

Moto di un grave lungo la verticale

Mussini Simone, Ruscillo Fabio, Musi Francesco

1 Obbiettivo

Lo scopo di questo esperimento è di riuscire ad ottenere la misura dell'accelerazione di gravità, analizzando un filmato che ritrae una sferetta in caduta libera. Ciò è stato fatto prendendo varie misure della posizione del corpo tramite fotoregistrazioni ad alta velocità. La formula che mette in relazione la posizione del corpo e g è:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

2 Strumenti

- Programma di analisi "Tracker"
- Video con 1000 fotogrammi al secondo

3 Procedimento di misura

Il setup del video comprende un asta metallica alla sommità della quale è posizionata una sferetta metallica ferma. L'asta presenta dei segni distanziati di 10cm. Ad un certo punto la sferetta viene rilasciata. Affianco all'asta è presente un cronometro con sensibilità al millesimo di secondo. Essendo il tutto filmato da una fotocamera (Sony DSC-RX100M4) che registra a 1000fps, ad ogni frame il cronometro avanza di un millesimo di secondo.

3.1 Setting del programma di tracciamento

Per iniziare, mediante la funzione "asta di calibrazione" si è posto uguale a 10cm la distanza tra 2 segni sull'asta, in modo che il programma potesse generare un metro calibrato con cui misurare la posizione del target.

Poi si è stabilito il frame di inizio del moto, che è risultato essere il 49esimo.

La posizione è stata tracciata ogni 10 frame, mettendo i punti di massa nella parte inferiore della sferetta. Il metro calibrato è stato posto sulla schermata in modo che coincidesse con la posizione del punto di massa a target fermo.

In totale sono state prese 41 misure.

3.2 Gestione degli errori

L'alta velocità di acquisizione della fotocamera è a scapito della quantità di luce catturata, quindi anche della nitidezza dell'immagine. Per questo è stato necessario stimare ogni grandezza tramite un errore.

Gli errori sono stati misurati in base al numero di pixel di transizione tra il colore del target e dello sfondo, e sono stati stimati misura per misura visto che la chiarezza di ogni frame era variabile. Tramite il metro di calibrazione, è stato posto: $1px = 0.0005m$, pertanto

$$\Delta y_{misurato} = (\Delta pixel \cdot 0.0005)m$$

Tutte le misure sono state riportate in Tabella 1

4 Analisi dei dati

Il frame di inizio della caduta è il 49esimo, che corrisponde ad un tempo iniziale $t_i = 0.012s$. Abbiamo poi terminato lo studio del moto al 459esimo fotogramma, che corrisponde all'istante $t_f = 0.422s$, per un tempo totale di caduta $\Delta t = 0.410s$. E' stato scelto come ultimo istante di caduta, quello che corrisponde all'ultima misura utile, appena precedente al rimbalzo della pallina sul banco di lavoro.

Successivamente siamo passati al calcolo degli errori relativi di y e t , per stabilire quale tra le due è la variabile dipendente e quale quella indipendente. Ciò che si è riscontrato è che esse hanno lo stesso ordine di grandezza, pertanto calcoliamo un nuovo errore su y pari a

$$\Delta y' = \left(\frac{2\Delta t}{t} \right) \cdot y + \Delta y_{misurato}$$

4.1 Grafico spazio-tempo

Il primo grafico realizzato con il programma di analisi dati *Igor Pro* è stato il grafico spazio-tempo, ossia quello della legge oraria, che dovrebbe seguire la formula indicata nel primo paragrafo (traiettoria parabolica con posizione e velocità iniziali nulle).

Sulle ordinate compaiono i valori numerici di $y(t)$, associati ai relativi errori $\Delta y'$, mentre sulle ascisse ci sono gli istanti di tempo t .

I dati ottenuti tramite la regressione di potenza del secondo ordine (*poli 3*), non sono compatibili con i valori teorici, fatta eccezione per $\frac{g}{2}$:

- Posizione iniziale $y(0)$:

$$K_0 = -0.0010852 \pm 0.000739 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_{0 \text{ atteso}} = 0.0000)$$

- Velocità iniziale $v(0)$:

$$K_1 = 0.020001 \pm 0.0128 \quad (\text{Non compatibile con il valore atteso } K_{1 \text{ atteso}} = 0.0000)$$

- Coefficiente del termine quadratico, pari a $\frac{g}{2}$:

$$K_2 = 4.9298 \pm 0.0353 \quad (\text{Compatibile con il valore atteso } K_{2 \text{ atteso}} = 4.9033)$$

Visto che *posizione iniziale* e *velocità iniziale* non sono compatibili con i valori attesi abbiamo corretto l'incompatibilità, isolando a destra il termine in relazione quadratica con il tempo, mentre a sinistra, abbiamo ottenuto una nuova variabile y_{new} in cui la posizione è corretta dai termini K_0 e $K_1 t$, col rispettivo errore Δy_{new} :

L'equazione diventa quindi:

$$y - K_0 - K_1 t = K'_0 + K'_1 t + K'_2 t^2 \quad \text{dove:} \quad y_{new} = y - K_0 - K_1 t$$

L'errore su y_{new} è dato da

$$\Delta y_{new} = \Delta y + \Delta K_0 + \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

Facendo una nuova regressione di potenza del secondo ordine utilizzando i nuovi dati, otteniamo che le variabili K'_0 , K'_1 e K'_2 sono tutte compatibili, come possiamo vedere in Figura 1:

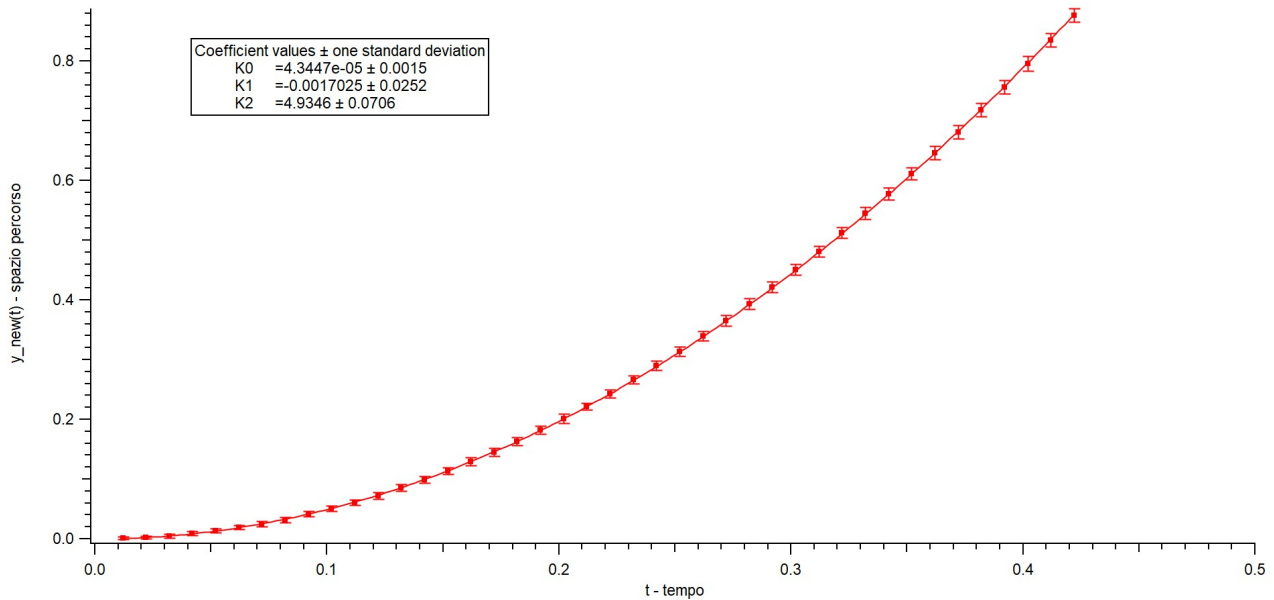


Figura 1: Grafico $y_{new}(t)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo

5 Regressione lineare

Successivamente si è fatta una regressione lineare, partendo da $y_{new} = \frac{1}{2} g t^2$, approssimando posizione e velocità iniziali a 0. Quello che ci si aspetta di trovare è che la posizione sia in relazione quadratica con il tempo:

$$y_{new} = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{passando ai logaritmi:} \quad \ln(y_{new}) = \ln\left(\frac{1}{2} g\right) + 2 \ln t$$

e come errore su $\ln(y_{new})$:

$$\Delta \ln(y_{new}) = \frac{\Delta y_{new}}{y_{new}}$$

Tramite *Igor Pro* si è ottenuto il seguente grafico:

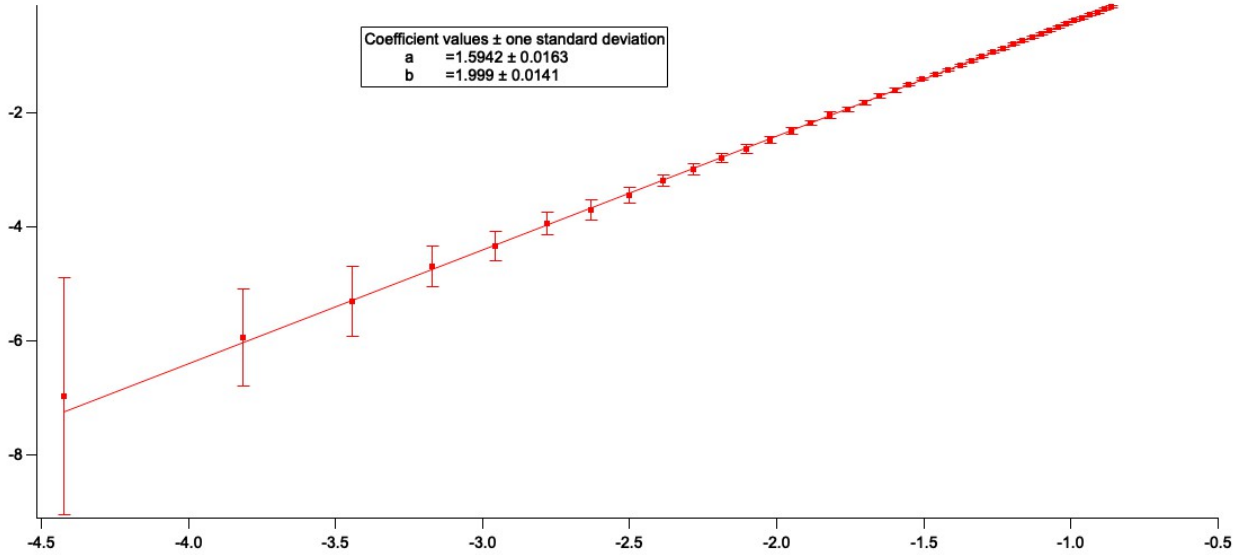


Figura 2: Grafico $\ln(y_{new})(\ln t)$: sull'asse y sono riportati i valori di $\ln(y_{new})$ coi rispettivi errori, sull'asse x il logaritmo del tempo

Il valore di b è compatibile col valore 2, esponente del tempo nella formula usata in partenza. Si è così dimostrato che vi è una relazione quadratica tra y_{new} e t .

6 Calcolo dell'accelerazione di gravità

A questo punto, dopo aver verificato che la posizione iniziale e finale sono approssimabili a 0, e che la posizione è in relazione quadratica con il tempo, possiamo creare un grafico lineare dei valori y_{new} , coi rispettivi errori, e del tempo al quadrato, così da essere in grado di ricavare il valore dell'accelerazione di gravità. L'intercetta e la pendenza della retta ottenuta sono:

- $a = -3.691 \cdot 10^{-5} \pm 0.000921$
- $b = 4.9301 \pm 0.0216$

Dove $b = \frac{1}{2} g = (4.9301 \pm 0.0216)$, da cui:

$$g = 2 b = 9.8602$$

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.04$$

Quindi l'accelerazione di gravità ottenuta sarebbe $g = (9.86 \pm 0.04) \frac{m}{s^2}$. Il valore g , ricavato a partire da b , non risulta compatibile col valore tabulato. Questo è dovuto al fatto che ci

potrebbero essere errori risultanti dalla configurazione e dalla qualità video dell'esperimento, che non erano sotto il nostro controllo. Per queste ragioni si è passati a due deviazioni standard con una confidenza del 95%, e il grafico ottenuto è il seguente:

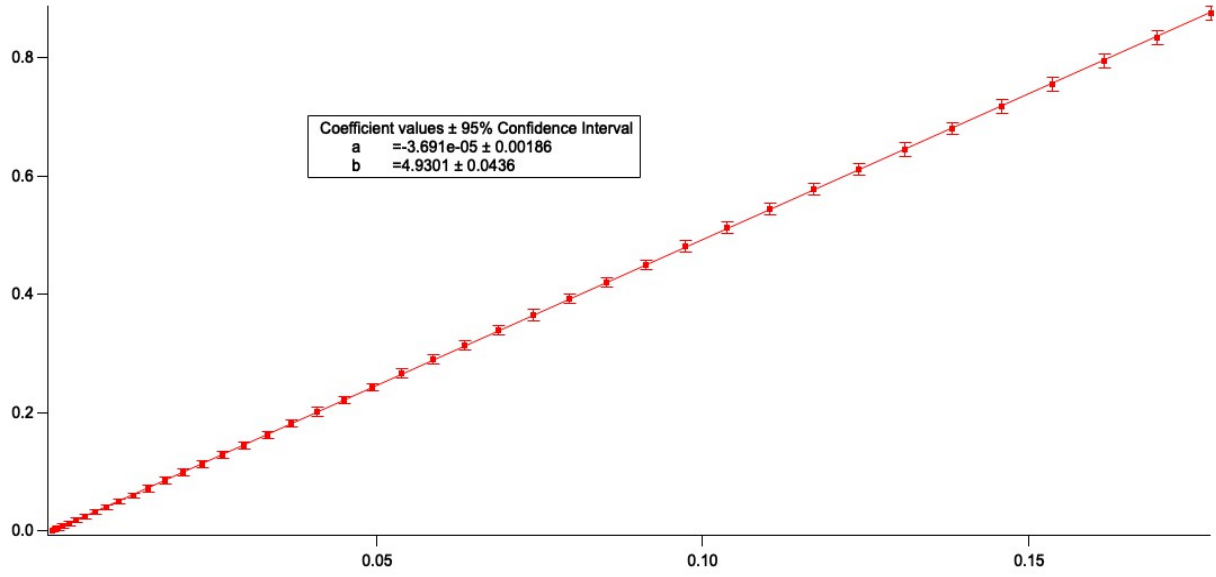


Figura 3: Grafico $y_{new}(t^2)$: sull'asse y sono riportati i valori di y_{new} coi rispettivi errori, sull'asse x il tempo al quadrato

Si è infine passati al calcolo di g , utilizzando il valore di b con un nuovo errore:

$$g = 2 b = 9.8602$$

e l'errore è

$$\Delta g = 2 \Delta b = 0.08$$

Quindi il valore dell'accelerazione di gravità è $g = (9.86 \pm 0.08) \frac{m}{s^2}$, compatibile col valore tabulato.

7 Tabella completa

Misura	$y(m)$	$\Delta pixel$	$\Delta y_{misurato}$
1	0.0001		
2	0.0020		
3	0.0045		
4	0.0090		
5	0.0130		
7	0.0195		
8	0.0250		
9	0.0325		
10	0.0420		
11	0.0515		
12	0.0620		
13	0.0730		
14	0.0865		
15	0.1005		
16	0.1160		
17	0.1315		
18	0.1475		
19	0.1660		
20	0.1850		
21	0.2045		
22	0.2250		
23	0.2465		
24	0.2700		
25	0.2935		
26	0.3180		
27	0.3435		
28	0.3700		
29	0.3975		
30	0.4260		
31	0.4550		
32	0.4865		
33	0.5180		
34	0.5500		
35	0.6175		
36	0.6520		
37	0.6875		
38	0.7245		
39	0.7625		
40	0.8020		
41	0.8420		
42	0.8835		

Tabella 1: Caption