Scritto di Analisi 2 - CdS AIDA

13/07/2022

1. a) Convergenza puntuale su $\mathbb{R}$.

Ad x fissato si ha che $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x^2} = \dfrac{\cancel{n}x^2}{\cancel{n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} \longrightarrow x^2 = f(x)$ per $n \to +\infty$

b) Convergenza uniforme su $\mathbb{R}$

Stimiamo $|f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{nx^2}{n+x^2} - x^2 \right| = \left| \dfrac{nx^2 - nx^2 - x^4}{n+x^2} \right| = \dfrac{x^4}{n+x^2}$

Osservo che $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{n+x^2} = +\infty$ e dunque

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{x^4}{n+x^2} = +\infty \not\to 0$ per $n \to +\infty$

Dunque f_n <u>non</u> converge uniform. ad f.

2. La funzione è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dunque gli eventuali punti di estremo (libero) relativo sono dei punti critici.

Dunque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8x$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y$

Poniamo $\begin{cases} 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 0 \\ 3y^2 - 6y = 3y(y-2) = 0 \end{cases}$

I punti critici sono $(0,0)$; $(0,2)$. $(\pm\sqrt{2}, 0)$ $\quad (\pm\sqrt{2}, 2)$

Calcoliamo la matrice Hessiana

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det Hf(0,0) > 0$ e $a_{11} = -8 < 0$ $\Rightarrow (0,0)$ punto di max locale

$Hf(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det Hf(0,2) < 0 \Rightarrow (0,2)$ punto di sella

$Hf(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det Hf(\pm\sqrt{2}, 0) < 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{2}, 0)$ punto di sella

$Hf(\pm\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det Hf(\pm\sqrt{2}, 2) > 0$, $a_{11} = 16 > 0$ $\Rightarrow (\pm\sqrt{2}, 2)$ punti di minimo locale

Poiché la funzione $g(x,y) = (\varphi \circ f)(x,y)$ con $\varphi(t) = e^t$ strettam. crescente, allora i punti d'estremo di f sono tutti e soli i punti di estremo di g.

3. Consideriamo $c(x) = e^x = P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $\alpha = 1, \beta = 0$ $P(x)$ polinomio di grado 0

$\xi = \alpha + i\beta = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$

Allora (siamo nel caso 1) cerco soluzioni del tipo $\bar{y} = a \cdot e^x$

e trovo $\bar{y}' = a e^x$ $\bar{y}'' = a e^x$ Imponendo $a e^x + a e^x - 3a e^x = e^x$

Trovo $a = -1$. Dunque la soluzione generale è

$$y = \bar{y}(x) + z(x) = -e^x + c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x}$$

$$\left[\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \begin{cases} (-1+\sqrt{13})/2 \\ (-1-\sqrt{13})/2 \end{cases} \right]$$

Imponiamo le condizioni iniziali

$y(0) = -1$ $\quad \cancel{-1} + c_1 + c_2 = \cancel{-1}$ $\quad c_1 = -c_2$

$$y'(x) = -e^x + c_1 \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x} + c_2 \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x}$$

$$y'(0) = \cancel{-1} + c_1\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right) + c_2\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) = \cancel{-1}$$

$c_2 = -c_1$

$$\cancel{-c_1} + \frac{\sqrt{13}}{2} c_1 \cancel{+ c_1} + c_1 \frac{\sqrt{13}}{2} = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$$

Dunque la soluzione cercata è $y(x) = -e^x$

4. $\int_E (y + 2x)\,dx\,dy$ $\quad E = \{(x,y) : \underbrace{x^2 - 2y + y^2 \le 0}\}$

$\hookrightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 \le 1$

Passiamo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta + 1 \end{cases} \qquad K = \{(\rho,\vartheta) : 0 \le \rho \le 1, \ -\pi \le \vartheta \le \pi\}$$

Jacobiano

$$\iint_E (y+2x)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} (\rho\sin\vartheta + 1 + 2\rho\cos\vartheta) \cdot \rho \, d\rho\, d\vartheta =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\sin\vartheta + 2\frac{\rho^3}{3}\cos\vartheta\right]_0^1 d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin\vartheta + \frac{2}{3}\cos\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{1}{3}\cos\vartheta\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{3}\sin\vartheta\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \pi - \frac{1}{3}\cos(\pi) + \frac{1}{3}\cos(-\pi) + \frac{2}{3}\sin(\pi) - \frac{2}{3}\sin(-\pi) = \pi$$

✓