Foglio 3: risoluzione

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2} \quad \text{su } \mathbb{R}$$

1) convergenza puntuale su $\mathbb{R}$:

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$;

2) convergenza uniforme su $\mathbb{R}$:

- per ogni $n \geq 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{1+nx^2} = g_n(x)$ su $\mathbb{R}$:

  g_n pari, $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \frac{1}{n}$, $g_n'(x) = \frac{2x}{(1+nx^2)^2} > 0$ se $x > 0$;

- $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} g_n(x) = \frac{1}{n} \to 0$, se $n \to +\infty$, e

  quindi $(f_n)_n$ converge uniformemente a 0 su $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2} \quad \text{su } \mathbb{R}$$

1) convergenza puntuale su $\mathbb{R}$:

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x = f(x)$;

2) convergenza uniforme su $\mathbb{R}$:

- per ogni $n \geq 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x^3|}{n+x^2} = g_n(x)$ su $\mathbb{R}$:

  g_n pari, $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = +\infty$;

- $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = +\infty \not\to 0$, se $n \to +\infty$, e

  quindi $(f_n)_n$ <u>non</u> converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f_n(x) = \operatorname{arctg}(x+n) \quad \text{su} \quad [0,+\infty[}$$

1) convergenza puntuale su $[0,+\infty[$:

per ogni $x \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} = f(x)$;

2) convergenza uniforme su $[0,+\infty[$:

- per ogni $n \geq 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x+n) = g_n(x)$ su $[0,+\infty[$:

  g_n decrescente, $\sup\limits_{x\geq 0} g_n(x) = g_n(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n$;

- $\sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0} g_n(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \to 0$, se $n\to+\infty$, e

  quindi $(f_n)_n$ converge uniformemente a $\frac{\pi}{2}$ su $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \quad \text{su} \quad [1,+\infty[}$$

1) convergenza puntuale su $[1,+\infty[$:

per ogni $x \geq 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n$ converge, essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{e^x} \in]0,1[$;

2) convergenza uniforme su $[1,+\infty[$:

per ogni $n \geq 1$, $\max\limits_{x\geq 1} |e^{-nx}| = \left(\frac{1}{e}\right)^n = M_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge,

quindi l'M-test di Weierstrass implica che $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ converge uniformemente su $[1,+\infty[$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2+n} \quad \text{su } \mathbb{R}}$$

1) convergenza puntuale su $\mathbb{R}$:

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2+n}$ converge per il criterio di Leibniz, poiché, per ogni $n \geq 1$, $\frac{1}{x^2+n} > 0$, $\frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{x^2+n}$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$;

2) convergenza uniforme su $\mathbb{R}$:

$\frac{1}{x^2+n}$ converge uniformemente a 0 su $\mathbb{R}$, poiché $\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{x^2+n} = \frac{1}{n}$, e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{x^2+n}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ per il criterio di Leibniz.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad \text{su } [0,\pi]}$$

1) convergenza puntuale su $[0,\pi]$:

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ converge per il criterio del confronto, poiché, per ogni n, $0 \leq 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \leq 2^n \frac{x}{3^n} = x \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} x \left(\frac{2}{3}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione $\frac{2}{3} \in \,]0,1[$;

2) convergenza uniforme su $[0,\pi]$:

per ogni $n \geq 1$, $\max_{x \in [0,\pi]} \left| 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \right| \leq \max_{x \in [0,\pi]} \left| 2^n \frac{x}{3^n} \right| = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n = M_n$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ converge, quindi l'M-test di Weierstrass implica che $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ converge uniformemente su $[0,\pi]$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}(x-1)^n}$$

1) raggio di convergenza R :

se $x \neq 1$, $\left|\frac{2^{n+1}}{n+2}(x-1)^{n+1}\right| \left|\frac{n+1}{2^n}\frac{1}{(x-1)^n}\right| = 2\,\frac{n+1}{n+2}\,|x| \to 2|x|$, se $n \to +\infty$,

e quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge se $|x|<\frac{1}{2}$ e non converge se $|x|>\frac{1}{2}$.

Dunque $R=\frac{1}{2}$ e $I_R = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

2) insieme di convergenza I :

se $x=\frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge per il criterio di Leibniz;

se $x=\frac{3}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Dunque $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^{2n}}}$$

1) raggio di convergenza R :

poiché $\sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{n^{2n}}\right|} = \frac{|x+1|}{n^2} \to 0$, se $n \to +\infty$, il criterio della radice implica che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dunque $R=+\infty$ e $I_R = \mathbb{R}$.

2) insieme di convergenza I :

$I = \mathbb{R}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^n}$$

1) raggio di convergenza R:

poiché $\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{4^n}{n} x^n\right|} = 4\, n^{\frac{1}{n}} |x| = 4 e^{\frac{1}{n}\log n} |x| \to 4|x|$, se $n \to +\infty$,

il criterio della radice implica che la serie converge se

$|x| < \frac{1}{4}$ e non converge se $|x| > \frac{1}{4}$.

Dunque $R = \frac{1}{4}$ e $I_R =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

2) insieme di convergenza I:

se $x = -\frac{1}{4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge,

se $x = \frac{1}{4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1) \frac{4^n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ converge per il criterio

di Leibniz.

Dunque $I =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!} (x-e)^n}$$

1) raggio di convergenza R:

se $x \neq e$, $\left|\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} (x-e)^{n+1}\right| \left|\frac{n!}{(2n)!} \frac{1}{(x-e)^n}\right| = 2(2n+1)|x-e| \to +\infty$,

se $n \to +\infty$, e quindi, per il criterio del rapporto, la

serie non converge.

Dunque $R = 0$.

2) insieme di convergenza I:

$I = \{e\}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n+1}}$$

1) raggio di convergenza R:

se $x \neq 0$, $\dfrac{|(n+1)\, x^{n+1}|}{|n x^n|} = \dfrac{n+1}{n}|x| \to |x|$, se $n \to +\infty$, e

quindi il criterio del rapporto implica che la serie converge

se $|x| < 1$ e non converge se $|x| > 1$.

Dunque $R = 1$ e $I_R =]-1,1[$.

2) insieme di convergenza I:

se $x = -1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$ non converge, poiché $(-1)^n n \not\to 0$, se $n \to +\infty$,

se $x = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ diverge.

Dunque $I =]-1,1[$.

3) somma:

se $0 < |x| < 1$, per il teorema di derivazione, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} x^2 = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1} = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx} x^n\right)$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right) = x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x^2 \frac{1}{(1-x)^2},$$

poiché

$$x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} - 1.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+3}}$$

1) raggio di convergenza R:

se $x \neq 0$, $\left|\frac{x^{n+1}}{n+4}\right|\left|\frac{n+3}{x^n}\right| = \frac{n+3}{n+4}|x| \longrightarrow |x|$, se $n \to +\infty$, e

quindi il criterio del rapporto implica che la serie converge se $|x|<1$ e non converge se $|x|>1$.

Dunque $R = 1$ e $I_R =]-1,1[$.

2) insieme di convergenza I:

se $x=-1$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+3}$ converge per il criterio di Leibniz,

se $x=1$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+3}$ diverge.

Dunque $I = [-1,1[$.

3) somma:

se $0<|x|<1$, per il teorema di integrazione,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3}\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x t^{n+2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x^3}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+2}\right)dt = \frac{1}{x^3}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}-1-t\right)dt$$

$$= \frac{-\log(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3},$$

poiché $\qquad t^2+t^3+\ldots+t^{n+2}+\ldots = \frac{1}{1-t}-1-t.$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n}$$

1) raggio di convergenza R:

poiché $\sqrt[n]{\left|\frac{n+2}{n+1} x^n\right|} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} |x| \longrightarrow |x|$, se $n \to +\infty$, e quindi il criterio della radice implica che la serie converge se $|x| < 1$ e non converge se $|x| > 1$.

Dunque $R = 1$ e $I_R =]-1,1[$.

2) insieme di convergenza I:

se $x = -1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$ non converge, poiché $(-1)^n \frac{n+2}{n+1} \not\to 0$, se $n \to +\infty$,

se $x = 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1}$ diverge.

Dunque $I =]-1,1[$.

3) somma:

se $0 < |x| < 1$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n,$$

dove $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

e, per il teorema di integrazione,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n\right) dt$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \frac{-\log(1-x)}{x}$$

Dunque, se $0 < |x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{\log(1-x)}{x}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}}$$

1) raggio di convergenza R:

se $x \neq 0$, $\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)!}\right|\left|\frac{n!}{x^{2n+1}}\right| = \frac{x^2}{n+1} \to 0$, se $n \to +\infty$, e quindi il criterio del rapporto implica che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dunque $R = +\infty$ e $I_R = \mathbb{R}$.

2) insieme di convergenza I:

$I = \mathbb{R}$.

3) somma:

se $x \neq 0$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} x = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2},$$

poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = e^t$ in $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}}$$

Poiché $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ in $\mathbb{R}$, si ha, per ogni $x \neq 0$,

$$\frac{\sin x - x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots - x\right)$$

$$= -\frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

L'insieme di convergenza è $I = \mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}}$$

Poiché $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ in $\mathbb{R}$, si ha $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ in $\mathbb{R}$

e quindi, per ogni $x \neq 0$,

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots - 1\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n-2}}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{n!} .$$

L'insieme di convergenza è $I = \mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = \log(1+x^2)}$$

Poiché $\log(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ in $]-1,1[$, si ha

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+2} \quad \text{in }]-1,1[.$$

L'insieme di convergenza è $I = [-1,1]$, poiché

se $x = \pm 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ converge per il criterio di Leibniz.

$$\boxed{\int_0^1 e^{-x^3}\,dx}$$

Poiché $\quad e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ in $\mathbb{R}$, si ha $\; e^{-x^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$ in $\mathbb{R}$

e quindi, per il teorema di integrazione,

$$\int_0^1 e^{-x^3}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{3n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)n!},$$

dove la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)n!}$ verifica le ipotesi del criterio di Leibniz.

Si cerca N tale che la ridotta $s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)n!}$ approssimi $s = \int_0^1 e^{-x^3}\,dx$ a meno di 10^{-2}.

Poiché

$$|s - s_N| \leq \frac{1}{(3N+1)N!},$$

basta che

$$\frac{1}{(3N+1)N!} < \frac{1}{100} \iff (3N+1)N! > 100.$$

Se $N=4$, si ha $\quad 13 \cdot 24 > 100$.

$$\boxed{\int_0^1 \cos(x^2)\,dx}$$

Poiché $\; \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ in $\mathbb{R}$, si ha $\; \cos(x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ in $\mathbb{R}$

e quindi, per il teorema di integrazione,

$$\int_0^1 \cos(x^2)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(2n)!},$$

dove la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(2n)!}$ verifica le ipotesi del criterio di Leibniz.

Si cerca N tale che la ridotta $s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{(4n+1)(2n)!}$ approssimi $s = \int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ a meno di 10^{-2}.

Poiché

$$|s - s_N| \le \frac{1}{(4N+1)(2N)!}$$

basta che $\frac{1}{(4N+1)(2N)!} < \frac{1}{100} \iff (4N+1)(2N)! > 100.$

Se $N=2$, si ha $9 \cdot 24 > 100$.

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1+x)}{x}\,dx}$$

Poiché $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ in $]-1,1[$, si ha,

se $0<|x|<1$, $\frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ e quindi,

per il teorema di integrazione,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \frac{1}{2^{n+1}}$$

dove la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ verifica le ipotesi del criterio di Leibniz.

Si cerca N tale che la ridotta $s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$ approssimi $s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log(1+x)}{x} dx$ a meno di 10^{-2}.

Poiché

$$|s - s_N| \le \frac{1}{(N+1)^2 2^{N+1}},$$

basta che $\frac{1}{(N+1)^2 2^{N+1}} < \frac{1}{100} \iff (N+1)^2 2^{N+1} > 100$

Se $N=3$, si ha $16 \cdot 16 > 100$.