Analisi 2 per il CdS in Intelligenza Artificiale & Data Analytics
22 Giugno 2022

1. Poiché le $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono crescenti si ha che

$$f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1) \qquad \forall x \in [0,1], \ \forall n$$

Di conseguenza vale

$$|f_n(x)| \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \qquad \forall x \in [0,1], \ \forall n$$

Dunque $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| \leq |f_n(0)| + |f_n(1)| \xrightarrow[\text{per } n \to +\infty]{} 0$

e quindi si ha convergenza uniforme.

2. Osserviamo che

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(2^j x)}{3^j} \quad \text{sono funzioni continue in } \mathbb{R}$$

Inoltre la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2^j x)}{3^j}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ in quanto

$\left| \frac{\sin(2^j x)}{3^j} \right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^j$ ed essendo la serie numerica $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j$ convergente in virtù dell' M-test si ha che $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2^j x)}{3^j}$.

La funzione $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2^j x)}{3^j}$ è dunque ben definita ed è continua in quanto limite uniforme di funzioni F_n continue.

3. Osserviamo che $f(0,1) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,1) + t(1,0)) - f(0,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2(1-1)} + 1 - 1}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,1) + t(0,1)) - f(0,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot t} + 1 - 1}{t} = 0$$

Calcoliamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1), (h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2 k} + 1 - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Questo limite non esiste, in particolare non è zero.
Basta ad esempio considerarlo lungo la curva $h=k$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}\,|h|} \leftarrow \text{non esiste.}$$

4. La funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$ e Σ è un insieme compatto di $\mathbb{R}^2$ dunque per il Teorema di Weierstrass esistono

$$\max_\Sigma f \quad , \quad \min_\Sigma f$$

Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare max e min assoluti. Σ è una curva regolare in forma impl.

$\nabla\varphi(x,y) = (0,0) \iff x=1, y=0$ ma $(1,0) \notin \Sigma$

$$\nabla f(x,y) = \left(-2x\, e^{-x^2-y^2}, -2y\, e^{-x^2-y^2}\right)$$

$$\nabla \varphi(x,y) = (2(x-1), 8y)$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x\, e^{-x^2-y^2} = 2\lambda(x-1) & (a) \\ -2y\, e^{-x^2-y^2} = 8\lambda y & (b) \\ (x-1)^2 + 4y^2 = 4 & (c) \end{cases}$$

- Se $y \neq 0$ allora $\overset{(b)}{\Rightarrow}$ $-e^{-x^2-y^2} = 4\lambda \Rightarrow \lambda \neq 0$

$$+2x4\lambda \overset{(a)}{=} 2\lambda(x-1) \Rightarrow 4x = x-1 \Rightarrow x = -1/3$$

$$\overset{(c)}{\Rightarrow} \left(-1/3, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \wedge \left(-1/3, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

- Se $y=0 \overset{(c)}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x=3 \quad x=-1$

$$(3,0), \ (-1,0)$$

Valutiamo f nei punti trovati

$$f(-1,0) = e^{-1} \qquad f(3,0) = e^{-9} \qquad f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = e^{-2/3}$$

$f(3,0)$: $\min_\Sigma f$

$f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$: $\max_\Sigma f$

5. i) $f(y) = 4 - y^2$ dunque gli equilibri sono $y = -2$ e $y = 2$

Essendo $y(0) = 0$ ed essendo verificate le ipotesi del Teorema di C-L si ha che $-2 < y(x) < 2$

ii) Poniamo $z(x) = -y(-x)$ Vediamo che

1. $z(0) = -y(0) = 0$
2. $z'(x) = y'(-x) = 4 - [y(-x)]^2 = 4 - [-y(-x)]^2 = 4 - z^2(x)$

Dunque anche z è soluzione del P.C. e dunque per l'unicità del P.C. si ha che $y(x) = z(x) = -y(-x)$

Dunque y è dispari

iii) Poiché $-2 < y(x) < 2$ si ha che $4 - y^2(x) > 0$ e dunque $y' > 0$

Quindi y è crescente

iv) La y è crescente e limitata dunque i limiti esistono.

Si ha che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \ell < 2$ ed inoltre esiste anche

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} 4 - (y(x))^2. \quad (*)$$

Dunque per il teorema dell'asintoto si ha che $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0$ e dunque da $(*)$ deve essere

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$$

Per disparità si ha che $\lim_{x \to -\infty} y(x) = -2$

6. Consideriamo l'equazione caratteristica associata

$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$ $\quad \lambda = -1/2$ con molteplicità doppia

Dunque $y(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 x \cdot e^{-x/2}$

Imponiamo $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Imponiamo $y'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

Di conseguenza la soluzione cercata è

$y(x) = x \cdot e^{-x/2}$