Gli intervalli

📌 Sottoinsieme di R di numeri compresi fra due estremi *a* e *b*, non necessariamente numerici. Presi due numeri all'interno dell'intervallo, tutti i numeri compresi fra questi due appartengono all'intervallo.

Se le parentesi sono tonde () l'estremo è escluso, se quadre [] è incluso. Con l'infinito si usa escluso.

Un intervallo che al suo interno contiene un infinito non è limitato. Se non contiene un infinito è limitato dalla parte in cui è presente il numero finito.

Un intervallo A è superiormente limitato se $\exists \ K \in \mathbb{R} : a \leq K, \forall a \in A$, K si chiama **maggiorante**

Un intervallo A è inferiormente limitato se $\exists \ H \in \mathbb{R} : H \leq a, \forall a \in A$, H si chiama **minorante**

Un intervallo A è limitato se è sia superiorememente che inferiormente limitato

Es. A = { 1, 2, 5 }

$M_a = \{K \in \mathbb{R} : K \geq 5\}$ $\qquad$ $m_a = \{K \in \mathbb{R} : K \leq 1\}$

Maggiorante e Minorante:

- Maggiorante:

  Un qualsiasi numero, anche appartenente all'insieme, che sia più grande di tutti gli altri i numeri all'interno dell'insieme. Ha sempre un minimo

- Minorante:

  Un qualsiasi numero, anche appartenente all'insieme, che sia più piccolo di tutti gli altri i numeri all'interno dell'insieme. Ha sempre un massimo

Massimo e Minimo:

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Si dia che $M \in A$ è **massimo** di A se $a \leq M, \forall a \in A$

  M è un numero contenuto nell'insime e ne è il MAGGIORE, il più piccolo. (sono infiniti)

  es.

  [1, 4, 9] M = 9

  [1, 4, 9) M = non esiste in quanto preso un numero è sempre possibile trovarne uno più vicino a 9 che però è escluso

- Si dia che $m \in A$ è **minimo** di A se $m \leq a, \forall a \in A$

  m è un numero contenuto nell'insime e ne è il MINORE, il più grande. (sono infiniti)

  es.

  [1, 4, 9] m = 1

  (1, 4, 9] M = non esiste in quanto preso un numero è sempre possibile trovarne uno più vicino a 1 che però è escluso

Estremo Superiore:

È il numero a destra nelle parentesi, sia che sia compreso che non sia compreso. Se c'è più infinito si dice che più infinito è l'estremo superiore, anche se non è numerico, e si indica con $sup(A)$ = +∞.

Si dice che i è estremo superiore di A se i è il più piccolo in M_A ed $i \in \mathbb{R}$

oppure

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ A sup. limitato allora L = sup A se e solo se:

$\{$L è un maggiorante e $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \overline{L} \in A : L - \epsilon < \overline{L} \leq L\}$

Estremo Inferiore:

È il numero a sinsitra nelle parentesi, sia che sia compreso che non sia compreso. Se c'è meno infinito si dice che meno infinito è l'estremo inferiore, anche se non è numerico, e si indica con *inf*(A) = -∞.

Si dice che i è estremo superiore di A se i è il più grande in m_A $ed \; i \in \mathbb{R}$

oppure

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ A inf. limitato allora L = inf A se e solo se:

$\{$ l è un minorante e $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \overline{l} \in A : l < \overline{l} \leq l + \epsilon\}$

Assioma di completezza:

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, Sup \; Limitato$

$M_a \neq \emptyset \;\; \wedge \;\; M_a \; Inf \; Limitato$

M_a ha sempre un MINIMO, cioè esiste sempre il più piccolo dei maggioranti

In altre parole: ogni sottoinsieme non vuoto di R superiormente limitato ammette estremo superiore in R

In modo speculare vare per A inferiormente limitato

Definizione di Intorno aperto:

$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\}$

Insime dei punti tra x-r ed x+r

In R valgono queste due proprietà:

- Proprietà archimedea:

  Siano $0 < a < b$ allora: $\exists \; n \in \mathbb{N} : na > b$

- Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \; \exists \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : a < \frac{p}{q} < b$