Esercizi su topologia e funzioni

- Posto $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y < x\} \cup \{(x,y)^T : y = 0\}$, determinare:

  $\operatorname{cl} E$, $\operatorname{int} E$, $\operatorname{fr} E$, $\operatorname{cl}(\operatorname{int} E)$, $\operatorname{int}(\operatorname{fr} E)$, $\operatorname{cl}(\operatorname{fr} E)$, $\operatorname{fr}(\operatorname{fr} E)$.

- Descrivere geometricamente le sfere $B[\underline{0}, 1]$ in $(\mathbb{R}^2, d_p)$ con $1 \le p \le \infty$.

- Descrivere le sfere $B(f, r)$ in $(C^0([a,b]), d_\infty)$ per mezzo dei grafici delle funzioni.

- Tracciare gli insiemi di livello di:

  $f(x,y) = x - y$; $\quad f(x,y) = xy$; $\quad f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$;

  $f(x,y) = e^{y-x^2}$; $\quad f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 1$.

- Provare, usando la definizione di limite, che:

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{x+1}{x^2+y^2+1} = 1;$$

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{1+x^2}{x^2+y^2} = +\infty;$$

$$\lim_{(x,y)^T \to (0,0)^T} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ non esiste (studiare le restrizioni alle rette $y = mx$).

- Determinare il dominio e stabilire i segni di

  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$; $\quad f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$;

  $f(x,y) = \log(x+2)\sqrt{x^2-2x+y^2-2}$; $\quad f(x,y,z) = \sqrt{xy} + \sqrt{z-1}$;

  $f(x,y,z) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$; $\quad f(x,y,z) = z\log(1-x^2-y^2)$.