Università degli Studi di Milano - Bicocca

SCUOLA DI SCIENZE

Dipartimento di Matematica e Applicazioni

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

LA CLASSIFICAZIONE DEI GRUPPI FINITI DI RIFLESSIONI

Relatore:
Prof. Pablo Spiga

Candidato:
Francesco Mussin
Matricola: 866633

14/07/2023

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione **v**

Introduzione **v**

1 Struttura dei gruppi finiti di riflessioni **1**

1.1 Riflessioni . . . 1
1.2 Sistemi di radici . . . 8
1.3 Riflessioni semplici . . . 16
1.4 La lunghezza di un elemento . . . 17
1.5 Condizioni scambio e delezione . . . 18
1.6 Generatori e relazioni . . . 20
1.7 Sottogruppi parabolici . . . 22
1.8 I polinomi di Poincaré . . . 24
1.9 Domini fondamentali . . . 25
1.10 Il reticolo dei sottogruppi parabolici . . . 28

2 La classificazione dei gruppi finiti di riflessioni **29**

2.1 Grafi di Coxeter . . . 29
2.2 Componenti irriducibili . . . 30
2.3 La matrice di Schläfli . . . 31
2.4 Sottografi . . . 34
2.5 La classificazione dei grafi di Coxeter definiti positivi . . . 36
2.6 Cristallografia . . . 38
2.7 Sistemi di radici cristallografici e gruppi di Weyl . . . 40
2.8 Costruzione dei sistemi di radici . . . 43
2.9 Calcolo degli ordini . . . 51
2.10 Gruppi di tipo H_3 e H_4 . . . 52

Introduzione

In tutti i libri di testo che introducono la teoria dei gruppi, tra i primi esempi di gruppi è sempre esposto il gruppo diedrale: questo però fa parte di una classe più ampia di gruppi finiti, detti gruppi finiti di riflessioni; quel termine racchiude tutti i sottogruppi finiti del gruppo ortogonale di uno spazio euclideo che sono generati da trasformazioni particolari, dette riflessioni. Lo studio di questi gruppi si è rilevato essere molto prolifico, non solo perché si è riuscito a classificarli tutti, ma anche perché le loro proprietà ha poi ispirato la teoria dei gruppi di Coxeter, popolare ancora al giorno d'oggi.
L'obiettivo di questo testo è fornire, in modo completo e autosufficiente, una trattazione della classificazione dei gruppi finiti di riflessioni. Nel primo capitolo partiremo recuperando alcune semplici nozioni sulle riflessioni, per poi introdurre la nozione di sistema di radici di un gruppo finito di riflessioni e delle relative nozioni di sistema positivo e sistema semplice. Riguardo a questi ultimi scopriremo che in essi sono racchiuse tutte le informazioni riguardanti la presentazione del gruppo in esame.
Nel secondo capitolo racchiuderemo tali informazioni mediante un grafo etichettato, e scoprendo che per conoscere tutti i gruppi finiti di riflessioni basta comprendere la struttura di alcuni gruppi "irriducibili", costruiremo una matrice (la matrice di Schläfi), e scopriremo quali grafi di Coxeter possono provenire da un gruppo finito di riflessioni irriducibile. Infine per ciascuno di questi grafi troveremo un modo per costruire un gruppo finito di riflessioni che produca tale grafo.
Il testo principale a cui facciamo riferimento è [Hum89], seguito da [Hum72] e [Kan01] nel secondo capitolo. La strada che seguiamo è solo una delle possibili, esistono altre tecniche per studiare questi gruppi analizzando l'azione del gruppo finito di riflessioni sul cosiddetto sistema di specchi, oltre che al sistema di radici. Per un'esposizione di tali argomenti rimandiamo a [BB10].
Molta della matematica riguardante i gruppi finiti di riflessioni è stata sviluppata da Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), famoso appunto per i gruppi di Coxeter e per il suo studio estensivo dei politopi in più dimensioni, ma lui stesso ebbe predecessori, principalmente nella terza figlia del famoso matematico e logico George Boole, Alicia Boole Scott (1860-1940), con la quale Coxeter lavorò per qualche anno; lei stessa coniò il termine politopo. La passione di Alicia Boole delle dimensioni superiori nacque molto presto: sua madre, matematica anche lei, cercò di insegnare il pensiero geometrico a ciascuna delle sue figlie, ma fu suo cognato, Charles Howard Hinton (1853-1907), a esporle certi modelli geometrici che la portarono a studiare questa parte della matematica.
Storicamente però la nozione di sistema di radice trova la sua origine nella teoria di Lie, in particolare nella decomposizione di Cartan delle algebre di Lie semisemplici, dove compare quello che chiameremo sistema di radici cristallografico ed essenziale.

Capitolo 1

Struttura dei gruppi finiti di riflessioni

1.1 Riflessioni

Definizione: *Dato lo spazio euclideo* $(V, (\cdot, \cdot))$, *una riflessione* s *è una qualsiasi applicazione lineare* $s : V \longrightarrow V$ *che manda un qualche vettore non nullo* $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$ *nel suo opposto* $-\alpha$, *fissando l'iperpiano* $H_\alpha := \{\alpha\}^\perp = \{\beta \in V : \ (\beta, \alpha) = 0\}$. *Indichiamo una tale riflessione con* s_α.

Fissato $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$, si può trovare facilmente un'espressione per s_α, più precisamente si ha per ogni $\beta \in V$ che:

$$s_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha. \tag{1.1}$$

Infatti una qualsiasi mappa definita dalla formula (1.1) manda α in $-\alpha$, e fissa qualsiasi vettore ortogonale ad α.
Questa formula può essere usata per mostrare che ogni riflessione è idempotente (i.e. è l'inversa di se' stessa), infatti per ogni $\beta \in V$ si ha:

$$s_\alpha s_\alpha \beta = s_\alpha \left(\beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(-\alpha) = \beta.$$

Inoltre si può usare (1.1) per dimostrare che una qualsiasi riflessione è una trasformazione ortogonale (i.e. preserva il prodotto scalare tra vettori). Si calcola che, dati $\beta, \gamma \in V$:

$$\begin{aligned}(s_\alpha \beta, s_\alpha \gamma) &= \left(\beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \gamma - 2\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) \\ &= (\beta, \gamma) - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\alpha, \gamma) + 4\frac{(\beta, \alpha)\,(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)\,(\alpha, \alpha)}(\alpha, \alpha) - 2\frac{(\gamma, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}(\beta, \alpha) = (\beta, \gamma)\,.\end{aligned}$$

Dunque per ogni $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$, l'applicazione s_α è un elemento di ordine 2 del gruppo ortogonale $\mathrm{O}(V)$. È abbastanza facile vedere che $\det(s_\alpha) = -1$, basta prendere una base ortonormale che contenga un vettore in $\mathbb{R}\alpha$: la matrice rappresentativa risulta essere diagonale con tutte le entrate uguali ad 1, se non una uguale a -1. Siccome ci capiterà spesso di scrivere in modo esplicito queste riflessioni, adottiamo la seguente notazione: dati $\alpha, \beta \in V$ (con α non nullo), indichiamo con $\langle \beta, \alpha \rangle$ il termine:

$$\langle \beta, \alpha \rangle := 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

per cui per ogni $\beta \in V$ scriveremo $s_\alpha \beta = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$. Notiamo che $\langle \ \cdot \ , \alpha \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare mentre $\langle \beta, \ \cdot \ \rangle : V \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ non lo è. Non è difficile vedere poi che per ogni $c \in \mathbb{R}$ non nullo, le mappe $s_{c\alpha}$ e s_α

sono uguali.
In generale una riflessione è univocamente determinata dalla retta che inverte o dall'iperpiano che lascia fisso puntualmente. Se $\alpha \in V \setminus \{0\}$, con riflessione lungo α intenderemo la riflessione s_α, mentre se H è un iperpiano di V, chiameremo riflessione attraverso H la riflessione s_α, dove $\alpha \in H^\perp \setminus \{0\}$. In generale l'iperpiano H dei vettori fissati dalla riflessione s viene chiamato specchio di s.
Notiamo infine che le riflessioni si comportano bene rispetto alle restrizioni, nel senso che qualora considerassimo un sottospazio U di V, ed $\alpha \in U$, allora s_α ristretta allo spazio euclideo $(U, (\cdot,\cdot))$ è ancora una riflessione, perché $s_\alpha(U) = \{\beta - \langle \beta, \alpha\rangle\alpha : \ \beta \in U\} \subseteq U$ e perché continua a valere in U la formula (1.1).
Il nostro oggetto d'interesse saranno i sottogruppi finiti di $\mathrm{O}(V)$ generati da riflessioni, per cui diamo la seguente definizione.

Definizione: *Dato lo spazio euclideo V, un un gruppo di riflessioni è un qualsiasi sottogruppo di* $\mathrm{O}(V)$ *generato da riflessioni.*

Quello che andremo a fare sarà arrivare ad una descrizione completa di questi gruppi, trovando gli unici tipi di gruppi finiti di riflessioni possibili e fornendo un modo per costruirli.
L'esempio più classico di gruppo finito di riflessioni è il gruppo diedrale.

Esempio 1.1.1: Dato un intero $m \geq 3$, indichiamo con $\mathcal{D}_m$ il gruppo diedrale di ordine $2m$. Ci sono vari modi per definirlo, ma forse a livello astratto è meglio conosciuto come il gruppo avente presentazione:

$$\langle s, r \mid r^m = s^2 = 1, \ sr = r^{-1}s\rangle = \langle s, r \mid r^m = s^2 = (sr)^2 = 1\rangle,$$

Mostriamo che tale gruppo possiede anche la seguente presentazione:

$$\langle s_1, s_2 \mid (s_1)^2 = (s_2)^2 = (s_1s_2)^m = 1\rangle.$$

Chiamando F il gruppo libero generato da s_1 e s_2, consideriamo l'unico omomorfismo $\varphi : F \longrightarrow \mathcal{D}_m$ che soddisfa $\varphi(s_1) = s$ e $\varphi(s_2) = sr$. Notiamo che questa mappa è suriettiva in quanto un qualsiasi elemento di $\mathcal{D}_m$, che si scrive come $r^\ell s^k$ per $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$ e $k \in \{0, 1\}$, è uguale a $\varphi((s_1s_2)^\ell s_1^k)$. Notiamo poi che $\varphi((s_1)^2) = s^2 = 1$, $\varphi((s_2)^2) = (sr)^2 = 1$, e $\varphi((s_1s_2)^m) = \varphi(s_1s_2)^m = (ssr)^m = r^m = 1$, per cui il normalizzante N di $\{(s_1)^2, (s_2)^2, (s_1s_2)^m\} \subset F$ è contenuto in $\mathrm{Ker}(\varphi)$. È dunque ben definita $\overline{\varphi} : F/N \longrightarrow \mathcal{D}_m$ data da $\overline{\varphi}(xN) = \varphi(x)$. La mappa $\overline{\varphi}$ è suriettiva, ma è anche iniettiva perché $|F/N| = 2m$. Per vedere questo osserviamo che le parole possibili in questo gruppo sono tutte di uno di questi tipi

- $s_1s_2 \cdots s_1s_2$ (parola che inizia per s_1 con un numero pari di termini)
- $s_1s_2 \cdots s_2s_1$ (parola che inizia per s_1 con un numero dispari di termini)
- $s_2s_1 \cdots s_2s_1$ (parola che inizia per s_2 con un numero pari di termini)
- $s_2s_1 \cdots s_1s_2$ (parola che inizia per s_2 con un numero dispari di termini)

Questo si vede prendendo una qualsiasi parola di F e riducendo con le relazioni $(s_1)^2 = (s_2)^2 = 1$. Però da $(s_1s_2)^m = 1$ queste parole diventano:

- $(s_1s_2)^k$ per $k \in \{0, \dots, m-1\}$.
- $(s_1s_2)^k s_1$ per $k \in \{0, \dots, m-1\}$.
- $(s_2s_1)^k$ per $k \in \{0, \dots, m-1\}$.
- $(s_2s_1)^k s_2$ per $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Ma notando che $(s_1s_2)^k = (s_2s_1)^{-k}$ e che $(s_2s_1)^k s_2 = (s_2s_1)^{k+1}s_1$ (moltiplicando per s_1^2) e analogamente $(s_1s_2)^k s_1 = (s_1s_2)^{k+1}s_2$, deduciamo che $F/N = \{(s_1s_2)^k s_1^\ell N : \ k \in \{0,\dots,m-1\}, \ \ell \in \{0,1\}\}$, per cui $|F/N| = 2$.
Infine verifichiamo che esiste un gruppo finito di riflessioni con tale presentazione. Considera in $\mathbb{R}^2$ i vettori:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \cos(\pi/m) \\ \sin(\pi/m) \end{bmatrix}.$$

Mediante la formula (1.1) si calcola che le matrici rappresentative di s_α ed s_β nella base canonica $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ sono rispettivamente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} -\cos(2\pi/m) & -\sin(2\pi/m) \\ -\sin(2\pi/m) & \cos(2\pi/m) \end{bmatrix},$$

per cui il loro prodotto è rappresentato in tale base da:

$$\begin{bmatrix} -\cos(2\pi/m) & -\sin(2\pi/m) \\ -\sin(2\pi/m) & \cos(2\pi/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/m) & -\sin(2\pi/m) \\ \sin(2\pi/m) & \cos(2\pi/m) \end{bmatrix},$$

che ha ordine m. Quindi il gruppo $W \subseteq \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ generato da s_α e s_β è un altro modo per scrivere il gruppo diedrale di ordine $2m$. Che la composizione di due riflessioni s_α e s_β sia una rotazione di angolo doppio di quello formato da α e β è un fatto generale.

Proposizione 1.1.1: *Siano $\alpha, \beta \in V \smallsetminus \{0\}$ due vettori linearmente indipendenti di angolo $\theta \in (0, \pi)$. Allora $s_\beta s_\alpha$ agisce sul complemento ortogonale di $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ come l'identità, mentre su $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$, indicando con $\mathcal{B} = \{\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}\}$ la base di $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ ottenuta da $\{\alpha, \beta\}$ applicando il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (seguita dalla sua ortonormalizzazione), risulta che la matrice rappresentativa di $s_\beta s_\alpha$ in tale base è*

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si ha che $\det(s_\alpha s_\beta) = 1$, e quindi essendo $s_\alpha s_\beta \in \mathrm{O}(V)$, risulta che $s_\beta s_\alpha$ è una rotazione. È abbastanza chiaro che $s_\beta s_\alpha$ ristretta a $(\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta)^\perp = \{\alpha\}^\perp \cap \{\beta\}^\perp$ sia l'identità.
La base $\mathcal{B}$ sarà della forma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \widehat{\alpha} = c_\alpha \alpha, \ \widehat{\beta} = c_\beta \left(\beta - \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \right) \right\},$$

dove $c_\alpha, c_\beta > 0$ sono scelti in modo tale che $\|\widehat{\alpha}\| = \|\widehat{\beta}\| = 1$. Per calcolare $(s_\beta s_\alpha)(\widehat{\alpha})$ ci basterà determinare $(s_\beta s_\alpha)(\alpha)$. Per questo scriviamo:

$$\begin{aligned}(s_\beta s_\alpha)(\alpha) &= -s_\beta(\alpha) = -\alpha + 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}\beta = -\alpha + 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} \left(\frac{1}{c_\beta}\widehat{\beta} + \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) \\ &= \left(2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} - 1 \right) \alpha + \frac{2}{c_\beta}\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}\widehat{\beta} = \cos(2\theta)\alpha + \frac{2}{c_\beta}\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}\widehat{\beta}\end{aligned}$$

da cui:

$$(s_\beta s_\alpha)(\widehat{\alpha}) = c_\alpha (s_\beta s_\alpha)(\alpha) = \cos(2\theta)\widehat{\alpha} + 2\frac{c_\alpha}{c_\beta}\frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)}.$$

È noto però che ogni matrice di $\mathrm{SO}(2)$ (tra cui quella che stiamo esaminando) è della forma:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

per opportuni numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ soddisfacenti $a^2 + b^2 = 1$. Quindi dal calcolo appena svolto deduciamo che nel nostro caso $a = \cos(2\theta)$, e quindi $b = \pm\sin(2\theta)$. Tuttavia deve essere $b = \sin(2\theta)$ perché nell'espressione di $(s_\beta s_\alpha)(\widehat{\alpha})$, il coefficiente di $\widehat{\beta}$ ha lo stesso segno di $\sin(2\theta)$, qualsiasi $\theta \in (0, \pi)$ sia. $\square$

Osservazione 1.1.1: Se non si specifica una base ortonormale su cui una rotazione di uno spazio euclideo 2-dimensionale agisce, non si può specificare un solo valore per il suo angolo, perché se una rotazione ruota di un certo angolo i vettori di una base ortonormale, scambiando l'ordine in cui compaiono i vettori della base la matrice rappresentativa della rotazione sarà di angolo opposto. Senza specificare una base si può soltanto dire che una rotazione è di angolo $2k\pi \pm \varphi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ e qualche $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Questa proprietà delle riflessioni tornerà più avanti, ma si può già intravedere che avrà un ruolo importante. Se W è un gruppo finito di riflessioni, prese due qualsiasi riflessioni s, s', il loro prodotto sarà in W e in quanto tale avrà ordine finito, ma essendo $ss' \in \mathrm{SO}(V)$ una rotazione, dire che essa ha ordine m significa dire che è una rotazione di $2k\pi \pm 2\pi/m$ radianti per qualche $k \in \mathbb{Z}$. A questo stadio si può solo vedere che queste relazioni esistono, ma vedremo il loro ruolo cruciale più in avanti.
Prima di continuare con la teoria vediamo altri esempi.

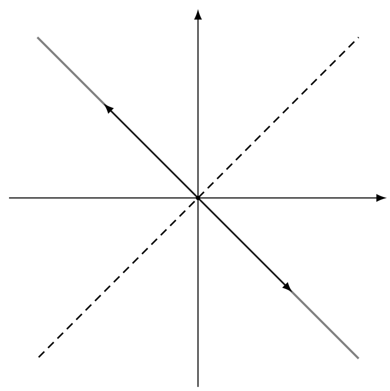
Esempio 1.1.2: Per $n \geq 2$ consideriamo il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$. Questo ha una copia in $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$, ottenuta nel seguente modo: data $\sigma \in \mathcal{S}_n$ si definisce $T_\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ come l'unica applicazione lineare che manda l'i-esimo vettore ϵ_i della base canonica nel $\sigma(i)$-esimo vettore $\epsilon_{\sigma(i)}$ dello stesso sistema di vettori. Si verifica facilmente che:

- Ciascun T_σ è ortogonale, perché dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha:
$$(T_\sigma x, T_\sigma y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\epsilon_{\sigma(i)}, \epsilon_{\sigma(j)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{\sigma(i),\sigma(j)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x, y)\,.$$
- $T_{\sigma\tau} = T_\sigma \circ T_\tau$ per ogni $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. Infatti $T_{\sigma\tau}$ manda ϵ_i in $\epsilon_{\sigma(\tau(i))}$, mentre $T_\sigma \circ T_\tau$ manda ϵ_i in $T_\sigma(\epsilon_{\tau(i)}) = \epsilon_{\sigma(\tau(i))}$. Questo ci dice che la mappa $\mathcal{S}_n \ni \sigma \longmapsto T_\sigma \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ è un omomorfismo di gruppi.
- l'omomorfismo $\mathcal{S}_n \ni \sigma \longmapsto T_\sigma \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ è iniettivo, perché se T_σ è l'identità, questo significa che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha $\epsilon_{\sigma(i)} = \epsilon_i$, ossia che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ vale $\sigma(i) = i$.

La cosa particolare è che il fatto che ogni permutazione di $\mathcal{S}_n$ sia prodotto finito di scambi si traduce nel fatto che ogni trasformazione ortogonale T_σ è prodotto di riflessioni. Questo è dovuto al fatto che per ogni scambio $\sigma = (i\ j)$, T_σ è la riflessione attraverso l'iperpiano $\{\epsilon_i - \epsilon_j\}^\perp$. Quindi $\mathcal{S}_n$ in questo senso è un gruppo finito di riflessioni. Si può dimostrare che le uniche riflessioni di questo gruppo sono le trasformazioni T_σ al variare di $\sigma = (i\ j)$ scambio di $\mathcal{S}_n$.
Notiamo che sotto l'azione $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^n \ni (\sigma, x) \longmapsto T_\sigma x \in \mathbb{R}^n$, lo span $\mathbb{R}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n)$ è lo spazio dei punti lasciati fissi da ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$, infatti:

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R}^n :\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ T_\sigma x = x\} &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i :\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n x_j \epsilon_j \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i :\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)} \epsilon_{\sigma(j)} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i :\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i = x_{\sigma(i)} \right\} \\
&= \mathbb{R}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n).
\end{aligned}$$

D'altra parte chiamando $H \subseteq \mathbb{R}^n$ il complemento ortogonale di questo spazio, si ha che per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vale $T_\sigma(H) = H$, poiché se $x \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $x_1 + \cdots + x_n = 0$, allora $T_\sigma x = x_1\epsilon_{\sigma(1)} + \cdots + x_n\epsilon_{\sigma(n)} = x_{\sigma^{-1}(1)}\epsilon_1 + \cdots + x_{\sigma^{-1}(n)}\epsilon_n$ soddisfa ancora $x_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + x_{\sigma^{-1}(n)} = 0$, quindi $T_\sigma(H) \subseteq H$, che però significa $T_\sigma(H) = H$ in quanto T_σ è un automorfismo di $\mathbb{R}^n$. Quindi $\mathcal{S}_n$ agisce su uno spazio euclideo $n-1$ dimensionale come gruppo finito di riflessioni (gli automorfismi $T_{(i\ j)}$ continuano ad essere riflessioni siccome $\epsilon_i - \epsilon_j \in H$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distinti), e restringendoci a questo spazio, l'insieme dei vettori lasciati fissi da tutti i T_σ è $H \cap \mathbb{R}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n) = \{0\}$.
Per $n = 2$ la situazione è molto semplice: il gruppo è di riflessioni è costituito da due soli elementi, l'identità e la riflessione lungo $\epsilon_1 - \epsilon_2$:



Per $n = 3$ invece le riflessioni sono attraverso $\epsilon_1 - \epsilon_2$, $\epsilon_1 - \epsilon_3$, $\epsilon_2 - \epsilon_3$, per un totale di 6 elementi:

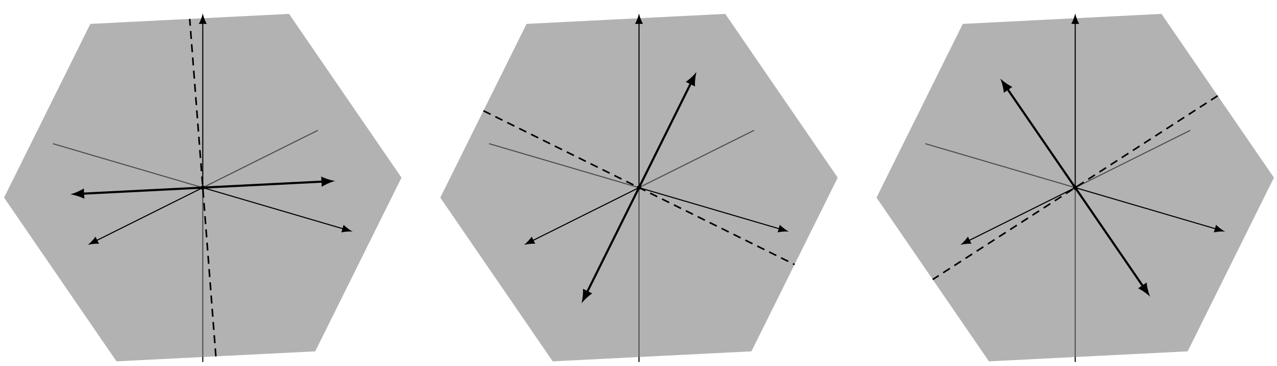


Figura 1.1: Da sinistra a destra: la riflessione attraverso $\epsilon_1 - \epsilon_2$, la riflessione attraverso $\epsilon_1 - \epsilon_3$, e la riflessione attraverso $\epsilon_2 - \epsilon_3$. Le linee tratteggiate raffigurano gli specchi di tali riflessioni.

In generale per $n \geq 2$ si indica con A_{n-1} il gruppo finito di riflessioni $\mathcal{S}_n$ agente sullo spazio euclideo $(n-1)$-dimensionale $\{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n\}^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$; di conseguenza quando si scrive A_n ci si riferisce al gruppo $\mathcal{S}_{n+1}$ agente su $\{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n+1}\}^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Dalle illustrazioni sopra si può intravedere che per $n = 2$, A_n è il gruppo delle isometrie che fissano un triangolo equilatero:

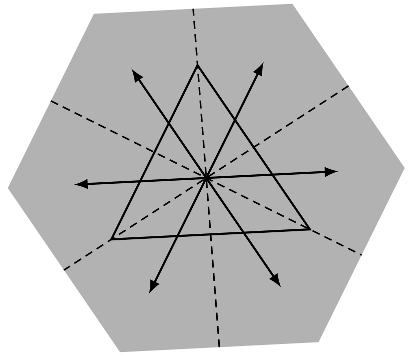


Figura 1.2: Nel piano $\{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3\}^\perp$ sono raffigurati i vettori relativi alle riflessioni del gruppo, e sono tratteggiati gli specchi di tali riflessioni

In generale A_n si può interpretare come un gruppo di isometrie che fissano un simplesso n-dimensionale.

Definizione: *Dato lo spazio euclideo $(V, (\cdot,\cdot))$, un gruppo di riflessioni $W \leq \mathrm{O}(V)$ che agisce su un sottospazio $U \leq V$ viene detto essenziale rispetto ad U se il sottospazio $\{\lambda \in U :\ \forall w \in W,\ w\lambda = \lambda\}$ è banale, o, in altri termini, se l'unico vettore di U che viene lasciato fisso da tutti i $w \in W$ è 0.*

Osservazione 1.1.2: È sempre possibile trovare un sottospazio di V secondo cui W è essenziale. Considera infatti:

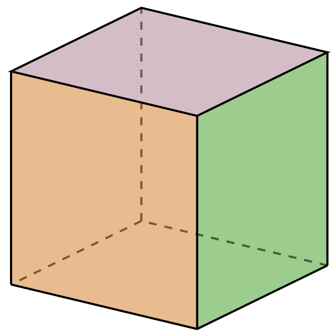
$$U = \{\alpha \in V :\ \forall w \in W,\ w\alpha = \alpha\}^\perp ,$$

si ha per ogni $w \in W$ che $w(U) = U$, perché se $\beta \in U$, preso α nel sottospazio di V di cui U è il complemento ortogonale, si ha che $(w\beta, \alpha) = (w\beta, w\alpha) = (\beta, \alpha) = 0$, da cui $w(U) \subseteq U$, che significa $w(U) = U$. Quindi W agisce su U, e il sottospazio di U dei punti lasciati fissi da ogni $w \in W$ è $U \cap U^\perp = \{0\}$.

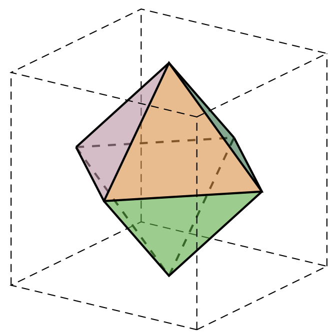
Esempio 1.1.3: Sia $V = \mathbb{R}^n$. Possiamo definire altre riflessioni complementari a quelle date da $\mathcal{S}_n$. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ definiamo $L_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ ponendo per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, $L_i(\epsilon_j) = (-1)^{\delta_{i,j}}\epsilon_j$. A parole L_i è l'automorfismo di $\mathbb{R}^n$ che cambia segno ad ϵ_i lasciando tutti gli altri vettori della base canonica fissi; da cui $L_i = s_{\epsilon_i}$. Evidentemente il sottogruppo di $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ generato da $\{s_{\epsilon_1}, \dots, s_{\epsilon_n}\}$ è isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, ed interseca banalmente la copia di $\mathcal{S}_n$ presente in $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Poi coniugando s_{ϵ_i} mediante $T_{(i\ j)}$ si ottiene s_{ϵ_j}, infatti per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$ vale:

$$T_{(i\ j)}^{-1} s_{\epsilon_i} T_{(i\ j)} \epsilon_k = \begin{cases} \epsilon_i & \text{se } k = i \\ -\epsilon_j & \text{se } k = j \\ \epsilon_k & \text{se } k \notin \{i, j\} \end{cases}$$

Quindi poiché ogni T_σ è prodotto finito di opportune riflessioni $T_{(i\ j)}$, risulta che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ vale $T_\sigma^{-1} s_{\epsilon_i} T_\sigma = s_{\epsilon_{\sigma(i)}}$, da cui il sottogruppo $\langle s_{\epsilon_1}, \dots, s_{\epsilon_n} \rangle$ normalizza la copia di $\mathcal{S}_n$ presente in $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Tutto questo ci dice che il gruppo generato dalle riflessioni T_σ e s_{ϵ_i} (al variare di $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e $i \in \{1, \dots, n\}$) è isomorfo al prodotto semidiretto $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$. Questo gruppo di riflessioni può essere visualizzato come il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ che fissano l'ipercubo $[-1, 1]^n$:



In realtà questo gruppo è anche il gruppo delle isometrie che fissano l'iperottaedro (l'analogo in più dimensioni dell'ottaedro), che sarebbe il politopo regolare convesso duale all'ipercubo:



Questo gruppo finito di riflessioni viene chiamato il gruppo iperottaedrale, e nel contesto dei gruppi finiti di riflessioni esso viene indicato con BC_n.

Esempio 1.1.4: Possiamo ottenere un altro gruppo di riflessioni su $\mathbb{R}^n$ a partire da quello appena visto. Recuperando l'isomorfismo tra $\langle s_{\epsilon_1}, \dots, s_{\epsilon_n} \rangle$ e $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, considera la copia in $\langle s_{\epsilon_1}, \dots, s_{\epsilon_n} \rangle$ del seguente sottogruppo di $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$:

$$\{x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n : \ x_1 + \dots + x_n = 0\},$$

ossia il sottogruppo $G \subseteq \langle s_{\epsilon_1}, \dots, s_{\epsilon_n} \rangle$ di tutti i prodotti di un numero pari di riflessioni, che è anche il sottogruppo generato dai prodotti $s_{\epsilon_i} s_{\epsilon_j}$ al variare di $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distinti. Notiamo che per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$ risulta:

$$T_\sigma^{-1} s_{\epsilon_i} s_{\epsilon_j} T_\sigma = T_\sigma^{-1} s_{\epsilon_i} T_\sigma {T_\sigma}^{-1} s_{\epsilon_j} T_\sigma = s_{\epsilon_{\sigma(i)}} s_{\epsilon_{\sigma(j)}},$$

quindi G normalizza la copia di $\mathcal{S}_n$ in $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$, ed essendo poi questi due gruppi con intersezione banale, abbiamo un altro gruppo di riflessioni, $G \rtimes \mathcal{S}_n$. Recuperando la copia in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ di G, si ha che essa è isomorfa a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ mediante l'isomorfismo:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \ni (x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 + \dots + x_{n-1}) \in \{y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n : \ y_1 + \dots + y_n = 0\},$$

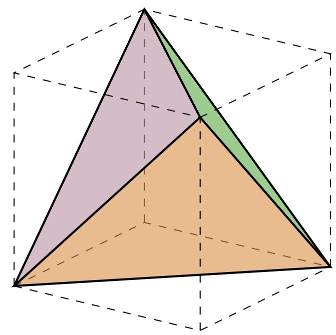
da cui il gruppo in considerazione è $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \rtimes \mathcal{S}_n$. Per vedere che questo gruppo è generato da riflessioni, notiamo che al variare di $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indici distinti, $s_{\epsilon_i} s_{\epsilon_j}$ è in realtà il prodotto $s_{\epsilon_i + \epsilon_j} s_{\epsilon_i - \epsilon_j}$, questo perhcé per ogni $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ vale $s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \epsilon_k = \epsilon_k$, mentre:

$$s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \epsilon_j = \epsilon_j - (\epsilon_i + \epsilon_j) = -\epsilon_i, \qquad \text{e} \qquad s_{\epsilon_i + \epsilon_j} \epsilon_i = \epsilon_i - (\epsilon_i + \epsilon_j) = -\epsilon_j,$$

per cui appunto $s_{\epsilon_i + \epsilon_j} = s_{\epsilon_i} s_{\epsilon_j} s_{\epsilon_i - \epsilon_j}$. Perciò:

$$\langle \{s_{\epsilon_i} s_{\epsilon_j} : \ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{s_{\epsilon_i - \epsilon_j} : \ 1 \leq i < j \leq n\} \rangle = \langle \{s_{\epsilon_i + \epsilon_j} : \ 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{s_{\epsilon_i - \epsilon_j} : \ 1 \leq i < j \leq n\} \rangle.$$

Questo è il gruppo delle isometrie che fissano quello che in italiano si chiama il mezzo ipercubo (*demihypercube* in inglese), che può essere pensato come il politopo convesso ottenuto dall'ipercubo n-dimensionale identificando due qualsiasi lati vertici collegati da un solo lato.



Sfortunatamente per $n = 3$ questo è un semplice tetraedro, ma per dimensioni più alte si tratta di un oggetto geometrico diverso dall'n-simplesso (l'analogo n-dimensionale del tetraedro). Questo gruppo viene tipicamente indicato con il simbolo D_n.

1.2 Sistemi di radici

Da qui in poi in tutto il capitolo indicheremo con W il generico gruppo di riflessioni dello spazio euclideo V. Per capire la struttura di W esploriamo prima come W agisce su V. La cosa più semplice che possiamo dire a questo punto è che ogni riflessione s_α fissa i punti di H_α e stabilizza $\mathbb{R}\alpha$. Una delle prime cose da indagare è come questi spazi interagiscano tra di loro mediante l'azione di W.

Proposizione 1.2.1: *Se $\varphi \in \mathrm{O}(V)$, ed $\alpha \in V \smallsetminus \{0\}$, allora $\varphi s_\alpha \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$. In particolare se $\varphi \in W$, risulta $s_{\varphi(\alpha)} \in W$ se e solo se $s_\alpha \in W$.*

Dimostrazione. Basta notare che $\varphi s_\alpha \varphi^{-1}$ manda $\varphi(\alpha)$ in $-\varphi(\alpha)$, e che un vettore $\beta \in V$ appartiene ad $H_{\varphi(\alpha)}$ se e solo se $\varphi^{-1}(\beta) \in H_\alpha$, poiché essendo φ ortogonale:

$$\{\beta \in V : \ (\beta, \varphi(\alpha)) = 0\} = \{\beta \in V : \ (\varphi^{-1}(\beta), \alpha) = 0\},$$

e quindi $\varphi s_\alpha \varphi^{-1}$ fissa $H_{\varphi(\alpha)}$. □

Osservazione 1.2.1: Quanto appena dimostrato regala un'altra azione di W. In particolare sia X l'insieme delle rette $\{\mathbb{R}\alpha : \ s_\alpha \in W\}$, e consideriamo l'applicazione

$$W \times X \ni (w, \mathbb{R}\alpha) \longmapsto \mathbb{R}(w\alpha) \in X.$$

Questa è ben definita perché se $s_\alpha \in W$, allora la proposizione precedente ci dice che $w s_\alpha w^{-1} = s_{w\alpha} \in W$, e quindi $\mathbb{R}(w\alpha) \in X$. Si verifica poi banalmente che questa è effettivamente un'azione di gruppo.

A questo punto potremmo "semplificare" l'insieme X, prendendo al posto della retta $\mathbb{R}\alpha$, i due vettori unitari di tale retta, ed in quel modo si otterrebbe un'altra azione di W su un insieme finito di vettori. Tuttavia restringersi ad un insieme di vettori unitari è piuttosto arbitrario, e come vedremo in futuro si perdono informazioni nel momento in cui si decide di considerare solo vettori unitari. Si arriva quindi alla seguente definizione.

Definizione: *Un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ è un sottoinsieme finito di V soddisfacente:*

(R1) *Per ogni $\alpha \in \Phi$ vale $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.*

(R2) *Per ogni $\alpha \in \Phi$ si ha $s_\alpha \Phi = \Phi$.*

Diciamo che Φ è un sistema di radici per il sottogruppo $W \subseteq \mathrm{O}(V)$ se W è generato dall'insieme $\{s_\alpha : \alpha \in \Phi\}$. In tal caso scriveremo anche $W = W(\Phi)$.

Ricapitolando, si vuole capire com'è fatto W partendo da come esso agisce su $\{\mathbb{R}\alpha : \ s_\alpha \in W\}$, e per semplificare questo insieme si scelgono due rappresentanti (l'uno l'opposto dell'altro) per ognuna di queste rette (questo è quello che chiede (R1)), in modo che poi W effettivamente agisca su tale insieme (questo è quanto chiede (R2)).

Osservazione 1.2.2: Osserviamo in primo luogo che ogni gruppo finito di riflessioni W possiede un sistema di radici Φ. Infatti W agisce sull'insieme $\{\mathbb{R}\alpha : \ s_\alpha \in W\}$, e se $\{W \cdot \mathbb{R}\alpha_1, \ldots, W \cdot \mathbb{R}\alpha_m\}$ sono le orbite (distinte) di tale azione, l'insieme

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{w \in W} \{-w\alpha_i, w\alpha_i\}$$

si rivela essere un sistema di radici che genera W. Sia $\alpha = w'\alpha_j \in \Phi$. Per come funzionano le orbite risulta che:

$$\Phi \cap \mathbb{R}(w'\alpha_j) = \bigcap_{w \in W} \{-w\alpha_j, w\alpha_j\} \cap \mathbb{R}(w'\alpha_j),$$

ma nota che quando $\{-w\alpha_j, w\alpha_j\} \cap \mathbb{R}(w'\alpha_j)$ è non vuota, siccome w e w' lasciano fisse le norme dei vettori, deve capitare $w\alpha_j = \pm w'\alpha_j$, ossia $\{-w\alpha_j, w\alpha_j\} \cap \mathbb{R}(w'\alpha_j) = \{-w'\alpha_j, w'\alpha_j\}$, cosa che ci dice $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\}$. Per quanto riguarda (R2) invece si ha che:

$$s_{w'\alpha_j}\Phi = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{w \in W} \{-s_{w'\alpha_j} w\alpha_i, s_{w'\alpha_j} w\alpha_i\} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{w \in W} \{-w' s_{\alpha_j} (w')^{-1} w\alpha_i, w' s_{\alpha_j} (w')^{-1} w\alpha_i\},$$

che è un altro modo per scrivere Φ, essendo $W \ni w \longmapsto w' s_{\alpha_j} (w')^{-1} w \in W$ una biezione di W (perché $s_{\alpha_j} \in W$ dalla definizione dell'insieme di rette X su cui W agisce). Il fatto che l'insieme $\{s_\alpha : \ \alpha \in \Phi\}$ genera W è dovuto al fatto che ogni riflessione presente in W ha un vettore che la rappresenta in Φ. Viceversa ogni gruppo $W \subseteq \mathrm{O}(V)$ generato da un sistema di radici Φ è finito. Mostriamo quest'ultimo fatto. Sia $\alpha \in \Phi$: poiché s_α fissa ogni punto di $H_\alpha = \{\alpha\}^\perp$, e $\{\alpha\} \subseteq \Phi$, abbiamo che $\Phi^\perp \subseteq \{\alpha\}^\perp = H_\alpha$. In altre parole ogni riflessione fissa gli elementi di $\Phi^\perp$, e quindi dal momento che $\mathrm{span}(\Phi) \oplus \Phi^\perp = V$, l'unica riflessione che fissa gli elementi di Φ è l'identità id_V. Questo ci dice che l'omomorfismo $W \ni w \longmapsto w_{|\Phi} \in \mathcal{S}_\Phi$ ha nucleo banale, da cui W è isomorficamente contenuto in $\mathcal{S}_\Phi$, che è finito.

La nozione di sistema di radici è in realtà naturale anche senza saper nulla riguardo all'azione di W sull'insieme $\{\mathbb{R}\alpha : \ s_\alpha \in W\}$: ripensando ad esempio al gruppo di simmetrie del cubo, il modo più facile per visualizzare tale gruppo è rappresentando ciascuna riflessione s_α mediante α.

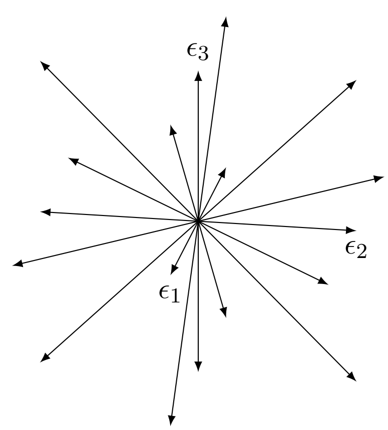


Figura 1.3: Un sistema di radici, detto B_3, con gruppo di riflessioni BC_3

Il motivo per cui vengono detti sistemi di radici e non semplicemente sistemi è dovuto alla teoria di Lie: studiando le algebre di Lie semisemplici si viene in contro in modo naturale a strutture che sono

essenzialmente quello che abbiamo definito sopra se non per l'aggiunta di una proprietà (la condizione d'integralità), ed in quel contesto è appropriato chiamare tali vettori radici. Più avanti avremo bisogno di sapere alcune cose su tali sistemi di radici, e avremo tempo di esplorare alcune proprietà che ne marcano la differenza con quelli che studiamo in questo capitolo.
Nonostante W sia determinato da Φ, il numero di elementi di Φ potrebbe essere troppo superiore rispetto alla dimensione dello spazio euclideo V. Questo non dovrebbe risultare troppo sorprendente, perché nel momento in cui abbiamo un vettore in Φ, troviamo anche il suo opposto. Una prima idea per semplificare i sistemi di radici sarebbe quella di "tagliare a metà" l'insieme Φ, cioè selezionare un vettore $\gamma \in V$ che non sia ortogonale ad alcun elemento di Φ (cosa che in realtà si può dimostrare essere sempre possibile usando il fatto che Φ è finito), e dichiarare "positivi" gli elementi del semispazio delimitato da tale vettore:

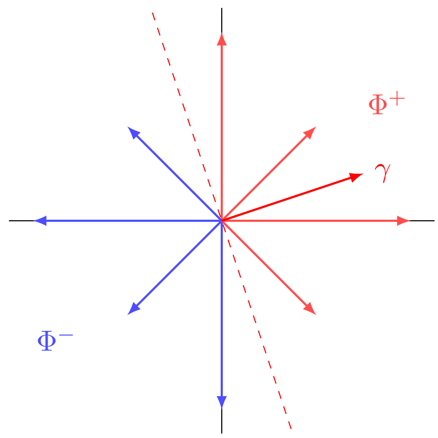


Figura 1.4: Una possibile scelta di γ per il sistema di radici C_2

Qui si biforca la teoria: chi segue questa "semplificazione" deve affrontare una trattazione geometrica dei gruppi finiti di riflessioni molto interessante, ma comunque non esattamente breve. La strada che seguiremo noi sarà più algebrica: nelle definizioni a venire sarà più difficile individuare la geometria sottostante, ma vedremo molto velocemente i frutti di ciò che andremo a costruire.
Per arrivare a ciò che stiamo intendendo, dobbiamo introdurre la nozione di ordine totale su uno spazio vettoriale.

Definizione: *Dato lo spazio vettoriale reale V, chiamiamo ordine totale su V una qualsiasi relazione transitiva $\prec \subseteq V \times V$ che soddisfi i seguenti assiomi:*

(*i*) *Per ogni $\alpha, \beta \in V$ vale uno e uno solo tra:*

$$\alpha \prec \beta, \qquad \alpha = \beta, \qquad \alpha \succ \beta.$$

(*ii*) *Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $\alpha \prec \beta$ implica $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.*

(*iii*) *Per ogni $\alpha, \beta \in V$ ed ogni $c \in (0, +\infty)$, $\alpha \prec \beta$ implica $c\alpha \prec c\beta$, e $-c\alpha \succ -c\beta$.*

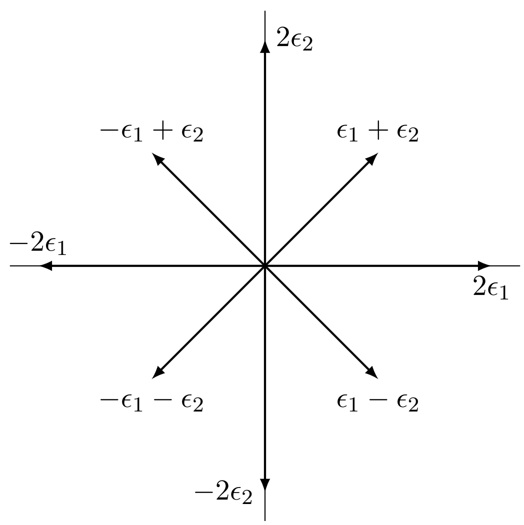
Dato un tale ordine, diciamo che $\alpha \in V$ è positivo se $\alpha \succ 0$, ed analogamente diciamo che α è negativo qualora $\alpha \prec 0$.

Esempio 1.2.1: Un esempio che ci interessa da vicino è l'ordine lessicografico su una base. Sia $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq V$ una base ordinata di V, e si ponga:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \prec \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_i \iff a_k < b_k, \text{ dove } k = \min\{i \in \{1, \ldots, n\} : \ a_i \neq b_i\}.$$

Effettivamente si ha che $\prec$, così definito, è un ordine totale su V. L'unica proprietà non banale da verificare è la transitività. Siano dunque $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \prec \sum_{i=1}^n b_i\lambda_i$ e $\sum_{i=1}^n b_i\lambda_i \prec \sum_{i=1}^n c_i\lambda_i$. Supponiamo che k ed ℓ siano i primi indici in $\{1,\dots,n\}$ per cui si verifica $a_k < b_k$ e $b_\ell < c_\ell$ rispettivamente. Se $k \leq \ell$, allora per ogni $i < k$ vale $a_i = b_i$ e $b_i = c_i$, mentre per $i = k$ vale $a_k < b_k \leq c_k$, da cui $a_k < c_k$, cosa che conferma $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \prec \sum_{i=1}^n c_i\lambda_i$. Se invece $k > \ell$, allora per $i < \ell$ vale $a_i = b_i = c_i$, e per $i = \ell$ vale $a_\ell = b_\ell < c_\ell$, da cui $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i \prec \sum_{i=1}^n c_i\lambda_i$.
Notiamo che in questo ordinamento tutti i λ_i soddisfano $\lambda_i \succ 0$ (i.e. sono positivi).

Con un ordine totale possiamo dividere a metà un sistema di radici. Ad esempio considerando il seguente sistema di radici in $\mathbb{R}^2$:



considerando l'ordine lessicografico della base $\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$ otteniamo che i vettori $\epsilon_1-\epsilon_2, 2\epsilon_1, \epsilon_1+\epsilon_2, 2\epsilon_2$ sono positivi, mentre i loro opposti $-\epsilon_1+\epsilon_2, -2\epsilon_1, -\epsilon_1-\epsilon_2, -2\epsilon_2$ sono negativi. Nota che questa bisezione corrisponde esattamente a quella presentata nella figura 1.4.

Definizione: *Dato l'ordine totale $\prec$ su V, ed il sistema di radici $\Phi \subset V$, chiamiamo $\Pi = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \succ 0\}$ sistema positivo (relativo a $\prec$).*

L'esempio precedente dell'ordine lessicografico mostra che a partire da un sistema di radici è sempre possibile tirare fuori un sistema positivo. Inoltre nota che, poiché i sistemi di radici non contengono mai il vettore nullo $0 \in V$:

$$\Phi = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \prec 0 \text{ oppure } \alpha \succ 0\} = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \succ 0\} \cup \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \prec 0\} = \Pi \cup -\Pi.$$

$-\Pi$ viene anche detto sistema negativo di Φ relativo a Π.

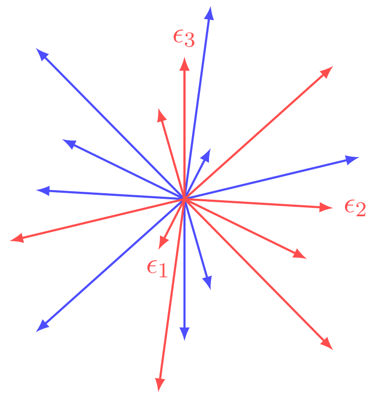


Figura 1.5: I vettori nel sistema B_3 che sono positivi secondo l'ordine lessicografico della base canonica sono colorati in rosso, mentre i restanti sono colorati in blu

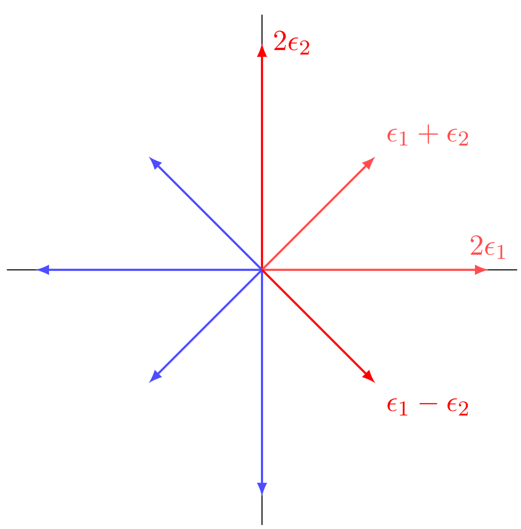
Ci si trova comunque davanti ad un numero troppo grande di vettori. In algebra lineare un modo per ridurre considerevolmente il numero di vettori è imporre una qualche condizione di indipendenza lineare, però selezionare una base di radici che generi span(Φ) è chiedere troppo poco, vogliamo che tale base sia contenuta in un certo sistema positivo. Con un po' di immaginazione si arriva alla seguente definizione.

Definizione: *Dato un sistema di radici Φ, diciamo che $\Delta \subseteq \Phi$ è un sistema semplice se:*

(i) *Δ è una base dello span di Φ.*

(ii) *Ciascun $\beta \in \Phi$ si scrive come combinazione lineare (unica) di vettori di Δ mediante scalari tutti non negativi o tutti non positivi. In altre parole se $\sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha \in \Phi$, allora o per ogni $\alpha \in \Delta$ vale $k_\alpha \geq 0$, oppure per ogni $\alpha \in \Delta$ vale $k_\alpha \leq 0$.*

Esempio 1.2.2: Riconsiderando il sistema di radici C_2 con l'ordine lessicografico della base canonica:



si riesce a vedere facilmente a mano che le uniche due radici positive che formino un sistema semplice sono $\epsilon_1 - \epsilon_2$ e $2\epsilon_2$; per ottenere $\epsilon_1 + \epsilon_2$ e $2\epsilon_1$ basta sommare $\epsilon_1 - \epsilon_2$ a $2\epsilon_2$ (una e due volte rispettivamente), mentre per una qualsiasi altra scelta di radici positive linearmente indipendenti bisogna usare coefficienti negativi per ottenere qualche vettore positivo.

Contrariamente dai sistemi positivi, non è ovvio che un sistema semplice esista sempre. Tuttavia questo è vero, e non solo: sistemi positivi e semplici si determinano in modo unico a vicenda.

Teorema 1.2.2: *Sia Φ un sistema di radici. Allora:*

- (i) *Se Δ è un sistema semplice in Φ, allora esiste un'unico sistema positivo $\Pi = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \succ 0\}$, per qualche ordine totale $\prec$ su V, che soddisfa $\Delta \subseteq \Pi$.*
- (ii) *Se $\prec$ è un'ordine totale su V, allora $\Pi = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \succ 0\}$ possiede un unico sistema semplice Δ.*

In particolare Φ possiede un qualche sistema semplice Δ.

Dimostrazione.

(i)

Dimostriamo prima l'unicità. Sia $\prec$ un'ordine totale su V per il quale $\Pi = \{\alpha \in \Phi : \ \alpha \succ 0\}$ contiene Δ. In tal caso deve accadere:

$$\Pi = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Phi : \ \forall \alpha \in \Delta, \ k_\alpha \geq 0 \right\},$$

infatti poiché i vettori di Δ sono tutti positivi deve valere l'inclusione $\supseteq$, mentre preso $\beta \in \Phi$ con $\beta \succ 0$, scrivendo $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, non può esistere un $k_\alpha < 0$, perché se ciò accadesse tutti i coefficienti risulterebbero negativi, che per $\Delta \subseteq \Pi$ ci direbbe che $\beta \prec 0$ (per dire questo stiamo usando anche il fatto che $\beta \neq 0$, essendo $\beta \in \Phi$).

Ora mostriamo l'esistenza. Si estenda Δ ad una base di V, $\mathcal{B}$, e si consideri l'ordine lessicografico dato da questa base. Avremo che tutti gli elementi di Δ sono positivi, da cui Δ è contenuto nel sistema positivo determinato da tale ordine.

(ii)

Anche qui mostriamo prima l'unicità. Sia $\prec$ un'ordine totale per cui Π contiene un sistema semplice Δ. Mostriamo che Δ è costituito da tutti e soli i vettori di Φ che non si scrivono come combinazioni lineari di vettori in Π con almeno due coefficienti positivi, cioè:

$$\Delta = \Phi \setminus \left\{ \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \alpha : \ |\{\alpha \in \Pi : c_\alpha > 0\}| \geq 2 \right\}.$$

Evidentemente vale l'inclusione $\subseteq$ per l'indipendenza lineare degli elementi di Δ. Viceversa se $\alpha \in \Phi$ non appartiene all'insieme a destra, scrivendo $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m$, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Pi$ e con almeno due coefficienti positivi tra i c_i, allora scrivendo ciascun $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ come combinazione lineare di vettori di Δ (a coefficienti non negativi) arriveremmo a dire che

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta^{(i)} \beta,$$

per opportuni coefficienti $k_\beta^{(i)} \geq 0$ al variare di $\beta \in \Delta$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$. Però siccome almeno due c_i sono strettamente positivi, deduciamo che α è linearmente dipendente con i vettori di Δ, rendendo impossibile che α appartenga a Δ. Poiché Δ si scrive nello stesso modo qualunque sia l'ordine totale $\prec$, abbiamo mostrato l'unicità del sistema semplice. Mostriamo ora l'esistenza. Sia Δ un elemento minimale della famiglia

$$\{\Lambda \subseteq \Pi : \ \text{Ogni } \alpha \in \Pi \text{ è combinazione lineare non negativa di elementi di } \Lambda\}.$$

Si ha banalmente che $\Delta \subseteq \Pi \subseteq \Phi$, quindi $\operatorname{span}(\Delta) \subseteq \operatorname{span}(\Pi) = \operatorname{span}(\Phi)$, ma dal fatto che ogni elemento di Π è combinazione lineare a coefficienti non negativi di Δ si ha che $\Pi \subseteq \operatorname{span}(\Delta)$, per cui $\operatorname{span}(\Phi) = \operatorname{span}(\Pi) \subseteq \operatorname{span}(\Delta)$, che quindi prova che Δ genera tutto $\operatorname{span}\Phi$. Evidentemente da come è definito Δ si ha che ogni vettore in Φ è combinazione lineare a coefficienti tutti non negativi o tutti non positivi di vettori di Δ. Resta da mostrare l'indipendenza lineare. A tale scopo dimostriamo il seguente fatto:

$$\text{Per ogni } \alpha, \beta \in \Delta \text{ distinti si ha } (\alpha, \beta) \leq 0. \tag{†}$$

Dimostrazione di (†). Siano per assurdo $\alpha, \beta \in \Delta$ distinti per cui $(\alpha, \beta) > 0$. Siccome $s_\alpha \beta \in \Phi$ (assioma (R2)) succederà che $s_\alpha \beta \in \Pi$ oppure $s_\alpha \beta \in -\Pi$. Supponiamo che $s_\alpha \beta \in \Pi$. In tal caso per la definizione di Δ riusciamo a scrivere $s_\alpha \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ con coefficienti $c_\gamma \geq 0$. Nel caso in cui $c_\beta < 1$, abbiamo:

$$s_\alpha \beta = \beta - 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}} c_\gamma \gamma,$$

da cui si ottiene:

$$(1 - c_\beta)\beta = \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}} c_\gamma + 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Poiché $(1 - c_\beta) > 0$, abbiamo che β è combinazione lineare non negativa di vettori di $\Delta \setminus \{\beta\}$, ma così $\Delta \setminus \{\beta\}$ eredita da Δ il fatto che ogni vettore di Π si scrive come combinazione lineare non negativa di elementi di $\Delta \setminus \{\beta\}$, che contraddice la minimalità di Δ. Se invece $c_\beta \geq 1$, otteniamo invece:

$$0 = (c_\beta - 1)\beta + 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\beta\}} c_\gamma \gamma,$$

ma questa è una combinazione lineare di vettori positivi mediante scalari non negativi (e uno positivo siccome $(\alpha, \beta) > 0$) che è uguale a 0, cosa impossibile sotto gli assiomi di ordine totale. Quindi non si può avere $s_\alpha \beta \in \Pi$. Un ragionamento simile mostra che $s_\alpha \beta \notin -\Pi$, e qui i casi da considerare sono $\langle \alpha, \beta \rangle + c_\alpha > 0$ e $\langle \alpha, \beta \rangle + c_\alpha \leq 0$. □

Ora siamo in grado di dimostrare l'indipendenza lineare dei vettori di Δ. Supponiamo per assurdo di avere $\sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha = 0$ con qualche k_α non nullo. Tale combinazione lineare può essere spezzata nel seguente modo:

$$\sum_{\substack{\beta \in \Delta \\ k_\beta > 0}} k_\beta \beta = \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ k_\gamma < 0}} -k_\gamma \gamma.$$

Chiamiamo σ tale vettore. Avremo:

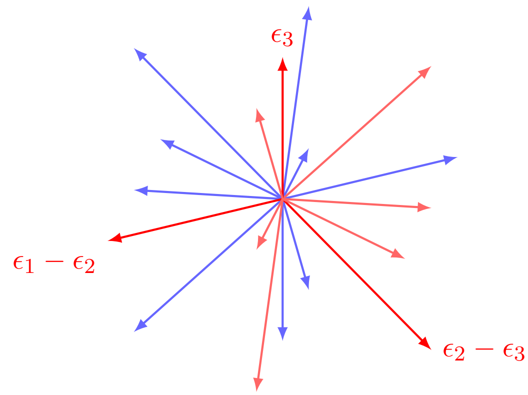
$$0 \leq (\sigma, \sigma) = \left(\sum_{\substack{\beta \in \Delta \\ k_\beta > 0}} k_\beta \beta, \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ k_\gamma < 0}} -k_\gamma \gamma \right) = \sum_{\substack{\beta \in \Delta \\ k_\beta > 0}} \sum_{\substack{\gamma \in \Delta \\ k_\gamma < 0}} k_\beta (-k_\gamma)(\beta, \gamma) \leq 0,$$

da cui $\sigma = 0$, assurdo. □

In realtà l'unicità del sistema semplice ci permette di dire che (†) vale in generale.

Corollario 1.2.3: *Se Δ è un sistema semplice in Φ, allora per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$ con $\alpha \neq \beta$ vale $(\alpha, \beta) \leq 0$.*

Concretamente questo ci dice che i vettori di uno stesso sistema semplice si trovano sempre ad angoli retti od ottusi tra di loro.
Con questo fatto alla mano è più facile individuare sistemi semplici per sistemi positivi già noti, ad esempio il seguente $\Delta = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3\}$ è un sistema semplice in B_3 per i vettori positivi secondo l'ordine lessicografico della base canonica



Nota che ogni due sistemi semplici dello stesso sistema positivo Φ hanno lo stesso numero di elementi, siccome la loro cardinalità è la dimensione dello span di Φ. Quindi ha senso definire il rango del gruppo finito di riflessioni generato da Φ come la cardinalità di un qualsiasi sistema semplice.

Abbiamo mostrato che sistemi positivi e semplici in Φ si determinano a vicenda in modo univoco. Rimane però la possibilità che sistemi semplici distinti generino configurazioni troppo lontane. Esaminiamo le relazioni tra sistemi semplici.

Proposizione 1.2.4: *Sia Δ un sistema semplice in Φ, contenuto in un sistema positivo Π. Allora fissato $\alpha \in \Delta$ si ha che $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$. In altre parole i vettori positivi diversi da α vengono permutati da s_α.*

Dimostrazione. Sia $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$; esso sarà scrivibile nella forma $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma$ per determinati coefficienti c_γ tutti positivi. Non potendo β essere multiplo di α (dovuto al fatto che $-\alpha \notin \Pi$ e l'assioma (R1)), esisterà un $\delta \in \Delta$ per cui $c_\delta > 0$, ma nota che in:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \gamma - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha$$

compare ancora il termine $c_\delta \delta$, e perciò essendo $s_\alpha \beta \in \Phi$ (per l'assioma (R2)), dovremo dedurre per la definizione di sistema semplice che tutti i coefficienti nella scrittura sopra sono non negativi, da cui $s_\alpha \beta \in \Pi$, e naturalmente $s_\alpha \beta \neq \alpha$, perché altrimenti $\beta = -\alpha$. Quindi $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) \subseteq \Pi \setminus \{\alpha\}$, ma essendo s_α una biezione dobbiamo concludere l'uguaglianza. $\square$

Oltre ad essere una proposizione che verrà citata innumerevoli volte in seguito, questo risultato è spesso utile a determinare quando una radice $\alpha \in \Phi$ è in realtà una radice di un sistema positivo: caratterizza α come l'unica radice positiva ad essere resa negativa da s_α.

Osservazione 1.2.3: Sia Δ un sistema semplice in Φ, contenuto in un sistema positivo, e si consideri il vettore:

$$\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta\in\Pi} \beta.$$

Allora $s_\alpha\delta = \delta - \alpha$. Infatti:

$$s_\alpha\left(\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Pi}\beta\right) = s_\alpha\left(\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Pi\smallsetminus\{\alpha\}}\beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Pi\smallsetminus\{\alpha\}}\beta - \frac{1}{2}\alpha = \delta - \alpha.$$

Teorema 1.2.5: *L'azione di W sui sistemi positivi ⟦ semplici ⟧ è transitiva. In altre parole se Π e Π' sono sistemi positivi ⟦ Δ e Δ' sono sistemi semplici ⟧ allora esiste $w \in W$ con $w\Pi = \Pi'$ ⟦ $w\Delta = \Delta'$ ⟧.*

Dimostrazione. Siano Π, Π' due sistemi positivi. Procediamo per induzione sulla cardinalità r di $\Pi\cap-\Pi'$. Se $r = 0$, allora abbiamo $\Pi\cap-\Pi' = \varnothing$, ed essendo Π e $-\Pi'$ contenuti in Φ, ciò vuol dire che $-\Pi' = \Phi\smallsetminus\Pi' \subseteq \Phi\smallsetminus\Pi$, ossia $\Pi\subseteq\Pi'$, che significa $\Pi = \Pi'$ in quanto tutti i sistemi positivi hanno lo stesso numero di elementi (metà del sistema di radici).
Supponiamo $r > 0$. In tal caso il sistema semplice $\Delta\subseteq\Pi$ non può essere contenuto in Π' (altrimenti Π sarebbe uguale a Π'). Sia $\alpha\in\Delta$ con $\alpha\in-\Pi'$. La proposizione precedente ci dice che $s_\alpha\Pi = s_\alpha(\Pi\smallsetminus\{\alpha\}\cup\{\alpha\}) = s_\alpha(\Pi\smallsetminus\{\alpha\})\cup s_\alpha(\{\alpha\}) = \Pi\smallsetminus\{\alpha\}\cup\{-\alpha\}$, e quindi $s_\alpha\Pi\cap-\Pi'$ ha cardinalità $r-1$. Applicando l'ipotesi induttiva sui sistemi $s_\alpha\Pi$ e Π' abbiamo che esiste $w'\in W$ con $w'(s_\alpha\Pi) = \Pi'$, quindi chiamando $w = w's_\alpha \in W$ si ottiene $w\Pi = \Pi'$. □

Questo risultato è quanto meglio si può volere, ci sta dicendo che sistemi positivi ⟦ semplici ⟧ differiscono solo per l'applicazione di una trasformazione ortogonale $w\in W$, che potrebbe cambiare le posizioni relative (chi sta a destra o a sinistra di chi), ma crucialmente non cambia i relativi angoli e le lunghezze.

1.3 Riflessioni semplici

L'obiettivo che ci poniamo ora è mostrare che il gruppo finito di riflessioni W è generato dalle riflessioni semplici, ossia le riflessioni del tipo s_α con $\alpha\in\Delta$. Per fare ciò è conveniente dare una nuova definizione

Definizione: *Dato $\beta\in\Phi$, chiamiamo altezza di β (relativa a Δ) come la somma $\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma$, dove $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma\gamma$ è l'unica scrittura di β come combinazione lineare (a coefficienti non negativi) di Δ.*

Notiamo il semplice fatto che se $\beta\in\Delta$, allora $\mathrm{ht}(\beta) = 1$.

Teorema 1.3.1: *Per un fissato sistema semplice Δ, W è generato dalle riflessioni semplici, cioè gli elementi dell'insieme $\{s_\alpha : \alpha\in\Delta\}$.*

Dimostrazione. Chiamiamo $W'\subseteq W$ il sottogruppo generato dalle riflessioni semplici. Procediamo in vari passi per mostrare che $W' = W$.
Passo 1. Sia $\beta\in\Pi$, e $\gamma\in W'\beta\cap\Pi$ (che non è vuoto in quanto contiene almeno β) di altezza $\mathrm{ht}(\gamma)$ minima in tale insieme. Mostriamo che $\gamma\in\Delta$.
Scrivendo $\gamma = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\alpha$ (con $c_\alpha \geq 0$) e notando che $(\gamma,\gamma) > 0$ (semplicemente dovuto al fatto che γ non è nullo), abbiamo che $(\gamma,\gamma) = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha(\gamma,\alpha)$ è positivo, cosa che ci permette di dire che esiste un $\alpha\in\Delta$ con $(\alpha,\gamma) > 0$ (altrimenti $(\gamma,\gamma)\leq 0$). Se $\gamma = \alpha$ abbiamo $\gamma\in\Delta$ e non abbiamo altro da dire. Se però fosse $\gamma\neq\alpha$, allora per la proposizione 1.2.4 avremo $s_\alpha\gamma\in\Pi$. Però scrivendo $s_\alpha\gamma = \gamma - \langle\gamma,\alpha\rangle\alpha$, avremo $\mathrm{ht}(s_\alpha\gamma) < \mathrm{ht}(\gamma)$, ma poiché $s_\alpha\in W'$, risulterà $s_\alpha\gamma\in W'\beta$ (avevamo $\gamma\in W'\beta$), e ciò contraddice la minimalità di γ. Dunque deve essere $\gamma\in\Delta$.
Passo 2. Dimostriamo $W'\Delta = \Phi$.
Per mostrare $\Phi\subseteq W'\Delta$ mostriamo che $\Pi\subseteq W'\Delta$ e $-\Pi\subseteq W'\Delta$. Sia $\beta\in\Pi$, per quanto visto nel passo 1 siamo in grado di dire che esiste $w'\in W'$ per cui $w'\beta\in\Delta$. Sia $\gamma\in\Delta$ tale elemento. Avremo $\beta = (w')^{-1}\gamma\in W'\Delta$, quindi per l'arbitrarietà di $\beta\in\Pi$ abbiamo dimostrato $\Pi\subseteq W'\Delta$. Sia ora $\beta\in-\Pi$, ossia $-\beta\in\Pi$. Da $\Pi\subseteq W'\Delta$ otteniamo che esiste $w\in W'$ e $\alpha\in\Delta$ con $-\beta = w\alpha$, da cui si deduce $\beta = w(-\alpha) = ws_\alpha\alpha$, ma essendo $ws_\alpha\in W'$ ($\alpha\in\Delta$) arriviamo a $-\Pi\subseteq W'\Delta$, che per quanto detto prima

ci permette di dire $\Phi \subseteq W'\Delta$. Poi dall'assioma (R2) è chiaro che $W'\Delta \subseteq \Phi$.
Passo 3. Dimostriamo $W' = W$.
Sia s_β un generatore di W (cioè con $\beta \in \Phi$). Essendo $\Phi = W'\Delta$, esiste $\alpha \in \Delta$ e $w \in W'$ con $\beta = w(\alpha)$, ma sappiamo che $s_{w(\alpha)} = ws_\alpha w^{-1}$, e questo appartiene a W', dunque $s_\beta \in W'$, da cui $W \subseteq W'$. $\square$

Dimostrando il teorema abbiamo mostrato la validità del seguente fatto:

Corollario 1.3.2: *Dato il sistema semplice Δ, e $\beta \in \Phi$, esiste $w \in W$ con $w\beta \in \Delta$.*

Ora che abbiamo dimostrato che W è generato dalle riflessioni semplici, andiamo in cerca di un'efficace presentazione di W, ossia le relazioni che differenziano W dal gruppo libero su Δ, o su un qualsiasi insieme della stessa cardinalità.
Abbiamo già osservato che tra le relazioni possibili ci sono quelle del tipo $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$, con $m(\alpha, \beta)$ intero positivo. Abbiamo già visto che cosa rappresentano queste relazioni: ci danno l'ordine di una particolare rotazione del gruppo finito di riflessioni W. La cosa speciale che riguarda le riflessioni è che questo tipo di relazioni sono le uniche necessarie per descrivere in modo completo W.

1.4 La lunghezza di un elemento

Per comprendere meglio le relazioni che sussistono tra le riflessioni semplici, ci conviene studiare come un elemento $w \in W$ si scrive come prodotto di riflessioni semplici.

Definizione: *Dato il sistema semplice Δ, definiamo la lunghezza di $w \in W$, indicandola con $\ell(w)$, come il minimo intero positivo r per cui esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$ con $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$, intendendo $\ell(1) = 0$.*

Esaminando come questa funzione varia sugli elementi di W otterremo informazioni su dove compaiono le semplificazioni degli s_α cercate. Prima notiamo alcune proprietà.

Osservazione 1.4.1: La lunghezza di un elemento è uguale alla lunghezza del suo inverso. Infatti se $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$, allora $w^{-1} = s_{\alpha_r} \cdots s_{\alpha_1}$, da cui $\ell(w^{-1}) \leq r$, che ci dice $\ell(w^{-1}) \leq \ell(w)$, ma applicando questa disuguaglianza a w^{-1} al posto di w, otteniamo $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$.

Osservazione 1.4.2: Siccome per ogni $\alpha \in V$ vale $\det(s_\alpha) = -1$, dal teorema di Binet arriviamo a dire che per ogni $w \in W$ si ha $\det(w) = (-1)^{\ell(w)}$, quindi conoscendo $\det(w)$ possiamo determinare la parità di $\ell(w)$. Da ciò deduciamo che per ogni $w, w' \in W$ si ha che $\ell(ww')$ ha la stessa parità di $\ell(w) + \ell(w')$ (sempre applicando il teorema di Binet), ed in particolare se $\ell(w) = r$, allora preso $\alpha \in \Delta$ si ha $\ell(s_\alpha w) \in \{r+1, r-1\}$, perché in automatico vale $\ell(s_\alpha w) \leq r + 1$ (scrivendo w come prodotto di r riflessioni semplici), e non può accadere $\ell(s_\alpha w) < r - 1$ siccome in tal caso riusciremmo a scrivere w come un prodotto di un numero di riflessioni semplici inferiori ad r.

Scopriremo che $\ell(w)$ è in realtà uguale al numero di radici positive che w manda in radici negative. Nel caso in cui w sia una riflessione semplice questo lo abbiamo già visto nella proposizione 1.2.4.

Definizione: *Dato il sistema semplice Δ contenuto nel sistema positivo Π e dato $w \in W$, indichiamo con $n(w) := |w\Pi \cap -\Pi|$, ossia il numero di radici positive che w manda in radici negative.*

$n(w)$ è anche uguale al numero di radici negative che vengono mandate in radici positive, perché $w\Pi \cap -\Pi = -w(-\Pi) \cap -\Pi = -(w(-\Pi) \cap \Pi)$, che ha lo stesso numero di elementi di $w(-\Pi) \cap \Pi$.
Questo ci permette di notare che $n(w) = n(w^{-1})$, e questo è dovuto al fatto che $|w\Pi \cap -\Pi| = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$ (applicando la biezione w^{-1}).
Questa è una prima proprietà che punta all'uguaglianza $n(w) = \ell(w)$.

Lemma 1.4.1: *Sia Δ un sistema semplice, e Π il sistema positivo da esso determinato, $\alpha \in \Delta$, e $w \in W$. Allora:*

(i) Se $w\alpha \in \Pi$, allora $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$.

(*ii*) *Se* $w\alpha \in -\Pi$, *allora* $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$.

(*iii*) *Se* $w^{-1}\alpha \in \Pi$, *allora* $n(s_\alpha w) = n(w) + 1$.

(*iv*) *Se* $w^{-1}\alpha \in -\Pi$, *allora* $n(s_\alpha w) = n(w) - 1$.

Dimostrazione. Per essere concisi definiamo $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$, cosicché $n(w) = |\Pi(w)|$. Notiamo che sarà sufficiente dimostrare (*i*) e (*ii*), poi (*iii*) e (*iv*) seguiranno dai primi due punti considerando w^{-1} al posto di w, e osservando che $n(w^{-1}s_\alpha) = n((w^{-1}s_\alpha)^{-1}) = n(s_\alpha w)$.
Supponiamo $w\alpha \in \Pi$. Notiamo che $ws_\alpha(\alpha) = w(-\alpha) = -w\alpha \in -\Pi$, quindi scriviamo $n(ws_\alpha) = |ws_\alpha(\Pi) \cap -\Pi| = |w(s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\})) \cap -\Pi| + 1$, però dalla proposizione 1.2.4 $w(s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\})) = w(\Pi \setminus \{\alpha\})$, da cui $n(ws_\alpha) = |w(\Pi \setminus \{\alpha\}) \cap -\Pi| + 1$, ma poiché $w\alpha \in \Pi$, avremo $|w(\Pi \setminus \{\alpha\}) \cap -\Pi| + 1 = |w(\Pi) \cap -\Pi| + 1 = n(w) + 1$.
Similmente se $w\alpha \in -\Pi$, allora $ws_\alpha(\alpha) = -w\alpha \in \Pi$, per cui $n(ws_\alpha) = |ws_\alpha(\Pi) \cap -\Pi| = |w(s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\})) \cap -\Pi| = |w(\Pi \setminus \{\alpha\}) \cap -\Pi| = |w(\Pi) \cap -\Pi| - 1 = n(w) - 1$ (perché appunto $w\alpha \in -\Pi$). □

Quanto appena dimostrato produce il seguente risultato:

Corollario 1.4.2: *Se* $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ *con* $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$, *allora* $n(w) \leq r$. *In particolare* $n(w) \leq \ell(w)$.

Dimostrazione. Si ragiona per induzione su r. Se $r = 0$, allora $w = 1$ e $n(w) = 0$, per cui non c'è nulla da dimostrare. Se invece supponiamo che l'asserto valga per qualsiasi prodotto di r riflessioni semplici, prendendo $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \in \Delta$, si ha che $n((s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r})s_{\alpha_{r+1}}) = n(s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}) \pm 1 \leq r \pm 1 \leq r + 1$. □

1.5 Condizioni scambio e delezione

Teorema 1.5.1: *Sia* Δ *un sistema semplice. Sia* $w \in W$ *scritto come prodotto di* r *riflessioni semplici* $w = s_1 \cdots s_r$ *(dove quindi* $s_i = s_{\alpha_i}$ *per qualche* $\alpha_i \in \Delta$*), con* $n(w) < r$. *Allora esistono degli indici* $1 \leq i < j \leq r$ *per cui:*

(*i*) $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$.

(*ii*) $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$. (Scambio)

(*iii*) $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r$. (Delezione)

Dimostrazione.

(*i*)

Sappiamo che $n(w) < r$, quindi immaginando di costruire w componendo a destra le riflessioni s_i, la ripetuta iterazione del lemma 1.4.1 farà sì che per un certo $j \leq r$ risulti $(s_1 \dots s_{j-1})\alpha_j \in -\Pi$, ma poiché $\alpha_j \in \Delta \subseteq \Pi$, dalla proposizione 1.2.4 deduciamo che nel prodotto $s_1 \cdots s_{j-1}$ ci deve essere almeno una riflessione $s_i = s_{\alpha_j}$. Prendiamo i come l'indice massimo in $\{1, \dots, j-1\}$ per cui s_i è uguale a s_{α_j} (che è s_j). Avremo $(s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j \in -\Pi$ (tutte le riflessione diverse da s_i lasciano $\alpha_j \in \Pi$ per la proposizione 1.2.4), assieme a $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j \in \Pi$ (sempre per lo stesso motivo), ma l'unica radice positiva che s_i trasforma in negativa è α_i, da cui $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$.

(*ii*)

Dal punto (*i*) avevamo $\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$. Chiamando $\alpha = \alpha_j$ e $w' = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$, questo fatto diventa $\alpha_i = w'\alpha_j$, quindi per la proposizione 1.2.1 otteniamo $w's_{\alpha_j}(w')^{-1} = s_{w'\alpha_j} = s_{\alpha_i} = s_i$, ossia $w's_{\alpha_j} = s_i w'$, che è la tesi.

(iii)

Dal punto *(ii)* abbiamo $s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}$, quindi moltiplicando a sinistra per $s_1 \cdots s_{i-1}$ otteniamo:

$$s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_j = s_1 \cdots s_{i-1} s_i \cdots s_{j-1},$$

che moltiplicando a destra per $s_{j+1} \cdots s_r$ diventa la tesi. □

Corollario 1.5.2: *Sia $w \in W$. Allora $n(w) = \ell(w)$.*

Dimostrazione. Sappiamo già che $n(w) \leq \ell(w)$. Nel caso $n(w)$ fosse strettamente minore di $\ell(w)$, allora potremmo scrivere w come prodotto di $\ell(w) - 2$ riflessioni semplici, assurdo. □

Ora che abbiamo dimostrato che $\ell(w) = n(w)$ possiamo anche vedere meglio che cosa significa il terzo punto del teorema appena visto, che è un risultato anche noto sotto il nome di condizione di delezione: se $w = s_1 \cdots s_r$ è prodotto di r riflessioni semplici e non è ridotto ($\ell(w) = n(w) < r$), allora si può trovare una coppia di riflessioni che si possono togliere.

Osservazione 1.5.1: Il corollario appena dimostrato ci aiuta a capire come calcolare $n(w) = |\Pi(w)|$ per un particolare elemento $w \in W$.
Siccome $|\Pi(w)| = n(w) = \ell(w)$, possiamo immaginare che la risposta stia nell'espressione ridotta di w come prodotto di riflessioni semplici. Sia $w = s_1 \cdots s_r$ (dove come al solito $s_i = s_{\alpha_i}$ per qualche $\alpha_i \in \Delta$) ridotto, cioè con $r = \ell(w)$. Definiamo $\beta_r = \alpha_r$, e per $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ poniamo $\beta_i = (s_r \cdots s_{i+1})\alpha_i$. Vogliamo mostrare che l'insieme $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ è in realtà $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$.
Sia $\beta \in \Pi(w)$. Poiché $\beta \in \Pi$ e contemporaneamente $w\beta \in -\Pi$ (perché $\beta \in w^{-1}(-\Pi)$) nella scrittura di w come prodotto di riflessioni semplici dovremo trovare s_β (altrimenti per la proposizione 1.2.4 avremmo $w\beta \in \Pi$), quindi esisterà $i \in \{1, \ldots, r\}$ con $s_{i+1} \cdots s_r \beta \in \Pi$ ma $s_i s_{i+1} \cdots s_r \beta \in -\Pi$ (se $i = r$ si intende $s_{i+1} \cdots s_r$ come l'identità 1); in altri termini $s_{i+1} \cdots s_r \beta$ è una radice positiva trasformata in negativa da s_i, che forza $s_{i+1} \cdots s_r \beta = \alpha_i$, cioè $\beta = \beta_i$. Quindi $\Pi(w) \subseteq \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, ma poiché $\Pi(w)$ ha cardinalità $n(w) = \ell(w) = r$, arriviamo a dire che $\Pi(w) = \{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$.

Il corollario 1.5.2 permette di riformulare il lemma 1.4.1

Corollario 1.5.3: *Sia Δ un sistema semplice, e Π il sistema positivo da esso determinato, $\alpha \in \Delta$, e $w \in W$. Allora:*

(i) *Se $w\alpha \in \Pi$, allora $\ell(ws_\alpha) = n(w) + 1$.*

(ii) *Se $w\alpha \in -\Pi$, allora $\ell(ws_\alpha) = n(w) - 1$.*

(iii) *Se $w^{-1}\alpha \in \Pi$, allora $\ell(s_\alpha w) = n(w) + 1$.*

(iv) *Se $w^{-1}\alpha \in -\Pi$, allora $\ell(s_\alpha w) = n(w) - 1$.*

Esiste un altro modo utile di riformulare il teorema visto.

Teorema 1.5.4: *Sia $w = s_1 \cdots s_r$ prodotto di riflessioni semplici. Se $\ell(ws) < \ell(w)$ per qualche riflessione semplice $s = s_\alpha$, allora esiste un indice $i \in \{1, \ldots, r\}$ per cui $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$ (cioè $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r s$). In particolare, w ha un espressione ridotta in riflessioni semplici terminante per s se e solo se $\ell(ws) < \ell(w)$.*

Dimostrazione. Se $s = s_\alpha$, sappiamo già dal lemma 1.5.3 che $\ell(ws) < \ell(w)$ equivale a $w\alpha \in -\Pi$ (in realtà il lemma ci dice che se vale $w\alpha \in -\Pi$ allora $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$, ma se $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$, ossia $n(ws_\alpha) < n(ws_\alpha)$, allora non può accadere $w\alpha \in \Pi$ in quanto esso implica $n(ws_\alpha) = n(w) + 1$).
Da $\ell(ws) < \ell(w)$ vediamo che $ws = s_1 \cdots s_r s$ non è in forma ridotta, quindi chiamando $s = s_{r+1}$, dal teorema 1.5.1 otteniamo l'esistenza di due indici $i, j \in \{1, \ldots, r+1\}$ con $i < j$ soddisfacenti le tre condizioni

(i), (ii), e (iii) presenti nell'enunciato del teorema in questione. Dal fatto che $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ abbiamo anche che $w\alpha \in -\Pi$ per il lemma 1.5.3, quindi per come si trova j nella dimostrazione del teorema 1.5.1 possiamo prendere $j = r+1$, da cui deduciamo da (iii) che $ws = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r$.
Infine, se w ha un espressione ridotta in riflessioni semplici terminante per s, allora evidentemente $\ell(ws) \leq \ell(w) - 1 < \ell(w)$, e viceversa se vale $\ell(ws) < \ell(w)$, da quanto appena dimostrato, se $w = s_1 \cdots s_r$, avremo $w = s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_r s$, per un opportuno indice $i \in \{1, \ldots, r\}$. □

Abbiamo visto a suo tempo che W permuta i vari sistemi positivi ⟦semplici⟧ in modo transitivo. Ora che sappiamo che per $w \in W$ vale $n(w) = \ell(w)$, possiamo dimostrare che l'azione sui sistemi positivi ⟦semplici⟧ è regolare, ossia che è transitiva (che sappiamo già), e che $w = 1$ è l'unico elemento che stabilizza un qualsiasi sistema positivo ⟦semplice⟧.

Teorema 1.5.5: *Sia* Δ *un sistema semplice contenuto nel sistema positivo* Π, *e* $w \in W$. *Allora sono equivalenti:*

(i) $w\Delta = \Delta$.

(ii) $w\Pi = \Pi$.

(iii) $n(w) = 0$.

(iv) $\ell(w) = 0$.

(v) $w = 1$.

Dimostrazione. $(i) \implies (ii)$ è ovvio se ricordiamo la definizione di Π nei termini di Δ (ossia come i vettori di Φ che si scrivono come combinazioni lineari non negative di vettori di Δ), $(ii) \implies (iii)$ è evidente dalla definizione di $n(w)$, $(iii) \implies (iv)$ è dovuto al fatto che $n(w) = \ell(w)$, $(iv) \implies (v)$ viene per definizione di $\ell(w)$, e $(v) \implies (i)$ è ovvio. □

C'è una conseguenza della regolarità dell'azione di W sui sistemi positivi ⟦semplici⟧ che vale la pena esplorare (anche perché ci servirà più avanti).
È chiaro dalla definizione di sistema positivo che un qualsiasi sottoinsieme $\Pi \subseteq \Phi$ è un sistema positivo qualora lo è $-\Pi$. Per la transitività e la regolarità dell'azione di W sui sistema semplici, esiste sempre un unico un elemento $w_\circ \in W$ che spedisce Π in $-\Pi$, da cui per questo elemento varrà $\ell(w_\circ) = n(w_\circ) = |\Pi|$, che è evidentemente il più grande valore che la funzione $w \longmapsto n(w)$ può assumere. Possiamo osservare poi che $w_\circ^{-1} = w_\circ$, perché $w_\circ\Pi = -\Pi$ significa $-w_\circ\Pi = \Pi$, che a sua volta vuol dire $w_\circ^{-1}\Pi = -\Pi$, che per l'unicità di $w_\circ$ forza $w_\circ^{-1} = w_\circ$.
Possiamo poi caratterizzare $w_\circ$ come l'unico elemento $w \in W$ che soddisfi $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ per ogni $\alpha \in \Delta$. Infatti se $\alpha \in \Delta$, allora $\ell(w_\circ s_\alpha) = n(w_\circ s_\alpha) = n(w_\circ) - 1$ (perché n non può assumere valori più alti), che è uguale a $= \ell(w_\circ) - 1 < \ell(w_\circ)$; e viceversa se $w \in W$ soddisfa $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$, allora per ogni $\alpha \in \Delta$ deve valere $w\alpha \in -\Pi$, che ricordando come si scrive Π in termini di Δ vuol dire $w\Pi = -\Pi$. Questa caratterizzazione di $w_\circ$ ha una conseguenza interessante. Se $w = s_1 \cdots s_r$ è un espressione ridotta per un elemento $w \in W$, possiamo moltiplicare a destra per le riflessioni semplici mancanti in modo tale da ottenere $w_\circ$. Se w' è il prodotto di tali riflessioni mancanti, allora quello che abbiamo appena detto si traduce in $w_\circ = ww'$, con $\ell(w_\circ) = \ell(w) + \ell(w')$, deduciamo che $\ell(w_\circ w) = \ell((w_\circ w)^{-1}) = \ell(w^{-1}w_\circ) = \ell(w') = \ell(w_\circ) - \ell(w)$.

1.6 Generatori e relazioni

Siamo finalmente pronti a dimostrare che $W = \langle s_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$ è il gruppo libero su $\{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ a meno di relazioni del tipo $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$ (dove $m(\alpha, \beta) = o(s_\alpha s_\beta) = o(s_\beta s_\alpha) = m(\beta, \alpha)$).

Teorema 1.6.1: *Si fissi un sistema semplice Δ in Φ. Allora W è generato da $S := \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$, soggetto solamente alle relazioni $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$, al variare di $\alpha, \beta \in \Delta$.*

Dimostrazione. Mostriamo che ogni relazione $s_1 \cdots s_r = 1$ è conseguenza di relazioni del tipo $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$ per opportuni $\alpha, \beta \in \Delta$. Siano dunque $s_1, \ldots, s_r$ riflessioni semplici con $s_1 \cdots s_r = 1$. Notiamo in primo luogo che r deve essere pari, perché $\det(s_1 \cdots s_r) = (-1)^r$.
Se $r = 2$ abbiamo $s_1 s_2 = 1$, ossia $s_1 = s_2^{-1} = s_2$; quindi $s_1 s_2 = 1$ è implicata da $s_2^2 = 1$. Si proceda per induzione su $r = 2q$ con $q > 1$.
Avremo che $s_1 \cdots s_{2q} = 1$ vuol dire $s_1 \cdots s_q s_{q+1} s_{q+2} \cdots s_{2q} = 1$, ossia

$$s_1 \cdots s_q s_{q+1} = s_{2q} \cdots s_{q+2},$$

notiamo però che a destra abbiamo un prodotto di $2q - (q+2) + 1 = q - 1$ riflessioni, quindi $s_1 \cdots s_q s_{q+1}$ non può essere un'espressione ridotta per l'elemento di W che rappresenta. Quindi esistono due indici i, j con $1 \leq i < j \leq q + 1$ tali che

$$s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}, \tag{1.2}$$

che è un altro modo per dire

$$1 = s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1}. \tag{1.3}$$

Supponiamo prima che nell'espressione sopra ci siano meno di $2q$ riflessioni semplici, allora usando l'induzione forte otteniamo che (1.3) o equivalentemente (1.2) sono ottenibili dalle relazioni citate in enunciato. Quindi in $s_1 \cdots s_r = 1$ è lecito rimpiazzare $s_{i+1} \cdots s_j$ con $s_i \cdots s_{j-1}$, ottenendo che:

$$s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots \widehat{s_j} \cdots s_r = 1,$$

e per induzione questa è ottenibile dalle relazioni in enunciato, e siccome ciò vale anche per (1.2) (o equivalentemente (1.3)), abbiamo che $s_1 \cdots s_r = 1$ si ottiene da tali relazioni.
Supponiamo ora che (1.3) coinvolga $2q$ riflessioni semplici. L'unica possibilità è che $i = 1$ e $j = q + 1$, cosicché (1.2) diventa

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_1 \cdots s_q. \tag{1.4}$$

Torniamo a $s_1 \cdots s_{2q} = 1$, e moltiplicando a destra e a sinistra per s_1 otteniamo $s_2 \cdots s_{2q} s_1 = 1$. Se provassimo a ripetere i passaggi appena svolti, l'unico caso irrisolto sarebbe quello in cui accade l'analogo di (1.4), ossia

$$s_3 \cdots s_{q+2} = s_2 \cdots s_{q+1} \tag{1.5}$$

che moltiplicando a sinistra per s_3 diventa:

$$s_4 \cdots s_{q+2} = s_3 s_2 \cdots s_{q+1},$$

da cui poi si ottiene:

$$s_3(s_2 s_3 \cdots s_{q+1}) s_{q+2} s_{q+1} \cdots s_4 = 1.$$

Nota ora che a sinistra abbiamo $2q$ riflessioni semplici, dunque ripetiamo l'argomento iniziale, che avrà successo finché non accade:

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_q, \tag{1.6}$$

ma così facendo (1.6) e (1.4) obbligano $s_1 = s_3$. Potremmo così continuare a permutare ciclicamente i fattori finché non si ottiene $s_2 = s_4$. Continuando il ragionamento per induzione si riesce a dimostrare quanto voluto se non a prima vista quando $s_1 = s_3 = \cdots s_{r-1}$ e $s_2 = s_3 = \cdots = s_r$, che però dimostra che $s_1 \cdots s_r = 1$ è una relazione del tipo $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = 1$. □

Corollario 1.6.2: *Sia Δ un sistema semplice per il sistema di radici Φ, e siano $\alpha, \beta \in \Delta$. Allora denotando con $m(\alpha,\beta)$ l'ordine della rotazione $s_\alpha s_\beta$, i vettori α e β formano tra di loro un angolo di $\pi - \pi/m(\alpha,\beta)$.*

Dimostrazione. Sia $\theta \in [0,\pi]$ l'angolo relativo di α e β. Abbiamo già visto che $s_\alpha s_\beta$ agisce su $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ come una rotazione di $2k\pi \pm 2\theta$ radianti per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dal fatto che $s_\alpha s_\beta$ è una rotazione di ordine $m(\alpha,\beta)$ otteniamo che essa è una rotazione di $2\pi/m(\alpha,\beta) + 2\ell\pi$ radianti, per cui:

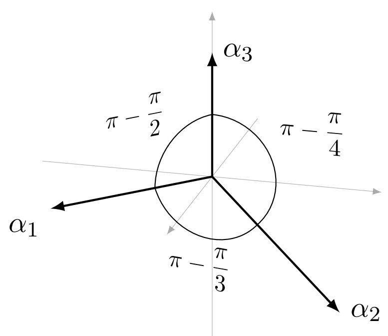
$$2k\pi \pm 2\theta = \frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)} + 2\ell\pi, \qquad \text{cioè} \qquad k\pi \pm \theta = \frac{\pi}{m(\alpha,\beta)} + \ell\pi,$$

che è un altro modo per dire che esiste $h \in \mathbb{Z}$ soddisfacente:

$$\theta = \pm\frac{\pi}{m(\alpha,\beta)} + h\pi,$$

ma ricordando che $\theta \in [0,\pi)$, l'unica opzione è $\theta = \pi - \pi/m(\alpha,\beta)$. □

Quindi dalla struttura del gruppo finito di riflessioni si possono determinare gli angoli relativi tra vettori di uno stesso sistema semplice, e viceversa. Abbiamo tradotto un problema di Algebra in un problema di determinazione di angoli.



$$\Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{matrix} s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \\ s_{\alpha_3} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} (s_{\alpha_1})^2 = (s_{\alpha_2})^2 = (s_{\alpha_3})^2 = (s_{\alpha_1}s_{\alpha_2})^3 = \\ = (s_{\alpha_1}s_{\alpha_3})^2 = (s_{\alpha_2}s_{\alpha_3})^4 = 1 \end{matrix} \right\rangle$$

Figura 1.6: A sinistra il sistema semplice di B_3 con gli angoli relativi, a destra la presentazione del gruppo finito di riflessioni associato BC_3.

1.7 Sottogruppi parabolici

Abbiamo studiato W assieme ad un sistema di radici Φ, che poi abbiamo ridotto ad un sistema semplice Δ, le cui riflessioni associate abbiamo scoperto generare W. Il sistema semplice Δ è un sistema di vettori linearmente indipendenti i cui relativi angoli sono ottusi.
Esploriamo ora la struttura di alcuni sottogruppi di W assieme alle caratteristiche dell'azione di W su V. Cominciamo studiando i sottogruppi di W generati da riflessioni semplici (stiamo fissando il sistema semplice Δ). Chiamiamo S l'insieme delle riflessioni semplici, e per ogni $I \subseteq S$ indichiamo con W_I il sottogruppo di W generato dalle riflessioni di I. Sempre dato $I \subseteq S$ indicheremo con $\Delta_I = \{\alpha \in \Delta : \ s_\alpha \in I\}$. I sottogruppi di W che sono del tipo W_I per qualche $I \subseteq S$ si dicono sottogruppi parabolici di W.
Si potrebbe sospettare che questi sottogruppi dipendono fortemente dalla scelta del sistema semplice Δ, ma in realtà rimpiazzando Δ con $w\Delta$ (per qualche $w \in W$), si scambia W_I con $W_{wI} = wW_Iw^{-1}$ (perché $\{s_{w\alpha} : \ \alpha \in I\} = \{ws_\alpha w^{-1} : \ s_\alpha \in I\}$ per la proposizione 1.2.1). Il risultato principale che vediamo è il seguente.

Proposizione 1.7.1: *Sia Δ un sistema semplice e S il relativo insieme di riflessioni semplici. Sia $I \subseteq S$ e si definisca $\Phi_I = \Phi \cap V_I$, dove $V_I = \mathrm{span}\Delta_I$. Allora:*

(*i*) *Φ_I è un sistema di radici in V $[\![V_I]\!]$ con sistema semplice Δ_I e con corrispondente gruppo di riflessioni W_I $[\![\{w_{|V_I} : w \in W_I\}]\!]$.*

(*ii*) *Vedendo W_I come gruppo finito di riflessioni con length function ℓ_I (relativa al sistema semplice Δ_I), si ha $\ell_I = \ell_{|W_I}$.*

(*iii*) *Si definisca $W^I = \{w \in W : \ \ell(ws) > \ell(w) \text{ per ogni } s \in I\}$. Allora dato $w \in W$, esiste un unico $u \in W^I$ e $v \in W_I$ tale per cui $w = uv$. Inoltre vale $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$, e in particolare $u = wv^{-1}$ realizza il minimo di $\{\ell(ww') : \ ww' \in wW_I\}$.*

Dimostrazione.

(*i*)

Dato $\alpha \in \Phi_I = \Phi \cap V_I$, si ha $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi_I = \mathbb{R}\alpha \cap \Phi \cap V_I = \{\alpha, -\alpha\} \cap V_I = \{\alpha, -\alpha\}$. D'altra parte, sempre preso $\alpha \in \Phi_I$, s_α è una biezione, dunque $s_\alpha(\Phi_I) = s_\alpha(\Phi \cap V_I) = s_\alpha(\Phi) \cap s_\alpha(V_I) = \Phi \cap V_I = \Phi_I$ ($s_\alpha(V_I) = V_I$ vale perché $\alpha \in V_I$). Questo mostra che Φ_I è un sistema di radici in V_I ed in V.
Questo sistema di radici Φ_I, visto in V_I o in V, ha come sistema semplice Δ_I, perché $\Phi_I = \Phi \cap V_I = \Phi \cap \operatorname{span}(\Delta_I)$, da cui Δ_I genera tutto $\operatorname{span}(\Phi_I)$, e ogni vettore di Φ_I non si può scrivere combinazione lineare con coefficienti di segno misto in quanto $\Phi_I \subseteq \Phi$ e $\Delta_I \subseteq \Delta$.
Infine, il gruppo $\{w_{|V_I} : \ w \in W_I\}$ è il gruppo di riflessioni di Φ_I visto nello spazio euclideo V_I (semplicemente per com'è definito W_I), e banalmente W_I è la stessa cosa per Φ_I, ma visto nello spazio euclideo V.

(*ii*)

Chiamando Φ^+ il sistema positivo, abbiamo che $\ell(w)$ è il numero di elementi di Φ^+ che w rende negative, e allo stesso tempo $\ell_I(w)$ sarà il numero di vettori del sistema positivo Φ_I^+, che è chiaramente $\Phi_I \cap \Phi^+$ che vengono resi negativi da w.
Sia $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi$. Allora nella scrittura di α come combinazione lineare di Δ a coefficienti non negativi deve comparire un $\gamma \in \Delta \setminus \Delta_I$ con coefficiente positivo, per cui al variare di $\beta \in \Delta_I$, $s_\beta\alpha$ mantiene positivo tale coefficiente di γ (appunto perché $\gamma \in \Delta \setminus \Delta_I \subseteq H_\beta$), perciò nella scrittura di $s_\beta\alpha$ come combinazione lineare di vettori di Δ devono comparire solamente coefficienti non negativi, per cui $s_\beta\alpha \in \Phi^+$. Questo ci permette di dire che per ogni $w \in W_I$ avremo $w\alpha \in \Phi^+$, e quindi le radici che un qualsiasi $w \in W_I$ rende negative devono stare in Φ_I^+, da cui $\ell(w) = \ell_I(w)$.

(*iii*)

Dato $w \in W$, seleziona $u \in wW_I$ di lunghezza più piccola possibile, e scrivi $u = wv^{-1}$ per un certo $v^{-1} \in W_I$ (cioè per un certo $v \in W_I$). È chiaro che $u \in W^I$, poiché per $s \in I$ vale $\ell(us) > \ell(u)$ per la condizione di minimalità di u ($s \in I \subseteq W_I$, da cui $us \in wW_I$).
Per mostrare che $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$, notiamo che in automatico vale $\ell(w) = \ell(uv) \leq \ell(u) + \ell(v)$, quindi ci dobbiamo preoccupare di mostrare che non vale la disuguaglianza stretta. A tale scopo scriviamo le espressioni ridotte $u = s_1 \cdots s_q$ (con s_i riflessioni semplici) e $v = s'_1 \cdots s'_r$ (possiamo assumere $s'_i \in I$ perché il punto 2 ci dice che la lunghezza di v rimane la stessa vedendo $v \in W_I$ o $v \in W$). Supponiamo per assurdo che la disuguaglianza $\ell(w) \leq \ell(u) + \ell(v)$ sia stretta, allora la condizione di delezione ci permette di togliere due fattori in $w = uv = s_1 \cdots s_q s'_1 \cdots s'_r$ senza cambiare uv; ma il prodotto $s_1 \cdots s_q$ deve rimanere invariato in quella scrittura, perché altrimenti invertendo nell'espressione ridotta di $w = uv$ i fattori provenienti da v otterremo un elemento in wW_I (il prodotto dei fattori provenienti da v sarebbe ancora in W_I per come quest'ultimo è definito) di lunghezza inferiore ad u. Quindi in $uv = s_1 \cdots s_q s'_1 \cdots s'_r$ due fattori s'_i, s'_j possono essere omessi senza cambiare uv, ma eliminando u otteniamo un'espressione per v più corta di quella che era già una espressione ridotta. Quindi deve valere $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$.
Nota che ripetendo i passaggi per un qualsiasi altro $w' \in wW_I$, trovando $u' \in W^I$ e $v' \in W_I$ con $w' = u'v'$,

si ha che $u' = u$ appunto per come troviamo tale elemento. In altre parole tutti gli elementi di wW_I condividono l'elemento di W^I da cui sono decomposti.
Supponiamo ora di avere un elemento $u' \in W^I$ in wW_I (che è un altro modo per dire che $w = u'v'$ per qualche $v' \in W_I$) con $u' \neq u$. Per quanto appena osservato, dal fatto che $u' \in wW_I$, potremo scrivere $u' = uv'$ per qualche $v' \in W_I$, che poiché $u' \neq u$ avrà lunghezza positiva $\ell(v') = r$, però se scriviamo $v' = s_1 \cdots s_r$ (e possiamo di nuovo supporre $s_i \in I$ per quanto dimostrato nel punto (*ii*)) avremo $\ell(u's_r) = \ell(us_1 \cdots s_{r-1}) < \ell(us_1 \cdots s_r) = \ell(u')$, che contraddice $u' \in W^I$. □

1.8 I polinomi di Poincaré

La proposizione 1.7.1 non ci ha fatto sudare invano, vediamo ora un'applicazione del punto (*iii*), in particolare useremo quanto visto per ottenere una formula che servirà alla fine.
Siamo interessati alla successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}_0$, dove definiamo per ogni intero non negativo n:

$$a_n = |\{w \in W : \ \ell(w) = n\}|.$$

Conoscere la successione $\{a_n\}_n$ significa capire come "crescono" gli elementi di W, in un certo senso. Essendo W finito è naturale che $\{a_n\}_n$ sia definitivamente nulla, quindi abbiamo abbonato un polinomio:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{\ell(w)} \in \mathbb{Z}[t].$$

Questo polinomio viene chiamato polinomio di Poincaré di W. Più in generale dato $X \subseteq W$, si definisce il polinomio di Poincaré di X allo stesso modo, ossia:

$$X(t) = \sum_{w \in X} t^{\ell(w)} \in \mathbb{Z}[t].$$

Nota che per quanto riguarda i sottogruppi parabolici non c'è ambiguità: il polinomio di Poincaré di $W_I \leq W$ è lo stesso sia vedendo W_I come un sottoinsieme di W e sia vedendolo come un gruppo finito di riflessioni a sé (questo è dovuto al punto (*ii*) della proposizione 1.7.1).

Osservazione 1.8.1: Se, fissato un sistema semplice Δ e l'insieme S delle sue riflessioni semplici, consideriamo i polinomi di Poincaré $W_I(t)$ e $W^I(t)$, il punto (*iii*) della proposizione 1.7.1 ci regala l'uguaglianza $W(t) = W_I(t)W^I(t)$ in $\mathbb{Z}[t]$. Infatti:

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |\{w \in W : \ \ell(w) = n\}| t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\{uv : \ u \in W^I, \ v \in W_I : \ \ell(u) + \ell(v) = n\}| t^n, \end{aligned}$$

quindi se indichiamo con $a_n = |\{u \in W^I : \ \ell(u) = n\}|$ e $b_n = |\{v \in W_I : \ \ell(v) = n\}|$, abbiamo che $W(t)$ è uguale a:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right) t^n,$$

che è precisamente il prodotto $W^I(t)W_I(t)$.

Quanto osservato, assieme all'esistenza dell'elemento lungo $w_\circ$ (di lunghezza $\ell(w_\circ) = |\Pi|$) per il sistema positivo Π che contiene Δ, permette di dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1.8.1: *Con le usuali notazioni vale:*

$$\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}\frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}W^I(t) = t^{|\Pi|}.$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza segue da quanto precedentemente visto; dimostriamo la seconda uguaglianza. Considera il contributo che un singolo $w \in W$ da' alla seconda somma. Chiama K_w l'insieme $\{s \in S : \ \ell(ws) > \ell(w)\}$. Avremo che $w \in W^I = \{w' \in W : \ \forall s \in I, \ \ell(w's) > \ell(w')\}$ se e solo se $I \subseteq K_w$, dunque nella sommatoria in questione $t^{\ell(w)}$ compare per tutti gli $I \subseteq K_w$, in altre parole $t^{\ell(w)}$ compare nella sommatoria con il coefficiente $\sum_{I\subseteq K_w}(-1)^{|I|}$ (in aggiunta ad altri eventuali coefficienti dello stesso tipo provenienti da altri $w' \in W$), ma con il binomio di Newton, in particolare usando:

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1+1)^n,$$

si vede che il termine in questione è non nullo solamente quando $|K_w| = 0$, ossia $K_w = \varnothing$, che però coincide con il dire che $w = w_\circ$. $\square$

Osservazione 1.8.2: Nota che quando sostituiamo 1 in un polinomio di Poincaré $X(t)$ otteniamo $|X|$, dunque quanto appena dimostrato ci porta a:

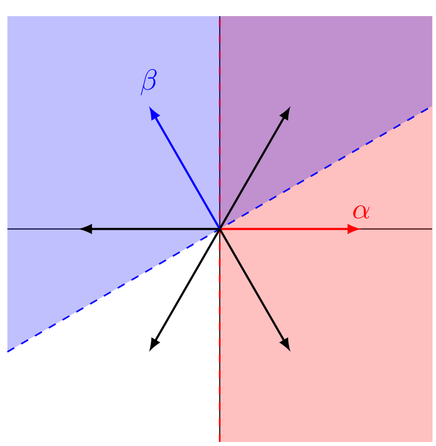
$$\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}\frac{|W|}{|W_I|} = 1. \tag{1.7}$$

1.9 Domini fondamentali

Quello che andremo a fare sarà dividere lo spazio euclideo in varie regioni, e scopriremo che ogni volta che selezioniamo un sistema positivo abbiamo associata una regione particolare, la quale permetterà di comprendere meglio come agisce W su V.
Prima fissiamo della notazione. Dato il vettore $\alpha \in V$, definiamo i due seguenti semispazi aperti:

$$H_\alpha^+ = \{\lambda \in V : \ (\lambda, \alpha) > 0\}, \qquad \text{e} \qquad H_\alpha^- = \{\lambda \in V : \ (\lambda, \alpha) < 0\}.$$

Dato un sistema positivo Δ in Φ, definiamo poi la camera fondamentale relativa a Δ, $\mathcal{C}(\Delta)$, come l'intersezione di tutti i semispazi aperti H_α^+ al variare di $\alpha \in \Delta$.



Notiamo che $\mathcal{C}(\Delta)$ è un convesso aperto in quanto intersezione finita di aperti convessi, ed inoltre è ciò che in algebra lineare è noto come cono (ossia un sottoinsieme dello spazio euclideo che è chiuso per scalamento positivo). Quello a cui siamo interessati è la chiusura $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$, che può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\overline{\mathcal{C}(\Delta)} = \{\lambda \in V : \ \forall \alpha \in V, \ (\lambda, \alpha) \geq 0\}$$

Questo è un cono chiuso convesso. Quello che arriveremo a dimostrare è che ciascun $\lambda \in V$ è nella W-orbita di un solo $\mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$.
Dimostrare che l'orbita $W\lambda$ di ogni $\lambda \in V$ interseca $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ è più facile di dimostrare che tale intersezione contiene un solo elemento.

Proposizione 1.9.1: *Ogni $\lambda \in V$ appartiene alla W-orbita di qualche $\mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$, e in tal caso $\mu - \lambda$ è una combinazione lineare non negativa di vettori di Δ.*

Dimostrazione. Definiamo la seguente relazione d'ordine su V:

$$\alpha \leq \beta \iff \beta - \alpha \text{ è combinazione lineare di } \Delta \text{ a coefficienti non negativi.}$$

(diamo per buono che questa sia una relazione d'ordine su V). Consideriamo $\{w\lambda : \ w \in W, \ w\lambda \geq \lambda\}$ (che contiene λ). Sia μ un elemento massimale di tale insieme. Se $\alpha \in \Delta$, allora $s_\alpha\mu = \mu - \langle\alpha, \mu\rangle\alpha$, ma siccome $s_\alpha\mu \in W\lambda$, se fosse $\langle\alpha, \mu\rangle < 0$, otterremo che $s_\alpha\mu - \mu = -\langle\alpha, \mu\rangle\alpha \geq 0$, da cui $s_\alpha\mu \geq \mu \geq \lambda$, che renderebbe $s_\alpha\mu \in \{w\lambda : \ w \in W, \ w\lambda \geq \lambda\}$ e $s_\alpha\mu \geq \mu$ forzerebbe per massimalità $s_\alpha\mu = \mu$, che però renderebbe $(\mu, \alpha) = 0$. Dunque deve capitare $\langle\alpha, \mu\rangle \geq 0$, ossia $(\alpha, \mu) \geq 0$. Valendo ciò per ogni $\alpha \in \Delta$ otteniamo $\mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$. □

Per mostrare che ciascun $\lambda \in V$ è nell'orbita di al massimo un $\mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$, è sufficiente mostrare che elementi distinti di $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ hanno orbite distinte.

Teorema 1.9.2: *Sia Δ un sistema semplice*

- (i) *Se $w \in W$, $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ soddisfano $w\lambda = \mu$, allora $\lambda = \mu$ e w è prodotto di riflessioni semplici che fissano λ. In particolare se $\lambda \in \mathcal{C}(\Delta)$, allora lo stabilizzatore di λ è banale.*
- (ii) *$\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ è dominio fondamentale per l'azione di W su V.*
- (iii) *Se $\lambda \in V$, lo stabilizzatore W_λ è generato dalle riflessioni s_α (con $\alpha \in \Phi$) che esso contiene (ossia che fissano λ).*
- (iv) *Se $U \subseteq V$, allora il sottogruppo di W che fissa ogni punto di U è generato dalle riflessioni s_α (con $\alpha \in \Phi$) che contiene (ossia che fissano ogni punto di U).*

Dimostrazione.

(i)

Si proceda per induzione sul numero $\ell(w) = n(w)$. Se tale è 0, allora $w = 1$ e non c'è nulla da dimostrare. Sia ora $n(w) = \ell(w) > 0$. In tal caso w deve mandare una qualche radice semplice $\alpha \in \Delta$ in una negativa (se w manda una radice positiva in una negativa, ossia $n(w) > 0$, non può lasciare positive tutte le radici semplici). A questo punto ws_α ha lunghezza $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) - 1$ (questo è il lemma 1.4.1). Inoltre poiché $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ e $w\alpha \in -\Pi \subseteq \Phi \setminus \Delta$, si ha $0 \leq (\mu, w\alpha) = (w^{-1}\mu, \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0$, da cui $(\lambda, \alpha) = 0$, che ci dice $s_\alpha\lambda = \lambda$, per cui $ws_\alpha\lambda = \mu$. Qui si applica l'induzione per ottenere $\lambda = \mu$, e che ws_α è prodotto di riflessioni semplici che fissano λ, da cui w è prodotto di riflessioni semplici che fissano λ.
Quanto dimostrato permette di dire che se $\lambda \in \mathcal{C}(\Delta)$, allora W_λ è banale, perché in tal caso non c'è nessuna riflessione semplice che fissa λ.

(ii)

Segue dal punto *(i)* in vista del lemma precedente.

(iii)

Sia $\lambda \in V$. la proposizione 1.9.1 ci permette di trovare $w \in W$ per cui $\mu := w\lambda$ appartiene a $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$. Per il punto *(i)* lo stabilizzatore W_μ è l'insieme dei prodotti delle riflessioni che fissano μ, e quindi $W_\mu = \langle s_\alpha : \ s_\alpha \in W_\mu \rangle = \langle s_\alpha : \ s_\alpha \mu = \mu \rangle$. È un fatto delle azioni di gruppo che

$$\begin{aligned} W_\lambda = W_{w^{-1}\mu} &= w^{-1} W_\mu w = w^{-1} \langle s_\alpha : \ s_\alpha \mu = \mu \rangle w = \langle w^{-1} s_\alpha w : \ s_\alpha \mu = \mu \rangle \\ &= \langle s_{w(\alpha)} : \ s_{w^{-1}(w(\alpha))} \mu = \mu \rangle = \langle s_\beta : \ s_{w^{-1}(\beta)} \mu = \mu \rangle \\ &= \langle s_\beta : \ w s_\beta w^{-1} \mu = \mu \rangle = \langle s_\beta : \ w s_\beta w^{-1} (w\lambda) = w\lambda \rangle \\ &= \langle s_\beta : \ s_\beta \lambda = \lambda \rangle . \end{aligned}$$

(iv)

Sia $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ una base dello span di W. Il sottogruppo W' di W che fissa ogni vettore di U è uguale al sottogruppo di W che fissa ogni λ_i, o in altri termini:

$$W' = \bigcap_{i=1}^{t} W_{\lambda_i}.$$

Si proceda per induzione su t. Se $t = 1$, allora non abbiamo nulla da dimostrare in virtù del punto *(iii)*. Sia $t > 1$. Chiamando $\Phi' = \{\alpha \in \Phi : \ s_\alpha \in W_{\lambda_1}\}$ si ha che

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} \cdot \Phi' &= \{w\alpha : \ w \in W_{\lambda_1}, \ \alpha \in \Phi'\} \\ &= \{w\alpha : \ w \in W_{\lambda_1}, \ \alpha \in \Phi, \ s_\alpha \in W_{\lambda_1}\} \\ &= \{w\alpha : \ w \in W_{\lambda_1}, \ \alpha \in \Phi, \ w s_\alpha w^{-1} \in W_{\lambda_1}\} \\ &= \{w\alpha : \ w \in W_{\lambda_1}, \ \alpha \in \Phi, \ s_{w(\alpha)} \in W_{\lambda_1}\} \\ &\subseteq \{\beta \in \Phi : \ s_\beta \in W_{\lambda_1}\} \\ &= \Phi', \end{aligned}$$

e banalmente $\Phi' \subseteq W_{\lambda_1} \cdot \Phi'$. Questo ci dice che W_{λ_1} è un gruppo finito di riflessioni con sistema di radici Φ', ed inoltre nota che:

$$W' = \{w \in W_{\lambda_1} : \ \forall i \in \{2, \dots, t\}, \ w\lambda_i = \lambda_i\}.$$

Quindi per l'ipotesi induttiva abbiamo che:

$$\begin{aligned} W' &= \langle s_\alpha : \ \alpha \in \Phi' \text{ con } s_\alpha \lambda_i = \lambda_i \text{ per ogni } i \in \{2, \dots, t\} \rangle \\ &= \langle s_\beta : \ \beta \in \Phi \text{ con } s_\beta \lambda_i = \lambda_i \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, t\} \rangle \end{aligned}$$ □

Abbiamo associato a ciascun sistema semplice Δ un cono aperto convesso $\mathcal{C}(\Delta) \subseteq V$ i cui elementi hanno stabilizzatore banale. Rimpiazzando Δ con $w\Delta$ (dove $w \in W$), si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(w\Delta) &= \bigcap_{\beta \in w\Delta} \{\lambda \in V : \ (\lambda, \beta) > 0\} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \{\lambda \in V : \ (\lambda, w\alpha) > 0\} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \{\lambda \in V : \ \left(w^{-1}\lambda, \alpha\right) > 0\} \\ &= \bigcap_{\alpha \in \Delta} \{w\lambda \in V : \ (\lambda, \alpha) > 0\} = w \bigcap_{\alpha \in \Delta} \{\lambda \in V : \ (\lambda, \alpha) > 0\} = w\mathcal{C}(\Delta). \end{aligned}$$

Con questo piccolo calcolo si capisce che l'azione regolare di W sui sistemi semplici si traduce nell'azione nell'azione regolare di W sull'insieme $\{\mathcal{C}(\Delta) : \ \Delta \text{ sistema positivo per } \Phi\}$. Gli insiemi $\mathcal{C}(\Delta)$ al variare dei sistemi semplici Δ in Φ si dicono camere, e topologicamente tali sono le componenti connesse di

$$V \smallsetminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha.$$

1.10 Il reticolo dei sottogruppi parabolici

La parte (iv) del teorema 1.9.2 può essere usata per determinare la struttura dei sottogruppi parabolici di W (cosa che sarà cruciale sapere più avanti)

Proposizione 1.10.1: *Se Δ è un sistema semplice e S è il relativo insieme di riflessioni semplici, la mappa da $\mathcal{P}(S)$ all'insieme dei sottogruppi parabolici di W, data per $I \in \mathcal{P}(S)$ da $I \longmapsto W_I$, è un isomorfismo di reticoli, vale a dire che è biettiva e valgono per $I, J \in \mathcal{P}(S)$:*

$$W_{I \cap J} = W_I \cap W_J, \qquad e \qquad W_{I \cup J} = \langle W_I \cup W_J \rangle.$$

Dimostrazione. Per come abbiamo definito i sottogruppi parabolici di W, è chiaro che la mappa in questione sia una biezione. È anche chiaro che $W_{I \cup J} = \langle I \cup J \rangle = \langle W_I \cup W_J \rangle$. Ci resta da dimostrare che $W_{I \cap J} = W_I \cap W_J$. Da un lato si vede senza troppa fatica che $W_{I \cap J} \subseteq W_I \cap W_J$, in quanto in $W_I \cap W_J$ compaiono tutte le riflessioni di $I \cap J$. Resta quindi da mostrare l'altra inclusione. A tale proposito considera gli span $V_I = \operatorname{span}(\Delta_I)$ e $V_J = \operatorname{span}(\Delta_J)$, dove ricorda che $\Delta_I = \{\alpha \in \Delta : \ s_\alpha \in I\}$ e $\Delta_J = \{\alpha \in \Delta : \ s_\alpha \in J\}$. Si ha che:

$$V_I \cap V_J = \operatorname{span}(\Delta_I) \cap \operatorname{span}(\Delta_J) = \operatorname{span}(\Delta_I \cap \Delta_J) = \operatorname{span}(\Delta_{I \cap J}) = V_{I \cap J},$$

quindi ricordando dall'algebra lineare che il complemento ortogonale dell'intersezione di due sottospazi è la somma dei relativi complementi ortogonali, avremo $V_{I \cap J}^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp = V_I^\perp + V_J^\perp$. Ora sia $w \in W_I \cap W_J$. Dal fatto che $w \in W_I$ si deduce che w fissa ogni vettore di $V_I^\perp$, e similmente $w \in W_J$ permette di dedurre che w fissa ogni vettore di $V_J^\perp$, quindi w fissa ogni vettore di $V_I^\perp + V_J^\perp = (V_I \cap V_J)^\perp = V_{I \cap J}^\perp$, e per il punto (iv) del teorema 1.9.2, si ha che w è prodotto di riflessioni $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ che fissano gli elementi di $V_{I \cap J}^\perp$, e quindi ciascuno degli α_i è ortogonale a $V_{I \cap J}^\perp$, cioè $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq V_{I \cap J}$, perciò ciascun α_i appartiene a $\Phi \cap V_{I \cap J} = \Phi_{I \cap J}$, che dimostra $W_I \cap W_J \subseteq \langle s_\alpha : \ \alpha \in \Phi_{I \cap J} \rangle = \langle I \cap J \rangle = W_{I \cap J}$. $\square$

Capitolo 2

La classificazione dei gruppi finiti di riflessioni

L'obiettivo di questo capitolo è quello di determinare i gruppi finiti di riflessioni mediante i cosiddetti loro grafi di Coxeter. Termineremo il capitolo mostrando l'esistenza di questi gruppi e osservandone alcune basilari proprietà interessanti, toccando anche argomenti che storicamente trovano origine nella teoria delle Algebre di Lie.

2.1 Grafi di Coxeter

Abbiamo visto che W è identificato a meno di isomorfismo dagli interi che abbiamo indicato con $m(\alpha, \beta)$ al variare di $\alpha, \beta \in \Delta$. Per incapsulare i valori di $m(\alpha, \beta)$ in un'immagine definiamo un grafo etichettato Γ, avente Δ come insieme di vertici (useremo anche l'insieme delle riflessioni semplici S), costruito mediante le seguenti regole:

- Due vertici α e β sono da collegare se $m(\alpha, \beta) \geq 3$, ed il loro lato deve essere etichettato con il numero $m(\alpha, \beta)$.
- Qualora due vertici α e β soddisfino $m(\alpha, \beta) = 2$, essi non vanno collegati.

Questo grafo etichettato viene chiamato grafo di Coxeter di W, e e scopriremo presto che questo determinerà W a meno di isomorfismo.

$$\left\langle \begin{array}{c} s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2} \\ s_{\alpha_3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (s_{\alpha_1})^2 = (s_{\alpha_2})^2 = (s_{\alpha_3})^2 = (s_{\alpha_1} s_{\alpha_2})^3 = \\ = (s_{\alpha_1} s_{\alpha_3})^2 = (s_{\alpha_2} s_{\alpha_3})^4 = 1 \end{array} \right\rangle \qquad \Longleftrightarrow$$

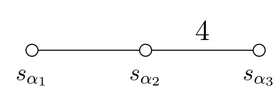


Figura 2.1: Presentazione e grafo di Coxeter di BC_4.

Proposizione 2.1.1: *Siano W_1, W_2 due gruppi finiti di riflessioni agenti sugli spazi euclidei V_1, V_2 rispettivamente. Siano W_1 e W_2 essenziali. Allora se W_1 e W_2 hanno il medesimo grafo di Coxeter, allora esiste un'isometria da V_1 in V_2 che induce un isomorfismo di gruppi $W_1 \cong W_2$.*

Dimostrazione. Siano Δ_1, Δ_2 sistemi semplici per W_1 e W_2. Si ha che Δ_1 è una base per V_1 e Δ_2 è una base per V_2 (questo è dovuto all'ipotesi di essenzialità sui gruppi W_1). Senza perdita di generalità possiamo supporre che tutti gli elementi dei sistemi Δ_1 e Δ_2 abbiano norma 1. Sia $\varphi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ una mappa compatibile con il grafo di Coxeter comune (ossia che per ogni $\alpha \in \Delta_1$, α e $\varphi(\alpha)$ corrispondono

allo stesso vertice).
Siano $\alpha, \beta \in \Delta_1$ distinti. Abbiamo già osservato nel corollario 1.6.2 che questi si trovano ad un angolo di $\pi - \pi/m(\alpha, \beta)$. Ma allora:

$$(\alpha, \beta)_{V_1} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}\right) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))_{V_2},$$

quindi φ è un'applicazione biunivoca tra Δ_1 e Δ_2 che preserva il prodotto scalare di due elementi qualsiasi della base (si ha $(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\alpha, \alpha) = 1$ per ogni $\alpha \in \Delta_1$), e quindi per la proprietà fondamentale delle applicazioni lineari φ può essere estesa ad un'isometria, che continueremo a chiamare $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$. Questa mappa regala un isomorfismo tra i gruppi ortogonali $\mathrm{O}(V_1)$ e $\mathrm{O}(V_2)$:

$$\mathrm{O}(V_1) \ni t \longmapsto \varphi t \varphi^{-1} \in \mathrm{O}(V_2),$$

ma notiamo che prendendo una riflessione $w_1 \in W_1$ si ha $\varphi w_1 \varphi^{-1} \in W_2$: questo perché essendo w_1 prodotto di riflessioni semplici $w_1 = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$, possiamo scrivere:

$$\varphi w_1 \varphi^{-1} = \varphi s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_r} \varphi^{-1} = \varphi s_{\alpha_1} \varphi^{-1} \varphi s_{\alpha_2} \varphi^{-1} \cdots \varphi s_{\alpha_r} \varphi^{-1},$$

che però è uguale per 1.2.1 a $s_{\varphi(\alpha_1)} \cdots s_{\varphi(\alpha_r)} \in W_2$. □

2.2 Componenti irriducibili

C'è un motivo ben preciso per cui decidiamo di non collegare due vertici α e β in un grafo di Coxeter quando $m(\alpha, \beta) = 2$. Nota che qualora due riflessioni semplici s_α, s_β hanno prodotto di ordine 2, ciò vuol dire che $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$. D'altra parte questo comportamento si traduce nel fatto che i vettori sono ortogonali, avendo angolo $\pi - \pi/m(\alpha, \beta) = \pi/2$. Esploriamo meglio questo fatto, cercando di capire se vettori ortogonali tra di loro permettono di semplificare il gruppo finito di riflessioni associato al sistema di radici in questione.

Definizione: *Un sistema di radici Φ si dice riducibile se si può scrivere come unione di due sistemi di radici Φ_1 e Φ_2 ortogonali tra di loro (in simboli scriviamo $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$). In caso contrario diciamo che Φ è irriducibile.*

Dal fatto che fissato lo spazio euclideo V ci possono essere solo un numero finito di vettori ortogonali a due a due si deduce ragionando per induzione che un sistema Φ è riducibile se e solo se esistono $r \geq 2$ sistemi di radici irriducibili ortogonali a due a due $\Phi_1, \ldots, \Phi_r \subseteq \Phi$ tali che $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$.
Questo tipo di decomposizione si riflette sul sistema semplice.

Proposizione 2.2.1: *Sia $\Phi \subset V$ un sistema di radici con sistema semplice Δ. Allora Φ è riducibile se e solo se esistono $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ con $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ tali che $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.*

Dimostrazione. Sia $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, con $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. A meno che $\Delta \subseteq \Phi_1$ o $\Delta \subseteq \Phi_2$, gli insiemi cercati sono ottenuti ponendo $\Delta_1 = \Phi_1 \cap \Delta$, e $\Delta_2 = \Phi_2 \cap \Delta$; però se ad esempio fosse $\Delta \subseteq \Phi_1$, avremmo $(\Delta, \Phi_2) = 0$, che significa $(\mathrm{span}(\Phi), \Phi_2) = 0$, che essendo $\Phi_2 \subseteq \mathrm{span}(\Phi)$ implicherebbe $\Phi_2 = \{0\}$.
Viceversa sia $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ con $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Chiamiamo per $i = 1, 2$ $\Phi_i = \Phi \cap \mathrm{span}(\Delta_i)$. Avremo banalmente che $0 = (\Phi_1, \Phi_2)$, mentre per mostrare che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ occorre far vedere la seguente relazione

$$\Phi \cap (\mathrm{span}(\Delta_1) \oplus \mathrm{span}(\Delta_2)) = \Phi \cap (\mathrm{span}(\Phi_1) \cup \mathrm{span}(\Phi_2)),$$

cioè che ciascuna radice di Φ appartiene o a $\mathrm{span}(\Delta_1)$ o a $\mathrm{span}(\Delta_2)$. Per affermare ciò ci basta mostrare che ogni elemento di W stabilizza $\mathrm{span}(\Delta_1)$ e $\mathrm{span}(\Delta_2)$, perché se avessimo una radice $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 \in \Phi$

con $\alpha_1 \in \Delta_1$ e $\alpha_2 \in \Delta_2$, esistendo $w \in W$ con $w\gamma = w\alpha_1 + w\alpha_2 \in \Delta$, dovrebbe accadere che $w\gamma \in \Delta_1$ o $w\gamma \in \Delta_2$, cosa impossibile se $w\alpha_1 \in \Delta_1$ e $w\alpha_2 \in \Delta_2$. Per 1.3.1, mostrare che W stabilizza $\mathrm{span}(\Delta_1)$ e $\mathrm{span}(\Delta_2)$ significa mostrare che ogni riflessione semplice stabilizza tali sottospazi. Sia $\alpha \in \Delta$, se $\alpha \in \Delta_1$, allora siccome per $\beta \in \Delta_2$ vale $(\alpha, \beta) = 0$, capiterà che $s_\alpha(\beta) = \beta$, per cui s_α stabilizza $\mathrm{span}(\Delta_2)$. Per l'unicità del complemento ortogonale, s_α stabilizzerà anche $\mathrm{span}(\Delta_2)^\perp$, ma poiché s_α stabilizza anche $\mathrm{span}(\Phi)$, risulta che s_α stabilizza $\mathrm{span}(\Delta_2)^\perp \cap \mathrm{span}(\Phi) = \mathrm{span}(\Delta_1)$. Si procede in modo simile qualora $\alpha \in \Delta_2$. □

Per induzione si vede che la scrittura di Φ come unione di sistemi irriducibili $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_r$ si traduce in $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r$, dove ciascun Δ_i è un sistema semplice per Φ_i. Notiamo che se S è l'insieme delle riflessioni semplici, a ciascun Δ_i corrisponde un sottoinsieme $S_i \subseteq S$, ed il fatto che i vari Δ_i sono ortogonali a due a due si traduce nel fatto che, nel grafo di Coxeter Γ, a due a due gli insiemi S_i non sono connessi da alcuni lati. In altre parole $S_1, \ldots, S_r$ sono le componenti connesse di Γ.

Proposizione 2.2.2: *Sia W un gruppo finito di riflessioni con grafo di Coxeter Γ avente componenti connesse $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$, e siano per ogni $j \in \{1, \ldots, r\}$, S_j l'insieme di riflessioni corrispondente a Γ_j, e $W_j = W_{S_j}$. Allora $W \cong W_1 \times \cdots \times W_r$.*

Dimostrazione. Per $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ distinti si ha che prese qualunque due riflessioni in S_i ed S_j, queste commutano, quindi gli elementi di W_i commutano con gli elementi di W_j. Poiché poi $S_1 \cup \cdots \cup S_r$ è l'insieme S di tutte le riflessioni semplici, si ha che $W = \langle S \rangle = \langle S_1 \cup \cdots \cup S_r \rangle \subseteq \langle W_1 \cup \cdots \cup W_r \rangle$, ma poiché i sottogruppi parabolici W_j commutano elemento per elemento, abbiamo che $\langle W_1 \cup \cdots \cup W_r \rangle$ è il prodotto di Frobenius $W_1 \cdots W_r$, che come appena visto è uguale a W. Per mostrare che per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ si ha $W_i \cap W_1 \cdots \widehat{W_i} \cdots W_r = \{1\}$, possiamo usare la proposizione 1.10.1, notando infatti che, siccome i gruppi W_j commutano tra di loro elemento per elemento, l'intersezione:

$$W_i \cap W_1 \cdots \widehat{W_i} \cdots W_r = W_i \cap \langle W_1 \cup \cdots W_{i-1} \cup W_{i+1} \cup \cdots \cup W_r \rangle$$

è il sottogruppo parabolico generato da $S_i \cap (S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1} \cup S_{i+1} \cup \cdots \cup S_r)$, ma quest'ultimo è l'insieme vuoto, quindi per 1.10.1 si ha che l'intersezione in questione è il sottogruppo banale di W. □

2.3 La matrice di Schläfli

Abbiamo già notato nel corollario 1.6.2 che se $\alpha, \beta \in \Delta$, allora l'angolo tra α e β è dato da $\pi - \pi/m(\alpha, \beta)$, dunque enumerando $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di entrata in riga i e colonna j

$$a_{ij} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m(\alpha_i, \alpha_j)}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{m(\alpha_i, \alpha_j)}\right)$$

rappresenta il prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$ di $\mathrm{span}(\Delta)$, nella base Δ di tale spazio. In particolare A è semidefinita positiva.

A livello più alto, a partire da un grafo di Coxeter possiamo costruire una matrice, e sappiamo che per i grafi ci Coxeter provenienti da un gruppo finito di riflessioni questa sarà definita positiva, diamo quindi la seguente definizione.

Definizione: *Dato il grafo di Coxeter Γ, enumerato l'insieme dei vertici, e indicando con m_{ij} l'etichetta del lato che congiunge i con j, definiamo la matrice di Schläfli associata a Γ come la matrice $S(\Gamma)$ di entrata in riga i e colonna j il numero reale*

$$-2\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right).$$

Il motivo del 2 è puramente pratico: siccome compare spesso l'etichetta 3, il valore $1/2 = \cos(\pi/3)$ sarebbe un entrata molto comune di questa matrice se non mettessimo il 2. Questa innocua modifica rende i conti leggermente più agevoli. Per fissare della terminologia, diremo che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è di tipo positivo qualora sia definita positiva oppure semidefinita positiva. Diremo poi che il grafo Γ è di tipo positivo per intendere che la matrice di Schläfli $S(\Gamma)$ è di tipo positivo. Come osservato prima, qualora Γ provenga da un gruppo finito di riflessioni, la matrice di Schläfli è definita positiva; la strategia che adotteremo per classificare tali gruppi sarà capire quali grafi di Coxeter connessi hanno matrice di Schläfli definita positiva, e poi costruiremo opportuni sistemi di radici e sistemi semplici che combacino con tali grafi trovati.
Gli unici grafi che si rivelano essere definiti positivi sono i seguenti:

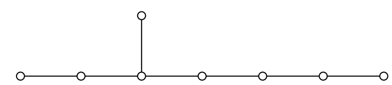
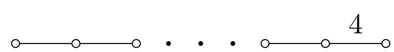
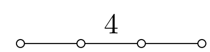
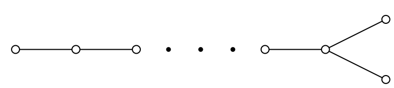
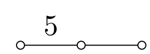
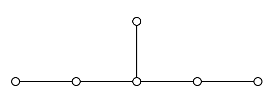
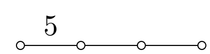
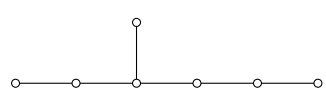
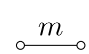
Nome	Grafo di Coxeter	Nome	Grafo di Coxeter
A_n		E_8	
BC_n		F_4	
D_n		H_3	
E_6		H_4	
E_7		$\mathsf{I}_2(m)$	

Tabella 2.1: Per ciascuno di questi grafi il pedice indica il numero di vertici. Per evitare di ripetere gli stessi grafi, BC_n è definito solo per $n \geq 2$, D_n è definito solo per $n \geq 4$, mentre A_n è definito per ogni $n \geq 1$

Per vedere che questi sono definiti positivi bisogna verificare che la matrice di Schläfli di ciascuno di essi è definita positiva. Qui possiamo usare un criterio noto dall'algebra lineare, secondo cui una matrice è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori di nord-ovest sono positivi. Per alcuni casi questo si calcola facilmente, ad esempio per $\mathsf{I}_2(m)$ si trova che la matrice di Schläfli associata è:

$$\begin{bmatrix} -2\cos(\pi) & -2\cos(\pi/m) \\ -2\cos(\pi/m) & -2\cos(\pi) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -\cos(\pi/m) \\ -\cos(\pi/m) & 1 \end{bmatrix},$$

che come minori di nord-ovest ha 2 e:

$$4\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) > 0.$$

Calcolare i minori di tutti questi grafi non è un impresa monumentale: si può elaborare un modo per calcolare ciascun minore una sola volta sfruttando il fatto che alcuni grafi sono contenuti in altri. Ad esempio, una volta calcolata la matrice di Schläfli di $\mathsf{I}_2(m)$, la matrice di Schläfli associata a H_3 conterrà quella di $\mathsf{I}_2(5)$, in particolare sarà:

$$S(\mathsf{H}_3) = \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\pi/5) & 0 \\ -2\cos(\pi/5) & 2 & -2\cos(\pi/3) \\ 0 & -2\cos(\pi/3) & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\pi/5) & 0 \\ -2\cos(\pi/5) & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e quindi non dobbiamo calcolare i primi due minori di nord-ovest, ma ci basta calcolare solo il determinante dell'intera matrice, cosa che si può fare espandendo con Lagrange sull'ultima colonna:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\pi/5) & 0 \\ -2\cos(\pi/5) & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 2(-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\pi/5) \\ -2\cos(\pi/5) & 2 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & -2\cos(\pi/5) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che applicando quanto calcolato prima diventa:

$$2 \cdot 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2 = 8\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{4}\right) = 8\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\right) > 0$$

In generale, supponendo di aver calcolato i minori di nord-ovest di una matrice di Schläfli A di un grafo Γ, possiamo calcolare il determinante della matrice di Schläfli del grafo ottenuto aggiungendo a Γ un vertice ed un lato etichettato con $m \in \{3, 4, 5\}$ espandendo sull'ultima colonna:

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{n,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & c_m \\ 0 & \cdots & 0 & c_m & 2 \end{bmatrix} = (-1)^{n+n} 2 \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} + (-1)^{n+n-1} c_m \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_m \end{bmatrix},$$

dove abbiamo chiamato $c_m = -2\cos(\pi/m)$. A questo punto espandendo sull'ultima riga abbiamo:

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & c_m \end{bmatrix} = (-1)^{n+n} c_m \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix},$$

Quindi:

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{n,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & c_m \\ 0 & \cdots & 0 & c_m & 2 \end{bmatrix} = (-1)^{n+n} 2 \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} - (c_m)^2 \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

Quindi, se uno procedesse a calcolare i minori di una matrice di Schläfli di un grafo Gamma immaginando di costruire quest'ultimo partendo da un punto e aggiungendo lato per lato e vertice per vertice, avremmo trovato una formula ricorsiva che permette di trovare il k-esimo minore in funzione dei due precedenti:

$$d_k = 2d_{k-1} - (c_{m_k})^2 d_{k-2}. \tag{2.1}$$

dove per d_i si intende il determinante della sottomatrice della matrice di Schläfli A ottenuta selezionando le prime k colonne e prime k righe, e m_i è l'etichetta che si aggiunge al passo i. Vediamo come si farebbe per calcolare i vari minori di nord-ovest. Si parte da A_n: immaginando di costruire il grafo A_n nel modo appena descritto, dovendo usare solo 3 come etichetta, la sequenza $d_1, \dots, d_n$ è determinata da:

$$\begin{cases} d_k = 2d_{k-1} - [-2(1/2)]^2 d_{k-2} = 2d_{k-1} - d_{k-2} \quad \text{per} \quad k \geq 3, \\ d_1 = 2, \\ d_2 = \det S(\mathsf{I}_2(3)) = 3, \end{cases}$$

ed usando l'induzione forte si vede che $d_k = k+1$. Da qui possiamo calcolare BC_n, basta partire dal grafo A_{n-1} ed aggiungere un vertice etichettato con 4, per cui:

$$\det(S(\mathsf{BC}_n)) = 2n - \left(-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (n-1) = 2n - 2(n-1) = 2.$$

Giunti qui si può calcolare la matrice di Schläfli di F_4, basta pensare di costruire F_4 a partire da BC_3, in particolare:

$$\det(S(\mathsf{F}_4)) = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

e così via per gli altri grafi. Alla fine di questo processo si arriva alla seguente tabella:

Γ	A_n	BC_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	H_3	H_4	$\mathsf{I}_2(m)$
$\det(S(\Gamma))$	$n+1$	2	4	3	2	1	1	$3-\sqrt{5}$	$(7-3\sqrt{5})/2$	$4\sin^2(\pi/m)$

Il motivo per cui compare $\sqrt{5}$ nei determinanti delle matrici di Schläfli di H_3 e H_4 è dovuto al fatto che in tali grafi compare l'etichetta 5, che in questi determinanti si traduce in un coseno di $\pi/5$, che vale $(1+\sqrt{5})/4$.

2.4 Sottografi

Quello che ci permetterà di classificare i grafi di Coxeter definiti positivi sarà quanto dimostreremo in questa sezione: usando dei risultati di algebra lineare riusciremo a far vedere che ogni "sottografo" proprio di un grafo di Coxeter di tipo positivo è definito positivo. Dato un grafo di Coxeter Γ, chiamiamo sottografo di Γ ottenuto da quest'ultimo omettendo alcuni vertici o diminuendo le etichette di Γ (o entrambi).

Figura 2.2: Esempio di grafo Γ e di un suo sottografo Γ'

Prima di esplorare i risultati di algebra lineare che ci servono abbiamo bisogno di richiamare il concetto di matrice indecomponibile. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice indecomponibile se non esiste una partizione $\{I, J\}$ dell'insieme degli indici (in particolare con $I, J \neq \varnothing$) tali che $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \in I$ e $j \in J$.
Le matrici indecomponibili possono essere pensate come quelle matrici che non possono essere scritte in forma diagonale a blocchi riordinando l'insieme degli indici.
Ricordiamo che per le matrici simmetriche semidefinite positive ogni autovalore è reale e non negativo.

Proposizione 2.4.1: *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica, semidefinita positiva, indecomponibile, e tale che per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distinti si abbia $a_{ij} \leq 0$. Allora valgono:*

(i) *$N = \{x \in \mathbb{R}^n : \, {}^{\mathrm{t}}xAx = 0\}$ coincide con il nucleo di A e ha dimensione al più 1, e contiene un vettore di entrate tutte non nulle.*

(ii) *L'autovalore minimo di A ha molteplicità geometrica 1, e ha un autovettore con entrate tutte strettamente positive.*

Dimostrazione.

(i)

Ovviamente $\mathrm{Ker}(A) \subseteq N$, quindi ci basta provare l'altra inclusione. Sia dunque $x \in N$. Poiché A è simmetrica, esiste $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale per cui $D := {}^{\mathrm{t}}PAP$ è diagonale, diciamo $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ (dove ciascun d_i è non negativo, poiché A è semidefinita positiva). Quindi se $y = {}^{\mathrm{t}}Px$, allora:

$$0 = {}^{\mathrm{t}}xAx = {}^{\mathrm{t}}xPD\,{}^{\mathrm{t}}Px = {}^{\mathrm{t}}(Px)D\,{}^{\mathrm{t}}Px = {}^{\mathrm{t}}yDy = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2,$$

quindi deduciamo che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ deve capitare $d_i = 0$ oppure $y_i = 0$. Nota però come questo ci dice che $Dy = 0$, ossia $D\,{}^{\mathrm{t}}Px = 0$, da cui si ottiene moltiplicando per P che $PD\,{}^{\mathrm{t}}Px = 0$, ossia $Ax = 0$.
Supponiamo ora che $N = \mathrm{Ker}(A)$ abbia dimensione maggiore di 0. Esisterà quindi un $x \in N$ non nullo. Definiamo $z \in \mathbb{R}^n$ come il vettore colonna avente per entrata i-esima $|x_i|$. Usando il fatto che A è semidefinita positiva otteniamo che $0 \leq {}^{\mathrm{t}}zAz$, ma se scriviamo che cos'è questo termine possiamo fare uso dell'ipotesi che $a_{ij} \leq 0$ per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distinti:

$$0 \leq {}^{\mathrm{t}}zAz = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} |x_i||x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

infatti, per l'ultimo passaggio, nota che se $i = j$ si ha $a_{ij}|x_i||x_j| = a_{ij}x_i x_j$, mentre se $i \neq j$ si ha $a_{ij}|x_i||x_j| \leq a_{ij}x_i x_j$ appunto perché $a_{ij} \leq 0$. Ma allora abbiamo dimostrato che $0 \leq {}^{\mathrm{t}}zAz \leq {}^{\mathrm{t}}xAx = 0$, da cui otteniamo $z \in N$. Ora mostriamo che questo vettore non ha entrate nulle. Chiamiamo J l'insieme $\{j \in \{1, \dots, n\} : \, z_j \neq 0\}$ (che non è vuoto perché z è non nullo, che a sua volta viene dal fatto che $x \neq 0$), e definiamo $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ come il complementare di J.
Poiché $N = \mathrm{Ker}(A)$, avremo $Az = 0$, e quindi se I non fosse vuoto, potremmo dire che per ogni $i \in I$ vale:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \sum_{j \in J} a_{ij} z_j = 0,$$

che siccome $z_j > 0$ e $a_{ij} \leq 0$, vorrebbe dire che $a_{ij} = 0$, che non può essere dal momento che A è indecomponibile. Quindi $I = \varnothing$, che coincide con il dire che $z_j > 0$ per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.
L'argomento presentato mostra in realtà che ogni vettore non nullo di N ha entrate tutte non nulle, ma allora N non può avere dimensione superiore ad 1, perché in tal caso, con un'opportuna combinazione lineare di due vettori distinti in N saremmo in grado di ottenere un vettore in N con un'entrata nulla.

(ii)

Chiamiamo $\lambda \geq 0$ il minimo degli autovalori di A. Notiamo che la matrice $A - \lambda I_n$ soddisfa le ipotesi della proposizione, e in più è singolare; quindi applicando il punto (i) otteniamo che $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ ha dimensione 1, che vuol dire che λ è un autovalore di A avente molteplicità geometrica 1, ed esiste $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ con entrate tutte positive. □

Corollario 2.4.2: *Se Γ è un grafo di Coxeter di tipo positivo, allora ogni sottografo proprio Γ' di Γ è definito positivo.*

Dimostrazione. Sia Γ' sottografo proprio di Γ, e A, A' le corrispettive matrici di Schläfli. Se n è il numero di vertici di Γ, avremo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica semidefinita positiva, e $A' \in \mathbb{R}^{k\times k}$, sempre simmetrica e semidefinita positiva, per un opportuno $1 \leq k \leq n$. Le etichette dei vertici di Γ', m'_{ij}, soddisfano $m'_{ij} \leq m_{ij}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dunque essendo $[0, \pi] \ni x \longmapsto -2\cos(x) \in \mathbb{R}$ crescente, risulta che $a'_{ij} = -2\cos(\pi/m'_{ij}) \geq -2\cos(\pi/m_{ij}) = a_{ij}$.
Per assurdo supponiamo che A' non sia definita positiva, ossia che esiste $x \in \mathbb{R}^k \smallsetminus \{0\}$ con ${}^{\mathrm{t}}xA'x \leq 0$. Se chiamiamo $z = (|x_1|, \dots, |x_k|, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ avremo:

$$0 \leq {}^{\mathrm{t}}zAz = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}|x_i||x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{k} a'_{ij}|x_i||x_j| \leq \sum_{i,j=1}^{k} a'_{ij} x_i x_j = {}^{\mathrm{t}}xA'x \leq 0 \tag{2.2}$$

quindi deduciamo ${}^{\mathrm{t}}xA'x = 0 = {}^{\mathrm{t}}zAz$. Quest'ultima uguaglianza ci dice che $z \in \{y \in \mathbb{R}^n : \ {}^{\mathrm{t}}yAy = 0\}$, e quindi essendo z non nullo deduciamo che tale sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ha dimensione 1 per la proposizione 2.4.1, ma sappiamo anche che a questo punto z deve avere tutte le entrate positive, cosa che forza $k = n$, assieme a rendere x privo di entrate nulle. Tuttavia riprendendo (2.2) abbiamo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}|x_i||x_j| = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}|x_i||x_j|,$$

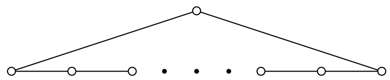
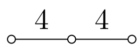
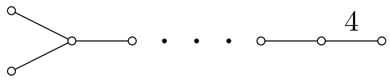
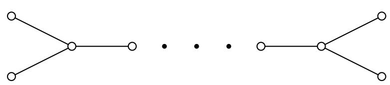
che è un altro modo per scrivere:

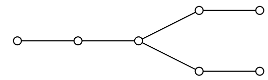
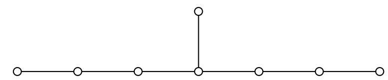
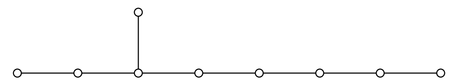
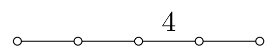
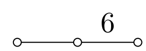
$$\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{(a_{ij} - a'_{ij})}_{\leq 0} \underbrace{|x_i||x_j|}_{>0} = 0,$$

e quindi deve capitare $a_{ij} - a'_{ij} = 0$ per ogni i, j, ossia $A = A'$, ma questo è assurdo in quanto Γ' è un sottografo proprio di Γ. □

2.5 La classificazione dei grafi di Coxeter definiti positivi

La strategia che adotteremo sarà quella di usare il corollario visto nell'ultima sezione per escludere, passo per passo, che grafi può e non può contenere il generico grafo di Coxeter di tipo positivo. Prima però abbiamo bisogno di fornire alcuni esempi di grafi non definiti positivi che ci serviranno nella dimostrazione del teorema.

Nome	Grafo di Coxeter
$\widetilde{\mathsf{A}}_n$	
$\widetilde{\mathsf{BC}}_2$	
$\widetilde{\mathsf{B}}_n$	
$\widetilde{\mathsf{C}}_n$	
$\widetilde{\mathsf{D}}_n$	

Nome	Grafo di Coxeter
$\widetilde{\mathsf{E}}_6$	
$\widetilde{\mathsf{E}}_7$	
$\widetilde{\mathsf{E}}_8$	
$\widetilde{\mathsf{F}}_4$	
$\widetilde{\mathsf{G}}_2$	

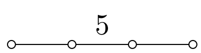
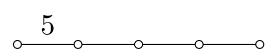
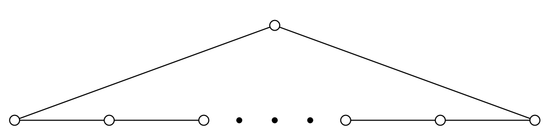
$\widetilde{\mathsf{H}}_3$	
$\widetilde{\mathsf{H}}_4$	

Tabella 2.2: In ciascuno di questi grafi se n è il numero di vertici, il pedice è $n-1$. I grafi $\widetilde{\mathsf{H}}_3$ e $\widetilde{\mathsf{H}}_4$ non sono di tipo positivo, contrariamente agli altri.

Notando che questi grafi sono ottenuti da quelli della tabella 2.1 aggiungendo un vertice, per verificare che non sono definiti positivi basta calcolare il determinante della matrice di Schläfli, volendo tramite la formula (2.1).

Teorema 2.5.1: *I grafi raffigurati nella tabella* (2.1) *sono gli unici grafi di Coxeter connessi di tipo positivo.*

Dimostrazione. Sia per assurdo Γ un grafo di Coxeter connesso di tipo positivo che non è rappresentato in una delle figure. Ragioniamo in base a $n := |\Gamma|$ e $m := \max\{m_{ij} : \ i, j \in \{1, \dots, n\}\}$.
Notiamo in primo luogo che $n \neq 1$ e $n \neq 2$, poiché in tali casi avremmo rispettivamente $\Gamma = \mathsf{A}_1$ e $\Gamma = \mathsf{I}_2(m)$. Perciò dobbiamo avere $n \geq 3$. Per il corollario precedente Γ non può contenere alcuno grafo di tipo $\widetilde{\mathsf{A}}_k$ con $1 \leq k \leq n$, ossia Γ non contiene sottografi della forma:

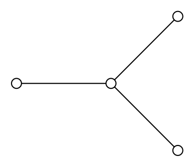


o in altre parole Γ non contiene circuiti. Supponiamo ora $m = 3$. Poiché $\Gamma \neq \mathsf{A}_n$ deduciamo i seguenti fatti:

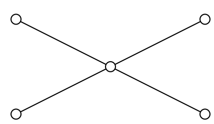
- n deve essere maggiore di 3: dal momento che Γ non contiene alcun circuito, l'ipotesi $n = 3$ (assieme ad $m = 3$) implicherebbe $\Gamma = \mathsf{A}_3$.

- Γ contiene una biforcazione.

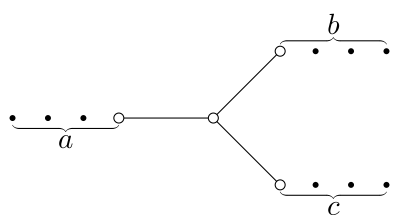
Non possiamo avere $n = 4$ in quanto questo non lascerebbe molte possibilità a Γ ora che sappiamo che contiene una biforcazione:

Γ =  = D_4

Dunque $n > 4$. Ma Γ non può contenere alcun $\widetilde{\mathsf{D}}_k$ con $4 < k \leq n$, per cui Γ ha una sola biforcazione. Inoltre Γ non contiene $\widetilde{\mathsf{D}}_4$:



quindi nell'unica biforcazione ci devono essere collegati 3 rami. Visivamente Γ deve essere fatto nel seguente modo:

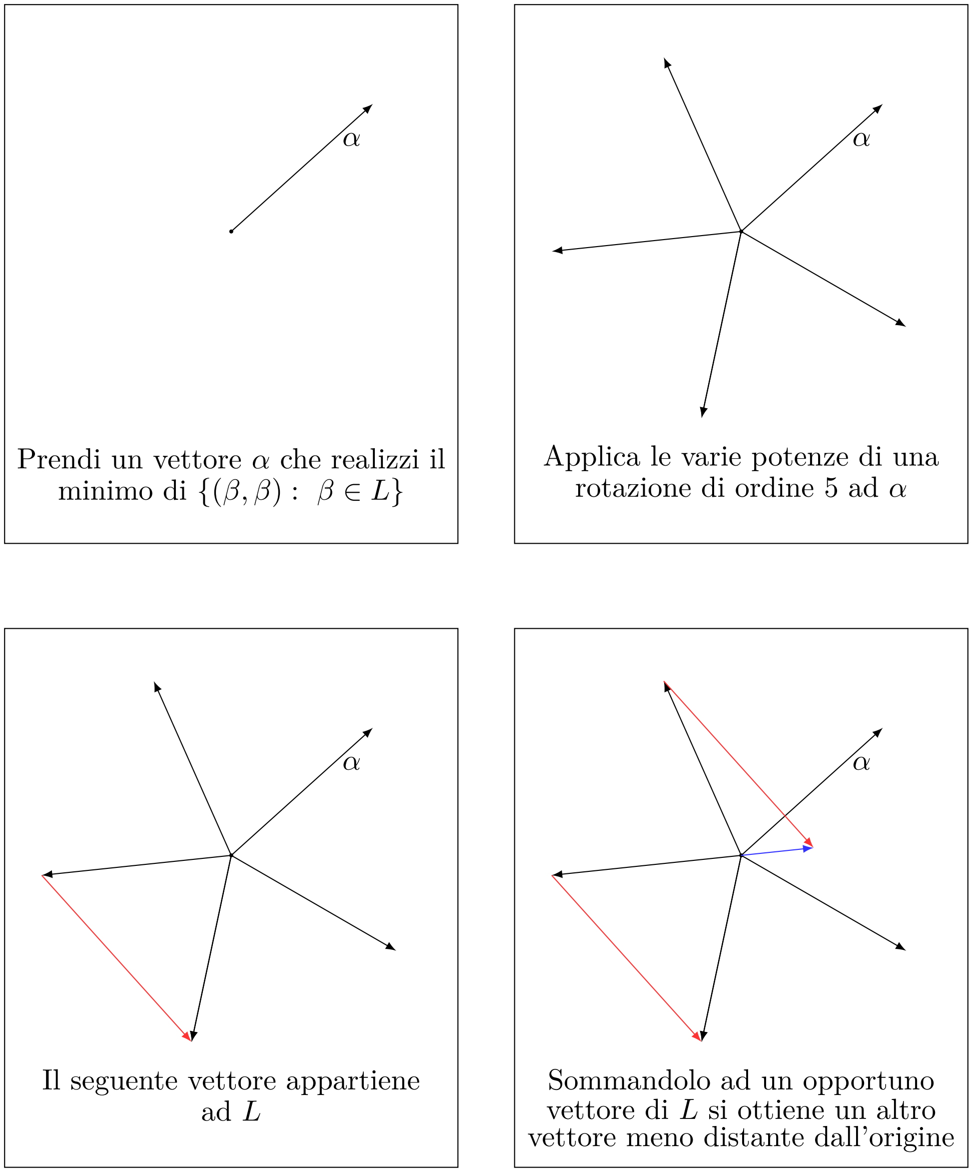


dove indichiamo con a, b, c il numero di nodi in ciascuno dei rami, come indicato in figura. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $a \leq b \leq c$. Siccome Γ non contiene $\widetilde{\mathsf{E}}_6$, deve accadere che $a = 1$, e poiché $\widetilde{\mathsf{E}}_7$ non è un sottografo di Γ, dovrà essere $b \leq 2$, e poiché $\Gamma \neq \mathsf{D}_n$, b non può essere 1, dunque necessariamente $b = 2$, ma poi $\widetilde{\mathsf{E}}_8$ non è contenuto in Γ, da cui $c \leq 4$, ma questo forza $\Gamma \in \{\mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8\}$.
Dunque $m > 3$. Però Γ non contiene alcun $\widetilde{\mathsf{C}}_k$, quindi ci deve essere un solo lato con etichetta maggiore o uguale di 4, e poiché Γ non contiene alcun $\widetilde{\mathsf{B}}_k$, Γ non può contenere biforcazioni. Supponiamo $m = 4$. Poiché Γ è diverso da BC_n, i lati agli estremi del grafo Γ non possono essere etichettati, però Γ non contiene $\widetilde{\mathsf{F}}_4$, cosa che forza $n = 4$, che a sua volta implicherebbe $\Gamma = \mathsf{F}_4$. Perciò $m \geq 5$, però Γ non contiene $\widetilde{\mathsf{H}}_3$, quindi il lato etichettato col numero 5 deve essere all'estremo del grafo, ma poi Γ non contiene $\widetilde{\mathsf{H}}_4$, per cui $n \leq 4$. Questo però ci porta a dire che $\Gamma \in \{\mathsf{H}_3, \mathsf{H}_4\}$. $\square$

2.6 Cristallografia

Un sottogruppo $G \leq \mathrm{GL}(V)$ si dice cristallografico se fissa un reticolo $L \subset V$ (cioè lo $\mathbb{Z}$-span di una base di V), ossia $gL \subseteq L$ per ogni $g \in G$ (poi da $g^{-1}L \subseteq L$ si avrà $L \subseteq gL$, che dimostra l'uguaglianza).
A questo stadio possiamo chiederci quali tra i gruppi finiti di riflessioni possano fissare un qualche reticolo, e dopo un po' di meditazione potremmo già escludere alcuni gruppi.

Osservazione 2.6.1: Un qualsiasi gruppo finito di riflessioni W che contenga rotazioni di ordine 5 non può essere cristallografico. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, ossia che W fissi un qualche reticolo $L \subset V$.



Prendi un vettore α che realizzi il minimo di $\{(\beta, \beta) : \beta \in L\}$

Applica le varie potenze di una rotazione di ordine 5 ad α

Il seguente vettore appartiene ad L

Sommandolo ad un opportuno vettore di L si ottiene un altro vettore meno distante dall'origine

Dimostrare quali gruppi finiti di riflessioni possono essere cristallografico non è cosi complicato, quello che è cruciale notare è che, se G è cristallografico, per qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V la matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ che rappresenta $g \in G$ in tale base ha come traccia un numero intero, perché la traccia è costante sulle classi di similitudini, e nella base particolare il cui $\mathbb{Z}$-span è fissato da G, la matrice che rappresenta quest'applicazione lineare ha entrate intere.

Proposizione 2.6.1: *Se $W \leq \mathrm{O}(V)$ è un gruppo finito di riflessioni cristallografico, allora per ogni α, β distinti in Δ si ha $m(\alpha, \beta) \in \{2, 3, 4, 6\}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $s_\alpha s_\beta$ agisce sul piano $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ come una rotazione di angolo $\theta := 2\pi/m(\alpha, \beta)$ (in un'opportuna base di $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$) e agisce come l'identità su $(\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta)^\perp$, per cui scrivendo la matrice rappresentante $s_\alpha s_\beta$ in opportuna base di V, questa avrà traccia $n - 2 + 2\cos(\theta)$ (dove $n = \dim(V)$), e poiché questo deve essere un intero, si deve avere che:

$$\theta = \frac{2\pi}{m(\alpha,\beta)} \in \left\{ \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6} \right\},$$

da cui appunto si ha $m(\alpha,\beta) \in \{2,3,4,6\}$. $\square$

2.7 Sistemi di radici cristallografici e gruppi di Weyl

Per determinare l'ordine dei gruppi finiti di riflessioni (realisticamente quelli più complicati come E_6, E_7, E_8, e F_4) avremo bisogno di esplorare più a fondo i sistemi di radici detti cristallografici.

Definizione: *Dato lo spazio euclideo V, un sistema di radici $\Phi \subseteq V$ si dice cristallografico se:*

(R3) *Per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$ vale $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Il gruppo di riflessioni $W(\Phi)$ associato a Φ in tal caso viene detto gruppo di Weyl del sistema di radici Φ.

In realtà nella teoria dei sistemi di radici si aggiunge anche la condizione che $\operatorname{span}(\Phi)$ sia tutto lo spazio euclideo V, ma per quanto riguarda il gruppo finito di riflessioni W questa ulteriore richiesta non fa alcuna differenza: nel momento che W è un gruppo finito di riflessioni con sistema di radici Φ, esso lascia fisso $\operatorname{span}(\Phi)$ per l'assioma (R2), e quindi ci si può restringere a pensare a W come agente su tale sottospazio.

Osservazione 2.7.1: Se Φ è un sistema di radici con sistema semplice Δ, allora Φ è cristallografico se e solo se per ogni $\alpha, \beta \in \Delta$ vale $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.
Prima si nota che per $\delta \in \Phi$ e $\gamma \in \Delta$ si ha $\langle \delta, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$. Questo perché, presa $w \in W$ che manda $\alpha \in \Delta$ in $\delta \in \Phi$, deve accadere che $\langle \delta, \gamma \rangle = \langle w(\alpha), \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$, perché scrivendo $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Delta$, si ha $w(\alpha) = (s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{r-1}})(\alpha - \langle \alpha, \alpha_r \rangle \alpha_r)$, e iterando si nota che $w(\alpha)$ è nello $\mathbb{Z}$-span di Δ.
A questo punto presi $\alpha, \beta \in \Phi$, esisterà $w \in W$ con $w(\beta) = \gamma \in \Delta$, per cui $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = \langle w(\alpha), \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$.

Nota che qualora L sia un reticolo contenente Φ, vale che $W(\Phi)$ fissa L precisamente quando Φ è cristallografico.
La proprietà (R3), detta anche condizione d'integralità, limita fortemente gli angoli possibili tra radici di uno stesso sistema di radici. Se $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra $\alpha, \beta \in \Phi$, valendo $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\theta)$, avremo:

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos(\theta),$$

da cui si deduce anche $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos(\theta)^2$. Quest'ultimo numero è compreso tra 0 ed 1, da cui si riesce a concludere che $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ hanno stesso segno. Da qui si vede che le uniche possibili situazioni sono quelle riportate in tabella:

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	Angolo θ	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	$\pi/2$	indeterminabile
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Tabella 2.3: Possibili valori di $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \beta, \alpha \rangle$, dell'angolo θ, e dei rapporti tra norme quadre $\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$ quando $\alpha, \beta \in \Phi$ sono linearmente indipendenti e con $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$

Da questa tabella si può dedurre il seguente lemma

Lemma 2.7.1: *Siano $\alpha, \beta \in \Phi$ radici linearmente indipendenti. Allora:*

- *Se $(\alpha, \beta) > 0$, allora $\alpha - \beta \in \Phi$.*
- *Se $(\alpha, \beta) < 0$, allora $\alpha + \beta \in \Phi$.*

Dimostrazione. Notiamo in primo luogo che basta dimostrare la prima asserzione, in quanto la seconda asserzione può essere dimostrata scambiando β con $-\beta$ e applicando l'altra.
Supponiamo quindi $(\alpha, \beta) > 0$. Avremo quindi che $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, ma la tabella 2.3 ci dice che almeno uno tra $\langle \alpha, \beta \rangle$ e $\langle \beta, \alpha \rangle$ è 1. Se $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, allora $s_\beta \alpha = \alpha - \beta \in \Phi$, e similmente se $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, allora $s_\alpha \beta = \beta - \alpha \in \Phi$, da cui poi si ottiene $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$. □

Ricordo che fissato un sistema semplice Δ di un sistema di radici Φ, la seguente relazione definisce un ordine parziale su span(Φ):

$$\alpha \prec \beta \iff \mathrm{ht}(\alpha) < \mathrm{ht}(\beta),$$

dove l'altezza ht di un elemento è la somma dei coefficienti che compaiono nella sua scrittura in combinazione lineare degli elementi di Δ.

Lemma 2.7.2: *Sia Φ un sistema di radici cristallografico irriducibile e $\Delta \subseteq \Phi$ un sistema semplice. Allora relativo all'ordine parziale $\prec$ definito da Δ, esiste un'unica radice massimale β (in particolare ogni $\alpha \in \Phi$ diverso da β soddisfa $\mathrm{ht}(\alpha) < \mathrm{ht}(\beta)$), e se $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, allora per ogni $\alpha \in \Delta$ vale $k_\alpha > 0$.*

Dimostrazione. Sia $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ un elemento massimale di Φ nell'ordine $\prec$ definito da Δ. Per la massimalità avremo che $\beta \succ 0$. Se $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta : \ k_\alpha > 0\}$ e $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta : \ k_\alpha = 0\}$, allora $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ è un'unione disgiunta. Supponiamo per assurdo che $\Delta_2 \neq \varnothing$. Prendendo un qualsiasi$\gamma \in \Delta_2$ si ha che $(\gamma, \beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha (\gamma, \alpha) \leq 0$, ma dal momento che Φ è irriducibile non possiamo avere $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$, per cui esisteranno $\alpha \in \Delta_2$ e $\alpha' \in \Delta_1$ con $(\alpha, \alpha') < 0$, però scrivendo β come combinazione lineare di Δ otteniamo che $(\alpha, \beta) < 0$, cosa che per il lemma 2.7.1 ci dice $\alpha + \beta \in \Phi$, ma ciò contraddice la massimalità di β.
Quindi deve capitare che $\Delta_2 = \varnothing$, che è un altro modo che tutti i coefficienti k_α nella scrittura $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ sono positivi. Osserva che a prescindere dal ragionamento per assurdo appena visto, la massimalità di β ci permette di dire che non si può trovare un $\alpha \in \Delta$ con $(\alpha, \beta) < 0$, e quindi anche solo dalla massimalità di β si deduce che per ogni $\alpha \in \Delta$ deve valere $(\alpha, \beta) \geq 0$.
Sia ora β' massimale. Per quanto appena visto deve valere $(\alpha, \beta') \geq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$, però essendo β' nello span di Δ non può accadere che $(\beta', \alpha) = 0$ per tutti gli $\alpha \in \Delta$. Esiste quindi $\alpha \in \Delta$ con $(\beta', \alpha) > 0$. Da questo segue però che $(\beta, \beta') > 0$ (basta scrivere $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$), e quindi a meno che $\beta = \beta'$ ($\beta = -\beta'$ è escluso perché un vettore positivo non può essere uguale ad uno negativo), avremo che $\beta - \beta'$ è una radice (sempre il lemma 2.7.1), ma in tal caso $\beta \prec \beta'$ oppure $\beta' \prec \beta$, che comunque sia contraddice la massimalità di β o β'. Segue quindi $\beta = \beta'$. □

Osservazione 2.7.2: Sia $\alpha \in \Delta$, e β la radice alta. Allora deve valere $(\alpha, \beta) \geq 0$, perché altrimenti $s_\alpha \beta$ sarebbe una radice più alta di β. Questo può essere visualizzato dicendo che la radice alta appartiene alla camera fondamentale $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$.

Prima di vedere il prossimo lemma abbiamo bisogno di recuperare un piccolo fatto generale sulle riflessioni.

Osservazione 2.7.3: Sia U un sottospazio di V lasciato fisso dalla riflessione s_α. Allora $\alpha \in U$ oppure $U \subseteq H_\alpha$. Infatti se non fosse vero che $U \subseteq H_\alpha$, allora esisterà $\beta \in U$ con $\beta \notin H_\alpha$, ma allora $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \in U$, da cui $\langle \beta, \alpha \rangle \alpha = s_\alpha(\beta) + \beta \in U$, per cui $\alpha \in U$.

Lemma 2.7.3: *Sia Φ un sistema di radici cristallografico irriducibile. Allora W agisce su* $\operatorname{span}(\Phi)$ *in modo irriducibile, vale a dire che gli unici sottospazi di* $\operatorname{span}(\Phi)$ *che sono lasciati fissi da W sono* $\{0\}$ *e tutto* $\operatorname{span}(\Phi)$. *In particolare per ogni $\alpha \in \Phi$, l'orbita $W\alpha$ genera tutto* $\operatorname{span}(\Phi)$.

Dimostrazione. Naturalmente W lascia fisso $\operatorname{span}(W\alpha) \subseteq \operatorname{span}(\Phi)$, dunque se W agisce in modo irriducibile su $\operatorname{span}(\Phi)$ lo spazio generato da $W \cdot \alpha$ deve essere uguale allo spazio generato da Φ.
Sia U un sottospazio di $\operatorname{span}(\Phi)$ lasciato fisso da W. Il complemento ortogonale (in $\operatorname{span}(\Phi)$) di U, $U^\perp \cap \operatorname{span}(\Phi)$ è anch'esso lasciato fisso da W, perché scelto $w \in W$:

$$\begin{aligned} wU^\perp &= \{w\lambda \in V : \ \forall \mu \in U, \ (\lambda, \mu) = 0\} \\ &= \{w\lambda \in V : \ \forall \mu \in U, \ (w\lambda, w\mu) = 0\} \\ &= \{w\lambda \in V : \ \forall \gamma \in U, \ (w\lambda, \gamma) = 0\} \subseteq U^\perp, \end{aligned}$$

da cui $wU^\perp = U^\perp$ e appunto $w(U^\perp \cap \operatorname{span}(\Phi)) = wU^\perp \cap w\operatorname{span}(\Phi) = U^\perp \cap \operatorname{span}(\Phi)$. A questo punto presa una riflessione s_α (con $\alpha \in \Phi$), poiché $s_\alpha(U) = U$, deve capitare $\alpha \in U$, oppure $U \subseteq H_\alpha$. Nel caso accada $\alpha \notin U$, dovendo valere $U \subseteq H_\alpha$, cioè $\mathbb{R}\alpha = H_\alpha^\perp \subseteq U^\perp$, dedurremmo $\alpha \in U^\perp \cap \operatorname{span}(\Phi)$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni radice appartiene ad U, oppure ad $U^\perp \cap \operatorname{span}(\Phi)$, cosa che regala una partizione di Φ in sistemi di radici ortogonali, e per l'irriducibilità di Φ deve accadere che uno di questi spazi è nullo. Questo ci dice che $U = \{0\}$ o $U = \operatorname{span}(\Phi)$. □

Lemma 2.7.4: *Sia Φ un sistema di radici cristallografico irriducibile. Allora al più due lunghezze di radici compaiono in Φ (i.e. $|\{(\alpha, \alpha) : \ \alpha \in \Phi\}| \leq 2$), e tutte le radici con stessa lunghezza sono nella medesima W-orbita.*

Dimostrazione. Prese due qualsiasi radici distinte $\alpha, \beta \in \Phi$, abbiamo che non tutti gli elementi di $W\alpha = \{w\alpha : \ w \in W\}$ possono essere ortogonali a β, perché il lemma precedente ci dice che tale insieme spanna tutto il sottospazio generato da Φ. Al fine di capire se $\|\alpha\|$ e $\|\beta\|$ sono differenti possiamo rimpiazzare α con $w\alpha$ per un'opportuna trasformazione $w \in W$ (che sarà ortogonale). Dunque possiamo supporre $(\alpha, \beta) \neq 0$. In tal caso sappiamo dalla tabella 2.3 che $\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2 \in \{1, 1/2, 2, 1/3, 3\}$, ma da qui si può vedere che qualora ci fossero 3 lunghezze tra cui scegliere, sarebbe sempre possibile ottenere il rapporto 3/2. Siano infatti $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ non ortogonali tra di loro con lunghezze distinte: se per caso fosse $\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2 = 1/2$, allora $\|\gamma\|^2/\|\alpha\|^2$ (che non è 1) non potrebbe essere né 1/2 né 2, perché nel primo caso si verrebbe a scoprire che $\|\gamma\|^2 = \|\beta\|^2$, mentre nel secondo si verrebbe a scoprire che $\|\gamma\|^2/\|\alpha\|^2 = 8$.
Ora supponiamo che $\alpha, \beta \in \Phi$ abbiano la stessa norma. Come prima possiamo supporre $(\alpha, \beta) \neq 0$. Sempre per la tabella 2.3 siamo costretti a dire che $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. A meno di rimpiazzare β con $s_\beta \beta = -\beta \in W \cdot \beta$, possiamo supporre che $\langle \beta, \alpha \rangle = 1 (= \langle \alpha, \beta \rangle)$. Quindi:

$$(s_\alpha s_\beta s_\alpha)(\beta) = (s_\alpha s_\beta)(\beta - \alpha) = s_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = s_\alpha(-\alpha) = \alpha. \qquad \square$$

Quando Φ è irriducibile e con due lunghezze di radici, parliamo di radici lunghe e radici corte (se c'è una sola lunghezza per convenzione la chiamiamo lunga).

Lemma 2.7.5: *Sia Φ un sistema cristallografico irriducibile. Allora la radice massimale $\widetilde{\alpha}$ del lemma* (2.7.2) *è lunga.*

Dimostrazione. Se c'è una sola lunghezza non abbiamo nulla da dimostrare. Supponiamo che nel sistema Φ compaiano due lunghezze.
Fissiamo $\alpha \in \Phi$. Dobbiamo mostrare che $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) \geq (\alpha, \alpha)$. A meno di scambiare α con l'elemento della sua orbita che giace nella camera fondamentale $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ (che tanto ha la stessa lunghezza), possiamo supporre $\alpha \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$. Avendo $\widetilde{\alpha} - \alpha \succ 0$, per ogni $\gamma \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ vale che $(\gamma, \widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0$ (basta esplicitare $\widetilde{\alpha} - \alpha$ come combinazione lineare non negativa di vettori di Δ), ma essendo $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$, si deduce che $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0$ (cioè $(\alpha, \widetilde{\alpha}) \geq (\widetilde{\alpha}, \alpha)$) e che $(\alpha, \widetilde{\alpha} - \alpha) \geq 0$ (ossia $(\alpha, \widetilde{\alpha}) \geq (\alpha, \alpha)$), per cui $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) \geq (\alpha, \alpha)$. □

2.8 Costruzione dei sistemi di radici

Tutto il lavoro fatto fino a questo punto è parzialmente utile finché non mostriamo che i grafi di Coxeter visti in 2.1 provengono effettivamente da dei gruppi finiti di riflessioni realmente esistenti in un qualche spazio euclideo. Per fare ciò bisogna esibire per ciascuno dei grafi un sistema di radici ed un suo sistema semplice, verificando poi che gli angoli relativi dei vettori di quest'ultimo corrispondano al grafo in questione, come specificato da 1.6.2.
In questa sezione mostreremo prima l'esistenza dei sistemi di radici (che si riveleranno essere cristallografici) corrispondenti ad A_n, BC_n, D_n, E_6, E_7, E_8, ed F_4, calcolando nella seguente l'ordine dei relativi gruppi di riflessioni, e dopo aver esibito un sistema di radici per $\mathsf{I}_2(m)$, ci occuperemo alla fine del capitolo dei gruppi non cristallografici di tipo H_3 e H_4, calcolando poi l'ordine di $W(\mathsf{H}_3)$ e $W(\mathsf{H}_4)$.
Come dettato da 2.7.4, in un sistema di radici cristallografico si osservano al massimo due norme, quindi adottiamo la seguente strategia generale: Costruiremo ciascun sistema di radici Φ come un sottoinsieme di un reticolo $L \subseteq \mathbb{R}^n$, dove specifichiamo le lunghezze al quadrato dei vettori, che qui indichiamo con r ed R. Siccome L ha la topologia discreta e $\Phi := \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \ (\alpha, \alpha) \in \{r, R\}\}$ è compatto, la loro intersezione sarà finita. Verificheremo (R1) manualmente. Per verificare (R2) sarà sufficiente osservare che per ogni $\alpha \in \Phi$ si ha $s_\alpha(\Phi) \subseteq L$, perché poi essendo $s_\alpha \in \mathsf{O}(\mathbb{R}^n)$ dovrà essere $s_\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$. Mostrare che $s_\alpha(\Phi) \subseteq L$ significa mostrare che per ogni $\beta \in \Phi$ vale $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in L$, ma poiché $\alpha, \beta \in L$, ciò vuol dire $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$, dunque è sufficiente mostrare la condizione di integralità. Per verificare che i sistemi di radici costruiti sono effettivamente associati al grafo giusto calcoleremo gli indici $m(\alpha_i, \alpha_j)$ a mano. In particolare, se $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ è un sistema semplice, calcoleremo prima per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ l'angolo $\theta_{i,j}$ mediante:

$$\cos(\theta_{i,j}) = \frac{1}{2} \frac{\|\alpha_j\|}{\|\alpha_i\|} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle,$$

e da questo valore dedurremo $m(\alpha_i, \alpha_j)$.
Per quanto visto qui non ci dovrebbe essere alcun indizio sui valori di r ed R nel costruire il sistema di radici, per questo rimandiamo alla classificazione dei sistemi di radici cristallografici, affrontata ad esempio in [Hum72] pagg. 55-63.
I sistemi semplici sono presi da [Kan01], mentre le radici alte che riportiamo sono prese da [Hum72] (pag. 66) (l'espressione della radice alta in termini delle radici semplici è sempre la stessa per la transitività dell'azione di W sui sistemi semplici).
Come al solito $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^n$ indica la base canonica di $\mathbb{R}^n$, ma si può usare una qualsiasi base ortonormale.

Sistema di radici per A_n

Sia $V = \{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n+1}\}^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e sia $L = \mathbb{Z}^{n+1} \cap V$. Si prenda $\Phi = \{\alpha \in L : \ (\alpha, \alpha) = 2\}$. È facile vedere che

$$\Phi = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) : \ 1 \le i < j \le n+1\},$$

e quindi che (R1) è soddisfatta. Al variare di $i \in \{1, \dots, n\}$ i vettori $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ sono indipendenti, ed ogni vettore di Φ è combinazione lineare intera di tali vettori, perché per $1 \le i < j \le n+1$ vale:

$$\epsilon_i - \epsilon_j = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \dots + (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j),$$

(per gli altri vettori di Φ basta riscalare la relazione sopra per -1). Quanto trovato mostra che l'insieme di vettori $\Delta := \{\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1} : \ 1 \le i \le n\}$ è un sistema semplice. Poi si calcola

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1} \in \mathbb{Z},$$

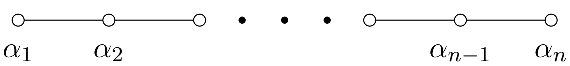
quindi sono verificate le condizioni (R2),(R3). Verifichiamo che il sistema semplice è quello cercato. Per $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha

$$\cos(\theta_{i,j}) = \frac{1}{2}\frac{\|\alpha_j\|}{\|\alpha_i\|}\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1/2 & \text{se } j \in \{i+1, i-1\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ossia:

$$m(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 3 & \text{se } j \in \{i+1, i-1\} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi abbiamo il seguente grafo di Coxeter



La radice alta è $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \epsilon_1 - \epsilon_n$.

Sistema di radici per BC_n

Si prenda $V = \mathbb{R}^n$, e $\Phi = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \ (\alpha, \alpha) \in \{1, 2\}\}$. Si vede senza troppa difficoltà che:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i : \ 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}$$

(dove i segni $\pm$ sono intesi come arbitrari), dove $\pm\epsilon_i$ sono le radici corte, mentre $\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j)$ sono quelle lunghe. Evidentemente (R1) è soddisfatta. I vettori $\epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \epsilon_n$ sono indipendenti, e tutte le radici $\alpha \in \Phi$ sono una loro combinazione lineare, infatti se $\alpha = \epsilon_i$ si ha:

$$\epsilon_i = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \dots + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) + \epsilon_n,$$

mentre per $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ con $j > i$ si ha:

$$\epsilon_i - \epsilon_j = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \dots + (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j).$$

(per le restanti radici si moltiplicano tali relazioni per -1), dunque

$$\Delta := \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_n\}$$

è un sistema semplice per Φ. Si calcola facilmente che

- Per $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ vale $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \delta_{i,j} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j+1}$.
- Per $j \in \{1, \dots, n-1\}$ vale $\langle\alpha_n, \alpha_j\rangle = \delta_{n,j} - \delta_{n,j+1}$.
- Per $j \in \{1, \dots, n-1\}$ vale $\langle\alpha_j, \alpha_n\rangle = 2(\delta_{n,j} - \delta_{n,j+1})$.

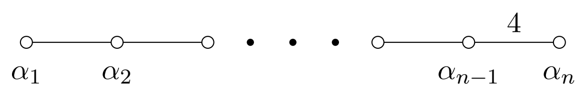
Riconosciamo il sistema di radici A_{n-1} in $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, quindi per determinare com'è fatto il grafo di Coxeter ci basta determinare $m(\alpha_j, \alpha_n)$ al variare di $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Ma tale calcolo si riduce a:

$$\cos(\theta_{j,n}) = \frac{1}{2}\frac{\|\alpha_j\|}{\|\alpha_n\|}\langle\alpha_n, \alpha_j\rangle = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{1}(\delta_{n,j} - \delta_{n,j+1}) = \begin{cases} -1/\sqrt{2} & \text{se } j = n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui

$$m(\alpha_j, \alpha_n) = \begin{cases} 4 & \text{se } j = n-1 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi si arriva al seguente grafo di Coxeter.



La radice alta è $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_n = \epsilon_1 + \epsilon_n$.
Il sistema di radici appena costruito è tipicamente noto sotto il nome B_n, ma non è il solo a dare origine al gruppo iperottaedrale. In generale dato un sistema di radici Φ è possibile considerare un sistema duale $\Phi^\vee$, dato da:

$$\Phi^\vee = \left\{ \alpha^\vee := \frac{2}{(\alpha, \alpha)}\alpha : \ \alpha \in \Phi \right\}.$$

Si verifica che questo è a sua volta un sistema di radici, e che nel caso Φ sia cristallografico, anche $\Phi^\vee$ lo è. Siccome il sistema duale è ottenuto riscalando i vettori di Φ, si ha automaticamente che $W(\Phi) = W(\Phi^\vee)$. Il duale di B_n è facilmente calcolabile:

$$\Phi = \{\pm 2\epsilon_i : \ 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Questo sistema di radici è noto sotto il nome C_n. Il motivo per cui citiamo quest'altro sistema di radici è perché come sistema cristallografico esso è "diverso" da B_n, esiste una nozione di isomorfismo tra sistemi di radici cristallografici, e come per i gruppi finiti di riflessione si riesce a classificare tutti i sistemi di radici cristallografici e irriducibili a meno di isomorfismo, e si scopre appunto che B_n e C_n sono differenti. Incredibilmente tra i vari sistemi di radici cristallografici e irriducibili, B_n e C_n sono gli unici ad essere differenti ma con lo stesso gruppo di Weyl.

Sistema di radici per D_n

Sia $V = \mathbb{R}^n$, e $\Phi = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \ (\alpha, \alpha) = 2\}$. Si vede facilmente che:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}$$

(dove di nuovo i segni $\pm$ sono da intendere come arbitrari). Scegliendo l'ordine lessicografico della base canonica $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ si ottiene come sistema positivo:

$$\Pi = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Verifichiamo che il relativo sistema semplice è:

$$\Delta = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \alpha_{n-2} = \epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}.$$

Come per quanto visto per B_n, si ha per $1 \leq i < j \leq n$:

$$\epsilon_i - \epsilon_j = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \cdots + (\epsilon_{j-1} + \epsilon_j),$$

mentre per $\epsilon_i + \epsilon_j$ si nota che $\epsilon_i + \epsilon_j = \epsilon_i - \epsilon_j + 2\epsilon_j$, e che:

$$2\epsilon_j = (\epsilon_{n-1} + \epsilon_n) + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) + 2(\epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}) + \cdots + 2(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}).$$

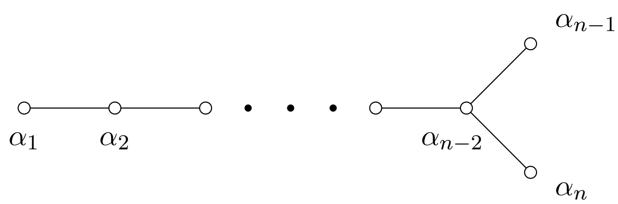
Per la verifica di (R3) osserviamo già che $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ sono quantità già calcolate per $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, per i restanti termini si ha che:

$$\langle \alpha_i, \alpha_n \rangle = \langle \alpha_n, \alpha_i \rangle = 2\frac{(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \epsilon_{n-1} + \epsilon_n)}{2} = \delta_{i,n-1} - \delta_{i+1,n-1} + \delta_{i,n} - \delta_{i+1,n} \in \mathbb{Z}$$

da cui si deduce poi che:

$$\cos(\theta_{i,n}) = \frac{1}{2}\frac{\|\alpha_n\|}{\|\alpha_i\|}\langle \alpha_i, \alpha_n \rangle = \begin{cases} -1/2 & \text{se } i = n-2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi si disegna il seguente grafo di Coxeter:



La radice alta è $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

Sistema di radici per E_8

Sia $V = \mathbb{R}^8$, e sia

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \sum_{i=1}^{8} c_i \epsilon_i + \frac{c}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_8) : \ c_1, \dots, c_8, c \in \mathbb{Z}, \ \sum_{i=1}^{8} c_i \in 2\mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{8} \left(c_i + \frac{c}{2} \right) \epsilon_i : \ c_1, \dots, c_8, c \in \mathbb{Z}, \ \sum_{i=1}^{8} c_i \in 2\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

e poniamo $\Phi = \{\alpha \in L : \ (\alpha, \alpha) = 2\}$. Determiniamo i vettori di questo insieme. Se $\alpha \in \Phi$, allora:

$$2 = (\alpha, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{8} \left(c_i + \frac{c}{2} \right) \epsilon_i, \sum_{j=1}^{8} \left(c_j + \frac{c}{2} \right) \epsilon_j \right) = \sum_{i=1}^{8} \left(c_i + \frac{c}{2} \right)^2,$$

che equivale a dire:

$$8 = \sum_{i=1}^{8} (2c_i + c)^2,$$

e da qui ci sono solo due possibilità:

- Esistono esattamente due indici $i, j \in \{1, \dots, 8\}$ distinti tali che $(2c_i + c/2), (2c_j + c/2) \in \{-2, 2\}$, ossia $(c_i + c), (c_j + c) \in \{-1, 1\}$, cosa che rende α della forma $\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j)$.

- Esiste $\{k_i\}_{i=1}^{8} \subseteq \{0, 1\}$ tale che per ogni $i \in \{1, \dots, 8\}$ valga $2c_i + c = (-1)^{k_i}$, per cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{k_i},$$

ma dal fatto che $c_1 + \cdots + c_8 \in 2\mathbb{Z}$, esplicitando c_i da $2c_i + c = (-1)^{k_i}$, deduciamo che:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} - 4c \in 2\mathbb{Z},$$

che equivale a dire:

$$\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} \in 4\mathbb{Z},$$

che in realtà significa dire che la somma dei $\{k_i\}_{i=1}^8$ è un numero pari.

Quindi arriviamo ad affermare che:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j :\ 1 \le i < j \le 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i :\ \{k_i\}_{i=1}^8 \subseteq \{0,1\},\ \text{con } \sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} \in 4\mathbb{Z} \right\}.$$

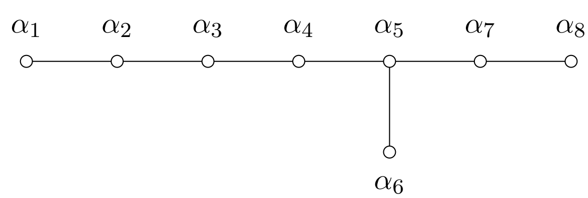
Questo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^8$ contenente 240 vettori, che evidentemente soddisfa (R1). Notiamo che Φ contiene il sistema di radici costruito per D_8, quindi nel costruire un sistema semplice per Φ si cerca di sfruttare questo fatto. Se vogliamo ottenere un sistema semplice però non possiamo partire da quello costruito per D_8, però siccome il grafo E_8 contiene anche D_7, possiamo partire da quello: definiamo quindi:

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$\epsilon_2 - \epsilon_3$	$\epsilon_3 - \epsilon_4$	$\epsilon_4 - \epsilon_5$	$\epsilon_5 - \epsilon_6$	$\epsilon_6 - \epsilon_7$	$\epsilon_6 + \epsilon_7$

Dobbiamo solo scegliere α_8 della forma:

$$\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4 \pm \epsilon_5 \pm \epsilon_6 \pm \epsilon_7 \pm \epsilon_8)$$

(dove i segni sono scelti in modo tale solo un numero pari di essi siano negativi) in modo tale da darci il grafo desiderato:



In altre parole dobbiamo prendere i segni in modo tale che α_8 sia ortogonale a tutte le altre radici semplici se non per α_7 per cui vogliamo $(\alpha_7, \alpha_8) = -1/2 = \cos(\pi - \pi/3)$.
In questi termini non è troppo arduo vedere che bisogna prendere solo segni negativi. I vettori di Φ che risultano essere scrivibili come combinazioni lineari a coefficienti interi non negativi di $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ è quindi:

$$\Pi = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j :\ 1 \le i < j \le 7\} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i :\ \{k_i\}_{i=1}^8 \subseteq \{0,1\},\ k_8 = 1, \sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} \in 4\mathbb{Z} \right\},$$

che è il sistema positivo associato all'ordine lessicografico della base $\{-\epsilon_8, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_7\}$.
Quindi Δ è il sistema semplice cercato. La radice alta è:

$$\widetilde{\alpha} = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8 = \epsilon_2 - \epsilon_8.$$

Sistema di radici per E_7

Considerando le otto radici semplici del sistema semplice appena costruito per E_8, sia $V = \operatorname{span}\{\alpha_i : \ 2 \leq i \leq 8\}$. Per 1.7.1, il sistema di radici che stiamo cercando è ottenibile intersecando V con il sistema di radici per E_8 precedentemente costruito.
Quello che si ottiene è:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 2 \leq i < j \leq 7\} \cup \{\pm(\epsilon_1 + \epsilon_8)\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i\right) : \ k_1 = k_8 = 0, \ \sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} \in 4\mathbb{Z}\right\}.$$

La radice alta è:

$$\widetilde{\alpha} = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = -\epsilon_1 - \epsilon_8$$

Sistema di radici per E_6

Anche qui partiamo dalle otto radici semplici del sistema E_8, e prendiamo V come lo span delle ultime 6 ossia $V = \operatorname{span}\{\alpha_i : \ 2 \leq i \leq 8\}$, ed intersechiamo il sistema di radici costruito per E_8 con tale spazio. Similmente al caso di E_7, scrivendo nelle coordinate di $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ si vede che il sistema cercato è:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 3 \leq i < j \leq 7\} \cup \left\{\pm\left(\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i}\epsilon_i\right) : \ k_1 = k_2 = k_8 = 0, \ \sum_{i=1}^{8}(-1)^{k_i} \in 4\mathbb{Z}\right\}$$

La radice alta è:

$$\widetilde{\alpha} = \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7 - \epsilon_8)$$

Sistema di radici per F_4

Sia $V = \mathbb{R}^4$, ed

$$L = \left\{\sum_{i=1}^{4} c_i\epsilon_i + \frac{c}{2}(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_4) : \ c_1, \ldots, c_4, c \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definiamo $\Phi = \{\alpha \in L : \ (\alpha, \alpha) \in \{1, 2\}\}$. Similmente a come abbiamo determinato il sistema di E_8 si mostra che:

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i : \ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\right\}$$

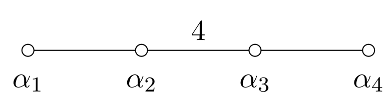
Notando che il sistema semplice del sistema di radici B_4 è contenuto in Φ, e che il grafo F_4 contiene BC_3, partiamo dal sistema semplice di B_3:

α_1	α_2	α_3
$\epsilon_2 - \epsilon_3$	$\epsilon_3 - \epsilon_4$	ϵ_4

α_4 sarà sicuramente della forma:

$$\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4),$$

e se volessimo ottenere il seguente grafo:



si vede senza troppa fatica che bisogna selezionare:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4).$$

In questo modo $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ è contenuto nel sistema positivo dato dall'ordine lessicografico della base canonica $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$:

$$\Pi = \{\epsilon_i : \ 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\epsilon_i \pm \epsilon_j : \ 1 \leq i \leq j\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4\right\}.$$

In questo sistema semplice la radice alta è

$$\widetilde{\alpha} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

Sistema di radici per $\mathsf{I}_2(m)$

Prima di costruire esplicitamente un sistema di radici che dia luogo al gruppo diedrale di ordine $2m$ abbiamo bisogno di un lemma che ci eviti di perderci in un mare di conti, per dimostrare questo lemma serve un piccolo risultato sulle trasformazioni ortogonali:

Lemma 2.8.1: *Sia V uno spazio euclideo, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ linearmente indipendenti, e $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ vettori con $(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i, \alpha_j)$ per $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Allora esiste una trasformazione ortogonale $\varphi : V \longrightarrow V$ soddisfacente $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$.*

Dimostrazione. Sia m la dimensione di V. Se $m = n$ non abbiamo nulla da dire, in quanto basta usare la proprietà fondamentale delle applicazioni lineari, ottenendo un endomorfismo $\varphi : V \longrightarrow V$ soddisfacente $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, che poi sarà una trasformazione ortogonale (preserva i prodotti scalari su una base). Anche se $m > n$ ci si può ricondurre a tale situazione, basta prendere una base ortonormale $\{\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m\}$ di $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}^\perp$ e $\{\beta_{n+1}, \ldots, \beta_m\}$ di $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}^\perp$: così facendo varrà $(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i, \alpha_j)$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. □

Lemma 2.8.2: *Sia Φ un sistema di radici di rango n consistente di vettori unitari. Se $\Psi = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset \Phi$ è un sistema di n radici linearmente indipendenti, e $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Phi$ è un sistema semplice per Φ tale che $(\beta_i, \beta_j) = (\alpha_i, \alpha_j)$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, allora Ψ è un sistema semplice.*

Dimostrazione. Per il lemma 2.8.1 esiste $\varphi : V \longrightarrow V$ ortogonale con $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Poiché Δ è un sistema semplice per Φ, segue che $\varphi(\Delta) = \Psi$ è un sistema semplice per $\Phi' = \varphi(\Phi)$. Siano W e W' i gruppi finiti di riflessioni generati da Φ e Φ' rispettivamente. È noto che questi sono generati dalle riflessioni semplici:

$$W = \langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \Delta\}\rangle \quad \text{e} \quad \langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \Psi\}\rangle,$$

a questo punto $\Psi \subseteq \Phi$ implica:

$$W' = \langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \Psi\}\rangle \subseteq \langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \Phi\}\rangle = W, \tag{2.3}$$

d'altra parte però:

$$W' = \langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \varphi(\Delta)\}\rangle = \langle\{s_{\varphi(\alpha)} : \ \alpha \in \Delta\}\rangle = \langle\{\varphi s_\alpha \varphi^{-1} : \ \alpha \in \Delta\}\rangle = \varphi\langle\{s_\alpha : \ \alpha \in \Delta\}\varphi^{-1} = \varphi W \varphi^{-1},$$

per cui W e W' hanno la stessa cardinalità, cosa che implica $W = W'$ vista la relazione (2.3). Ricordando che ogni elemento di Φ è immagine tramite un elemento del gruppo di riflessione di una radice semplice, concludiamo che:

$$\Phi' = W'\Psi = W\Psi \subseteq W\Phi = \Phi.$$

□

Come sistema di radici per il gruppo diedrale di ordine $2m$ è tipico prendere in $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\epsilon_1 + \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\epsilon_2 : \ 0 \le k \le 2m-1 \right\},$$

dove come al solito $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

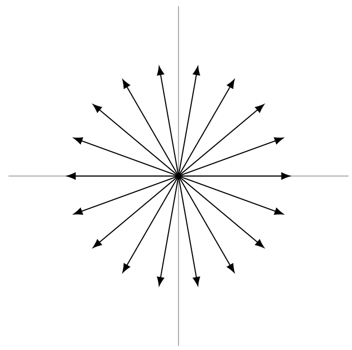


Figura 2.3: L'insieme Φ per $m = 9$

Che (R1) sia soddisfatta è chiaro. Per vedere che (R2) è soddisfatta basta verificarlo per $\alpha = \epsilon_1$ (che è immediato): per gli altri vettori basta notare che:

$$\begin{bmatrix} \cos(k\pi/m) \\ \sin(k\pi/m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\pi/m) & -\sin(k\pi/m) \\ \sin(k\pi/m) & \cos(k\pi/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

quindi se β è il vettore a sinistra e $\varphi \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ è l'applicazione matriciale associata a tale matrice di rotazione, da 1.2.1 si ha $s_\beta = s_{\varphi(\epsilon_1)} = \varphi s_{\epsilon_1} \varphi^{-1}$, per cui essendo $\varphi(\Phi) = \Phi$, arriviamo a dire che $s_\beta(\Phi) = (\varphi s_{\epsilon_1} \varphi^{-1})(\Phi) = \varphi(s_{\epsilon_1}(\Phi)) = \varphi(\Phi) = \Phi$.
Tra i sistemi semplici che si possono prendere c'è il seguente:

$$\Delta = \left\{ \alpha_1 = \epsilon_1, \ \alpha_2 = \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\epsilon_1 + \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\epsilon_2 \right\};$$

calcolando che $(\alpha_1, \alpha_2) = \cos(2\pi/m)$, si può applicare il lemma 2.8.2 per ottenere che questo è un sistema semplice per Φ.
Infine osserviamo che per m dispari l'azione di $\mathcal{D}_m$ su Φ è transitiva, perché in tal caso Φ non contiene coppie di vettori ortogonali: se

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos(k\pi/m) \\ \sin(k\pi/m) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \cos(\ell\pi/m) \\ \sin(\ell\pi/m) \end{bmatrix},$$

allora il prodotto scalare tra α e β è:

$$\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\ell\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{m}\right) = \cos\left(\frac{\pi(k-\ell)}{m}\right),$$

che è uguale a 0 se e solo se $(\ell - k)/m \in (1/2) + 2\mathbb{Z}$, che per come sono presi $\ell, k \in \{0, \ldots, 2m-1\}$ è impossibile. Non essendoci coppie di vettori ortogonali, non esiste riflessione s_β (con $\beta \in \Phi$) che fissi $\alpha \in \Phi$, qualsiasi $\alpha \in \Phi$ sia. Per 1.9.2 questo comporta che lo stabilizzatore di ogni radice è banale, che a sua volta ci dice che l'orbita di ogni radice è tutto Φ, perché $|\Phi| = |\mathcal{D}_m| = 2m$ (ricordo che in generale, se un gruppo G agisce sull'insieme X, per ogni elemento $x \in X$ vale $|G| = |G \cdot x||G_x|$, dove $G \cdot x$ è l'orbita di x e G_x è il suo stabilizzatore).

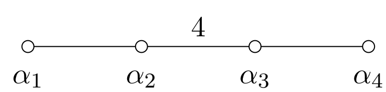
2.9 Calcolo degli ordini

Nei casi dove si ha una costruzione naturale dei gruppi finiti di riflessioni non c'è dubbio sull'ordine, infatti sappiamo già che:

Gruppo	Struttura	ordine
A_n	$\mathcal{S}_{n+1}$	$(n+1)!$
BC_n	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathcal{S}_n$	$2^n n!$
D_n	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \rtimes \mathcal{S}_n$	$2^{n-1} n!$
$\mathsf{I}_2(m)$	$\mathcal{D}_m$	$2m$

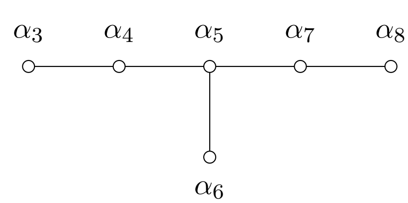
Quello che possiamo calcolare con i sistemi di radici trovati sono gli ordini di F_4, E_6, E_7, ed E_8.
La strategia è quella di usare l'azione dei gruppi di Weyl sui loro sistemi di radici, sfruttando quanto studiato sugli stabilizzatori di certi vettori. È noto dalla teoria dei gruppi che qualora un gruppo finito G agisce sull'insieme X, allora per ogni $x \in X$ vale $|G| = |G \cdot x||G_x|$, dove $G \cdot x$ è l'orbita di x e G_x è lo stabilizzatore. Nel nostro caso il gruppo di riflessioni W agisce sul sistema di radici cristallografico Φ: prenderemo come elemento x la radice alta $\widetilde{\alpha} \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$, il cui stabilizzatore, grazie al punto (i) di 1.9.2, sappiamo essere generato da tutte le riflessioni semplici che fissano $\widetilde{\alpha}$ (ossia tutte le riflessioni relative a radici semplici ortogonali a $\widetilde{\alpha}$), mentre il lemma 2.7.4 ci dice in particolare quante radici ci sono nella W-orbita della radice alta $\widetilde{\alpha}$ (il numero di radici lunghe).

Ordine di $W(\mathsf{F}_4)$ Ci sono 24 radici lunghe. La radice alta nel sistema semplice presentato nella costruzione di F_4 è $\widetilde{\alpha} = \epsilon_1 + \epsilon_2$, che è ortogonale a tutte le altre radici semplici se non per $\alpha_1 = \epsilon_2 - \epsilon_3$. Quindi lo stabilizzatore di $\widetilde{\alpha}$ è generato da tutte le riflessioni semplici lungo $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, che è un gruppo finito di riflessioni di tipo BC_3:

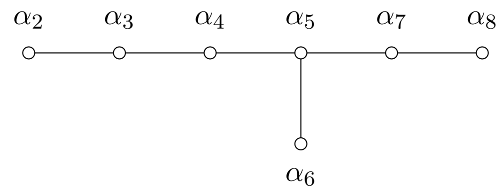


Avendo questo ordine 48, deduciamo che $|W(\mathsf{F}_4)| = 24 \cdot 48 = 2^7 \cdot 3^2 = 1152$.

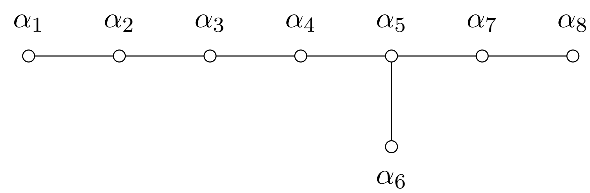
Ordine di $W(\mathsf{E}_6)$ Qui tutte le 72 radici risultano essere lunghe, dunque l'orbita della radice alta avrà 72 elementi. Nella costruzione seguita la radice alta $\widetilde{\alpha}$ è ortogonale a tutte le radici semplici tranne α_6, per cui lo stabilizzatore di $\widetilde{\alpha}$ è un gruppo finito di riflessioni di tipo A_5, che ha ordine $6! = 720$. Quindi $|W(\mathsf{E}_6)| = 6! \cdot 72 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51840$.



Ordine di $W(\mathsf{E}_7)$ Anche qui le 126 radici sono tutte lunghe, cosa rende l'orbita della radice alta un insieme di 126 elementi. Nella costruzione seguita la radice alta $\widetilde{\alpha}$ è ortogonale a tutte le radici semplici diverse da α_8, per cui lo stabilizzatore di $\widetilde{\alpha}$ è un gruppo finito di riflessioni di tipo D_6, che ha ordine $2^5 \cdot 6! = 23040$. Quindi $|W(\mathsf{E}_7)| = 2^5 \cdot 6! \cdot 126 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2903040$.



Ordine di $W(\mathsf{E}_8)$ Avendo tutte le radici la stessa lunghezza, risulta che tutte le 240 radici appartengono all'orbita di $\widetilde{\alpha}$. Nella costruzione seguita, la radice alta $\widetilde{\alpha}$ è ortogonale a tutte le radici se non per α_1, per cui il suo stabilizzatore è un gruppo finito di riflessioni di tipo E_7. Quindi $|W(\mathsf{E}_8)| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 240 = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 696729600$.



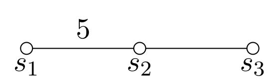
2.10 Gruppi di tipo H_3 e H_4

Ora studiamo i gruppi più "problematici" emersi nella classificazione: H_3 e H_4. Questi due gruppi si rivelano essere rispettivamente il gruppo di simmetrie dell'icosaedro (o del dodecaedro, che è il suo duale) e il gruppo di simmetrie di un politopo in $\mathbb{R}^4$ di 120 facce (che sono dodecaedri), o dualmente il gruppo di simmetrie di un politopo in $\mathbb{R}^4$ di 600 facce a forma di tetraedro. Quello che faremo sarà costruire a mano dei sistemi di radici che generino i gruppi desiderati. Dai corrispettivi grafi di Coxeter vediamo che sarà sufficiente costruire un sistema di radici per H_4, quello di H_3 si troverà dentro quello di H_4 specificando il sistema semplice come dettato dal suo grafo di Coxeter. Tuttavia ci servirà sapere l'ordine del gruppo di tipo H_3.

Osservazione 2.10.1: Ricordiamo che se W è un gruppo finito di riflessioni, allora vale:

$$1 = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} \frac{|W|}{|W_I|},$$

dove S è l'insieme delle riflessioni semplici (supponendo fissato un sistema semplice Δ), e dove W_I è il sottogruppo di W generato da I. Possiamo applicare tutto questo al calcolo dell'ordine di H_3:



Dalla struttura di H_3 infatti si riesce a capire l'ordine di W_I al variare di $I \subseteq S = \{s_1, s_2, s_3\}$, in particolare:

- Se $I = \varnothing$, si ha banalmente che $|W_I| = 1$,
- Se $|I| = 1$, si ha che W_I è un gruppo di riflessione di rango 1, da cui $|W_I| = 2$.
- Se $I = \{s_1, s_2\}$, riconosciamo in W_I il grafo di $\mathsf{I}_2(5)$, per cui $|W_I| = |\mathcal{D}_5| = 10$.
- Se $I = \{s_1, s_3\}$, abbiamo un gruppo finito di riflessioni riducibile di rango 2, per cui $|W_I| = 4$.
- Se $I = \{s_2, s_3\}$, riconosciamo il grafo di W_I come quello di $\mathsf{I}_2(3)$, per cui $|W_I| = |\mathcal{D}_3| = 6$.

- Se $I = \{s_1, s_2, s_3\}$ non abbiamo nulla da dire e $W_I = W(\mathsf{H}_3)$, ma tale termine nella sommatoria si cancella.

Quindi la formula ci porta a:

$$\begin{aligned} 1 &= |W(\mathsf{H}_3)| \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{|W(\mathsf{H}_3)|} \right) \\ &= |W(\mathsf{H}_3)| \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{|W(\mathsf{H}_3)|} \right), \end{aligned}$$

che significa $2 = |W(\mathsf{H}_3)|/60$, per cui $|W(\mathsf{H}_3)| = 120$.
Sfortunatamente non possiamo fare lo stesso per $W(\mathsf{H}_4)$, possiamo calcolare l'ordine dei gruppi parabolici, ma otteniamo una relazione in cui l'ordine di $W(\mathsf{H}_4)$ si cancella.

A tale scopo identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con il corpo dei quaternioni $\mathbb{H}$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow x = x_1 + \mathrm{i}x_2 + \mathrm{j}x_3 + \mathrm{k}x_4.$$

Ricordo che i quaternioni possono essere pensati come $\mathbb{H} = \mathbb{R}[\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}]$, dove $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ sono gli elementi provenienti dal gruppo omonimo $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}\}$, univocamente determinato dalle regole:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Mediante la proprietà distributiva e le regole appena presentate, si riesce a scrivere in modo esplicito la moltiplicazione tra quaternioni: il prodotto del generico quaternione $q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}$ per $q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}$ è dato da:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = a_1a_2 &- b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ &+ (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathrm{i} + \\ &+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)\mathrm{j} + \\ &+ (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)\mathrm{k} \end{aligned}$$

In questo modo $\mathbb{H}$ si rivela essere non un campo ma un corpo, essendo la moltiplicazione anticommutativa (i.e. $q_1q_2 = -q_2q_1$).
Come per i numeri complessi, si definisce il coniugato del quaternione $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ come $\overline{q} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}$, e definendo il modulo di un quaternione mediante:

$$\|a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

si verifica che l'applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{H} \longrightarrow [0, +\infty)$ è una norma sullo spazio vettoriale $\mathbb{H}$, e $q\overline{q} = \overline{q}q = \|q\|^2$, che poi porta alla familiare formula per l'inverso di q:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}.$$

Inoltre vale per $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ che $\|q_1q_2\| = \|q_1\|\|q_2\|$. I quaternioni si rivelano essere piuttosto comodi per i nostri scopi: in parte in vista del fatto che se $q_1 = a_1 + b_1\mathrm{i} + c_1\mathrm{j} + d_1\mathrm{k}$ e $q_2 = a_2 + b_2\mathrm{i} + c_2\mathrm{j} + d_2\mathrm{k}$, allora si calcola che:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = \frac{1}{2}(q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}).$$

In altre parole con l'identificazione di $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{H}$ il prodotto scalare si può emulare senza problemi. E con questo possiamo calcolare le riflessioni s_α. Infatti se $\alpha \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ è di norma 1, allora per ogni $\beta \in \mathbb{H}$ vale:

$$s_\alpha\beta = \beta - 2\frac{1}{2}(\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha})\alpha = \beta - (\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha})\alpha = \beta - \alpha\overline{\beta}\alpha - \beta\overline{\alpha}\alpha = -\alpha\overline{\beta}\alpha. \tag{2.4}$$

Il motivo principale per cui ci spostiamo a considerare i quaternioni è dato dal seguente risultato:

Lemma 2.10.1: *Sia $G \subseteq \mathbb{H}^\times$ un sottogruppo finito di ordine pari del gruppo moltiplicativo dei quaternioni. Allora vedendo G come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$, esso è un sistema di radici.*

Dimostrazione. In primo luogo notiamo che ciascun elemento di $q \in G$ deve essere di norma 1, perché avendo ordine finito accadrà per qualche $r \geq 1$ che $q^r = 1$, da cui $\|q^r\| = \|q\|^r = 1$ forza $\|q\| = 1$.
Essendo poi G chiuso per inversi, dovrà anche essere chiuso per coniugio, perché se $q \in G$, allora $\overline{q} = q^{-1}\|q\| = q^{-1}$. Per il teorema di Cauchy, esisterà un elemento $q = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ di ordine 2, ma siccome:

$$q^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab\mathrm{i} + 2ac\mathrm{j} + 2ad\mathrm{k},$$

se questo è uguale ad 1 deve essere che $a = \pm 1$ e $b = c = d = 0$ ($a = 1$ lo escludiamo in quanto sarebbe l'identità). Quindi si deduce che $-G = G$, da cui (R1). Infine per (R2) basta usare la formula (2.4). $\square$

Per costruire il sistema di radici H_4 abbiamo bisogno di tirare in ballo l'angolo $\pi/5$, come suggerito dal relativo grafo di Coxeter. Chiamiamo quindi:

$$a := \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad \text{e} \qquad b := \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Si verificano facilmente le seguenti identità:

$$2a = 2b + 1, \qquad 4ab = 1, \qquad 4a^2 = 2a + 1, \qquad 4b^2 = -2b + 1$$

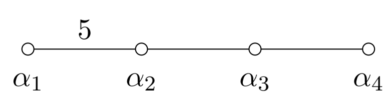
Sia ora Φ l'insieme dei quaternioni (unitari) ottenuti da:

$$1, \qquad \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}), \qquad a + \frac{1}{2}\mathrm{i} + b\mathrm{j}$$

scambiando mediante permutazioni pari di coordinate e da scambi di segno arbitrari. Si può verificare che Φ è un sottogruppo di $\mathbb{H}^\times$ di ordine 120, e quindi in particolare è un sistema di radici. Sia W il corrispettivo gruppo di riflessioni. Senza troppa difficoltà si vede che Φ non si può scrivere come unione di due insiemi ortogonali a due a due. Siccome questo sistema di radici irriducibile è diverso da tutti gli altri visti fino ad ora (banalmente non abbiamo visto un sistema irriducibile di 120 vettori in $\mathbb{R}^4$). Il sistema semplice che prendiamo è costituito dai seguenti vettori:

$$\alpha_1 = a - \frac{1}{2}\mathrm{i} + b\mathrm{j} \qquad \alpha_2 = -a + \frac{1}{2}\mathrm{i} + b\mathrm{j} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2} + b\mathrm{i} - a\mathrm{j} \qquad \alpha_4 = -\frac{1}{2} - a\mathrm{i} + b\mathrm{k}$$

Con un po' di pazienza si verifica che questi vettori sono disposti nel modo dettato dal grafo di H_4:



$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ è un sistema semplice per il lemma 2.8.2: le radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono linearmente indipendenti e i relativi prodotti scalari combaciano con quelli che avrebbe un qualsiasi sistema semplice per Φ.
Per calcolare l'ordine del gruppo notiamo preliminarmente che l'azione di W su Φ è transitiva. Questo perché tutte le radici sono nell'orbita di una radice semplice, e ciascuna radice semplice è nell'orbita di una qualsiasi altra. Questo si vede esaminando le radici adiacenti nel grafo di Coxeter: usando il fatto che l'azione di $\mathcal{D}_m$ nel suo sistema di radici è transitiva qualora m è dispari, osserviamo che α_1 è nell'orbita di α_2, che è nell'orbita di α_3, che a sua volta è nell'orbita di α_4.
Il sottogruppo parabolico generato da $I = \{s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_3}\}$ si vede dal grafo di H_4 essere di tipo H_3, e osservando che $\Delta_I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, si ha che $\mathrm{span}(\Delta_I)$ è il complemento ortogonale di $\mathrm{k} \in \mathbb{H}$, cosa che ci permette di affermare che Φ_I è costituito da tutte le radici di Φ che sono ortogonali al quaternione k (che appartiene a Φ). Quindi lo stabilizzatore di k è un gruppo finito di riflessioni di tipo H_3, per cui: $|W| = 120 \cdot 120 = 14400$.

Bibliografia

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation theory*. Springer, 1972.

[Hum89] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. 1ª ed. Cambridge University Press, 1989.

[Kan01] Richard Kane. *Reflection Groups and Invariant Theory*. Canadian Mathematical Society, 2001.

[BB10] Alexandre V. Borovik e Anna Borovik. *Mirrors and Reflections, The Geometry of Finite Reflection Groups*. 1ª ed. Springer, 2010.