

Analisi 2 per il CdS in Intelligenza Artificiale & Data Analytics

A.A. 2021/2022

Scritto in presenza - 22 Giugno 2022

1. Sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni crescenti su $[0, 1]$ tale che $f_n \rightarrow 0$ puntualmente in $[0, 1]$. Stabilire se f_n converge uniformemente in $[0, 1]$.

2. Dimostrare che la serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^j x)}{3^j} \quad (0.1)$$

definisce una funzione continua su \mathbb{R} .

3. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} \quad (0.2)$$

si verifichi che non è differenziabile in $(0, 1)$.

4. Sia $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Trovare, se esistono, i massimi e minimi assoluti di f su Σ .

5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4 - y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sapendo che la soluzione è unica, continua e definita su tutto \mathbb{R}

- i) determinare la regione in cui è confinato il grafico della soluzione;
- ii) dimostrare che la soluzione è una funzione dispari;
- iii) studiare la monotonia della soluzione;
- iv) Calcolare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$;

6. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$