Foglio 6 : risoluzione

Estremi su curve e superfici in forma parametrica

- Estremi di $f(x,y) = x-2y+1$ sul sostegno Γ di $\gamma(t) = (1+2\sin t,\ 2-\cos t)^T$, $t \in [0,2\pi]$.

Si ha :

- $\gamma(0) = (1,1)^T = \gamma(2\pi) \Rightarrow \gamma$ è chiusa
- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \iff \begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 \\ \cos t_1 = \cos t_2 \end{cases} \iff (t_1 = 0 \text{ e } t_2 = 2\pi) \vee (t_1 = t_2)$

  $\Rightarrow \gamma$ è semplice
- $\gamma'(t) = (2\cos t,\ \sin t)^T \neq \underline{0} \Rightarrow \gamma$ è regolare

Ricercare gli estremi di $f|_\Gamma$ equivale a ricercare gli estremi di

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = 1+2\sin t - 4 + 2\cos t + 1$$
$$= 2(\cos t + \sin t) - 2$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right) - 2$$
$$= 2\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) - 2 \qquad \text{in } [0,2\pi]$$

Risulta

$$\max_{[0,2\pi]} \varphi = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}-2, \qquad \min_{[0,2\pi]} \varphi = \varphi\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -2\sqrt{2}-2$$

e quindi

$$\max_\Gamma f = 2\sqrt{2}-2, \qquad \min_\Gamma f = -2\sqrt{2}-2.$$

- Estremi di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3$ sul sostegno Γ di $\gamma(t) = (t\sin t, t\cos t, 2t)^T$, $t \in [-1,4]$.

Si ha:

- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \iff \begin{cases} t_1 \sin t_1 = t_2 \sin t_2 \\ t_1 \cos t_1 = t_2 \cos t_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases} \iff t_1 = t_2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \gamma$ è semplice

- $\gamma'(t) = (\sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, 2)^T \neq \underline{0}$

  $\Rightarrow \gamma$ è regolare

Ricercare gli estremi di $f_{|\Gamma}$ equivale a ricercare gli estremi di

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) = (t\sin t)^2 + (t\cos t)^2 - (2t)^3$$
$$= t^2 - 8t^3, \quad t \in [-1,4].$$

Si ha:

$$\varphi'(t) = 2t - 24t^2, \qquad \varphi'(t) = 0 \text{ se } t = 0 \vee t = \tfrac{1}{12},$$

$\varphi'(t) < 0$ se $t \in [-1,0] \cup [\frac{1}{12}, 4]$, $\varphi'(t) > 0$ se $t \in [0, \frac{1}{12}]$,

0 e 4 sono punti di minimo relativo e

-1, $\frac{1}{12}$ sono punti di massimo relativo,

$$\min_{[-1,4]} \varphi = \varphi(4) = -16 \cdot 23, \qquad \max_{[-1,4]} \varphi = \varphi\left(\tfrac{1}{12}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{144}$$

e quindi

$$\min_{\Gamma} f = -16 \cdot 23, \qquad \max_{\Gamma} f = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{144}.$$

- Estremi di $f(x,y,z) = z + \sqrt{x^2+y^2}$ sul sostegno Σ di $\sigma(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)^T$, $(u,v)^T \in [1,2] \times [0,\pi]$.

Si ha:

- $\sigma_u(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)^T$,

  $\sigma_v(u,v) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)^T$,

  $$\sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = (-\cosh^2 u \cos v)\underline{e}_1 + (\cosh^2 u \sin v)\underline{e}_2 + \underbrace{(\sinh u \cosh u \cos^2 v + \sinh u \cosh u \sin^2 v)}_{= \sinh u \cdot \cosh u}\underline{e}_3,$$

  $\sinh u \cosh u \neq 0$ in $[1,2] \Rightarrow \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) \neq \underline{0}$ in $[1,2]\times[0,\pi]$

  $\Rightarrow$ σ è regolare

- $$\sigma(u_1,v_1) = \sigma(u_2,v_2) \iff \begin{cases} \cosh u_1 \cos v_1 = \cosh u_2 \cos v_2 \\ \cosh u_1 \sin v_1 = \cosh u_2 \sin v_2 \\ \sinh u_1 = \sinh u_2 \end{cases}$$

  $$\iff \begin{cases} \cos v_1 = \cos v_2 \\ \sin v_1 = \sin v_2 \\ u_1 = u_2 \end{cases} \iff (u_1,v_1)^T = (u_2,v_2)^T$$

  $\Rightarrow$ σ è semplice

Ricercare gli estremi di $f_{|\Sigma}$ equivale a ricercare gli estremi di

$$\psi(u,v) = f(\sigma(u,v)) = \sinh u + \sqrt{\cosh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v}$$

$$= \sinh u + \cosh u = e^u \quad \text{in } [1,2]\times[0,\pi].$$

Si ha

$$\min_{[1,2]\times[0,\pi]} \psi(u,v) = \min_{[1,2]} e^u = e,$$

$$\max_{[1,2]\times[0,\pi]} \tilde{f}(u,v) = \max_{[1,2]} e^u = e^2$$

e quindi

$$\min_{\Sigma} f = e \,, \qquad \max_{\Sigma} f = e^2.$$

Estremi su curve e superfici in forma implicita

- Estremi assoluti di $f(x,y) = 3+\sqrt{2+xy}$ su $\Gamma = \{(x,y)^T : x^4+y^4=1\}$.

  Essendo Γ chiuso e limitato e f continua esistono $\min_{\Gamma} f$ e $\max_{\Gamma} f$, per il teorema di Weierstrass.

  Poiché $3+\sqrt{2+t}$ è una funzione crescente, conviene ricercare i punti di estremo di $g(x,y) = xy$ su Γ.

  Poniamo $\varphi(x,y) = x^4+y^4-1$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori. Si ha:

  - $\nabla\varphi(x,y) = (4x^3, 4y^3)^T$ e $\nabla g(x,y) = (y,x)^T$

  - punti singolari di Γ

  $$\begin{cases} \nabla\varphi(x,y) = \underline{0} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4+y^4=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=1 \end{cases} : \text{impossibile}$$

  $\Rightarrow$ non ci sono punti singolari in Γ

  - $$\begin{cases} \nabla g(x,y) = \lambda \nabla\varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda 4x^3 \\ x = \lambda 4 y^3 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=1 \end{cases} : \text{ impossibile } \Longrightarrow \boxed{x \neq 0}$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=1 \end{cases} : \text{ impossibile } \Longrightarrow \boxed{y \neq 0}$$

Quindi si ottiene, eliminando λ,

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^3} = \dfrac{x}{y^3} \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 = x^4 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ 2x^4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\max_{\Gamma} g = g\left(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = g\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\min_{\Gamma} g = g\left(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, +\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = g\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

e

$$\max_{\Gamma} f = 3 + \sqrt{2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \qquad \min_{\Gamma} f = 3 + \sqrt{2 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

- Punto dell'ellisse $\Gamma = \{(x,y)^T : 2x^2 - xy + 2y^2 + 5x = 1\}$ avente minima distanza dalla retta $x + y = 1$.

Per ogni $P = (x,y)^T \in \Gamma$, la distanza di P dalla retta $x+y-1=0$ è $\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$.

Osserviamo che

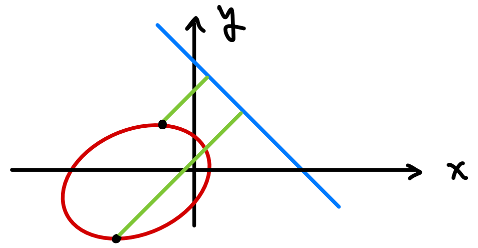
1) la retta non interseca l'ellisse:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x^2-xy+2y^2+5x-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-x \\ 2x^2-x(1-x)+2(x-1)^2+5x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=1-x \\ 3x^2+1=0 \end{cases} : \text{ impossibile}$$

2) l'ellisse è contenuta nel semipiano $x+y-1<0$:

$(0,\sqrt{\tfrac{1}{2}})^T \in \Gamma$ e $0+\sqrt{\tfrac{1}{2}}-1<0$



Pertanto per ogni $(x,y)^T \in \Gamma$

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1-x-y}{\sqrt{2}}.$$

Poniamo $f(x,y)=\dfrac{1-x-y}{\sqrt{2}}$ e $\varphi(x,y)=2x^2-xy+2y^2+5x-1$.

Poiché Γ è compatto e f è continua, esiste $\min_{\Gamma} f$, per il teorema di Weierstrass.

Usiamo il metodo dei moltiplicatori:

- $\nabla\varphi(x,y)=(4x-y+5,-x+4y)^T$, $\nabla f(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

- punti singolari di Γ: $\qquad 15x+20=0$

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x,y)=\underline{0} \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-y+5=0 \\ -x+4y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=4x+5 \\ x=-\frac{4}{3} \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ 2\,\frac{16}{9} - \frac{4}{9} + 2\,\frac{1}{9} - \frac{20}{3} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ -\frac{39}{9} = 0 \end{cases} \quad : \text{ impossibile}$$

$\implies$ non ci sono punti singolari su Γ

$$- \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} = \lambda(4x - y + 5) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} = \lambda(-x + 4y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che è $\lambda \neq 0$ e quindi eliminando λ si ottiene

$$\begin{cases} 4x - y + 5 = -x + 4y \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - 5y + 5 = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

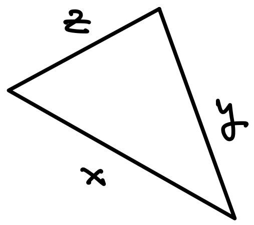
$$\begin{cases} y = x+1 \\ 2x^2 - x(x+1) + 2(x+1)^2 + 5x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x+1 \\ 3x^2 + 8x + 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = -\frac{4+\sqrt{13}}{3} \\ y = -\frac{1+\sqrt{13}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-4+\sqrt{13}}{3} \\ y = \frac{-1+\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Quindi si conclude che

$$\min_{\Gamma} f = f\left(\frac{-4+\sqrt{13}}{3}, \frac{-1+\sqrt{13}}{3}\right).$$

• Provare che $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ è minima se $x+y+z = 2p$, con $p>0$ fissato, e $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$.



Poiché la funzione $\sqrt{pt}$ è crescente, conviene ricercare il punto di massimo di

$$t = (p-x)(p-y)(p-z) = f(x,y,z)$$

in $\Sigma = \{(x,y,z)^T : x+y+z = 2p,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

Essendo Σ compatto e f continua, esiste $\max\limits_{\Sigma} f$ per il teorema di Weierstrass.

Poniamo $\varphi(x,y,z) = x+y+z-2p$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori:

- $\nabla\varphi(x,y,z) = (1,1,1)^T$, $\nabla f(x,y,z) = (-(p-y)(p-z), -(p-x)(p-z), -(p-x)(p-y))^T$

- punti singolari:

$\nabla\varphi(x,y,z) \neq \underline{0}$: non ci sono punti singolari in Σ

- $\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla\varphi(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -(p-y)(p-z) = \lambda \\ -(p-x)(p-z) = \lambda \\ -(p-x)(p-y) = \lambda \\ x+y+z = 2p \end{cases}$

eliminando λ si ottiene:

$$\begin{cases}(p-y)(p-z)=(p-x)(p-z)\\(p-x)(p-z)=(p-x)(p-y)\\x+y+z=2p\end{cases} \iff \begin{cases}z=p\\x=p\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}z=p\\y=p\\x=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=p\\y=p\\z=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=y\\y=z\\3x=2p\end{cases}$$

e quindi $\max_{\Sigma} f = f\left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$.

- Punti dell'ellissoide $\Sigma = \{(x,y,z)^T : x^2+y^2+z^2-xy+yz-z=1\}$ aventi massime e minime quote.

Posto $f(x,y,z)=z$, si ricercano $\max_{\Sigma} f$ e $\min_{\Sigma} f$, che esistono poiché f è continua e Σ è compatto.

Usiamo il metodo dei moltiplicatori.

$-\frac{22}{16} = -\frac{11}{8}$

$14 \quad -36$

Posto $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+yz-z-1$, si ha:

- $\nabla\varphi(x,y,z) = (2x-y, 2y-x+z, 2z+y-1)^T$ e $\nabla f(x,y,z) = (0,0,1)^T$

- punti singolari:

$$\begin{cases}\nabla\varphi(x,y,z)=\underline{0}\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}2x-y=0\\2y-x+z=0\\2z+y-1=0\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=2x\\z=-3x\\-4x=1\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\y=-\frac{1}{2}\\z=\frac{3}{4}\\-\frac{11}{8}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ non ci sono punti singolari in Σ

- $$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla\varphi(x,y,z)\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}0=\lambda(2x-y)\\0=\lambda(2y-x+z)\\1=\lambda(2z+y-1)\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases}$$

Osserviamo che è $\lambda \neq 0$ e quindi eliminando λ si ottiene

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x + z = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -3x \\ 6x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3+\sqrt{33}}{6} \\ y = -\frac{3+\sqrt{33}}{3} \\ z = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{33}}{6} \\ y = \frac{-3+\sqrt{33}}{3} \\ z = \frac{3-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

e quindi $\quad \max_{\Sigma} f = \frac{3+\sqrt{33}}{2}, \quad \min_{\Sigma} f = \frac{3-\sqrt{33}}{2}.$

Punti dell'ellisse $\Gamma = \{(x,y,z)^T : \; x^2+y^2=4, \; x+y+z=0\}$ aventi massima distanza da $(0,0,0)^T$.

Poiché $\sqrt{t}$ è crescente, conviene ricercare i punti di massimo assoluto di $\quad t = x^2+y^2+z^2 = f(x,y,z)$.
Essendo Γ compatto e f continua, esiste $\max_{\Gamma} f$.
Poniamo $\quad \varphi(x,y,z) = x^2+y^2-4 \;$ e $\; \psi(x,y,z) = x+y+z$.
e usiamo il metodo dei moltiplicatori. Si ha:

- $\nabla\varphi(x,y,z) = (2x, 2y, 0)^T, \; \nabla\psi(x,y,z) = (1,1,1)^T,$

  $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)^T.$

- punti singolari:

$$\nabla\varphi(x,y,z) \times \nabla\psi(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2y\,\underline{e}_1 - 2x\,\underline{e}_2 + (2x-2y)\,\underline{e}_3$$

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x,y,z) \times \nabla\psi(x,y,z) = \underline{0} \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ -2x = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 4 \end{cases}$$: impossibile $\Rightarrow$ non ci sono punti singolari in Γ

- $$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla\varphi(x,y,z) + \mu \nabla\psi(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x + \mu \\ 2y = \lambda 2y + \mu \\ 2z = \mu \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda x + z \\ y = \lambda y + z \\ 2z = \mu \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Eliminando μ, si ottiene

$$\begin{cases} \lambda x = x - z \\ \lambda y = y - z \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che, se $x = 0$, allora

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = z \\ 0 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$ impossibile $\Rightarrow x \neq 0$

e se $y=0$, allora

$$\begin{cases} y=0 \\ y=z \\ 0=4 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{impossibile} \quad \Rightarrow \quad y \neq 0.$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x-z}{x} \\ \lambda = \dfrac{y-z}{y} \\ x^2+y^2=4 \\ z=-x-y \end{cases}$$

Eliminando λ, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{z-x}{x} = \dfrac{z-y}{y} \\ x^2+y^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} zy-xy = zx-yx \\ x^2+y^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z(x-y)=0 \\ x^2+y^2=4 \\ z=-x-y \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ 2x^2=4 \\ y=-x \end{cases} \vee \begin{cases} x=y \\ 2x^2=4 \\ z=-2x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=-\sqrt{\frac{1}{2}} \\ z=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ z=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ z=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y=-\sqrt{\frac{1}{2}} \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Si conclude che

$$\min_{\Gamma} f = f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right) = f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}, 0\right)$$

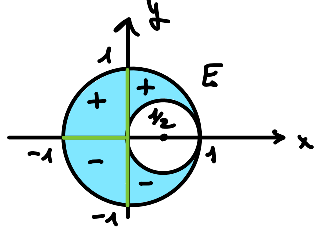
$$\max_{\Gamma} f = f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{2}\right)$$

Estremi assoluti su compatti

- Estremi di $f(x,y) = x^2 y$ su $E = \{(x,y)^T : x^2 - x + y^2 \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Poiché E è compatto e f è continua, esistono $\min_E f$ e $\max_E f$.

- Estremi in $\operatorname{int} E = \{(x,y)^T : (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4},\ x^2+y^2 < 1\}$



$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)^T$, $\quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$

punti critici in $\underline{\operatorname{int} E}$:

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -1 < y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è definita né indefinita nel segno

segni di f in $\underline{\operatorname{int} E}$:

$$f(x,y) = x^2 y = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 < |y| < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) > 0 \iff \{(x,y)^T \in \operatorname{int} E : x \neq 0,\ y > 0\}$$

$$f(x,y) < 0 \iff \{(x,y)^T \in \operatorname{int} E : x \neq 0,\ y < 0\}$$

Quindi i punti $\{(x,y)^T : x = 0,\ 0 < y < 1\}$ sono di minimo relativo e i punti $\{(x,y)^T : x = 0,\ -1 < y < 0\}$ sono di massimo relativo.

- Estremi su fr $E = \underbrace{\{(x,y)^T : (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}}_{\Gamma_1} \cup \underbrace{\{(x,y)^T : x^2+y^2=1\}}_{\Gamma_2}$

Estremi su Γ_1: troviamo $\varphi_1(x,y) = x^2 - x + y^2$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori. Si ha

$\nabla\varphi_1(x,y) = (2x-1, \; 2y)^T$

punti singolari:

$$\begin{cases} \nabla\varphi_1(x,y) = \underline{0} \\ \varphi_1(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y=0 \\ x^2-x+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \\ -\frac{1}{4}=0 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow$ non ci sono punti singolari in Γ_1

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\nabla\varphi_1(x,y) \\ \varphi_1(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = \lambda(2x-1) \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2-x+y^2=0 \end{cases}$$

Osserviamo che se $x=\frac{1}{2}$, allora

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \\ -\frac{1}{4}=0 \end{cases} \quad \text{impossibile} \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}$$

e quindi $\lambda = \frac{2xy}{2x-1}$. Eliminando λ si ottiene

$$\begin{cases} x^2 = \frac{4xy^2}{2x-1} \\ x^2-x+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4y^2}{2x-1} \\ x^2-x+y^2=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-x = 4y^2 \\ x^2-x+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = \frac{2x^2-x}{4} \\ x^2-x+\frac{2x^2-x}{4} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y^2 = \frac{5}{36} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

Estremi su Γ_2: poniamo $\varphi_2(x,y) = x^2+y^2-1$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori. Si ha:

$$\nabla\varphi_2(x,y) = (2x, 2y)^T$$

punti singolari:

$$\begin{cases} \nabla\varphi_2(x,y) = \underline{0} \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow$ non ci sono punti singolari su Γ_2

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla\varphi_2(x,y) \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff$$

impossibile

$$\begin{cases} x=0 \\ 2\lambda y = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \vee \cancel{\begin{cases} y=0 \\ x^2=0 \\ 0=1 \end{cases}} \vee \begin{cases} y=\lambda \\ x^2 = 2y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 2y^2 \\ 3y^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y=\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y=\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{\frac{2}{3}} \\ y=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Confrontando i valori di f nei punti trovati si conclude che

$$\min_E f = f\left(\frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right) = -\frac{25}{36}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6} \qquad \max_E f = f\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{5}}{6}\right) = \frac{25}{36}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}$$

Estremi assoluti di $f(x,y,z) = x - 2y^2 + z$ su $E = \{(x,y,z)^T : x^4 + y^2 + z^4 \leq 1\}$.

Poiché f è continua e E è compatto, esistono $\min_E f$ e $\max_E f$.

- estremi in $\operatorname{int} E = \{(x,y,z)^T : x^4 + y^2 + z^4 < 1\}$

$$\nabla f(x,y,z) = (1, -4y, 1)^T \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow$ non ci sono punti di estremo di f in $\operatorname{int} E$

- estremi su $\operatorname{fr} E = \{(x,y,z)^T : x^4 + y^2 + z^4 = 1\}$

Poniamo $\varphi(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^4 - 1$ e usiamo il metodo dei moltiplicatori. Si ha:

$$\nabla\varphi(x,y,z) = (4x^3, 2y, 4z^3)^T$$

punti singolari:

$$\begin{cases} \nabla\varphi(x,y,z) = \underline{0} \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2y = 0 \\ 4z^3 = 0 \\ x^4 + y^2 + z^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow$ non ci sono punti singolari in $\operatorname{fr} E$.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla\varphi(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda 4x^3 \\ -4y = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 4z^3 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\lambda \neq 0, x \neq 0, z \neq 0$. Eliminando λ si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 = 4z^3 \\ -4y = \dfrac{2y}{4x^3} \\ x^4 + y^2 + z^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ 2x^4 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = z \\ x^3 = -8 \\ y^2 = 1 - 2x^4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = 0 \\ z = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -31 \\ z = -2 \end{cases}$$

impossibile

Si conclude che

$$\min_E f = f\left(-\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, -\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = -2\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}},$$

$$\max_E f = f\left(\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}, 0, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\right) = 2\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.$$