

Indice

1	Teorema del punto fisso	2
1.1	Il teorema del punto fisso di Kleene	2
1.1.1	Slide 102	2
1.2	Il secondo teorema del punto fisso	3

Capitolo 1

Teorema del punto fisso

1.1 Il teorema del punto fisso di Kleene

I seguenti sono commenti alle slide.

1.1.1 Slide 102

La parte più a destra dell'uguale è la definizione della mia funzione g .

Se prendiamo per f la funzione successore ho per forza che nel mio ordinamento avrò due programmi adiacenti che si comportano nella stessa maniera. In questo modo non è possibile creare un ordinamento tale che questo non si verifichi. La ragione fondamentale è che non ho controllo sul comportamento dei programmi quando vado ed enumerarli.

Punti fissi e ricorsione sono fondamentalmente la stessa cosa vista da due punti di vista diversi.

La ricorsione è legata alla possibilità che nel corpo del mio programma sia visibile la funzione che sto definendo.

Supponiamo di voler costruire un programma che stampi se stesso, ovvero che stampi il suo indice. Per semplicità lo vogliamo costante, ovvero tale che per ogni input stampi il suo indice: $\forall x, \varphi_p(x) = p$.

Prendiamo $g(i, x)$ così definita:

$$g(i, x) = i$$

Per s-m-n otteniamo una classe di programmi costanti $\varphi_{h(i)}(x)$. Questi però stampano sempre i , anche se $h(i)$ è diverso da i , quindi non vanno bene. Sfruttando il teorema del punto fisso abbiamo però che esiste $\varphi_p(x) = \varphi_{h(p)}(x) = p$. Di conseguenza è sufficiente prendere il punto fisso di h, p .

Se io voglio realizzare un comportamento ricorsivo posso farlo con il teorema del punto fisso di Kleene. Supponiamo di voler una funzione calcolabile φ_p tale che $\varphi_p(x) = f(\varphi_p(x))$, per qualche f . Si può? Sì. Abbiamo che $g(i, x) = f(\varphi_i(x))$. Ma ora per s-m-n abbiamo che questo corrisponde a $\varphi_{h(i)}(x)$. Ma ora

abbiamo che $\varphi_p(x) = \varphi_{h(p)}(x) = f(\varphi_p(x))$, se prendiamo come p il punto fisso di h .

In generale per punto fisso di una funzione intendiamo un input x tale che $f(x) = x$. Il nostro senso è un pò particolare perché è un punto fisso estensionale.

Il teorema dice fondamentalmente che $\forall f$ tot. calc. $\exists m, \varphi_{f(m)} = \varphi_m$.

Sfruttando questo risultato vogliamo costruire un programma che dato i mi restituisca qualcosa diverso dalla funzione φ_i per almeno un input, ovvero vogliamo i tale che:

$$\exists x, g(i, x) \neq \varphi_i(x).$$

Proviamo con $g(i, x) = \varphi_i(x) + 1$. Per s-m-n esiste h tale che $\varphi_{h(i)}(x)$ identico a g . Funziona? No, se i è un indice per la funzione sempre divergente. Si può fare di meglio? No, per il teorema del punto fisso. Per qualunque trasformazione di programmi ho un punto fisso tale che $\varphi_{h(m)} = \varphi_m$. Non ho speranza di fare una modifica effettiva ed uniforme tale che il mio programma sia diverso da quello di partenza, e questo vale per ogni programma.

Vediamo una nuova dimostrazione del teorema di Rice basata sul teorema del punto fisso di Kleene. È concettualmente diversa da quella vista in precedenza.

Sia A un insieme estensionale. A è ricorsivo sse è banale. Supponiamo per assurdo che A sia ricorsivo ma non banale, ovvero esista $i \in A$ e $j \notin A$. Posso definire h tale che:

$$h(x) = \begin{cases} j & \text{se } x \in A \\ i & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Questa funzione sarebbe calcolabile per la ricorsività di A . Per il teorema del punto fisso, essendo h totale e calcolabile, deve esistere m tale che $\varphi_m = \varphi_{h(m)}$. Ci chiediamo ora, dove sta m ? Se $m \in A$ allora stanno in A anche tutti i programmi che si comportano come m , tra cui anche $h(m)$. Ma se $m \in A$ allora $h(m) = j$, quindi $h(m) \notin A$. Se invece $m \notin A$ allora $h(m) \notin A$. Ma per definizione di h si ha che $h(m) = i \in A$. Ecco la mia contraddizione.

Tutte le volte che cerchiamo programmi che dipendono, intensionalmente o meno, dall'indice del programma che sto cercando devo fare riferimento al teorema del punto fisso.

1.2 Il secondo teorema del punto fisso

Pensiamo ora ad una funzione binaria $f(x, y)$. Possiamo generalizzare il teorema del punto fisso:

Teorema 1.1. $\forall f^2$ totale calcolabile $\exists s$ totale calcolabile tale che $\forall y, \varphi_{f(s(y), y)} = \varphi_{s(y)}$

Dimostrazione. La dimostrazione è nella slide 103

□