Cose da sapere a memoria per gli esercizi

Francesco Romeo

December 2021

1 Limiti Notevoli

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\lim_{n\to 0}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{1-\cos a_n}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{tga_n}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n\to 0}\frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$$

2 Asintotici

con $a_n \to 0$

$$\ln(1+a_n) \sim a_n$$

$$e^{a_n} - 1 \sim a_n$$

$$\sin a_n \sim a_n$$

$$(1+a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha a_n$$

$$1-\cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$$

$$\tan a_n \sim a_n$$

$$\arctan a_n \sim a_n$$

3 Serie

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n^a} \to \begin{cases} \alpha > 1 \ \textit{converge} \\ \alpha \leq 1 \ \textit{diverge} \end{cases}$$

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n \ln n + (\ln n)^4} \sim \sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n \ln n} \to \textit{diverge}$$

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \to \begin{cases} \alpha > 1 \ \forall \beta \ \textit{converge.} \\ \alpha = 1 \ \beta > 1 \ \textit{converge.} \\ \textit{diverge in tutti gli altri casi diverge.} \end{cases}$$

$$\sum_{+\infty}^{n=1} x^n \to \begin{cases} x > 1 \quad \textit{diverge.} \\ -1 < x < 1 \ \beta > 1 \ \textit{converge} \ a\frac{1}{1-x} \\ x < 1 \ \textit{indeterminata.} \end{cases}$$

4 Derivate elementari

$$f(x_0) = 0, \ f'(x_0) = 0$$

$$f(x_0) = x^n, \ f'(x_0) = nx^{n-1}$$

$$f(x_0) = e^x, \ f'(x_0) = e^x$$

$$f(x_0) = a^x, \ f'(x_0) = a^x \ln a$$

$$f(x_0) = \ln x, \ f'(x_0) = \frac{1}{x}$$

$$f(x_0) = \log_a x, \ f'(x_0) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x_0) = \sin x, \ f'(x_0) = \cos x$$

$$f(x_0) = \cos x, \ f'(x_0) = -\sin x$$

$$f(x_0) = \tan x, \ f'(x_0) = 1 + \tan^2 x \ \textit{oppure} \ \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x_0) = \arcsin x, \ f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x_0) = \arccos x, \ f'(x_0) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x_0) = \arctan x, \ f'(x_0) = \frac{1}{1+x^2}$$

4.1 Polinomio di taylor

$$f = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

5 Integrali elementari

Derivate al contrario

$$\int k dx = kx + c$$

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha} dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x)\cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x)\sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2} = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + c$$

Se $f(x) = x$ allora $f'(x) = 1$ in tutti questi integrali

Integrale per parti: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

6 Teoremi fondamentali

6.1 Serie (convergenza e divergenza)

6.1.1 Criterio del confronto asintotico

Se il limite del rapporto di due serie positive è k le due serie hanno lo stesso carattere.

6.1.2 Criterio di condensazione

Data una serie sempre positiva il cui termine generale è una successione monotona decrescente allora, posso sostituire il termine generale a_n con $2^n a_{2^n}$

6.1.3 Criterio della radice

Qualora il termine generale sia una potenza n posso calcolare il $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Se il risultato del limite è:

- > 1 la serie diverge.
- < 1 la serie converge.
- $= 1$ non posso dedurre nulla.

6.1.4 Criterio del rapporto

Utile nel caso in cui il termine generale abbia n come fattoriale. posso calcolare il $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se il risultato del limite è:

- > 1 la serie diverge.
- < 1 la serie converge.
- $= 1$ non posso dedurre nulla.

6.1.5 Criterio di Leibniz

Definita una funzione di segno alterno se rispetta tutti e tre i criteri **converge**.

1. $a_n > 0$ *(Positiva)*
2. $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$ *(Tende a 0)*
3. $a_n \leq a_{n+1}$ *(Monotona decrescente)*

6.2 Le derivate

6.2.1 Teorema di De L'Hopital

Siano f, g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) con $g'(x) \neq 0$, sia:

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \vee \pm\infty$
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Allora: $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

7 Serie

7.1 Serie Geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \begin{cases} x > 1 \ \textit{diverge a } +\infty \\ -1 < x < 1 \ \textit{converge a } \frac{a_b}{1-a} \\ x \leq \ \textit{indetermianto.} \end{cases}$$

7.2 Serie Telescopica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_k \quad (a_k = b_k - b_{k+x}) \ \textit{converge a } S = b_1 + \ldots + b_x$$

7.2.1 Serie di Megnoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \textit{ Sereie telescopica che tende a 1}$$

7.3 Serie Armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \textit{ diverge.}$$

7.3.1 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 \textit{ converge (serie geometrica)} \\ \alpha \leq 1 \textit{ diverge.} \end{cases}$$

7.3.2 Serie armanica a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 \textit{ converge assolutanente.} \\ 0 < \alpha \leq 1 \textit{ converge semplicemente.} \end{cases}$$

7.4 Serie particolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \begin{cases} \alpha > 1, \forall \beta \textit{ Converge} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \textit{ Converge} \\ \textit{Diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}$$