 prove per avere almeno il 90% di probabilità di ottenere almeno una risposta positiva.

Esercizio 1.6. In un referendum abbiamo n persone con diritto di voto. La probabilità che un individuo vada a votare è di $1/2$, indipendentemente da quello che fanno gli altri. Inoltre, se va a votare, risponderà "si" con probabilità $1/2$, anche questo indipendentemente da quello che fanno gli altri.

(a) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso vada a votare e voti "si"?

(b) Qual è la probabilità che il numero di "si" siano k, con $k \in \{1, \dots, n\}$ dato?

(c) Assumendo che i voti "si" siano k, qual è la probabilità condizionale che i votanti totali siano in numero di m, con $m \in \{k, \dots, n\}$ dato?

Soluzione 1.6. Consideriamo i due eventi

$$A := \{\text{l'individuo va a votare}\} \ \text{ e } \ B := \{\text{l'individuo è favorevole}\}.$$

Sappiamo che $\mathbb{P}(A) = 1/2$ e che $\mathbb{P}(B \mid A) = 1/2$. Dunque l'evento

$$A \cap B := \{\text{l'individuo va a votare e vota si}\}$$

ha probabilità

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, P(B \mid A) = \tfrac{1}{4}.$$

Questo risponde alla prima domanda. Per rispondere alla seconda domanda inquadriamo la situazione in uno schema di n prove indipendenti. Prendiamo come "successo" il fatto che l'individuo vada a votare e voti si. Per il risultato precedente, la probabilità q sulla singola prova è $1/4$. Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento

$$C_k := \{k \text{ individui votano si}\},$$

cioè che k prove hanno successo. Abbiamo

$$\mathbb{P}(C_k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{3^{n-k}}{4^n}.$$

Per rispondere alla terza domanda, sia

$$D_m := \{m \text{ individui vanno a votare}\}.$$

Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(D_m \mid C_k)$. Grazie alla formula di Bayes possiamo scrivere

$$\mathbb{P}(D_m \mid C_k) = \frac{\mathbb{P}(C_k \mid D_m)\mathbb{P}(D_m)}{\mathbb{P}(C_k)}.$$

Usiamo ancora lo schema delle prove indipendenti per trovare $\mathbb{P}(D_m)$ e $\mathbb{P}(C_k \mid D_m)$. Abbiamo

$$\mathbb{P}(D_m) = \binom{n}{m} q^m (1-q)^{n-m} = \binom{n}{m} \frac{1}{2^n}.$$

avendo considerato stavolta come "successo" il fatto che l'individuo vada a votare, e sapendo che la probabilità q sulla singola prova è $1/2$. Inoltre, se ci restringiamo ai soli votanti possiamo considerarli come m prove, e prendere come "successo" il fatto che l'individuo voti "si". Tenuto conto che la probabilità q sulla singola prova è $1/2$, otteniamo

$$\mathbb{P}(C_k \mid D_m) = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k} = \binom{m}{k} \frac{1}{2^m}.$$

Mettiamo infine tutto insieme:

$$\mathbb{P}(D_m \mid C_k) = \frac{\binom{m}{k}\frac{1}{2^m}\binom{n}{m}\frac{1}{2^n}}{\binom{n}{k}\frac{3^{n-k}}{4^n}} = \binom{n-k}{m-k} \frac{2^{n-m}}{3^{n-k}}.$$

Esercizio 1.7. Durante un temporale un fulmine colpisce un grattacielo costituito da n piani. Noto che il sistema elettrico di ogni singolo piano è indipendente da quello degli altri, e che con probabilità q viene danneggiato dal fulmine, con che probabilità l'intero edificio rimane al buio?

Soluzione 1.7. Essendo i piani indipendenti, possiamo inquadrare la situazione come uno schema di n prove indipendenti, con probabilità q sulla singola prova. Prendendo come "successo" il fatto che il fulmine distrugga l'impianto, cerchiamo la probabilità che ci siano n successi su n prove. Detto

$$C_k := \{k \text{ prove hanno successo}\}$$

sappiamo che

$$\mathbb{P}(C_k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$$

Quindi la soluzione è $\mathbb{P}(C_n) = q^n$.

1.3 Variabili aleatorie discrete

Densità binomiale

Esercizio 1.8. Due ditte, che indichiamo con α e β, forniscono guarnizioni ad una fabbrica di automobili. Risulta che hanno rispettivamente $0,3\%$ e $0,8\%$ di pezzi difettosi nella loro produzione. Inoltre la ditta α fornisce il 60% del totale delle guarnizioni acquistate dalla fabbrica, mentre la ditta β il restante 40%. Qual è la probabilità che su 20 pezzi scelti a caso dal magazzino della fabbrica ve ne siano più di 2 difettosi?

Soluzione 1.8. Consideriamo i due eventi

$$A := \{\text{il pezzo è stato fabbricato da } \alpha\} \;\text{ e }\; B := \{\text{il pezzo è stato fabbricato da } \beta\}.$$

Sappiamno che $\mathbb{P}(A) = 6/10$ mentre $\mathbb{P}(B) = 4/10$. Sia $D := \{\text{il pezzo scelto è difettoso}\}$. Sappiamo che

$$\mathbb{P}(D \mid A) = 3/1000 \;\text{ e }\; \mathbb{P}(D \mid B) = 8/1000$$

da cui, per la formula delle probabilità totali (nella versione dicotomica),

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \mid B)\mathbb{P}(B) = 5/1000.$$

Sia ora X la v.a. che conta il numero di pezzi difettosi. Possiamo vedere la scelta dei pezzi come uno schema di 20 prove indipendenti, con probabilità di successo (nel senso di pezzo difettoso) sulla singola prova pari a $q = 5/1000$. Possiamo quindi assumere che X abbia una densità binomiale $\mathrm{B}(20, 1/200)$. L'evento di cui ci viene richiesta la probabilità è $\{X > 2\}$. Abbiamo

$$\mathbb{P}\{X > 2\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = \frac{134}{10^6}.$$

Esercizio 1.9. Nella trasmissione di un'immagine il colore di ogni pixel è descritto da un vettore a 8 bits $(a_1, \dots, a_8)$, dove gli a_k possono valere 0 oppure 1. Durante la trsmissione di ogni bit si può avere un errore con probabilità $q = 2 \cdot 10^{-4}$, indipendente da un bit all'altro.

(a) Qual è la probabilità che un singolo pixel venga trasmesso correttamente?

(b) Per un'immagine composta da $512x256 = 131.072$ pixels, quale è la probabilità che sia perfetta, cioè senza pixels distorti?

Soluzione 1.9. Possiamo descrivere la situazione del singolo pixel attraverso uno schema di $n = 8$ prove indipendenti, assegnando il successo nella singola prova quando il bit è trasmesso *erroneamente*. Il successo ha probabilità $q = 2 \cdot 10^{-4}$. L'evento "il singolo pixel è trasmesso correttamente" si traduce dunque in "nessuna delle n prove ha successo". Sappiamo che la sua probabilità vale

$$(1-q)^n = (1 - 2 \cdot 10^{-4})^8 \approx 0,9984.$$

. Questo risponde alla prima domanda.

Per rispondere alla seconda domanda descriviamo la situazione dell'immagine come uno schema di $\tilde{n} = 131.072$ prove indipendenti, assegnando il successo nella singola prova quando il pixel è *distorto*. Per quanto visto sopra, Il successo ha probabilità $\tilde{q} = 1 - (1 - 2 \cdot 10^{-4})^8$. Detto X il numero di pixel distorti, questo ha una densità binomiale $\mathrm{B}(\tilde{n}, \tilde{q})$. L'evento a cui siamo interessati è $\{X = 0\}$. Si ha

$$\mathbb{P}\{X = 0\} = (1 - \tilde{q})^{\tilde{n}} = (1 - 2 \cdot 10^{-4})^{1048576} \approx 0.$$

Esercizio 1.10 (Warning!)**.** Un test si compone di n domande, ciascuna con k risposte (di cui solo una giusta). Qual è la probabilità che uno studente, rispondendo a caso, ottenga almeno j risposte esatte? Fornire i risultati numerici nel caso $n = 10$, $k = 4$ e $j = 6$.

Soluzione 1.10. Possiamo vedere le domande come uno schema di n prove indipendenti. Rispondendo a caso la probabilità di successo sulla singola prova è $q = 1/k$. Sia X il numero di successi. E' una variabile aleatoria con densità binomiale $\mathrm{B}(n, 1/k)$. L'evento che dobbiamo esaminare è $\{X \geq j\}$ ed ha probabilità

$$\mathbb{P}\{X \geq j\} = 1 - \mathbb{P}\{X < j\} = 1 - \sum_{i=1}^{j-1} \binom{n}{i} \frac{(k-1)^{n-i}}{k^n}.$$

Nel caso specifico richiesto abbiamo

$$\mathbb{P}\{X \geq 6\} = 1 - \sum_{i=1}^{5} \binom{10}{i} \frac{3^{10-i}}{4^1 0} \approx 0,0197.$$

Esplicitamente, su un esame con 10 domande, aventi ognuna 4 possibili risposte, e con idoneità che si ottiene con almeno 6 risposte esatte, la probabilità di passare l'esame rispondendo a caso è meno del 2%.

Densità ipergeometrica

Esercizio 1.11. Da un lotto di 100 mascherine ne vengono prelevate 5 per un controllo di qualità. Sappiamo che 10 esemplari del lotto sono difettosi. Sia X il numero di mascherine difettose contenute nel campione. Determinare la densità di X. Stabilire inoltre la probabilità che le difettose estratte siano non più di 2.

Soluzione 1.11. Pensiamola in questo modo: stiamo estraendo $n = 5$ mascherine da un'urna che ne contiene $N = 100$. Tra queste 100 ce ne sono $M = 10$ che sono difettose=nere (e $N - M = 90$ che sono a norma=bianche). X è il numero di mascherine difettose che estraggo. Quindi X è una variabile ipergeometrica con densità

$$q(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{n-k}}{\binom{100}{5}} \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

e nulla altrove.

L'evento "non più di 2 sono difettose" si formalizza con $\{X \leq 2\}$, e quindi la probabilità richiesta è (con un po' di conti)

$$\mathbb{P}\{X \leq 2\} = q(0) + q(1) + q(2) \approx 0,99.$$

Densità geometrica

Esercizio 1.12. Un dato equilibrato viene lanciato ripetutamente fino a che non esce la faccia con il 6 per la prima volta. Dato che il 6 non appare al primo lancio, qual è la probabilità che siano necessari più di 4 lanci?

Soluzione 1.12. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci necessari affinché esca il primo 6. Poiché il dado è equilibrato, X segue una distribuzione geometrica con parametro $q = 1/6$.

In simboli, l'evento "non appare 6 al primo lancio" è $\{X > 1\}$. Vogliamo calcolare la probabilità che siano necessari più di 4 lanci, sapendo che non è uscito 6 al primo lancio, cioè

$$\mathbb{P}\{X > 4 \mid X > 1\}.$$

Essendoci assenza di memoria, il tutto si riduce a calcolare (ricordando la formula vista durante la dimostrazione dell'assenza di memoria)

$$\mathbb{P}\{X > 3\} = (1 - q)^3 = \tfrac{125}{216} \approx 0,58.$$

Densità di Poisson

Esercizio 1.13. In un corposo manoscritto (BOS2025) solo il $13,5\%$ delle pagine contengono errori tipografici. Se assumiamo che il numero di errori per pagina sia una variabile aleatoria di tipo Poisson, trovare la percentuale di pagine che hanno esattamente un errore.

Soluzione 1.13. Sia X la v.a. che indica il numero di errori per pagina. Volendo utilizzare la densità di Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$, la prima cosa da fare è stabilire il valore di λ. Osserviamo che da

$$\mathrm{P}(\lambda)(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ per } k = 0, 1, 2, \ldots$$

abbiamo $\mathbb{P}\{X = 0\} = \mathrm{P}(\lambda)(0) = e^{-\lambda}$. D'altra parte, $\mathbb{P}\{X = 0\} = 1 - 0,135 = 0,865$. Ne deduciamo che $\lambda \approx 0,145$.

Possiamo calcolare ora la probabilità richiesta:

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = \mathrm{P}(\lambda)(1) = \lambda e^{-\lambda} \approx 0,125,$$

cioè il $12,5\%$.

Esercizio 1.14. Tra le ore 14 e le ore 16, in media ogni minuto, arrivano ad un centralino $2,5$ chiamate telefoniche. Trovare la probabilità che in un minuto arrivino

(a) zero chiamate;

(b) due chiamate;

(c) quattro chiamate o meno;

(d) più di sei chiamate.

Soluzione 1.14. Possiamo interpretare la situazione come uno schema di n prove ripetute costituite dalle persone che potrebbero chiamare, e con successo sulla singola prova che si verifica se la persona effettivamente chiama. Sia X il numero di chiamate in arrivo al minuto. Osserviamo che il numero di persone che potrebbero fare una chiamata è molto grande, mentre la probabilità q che una ciascuna chiami è molto piccola. Questo suggerisce di utilizzare per X una densità di tipo Poisson $\mathrm{P}(\lambda)$, invece che la binomiale $\mathrm{B}(n, q)$. Come argomentato a lezione il prodotto nq è la quantità che prendiamo come valore λ. In questo caso rappresenta il numero di chiamate in arrivo (numero di persone per la probabilità che la singola persona chiami) e vale $5/2$. Osserviamo anche che il fatto di trovarci tra le ore 14 e le ore 16 è irrilevente, visto che cerchiamo la probabilità riguardo alle chiamate in media al minuto. Ricordando come è fatta la densità di Poisson, abbiamo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{X = 0\} = e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,0821 \\
&\mathbb{P}\{X = 2\} = \frac{(\frac{5}{2})^2}{2} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,2565 \\
&\mathbb{P}\{X \leq 4\} = \sum_{k=0}^{4} \frac{(\frac{5}{2})^k}{k!} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,891 \\
&\mathbb{P}\{X > 6\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leq 6\} = 1 - \sum_{k=0}^{6} \frac{(\frac{5}{2})^k}{k!} e^{-\frac{5}{2}} \approx 0,0142.
\end{aligned}
$$