Analisi 2 per il CdS AIDA

A.A 2022/2023

Scritto - 26 Giugno 2023

1 • Convergenza puntuale.

Ad ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fissato si ha che $f_n(\bar{x}) = \dfrac{\bar{x}+n}{\bar{x}^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Dunque la successione converge puntualmente ad $f(x) = 1$

• Convergenza uniforme

Stimiamo $\quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{x^2-x}{x^2+n} \right|$

osserviamo che $\quad \lim_{x\to+\infty} \left| \dfrac{x^2-x}{x^2+n} \right| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

di conseguenza $\quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{x^2-x}{x^2+n} \right| \geq 1 \quad \forall n$

e dunque non ci può essere convergenza uniforme su $\mathbb{R}$.

2 Cerchiamo i punti critici

$\nabla f(x,y) = (3x^2+y,\ 3y^2+x)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 = -y \\ 3y^2 = -x \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Calcoliamo la matrice Hessiana $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$

• $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det Hf(0,0) = -1 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella

• $Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det Hf(-1/3, -1/3) = 3 > 0$

$a_{11} = -2 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ pto di max relativo.

3 Consideriamo

$f(x,y) = 1 + \cos(y) + t^2$

Poiché f è continua su $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(y)$ è anch'essa una funzione continua per il Teorema di C-L si ha esistenza e unicità locale.

Inoltre poiché per ogni compatto $H \subseteq \mathbb{R}^2$ esistono $\alpha, \beta \in [0; +\infty[$ tali che

$$|f(x,y)| = |1 + \cos(y) + t^2| \leq |1+t^2| + |\cos(y)| \leq |1+t^2| + 1$$

$$\leq \alpha|y| + \beta$$

$\left(\text{con } \alpha = 0 \text{ e } \beta = \max_H |1+t|^2 + 1 \right)$ allora per il teorema di esistenza globale la soluzione è definita su $\mathbb{R}$.

Inoltre poniamo $z(t) = -y(-t)$. Si ha che

$$\dot z(t) = \dot y(-t) = 1 + \cos(y(-t)) + (-t)^2 = 1 + \cos(-z(t)) + t^2 =$$

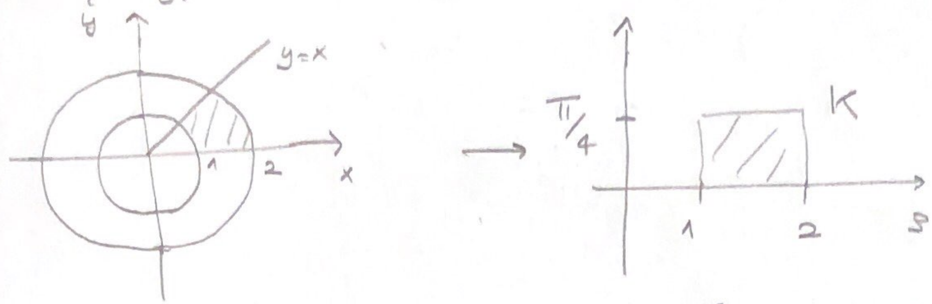
$$= 1 + \cos(z(t)) + t^2$$

$z(0) = -y(-0) = 0$

Risulta che z è soluzione del (PC) ed essendo la soluzione unica si ha che $y(t) = z(t) = -y(-t)$

dunque y è dispari.

(4) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4 \ , \ 0 \le y \le x\}$



Conviene passare a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

det matrice Jacobiana

$$\iint_E (x^3 + xy)\,dx\,dy = \iint_K (\rho^3\cos^3\theta + \rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta)\cdot\rho\cdot d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 (\rho^4\cos^3\theta + \rho^3\cos\theta\cdot\sin\theta)\,d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 \rho^4\cos^3\theta\, d\rho\right)d\theta + \int_0^{\pi/4}\left(\int_1^2 \rho^3\cos\theta\sin\theta\, d\rho\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\cos^3\theta\cdot\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_1^2 d\theta + \int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2 d\theta =$$

$$= \frac{31}{5}\int_0^{\pi/4}\cos\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta + \frac{15}{4}\int_0^{\pi/4}\cos\theta\cdot\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{31}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{31}{15}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 + \frac{15}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$