La classificazione dei gruppi finiti di riflessioni

Francesco Mussin

14 luglio 2023

Laureando: Mussin Francesco
Relatore: Pablo Spiga

Riflessioni

Definizione

In uno spazio euclideo $(V, (\cdot, \cdot))$, una riflessione è una qualsiasi applicazione lineare $s : V \longrightarrow V$ che manda un qualche vettore non nullo $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$ in $-\alpha$, fissando ogni vettore ad esso ortogonale. Si scrive in tal caso $s = s_\alpha$.

Riflessioni

Definizione

In uno spazio euclideo $(V, (\cdot, \cdot))$, una riflessione è una qualsiasi applicazione lineare $s : V \longrightarrow V$ che manda un qualche vettore non nullo $\alpha \in V \setminus \{0\}$ in $-\alpha$, fissando ogni vettore ad esso ortogonale. Si scrive in tal caso $s = s_\alpha$.

Per ogni $\beta \in V$ si ha:

$$s_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

Riflessioni

Definizione

In uno spazio euclideo $(V, (\cdot, \cdot))$, una riflessione è una qualsiasi applicazione lineare $s : V \longrightarrow V$ che manda un qualche vettore non nullo $\alpha \in V \setminus \{0\}$ in $-\alpha$, fissando ogni vettore ad esso ortogonale. Si scrive in tal caso $s = s_\alpha$.

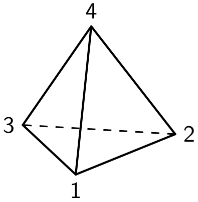
Per ogni $\beta \in V$ si ha:

$$s_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

- s_α è lineare.
- s_α è ortogonale.
- $s_\alpha^2 = 1$.
- $\det(s_\alpha) = -1$.

Definizione

Dato lo spazio euclideo $(V, (\cdot, \cdot))$, un gruppo finito di riflessioni su V è un qualsiasi sottogruppo finito W di $\mathrm{O}(V)$ che sia generato da riflessioni.

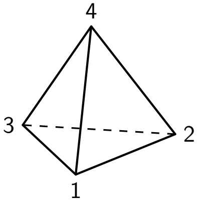


Sia W il gruppo delle trasformazioni ortogonali che fissano un tetraedro con centro all'origine di $\mathbb{R}^3$.

Gruppi finiti di riflessioni

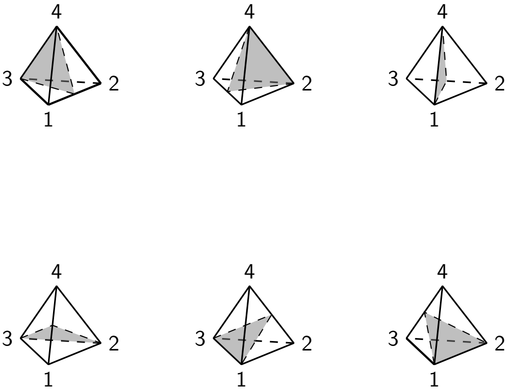
Definizione

Dato lo spazio euclideo $(V, (\cdot, \cdot))$, un gruppo finito di riflessioni su V è un qualsiasi sottogruppo finito W di $\mathrm{O}(V)$ che sia generato da riflessioni.

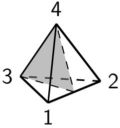


Sia W il gruppo delle trasformazioni ortogonali che fissano un tetraedro con centro all'origine di $\mathbb{R}^3$. Possiamo interpretare $W \subseteq \mathcal{S}_4$.

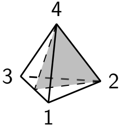
Tuttavia W contiene le seguenti riflessioni:



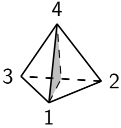
Tuttavia W contiene le seguenti riflessioni:



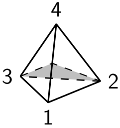
(12)



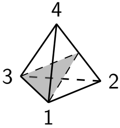
(13)



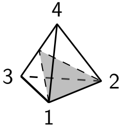
(23)



(14)

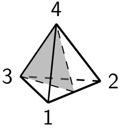


(24)

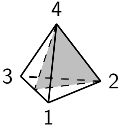


(34)

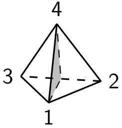
Tuttavia W contiene le seguenti riflessioni:



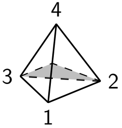
(12)



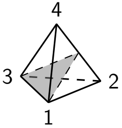
(13)



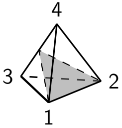
(23)



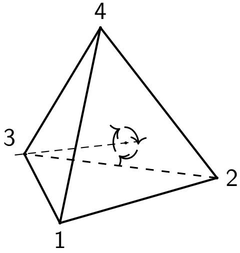
(14)



(24)



(34)



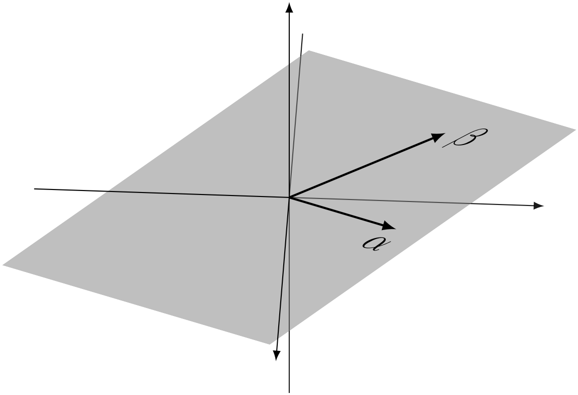
$(142) = (14)(42)$

Proposizione

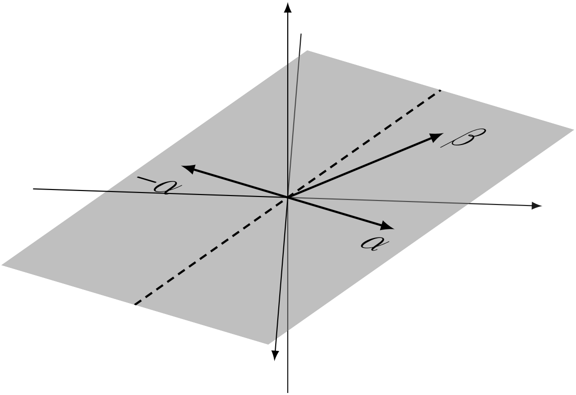
Siano $\alpha, \beta \in V$ due vettori linearmente indipendenti di angolo $\theta \in (0, \pi)$. Allora $s_\beta s_\alpha$ agisce sul complemento ortogonale di $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ come l'identità, mentre su $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$, indicando con $\mathcal{B} = \{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\}$ la base di $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ ottenuta da $\{\alpha, \beta\}$ applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, risulta che la matrice rappresentativa di $s_\beta s_\alpha$ in tale base è:

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

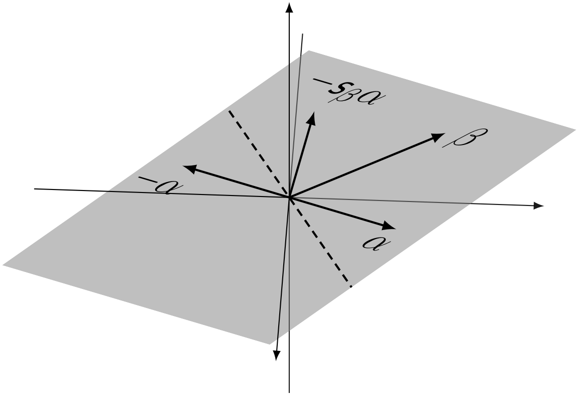
Gruppi finiti di riflessioni



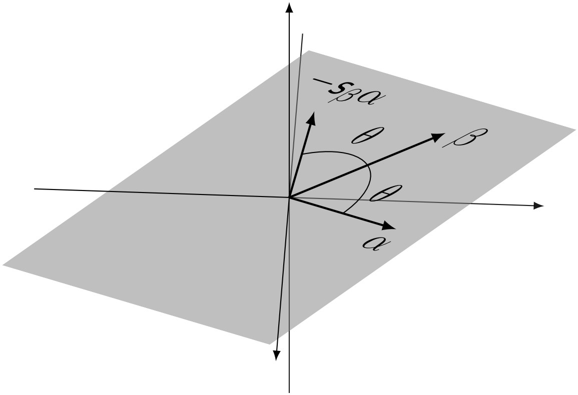
Gruppi finiti di riflessioni



Gruppi finiti di riflessioni



Gruppi finiti di riflessioni



Sistemi di radici

Definizione

Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ è un sottoinsieme finito di V soddisfacente:

- R1 Per ogni $\alpha \in \Phi$ vale $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.
- R2 Per ogni $\alpha \in \Phi$ si ha $s_\alpha \Phi = \Phi$.

Definiamo poi $W(\Phi)$ come il gruppo generato dalle riflessioni s_α al variare di $\alpha \in \Phi$.

Sistemi di radici

Definizione

Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ è un sottoinsieme finito di V soddisfacente:

R1 Per ogni $\alpha \in \Phi$ vale $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.

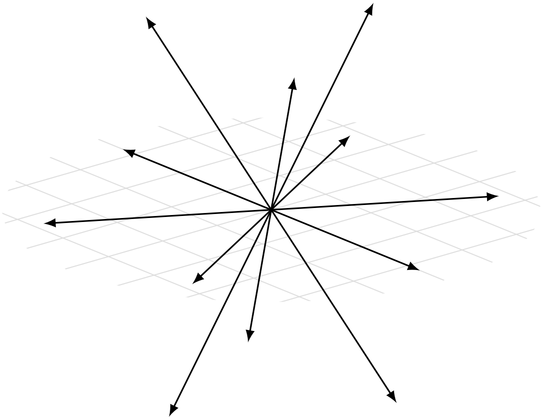
R2 Per ogni $\alpha \in \Phi$ si ha $s_\alpha \Phi = \Phi$.

Definiamo poi $W(\Phi)$ come il gruppo generato dalle riflessioni s_α al variare di $\alpha \in \Phi$.

Si scopre che:

- $W(\Phi)$ è sempre finito.
- Ogni gruppo finito di riflessioni possiede un sistema di radici che lo genera.

Sistemi di radici



Sistemi semplici e positivi

Definizione

Dato il sistema di radici $\Phi \subseteq V$, $\Delta \subseteq \Phi$ si dice sistema semplice per Φ se:

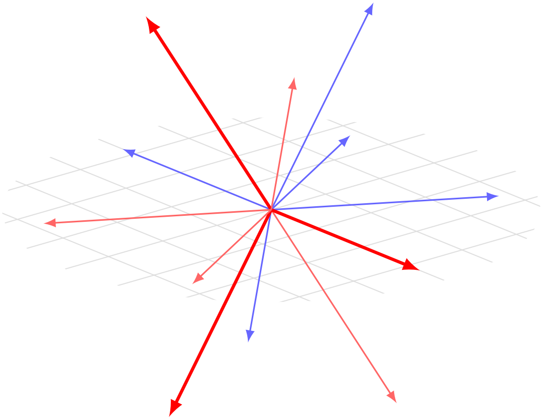
- Δ è una base di $\mathrm{span}(\Phi)$.
- Per ogni $\beta \in \Phi$, se $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, allora vale $k_\alpha \geq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$ oppure $k_\alpha \leq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$.

L'insieme Π dei vettori Φ che sono combinazioni lineari non negative dei vettori di Δ è detto sistema positivo relativo a Δ.

Teorema

Se Δ un sistema semplice per Φ, allora dati $\alpha, \beta \in \Delta$ si ha $(\alpha, \beta) \leq 0$.

Sistemi semplici e positivi



Sistemi semplici e positivi

Teorema

Se Δ è un sistema semplice per il sistema di radici Φ, allora:

$$W(\Phi) = \langle \{ s_\alpha : \ \alpha \in \Delta \} \rangle,$$

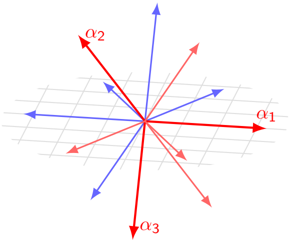
ed ogni singola relazione di $W(\Phi)$ può essere ricondotta ad una relazione del tipo:

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1,$$

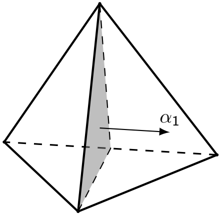
per opportune radici semplici $\alpha, \beta \in \Delta$, ed un opportuno intero positivo $m(\alpha, \beta) \geq 2$.

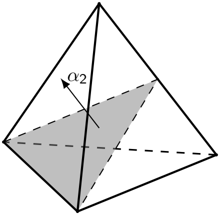
Corollario

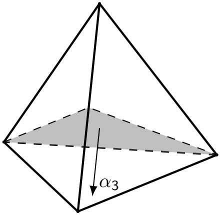
Qualora $\alpha, \beta \in \Delta$ abbiano $s_\alpha s_\beta$ di ordine $m(\alpha, \beta)$, allora essi si trovano ad un angolo di $\pi - \pi / m(\alpha, \beta)$ radianti.

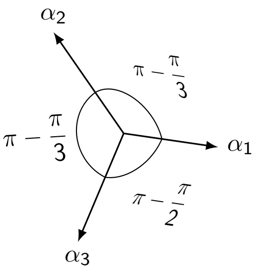


$$\Downarrow$$









$$\Updownarrow$$

$$W = \left\langle \begin{array}{c} s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \\ s_{\alpha_3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} s_{\alpha_1}^2 = s_{\alpha_2}^2 = s_{\alpha_3}^2 = (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 = \\ = (s_{\alpha_1} s_{\alpha_3})^2 = (s_{\alpha_2} s_{\alpha_3})^3 = 1 \end{array} \right\rangle$$

Grafi di Coxeter

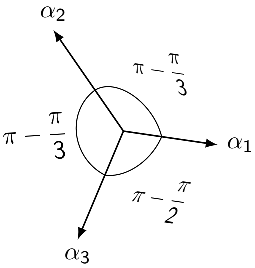
Definizione

Dato il sistema semplice $\Delta \subseteq \Phi$, chiamiamo grafo di Coxeter (relativo a Δ) il grafo etichettato Γ avente Δ come insieme di vertici e nel quale $\alpha, \beta \in \Delta$ sono collegati da un lato etichettato con $m(\alpha, \beta)$ qualora $m(\alpha, \beta) \geq 3$.

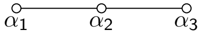
Grafi di Coxeter

Definizione

Dato il sistema semplice $\Delta \subseteq \Phi$, chiamiamo grafo di Coxeter (relativo a Δ) il grafo etichettato Γ avente Δ come insieme di vertici e nel quale $\alpha, \beta \in \Delta$ sono collegati da un lato etichettato con $m(\alpha, \beta)$ qualora $m(\alpha, \beta) \geq 3$.



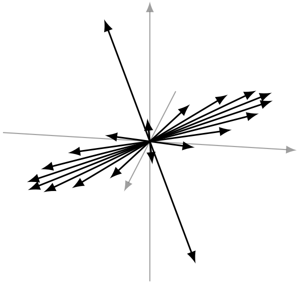
$\Longleftrightarrow$



Irriducibilità

Definizione

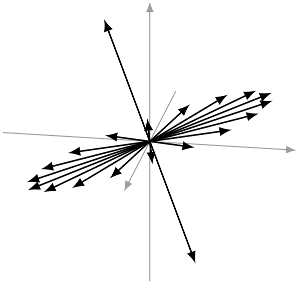
Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ si dice riducibile se contiene due sistemi di radici Φ_1, Φ_2 ortogonali tra di loro e tali che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. In caso contrario Φ si dice irriducibile.



Irriducibilità

Definizione

Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ si dice riducibile se contiene due sistemi di radici Φ_1, Φ_2 ortogonali tra di loro e tali che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. In caso contrario Φ si dice irriducibile.

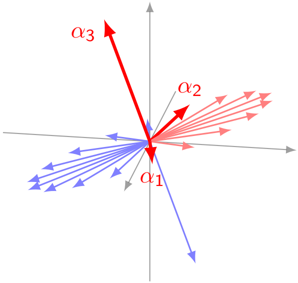


$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ con } (\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

Irriducibilità

Definizione

Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ si dice riducibile se contiene due sistemi di radici Φ_1, Φ_2 ortogonali tra di loro e tali che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. In caso contrario Φ si dice irriducibile.



$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ con } (\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

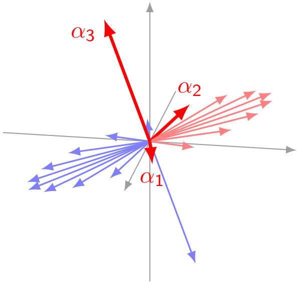
$$\Updownarrow$$

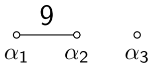
$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ con } (\Delta_1, \Delta_2) = 0$$

Irriducibilità

Definizione

Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ si dice riducibile se contiene due sistemi di radici Φ_1, Φ_2 ortogonali tra di loro e tali che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. In caso contrario Φ si dice irriducibile.





$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ con } (\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ con } (\Delta_1, \Delta_2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ con } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$$

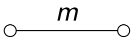
Irriducibilità

Proposizione

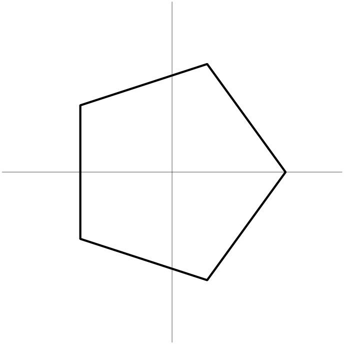
Sia Φ un sistema di radici riducibile con $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$, dove $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sono sistemi di radici ortogonali a due a due. Allora:

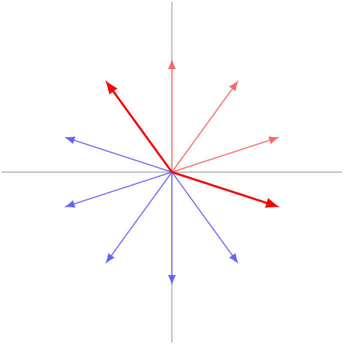
$$W(\Phi) \cong W(\Phi_1) \times \cdots \times W(\Phi_r).$$

I gruppi di tipo $\mathrm{I}_2(m)$

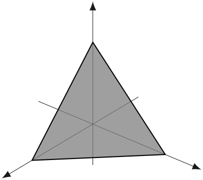


$$\begin{aligned} W &= \langle\ s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m = 1\ \rangle \\ &= \langle\ s, r \mid s^2 = (sr)^2 = r^m = 1\ \rangle = \mathcal{D}_m. \end{aligned}$$





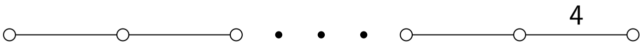
I gruppi di tipo A_n

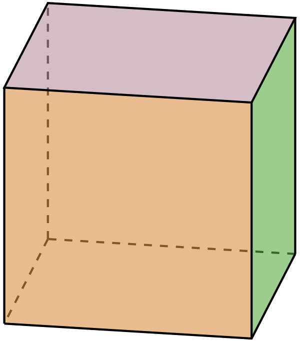


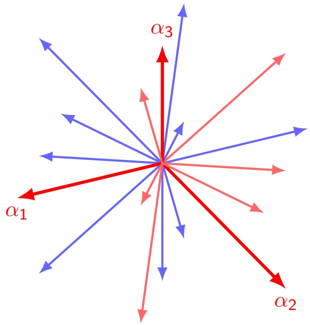
$$\Delta^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$$

Si tratta del gruppo degli scambi di coordinate; è isomorfo a $\mathcal{S}_{n+1}$.

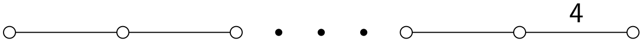
I gruppi di tipo BC_n - Il gruppo Iperottaedrale

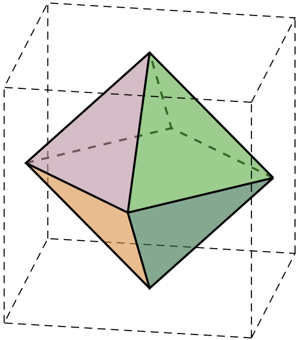


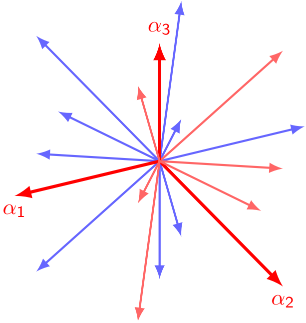




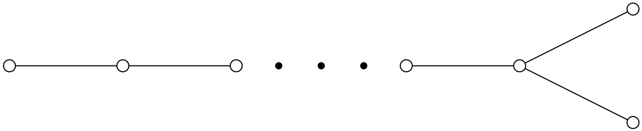
I gruppi di tipo BC_n - Il gruppo Iperottaedrale





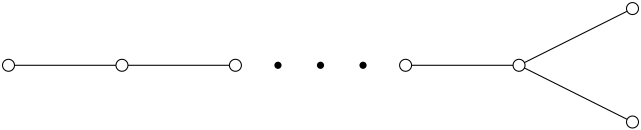


I gruppi di tipo D_n

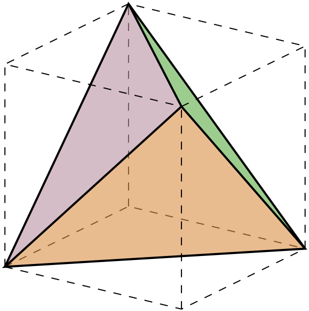


Può essere pensato come lo stabilizzatore nel gruppo iperottaedrale del mezzo ipercubo.

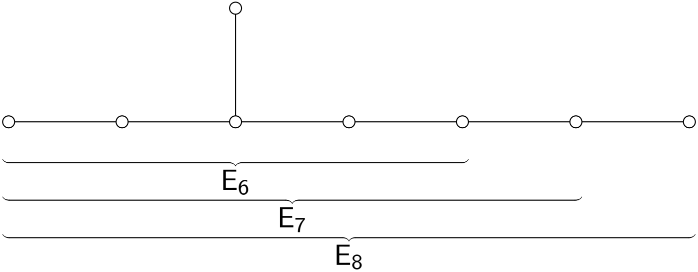
I gruppi di tipo D_n



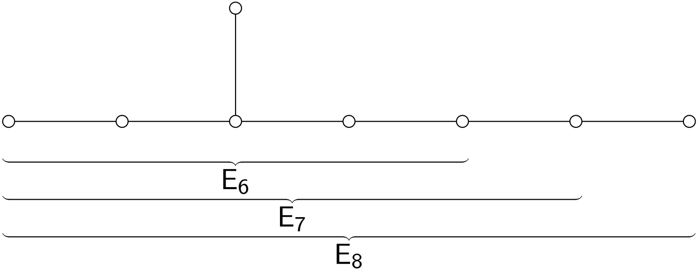
Può essere pensato come lo stabilizzatore nel gruppo iperottaedrale del mezzo ipercubo.



I gruppi di tipo E_6, E_7, ed E_8

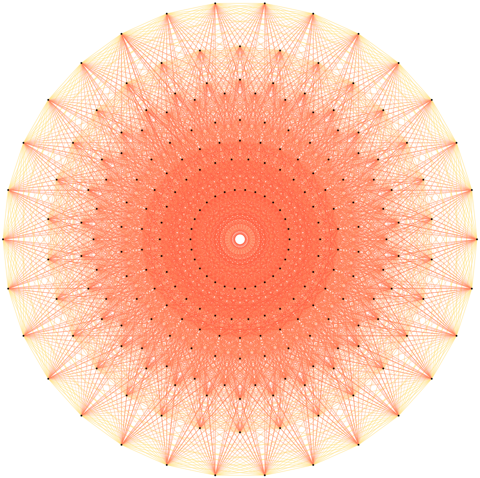


I gruppi di tipo E_6, E_7, ed E_8



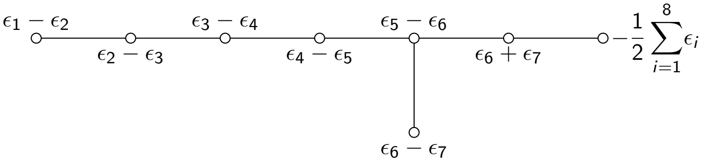
Il sistema di radici Φ per E_8 è:

$$\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j :\ 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i :\ \prod_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} = 1 \right\}.$$



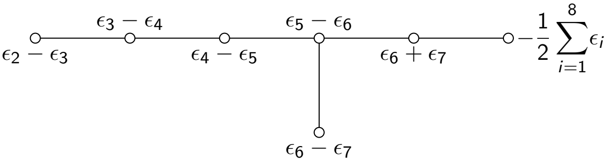
$$\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i : \ \prod_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} = 1 \right\}.$$

Come sistema semplice si prende:



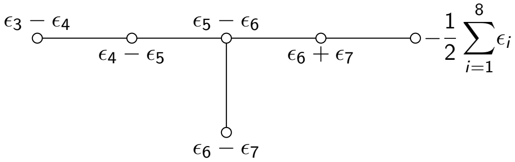
$$\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \le i < j \le 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i : \ \prod_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} = 1 \right\}.$$

Come sistema semplice si prende:

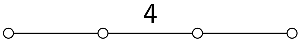


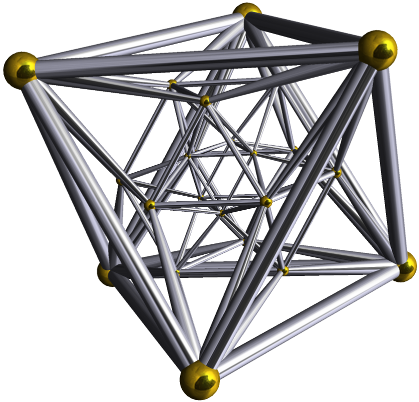
$$\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{k_i} \epsilon_i : \ \prod_{i=1}^{8} (-1)^{k_i} = 1 \right\}.$$

Come sistema semplice si prende:

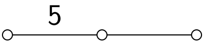


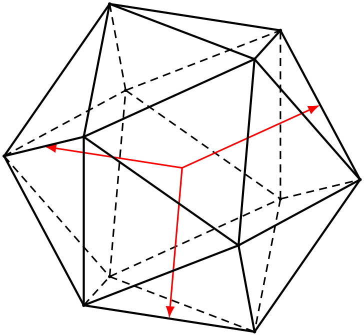
Il gruppo di tipo F_4

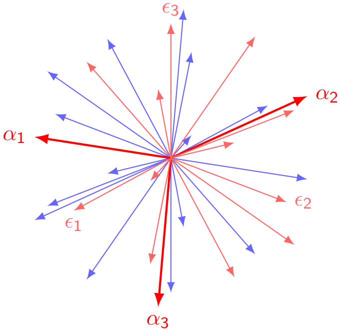




Il gruppo di tipo H_3







Il gruppo di tipo H_4