Analisi 2 - AIDA
A.A. 2022/2023
Scritto - 24 Luglio 2023

1. Osserviamo che

$$\left| \frac{2^{n+1}}{n+2}(x-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{2^n}(x-1)^n \right| = 2\,\frac{n+1}{n+2}|x-1| \longrightarrow 2|x-1|$$

Dunque dal criterio del rapporto deduciamo che
- se $|x-1| < 1/2$ la serie converge
- se $|x-1| > 1/2$ la serie diverge.

Dunque $I_R = \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$ raggio di convergenza $R = \frac{1}{2}$

Valutiamo agli estremi

se $x = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = \frac{2^n}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ termine generale di una serie convergente per il criterio di Leibnitz

se $x = \frac{3}{2}$ $\quad a_n = \frac{2^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{n+1}$ termine generale di una serie divergente

Dunque l'insieme di convergenza I è $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$

2. Se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - x\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Se $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

③ Per separazione di variabili si ha che:

$$y' = \frac{1}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \qquad \frac{dy}{y} = dx$$

$$\int_{-2}^{y} \frac{dz}{z} = \int_{0}^{x} ds$$

$$\left.\frac{z^2}{2}\right|_{-2}^{y} = x \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{2} - \frac{4}{2} = x \quad \rightarrow \quad y^2 = 2x + 4$$

Poichè $y(0) = -2$ la soluzione sarà negativa vicino a 0 e di conseguenza scelgo $y = -\sqrt{2x+4}$

④ Passando in coordinate polari

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$$\int_0^2 \int_0^{\pi} \rho \cdot e^{-\rho^2} \, d\rho \, d\theta = \pi \int_0^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{e^{-4}}{2} \right] = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-4})$$