SOLUZIONI SCRITTO Analisi Matematica 2
Intelligenza Artificiale & Data Analytics
09 Settembre 2022

1. Osserviamo che

$$a_n = \frac{\sqrt{n} + 6\arctan(n^2)}{n^4 + 13} = \frac{\sqrt{n}\overbrace{\left(1 + \frac{6\arctan(n^2)}{\sqrt{n}}\right)}^{\nearrow 1}}{n^4 \underbrace{\left(1 + \frac{13}{n^4}\right)}_{\searrow 1}} \to 0$$

Dunque applicando il criterio dell'ordine di infinitesimo con $p = 7/2 > 1$ e osservando che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n^{7/2} = 1$$

deduciamo che la serie converge.

2. $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{7x^2 + 2y^4}$$

- $y = 0$ $\quad f(x,0) = \frac{0}{7x^2} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

- Lungo la curva $x = y^2$ (che rappresenta un altro particolare avvicinamento al punto $(0,0)$) si ha che

$$\lim_{y \to 0} f(y^2, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \cdot y^2}{7y^4 + 2y^4} = \frac{1}{9}$$

Poiché $\frac{1}{9} \neq 0$ deduciamo che il limite non esiste.

3. • Troviamo i punti critici di f

$$f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y}(x^2-2y^2) + e^{x-y}\cdot 2x \,,\, -e^{x-y}(x^2-2y^2) - e^{x-y}\cdot 4y \right)$$

$$= \left(e^{x-y}(x^2-2y^2+2x) \,,\, e^{x-y}(2y^2-x^2-4y) \right)$$

sommando membro a membro

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^2-2y^2+2x=0 \\ 2y^2-x^2-4y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y \\ 2y^2-x^2-4y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y^2-4y^2-4y=0 \\ x=2y \end{cases} \iff \begin{cases} -2y^2-4y = -y(y+4)=0 \\ x=2y \end{cases}$$

$$\iff (0,0) \lor (-4,-2)$$

• Calcoliamo la matrice Hessiana

$$\partial^2_x f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2)$$

$$\partial^2_{xy} f(x,y) = \partial^2_{y,x} f(x,y) = e^{x-y}(2y^2-x^2-2x-4y)$$

$$\partial^2_y f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \det Hf < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punto di sella}$$

$$Hf(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ +8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \det Hf > 0 \\ a_{11} = -6e^{-2} < 0 \end{matrix} \Rightarrow (-4,-2) \text{ punto di max locale}$$

4. $y' = \frac{1}{x}y + x^2 + 1 \qquad I =]-\infty, 0[$

$a(x) = 1/x \qquad A(x) = \ln(-x) \qquad b(x) = x^2+1 \qquad x_0 = -1$ (ad esempio)

$$y = ce^{A(x)} + \int_{-1}^{x} e^{A(x)-A(t)} b(t)\,dt = ce^{\ln(-x)} + \int_{-1}^{x} e^{\ln(-x)+\ln(1/t)}(t^2+1)\,dt$$

$$= c(-x) + \int_{-1}^{x} x\cdot\left(\frac{1}{t}\right)(t^2+1)\,dt = c(-x) + x\cdot\left[\frac{t^2}{2} + \ln(-t)\right]_{-1}^{x} =$$

$$= c(-x) + x\left[\frac{x^2}{2} + \ln(-x) - 1/2 + 0\right] = -cx + x\left[\frac{x^2}{2} + \ln(-x) - \frac{1}{2}\right]$$