Analisi 2 - Intelligenza Artificiale & Data Analytics

Scritto 11 Luglio 2023 - Soluzioni

(1) Osserviamo che

$$\left|\frac{\cos(nx+5)}{6+n^4}\right| \le \frac{1}{6+n^4} = M_n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$ dunque per l'M-test di Weierstrass deduciamo che la serie di funzioni converge uniformem.

(2) Osserviamo che essendo E un insieme compatto ed essendo f una funzione continua per il teorema di Weierstrass possiamo dedurre l'esistenza di max e min assoluti su E.

Sia $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 20$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla \varphi(x,y) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda\, 2(x-1) \\ 2y = \lambda\, 2(y-2) \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = -\lambda \\ y(1-\lambda) = -2\lambda \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

$x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y/2 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2x-2)^2 - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Dunque i punti trovati sono $(3,6)$ e $(-1,-2)$

Essendo $f((3,6)) = 9+36 = 45$ $\quad f((-1,-2)) = 1+4 = 5$

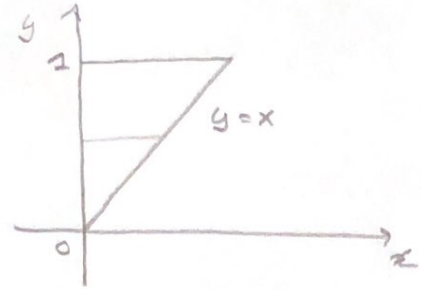
deduciamo che $(3,6)$ è pto di max assoluto e $(-1,-2)$ è pto di min assoluto.

(3) Consideriamo l'equazione caratteristica

$\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} = 0$ ovvero $\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$ $\quad \lambda = -\frac{1}{3}$ è una radice con molteplicità doppia. Dunque le soluzioni sono della forma $c_1 e^{-1/3 x} + c_2 x e^{-1/3 x}$

Imponendo le condizioni iniziali si trova $y(x) = x \cdot e^{-1/3 x}$

(4)



$0 \le y \le 1$

$0 = \varphi(y) \le x < \psi(y) = y$

E è un insieme normale rispetto l'asse y.

$$\iint_E \frac{\sin(y)}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\underset{\varphi(y)}{0}}^{\overset{\psi(y)}{y}} \frac{\sin(y)}{y}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin(y)}{y} \cdot y \right) dy = \int_0^1 \sin(y) = \left[-\cos(y)\right]_0^1 =$$

$$= -\cos 1 + \cos(0) = 1 - \cos 1$$