

Caduta libera

Mussini Simone, Ruscillo Fabio, Musi Francesco

1 Obbiettivo

Lo scopo di questo esperimento è di riuscire ad ottenere la misura dell'accelerazione di gravità, analizzando un filmato che ritrae una sferetta in caduta libera. Ciò è stato fatto prendendo varie misure della posizione del corpo tramite fotoregistrazioni ad alta velocità. La formula da usare, che mette in relazione la posizione del corpo e g , è:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

2 Strumenti

- Programma di analisi " *Tracker* "
- Video con 1000 fotogrammi al secondo

3 Procedimento di misura

Il setup dell'esperimento, osservabile nel video, comprende un asta metallica alla sommità della quale è posizionata una sferetta metallica ferma. L'asta presenta dei segni distanziati gli uni dagli altri di 10cm. Ad un certo punto la sferetta viene rilasciata e cadrà di moto uniformemente accelerato, poichè soggetta alla sola forza di gravità. Affianco all'asta è presente un cronometro con sensibilità al millesimo di secondo. Essendo il tutto filmato da una fotocamera (*Sony DSC-RX100M4*) che registra a 1000fps, ad ogni frame il cronometro avanza di un millesimo di secondo.

3.1 Setting del programma di tracciamento

Per iniziare, mediante la funzione " *asta di calibrazione* " si è posto uguale a 10cm la distanza tra 2 segni sull'asta, in modo che il programma potesse generare un metro calibrato con cui misurare la posizione del target.

Poi si è stabilito il frame di inizio del moto, che è risultato essere il 49esimo.

La posizione è stata tracciata ogni 10 frame, mettendo i punti di massa nella parte inferiore della sferetta. Il metro calibrato è stato posto sulla schermata in modo che coincidesse con la posizione del punto di massa a target fermo.

In totale sono state prese 41 misure.

3.2 Gestione degli errori

L'alta velocità di acquisizione della fotocamera è a scapito della quantità di luce catturata, quindi anche della nitidezza dell'immagine. Gli errori sono stati scelti in base al numero di pixel di transizione tra il colore del target e dello sfondo, e sono stati stimati misura per misura, visto che la chiarezza di ogni frame era variabile. Tramite il metro di calibrazione, è stato posto: $1px = 0.0005m$, pertanto:

$$\Delta y_{misurato} = (\Delta pixel \cdot 0.0005)m$$

Tutte le misure sono state riportate in Tabella 1

4 Analisi dei dati

Il frame di inizio della caduta è il 49esimo, che corrisponde ad un tempo iniziale $t_i = 0.012s$. Abbiamo poi terminato lo studio del moto al 459esimo fotogramma, che corrisponde all'istante $t_f = 0.422s$, per un tempo totale di caduta $(t_f - t_i) = 0.410s$. E' stato scelto come ultimo istante di caduta, quello che corrisponde all'ultima misura utile, appena precedente al rimbalzo della pallina sul banco di lavoro.

Per avere una stima preliminare dell'ordine di grandezza dell'errore di misura su g , abbiamo calcolato gli errori relativi di una posizione e di un tempo centrali, nelle nostre misure. Siano $y_{mid} = 0.2465$ con $\Delta y_{mid} = 0.0010$, e $t_{mid} = 0.033$ con $\Delta t_{mid} = 0.001$:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta y_{mid}}{y_{mid}} + 2 \cdot \frac{\Delta t_{mid}}{t_{mid}}$$

Otteniamo che $\frac{\Delta g}{g} \approx 6\%$.

Poichè la posizione dipende dal tempo, e l'ordine di grandezza degli errori relativi è simile, calcoliamo un nuovo errore su y pari a

$$\Delta y' = \left(\frac{2\Delta t}{t} \right) \cdot y + \Delta y_{misurato}$$

4.1 Grafico spazio-tempo

Il primo grafico realizzato con il programma di analisi dati *Igor Pro* è stato il grafico spazio-tempo, ossia quello della legge oraria, che dovrebbe seguire la formula indicata nel paragrafo 1 (traiettoria parabolica con posizione e velocità iniziali nulle).

Sulle ordinate compaiono i valori numerici di $y(t)$, associati ai relativi errori $\Delta y'$, mentre sulle ascisse ci sono gli istanti di tempo t .

I dati ottenuti tramite la regressione di potenza del secondo ordine (*poli 3*), non sono compatibili con i valori teorici, fatta eccezione per $\frac{g}{2}$:

- Posizione iniziale $y(0)$:

$$K_0 = -0.0010852 \pm 0.000739 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_0_{\text{atteso}} = 0.0000)$$

- Velocità iniziale $v(0)$:

$$K_1 = 0.020001 \pm 0.0128 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_1_{\text{atteso}} = 0.0000)$$

- Coefficiente del termine quadratico, pari a $\frac{g}{2}$:

$$K_2 = 4.9298 \pm 0.0353 \quad (\text{Compatibile con il valore atteso } K_2_{\text{atteso}} = 4.9033)$$

Visto che *posizione iniziale* e *velocità iniziale* non sono compatibili con i valori attesi abbiamo corretto l'incompatibilità, isolando a destra il termine in relazione quadratica con il tempo, mentre a sinistra, abbiamo ottenuto una nuova variabile y_{new} in cui, la posizione y , è corretta dai termini K_0 e $K_1 t$, col rispettivo errore Δy_{new} :

L'equazione diventa quindi:

$$y - K_0 - K_1 t = K'_0 + K'_1 t + K'_2 t^2 \quad \text{dove:} \quad y_{\text{new}} = y - K_0 - K_1 t$$

L'errore su y_{new} è dato da

$$\Delta y_{\text{new}} = \Delta y + \Delta K_0 + \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

Facendo una nuova regressione di potenza del secondo ordine utilizzando i nuovi dati, otteniamo che le variabili K'_0 , K'_1 e K'_2 sono tutte compatibili, come possiamo vedere in Figura 1:

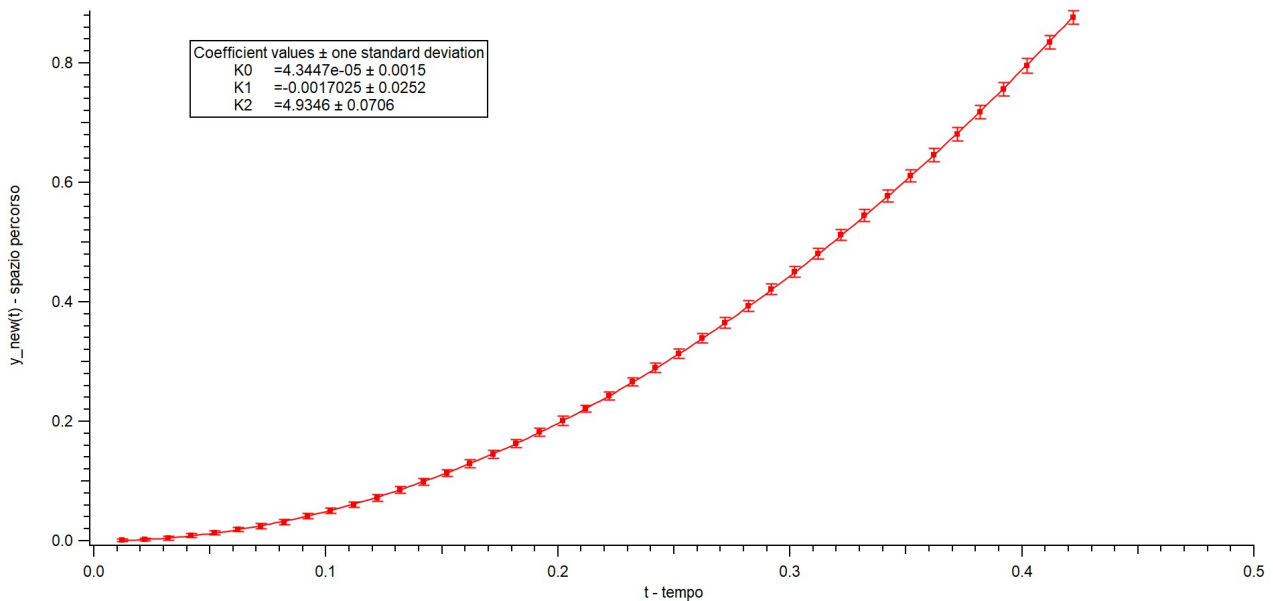


Figura 1: Grafico $y_{\text{new}}(t)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo

5 Regressione lineare

Successivamente si è fatta una regressione lineare, partendo da $y_{new} = \frac{1}{2} g t^2$, approssimando posizione e velocità iniziali a 0. Quello che ci si aspetta di trovare è che la posizione sia in relazione quadratica con il tempo:

$$y_{new} = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{passando ai logaritmi:} \quad \ln(y_{new}) = \ln\left(\frac{1}{2} g\right) + 2 \ln t$$

e come errore su $\ln(y_{new})$:

$$\Delta \ln(y_{new}) = \frac{\Delta y_{new}}{y_{new}}$$

Tramite *Igor Pro* si è ottenuto il seguente grafico:

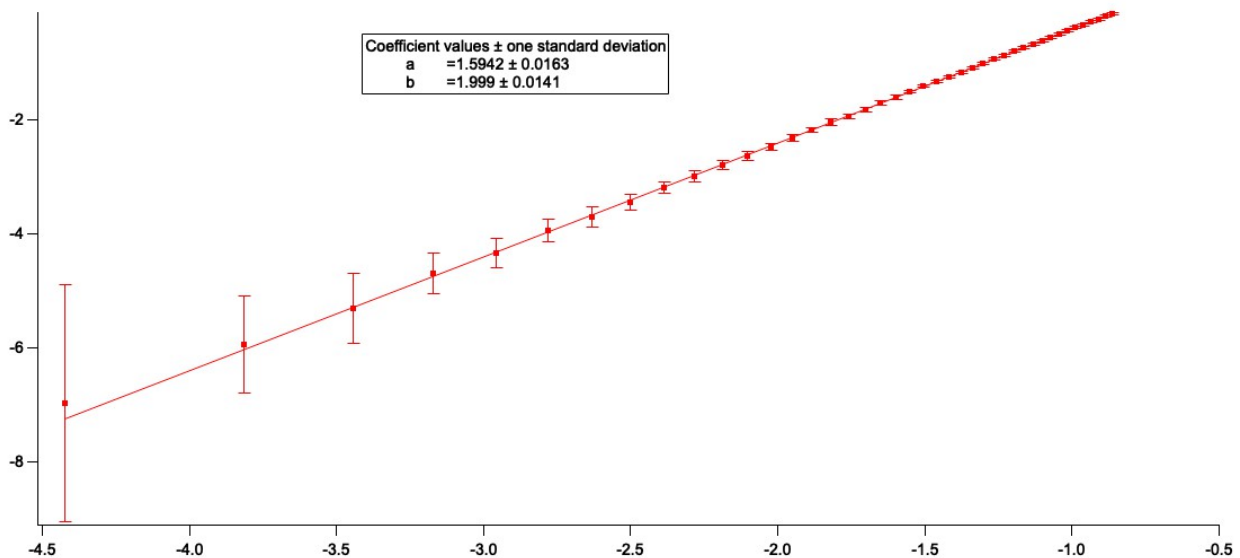


Figura 2: Grafico $\ln(y_{new})(\ln t)$: sull'asse y sono riportati i valori di $\ln(y_{new})$ coi rispettivi errori, sull'asse x il $\ln(t)$

Il valore di b è compatibile col valore 2, esponente del tempo nella formula usata in partenza. Si è così dimostrato che vi è una relazione quadratica tra y_{new} e t .

6 Calcolo dell'accelerazione di gravità

A questo punto, dopo aver verificato che la posizione iniziale e finale sono approssimabili a 0, e che la posizione è in relazione quadratica con il tempo, possiamo creare un grafico lineare dei valori y_{new} , coi rispettivi errori, e del tempo al quadrato, così da essere in grado di ricavare il valore dell'accelerazione di gravità. L'intercetta e la pendenza della retta ottenuta sono:

- $a = -3.691 \cdot 10^{-5} \pm 0.000921$
- $b = 4.9301 \pm 0.0216$

Dove $b = \frac{1}{2} g = (4.9301 \pm 0.0216)$, da cui:

$$g = 2 b = 9.8602 \frac{m}{s^2}$$

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.04 \frac{m}{s^2}$$

Quindi l'accelerazione di gravità ottenuta sarebbe $g = (9.86 \pm 0.04) \frac{m}{s^2}$. Il valore g , ricavato a partire da b , non risulta compatibile col valore standard poichè $|g - g_{tab}| > |\Delta g - \Delta g_{tab}|$. Questo è dovuto al fatto che ci potrebbero essere errori risultanti dalla configurazione e dalla qualità video dell'esperimento, che non erano sotto il nostro controllo. Per queste ragioni si è passati a due deviazioni standard con una confidenza del 95%, e il grafico ottenuto è il seguente:

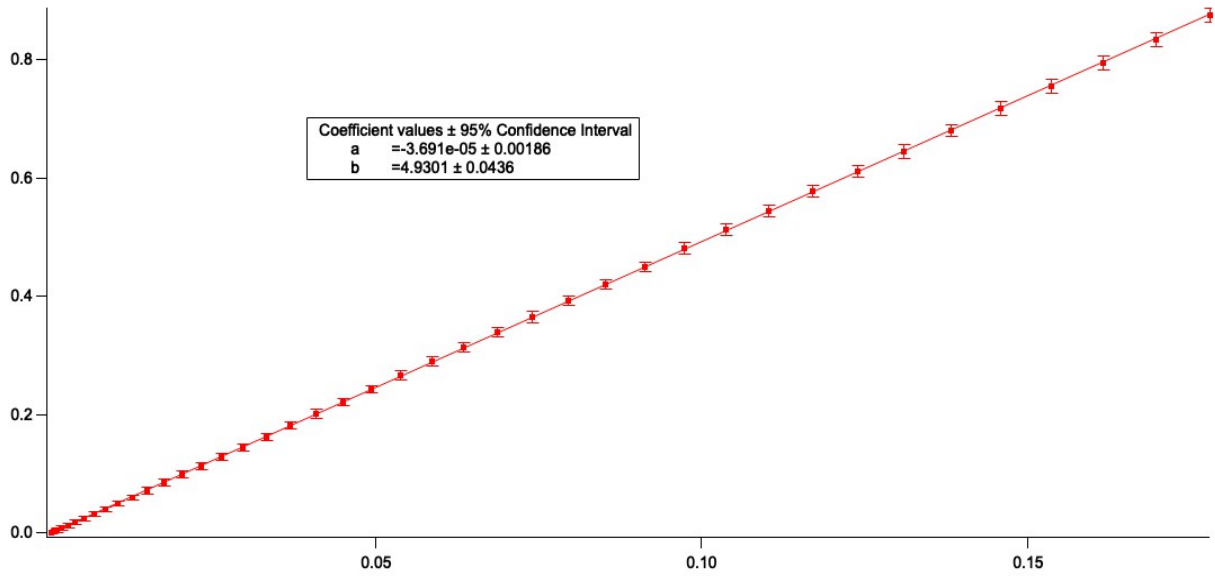


Figura 3: Grafico $y_{new}(t^2)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo al quadrato

Si è infine passati al calcolo di g , utilizzando il valore di b con un nuovo errore:

$$g = 2 b = 9.8602 \frac{m}{s^2}$$

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.08 \frac{m}{s^2}$$

Quindi il valore dell'accelerazione di gravità risultate è $g = (9.86 \pm 0.08) \frac{m}{s^2}$

7 Compatibilità

Confrontiamo questo risultato col dato dell'accelerazione di gravità standard $g_{tab} = 9,80665$, considerando quest'ultimo senza errore:

$$|g - g_{tab}| = 0.05335 \frac{m}{s^2} \quad , \quad |\Delta g - \Delta g_{tab}| = 0.08 \frac{m}{s^2}$$

Visto che $|g - g_{tab}| \ll |\Delta g - \Delta g_{tab}|$, il valore trovato è compatibile col valore standard.

8 Tabella completa

Misura	y (m)	$\Delta pixel$	$\Delta y_{misurato}$ (m)	$\Delta y'$ (m)	$y_{new} \pm \Delta y_{new}$ (m)	$\ln(y_{new}) \pm \Delta \ln(y_{new})$ (m)	$\ln(t)$ (s)
1	0.0001	2					
2	0.0020	2					
3	0.0045	3					
4	0.0090	3					
5	0.0130	3					
6	0.0195	3					
7	0.0250	4					
8	0.0325	4					
9	0.0420	3					
10	0.0515	3					
11	0.0620	2					
12	0.0730	4					
13	0.0865	4					
14	0.1005	3					
15	0.1160	2					
16	0.1315	4					
17	0.1475	3					
18	0.1660	3					
19	0.1850	3					
20	0.2045	4					
21	0.2250	1					
22	0.2465	2					
23	0.2700	2					
24	0.2935	4					
25	0.3180	3					
26	0.3435	2					
27	0.3700	4					
28	0.3975	3					
29	0.4260	2					
30	0.4550	2					
31	0.4865	3					
32	0.5180	2					
33	0.5500	3					
34	0.5835	3					
35	0.6175	2					
36	0.6520	4					
37	0.6875	3					
38	0.7245	3					
39	0.7625	3					
40	0.8020	4					
41	0.8420	2					
42	0.8835	2					

Tabella 1: Caption