Analisi 2 per il CdS in AIDA

Scritto - 8 Febbraio 2023

(1.) Convergenza puntuale

- Sia $x \in \mathbb{R}$ ed $x > 0$ allora $\exists\, \bar{n}$ tale $x \geq \frac{1}{n}$ $\forall\, n \geq \bar{n}$

Dunque si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ si ha che

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ (poiché $f_n(x) = 0$ $\forall\, n \geq \bar{n}$)

- Se $x = 0$ $f_n(x) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

- Se $x < 0$ $f_n(x) \equiv 0 \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

Quindi la f_n converge puntualmente a zero.

Convergenza uniforme

$\sup_x |f_n(x) - 0| = \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} \left| \frac{1}{n} - x \right| = \frac{1}{n}$ dunque

$\lim_{n \to +\infty} \sup_x |f_n(x) - 0| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

(2) Ponendo $y = mx$ si ha che $\frac{x^4 \cdot y^4}{x^8 + 5y^8} = \frac{m^4\, x^4 x^4}{x^8 + 5m^8 x^8}$

E dunque

$\lim_{x \to 0} \frac{m^4 x^8}{x^8(1 + 5m^8)} = \frac{m^4}{1 + 5m^8}$

Il limite non esiste poiché il risultato dipende dalla scelta di m

(3) Essendo $\Sigma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x^4 + y^4 = 1 \}$ un insieme compatto, per il teorema di Weierstrass f ammette max e min (assoluti) su Σ

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova che

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = (2xy, x^2) \\ \nabla \varphi(x,y) = (4x^3, 4y^3) \end{cases} \qquad (\varphi(x,y) = x^4 + y^4 - 1)$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = 4\lambda x^3 & \underline{1} \\ x^2 = 4\lambda y^3 & \underline{2} \\ x^4 + y^4 = 1 & \underline{3} \end{cases}$$

Da $\underline{1}$ si ha che $x(y - 2\lambda x^3) = 0$

- Se $x = 0$ da $\underline{3}$ si ha che $y = \pm 1$ e da $\underline{2}$ $\lambda = 0$
  si ha che $f(0, \pm 1) = 0$

- Se $y - 2\lambda x^2 = 0$ allora da $\underline{2}$ $y(1 - 8\lambda^2 y^2) = 0$
  - $x\ y = 0$ da $\underline{2}$ $x = 0 \rightarrow$ impossibile perchè $\underline{3}$ non è verificata
  - $x\ (1 - 8\lambda^2 y^2) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{8\lambda^2}$ allora $y - 2\lambda x^2 = 0$
    si ha che $y^2 = 4\lambda^2 x^4$ e dunque $x^4 = \frac{y^2}{4\lambda^2} = \frac{1}{8\lambda^2} \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{32\lambda^4}$

Inserendo nel vincolo si ha che

$x^4 + y^4 = 1$

$1 = \frac{1}{64\lambda^4} + \frac{1}{32\lambda^4} = \frac{3}{64\lambda^4}$ $\qquad \lambda^4 = \frac{3}{64}$ $\qquad \lambda = \pm \sqrt[4]{\frac{3}{64}}$

Dunque da $y^2 = \frac{1}{8\lambda^2}$ otteniamo che $y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ e

dall'equazione $x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

Essendo $f\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$

$f\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$

otteniamo che $m = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ è minimo

$M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ è massimo

4 Consideriamo l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$

$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$

$y(0) = 1 \iff c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = 0 \iff 2c_1 - 2c_2 = 0 \iff c_1 = c_2$

Da cui $2c_1 = 1 \implies c_1 = 1/2$

Dunque la soluzione è $y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$