Analisi 2 per il CdS in IADA

A.A. 2023/2024

1. Applichiamo il criterio dell'ordine di infinito con $p = 1$ $\left(a_n = n \cdot \sin\left(1/n^2\right) > 0 \ , \forall n \geq 1\right)$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot n = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot n =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(1/n^2\right)}{1/n^2} = 1$$

Di conseguenza possiamo dedurre che la serie diverge a $+\infty$.

2. Osserviamo che lungo le direzioni $y = mx$

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{m x^2}{(1 + m^2) \cdot x^2} = \frac{m}{(1 + m^2)}$$

poiché il valore del limite lungo le rette dipende da m deduciamo che il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste

3. Passando in coordinate polari si ha che

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = \rho^4 \cos^4\theta + \rho^4 \sin^4\theta - 4\rho^2 \cos\theta \sin\theta$$

da cui

$$f(x,y) = \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\rho^2 \cos\theta \sin\theta \geq$$

$$\geq \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 4\rho^2 |\cos\theta| |\sin\theta|$$

Osserviamo che chiamando $t = \cos^2\vartheta$ si ha che

$$\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta = t^2 + (1-t)^2 = 2t^2 - 2t + 1 > A > 0 \quad \forall t$$

Di conseguenza si ha che

$$f(x,y) \geq A \cdot \rho^4 - 4\rho^2 \xrightarrow[\text{per } \rho \to +\infty]{} +\infty$$

Dunque abbiamo provato che la f è coercitiva.

4 Procediamo con il metodo di separazione delle variabili

$$y'(x) = e^{x - y(x)} = e^x \cdot e^{-y(x)} \quad , \quad y(0) = a \geq 0$$

Dunque

$$y' \cdot e^y = e^x$$

$$\int_a^y dt\, e^t = \int_0^x e^s \cdot ds$$

$$e^y - e^a = e^x - e^0 \quad , \text{ da cui}$$

$$e^y = e^x + e^a - 1$$

$$y(x) = \ln(\underbrace{e^x + e^a - 1}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}}) \quad , \quad \text{dom } y = \mathbb{R}$$