TUGAS BESAR 1 IF2123 ALJABAR LINIER DAN GEOMETRI SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

LAPORAN TUGAS BESAR

Diajukan untuk memenuhi tugas besar Aljabar Linier Dan Geometri pada Semester III Tahun Akademik 2023/2024

Kelompok Tubes Siji Algeo

Eduardus Alvito Kristiadi	**13522004**
Francesco Michael Kusuma	**13522038**
Enrique Yanuar	**13522077**

SEKOLAH TINGGI ELEKTRO DAN INFORMATIKA
TEKNIK INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
BANDUNG
2023

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

1.1 LATAR BELAKANG

Sistem persamaan linier merupakan bagian yang tidak terpisahkan dari kehidupan manusia sehari-hari. Bermacam persoalan dapat dimodelkan dengan suatu sistem persamaan. Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. SPL sendiri telah menjadi bagian dalam mata kuliah Aljabar Linier dan Geometri, Sistem persamaan linier adalah suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam peubah-peubah x1, x2, …, xn. Suatu urutan bilangan-bilangan s1, s2, …, sn dinamakan pemecahan dari sistem tersebut jika s1, s2, …, sn merupakan pemecahan dari masing-masing persamaan pada sistem tersebut.

Dalam menyelesaikan suatu SPL, dapat digunakan beberapa metode, antara lain: metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A$-1b), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Metode tersebut bervariasi dan dapat digunakan mengikuti kebutuhan soal. Hasil dari penyelesaian SPL tersebut berupa solusi. Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Dalam rangka menyelesaikan suatu SPL, pengetahuan mengenai matriks sangat diperlukan. Matriks adalah angka-angka yang disusun sedemikian sehingga menyerupai persegipanjang berdasarkan urutan baris dan kolom. Angka-angka yang menyusun matriks disebut sebagai unsur atau elemen. Umumnya, matriks berada di dalam tanda kurung dan dinyatakan sebagai huruf kapital. Sementara itu, unsur atau elemen dinyatakan sebagai huruf kecil serta memiliki indeks. Indeks tersebut menyatakan letak baris dan kolom unsur. Baris adalah susunan angka yang arahnya horizontal atau mendatar. Sementara kolom adalah susunan angka yang arahnya vertikal. Matriks merupakan representasi data yang sangat penting dan banyak digunakan dalamn bidang informatika, antara lain: representasi graf dengan matriks, representasi citra digital, matriks kernel dalam metode *deep learning,* dan representasi matriks untuk SPL. Operasi-operasi yang dapat dilakukan pada matriks, antara lain penjumlahan matriks, perkalian matriks, perkalian scalar, transpos matriks, kombinasi linier matriks. Sementara itu, sifat-sifat yang berlaku pada operasi matriks, antara lain: komutatif terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap perkalian, dan distributif.

Di dalam Tugas Besar 1 ini, mahasiswa diminta membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, mahasiswa bisa menggunakan *library* tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

Pengerjaan tugas besar ini menggunakan bahasa pemrograman Java. Java sendiri merupakan bahasa pemrograman yang banyak digunakan untuk mengode aplikasi web. Java sudah menjadi pilihan populer di kalangan pengembang selama lebih dari dua dekade, dengan jutaan aplikasi Java yang digunakan saat ini. Java adalah bahasa yang multi-platform, berorientasi objek, dan berpusat pada jaringan yang dapat digunakan sebagai platform itu sendiri. Java adalah bahasa pemrograman yang cepat, aman, dan dapat diandalkan untuk mengode segala hal mulai dari aplikasi seluler dan perangkat lunak perusahaan hingga aplikasi big data dan teknologi sisi server. Adapun versi Java yang digunakan dalam tugas besar ini dibebaskan dengan catatan di atas java versi 8 (8/9/11/15/17/19/20).

Hasil program dari tugas besar yang telah dibuat dapat menerima masukan (input) baik dari keyboard maupun membaca masukan dari *file text* dengan berbasis text-based tanpa adanya GUI. Program telah didesain dengan tujuh pilihan menu saat dijalankan dengan sub-menu lagi di dalam setiap menu.

1.2 TUJUAN PENELITIAN

1. Mengetahui tingkat pemahaman mahasiswa mengenai materi sistem persamaan linier, determinan, dan pengaplikasiannya dalam persoalan di kehidupan sehari-hari.
2. Mengetahui tingkat keberhasilan program dalam menyelesaikan persoalan sistem persamaan linier, determinan, dan pengaplikasiannya.

1.3 MANFAAT PENELITIAN

1. Membantu para mahasiswa untuk lebih memahami mengenai sistem persamaan linier, determinan, dan pengaplikasiannya dalam persoalan di kehidupan sehari-hari.
2. Menguji daya pikir kritis mahasiswa dalam merancang, merumuskan, dan mengeksekusi penyelesaian dari suatu masalah.
3. Menuntut mahasiswa untuk memiliki sikap adaptif dalam mempelajari bahasa Java dan menerapkannya dalam sebuah program yang dapat menyelesaikan sistem persamaan linier, determinan, dan aplikasinya dalam waktu singkat.

BAB II

TEORI SINGKAT

2.1 ELIMINASI GAUSS

Eliminasi Gauss merupakan salah satu metode untuk mencari solusi sistem persamaan linier. Eliminasi gauss ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss**,** metode ini dapat dimanfaatkan untuk memecahkan sistem persamaan linear dengan merepresentasikan (mengubah) menjadi bentuk matriks, matriks tersebut lalu diubah kebentuk Eselon Baris melalui Operasi Baris Elementer. Kemudian sistem diselesaikan dengan substitusi balik. Operasi Baris Elementer dapat dilakukan dengan cara menukar dua baris (R2 ←→ R3), mengalikan satu baris dengan angka bukan nol (R1 → kR2), menambahkan kelipatan dari satu baris ke baris lain (R2 → R2 + 3R1). Hasil akhir dari matriks yang diperoleh akan berbentuk matriks eselon baris. Matriks dikatakan berbentuk eselon baris yang direduksi ketika semua koefisien terdepan sama dengan 1, dan setiap kolom yang mengandung koefisien terdepan memiliki angka nol di tempat lain.

Sifat-sifat dari matriks eselon baris, antara lain: Jika sebuah baris tidak terdiri dari selurunya nol, maka bilangan tidak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut **1 utama**), jika ada baris yang seluruhnya nol, maka semua baris itu dikumpulkan pada bagian bawah matriks, dan di dalam dua baris berturutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.1 Contoh-contoh matriks eselon baris
Sumber: https://1informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Bentuk akhir ini bersifat unik yang berarti tidak tergantung pada urutan operasi baris yang digunakan. Contoh penyelesaian SPL menggunakan metode eliminasi Gauss adalah sebagai berikut.

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$
$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R1/2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{R3+2R1}{\overset{R2-4R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R3-6R2} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R3/(-5)} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* terakhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan-persamaan linier sbb:

$x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2$ (i)
$x_2 + 1/2x_3 = 7/2$ (ii)
$x_3 = 3$ (iii)

Selesaikan dengan teknik penyulihan mundur sbb:

(iii) $x_3 = 3$
(ii) $x_2 + 1/2x_3 = 7/2 \rightarrow x_2 = 7/2 - 1/2(3) = 2$
(i) $x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2 \rightarrow x_1 = 5/2 - 3/2\,(2) - 1/2\,(3) = 1$

Gambar 2.2 Contoh penyelesaian SPL dengan menggunakan eliminasi Gauss
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Soal tersebut berupa sistem persamaan linier yang memiliki tiga variabel, yaitu x1, x2, dan x3. SPL tersebut diubah ke dalam bentuk matriks untuk dapat diselesaikan menggunakan Operasi Baris Elementer. Pada OBE, baris pertama dibagi dengan 2 untuk mendapatkan 1 utama. Kemudian, R2-4R1 dan R3+2R1 agar mendapatkan nol di bawah satu utama pada R1. Baris R2 dibagi dengan -2 untuk mendapatkan 1 utama. R3-6R2 untuk mendapatkan nol di bawah satu utama pada R2. R3 lalu dibagi dengan -5 untuk mendapatkan satu utama pada R3.

Dari OBE, didapatkan hasil berupa matriks eselon baris. Matriks tersebut kemudian diubah menjadi bentuk SPL yang lebih sederhana dan dicari solusi berupa nilai dari tiap-tiap variabel. Solusi yang didapat dapat berupa solusi unik (solusi tunggal), solusi parametrik (solusi banyak), maupun tidak memiliki solusi sama sekali.

2.2 ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Eliminasi Gauss-Jordan adalah prosedur pemecahan sistem persamaan linear dengan mengubahnya menjadi bentuk matriks eselon baris tereduksi dengan Operasi Baris Elementer. Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. Pada metode eliminasi Gauss-Jordan tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks *augmented* akhir (jika solusinya unik).

Metode eliminasi Gauss-Jordan terdiri dari dua fase, yaitu fase maju dan fase mundur. Fase maju (*forward phase*) atau fase eliminasi Gauss menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama. Fase mundur (*backward phase*) menghasilkan nilai-nilai 0 di atas satu utama. Kedua fase dapat dilakukan secara bersamaan atau sekuensial.

OBE pada metode eliminasi Gauss-Jordan menghasilkan matriks eselon baris tereduksi. Matriks eselon baris tereduksi memiliki semua nilai nol di bawah dan di atas 1 utama. Sifat-sifat yang dimiliki oleh matriks eselon baris tereduksi, antara lain: jika sebuah baris tidak terdiri dari selurunya nol, maka bilangan tidak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut 1 utama), jika ada baris yang seluruhnya nol, maka semua baris itu dikumpulkan pada bagian bawah matriks, di dalam dua baris berturutan yang tidak seluruhnya nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi, serta setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol di tempat lain.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Gambar 2.3 Contoh matriks eselon baris tereduksi
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Contoh penerapan metode eliminasi Gauss-Jordan pada SPL adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9\\ x_1 \qquad - 2x_3 + 7x_4 &= 11\\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10\end{aligned}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Penyelesaian:

Fase maju:

$$\begin{bmatrix}2&-1&3&4&9\\1&0&-2&7&11\\3&-3&1&5&8\\2&1&4&4&10\end{bmatrix}\xrightarrow{R1\leftrightarrow R2}\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\2&-1&3&4&9\\3&-3&1&5&8\\2&1&4&4&10\end{bmatrix}\begin{matrix}R2-2R1\\R3-3R1\\R2-2R1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&-1&7&-10&-13\\0&-3&7&-16&-25\\0&1&8&-10&-12\end{bmatrix}(-1)*R2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&-3&7&-16&-25\\0&1&8&-10&-12\end{bmatrix}\begin{matrix}R3+3R2\\R4-R2\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&0&-14&14&14\\0&0&15&-20&-25\end{bmatrix}(-1/14)*R3\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&0&1&-1&-1\\0&0&15&-20&-25\end{bmatrix}R4-15R1$$

$$\ldots\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&-5&-10\end{bmatrix}(-1/5)*R4\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris

Fase mundur:

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&7&11\\0&1&-7&10&13\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{matrix}R1+2R3\\R2+7R3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&5&9\\0&1&0&3&6\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{matrix}R1-5R4\\R2-3R4\\R3+R4\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi

Dari matriks *augmented* terakhir diperoleh solusi SPL sbb:

$x_1 = -1;$
$x_2 = 0;$
$x_3 = 1;$
$x_4 = 2$

Gambar 2.4 Contoh penyelesaian SPL menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Pada contoh tersebut, persoalan berupa SPL 4 variabel (x1, x2, x3, dan x4). SPL tersebut diubah menjadi bentuk matriks agar bisa diselesaikan melalui OBE. Dilakukan fase maju terlebih dahulu untuk mendapatkan nol di bawah satu utama dari tiap baris. R1 ←→ R2 untuk mempermudah perhitungan karena pada R2 sudah terdapat satu utama sehingga dapat dipertukarkan dengan R1. R2-2R1, R3-3R1, R2-2R1 untuk mendapatkan nol di bawah satu utama pada R1. Selanjutnya dilakukan langkah-langkah yang serupa hingga berhasil mendapatkan satu utama pada tiap baris dan nol di bawah satu utama pada tiap baris. Fase mundur kemudiann dilakukan untuk mendapatkan nol di atas satu utama pada tiap baris hingga kemudian diperoleh bentuk matriks eselon baris tereduksi. Dari matriks augmented terakhir, diperoleh solusi SPL berupa x1 =-1, x2=0, x3=1, dan x4=2. Pada contoh ini, solusi dari SPL berupa solusi unik (solusi tunggal). Namun, tidak menutup kemungkinan bahwa solusi yang didapat dapat berupa solusi unik (solusi tunggal), solusi parametrik (solusi banyak), maupun tidak memiliki solusi sama sekali.

2.3 DETERMINAN

Determinan merupakan nilai yang dihitung melalui unsur-unsur matriks berbentuk mirip dengan persegi. Simbol dari determinan matriks A adalah det (A), det A, atau |A|. Matriks persegi sendiri merupakan matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Jika jumlah baris dan kolom berbeda maka determinannya tidak dapat ditemukan. Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks.

Misalkan A adalah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan matriks A dilambangkan dengan

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gambar 2. Definisi determinan matriks
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Untuk matriks A berukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

$\det(A) = (3)(4) - (2)(-1) = 12 + 2 = 14$

Gambar 2.5 Determinan matriks 2 x 2
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Untuk matriks A berukuran 3 x3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

maka $\det(A) = (a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{21}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Contoh 1: Matriks A berikut $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ memiliki determinan

det(A) ={ (2)(-2)(7) + (1)(5)(-3) + (3)(4)(-1)} –
{(3)(-2)(-3) + (2)(5)(-1) + (1)(4)(7)
= -28 – 15 – 12 – 18 + 10 - 28 = -91

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

Gambar 2.6 Determinan matriks 3 x 3
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Terdapat beberapa aturan determinan. Diasumsikan matriks A adalah matriks n x n. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan memanipulasi matriks A. Aturan-aturan yang berlaku dalam determinan antara lain:

a. Apabila B didapat dengan cara mengalikan sebuah baris pada matriks A dengan k, maka det(B) = k*det(A).
b. Apabila B didapat dengan cara mempertukarkan dua baris pada matriks A, maka det(B) = -det(A).
c. Apabila B didapat dengan cara menambahkan sebuah baris pada matriks A dengan k kali baris yang lain pada matriks A, maka det(B) = det(A).

Determinan matriks juga dapat dihitung menggunakan reduksi baris. Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas).

Contoh 4: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, determinan matriks A dihitung

dengan reduksi baris menggunakan OBE sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1 \leftrightarrow R2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{R3 - 2/3(R1)}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \overset{R3 - 10R2}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}}_{\text{matriks segitiga atas}}$$

Ada satu operasi pertukaran baris, maka p = 1

sehingga det(A) = $(-1)^1(3)(1)(-55) = 165$

Gambar 2.7 Contoh menghitung determinan matriks menggunakan reduksi baris
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Terdapat beberapa teorema yang berlaku mengenai determinan matriks, antara lain:

a. Jika A mengandung sebuah baris nol atau kolom nol, maka det(A) = 0
b. Jika AT adalah matriks transpose dari A, maka det(A^T) = det(A)
c. Jika $A = BC$ maka det(A) = det(B)det(C)
d. Sebuah matriks hanya mempunyai balikan jika dan hanya jika det(A) ≠ 0
e. det(AA^{-1}) = 1/(det(A))

2.4 MATRIKS BALIKAN

Matriks balikan (*inverse*) dari sebuah matriks A adalah matriks B sedemikian sehingga AB = BA = I di mana A dan B merupakan balikan matriks satu sama lain dan I merupakan matriks identitas. Balikan matriks A disimbolkan dengan A^{-1} di mana memiliki sifat $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$\text{Misalkan} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka} \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Gambar 2.8 Contoh matriks balikan
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Untuk matriks A berukuran 2 x 2, maka A^{-1} dihitung sebagai berikut (dengan syarat ad-bc ≠ 0:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Gambar 2.9 Cara menghitung matriks 2x2
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Nilai ad-bc disebut determinan. Matriks dikatakan memiliki balikan apabila ad-bc ≠ 0. Jika ad-bc = 0, maka matriks A tidak memiliki balikan (not invertible), matriks A dinamakan matriks singular.

Matriks balikan juga bisa dicari menggunakan adjoin. Adjoin merupakan transpose matriks kofaktor. Misalkan A adalah matriks n x n dan *Cij* adalah kofaktor entri *aij*. Mencari matriks balikan menggunakan adjoin dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Gambar 2.10 Rumus balikan matriks menggunakan adjoin
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

2.5 MATRIKS KOFAKTOR

Kofaktor adalah hasil perkalian minor dengan suatu angka yang besarnya menuruti suatu aturan yaitu $(-1)^{i+j}$ di mana i adalah baris dan j adalah kolom. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan C*ij*. Sama seperti minor matriks, jumlah kofaktor suatu matriks mengikuti jumlah elemen matriks tersebut.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Gambar 2.11 Kofaktor entri a_{ij}
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

The minor of the element a_{12} is as follows.

$$M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Minor Matrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{Co-factor Matrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & (-1)^{1+3}M_{13} \\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & (-1)^{2+3}M_{23} \\ (-1)^{3+1}M_{31} & (-1)^{3+2}M_{32} & (-1)^{3+3}M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Gambar 2.12 Rumus kofaktor matriks
Sumber: https://www.cuemath.com/algebra/cofactor-matrix/

2.6 MATRIKS ADJOIN

Adjoin dari sebuah matriks diperoleh dengan mengambil transpose dari elemen ko-faktor dari matriks yang diberikan. Adjoin dari matriks B adalah transpose dari matriks ko-faktor dari B. Adjoin dari sebuah matriks persegi B dilambangkan dengan adj(B) di mana B merupakan matriks persegi n x n. Langkah-langkah penting dalam mencari matriks adjoin, antara lain:

A. Mencari minor matriks M dari semua elemen matriks B.
B. Mencari kofaktor matriks C dari semua elemen minor matriks M.
C. Mencari adj B dengan menggunakan transpose dari kofaktor matriks C.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Maktriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi matriks kofaktor: } \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.13 Contoh persoalan mencari matriks kofaktor
Sumber: https://www.cuemath.com/algebra/cofactor-matrix/

2.7 KAIDAH CRAMER

Dalam aljabar linear, aturan Cramer adalah formula khusus yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang mengandung jumlah persamaan sama dengan jumlah yang tidak diketahui, efisien ketika sistem persamaan memiliki solusi unik. Aturan ini dinamai dari Gabriel Cramer (1704–1752), yang menerbitkan aturan ini untuk jumlah yang tidak diketahui yang sewenang-wenang pada tahun 1750. Ini adalah rumus yang paling umum digunakan untuk mendapatkan solusi untuk sistem persamaan yang diberikan yang dibentuk melalui matriks. Solusi yang diperoleh menggunakan aturan Cramer akan dalam bentuk determinan matriks koefisien dan matriks yang diperoleh darinya dengan menggantikan satu kolom dengan vektor kolom dari sisi kanan persamaan.

Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah (variable) sedemikian sehingga det(A) □ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$-x + 2y - 3z = 1$$

$$2x \quad + \quad z = 0$$

$$3x - 4y + 4z = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \\ \mathbf{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{1} & -3 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 4 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{1} \\ 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 3 & -4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

• Hitung determinan masing-masing A_j:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

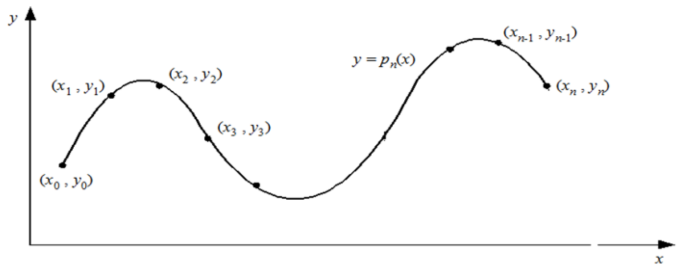
• Hitung nilai x_i sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-15}{10} = \frac{-3}{2} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-16}{10} = \frac{-8}{5}$$

Gambar 2.14 Contoh perhitungan SPL menggunakan kaidah Cramer
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

2.8 INTERPOLASI POLINOM

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga yi = pn(xi) untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Gambar 2.15 Ilustrasi beberapa titik yang diinterpolasi secara polinomial.
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Setelah polinom interpolasi pn(x) ditemukan, pn(x) dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang [x0, xn].

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). adalah berbentuk pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxn. Jika hanya ada dua titik, (x0, y0) dan (x1, y1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah p1(x) = a0 + a1x yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x0, y0), (x1, y1), dan (x2, y2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah p2(x) = a0 + a1x + a2x2 atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x0, y0), (x1, y1), (x2, y2), dan (x3, y3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah p3(x) = a0 + a1x + a2x2 + a3x3, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (xi, yi) ke dalam persamaan polinom pn(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxn untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a0, a1, a2, …, an,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai *a*0, *a*1, …, *an*, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada *x* = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk *p*2(*x*) = *a*0 + *a*1*x* + *a*2*x*2. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

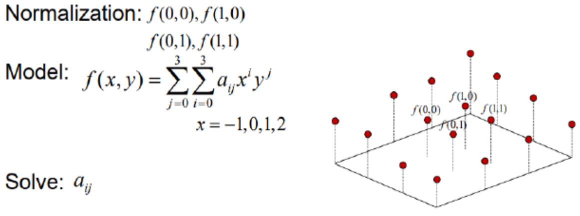
$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$
$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$
$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan *a*0 = 0.6762, *a*1 = 0.2266, dan *a*2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah *p*2(*x*) = 0.6762 + 0.2266*x* - 0.0064*x*2. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada *x* = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: *p*2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)2 = 2.2192.

2.9 INTERPOLASI BICUBIC SPINE

Bicubic spline interpolation adalah metode interpolasi yang digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. *Bicubic spline interpolation* melibatkan konsep *spline* dan konstruksi serangkaian polinomial kubik di dalam setiap sel segi empat dari data yang diberikan. Pendekatan ini menciptakan permukaan yang halus dan kontinu, memungkinkan untuk perluasan data secara visual yang lebih akurat daripada metode interpolasi linear.

Dalam pemrosesan menggunakan interpolasi *bicubic spline* digunakan 16 buah titik, 4 titik referensi utama di bagian pusat, dan 12 titik di sekitarnya sebagai aproksimasi turunan dari keempat titik referensi untuk membagun permukaan bikubik. Bentuk pemodelannya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.16 Pemodelan interpolasi bicubic spine
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

Selain melibatkan model dasar, juga digunakan model turunan berarah dari kedua sumbu, baik terhadap sumbu *x*, sumbu *y,* mapun keduanya. Persamaan polinomial yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x^{i}y^{j}$$

$$f_x(x,y)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}ix^{i-1}y^{j}$$

$$f_y(x,y)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_{ij}jx^{i}y^{j-1}$$

$$f_{xy}(x,y)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_{ij}ijx^{i-1}y^{j-1}$$

Gambar 2.17 Pemodelan turunan berarah
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

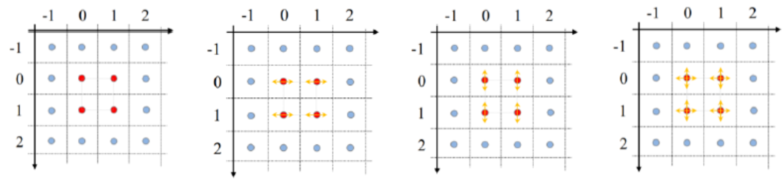
Dengan menggunakan nilai fungsi dan turunan berarah tersebut, dapat terbentuk sebuah matriks solusi *X* yang membentuk persamaan penyelesaian sebagai berikut.

$$y = Xa$$

$$\begin{bmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f_x(0,0) \\ f_x(1,0) \\ f_x(0,1) \\ f_x(1,1) \\ f_y(0,0) \\ f_y(1,0) \\ f_y(0,1) \\ f_y(1,1) \\ f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&2&3&0&1&2&3&0&1&2&3&0&1&2&3 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&2&0&0&0&3&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&2&2&2&2&3&3&3&3 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&2&3&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&2&0&0&0&3&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&2&3&0&2&4&6&0&3&6&9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{03} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Perlu diketahui bahwa elemen pada matriks *X* adalah nilai dari setiap komponen koefisien *aij* yang diperoleh dari persamaan fungsi maupun persamaan turunan yang telah dijelaskan sebelumnya. Sebagai contoh, elemen matriks *X* pada baris 8 kolom ke 2 adalah koefisien dari *a10* pada ekspansi sigma untuk *fx*(1, 1) sehingga diperoleh nilai konstanta 1 x 11-1 x 10 = 1, sesuai dengan isi matriks *X*.

Nilai dari vektor *a* dapat dicari dari persamaan *y* = *Xa*, lalu vektor *a* tersebut digunakan sebagai nilai variabel dalam *f*(*x, y*), sehingga terbentuk fungsi interpolasi bicubic sesuai model. Tugas Anda pada studi kasus ini adalah membangun persamaan *f*(*x, y*) yang akan digunakan untuk melakukan interpolasi berdasarkan nilai *f*(*a, b*) dari masukan matriks 4 x 4. Nilai masukan *a* dan *b* berada dalam rentang [0, 1]. Nilai yang akan diinterpolasi dan turunan berarah disekitarnya dapat diilustrasikan pada titik berwarna merah pada gambar di bawah.



Gambar 2.18 Nilai fungsi yang akan di interpolasi pada titik merah, turunan berarah terhadap sumbu *x*, terhadap sumbu *y*, dan keduanya (kiri ke kanan).
Sumber: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/

2.10 REGRESI LINIER BERGANDA

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada persamaan jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat persamaan umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap βi dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \quad &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \quad + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \quad &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} &+ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \quad = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{aligned}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III

IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM DALAM JAVA

1. Class Main (Main.java)

```java
import java.util.Scanner;

public class Main {
    public static void menu() {
        System.out.println("MENU\r\n" +
                "1. Sistem Persamaaan Linier\r\n" +
                "2. Determinan\r\n" +
                "3. Matriks balikan\r\n" +
                "4. Interpolasi Polinom\r\n" +
                "5. Interpolasi Bicubic Spline\r\n" +
                "6. Regresi linier berganda\r\n" +
                "0. Keluar\r\n" +
                "silahkan masukkan pilihan anda" +
                "");
    }

    public static void subMenu() {
        System.out.println("MENU\r\n" + //
                "1. Metode eliminasi Gauss\r\n" + //
                "2. Metode eliminasi Gauss-Jordan\r\n" + //
                "3. Metode matriks balikan\r\n" + //
                "4. Kaidah Cramer\n" +
                "Lainnya untuk kembali ke menu utama");
    }

    public static void subMenu2() {
        System.out.println("MENU\r\n" + //
                "1. Metode eliminasi Ekspansi Kofaktor\r\n" + //
                "2. Metode matriks OBE\n" +
                "Lainnya untuk kembali ke menu utama");
    }

    public static void subMenu3() {
        System.out.println("MENU\r\n" + //
                "1. Metode eliminasi OBE\r\n" + //
                "2. Metode matriks ADJOINT\n" +
                "Lainnya untuk kembali ke menu utama");
    }

    public static void inputMethod() {
        System.out.println("Metode input\r\n" + //
                "1. Melalui cli\r\n" + //
                "2. Melalui file TXT\n" +
                "Lainnya untuk kembali ke menu utama");
    }

    public static void main(String[] args) {
        boolean process = true;
        Scanner scan = new Scanner(System.in);
        while (process) {
            menu();
            int choice = scan.nextInt();
            if (choice == 1) {
                subMenu();
                int subChoice = scan.nextInt();
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.Spl.mainProses(subChoice, inputChoice);
            } else if (choice == 2) {
                subMenu2();
                int subChoice = scan.nextInt();
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.Determinan.mainProses(subChoice, inputChoice);
            } else if (choice == 3) {
                subMenu3();
                int subChoice = scan.nextInt();
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.MatriksBalikan.mainProses(subChoice, inputChoice);
            } else if (choice == 4) {
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.Interpolasi.mainProses(inputChoice);
            } else if (choice == 5) {
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.Bikubik.mainProses(inputChoice);
            } else if (choice == 6) {
                inputMethod();
                int inputChoice = scan.nextInt();
                utilities.RegresiBerganda.mainProses(inputChoice);
            } else if (choice == 0) {
                process = false;
                System.out.println("Terima kasih sudah menggunakan");
            }
        }
    }
}
```

File main berisi mekanisme untuk memunculkan menu utama beserta pilihan-pilihannya serta navigasinya. Di dalam modul ini diinisialisasi Scanner dan Matrix sementara yang nantinya akan diisi oleh input pengguna dari keyboard ataupun dari file .txt. Modul-modul pemrosesan matriks dapat diakses melalui submenu-submenu pada menu utama ini. Untuk keluar dari program, cukup dengan memilih opsi "Keluar".

2. Class Spl (Spl.java)

Fungsi ini akan menerima representasi SPL berupa matriks augmented. Program lalu akan mengubah matriks augmented tersebut menjadi bentuk matriks eselon baris dengan mencari Leading One di setiap baris dan memindahkan baris dengan isi nol semua ke bawah. Bila dalam pencarian ini terdapat baris dengan nol semua di kiri, namun tidak nol di kanan, Program akan mereturn 0 menandakan bahwa SPL tidak konsisten. Fungsi juga akan menerima representasi SPL berupa matriks augmented. Program lalu akan mengubah matriks augmented tersebut menjadi bentuk Row Echelon Form dengan mencari Leading One di setiap baris dan memindahkan baris dengan isi nol semua ke bawah. Bila dalam pencarian ini terdapat baris dengan nol semua di kiri, namun tidak nol di kanan. Selain itu, fungsi akan menerima representasi SPL berupa matriks augmented. Lalu program akan memvalidasi apakah bagian kiri matriks augmented adalah matriks singular atau bukan. Jika ya, maka SPL tidak dapat diselesaikan dengan cara ini. Jika tidak, maka dilanjutkan dengan mengalikan inverse kiri matriks augmented dengan kanan matriks augmented.

3. Class RegresiBerganda
   Program akan membaca matriks berupa serangkaian data persamaan. Lalu program akan menghitung berdasarkan rumus umum yang diberikan. Setelah selesai, program akan menampilkan prediksi dengan persamaan untuk parameter yang diberikan.

4. Class MatriksBalikan
   Class tersebut akan menerima matriks sembarang, lalu akan dilakukan validasi apakah matriks tersebut adalah matriks persegi, memiliki determinan nol, atau tidak. Bila bukan matriks persegi atau memiliki determinan yang nol, maka akan mereturn 0 yang menandakan matriks singular. Bila tidak, akan dilanjutkan dengan membuat matriks baru berukuran BARIS x 2*KOLOM dan membuat bagian kiri matriks tersebut menjadi matriks eselon baris. Lalu akan diduplikat matriks yang menjadi masukan dengan bagian kanan matriks baru tersebut dan akan mereturn 1 menandakan operasi berhasil dilakukan.
   Class tersebut juga akan menerima parameter berupa matriks m berukuran $n \times n$. Apabila determinan matriks m sama dengan 0, program akan mengembalikan nilai 0 sebagai pertanda matriks tidak mempunyai balikan. Jika tidak, program kemudian akan membuat matriks baru berukuran $n \times n$ untuk kofaktor dan matriks penyimpanan sementara untuk mencari nilai kofaktor. Untuk setiap loop, program akan menghitung nilai determinan matriks penyimpanan sementara untuk dijadikan elemen matriks kofaktor. Setelah itu, matriks kofaktor akan di-transpose untuk memperoleh matriks adjoin. Tiap elemen matriks adjoin kemudian akan dikalikan dengan determinan untuk menghasilkan matriks invers.
5. Class Interpolasi
   Class tersebut akan menerima banyaknya pasangan titik yang hendak dimasukkan ke dalam program, lalu menginisialisasi perulangan untuk menerima titik. Program kemudian meng-assign nilai x yang diperlukan ke matriks koefisien dan nilai y ke kolom terakhir sehingga terbentuk matriks *augmented* yang mewakili persamaan polinomial. Setelah itu, matriks tersebut akan diproses menggunakan penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan Kaidah Cramer. Program kemudian akan memberikan luaran berupa persamaan polinomial Bersama koefisien persamaan yang

telah ditemukan menggunakan Kaidah Cramer. Program kemudian menerima input berupa angka yang hendak ditaksir lalu memberikan luaran berupa hasil aproksimasi angka tersebut.

6. Class FileDitulis

Mekanisme untuk membaca dan menulis file .txt diatur dalam modul ReadWriteText.java. Pembacaan dilakukan oleh fungsi readtxt() yang memiliki parameter Matrix dan Scanner berupa string. Pembacaan diawali dengan meminta input nama file dari user (dipastikan letak file .txt berada di dalam folder "/test/input" dan sudah terisi matriks sesuai format yang ditentukan), kemudian program akan membaca matriks di dalam .txt dan menyalinnya ke dalam parameter Matrix. Bila file tidak ditemukan, akan dimunculkan pesan error.

Sementara itu, Penulisan dilakukan oleh fungsi writetxt() yang memiliki parameter String dan Scanner. Penulisan diawali dengan meminta input nama file output dari user. Selanjutnya, bila file tersebut belum ada, maka program akan otomatis membuat file terlebih dahulu. Bila sudah ada, maka program akan langsung menuliskan string dari parameter String (pada baris baru jika sebelumnya sudah ada isinya. Setelah selesai menulis ke dalam .txt, akan dimunculkan pesan bahwa penulisan pada file selesai.

7. Class Determinan

Program akan menerima parameter berupa matriks m berukuran $n\times n$. Untuk kasus basis, program akan memberikan luaran berupa $m[0][0]\times m[1][1]-m[0][1]\times m[1][0]$ apabila ukuran matriks 2 ×2, dan luaran berupa $m[0][0]$ apabila matriks berukuran 1×1. Di luar kasus tersebut, program akan membuat matriks baru berukuran $(n-1)\times(n-1)$. Karena operasi perhitungan dapat dilakukan untuk satu baris saja, program akan memanfaatkan seleksi di baris 0. Program kemudian akan mengisikan matriks baru dengan elemen di matriks m yang tidak berada di baris 0 dan di kolom 0. Setelah itu, program akan menjumlahkan nilai determinan sementara dengan nilai yang ada sebelumnya menggunakan kofaktor entri. Program kemudian akan berjalan secara rekursif hingga basis (ukuran matriks 2×2) tercapai.

Class ini juga akan menerima matriks m berukuan $n\times n$ lalu menganalisis baris per baris. Program kemudian melakukan pengubahan baris apabila diperlukan dan menghitung jumlah terjadinya perubahan baris. Setelah itu, program akan mengubah baris menjadi bentuk triangular dan mengalikan nilai semua elemen diagonal yang ada. Program kemudian akan mengalikan nilai tersebut dengan $(-1)p$ dengan p merupakan jumlah perubahan baris.

8. Class Bikubik

Pada program ini, interpolasi bicubic spline adalah teknik interpolasi yang digunakan untuk mengaproksiasi fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. Dalam pemrosesannya, digunakan 16 buah titik, yang terdiri dari 4 titik referensi utama di bagian pusat dan 12 titik di sekitarnya. Hal ini bertujuan sebagai aproksimasi turunan dari keempat titik referensi untuk membagun permukaan bikubik.

BAB IV

EKSPERIMEN

4.1 Mencari Solusi SPL Ax=b

4.1.1 Eksperimen 1a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
3
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
4
Masukkan jumlah kolom:
5
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Menggunakan Metode Matriks Balikan
x1 = 1.3333333333333335
x2 = -2.3333333333333304
x3 = -1.0
x4 = 1.0

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_1a.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3, dan x4 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.1.2 Eksperimen 1b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
3
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
4
Masukkan jumlah kolom:
6
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
Menggunakan Metode Matriks Balikan
x1 = 3.000000000000001
x2 = 1.1102230246251565E-15
x3 = -1.0
x4 = 1.1102230246251565E-16

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_1b.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3, dan x4 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.1.3 Eksperimen 1c

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
3
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
3
Masukkan jumlah kolom:
7
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1
Menggunakan Metode Matriks Balikan
x1 = 1.0
x2 = 1.0
x3 = -1.0

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_1c.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2, dan x3 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.1.4 Eksperimen 1d

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

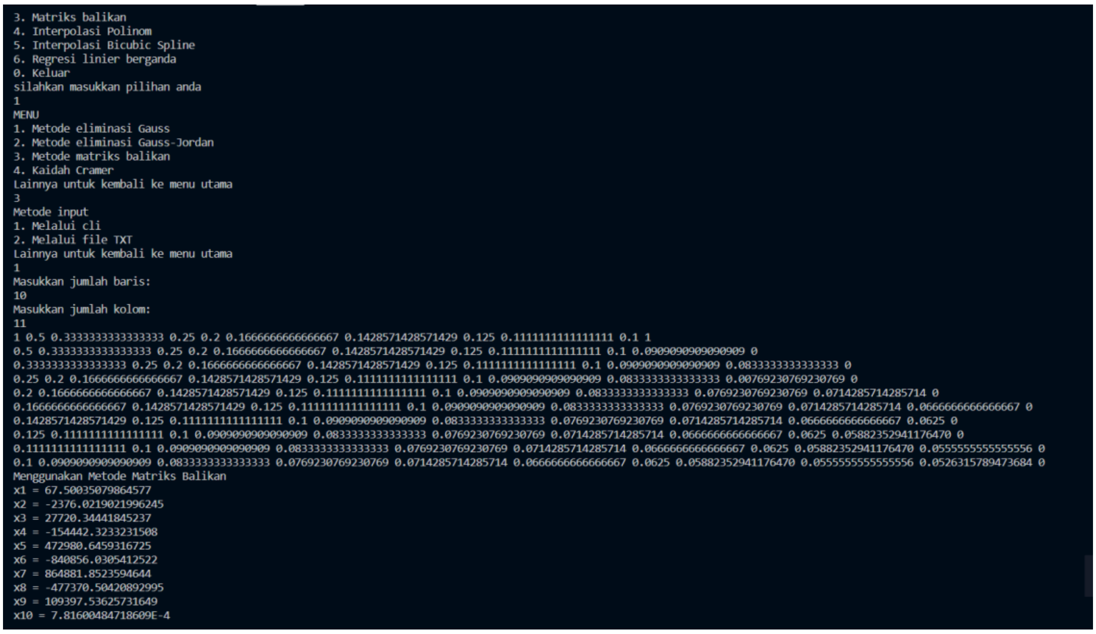
a. Untuk n = 6

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
3
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
6
Masukkan jumlah kolom:
7
1 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666667 1
0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666667 0.1428571428571429 0
0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0
0.25 0.2 0.1666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0.1111111111111111 0
0.2 0.1666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0.1111111111111111 0.1 0
0.1666666666666667 0.1428571428571429 0.125 0.1111111111111111 0.1 0.0909090909090909 0
Menggunakan Metode Matriks Balikan
x1 = 35.99999999847885
x2 = -629.9999999566953
x3 = 3359.9999997089526
x4 = -7559.9999992480525
x5 = 7559.99999917505
x6 = -2771.9999996766783

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_2d.txt
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4,x5,x6 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

b. Untuk n = 10



Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,10 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.2 Mencari solusi dari SPL berbentuk matriks augmented

4.2.1 Eksperimen 2a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
4
Masukkan jumlah kolom:
5
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Menggunakan Metode Gauss
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
Solusi yang diberikan berada dalam bentuk parametrik.
x1 = (-1.0)+((s))-(2.0(q))+(0+(2.0(q)))
 x2 = 0+(2.0(q))
 x3 = (q)
 x4 = (s)
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4 di mana SPL tersebut mempunyai parametrik. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.2.2 Eksperimen 2b

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
6
Masukkan jumlah kolom:
5
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
Menggunakan Metode Gauss
1.0 0.0 4.0 0.0 4.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
Solusi yang diberikan berada dalam bentuk parametrik.
x1 = (4.0)-(4.0(1.0))
 x2 = (6.0)-(4.0(1.0))
 x3 = (1.0)
 x4 = (1.0)
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.3 Mencari Solusi dari SPL berbentuk

4.3.1 Eksperimen 3a

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0\\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1\\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2\\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
4
Masukkan jumlah kolom:
5
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
Menggunakan Metode Gauss-Jordan
x1 = -0.22432432432432436
 x2 = 0.18243243243243246
 x3 = 0.7094594594594594
 x4 = -0.25810810810810797

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_3a.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.3.2 Eksperimen 3b

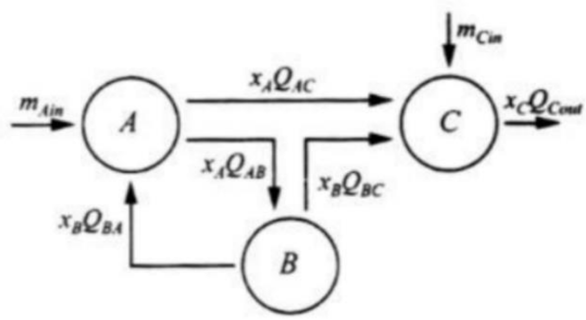
$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

Pada percobaan ini, menggunakan metode matriks Balikan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3,x4,x5,x6 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten). Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

```
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
12
Masukkan jumlah kolom:
10
0 0 0 0 0 0 1 1 1 13
0 0 0 1 1 1 0 0 0 15
1 1 1 0 0 0 0 0 0 8
1 1 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0 3.81
0 0 1 0 0 1 0 0 1 18
0 1 0 0 1 0 0 1 0 12
1 0 0 1 0 0 1 0 0 6
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
Menggunakan Metode Gauss-Jordan
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
Tidak ada solusi.
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa bahwa SPL tersebut tidak memiliki solusi. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.4 Mencari Solusi SPL dari Soal Cerita Sistem Reaktor



$$\begin{aligned}
\text{A:}\quad & m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
\text{B:}\quad & Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
\text{C:}\quad & m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}$$

Tentukan solusi *xA*, *xB*, *xC* dengan menggunakan parameter berikut : *QAB* = 40, *QAC* = 80, *QBA* = 60, *QBC* = 20 dan *QCout* = 150 *m*3/s dan *mAin* = 1300 dan *mCin* = 200 *mg/s*.

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
1
MENU
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
1
Masukkan jumlah baris:
3
Masukkan jumlah kolom:
4
60 -40 -80 -1300
40 -60 -20 0
80 20 -150 -200
Menggunakan Metode Gauss
1.0 -0.6666666666666666 -1.3333333333333333 -21.666666666666668
-0.0 1.0 -0.9999999999999998 -26.0
0.0 0.0 1.0 114.66666666666677
1.0 -0.6666666666666666 -1.3333333333333333 -21.666666666666668
-0.0 1.0 -0.9999999999999998 -26.0
0.0 0.0 1.0 114.66666666666677
x1 = 190.3333333333335
 x2 = 88.66666666666674
 x3 = 114.66666666666677

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
spl_4.txt
```

Pada percobaan ini, menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui CLI (Terminal) dan pengguna harus menuliskan input dalam terminal. Didapat hasil berupa x1,x2,x3 di mana SPL tersebut mempunyai solusi(konsisten).

4.5 Studi Kasus Interpolasi

4.5.1 Eksperimen 5a

Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai berikut:

$x = 0.2$ $f(x) = ?$
$x = 0.55$ $f(x) = ?$
$x = 0.85$ $f(x) = ?$
$x = 1.28$ $f(x) = ?$

1. Untuk x = 0.2

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5a1.txt
Matriks inter5a1.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = -0.02297656249999916 +0.23999999999999622x^1 +0.1973958333333954x^2 -3.126388037344441E-13x^3 +0.02604166666696983x^4 -1.847411129762605E-13x^5 +3.907985046680551
E-14x^6
f(0.2) = 0.032960937500000495

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5a1.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 0,0329 Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

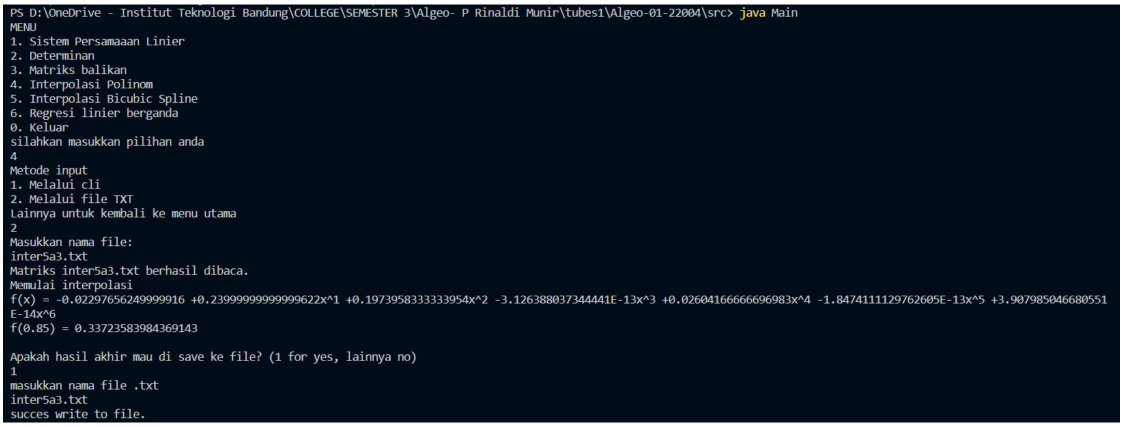
2. Untuk x = 0.55

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5a2.txt
Matriks inter5a2.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = -0.02297656249999916 +0.23999999999999622x^1 +0.1973958333333954x^2 -3.126388037344441E-13x^3 +0.02604166666696983x^4 -1.847411129762605E-13x^5 +3.907985046680551
E-14x^6
f(0.55) = 0.17111865234373505

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5a2.txt
succes write to file.
```

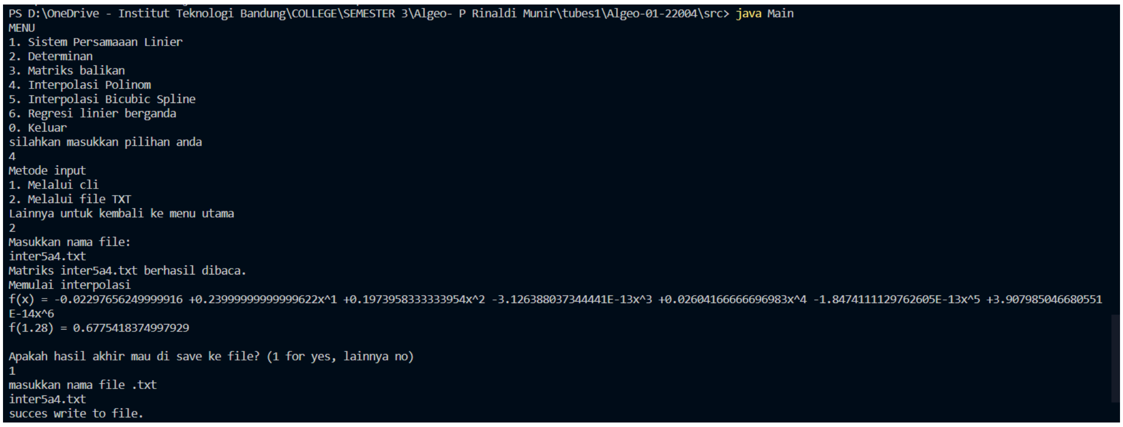
Pada percobaan ini, menggunakan metode interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 0,17111. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

3. **Untuk x = 0.85**



Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 0.3372. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4. **Untuk x = 1.28**



Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 0.67754. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.5.2 Eksperimen 5b

Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2022 hingga 31 Agustus 2022:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

Tanggal (desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai contoh, untuk tanggal 17/06/2022 (dibaca: 17 Juni 2022) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal (desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **interpolasi polinomial** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2022
b. 10/08/2022
c. 05/09/2022
d. Masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2022.

a. Untuk 16/07/2022

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5b1.txt
Matriks inter5b1.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = 3.570985165206875E9 -5.1394402937259E9x^1 +3.1611239411261854E9x^2 -1.1029618291156907E9x^3 +2.4224203200686997E8x^4 -3.488607572823892E7x^5 +3304567.071139317x^6
-198981.23957105883x^7 +6922.5994473771325x^8 -106.15471100372683x^9
f(7.516) = 53.217875480651855

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5b1.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 53.21787. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

b. Untuk 10/08/2022

```
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5b2.txt
Matriks inter5b2.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = 3.570985165206875E9 -5.1394402937259E9x^1 +3.1611239411261854E9x^2 -1.1029618291156907E9x^3 +2.4224203200686997E8x^4 -3.488607572823892E7x^5 +3304567.071139317x^6
-198981.23957105883x^7 +6922.5994473771325x^8 -106.15471100372683x^9
f(8.323) = 36.006526947021484

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5b2..txt
succes write to file
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah 36.0065. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

c. Untuk 05/09/2022

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5b3.txt
Matriks inter5b3.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = 3.570985165206875E9 -5.1394402937259E9x^1 +3.1611239411261854E9x^2 -1.1029618291156907E9x^3 +2.4224203200686997E8x^4 -3.488607572823892E7x^5 +3304567.071139317x^6
-198981.23957105883x^7 +6922.5994473771325x^8 -106.15471100372683x^9
f(9.16) = -564.5008010864258

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5b3.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah -564.500. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

d. Tanggal yang dipilih : 31/12/2022

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5b4.txt
Matriks inter5b4.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = 3.570985165206875E9 -5.1394402937259E9x^1 +3.1611239411261854E9x^2 -1.1029618291156907E9x^3 +2.4224203200686997E8x^4 -3.488607572823892E7x^5 +3304567.071139317x^6
-198981.23957105883x^7 +6922.5994473771325x^8 -106.15471100372683x^9
f(13.0) = -5.0411209050561523E8

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5b4.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil berupa fungsi dan hasil akhir prediksi dari tanggal dalam bentuk decimal dari fungsi tersebut. Hasil akhir adalah -5.0411. Tanggal yang dipilih adalah 31 Desember 2022. Pada akhir percobaan, pengguna diberi pilihan apakah ingin menuliskan hasil pada file atau tidak.

4.5.3 Eksperimen 5c

Sederhanakan fungsi $f(x)$ yang memenuhi kondisi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2].
Sebagai contoh, jika $n = 5$, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 – 0)/5 = 0.4$.

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
4
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
inter5c.txt
Matriks inter5c.txt berhasil dibaca.
Memulai interpolasi
f(x) = -89.03723363943281 +3122.4889186056785x^1 -47531.19439106347x^2 +424924.14079588605x^3 -2526270.938641628x^4 +1.0692265135871124E7x^5 -3.360388612260585E7x^6 +8.06
2272072900794E7x^7 -1.5041633324669918E8x^8 +2.2084862634780467E8x^9 -2.5693753205800506E8x^10 +2.3742082657324237E8x^11 -1.7389200310188764E8x^12 +1.0025326748453315E8x^
13 -4.490721864188724E7x^14 +1.529560617045665E7x^15 -3825095.381927262x^16 +661831.500235507x^17 -70749.28029838839x^18 +3518.9706890347115x^19
f(1.15) = 0.5555222426701221

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
inter5c.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan interpolasi polinom dengan mengambil n=20 untuk mengambil jumlah titik yang diperlukan untuk menyelesaikan soal sehingga diperoleh fungsi seperti pada gambar.

4.6 Studi Kasus Regresi Linier Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Untuk titik x1 = 50, x2 = 76, x3 = 29.3

```
PS D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\COLLEGE\SEMESTER 3\Algeo- P Rinaldi Munir\tubes1\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
6
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
Reg.txt
Matriks Reg.txt berhasil dibaca.
Masukkan titik :
50 76 29.3
f(x) = -3.507778140876326 -0.0026249907458755217x1 +7.989410472219183E-4x2 +0.15415503019835342x3
maka hasilnya pada test case di atas adalah 0.9384342262305196

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
Reg.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan regresi linier berganda untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Pengguna juga diharapkan untuk memasukkan tiga titik sebagai titik uji terhadap regresi linier berganda. Didapat hasil nilai nitrous oksida adalah 0.9384.

4.7 Studi Kasus Interpolasi Bicubic Spline

$$\begin{pmatrix} 21 & 98 & 125 & 153 \\ 51 & 101 & 161 & 59 \\ 0 & 42 & 72 & 210 \\ 16 & 12 & 81 & 96 \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai:

$f(0, 0) = ?$
$f(0.5, 0.5) = ?$
$f(0.25, 0.75) = ?$
$f(0.1, 0.9) = ?$

a. Untuk f(0,0)

```
PS C:\Coding\Tubes\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
5
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
bs1.txt
Hasil dari f(0.0,0.0) adalah 21.0

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
bs1.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan bicubic spline untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil akhir nilai adalah 21.

b. Untuk f(0.5,0.5)

```
PS C:\Coding\Tubes\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
5
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
bs2.txt
Hasil dari f(0.5,0.5) adalah 87.796875

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
bs2.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan bicubic spline untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil akhir nilai adalah 87,796.

c. Untuk f(0.25,0.75)

```
PS C:\Coding\Tubes\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
5
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
bs3.txt
Hasil dari f(0.25,0.75) adalah 117.732177734375

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
bs3.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan bicubic spline untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil akhir nilai adalah 117,7321.

d. Untuk f(0.1,0.9)

```
PS C:\Coding\Tubes\Algeo-01-22004\src> java Main
MENU
1. Sistem Persamaaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Interpolasi Bicubic Spline
6. Regresi linier berganda
0. Keluar
silahkan masukkan pilihan anda
5
Metode input
1. Melalui cli
2. Melalui file TXT
Lainnya untuk kembali ke menu utama
2
Masukkan nama file:
bs4.txt
Hasil dari f(0.1,0.9) adalah 128.57518700000003

Apakah hasil akhir mau di save ke file? (1 for yes, lainnya no)
1
masukkan nama file .txt
bs4.txt
succes write to file.
```

Pada percobaan ini, menggunakan bicubic spline untuk menyelesaikan soal. Digunakan input melalui file TXT di mana pengguna harus menulis input pada file tersebut. Didapat hasil akhir nilai adalah 128,5751.

BAB V
KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Pada penyelesaian tugas besar ini, telah didapatkan:

1. Matriks secara matematis dalam bentuk *abstract data type*
2. (OBE) Operasi Baris Elementer (perkalian, penjumlahan, pertukaran dua buah baris)
3. Metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, matriks kofaktor, dan matriks adjoin kaidah Cramer
4. Operasi pencarian solusi sistem persamaan linear
5. Metode mencari determinan matriks
6. Metode pencarian matriks balikan dari sebuah matriks
7. Aplikasi matriks dan operasi-operasi lainnya dalam kehidupan sehari-hari, antara lain: interpolasi polinomial, regresi linear berganda, dan bicubic spline interpolation.

5.2 Saran

Setelah menyelesaikan tugas besar Algoritma dan Struktur Data, diperoleh beberapa saran agar pengerjaan tugas ataupun proyek ke depan bisa lebih baik lagi, antara lain penerapan modular programming dan memanfaatkan waktu dengan lebih baik lagi agar tidak deadliner.

Selain itu, agar penyelesaian tugas besar bisa lebih baik, disarankan bagi asisten juga untuk tidak hanya mencantumkan penjelasan dan abstraksi dari penugasan, namun juga memberikan contoh jawaban untuk setiap test case agar para mahasiswa dapat mengerjakan tugas besar dengan lebih terarah dan mengetahui jawaban yang benar.

5.3 Refleksi

Setelah menyelesaikan tugas besar ini, didapat beberapa pelajaran penting yang bisa dipetik. Kami menjadi lebih paham mengenai penerapan sistem persamaan linier dan juga matriks dalam kehidupan sehari-hari serta menjadi lebih mengerti tentang pentingnya matriks dan SPL dalam menyelesaikan masalah-masalah di kehidupan.

BAB VI
DAFTAR PUSTAKA

https://www.profematika.com/eliminasi-gauss-dan-contoh-penerapannya/
https://byjus.com/maths/gauss-elimination-method/
https://aws.amazon.com/what-is/java/
https://spada.uns.ac.id/mod/resource/view.php?id=179562&forceview=1
https://www.quipper.com/id/blog/mapel/matematika/matriks/
https://www.mademrmatika.id/2017/08/pengertian-minor-kofaktor-matriks.html
https://www.cuemath.com/algebra/adjoint-of-a-matrix/
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/
Modul Tubes 1 Algeo 2023