UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Progettazione e Analisi di Algoritmi
A.A. 2016/2017

Verifica numerica di alcuni risultati presenti nell'articolo "Summations in Bernoulli's Triangle via Generating Functions", Kamilla Oliver, Helmut Prodinger, Journal of Integer Sequences, Vol. 20 (2017)

Francesco Mucci
6173140

Abstract

Obiettivo del lavoro è verificare numericamente il valore di particolari somme di elementi appartenenti all' m-esimo Triangolo di Bernoulli. Tali somme e le loro funzioni generatrici sono introdotte ed analizzate nell'articolo *"Summations in Bernoulli's Triangle via Generating Functins"* di K. Oliver e H. Prodinger.

La verifica numerica verrà effettuata tramite lo strumento di calcolo simbolico Maple.

1 Introduzione

Sia

$$B(1, n, k) = \binom{n}{k},$$

$$B(m+1, n, k) = \sum_{j=0}^{k} B(m, n, j) \text{ per } m \geq 1,$$

la relazione di ricorrenza che definiscie gli elementi dell' m-esimo Triangolo di Bernoulli.
Definiamo due distinte procedure che mi permettono di calcolare tali elementi:

```
Bernoulli :=proc(m, n, k)
 option remembe;
  if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
  if m = 1 then
    binomial(n, k);
  else
    add( Bernoulli(m − 1, n, j) , j = 0 ..k);
  end if;
end proc
```

```
Bernoulli := proc(m, n, k)                                                    (1)
    option remembe;
    if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
    if m = 1 then binomial(n, k) else add(Bernoulli(m − 1, n, j), j = 0 ..k) end if
end proc
```

```
B := proc(m, n, k)
 option remember;
  if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
  if k = 0 then 1;
  elif m = 1 then binomial(n, k);
  else B(m, n, k − 1) + B(m − 1, n, k) end if;
 end proc;
```

```
B := proc(m, n, k)                                                            (2)
    option remember;
    if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
    if k = 0 then 1 elif m = 1 then binomial(n, k) else B(m, n, k − 1) + B(m − 1, n, k) end if
end proc
```

Dunque, eseguiamo un semplice test per verificare che le due procedure producano gli stessi elementi.

```
testB :=proc(m, N)
 local i, j;
  for i from 0 to N do
   for j from 0 to N do print( [m, i, j], Bernoulli(m, i, j), B(m, i, j) )end do;
  end do;
 end proc;
```

```
testB := proc(m, N)                                                           (3)
    local i, j;
```

```
    for i from 0 to N do
        for j from 0 to N do
            print([m, i, j], Bernoulli(m, i, j), B(m, i, j))
        end do
    end do
end proc
testB(0, 2);
testB(1, 2);
testB(2, 2);
testB(3, 2);
```

Error, (in Bernoulli) m must be greater than 0

$$[1, 0, 0], 1, 1$$
$$[1, 0, 1], 0, 0$$
$$[1, 0, 2], 0, 0$$
$$[1, 1, 0], 1, 1$$
$$[1, 1, 1], 1, 1$$
$$[1, 1, 2], 0, 0$$
$$[1, 2, 0], 1, 1$$
$$[1, 2, 1], 2, 2$$
$$[1, 2, 2], 1, 1$$
$$[2, 0, 0], 1, 1$$
$$[2, 0, 1], 1, 1$$
$$[2, 0, 2], 1, 1$$
$$[2, 1, 0], 1, 1$$
$$[2, 1, 1], 2, 2$$
$$[2, 1, 2], 2, 2$$
$$[2, 2, 0], 1, 1$$
$$[2, 2, 1], 3, 3$$
$$[2, 2, 2], 4, 4$$
$$[3, 0, 0], 1, 1$$
$$[3, 0, 1], 2, 2$$
$$[3, 0, 2], 3, 3$$
$$[3, 1, 0], 1, 1$$
$$[3, 1, 1], 3, 3$$
$$[3, 1, 2], 5, 5$$
$$[3, 2, 0], 1, 1$$
$$[3, 2, 1], 4, 4$$
$$[3, 2, 2], 8, 8 \tag{4}$$

Per la precisione, i Triangoli di Bernoulli sono definiti come Matrici Triangolari inferiori. E' possibile verificare che il primo di questi Triangoli coincide con il Triangolo di Tartaglia-Pascal.

```
Bernoulli_triangle :=proc(m, N, M)
  local T, i, j;
  if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
  T := Matrix(N, M, 0);
  for i from 1 to N do
    for j from 1 to M do T[i, j] := B(m, i - 1, j - 1) end do;
    T := MTM[tril](T);
  end do;
   eval(T);
  end proc
```

```
Bernoulli_triangle := proc(m, N, M)                                    (5)
    local T, i, j;
    if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
    T := Matrix(N, M, 0);
    for i to N do
        for j to M do T[i, j] := B(m, i - 1, j - 1) end do; T := MTM[tril](T)
    end do;
    eval(T)
end proc
```

```
Pascal_triangle :=proc(N :: integer)
 local i, j, P;
 P := matrix(N, N, 0);
 for i from 1 to N do P[i, 1] := 1; P[i, i] := 1 end do;
 for i from 3 to N do
   for j from 2 to i - 1 do P[i, j] := P[i - 1, j - 1] + P[i - 1, j] end do;
 end do;
 evalm(P);
 end proc
```

```
Pascal_triangle := proc(N::integer)                                    (6)
    local i, j, P;
    P := matrix(N, N, 0);
    for i to N do P[i, 1] := 1; P[i, i] := 1 end do;
    for i from 3 to N do
        for j from 2 to i - 1 do
            P[i, j] := P[i - 1, j - 1] + P[i - 1, j]
        end do
    end do;
    evalm(P)
end proc
```

```
Pascal_triangle(10)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$Bernoulli\_triangle(1, 10, 10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

La prima serie di osservazioni di Oliver e Prodinger sottolineano come le somme iterate che definiscono gli elementi di interesse possono essere ridotte ad una singola sommatoria:

$$B(2, n, k) = \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{h},$$

$$B(3, n, k) = \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{h} (k + 1 - h),$$

$$B(4, n, k) = \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{h} \binom{k + 2 - h}{2},$$

ed in generale

$$B(m, n, k) = \sum_{h=0}^{k} \binom{n}{h} \binom{k + m - 2 - h}{m - 2}.$$

Andiamole a verificare numericamente.

Per le prime tre verrà costruita la rappresentazione matriciale (prime dieci righe e colonne), mentre per l'ultima si farà uso di una coppia di test.

$B2(n,k) := add(\text{binomial}(n,h), h=0..k)$

$$B2 := (n,k) \to add(\text{binomial}(n,h), h=0..k) \tag{9}$$

$B2\_t := (n,k) \to add(\text{binomial}(n-1,h-1), h=0..k)$
#le matrici sono indicizzate a partire da 1; usiamo questo accorgimento per non perdere la prima riga e colonna

$$B2\_t := (n,k) \mapsto add\left(\binom{n-1}{h-1}, h=0..k\right) \tag{10}$$

$M2 := matrix(10, 10, B2\_t)$

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 11 & 15 & 16 & 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 1 & 6 & 16 & 26 & 31 & 32 & 32 & 32 & 32 & 32 \\ 1 & 7 & 22 & 42 & 57 & 63 & 64 & 64 & 64 & 64 \\ 1 & 8 & 29 & 64 & 99 & 120 & 127 & 128 & 128 & 128 \\ 1 & 9 & 37 & 93 & 163 & 219 & 247 & 255 & 256 & 256 \\ 1 & 10 & 46 & 130 & 256 & 382 & 466 & 502 & 511 & 512 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$MTM[tril](M2)$ *#consideriamo solo la parte triangolare inferiore*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 11 & 15 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 16 & 26 & 31 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 22 & 42 & 57 & 63 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 29 & 64 & 99 & 120 & 127 & 128 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 37 & 93 & 163 & 219 & 247 & 255 & 256 & 0 \\ 1 & 10 & 46 & 130 & 256 & 382 & 466 & 502 & 511 & 512 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$Bernoulli\_triangle(2, 10, 10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 11 & 15 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 16 & 26 & 31 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 22 & 42 & 57 & 63 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 29 & 64 & 99 & 120 & 127 & 128 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 37 & 93 & 163 & 219 & 247 & 255 & 256 & 0 \\ 1 & 10 & 46 & 130 & 256 & 382 & 466 & 502 & 511 & 512 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13)}$$

$B3(n, k) := add(\text{binomial}(n, h) \cdot (k + 1 - h), h = 0..k)$

$$B3 := (n, k) \rightarrow add(\text{binomial}(n, h)\ (k + 1 - h), h = 0..k) \quad \textbf{(14)}$$

$B3\_t(n, k) := add(\text{binomial}(n - 1, h - 1) \cdot (k + 1 - h), h = 0..k)$

$$B3\_t := (n, k) \rightarrow add(\text{binomial}(n - 1, h - 1)\ (k + 1 - h), h = 0..k) \quad \textbf{(15)}$$

$M3 := matrix(10, 10, B3\_t)$

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 1 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 \\ 1 & 5 & 12 & 20 & 28 & 36 & 44 & 52 & 60 & 68 \\ 1 & 6 & 17 & 32 & 48 & 64 & 80 & 96 & 112 & 128 \\ 1 & 7 & 23 & 49 & 80 & 112 & 144 & 176 & 208 & 240 \\ 1 & 8 & 30 & 72 & 129 & 192 & 256 & 320 & 384 & 448 \\ 1 & 9 & 38 & 102 & 201 & 321 & 448 & 576 & 704 & 832 \\ 1 & 10 & 47 & 140 & 303 & 522 & 769 & 1024 & 1280 & 1536 \\ 1 & 11 & 57 & 187 & 443 & 825 & 1291 & 1793 & 2304 & 2816 \end{bmatrix} \quad \textbf{(16)}$$

$MTM[tril](M3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 17 & 32 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 23 & 49 & 80 & 112 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 30 & 72 & 129 & 192 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 38 & 102 & 201 & 321 & 448 & 576 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 47 & 140 & 303 & 522 & 769 & 1024 & 1280 & 0 \\ 1 & 11 & 57 & 187 & 443 & 825 & 1291 & 1793 & 2304 & 2816 \end{bmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

$Bernoulli\_triangle(3, 10, 10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 17 & 32 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 23 & 49 & 80 & 112 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 30 & 72 & 129 & 192 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 38 & 102 & 201 & 321 & 448 & 576 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 47 & 140 & 303 & 522 & 769 & 1024 & 1280 & 0 \\ 1 & 11 & 57 & 187 & 443 & 825 & 1291 & 1793 & 2304 & 2816 \end{bmatrix} \quad \textbf{(18)}$$

$B4(n, k) := add(\mathrm{binomial}(n, h) \cdot \mathrm{binomial}(k + 2 - h,\ 2), h = 0 ..k);$

$$B4 := (n, k) \rightarrow add(\mathrm{binomial}(n, h)\ \mathrm{binomial}(k + 2 - h, 2), h = 0 ..k) \quad \textbf{(19)}$$

$B4\_t(n, k) := add(\mathrm{binomial}(n - 1, h - 1) \cdot \mathrm{binomial}(k + 2 - h,\ 2), h = 0 ..k)$

$$B4\_t := (n, k) \rightarrow add(\mathrm{binomial}(n - 1, h - 1)\ \mathrm{binomial}(k + 2 - h, 2), h = 0 ..k) \quad \textbf{(20)}$$

$M4 := matrix(10, 10, B4\_t)$

$$M4 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & 55 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 & 61 & 85 & 113 & 145 & 181 \\ 1 & 6 & 18 & 38 & 66 & 102 & 146 & 198 & 258 & 326 \\ 1 & 7 & 24 & 56 & 104 & 168 & 248 & 344 & 456 & 584 \\ 1 & 8 & 31 & 80 & 160 & 272 & 416 & 592 & 800 & 1040 \\ 1 & 9 & 39 & 111 & 240 & 432 & 688 & 1008 & 1392 & 1840 \\ 1 & 10 & 48 & 150 & 351 & 672 & 1120 & 1696 & 2400 & 3232 \\ 1 & 11 & 58 & 198 & 501 & 1023 & 1792 & 2816 & 4096 & 5632 \\ 1 & 12 & 69 & 256 & 699 & 1524 & 2815 & 4608 & 6912 & 9728 \end{bmatrix} \quad \textbf{(21)}$$

$MTM[tril](M4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 18 & 38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 24 & 56 & 104 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 31 & 80 & 160 & 272 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 39 & 111 & 240 & 432 & 688 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 48 & 150 & 351 & 672 & 1120 & 1696 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 58 & 198 & 501 & 1023 & 1792 & 2816 & 4096 & 0 \\ 1 & 12 & 69 & 256 & 699 & 1524 & 2815 & 4608 & 6912 & 9728 \end{bmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

$Bernoulli\_triangle(4, 10, 10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 18 & 38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 24 & 56 & 104 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 31 & 80 & 160 & 272 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 39 & 111 & 240 & 432 & 688 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 48 & 150 & 351 & 672 & 1120 & 1696 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 58 & 198 & 501 & 1023 & 1792 & 2816 & 4096 & 0 \\ 1 & 12 & 69 & 256 & 699 & 1524 & 2815 & 4608 & 6912 & 9728 \end{bmatrix} \quad \textbf{(23)}$$

Ed infine:

$Bm(m, n, k) := add(\mathrm{binomial}(n, h) \cdot \mathrm{binomial}(k + m - 2 - h, m - 2), h = 0..k)$

$$Bm := (m, n, k) \rightarrow add(\mathrm{binomial}(n, h)\ \mathrm{binomial}(k + m - 2 - h, m - 2), h = 0..k) \tag{24}$$

```
test1Bm := proc(m, N)
 local i, j;
 for i from 0  to N do
  for j from 0 to N do print([m, i, j], B(m, i, j),  Bm(m, i,  j)) end do;
 end do;
 end proc;
```

(25)

```
test1Bm := proc(m, N)
    local i, j;
    for i from 0 to N do
        for j from 0 to N do
            print([m, i, j], B(m, i, j), Bm(m, i, j))
        end do
    end do
end proc
```

```
test1Bm(1, 2);
test1Bm(2, 2);
test1Bm(3, 2);
test1Bm(4, 2);
test1Bm(5, 2);
```

[1, 0, 0], 1, 1

[1, 0, 1], 0, 0

[1, 0, 2], 0, 0

[1, 1, 0], 1, 1

[1, 1, 1], 1, 1

[1, 1, 2], 0, 0

[1, 2, 0], 1, 1

[1, 2, 1], 2, 2

[1, 2, 2], 1, 1

[2, 0, 0], 1, 1

[2, 0, 1], 1, 1

[2, 0, 2], 1, 1

[2, 1, 0], 1, 1

[2, 1, 1], 2, 2

[2, 1, 2], 2, 2

[2, 2, 0], 1, 1

[2, 2, 1], 3, 3

[2, 2, 2], 4, 4

[3, 0, 0], 1, 1

[3, 0, 1], 2, 2

[3, 0, 2], 3, 3

$$[3, 1, 0], 1, 1$$
$$[3, 1, 1], 3, 3$$
$$[3, 1, 2], 5, 5$$
$$[3, 2, 0], 1, 1$$
$$[3, 2, 1], 4, 4$$
$$[3, 2, 2], 8, 8$$
$$[4, 0, 0], 1, 1$$
$$[4, 0, 1], 3, 3$$
$$[4, 0, 2], 6, 6$$
$$[4, 1, 0], 1, 1$$
$$[4, 1, 1], 4, 4$$
$$[4, 1, 2], 9, 9$$
$$[4, 2, 0], 1, 1$$
$$[4, 2, 1], 5, 5$$
$$[4, 2, 2], 13, 13$$
$$[5, 0, 0], 1, 1$$
$$[5, 0, 1], 4, 4$$
$$[5, 0, 2], 10, 10$$
$$[5, 1, 0], 1, 1$$
$$[5, 1, 1], 5, 5$$
$$[5, 1, 2], 14, 14$$
$$[5, 2, 0], 1, 1$$
$$[5, 2, 1], 6, 6$$
$$[5, 2, 2], 19, 19 \quad \textbf{(26)}$$

```
test2Bm := proc(N, STEP)
 local m, i,  j, res;
 res := true;
 for m from 1 to N by STEP do
  for i from 0  to N by STEP do
   for j from 0 to N by STEP do
     if B(m, i, j) ≠ Bm(m, i,  j) then res := false end if;
   end do;
  end do;
 end do;
 eval(res);
 end proc;
```

(27)

```
test2Bm := proc(N, STEP)
    local m, i, j, res;
    res := true;
    for m by STEP to N do
        for i from 0 by STEP to N do
```

```
            for j from 0 by STEP to N do
                if B(m, i, j) <> Bm(m, i, j) then res := false end if
            end do
        end do
    end do;
    eval(res)
end proc
```

$test2Bm(100, 10)$

$$true \tag{28}$$

Nell'articolo viene dimostrato teoricamente che la funzione generatrice associata alla sequenza costituita da gli elementi del primo Triangolo di Bernoulli è

$$F_1(z, y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^n y^k = \frac{1}{1 - z\,(1 + y)}.$$

Verifichiamolo sfruttando le potenzialità di calcolo simbolico di Maple.

Prima di tutto ridefiniamo la procedura per il calcolo dell' m-esimo elemento del Triangolo di Bernoulli in modo che gli elementi triangolari superiori siano tutti 0.

```
B_tri := proc(m, n, k)
  option remember;
  if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
  if k = 0 then 1;
   elif n < k then 0;
   elif m = 1 then binomial(n, k);
  else B_tri(m, n, k − 1) + B_tri(m − 1, n, k) end if;
 end proc;
```

```
B_tri := proc(m, n, k)                                                    (29)
    option remember;
    if m = 0 then error " m must be greater than 0" end if;
    if k = 0 then
        1
    elif n < k then
        0
    elif m = 1 then
        binomial(n, k)
    else
        B_tri(m, n, k − 1) + B_tri(m − 1, n, k)
    end if
end proc
```

Definiamo la funzione generatrice degli elementi del primo Triangolo di Bernoulli in forma chiusa e non.

$F\_B1(z,y) := \dfrac{1}{1-z\cdot(1+y)}$

$$F\_B1 := (z,y) \rightarrow \frac{1}{1-z\,(y+1)} \tag{30}$$

$G\_B1 := sort(mtaylor(F\_B1(z,y), \{z,y\}, 17), z, ascending)$

$$\begin{aligned} G\_B1 := {} & 1 + y\,z + z + y^2 z^2 + 2\,y\,z^2 + z^2 + y^3 z^3 + 3\,y^2 z^3 + 3\,y\,z^3 + z^3 + y^4 z^4 + 4\,y^3 z^4 + 6\,y^2 z^4 \\ & + 4\,y\,z^4 + z^4 + y^5 z^5 + 5\,y^4 z^5 + 10\,y^3 z^5 + 10\,y^2 z^5 + 5\,y\,z^5 + z^5 + y^6 z^6 + 6\,y^5 z^6 + 15\,y^4 z^6 \\ & + 20\,y^3 z^6 + 15\,y^2 z^6 + 6\,y\,z^6 + z^6 + y^7 z^7 + 7\,y^6 z^7 + 21\,y^5 z^7 + 35\,y^4 z^7 + 35\,y^3 z^7 + 21\,y^2 z^7 \\ & + 7\,y\,z^7 + z^7 + y^8 z^8 + 8\,y^7 z^8 + 28\,y^6 z^8 + 56\,y^5 z^8 + 70\,y^4 z^8 + 56\,y^3 z^8 + 28\,y^2 z^8 + 8\,y\,z^8 \\ & + z^8 + 36\,y^7 z^9 + 84\,y^6 z^9 + 126\,y^5 z^9 + 126\,y^4 z^9 + 84\,y^3 z^9 + 36\,y^2 z^9 + 9\,y\,z^9 + z^9 \\ & + 210\,y^6 z^{10} + 252\,y^5 z^{10} + 210\,y^4 z^{10} + 120\,y^3 z^{10} + 45\,y^2 z^{10} + 10\,y\,z^{10} + z^{10} + 462\,y^5 z^{11} \\ & + 330\,y^4 z^{11} + 165\,y^3 z^{11} + 55\,y^2 z^{11} + 11\,y\,z^{11} + z^{11} + 495\,y^4 z^{12} + 220\,y^3 z^{12} + 66\,y^2 z^{12} \\ & + 12\,y\,z^{12} + z^{12} + 286\,y^3 z^{13} + 78\,y^2 z^{13} + 13\,y\,z^{13} + z^{13} + 91\,y^2 z^{14} + 14\,y\,z^{14} + z^{14} \\ & + 15\,y\,z^{15} + z^{15} + z^{16} \end{aligned} \tag{31}$$

Utilizzando il seguendo metodo che mi permette di estrarre il coefficiente di $z^n y^k$, andiamo a verificare che i coefficienti siano corretti.

$coefficient(f,n,k) := coeff(coeff(f,z,n),y,k)$

$$coefficient := (f,n,k) \rightarrow coeff(coeff(f,z,n),y,k) \tag{32}$$

```
coefficient_test :=proc(f, m, N, M)
 local i, j;
 for i from N  to M  do
  for j from N to M  do print([m, i, j],  coefficient(f, i, j), B_tri(m, i, j)) end do;
 end do;
 end proc;
```

(33)

```
coefficient_test := proc(f, m, N, M)
    local i, j;
    for i from N to M do
        for j from N to M do
            print([m, i, j], coefficient(f, i, j), B_tri(m, i, j))
        end do
    end do
end proc
```

$coefficient\_test(G\_B1, 1, 5, 8)$

$[1, 5, 5], 1, 1$

$[1, 5, 6], 0, 0$

$[1, 5, 7], 0, 0$

$[1, 5, 8], 0, 0$

$[1, 6, 5], 6, 6$

$$[1, 6, 6], 1, 1$$
$$[1, 6, 7], 0, 0$$
$$[1, 6, 8], 0, 0$$
$$[1, 7, 5], 21, 21$$
$$[1, 7, 6], 7, 7$$
$$[1, 7, 7], 1, 1$$
$$[1, 7, 8], 0, 0$$
$$[1, 8, 5], 56, 56$$
$$[1, 8, 6], 28, 28$$
$$[1, 8, 7], 8, 8$$
$$[1, 8, 8], 1, 1 \tag{34}$$

La forma chiusa della funzione generatrice degli elementi dell' m-esimo Triangolo di Bernoulli è

$$F_m(z, y) = \sum_{k=0}^{n} B(m, n, k) \cdot z^n y^k = \frac{1}{1 - z\,(1 + y)} \cdot \frac{(1 - z \cdot y)^{m-1}}{(1 - 2 \cdot z \cdot y)^{m-1}}.$$

Eseguiamo le dovute riprove:

$$F\_Bm(m, z, y) := \frac{1}{1 - z \cdot (1 + y)} \cdot \frac{(1 - z \cdot y)^{m-1}}{(1 - 2 \cdot z \cdot y)^{m-1}}$$

$$F\_Bm := (m, z, y) \rightarrow \frac{(1 - z\,y)^{m-1}}{(1 - z\,(1 + y))\,(1 - 2\,z\,y)^{m-1}} \tag{35}$$

$$G\_Bm\_2 := mtaylor(F\_Bm(2, z, y), \{z, y\}, 17)$$

$$\begin{aligned} G\_Bm\_2 := {} & 256\,y^8 z^8 + 502\,y^7 z^9 + 848\,y^6 z^{10} + 1024\,y^5 z^{11} + 794\,y^4 z^{12} + 378\,y^3 z^{13} + 106\,y^2 z^{14} \\ & + 16\,y\,z^{15} + z^{16} + 255\,y^7 z^8 + 466\,y^6 z^9 + 638\,y^5 z^{10} + 562\,y^4 z^{11} + 299\,y^3 z^{12} + 92\,y^2 z^{13} \\ & + 15\,y\,z^{14} + z^{15} + 128\,y^7 z^7 + 247\,y^6 z^8 + 382\,y^5 z^9 + 386\,y^4 z^{10} + 232\,y^3 z^{11} + 79\,y^2 z^{12} \\ & + 14\,y\,z^{13} + z^{14} + 127\,y^6 z^7 + 219\,y^5 z^8 + 256\,y^4 z^9 + 176\,y^3 z^{10} + 67\,y^2 z^{11} + 13\,y\,z^{12} + z^{13} \\ & + 64\,y^6 z^6 + 120\,y^5 z^7 + 163\,y^4 z^8 + 130\,y^3 z^9 + 56\,y^2 z^{10} + 12\,y\,z^{11} + z^{12} + 63\,y^5 z^6 \\ & + 99\,y^4 z^7 + 93\,y^3 z^8 + 46\,y^2 z^9 + 11\,y\,z^{10} + z^{11} + 32\,y^5 z^5 + 57\,y^4 z^6 + 64\,y^3 z^7 + 37\,y^2 z^8 \\ & + 10\,y\,z^9 + z^{10} + 31\,y^4 z^5 + 42\,y^3 z^6 + 29\,y^2 z^7 + 9\,y\,z^8 + z^9 + 16\,y^4 z^4 + 26\,y^3 z^5 + 22\,y^2 z^6 \\ & + 8\,y\,z^7 + z^8 + 15\,y^3 z^4 + 16\,y^2 z^5 + 7\,y\,z^6 + z^7 + 8\,y^3 z^3 + 11\,y^2 z^4 + 6\,y\,z^5 + z^6 + 7\,y^2 z^3 \\ & + 5\,y\,z^4 + z^5 + 4\,y^2 z^2 + 4\,y\,z^3 + z^4 + 3\,y\,z^2 + z^3 + 2\,y\,z + z^2 + z + 1 \end{aligned} \tag{36}$$

$$coefficient\_test(G\_Bm\_2, 2, 5, 8)$$

$$[2, 5, 5], 32, 32$$
$$[2, 5, 6], 0, 0$$
$$[2, 5, 7], 0, 0$$
$$[2, 5, 8], 0, 0$$
$$[2, 6, 5], 63, 63$$

$$
\begin{gathered}
[2, 6, 6], 64, 64 \\
[2, 6, 7], 0, 0 \\
[2, 6, 8], 0, 0 \\
[2, 7, 5], 120, 120 \\
[2, 7, 6], 127, 127 \\
[2, 7, 7], 128, 128 \\
[2, 7, 8], 0, 0 \\
[2, 8, 5], 219, 219 \\
[2, 8, 6], 247, 247 \\
[2, 8, 7], 255, 255 \\
[2, 8, 8], 256, 256
\end{gathered} \tag{37}
$$

2 Una particolare sommatoria

Prendiamo in considerazione la seguente sommatoria che coinvolgono alcuni particolari elemnti dell' m-esimo Triangolo di Bernoulli:

$$s1_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} B(m, n-j, n-2\,j).$$

Come dimostrato da Oliver e Prodinger, la funzione generatrice associata alla sequenza con doppio indice $\left(s1_{m,\,n}\right)$ è la seguente:

$$G\left(s1_{m,\,n}\right) = \frac{1}{1-z-z^2} \cdot \frac{(1-2\cdot z)}{1-2\cdot z-w\cdot(1-z)} = \frac{t}{-z^2-z+1} \cdot \sum_{m \geq 0} \frac{(1-z)^m}{(1-2\,z)^m} \cdot w^m.$$

E' nostro interesse andare a verificare i seguenti risultati:

per m=1
$$s1_{1,\,n} = Fibonacci_{n+1};$$

per m=2
$$s1_{2,\,n} = 2^{n+1} - Fibonacci_{n+2};$$

per m=3
$$s1_{3,\,n} = (n-1)\cdot 2^n + Fibonacci_{n+3};$$

per m=4
$$s1_{4,\,n} = \left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} + 4\right)\cdot 2^n - Fibonacci_{n+4};$$

per m=5
$$s1_{5,\,n} = \left(\frac{n^3}{24} + \frac{n^2}{4} + \frac{53\cdot n}{24} - 4\right)\cdot 2^n + Fibonacci_{n+5}.$$

Definiamo, inanzitutto, una funzione che ci permetta di calcolare la sommatoria d'interessa.

$$s1m := (m, n) \rightarrow add\left(B\_tri(m, n-j, n-2\cdot j), j=0\,..\,\frac{n}{2}\right)$$

$$s1m := (m, n) \mapsto add\left(B\_tri(m, n-j, n-2\,j), j=0\,..\,\frac{n}{2}\right) \tag{38}$$

Definiamo, inoltre, la funzione generatrice associata.

$$F\_S1m := (z, w, N) \rightarrow \frac{1}{1-z-z^2} \cdot sum\left(\frac{(1-z)^m}{(1-2\cdot z)^m} \cdot w^m, m=0\,..N\right)$$

$$F\_S1m := (z, w, N) \mapsto \frac{\sum_{m=0}^{N} \frac{(1-z)^m w^m}{(1-2z)^m}}{1-z-z^2} \tag{39}$$

Per un fissato m=k, la funzione generatrice associata alla sequenza $\left(s1_{k,n}\right)$ può essere ottenuta estraendo il coefficiente di w^{k-1}dalla funzione generatrice appena definita.

Dunque, partendo dal caso m=1 :

$F\_S11 := coeff(F\_S1m(z, w, 10), w, 0);$

$$F\_S11 := \frac{1}{-z^2 - z + 1} \tag{40}$$

Essendo che

$$G\left(Fibonacci_n\right) = \frac{z}{-z^2 - z + 1},$$

risulta che

$$\frac{1}{-z^2 - z + 1} = G\left(Fibonacci_{n+1}\right),$$

quindi,

$s11\_short2 := n \rightarrow Fibonacci(n+1);$

$$s11\_short2 := n \mapsto Fibonacci(n+1) \tag{41}$$

$G\_S11 := series(F\_S11, z, 10)$

$$G\_S11 := 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + 21z^7 + 34z^8 + 55z^9 + O\left(z^{10}\right) \tag{42}$$

Eseguiamo un controllo più preciso:

```
Fibonacci :=proc(n)
  option remember;
   if n ≤ 1 then n
   else Fibonacci(n − 1) + Fibonacci(n − 2) end if;
 end proc;
```

```
Fibonacci := proc(n)                                                    (43)
    option remember;
    if n <=1 then n else Fibonacci(n − 1) + Fibonacci(n − 2) end if
end proc
```

```
test_s1m :=proc(m, s1m_short,  N, STEP)
 local i, G_S1m;
 G_S1m := series(coeff(F_S1m(z, w, 10), w, m − 1), z, N + 1) ;
 for i from 0 to N by STEP do
  print([i], coeff(G_S1m, z, i), s1m(m, i), s1m_short(i));
 end do;
```

end proc;

$$test\_s1m := \textbf{proc}(m, s1m\_short, N, STEP) \tag{44}$$

```
    local i, G_S1m;
    G_S1m := series(coeff(F_S1m(z, w, 10), w, m - 1), z, N + 1);
    for i from 0 by STEP to N do
        print([i], coeff(G_S1m, z, i), s1m(m, i), s1m_short(i))
    end do
end proc
```

$test\_s1m(1, s11\_short2, 100, 10);$

$$[0], 1, 1, 1$$
$$[10], 89, 89, 89$$
$$[20], 10946, 10946, 10946$$
$$[30], 1346269, 1346269, 1346269$$
$$[40], 165580141, 165580141, 165580141$$
$$[50], 20365011074, 20365011074, 20365011074$$
$$[60], 2504730781961, 2504730781961, 2504730781961$$
$$[70], 308061521170129, 308061521170129, 308061521170129$$
$$[80], 37889062373143906, 37889062373143906, 37889062373143906$$
$$[90], 4660046610375530309, 4660046610375530309, 4660046610375530309$$
$$[100], 573147844013817084101, 573147844013817084101, 573147844013817084101 \tag{45}$$

Passiamo al caso m=2 e ripetiamo i passaggi appena svolti:

$F\_S12 := coeff(F\_S1m(z, w, 10), w, 1);$

$$F\_S12 := \frac{1 - z}{(-z^2 - z + 1)\,(1 - 2\,z)} \tag{46}$$

Usando la decomposizione a frazioni parziali,

$F\_S12 := expand(convert(F\_S12, parfrac, z));$

$$F\_S12 := -\frac{2}{-1 + 2\,z} + \frac{z}{z^2 + z - 1} + \frac{1}{z^2 + z - 1} \tag{47}$$

$series(op(F\_S12)[1], z, 10);$
$series(op(F\_S12)[2], z, 10);$
$series(op(F\_S12)[3], z, 10);$

$$2 + 4\,z + 8\,z^2 + 16\,z^3 + 32\,z^4 + 64\,z^5 + 128\,z^6 + 256\,z^7 + 512\,z^8 + 1024\,z^9 + \mathrm{O}(z^{10})$$
$$-z - z^2 - 2\,z^3 - 3\,z^4 - 5\,z^5 - 8\,z^6 - 13\,z^7 - 21\,z^8 - 34\,z^9 + \mathrm{O}(z^{10})$$
$$-1 - z - 2\,z^2 - 3\,z^3 - 5\,z^4 - 8\,z^5 - 13\,z^6 - 21\,z^7 - 34\,z^8 - 55\,z^9 + \mathrm{O}(z^{10}) \tag{48}$$

Dunque, ricordando che

$$G(2^n) = \frac{1}{1-2z},$$

è immediato il seguente risultato:

$$s1_{2,n} = 2\cdot 2^n - \mathit{Fibonacci}_n - \mathit{Fibonacci}_{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - \mathit{Fibonacci}_{n+2}.$$

Eseguiamo il dovuto controllo:

$s12\_short := n \rightarrow 2^{n+1} - Fibonacci(n+2);$

$$s12\_short := n \mapsto 2^{n+1} - Fibonacci(n+2) \quad \textbf{(49)}$$

$test\_s1m(2, s12\_short, 100, 10);$

[0], 1, 1, 1
[10], 1904, 1904, 1904
[20], 2079441, 2079441, 2079441
[30], 2145305339, 2145305339, 2145305339
[40], 2198755341256, 2198755341256, 2198755341256
[50], 2251766862405149, 2251766862405149, 2251766862405149
[60], 2305838956474156071, 2305838956474156071, 2305838956474156071
[70], 2361182742980810727584, 2361182742980810727584, 2361182742980810727584
[80], 2417851577923467627800761, 2417851577923467627800761, 2417851577923467627800761
[90], 2475880071030646745051902019, 2475880071030646745051902019, 2475880071030646745051902019
[100], 2535301199529086110800327411576, 2535301199529086110800327411576, 2535301199529086110800327411576 **(50)**

Per $m= 3$ risulta

$F\_S13 := coeff(F\_S1m(z, w, 10), w, 2);$

$$F\_S13 := \frac{(1-z)^2}{(-z^2-z+1)\,(1-2z)^2} \quad \textbf{(51)}$$

$F\_S13 := expand(convert(F\_S13, parfrac, z));$

$$F\_S13 := \frac{2}{-1+2z} + \frac{1}{(-1+2z)^2} - \frac{z}{z^2+z-1} - \frac{2}{z^2+z-1} \quad \textbf{(52)}$$

$series(op(F\_S13)[1], z, 10);$ # *fg di* -2^{n+1}
$series(op(F\_S13)[2], z, 10);$ # *fg di* $(n+1)\cdot 2^n$
$series(op(F\_S13)[3], z, 10);$ # *fg di Fibonacci(n)*
$series(op(F\_S13)[4], z, 10);$ # *fg di* $2\cdot Fibonacci(n+1)$

$$-2-4z-8z^2-16z^3-32z^4-64z^5-128z^6-256z^7-512z^8-1024z^9+O(z^{10})$$
$$1+4z+12z^2+32z^3+80z^4+192z^5+448z^6+1024z^7+2304z^8+5120z^9+O(z^{10})$$
$$z+z^2+2z^3+3z^4+5z^5+8z^6+13z^7+21z^8+34z^9+O(z^{10})$$
$$2+2z+4z^2+6z^3+10z^4+16z^5+26z^6+42z^7+68z^8+110z^9+O(z^{10}) \tag{53}$$

Si vede immediatamente che il primo, il terzo ed il quarto termine delle decomposizione a frazioni parziali sono rispettivamente le funzioni generatrici di -2^{n+1}, $Fibonacci_n$ e $2\ Fibonacci_{n+1}$.
Consideriamo il terzo termine:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-1+2z)^2} &= \frac{1}{-1+2z}\cdot\frac{1}{-1+2z}\\ &= G(-2^n)\ G(-2^n)\\ &= \mathrm{G}\Big(\sum_{k=0}^{n} 2^k 2^{n-k}\Big)\end{aligned}$$

usando Maple per trovare una forma chiusa alla sommatoria,

$sum(-2^k\cdot(-2^{n-k}), k=0..n)$

$$2^n\ (n+1) \tag{54}$$

risulta che $\frac{1}{(-1+2z)^2}$ è funzione generatrice di $2^n\ (n+1)$.
Quindi,

$$\begin{aligned}s1_{3,n} &= 2^n\ (n+1)-2^{n+1}+Fibonacci_n+Fibonacci_{n+1}+\ Fibonacci_{n+1}\\ &= (n-1)\cdot 2^n+Fibonacci_{n+3}.\end{aligned}$$

Eseguiamo la riprova:

$s13\_short := n \rightarrow Fibonacci(n+3)+(n-1)\cdot 2^n;$

$$s13\_short := n \mapsto Fibonacci(3+n)+(n-1)\ 2^n \tag{55}$$

$test\_s1m(3, s13\_short, 100, 10)$

[0], 1, 1, 1

[10], 9449, 9449, 9449

[20], 19951601, 19951601, 19951601

[30], 31142037474, 31142037474, 31142037474

[40], 42881386977701, 42881386977701, 42881386977701

[50], 55169148751579749, 55169148751579749, 55169148751579749

[60], 68022375329274291426, 68022375329274291426, 68022375329274291426

[70], 81460822636016912985649, 81460822636016912985649, 81460822636016912985649

[80], 95505139848750557896543401, 95505139848750557896543401,
95505139848750557896543401

[90], 110176663508599004881143932674, 110176663508599004881143932674,

110176663508599004881143932674

$[100]$, 1254974094240952312843805134155 01, 125497409424095231284380513415501, **(56)**
125497409424095231284380513415501

Spostiamoci al caso $m = 4$:

$F\_S14 := coeff(F\_S1m(z, w, 10), w, 3);$

$$F\_S14 := \frac{(1-z)^3}{(-z^2 - z + 1)\,(1 - 2z)^3} \tag{57}$$

$F\_S14 := expand(convert(F\_S14, parfrac, z))$

$$F\_S14 := -\frac{4}{-1+2z} - \frac{1}{2(-1+2z)^3} - \frac{1}{2(-1+2z)^2} + \frac{2z}{z^2+z-1} + \frac{3}{z^2+z-1} \tag{58}$$

$series(op(F\_S14)[1], z, 10);$ # *fg di* $4 \cdot 2^n$
$series(op(F\_S14)[2], z, 10);$ # *fg di* $\frac{2^n\,(n+2)\,(n+1)}{4}$
$series(op(F\_S14)[3], z, 10);$ # *fg di* $-2^{n-1}(n+1)$
$series(op(F\_S14)[4], z, 10);$ # *fg di* $-2 \cdot Fiboncacci(n)$
$series(op(F\_S14)[5], z, 10);$ # *fg di* $-3 \cdot Fiboncacci(n+1)$

$$4 + 8z + 16z^2 + 32z^3 + 64z^4 + 128z^5 + 256z^6 + 512z^7 + 1024z^8 + 2048z^9 + O(z^{10})$$
$$\frac{1}{2} + 3z + 12z^2 + 40z^3 + 120z^4 + 336z^5 + 896z^6 + 2304z^7 + 5760z^8 + 14080z^9 + O(z^{10})$$
$$-\frac{1}{2} - 2z - 6z^2 - 16z^3 - 40z^4 - 96z^5 - 224z^6 - 512z^7 - 1152z^8 - 2560z^9 + O(z^{10})$$
$$(-2)\,z - 2z^2 - 4z^3 - 6z^4 - 10z^5 - 16z^6 - 26z^7 - 42z^8 - 68z^9 + O(z^{10})$$
$$-3 - 3z - 6z^2 - 9z^3 - 15z^4 - 24z^5 - 39z^6 - 63z^7 - 102z^8 - 165z^9 + O(z^{10}) \tag{59}$$

Per quanto visto in precedenza, non risulta difficile notare che il primo, il terzo, il quarto ed il quinto termine della decomposizione a frazioni parziali sono rispettivamente le funzioni generatrici di $4 \cdot 2^n$, $-(n+1) \cdot 2^{n-1}$, $-2 \cdot Fibonacci_n$ e $-3 \cdot Fibonacci_{n+1}$.

Soffermiamoci con più attezione sul secondo termine

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2(-1+2z)^3} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1+2z)^2} \cdot \frac{1}{(-1+2z)} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot G\left((n+1)2^n\right) \cdot G\left(-2^n\right) \\
&= -\frac{1}{2}\, G\left(\sum_{k=0}^{n} \left(-2^k\,(k+1)\,2^{n-k}\right)\right)
\end{aligned}$$

ed idenfichiamo una forma chiusa per la sommatoria

$$-\frac{1}{2}\cdot sum\left(2^{k}\cdot(k+1)\cdot\left(-\left(2^{n-k}\right)\right), k=0..n\right)$$

$$\frac{2^{n}\,(n+1)}{4}+\frac{2^{n}\,(n+1)^{2}}{4} \quad \textbf{(60)}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{2^{n}\,(n+2)\,(n+1)}{4} \quad \textbf{(61)}$$

Dunque, risulata che $-\frac{1}{2\,(-1+2\,z)^{3}}$ sia la funzione generatrice di $\frac{2^{n}\,(n+2)\,(n+1)}{4}$.

Alla luca di ciò, possiamo affermare che $-\frac{4}{-1+2\,z}-\frac{1}{2\,(-1+2\,z)^{3}}-\frac{1}{2\,(-1+2\,z)^{2}}$ è la funzione generatrice di

$$normal\left(\frac{2^{n}\,(n+2)\,(n+1)}{4}+4\,2^{n}-2^{-1+n}\,(n+1), expanded\right)$$

$$\frac{2^{n}\,n^{2}}{4}+\frac{2^{n}\,n}{4}+4\,2^{n} \quad \textbf{(62)}$$

Quindi, in coclusione,

$$\begin{aligned} s1_{4,\,n} &= \left(\frac{1}{4}\,n^{2}+\frac{1}{4}\,n+4\right)2^{n}-\,2\cdot\,Fibonacci_{n}-\,3\cdot\,Fibonacci_{n+1} \\ &= \left(\frac{n^{2}}{4}+\frac{n}{4}+4\right)2^{n}-Fibonacci(n+4)\,. \end{aligned}$$

Controlliamo il risultato evidenziato:

$$s14\_short := n \rightarrow \left(\frac{n^{2}}{4}+\frac{n}{4}+4\right)\cdot 2^{n}-Fibonacci(n+4);$$

$$s14\_short := n \mapsto \left(\frac{1}{4}\,n^{2}+\frac{1}{4}\,n+4\right)2^{n}-Fibonacci(n+4) \quad \textbf{(63)}$$

$test\_s1m(4, s14\_short, 100, 10)$

[0], 1, 1, 1

[10], 31879, 31879, 31879

[20], 114248416, 114248416, 114248416

[30], 253934238489, 253934238489, 253934238489

[40], 455197112490531, 455197112490531, 455197112490531

[50], 722264703971972024, 722264703971972024, 722264703971972024

[60], 1059534852123482513221, 1059534852123482513221, 1059534852123482513221

[70], 1471607453919283644789359, 1471607453919283644789359,
1471607453919283644789359

[80], 1963295530893657135906462736, 1963295530893657135906462736,
1963295530893657135906462736

[90], 2539633990574217359735685122369, 2539633990574217359735685122369,
2539633990574217359735685122369

$[100]$, 320588836797476426315676243 1313451, 320588836797476426315676243 1313451, 320588836797476426315676243 1313451 **(64)**

Infine, adiamo ad analizzare il caso m=5:

$F\_S15 := coeff(F\_S1m(z, w, 10), w, 4);$

$$F\_S15 := \frac{(1-z)^4}{(-z^2-z+1)\,(1-2\,z)^4} \tag{65}$$

$F\_S15 := expand(convert(F\_S15, parfrac, z))$

$$F\_S15 := \frac{6}{-1+2\,z} + \frac{1}{4\,(-1+2\,z)^4} + \frac{7}{4\,(-1+2\,z)^2} - \frac{5}{z^2+z-1} - \frac{3\,z}{z^2+z-1} \tag{66}$$

$series(op(F\_S15)[1], z, 10);$ # fg di -6·2^n
$series(op(F\_S15)[2], z, 10);$ #` `
$series(op(F\_S15)[3], z, 10);$ #` `fg di $\frac{7}{4} \cdot 2^n \cdot (n+1)$
$series(op(F\_S15)[4], z, 10);$ # fg di 5·Fibonacci(n+1)
$series(op(F\_S15)[5], z, 10);$ # fg di 3·Fibonacci(n)

$$-6-12\,z-24\,z^2-48\,z^3-96\,z^4-192\,z^5-384\,z^6-768\,z^7-1536\,z^8-3072\,z^9+O(z^{10})$$
$$\frac{1}{4}+2\,z+10\,z^2+40\,z^3+140\,z^4+448\,z^5+1344\,z^6+3840\,z^7+10560\,z^8+28160\,z^9+O(z^{10})$$
$$\frac{7}{4}+7\,z+21\,z^2+56\,z^3+140\,z^4+336\,z^5+784\,z^6+1792\,z^7+4032\,z^8+8960\,z^9+O(z^{10})$$
$$5+5\,z+10\,z^2+15\,z^3+25\,z^4+40\,z^5+65\,z^6+105\,z^7+170\,z^8+275\,z^9+O(z^{10})$$
$$3\,z+3\,z^2+6\,z^3+9\,z^4+15\,z^5+24\,z^6+39\,z^7+63\,z^8+102\,z^9+O(z^{10}) \tag{67}$$

Risulta abbastanza immediato che

$$\frac{6}{-1+2\,z} = -6\,G(2^n),$$

$$\frac{7}{4\,(-1+2\,z)^2} = \frac{7}{4}\,G(2^n\,(n+1)),$$

$$-\frac{5}{z^2+z-1} = 5 \cdot G(\,Fibonacci_{n+1}),$$

$$-\frac{3\,z}{z^2+z-1} = 3 \cdot G(\,Fibonacci_n);$$

spendiamo, invece, qualche parola in più per il secondo termine della decomposizione in frazioni parziali:

$$\frac{1}{4\,(-1+2\,z)^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(-1+2\,z)^2} \cdot \frac{1}{(-1+2\,z)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot G\left((n+1) \cdot 2^n \right) \cdot G\left((n+1) \cdot 2^n \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot G\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k (k+1)\ (n-k+1)\ 2^{n-k} \right).$$

quindi, tale termine è la funzione generatrice di

$$\frac{1}{4} \cdot sum\left(2^k \cdot (k+1) \cdot (n-k+1) \cdot (2)^{n-k}, k=0..n\right)$$

$$\frac{2^n\, n\, (n+1)}{8} + \frac{5\, 2^n\, (n+1)}{24} + \frac{n\, 2^n\, (n+1)^2}{8} - \frac{2^n\, (n+1)^3}{12} + \frac{2^n\, (n+1)^2}{8} \tag{68}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{2^n\, (n+3)\, (n+2)\, (n+1)}{24} \tag{69}$$

Conseguentemente, $\frac{6}{-1+2z} + \frac{1}{4\,(-1+2z)^4} + \frac{7}{4\,(-1+2z)^2}$ è la funzione generatrice di

$$normal\left(\frac{2^n\, (n+3)\, (n+2)\, (n+1)}{24} + \frac{7}{4} \cdot 2^n \cdot (n+1) - 6 \cdot 2^n, expanded \right)$$

$$\frac{2^n\, n^3}{24} + \frac{2^n\, n^2}{4} + \frac{53\, 2^n\, n}{24} - 4\, 2^n \tag{70}$$

Risulta che

$$s1_{5,\,n} = \left(\frac{n^3}{24} + \frac{n^2}{4} + \frac{53 \cdot n}{24} - 4 \right) \cdot 2^n + 3 \cdot\ Fibonacci_n + 5 \cdot\ Fibonacci_{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^3}{24} + \frac{n^2}{4} + \frac{53 \cdot n}{24} - 4 \right) \cdot 2^n + Fibonacci(n+5).$$

Per concludere, eseguiamo la consueta verifica numerica:

$$s15\_short := n \rightarrow \left(\frac{n^3}{24} + \frac{n^2}{4} + \frac{53 \cdot n}{24} - 4 \right) \cdot 2^n + Fibonacci(n+5);$$

$$s15\_short := n \mapsto \left(\frac{1}{24}\, n^3 + \frac{1}{4}\, n^2 + \frac{53}{24}\, n - 4 \right) 2^n + Fibonacci(n+5) \tag{71}$$

$test\_s1m(5, s15\_short, 100, 10)$

[0], 1, 1, 1

[10], 87394, 87394, 87394

[20], 496575761, 496575761, 496575761

[30], 1516401118409, 1516401118409, 1516401118409

[40], 3464562274025346, 3464562274025346, 3464562274025346

[50], 6687564111252338349, 6687564111252338349, 6687564111252338349

[60], 11562073326117445076381, 11562073326117445076381, 11562073326117445076381

[70], 18496624071796347321547714, 18496624071796347321547714,
18496624071796347321547714
[80], 27933439988275317207672025241, 27933439988275317207672025241,
27933439988275317207672025241
[90], 40350346095529089149903219400129, 40350346095529089149903219400129,
40350346095529089149903219400129
[100], 56262770415233548055093533586971426, 56262770415233548055093533586971426, **(72)**
56262770415233548055093533586971426

3 Un' altra sommatoria

Considerando la successiva sommatoria analizzata da Oliver e Prodinger:

$$s3_{m,\,n} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} B(m, n-j,\ j).$$

Per m=1 è possibile ricondursi, struttando la proprietà di Simmetria del coefficiente binomiale, alla sommatoria precedentemente analizzata:

$$s3_{1,\,n} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} B(1, n-j,\ j) \;=\; \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-j}{j} \;=\; \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-j}{n-2\cdot j} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} B(1, n-j,\ n-2\cdot j) \;=\; s1_{1,\,n}.$$

Dunque, per quanto verificato in precedenza, $s3_{1,\,n} = Fibonacci_{n+1}$.

Per m = 2, come dimostrato dagli autori dell'articolo, la funzione generatrice associata alla sequenza $\left(s3_{2,\,n}\right)$ è la seguente:

$$G\left(s3_{2,\,n}\right) \;=\; \frac{(z+2)}{1-z-z^2} - \frac{(1+2\cdot z)}{1-2\cdot z^2},$$

e, partendo da essa, non è difficile verificare che

$$s3_{2,\,n} = Fibonacci_{n+3} - 2^{\left\lfloor \frac{(n+1)}{2} \right\rfloor}.$$

Definiamo la funzione per il calcolo della sommatoria di interessa

$$s3m := (m, n) \rightarrow add\left(B\_tri(m, n-j,\ j), j=0\,..\,\frac{n}{2}\right)$$

$$s3m := (m, n) \mapsto add\left(B\_tri(m, n-j, j), j=0\,..\,\frac{n}{2}\right) \tag{73}$$

e la funzione generatrice per il caso m = 2

$$F\_S32 := \frac{(z+2)}{1-z-z^2} - \frac{(1+2\cdot z)}{1-2\cdot z^2}$$

$$F\_S32 := \frac{z+2}{1-z-z^2} - \frac{1+2\,z}{1-2\,z^2} \tag{74}$$

che può essere decomposta in

$$F\_S32 := sort(expand(F\_S32), z, ascending)$$

$$F\_S32 := \frac{2}{1-z-z^2} - \frac{1}{1-2\,z^2} + \frac{z}{1-z-z^2} - \frac{2\,z}{1-2\,z^2} \tag{75}$$

$series(op(F\_S32)[1], z, 10);$ *# fg di 2·Fib(n+1)*

$series(op(F\_S32)[2], z, 10);$ *# fg di* $-2^{\frac{n}{2}}$ *se n è pari*, 0 *altrimenti*

$series(op(F\_S32)[3], z, 10);$ *# fg di Fib(n)*

$series(op(F\_S32)[4], z, 10);$ *# fg di* $-2^{\frac{n+1}{2}}$ *se n è dispari*, 0 *altrimenti*

$$2 + 2z + 4z^2 + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 + 68z^8 + 110z^9 + O(z^{10})$$

$$-1 - 2z^2 - 4z^4 - 8z^6 - 16z^8 + O(z^{10})$$

$$z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + 13z^7 + 21z^8 + 34z^9 + O(z^{10})$$

$$(-2)z - 4z^3 - 8z^5 - 16z^7 - 32z^9 + O(z^{11}) \tag{76}$$

Si vede facilmente che il primo ed il terzo termine delle decomposizione sono rispettivamente la funzione generatrice di $2\cdot Fibonacci_{n+1}$ e di $Fibonacci_n$.

Per quanto riguarda il secondo termine, abbiamo la funzione generatrice di -2^n composta con z^2, cioè, della sequenza (-2^n) intervallata da 0

$$[z^n]\left(-\frac{1}{1-2z^2}\right) = \begin{cases} -2^{\frac{n}{2}} & \textit{se n è pari}, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

di conseguenza,

$$[z^n]\left(-\frac{2\cdot z}{1-2z^2}\right) = 2\cdot[z^{n-1}]\left(-\frac{1}{1-2z^2}\right)$$
$$= \begin{cases} -2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}} & \textit{se n è dispari}, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -2^{\frac{n+1}{2}} & \textit{se n è dispari}, \\ 0 & \textit{altrimenti}. \end{cases}.$$

Dunque,

$$[z^n]\left(-\frac{1}{1-2z^2} - \frac{2z}{1-2z^2}\right) = -2^{\left\lfloor\frac{(n+1)}{2}\right\rfloor};$$

e, quindi, risulta che

$$s3_{2,n} = 2\cdot Fibonacci_{n+1} + Fibonacci_n - 2^{\left\lfloor\frac{(n+1)}{2}\right\rfloor} = Fibonacci_{n+3} - 2^{\left\lfloor\frac{(n+1)}{2}\right\rfloor}.$$

Eseguiamo un test di controllo:

$$s32\_short := n \to Fibonacci(n+3) - 2^{\mathrm{floor}\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$s32\_short := n \mapsto Fibonacci(3+n) - 2^{\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \right\rfloor} \tag{77}$$

```
test_s3m :=proc(m, F_S3m, s3m_short,  N, STEP)
 local i, G_S3m;
 G_S3m := series(F_S3m, z, N + 1);
 for i from 0 to N by STEP do print([i], s3m_short(i), coeff(G_S3m, z, i),  s3m(m, i)) end do;
end proc;
```

```
test_s3m := proc(m, F_S3m, s3m_short, N, STEP)                                          (78)
    local i, G_S3m;
    G_S3m := series(F_S3m, z, N + 1);
    for i from 0 by STEP to N do
        print([i], s3m_short(i), coeff(G_S3m, z, i), s3m(m, i))
    end do
end proc
```

```
test_s3m(2, F_S32,  s32_short, 100, 10)
```

[0], 1, 1, 1

[10], 201, 201, 201

[20], 27633, 27633, 27633

[30], 3491810, 3491810, 3491810

[40], 432445861, 432445861, 432445861

[50], 53282736741, 53282736741, 53282736741

[60], 6556396578018, 6556396578018, 6556396578018

[70], 806481173311025, 806481173311025, 806481173311025

[80], 99193753583127721, 99193753583127721, 99193753583127721

[90], 12200125230749787906, 12200125230749787906, 12200125230749787906

[100], 1500519410306989240653, 1500519410306989240653, 1500519410306989240653 **(79)**

Per concludere, andiamo a verificare i risultati riportati per il caso m=3:

$$G\left(s3_{3,\,n}\right) = \frac{3\cdot z+5}{1-z-z^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2\cdot z}{\left(1-2\cdot z^2\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{7+12\cdot z}{\left(1-2\cdot z^2\right)^2},$$

$$s3_{3,\,n} = \begin{cases} Fibonacci_{n+5} - 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{n}{2}+8\right) & se\ n\ \grave{e}\ pari, \\ Fibonacci_{n+5} - 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+7\right) & altrimenti. \end{cases}$$

$$F\_S33 := \frac{3\cdot z+5}{1-z-z^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2\cdot z}{(1-2\cdot z^2)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{7+12\cdot z}{(1-2\cdot z^2)^2}$$

$$F\_S33 := \frac{3z+5}{1-z-z^2} - \frac{1+2z}{2(1-2z^2)^2} - \frac{7+12z}{2(1-2z^2)^2} \qquad \textbf{(80)}$$

$F\_S33 := sort(expand(F\_S33), z, ascending)$

$$F\_S33 := \frac{5}{1-z-z^2} - \frac{4}{(1-2z^2)^2} + \frac{3z}{1-z-z^2} - \frac{7z}{(1-2z^2)^2} \qquad \textbf{(81)}$$

series(*op*(F_S33)[1], z, 10); *# fg di 5·Fib(n+1)*

series(*op*(F_S33)[2], z, 10);

series(*op*(F_S33)[3], z, 10); *# fg di 3·Fib(n)*

series(*op*(F_S33)[4], z, 10);

$$5+5z+10z^2+15z^3+25z^4+40z^5+65z^6+105z^7+170z^8+275z^9+O(z^{10})$$

$$-4-16z^2-48z^4-128z^6-320z^8+O(z^{10})$$

$$3z+3z^2+6z^3+9z^4+15z^5+24z^6+39z^7+63z^8+102z^9+O(z^{10})$$

$$(-7)z-28z^3-84z^5-224z^7-560z^9+O(z^{11}) \qquad \textbf{(82)}$$

Prima di fare qualunque riflessione, eseguiamo una verifica numerica e commentiamo i risultati:

s33_short :=**proc**(*n*) *#come ci posso arrivare?*
local *res*;
$res := Fibonacci(n+5);$
if (n **mod** $2=0$) **then** $res := res - 2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{n}{2}+8\right)$;
else $res := res - 2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{n-1}{2}+7\right)$ **end if**;
eval(*res*);
end proc;

```
s33_short := proc(n)                                                     (83)
    local res;
    res := Fibonacci(n + 5);
    if n mod 2 = 0 then
        res := res - 2^(1/2*n - 1) * (1/2*n + 8)
    else
        res := res - 2^(1/2*n - 1/2) * (1/2*n + 13/2)
    end if;
    eval(res)
end proc
```

$test\_s3m(3, F\_S33, s33\_short, 100, 10)$

$$[0], 1, 1, 1$$
$$[10], 402, -158, 402$$
$$[20], 65809, 29969, 65809$$
$$[30], 8850633, 7130313, 8850633$$
$$[40], 1120223106, 1046822786, 1120223106$$
$$[50], 139030214317, 136094201517, 139030214317$$
$$[60], 17147279082909, 17034536191389, 17147279082909$$
$$[70], 2110746343603138, 2106537275653058, 2110746343603138$$
$$[80], 259669108632055961, 259515177004167321, 259669108632055961$$
$$[90], 31939502249129745857, 31933960710525754817, 31939502249129745857$$
$$[100], 3928381113509572729634, 3928184081025875270434, 3928381113509572729634 \tag{84}$$

L'esecuzione del test stampa $[i], s33\_short(i), coeff(series(F\_S33, z, N+1), z, i), s3m(3, i)$: risulta evidente che la funzione generatrice fornita non sia corretta, anche se il risultato finale lo è.

Con una più attenta analisi ci potevamo accorgere in anticipo della discrepanza, infatti:

$$[z^n]\frac{5}{1-z-z^2} = 5 \cdot Fibonacci_{n+1},$$
$$[z^n]\frac{3\,z}{1-z-z^2} = 3 \cdot Fibonacci_{n},$$

dunque,

$$[z^n]\frac{5}{1-z-z^2} + \frac{3\,z}{1-z-z^2} = Fibonacci_{n+5};$$

inoltre,

$$[z^n] - \frac{4}{(1-2\,z^2)^2} = -4 \cdot [z^n]\left(\frac{1}{1-2\,z^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-2\,z^2}\right)$$
$$= \begin{cases} -4\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (2^{2\cdot k}) \cdot \left(2^{\frac{n}{2}-2\,k}\right)\right) & se\; n\; è\; pari, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Usiamo Maple per ottenere una forma chiusa:

$$-4 \cdot sum\left(2^{2\cdot k} \cdot 2^{\left(\frac{n}{2}-2\cdot k\right)}, k = 0..\frac{n}{2}\right)$$

$$-4\,2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{85}$$

quindi,

$$[z^n] - \frac{4}{\left(1-2z^2\right)^2} = \begin{cases} -4\cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}+1\right) & se\; n\; è\; pari, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Di conseguenza, risulta che

$$[z^n] - \frac{7z}{\left(1-2z^2\right)^2} = -7\cdot[z^{n-1}]\left(\frac{1}{1-2z^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-2z^2}\right)$$
$$= \begin{cases} -7\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) & se\; n\; è\; dispari, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Dunque, analizzando unicamente la funzione generatrice fornita (che risulta essere non corretta), troveremmo che

$$s3_{3,\,n} = \begin{cases} Fibonacci_{n+5} - 4\cdot 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}+1\right) & se\; n\; è\; pari, \\ Fibonacci_{n+5} - 7\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) & altrimenti. \end{cases}$$

Controlliamo se otteniamo effettivamente i coefficienti della funzione generatrice:

```
s33_short_new :=proc(n)
 local res;
 res := Fibonacci(n + 5);
 if (n mod 2 = 0) then res := res-4 2^(n/2) (n/2 + 1);
 else res := res-7 2^(n/2 - 1/2) (n/2 + 1/2) end if;
 eval(res);
 end proc;
```

(86)

```
s33_short_new := proc(n)
    local res;
    res := Fibonacci(n + 5);
    if n mod 2 = 0 then
        res := res − 4 * 2^(1/2 * n) * (1/2 * n + 1)
    else
```

```
        res := res - 7 * 2^(1/2 * n - 1/2) * (1/2 + 1/2 * n)
    end if;
    eval(res)
end proc
```

test_s3m(3, F_S33, s33_short_new, 100, 10)

[0], 1, 1, 1
[10], −158, −158, 402
[20], 29969, 29969, 65809
[30], 7130313, 7130313, 8850633
[40], 1046822786, 1046822786, 1120223106
[50], 136094201517, 136094201517, 139030214317
[60], 17034536191389, 17034536191389, 17147279082909
[70], 2106537275653058, 2106537275653058, 2110746343603138
[80], 259515177004167321, 259515177004167321, 259669108632055961
[90], 31933960710525754817, 31933960710525754817, 31939502249129745857
[100], 3928184081025875270434, 3928184081025875270434, 3928381113509572729634 **(87)**

Adesso i coefficienti tornano, ma non ci danno il valore della sommatoria d'interesse: dunque, la funzione generatrice riportata nell'articolo non è corretta.