

Caduta libera

1 Cose da aggiungere

- Foto scattate da noi dell'apparato sperimentale
- grafici di risultati sbagliati
- tabelle dei dati utilizzati (messe subito dopo dire che calcoli fare)
- scrivere "Gruppo 10" vicino ai nomi
- mettere i nomi e il gruppo in alto a sinistra (e non sotto al titolo)
- spiegazione generale con formule (ma non troppo) di quale fenomeno fisico andiamo ad osservare
- SCRIVERE DELLE CONCLUSIONI LUNGHE E DETTAGLIATE (ho visto dalla relazione che ha consegnato Fra che il prof ha detto che dovevno essere più lunghe (erano di mezza pagina se non di più))
- I grafici devono essere BEN LEGGIBILI, soprattutto le didascalie relative agli assi
- A fianco ad una misura va SEMPRE messo l'errore (anche se il prof ci ha detto che nei calcoli potevamo pensare che non ci fosse errore, nella relazione va messo quello strumentale)

2 Fenomeno fisico

Il fenomeno studiato è la forza di attrazione gravitazionale, descritta dalla legge seguente in modo generale, valida per qualsiasi coppia di enti dotati di massa.

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

Con G costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 le masse dei due corpi ed r la distanza tra essi.

Per questa forza, così come per la forza elettrica è possibile definire un campo, detto campo gravitazionale, indicato con la lettera g . Il concetto di campo rappresenta come varia la forza generata da un corpo in funzione della distanza da esso.

$$g(r) = G \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

Data questa definizione, l'espressione della forza diventa: $F_g = g(r)m$. Ricordando la seconda legge della dinamica, notiamo subito che il campo $g(r)$ rappresenta l'accelerazione con cui un corpo di massa m viene attratto verso un altro corpo di massa M .

Il termine "accelerazione di gravità" deriva proprio da ciò. Il suo valore adottato sulla terra ($9.80665m/s^2$) è quello che si ottiene dall'espressione $g(R_t) = G \frac{M_t}{r^2}$, usando la massa terrestre ed il valore medio del raggio terrestre, poichè la terra non è perfettamente sferica.

Visto che le variazioni di altezza rispetto alla superficie terrestre sono irrilevanti nel calcolo della forza perchè molto minori di R_t , in prossimità della superficie basta moltiplicare la massa di un oggetto per il valore riportato prima e si ottiene la forza con cui la terra e l'oggetto in questione si attraggono.

Trascuriamo le forze di attrazione con oggetti minori, come il tavolo su cui si svolge l'esperimento perchè generano forze assolutamente irrilevanti.

3 Obiettivo

Lo scopo di questo esperimento è di riuscire ad ottenere la misura dell'accelerazione di gravità, analizzando un filmato che ritrae una sferetta in caduta libera. Ciò è stato fatto prendendo varie misure della posizione del corpo tramite fotoregistrazioni ad alta velocità. La formula da usare, che mette in relazione la posizione del corpo e g , è:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

4 Strumenti

- Programma di analisi "Tracker"
- Video con 1000 fotogrammi al secondo

5 Procedimento di misura

Il setup dell'esperimento, osservabile nel video, comprende un'asta metallica alla sommità della quale è posizionata una sferetta metallica ferma. L'asta presenta dei segni distanziati gli uni dagli altri di 10cm. Ad un certo punto la sferetta viene rilasciata e cadrà di moto uniformemente accelerato, poichè soggetta alla sola forza di gravità. Affianco all'asta è presente un cronometro con sensibilità al millesimo di secondo. Essendo il tutto filmato da una fotocamera (*Sony DSC-RX100M4*) che registra a 1000fps, ad ogni frame il cronometro avanza di un millesimo di secondo.

5.1 Setting del programma di tracciamento

Per iniziare, mediante la funzione "asta di calibrazione" si è posto uguale a 10cm la distanza tra 2 segni sull'asta, in modo che il programma potesse generare un metro calibrato con cui misurare la posizione del target.

Poi si è stabilito il frame di inizio del moto, che è risultato essere il 49esimo.

La posizione è stata tracciata ogni 10 frame, mettendo i punti di massa nella parte inferiore

della sferetta. Il metro calibrato è stato posto sulla schermata in modo che coincidesse con la posizione del punto di massa a target fermo.

In totale sono state prese 41 misure.

5.2 Gestione degli errori

L'alta velocità di acquisizione della fotocamera è a scapito della quantità di luce catturata, quindi anche della nitidezza dell'immagine. Gli errori sono stati scelti in base al numero di pixel di transizione tra il colore del target e dello sfondo, e sono stati stimati misura per misura, visto che la chiarezza di ogni frame era variabile. Tramite il metro di calibrazione, è stato posto: $1px = 0.0005m$, pertanto:

$$\Delta y_{misurato} = (\Delta pixel \cdot 0.0005)m$$

Misura	$y_{misurato} \pm \Delta y_{misurato} (m)$	$\Delta Pixel$

Tabella 1: Caption

Tutte le misure sono state riportate in Tabella 4

6 Analisi dei dati

Il frame di inizio della caduta è il 49esimo, che corrisponde ad un tempo iniziale $t_i = 0.012s$. Abbiamo poi terminato lo studio del moto al 459esimo fotogramma, che corrisponde all'istante $t_f = 0.422s$, per un tempo totale di caduta $(t_f - t_i) = 0.410s$. E' stato scelto come ultimo istante di caduta, quello che corrisponde all'ultima misura utile, appena precedente al rimbalzo della pallina sul banco di lavoro.

Per avere una stima preliminare dell'ordine di grandezza dell'errore di misura su g , abbiamo calcolato gli errori relativi di una posizione e di un tempo centrali, nelle nostre misure. Siano $y_{mid} = 0.2465$ con $\Delta y_{mid} = 0.0010$, e $t_{mid} = 0.033$ con $\Delta t_{mid} = 0.001$:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta y_{mid}}{y_{mid}} + 2 \cdot \frac{\Delta t_{mid}}{t_{mid}}$$

Otteniamo che $\frac{\Delta g}{g} \approx 6\%$.

Poichè la posizione dipende dal tempo, e l'ordine di grandezza degli errori relativi è simile, calcoliamo un nuovo errore su y pari a

$$\Delta y' = \left(\frac{2\Delta t}{t} \right) \cdot y + \Delta y_{misurato}$$

Misura	$\Delta y' \text{ (m)}$

Tabella 2: Caption

6.1 Grafico spazio-tempo

Il primo grafico realizzato con il programma di analisi dati *Igor Pro* è stato il grafico spazio-tempo, ossia quello della legge oraria, che dovrebbe seguire la formula indicata nel paragrafo 3 (traiettoria parabolica con posizione e velocità iniziali nulle).

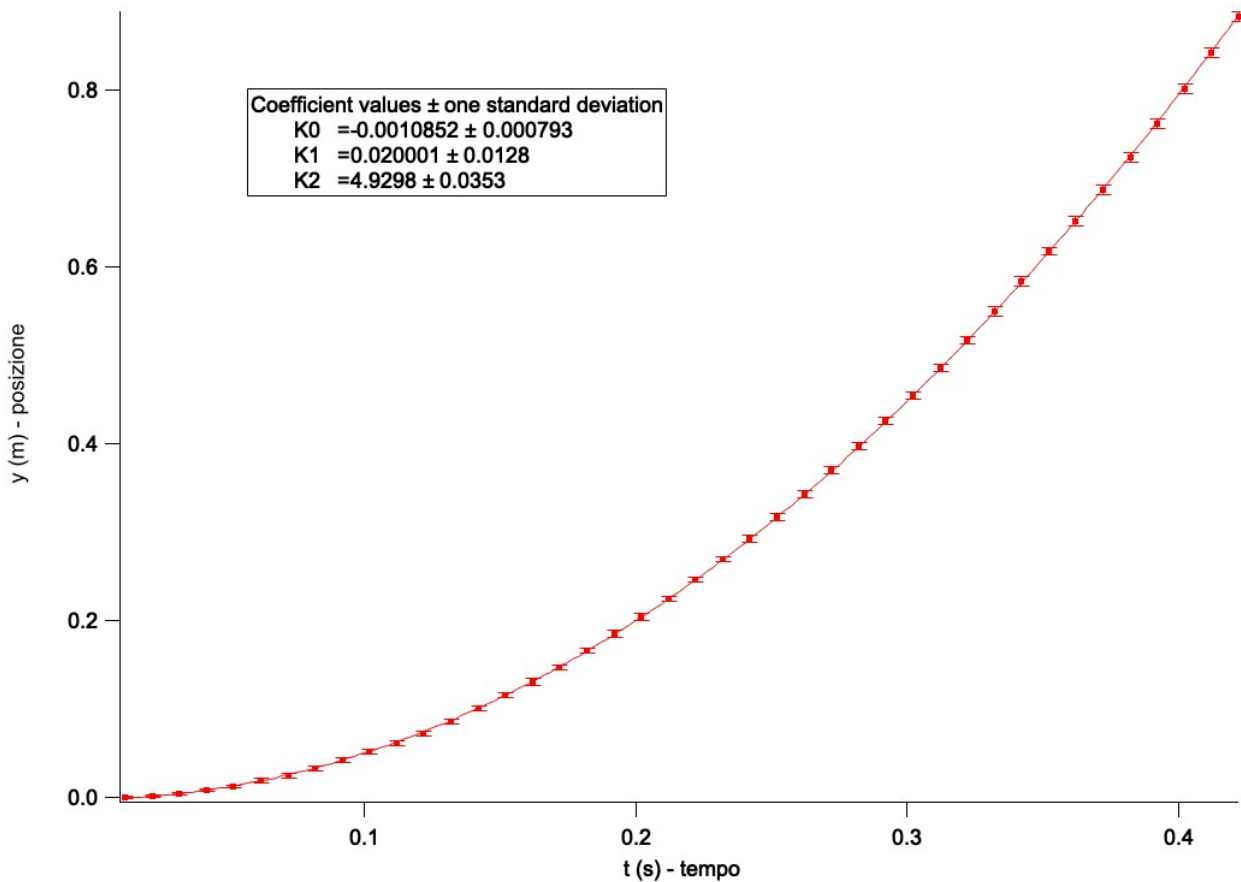


Figura 1: Sulle ordinate compaiono i valori numerici di $y(t)$, associati ai relativi errori $\Delta y'$, mentre sulle ascisse ci sono gli istanti di tempo t

I dati ottenuti tramite la regressione di potenza del secondo ordine (*poli 3*), non sono compatibili con i valori teorici, fatta eccezione per $\frac{g}{2}$:

- Posizione iniziale $y(0)$:

$$K_0 = -0.0010852 \pm 0.000793 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_0_{\text{atteso}} = 0.0000)$$

- Velocità iniziale $v(0)$:

$$K_1 = 0.020001 \pm 0.0128 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_1_{\text{atteso}} = 0.0000)$$

- Coefficiente del termine quadratico, pari a $\frac{g}{2}$:

$$K_2 = 4.9298 \pm 0.0353 \quad (\text{Compatibile con il valore atteso } K_2 \text{ atteso} = 4.9033)$$

Visto che *posizione iniziale* e *velocità iniziale* non sono compatibili con i valori attesi abbiamo corretto l'incompatibilità, isolando a destra il termine in relazione quadratica con il tempo, mentre a sinistra, abbiamo ottenuto una nuova variabile y_{new} in cui, la posizione y , è corretta dai termini K_0 e $K_1 t$, col rispettivo errore Δy_{new} :

L'equazione diventa quindi:

$$y - K_0 - K_1 t = K'_0 + K'_1 t + K'_2 t^2 \quad \text{dove:} \quad y_{new} = y - K_0 - K_1 t$$

L'errore su y_{new} è dato da

$$\Delta y_{new} = \Delta y + \Delta K_0 + \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

Facendo una nuova regressione di potenza del secondo ordine utilizzando i nuovi dati, otteniamo che le variabili K'_0 , K'_1 e K'_2 sono tutte compatibili, come possiamo vedere in Figura 2:

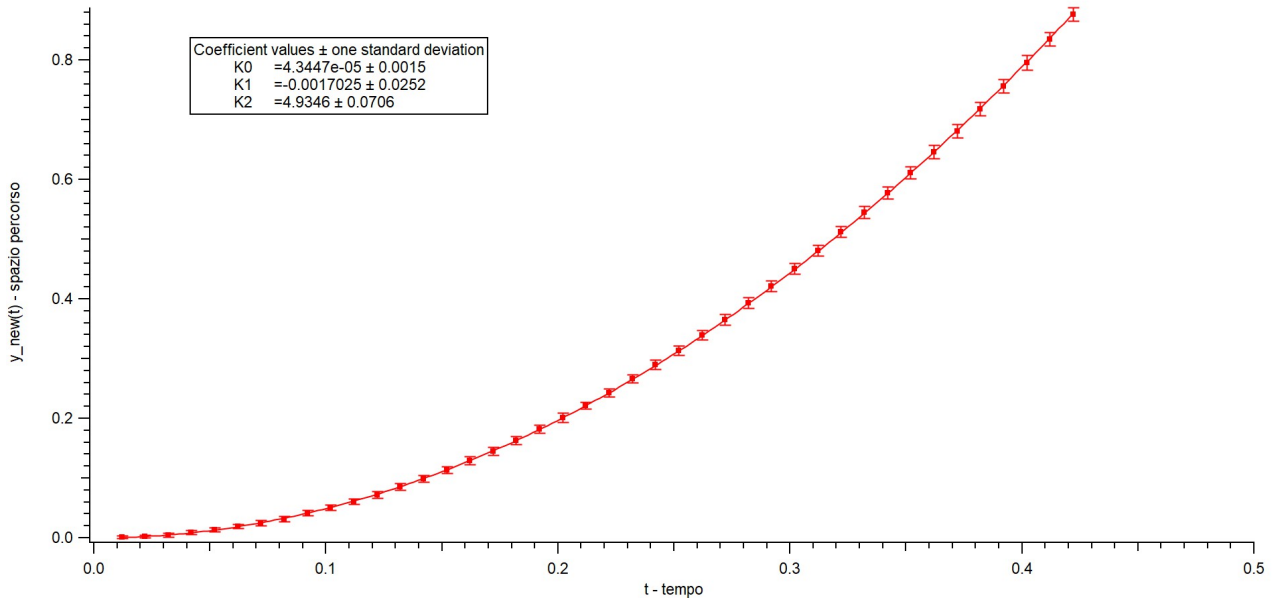


Figura 2: Grafico $y_{new}(t)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo

7 Regressione lineare

Successivamente si è fatta una regressione lineare, partendo da $y_{new} = \frac{1}{2} g t^2$, approssimando posizione e velocità iniziali a 0. Quello che ci si aspetta di trovare è che la posizione sia in relazione quadratica con il tempo:

$$y_{new} = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{passando ai logaritmi:} \quad \ln(y_{new}) = \ln\left(\frac{1}{2} g\right) + 2 \ln t$$

e come errore su $\ln(y_{new})$:

$$\Delta \ln(y_{new}) = \frac{\Delta y_{new}}{y_{new}}$$

Misura	$\ln(y_{new}) \pm \Delta \ln(y_{new})$ (m)

Tabella 3: Caption

Tramite *Igor Pro* si è ottenuto il seguente grafico:

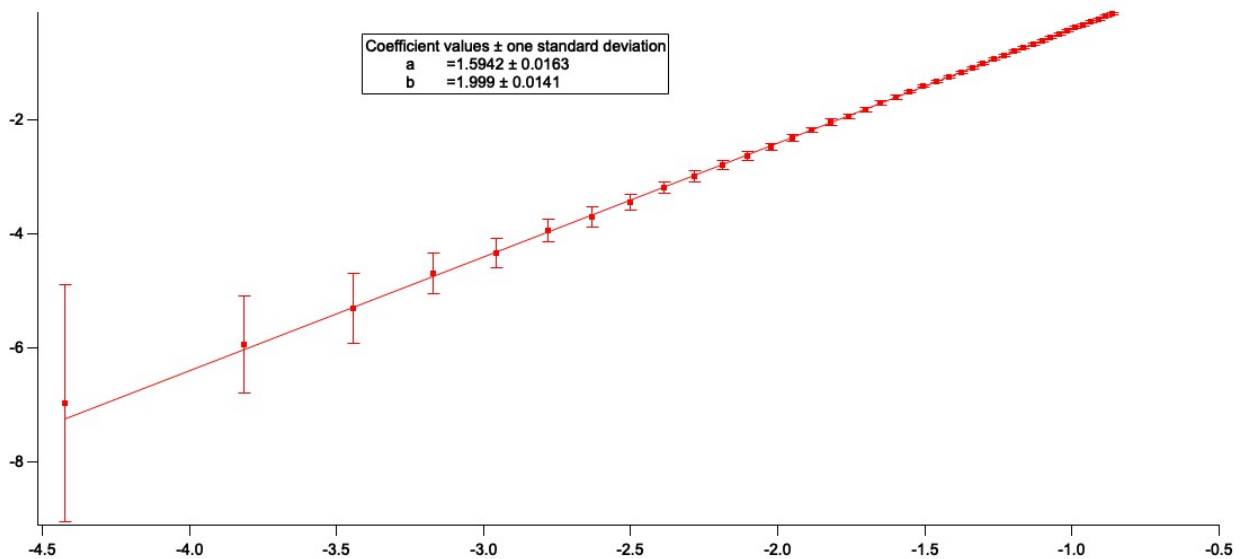


Figura 3: Grafico $\ln(y_{new})(\ln t)$: sull'asse asse y sono riportati i valori di $\ln(y_{new})$ coi rispettivi errori, sull'asse x il $\ln(t)$

Il valore di b è compatibile col valore 2, esponente del tempo nella formula usata in partenza. Si è così dimostrato che vi è una relazione quadratica tra y_{new} e t .

8 Calcolo dell'accelerazione di gravità

A questo punto, dopo aver verificato che la posizione iniziale e finale sono approssimabili a 0, e che la posizione è in relazione quadratica con il tempo, possiamo creare un grafico lineare dei valori y_{new} , coi rispettivi errori, e del tempo al quadrato, così da essere in grado di ricavare il valore dell'accelerazione di gravità.

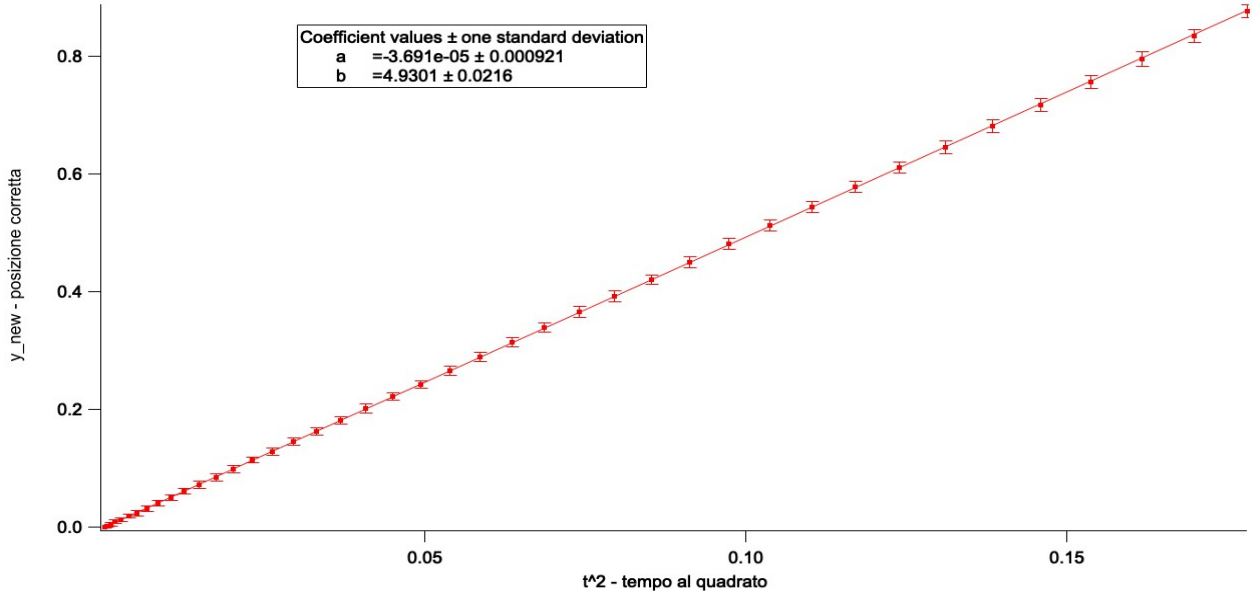


Figura 4: Grafico $y_{new}(t^2)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo al quadrato

L'intercetta e la pendenza della retta ottenuta sono:

- $a = -3.691 \cdot 10^{-5} \pm 0.000921$
- $b = 4.9301 \pm 0.0216$

Dove $b = \frac{1}{2} g = (4.9301 \pm 0.0216)$, da cui:

$$g = 2 b = 9.8602 \frac{m}{s^2}$$

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.04 \frac{m}{s^2}$$

Quindi l'accelerazione di gravità ottenuta sarebbe $g = (9.86 \pm 0.04) \frac{m}{s^2}$. Il valore g , ricavato a partire da b , non risulta compatibile col valore standard poichè $|g - g_{tab}| > |\Delta g - \Delta g_{tab}|$. Questo è dovuto al fatto che ci potrebbero essere errori risultanti dalla configurazione e dalla qualità video dell'esperimento, che non erano sotto il nostro controllo. Per queste ragioni si è passati a due deviazioni standard con una confidenza del 95%, e il grafico ottenuto è il seguente:

Si è infine passati al calcolo di g , utilizzando il valore di b con un nuovo errore:

$$g = 2 b = 9.8602 \frac{m}{s^2}$$

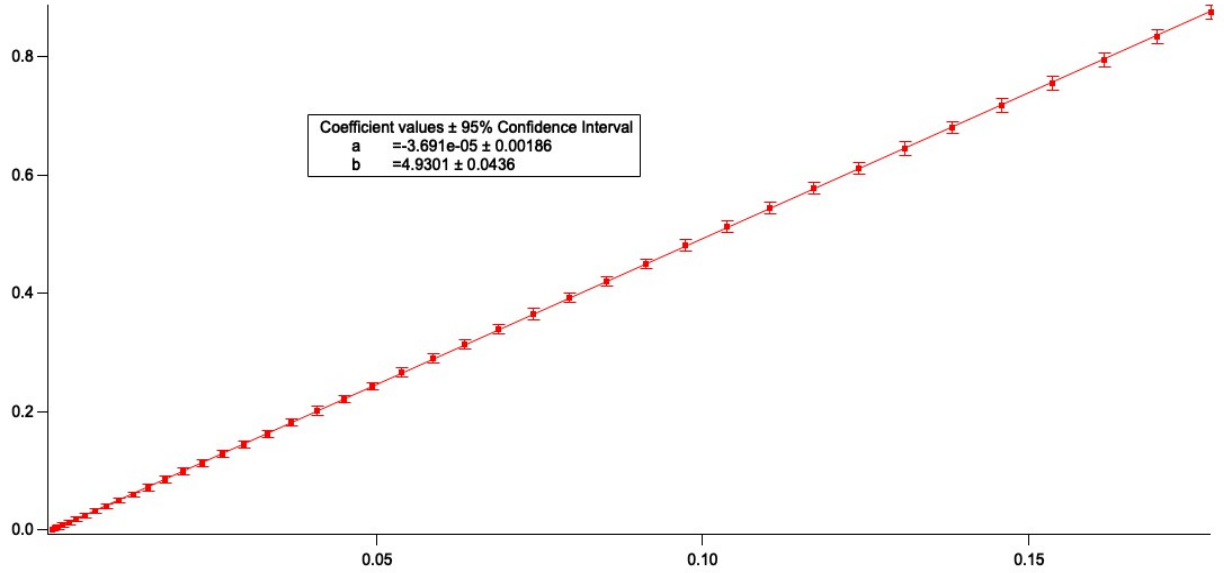


Figura 5: Grafico $y_{new}(t^2)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo al quadrato

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.08 \frac{m}{s^2}$$

Quindi il valore dell'accelerazione di gravità risultate è $g = (9.86 \pm 0.08) \frac{m}{s^2}$

9 Compatibilità

Confrontiamo questo risultato col dato dell'accelerazione di gravità standard $g_{tab} = 9,80665$, considerando quest'ultimo senza errore:

$$|g - g_{tab}| = 0.05335 \frac{m}{s^2} \quad , \quad |\Delta g - \Delta g_{tab}| = 0.08 \frac{m}{s^2}$$

Visto che $|g - g_{tab}| \ll |\Delta g - \Delta g_{tab}|$, il valore trovato è compatibile col valore standard.

10 Conclusioni

Inizialmente si era calcolato un errore relativo $\frac{\Delta g}{g} \approx 6\%$ ottenuto a partire da dei valori intermedi delle nostre misure. L'errore relativo che si ottiene dal valore finale dell'accelerazione di gravità ottenuto è:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0.08}{9.86} = 0.008\%$$

risultato molto differente dal primo. Questo può essere dovuto al fatto che sono state attuate delle correzioni, per rendere compatibili le misure, con la posizione iniziale e velocità iniziale che devono essere nulle (vedi paragrafo 6.1.).

11 Tabella completa

Misura	y (m)	$\Delta pixel$	$\Delta y_{misurato}$ (m)	t (s)	$y_{new} \pm \Delta y_{new}$ (m)	$\ln(y_{new}) \pm \Delta \ln(y_{new})$ (m)	$\ln(t)$ (s)
1	0.0001	2					
2	0.0020	2					
3	0.0045	3					
4	0.0090	3					
5	0.0130	3					
6	0.0195	3					
7	0.0250	4					
8	0.0325	4					
9	0.0420	3					
10	0.0515	3					
11	0.0620	2					
12	0.0730	4					
13	0.0865	4					
14	0.1005	3					
15	0.1160	2					
16	0.1315	4					
17	0.1475	3					
18	0.1660	3					
19	0.1850	3					
20	0.2045	4					
21	0.2250	1					
22	0.2465	2					
23	0.2700	2					
24	0.2935	4					
25	0.3180	3					
26	0.3435	2					
27	0.3700	4					
28	0.3975	3					
29	0.4260	2					
30	0.4550	2					
31	0.4865	3					
32	0.5180	2					
33	0.5500	3					
34	0.5835	3					
35	0.6175	2					
36	0.6520	4					
37	0.6875	3					
38	0.7245	3					
39	0.7625	3					
40	0.8020	4					
41	0.8420	2					
42	0.8835	2					

Tabella 4: Caption