Analisi 2 per il CdS in IADA

A.A. 2022/2023

1. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge per il criterio della radice. Infatti

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n \cdot n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1}$$

Dunque

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

2. Consideriamo la funzione $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ e cerchiamo i punti critici.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Imponiamo $\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2=0 \\ -2xy=0 \end{cases} \iff \quad y=0;\ x=\pm 1$$

I punti critici sono $(1,0)$; $(-1,0)$. Studiamone la natura con il metodo dell'Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x(3+3y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2x)\frac{(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y\,\frac{(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad H(-1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -1/2 < 0$

$\det H(1,0) = \frac{1}{4} > 0$

$(1,0)$ max locale

$a_{11} = 1/2$

$\det H(-1,0) = 1/4 > 0$

$(-1,0)$ min locale

(3) $\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Procediamo con il metodo di separazione delle variabili

$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \int_0^y \frac{dt}{t+1} = \int_0^x 1 \cdot ds$

Consideriamo l'estremo di integrazione y vicino allo zero e dunque t sarà un numero piccolo e dunque $t+1 > 0$

Quindi integrando:

$$\ln(t+1)\Big|_0^y = s\Big|_0^x$$

$\ln(y+1) - \ln(0+1) = x - 0$

$\ln(y+1) = x \rightarrow e^{\ln(y+1)} = e^x \rightarrow y+1 = e^x$

$\rightarrow y = e^x - 1$ La soluzione è $y(x) = e^x - 1$.

(4) L'insieme E è un insieme normale rispetto l'asse delle x

$E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 ; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ con $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x$.

Dunque

$$\iint_E (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2+y^2)\, dy \right] dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{3}\, dx = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3\, dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$