Appunti di Analisi

Romeo Francesco

Sommario

1 Gli insiemi

I numeri si possono suddividere in 4 gruppi, ognuno dei quali si trova all'interno di quelli successivi.

1. **Numeri Naturali** $\mathbb{N}$ ossia tutti i numeri interi e positivi partendo da 0.
2. **Numeri Interi** $\mathbb{Z}$ ossia tutti i numeri interi positivi e negativi.
3. **Numeri Razionali** $\mathbb{Q}$ ossia tutti i numeri esprimibili come rapporto di due numeri di $\mathbb{N}$.
4. **Numeri Reali** $\mathbb{R}$ qualsiasi tipo di numero esprimibile.

1.1 Assiomi dei numeri reali $\mathbb{R}$

- Assiomi di campo:
    1. Proprietà associativa: $(a + b) + c = a + (b + c), (a * b) * c = a * (b * c)$
    2. Proprietà commutativa: $a + b = b + a, a * b = b * a$
    3. Proprietà distributiva: $(a + b) * c = a * c = b * c$
    4. Elementi neutri: addizione e sottrazione hanno come elemento neutro lo 0 mentre moltiplicazione e divisione hanno il numero 1. Per elemento neutro si intende il numero che utilizzato come secondo membro in un calcolo non modificherà il valore del numero al primo membro.
    5. Opposto e Inverso: per opposto di un numero n si intende $-n$ per inverso invece $\frac{1}{n}$.

2 Gli intervalli

introduzione Un intervallo é un sottoinsieme di tutti i numeri reali $\mathbf{R}$ compresi tra due punti a, b che possono essere inclusi o esclusi dall'intervallo stesso. Gli intervalli possono essere limitati superiormente o inferiormente, nel caso in cui esistano contemporaneamente entrambi i limiti si dice che l'intervallo é **limitato**, si può anche avere un intervallo illimitato ossia che a una delle de estremità o ad entrambe presneta un infinito.

2.1 Maggiorante e Minnorante

Sono i numeri che si trovano a dx e sx delle parentesi dell'insieme sia che essi siano incluisi che esclusi. questi sono anche chiamati estremi, inferiore o superiore a seconda della posizione *al contrario di maggiorante e minnorante valgono anche* $\pm\infty$

2.2 Massimi e Minimi

Come abbiamo appena detto un intervallo può essere **limitato**. Se lo è superiormente significa che possiede un **massimo**, per massimo si intende il più grande numero facente parte dell'insieme, non è detto che tale numero esista, lo stesso principio vale per le limitazioni inferiori, in tale caso il numero sarà chiamato **minimo**.
vediamo due esempi
$[1, 4, 5, 6, 7, 8]$ minimo = 1, massimo = 8
$[1, 3, 4, 5, 62)$ minimo = 1, massimo non esist
$(4, 7, 8, 23)$ massimo e minimo non esistono

3 Le funzioni

Introduzione Dati due insiemi A e B, una funzione $f(x) : A \to B$ é una legge che associa ad ogni elemento del dominio *A* un unico elemento del codominio *B*.

3.1 Caratteristiche delle funzioni

3.1.1 Proprietà

- **Iniettiva**, ogni x é associata ad una sola y.
- **Surriettiva**, non esiste nessuna y priva di un collegamento con x.
- **Biunivoca**, si tratta di una funzione sia iniettiva che surriettiva.

3.1.2 Monotonia

- monotonia **crescente**: $x_1 \leq x_2 f(x_1) \leq f(x_2)$
- monotonia **decrescente**:$x_1 \leq x_2 f(x_1) \geq f(x_2)$

3.1.3 Massimi e minimi

Una funzione può avere massimi e minimi se esiste un punto x_0 che è il punto "più alto" o "più basso" di tutta la funzione.

3.1.4 Gli asintoti

- **Asintoto verticale**: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
- **Asintoto orizzontale**: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$
- **Asintoto obliquo**:
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$
  - Asintoto obliquo r: $y = mx + q$

4 Le successioni e i limiti

Introduzione SI dice successione una funzione definita su $\mathbf{N}$, il grafico di tale funzione é composto da punti disgiunti.

4.1 Limite di una successione

Una successione puo' **convergere** ad un numero reale oppure **divergere** a $\pm\infty$, in entrambi i casi se il limite é accettato dalla successione questo sarà unico, nel caso in cui la successione converga questa si dirà **limitata**.

4.2 Principio di induzione

Definiamo $P(n)$ come una proprietà valida in $\mathbf{N}$ per un certo numero n, si vuole dimostrare che se é valida per n_0 `e per un certo` $n_1 > n_0$ allora é valida anche per $n + 1$.

- Passo Base $P(n)$:
  - $P(n)$ vera per un certo n_0
- Passo induttivo:
  - $P(n)$ vera per un generico $n > n_0$ *e quindi vera per* $n + 1$
- Passo $P(n)$:
  - $P(n)$ vera per ciascun $n \geq n_0$

In altre parole: verifico che P sia vera per il più piccolo n possibile nel passo base, nel passo induttivo riscrivo la formula e mel passo $n+1$ riscrivo la formula usando $n + 1$ al posto di n e svolgendo i calcoli provo a verificare che P valga anche per quell'$n + 1$. *Esempio di induzione* Dimsotro che la sommatoria dei primi n numeri naturali corrisponde a $\frac{n(n+1}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad n = 1 \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{1} i + (n+1) = \frac{(n+1)((n+2)}{2} \rightarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)((n+2)}{2} \rightarrow$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+2)}{2} \rightarrow$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

4.3 Forme indeterminate e gerarchie dei limiti

Unica cosa rilevante è l'ordine di grandezza dei limiti che è quella che segue:

$$\{\log_a n\}_{a>0\ a\neq 1} < \{n^a\}_{a>0} < \{a^n\}_{a>1} < n! < n^n$$

4.4 Limiti Notevoli delle successioni

$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim_{n\to+\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(1+a_n)}{a_n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+a_n)^\alpha}{a_n} = \alpha$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos a_n}{a_n} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{tga_n}{a_n} = 1$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan a_n}{a_n} = 1$

Questo è da ricordare: $(a_n)^{b_n}, \texttt{con } a_n > 0 = e^{\ln a_n^{b_n}} = e^{b_n \ln a_n}$

4.5 Asintotico e *o* piccolo

Date due successioni a_n, b_n se $\lim_{x\to k}\frac{a_n}{b_n} = 1$ allora a_n `è asintotico ad` b_n,
mentre se $lim_{x\to k}\frac{a_n}{b_n} = 0$ allora a_n `è` *`o`* `piccolo di` b_n
alcuni esempi:
data una successione $\{a_n\}$ che tende a 0
$\ln(1+a_n) \sim a_n$
$e^{a_n} - 1 \sim a_n$
$\sin a_n \sim a_n$
$(1+a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha a_n$
$1 - \cos a_n \sim \frac{a_n^2}{2}$

5 Le serie e le convergenze

La serie é un operazione che associa ad una successione $\{a_k\}$ la successione $\{s_n\}$ dove $s_n = a_1 + a_2 + a_n$, la successuone delle somme parziali si indica come:

$$\sum_{+\infty}^{n=0}$$

5.1 Convergenza e divergenza

Una serie di termine generale a_k può **divergere a** $\pm\infty$, o **convergere a** S, per determinare convergenza o divergenza é necessario **calcolare il limite della serie** ($\lim_{n\to+\infty} s_n$), la convergenza può essere anche determinata tramite il calcolo della convergenza del modulo, in questo caso si dirà che la **serie converge assolutamente** *(e quindi anche semplicemente)*.

5.2 Le proprietà delle serie

- Cambiando un numero finito di elementi all'interno di una serie il suo carattere non cambia.
- Moltiplicando la serie per un numero $c \neq 0$ il carattere della serie sarà lo stesso moltiplicato per c.
- Date due serie S e S' allora la somma delle due serie convergerà alla somma dei caratterei nel caso in cui entrambe convergano oppure divergerà nel caso in cui anche solo una delle due diverga.

5.2.1 Esempi di serie

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n^a} \to \begin{cases} \alpha > 1 \text{ \textit{converge}} \\ \alpha \leq 1 \text{ \textit{diverge}} \end{cases}$$

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n \ln n + (\ln n)^4} \sim \sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n \ln n} \to \text{\textit{diverge}}$$

$$\sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \to \begin{cases} \alpha > 1\ \forall\beta \text{ \textit{converge.}} \\ \alpha = 1\ \beta > 1 \text{ \textit{converge.}} \\ \text{\textit{diverge in tutti gli altri casi diverge.}} \end{cases}$$

5.2.2 Serie Geometrica

$$\sum_{n=o}^{+\infty} x^n$$

La serie si chiama **serie geometrica di ragione x**

Tutte le serie geometriche hanno S_n = $\begin{cases} x > 1 \textit{ divergente a } +\infty \\ -1 < x < 1 \textit{ convergente a } \frac{1}{1-x} \\ x \leq -1 \textit{ indeterminata} \end{cases}$

5.2.3 Serie telescopiche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \texttt{con} \quad a_n = b_n - b_{n+k} \sum_{n=0}^{+\infty} [\frac{1}{n+1} - [\frac{1}{n+k}] = S_n \tag{1}$$

Per calcoalre la somma devo sommare $a_0 + a_1 + ... + a_k$

5.2.4 La serie armonica

$$\sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Si tratta di una serie **divergente**.

5.2.5 La serie di Megnoli

$$\sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Si tratta di una serie telescopica e quindi converge a 1.

6 Limiti di funzioni

Grazie ai limiti delle funzioni possiamo studiare il loro comportamento in punti della funzione all'interno di un punto, anche in quelli che non fanno parte della funzione.

6.1 Limiti Notevoli

Alcune funzioni che sembrerebbero essere forme indeterminate hanno invece dei limiti finiti.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\tan f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha$$

$$\lim_{x\to x_0} (1+\alpha f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e^\alpha$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

6.2 Continuita' e discontinuita

Una funzioen f si dice continua nel suo dominio se lo e' in tutti i punti che lo costituiscono. Esistono 3 tipi di discontinuita' che sono:

1. **Prima specie** *o salto*: i due limiti esistono ma sono diversi.
2. **Seconda specie:** almeno uno dei due limiti non esiste o e' infinito.
3. **Terza specie:** i due limiti esistono, sono uguali ma sono diversi dal valore della funzione in quel punto.

Nota bene *Le funzioni monotone accettano solo discontinuita' di prima specie.*

6.3 Proprietà delle funzioni

- **Permanenza del segno**: Se per $\lim x \to x_0 f(x) = l \neq 0$ e un intervallo di x_0 la funzione avra' lo stesso segno di l all'interno di quell'intervallo.
- **Continuita' di una funzione monotona**: Se una funzione f e' definitia in un intervallo I e' monotona allora sara' anche continua in tutto I.

7 Le derivate

Una funzione é derivabile solo quando il suo limitie sinistro combacia con il limite destro, da ciò deriva che se una funzione é derivabile in un punto x_0 é anche continua in quel punto.

Retta tangete: é possibile definire una retta y tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$ con la seguente equazione: $y = f(x) + f'(x)(x - x_0)$.

7.1 Punti di non derivabilità

Alcuni punti possono non essere derivabili, essi si divisono in 3 gruppi:

1. **Flesso a tangente verticale**: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$
2. **Punto angoloso**: $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *almeno uno dei due deve essere finito.*
3. **Cuspide**: $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty, \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ *devono essere infiniti di segno opposto.*

7.2 Le derivate elementari

Da imparare assolutamnete a memoria *(anche per gli integrali)*:

$$f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 0$$
$$f(x_0) = x^n,\ f'(x_0) = nx^{n-1}$$
$$f(x_0) = e^x,\ f'(x_0) = e^x$$
$$f(x_0) = a^x,\ f'(x_0) = a^x \ln a$$
$$f(x_0) = \ln x,\ f'(x_0) = \frac{1}{x}$$
$$f(x_0) = \log_a x,\ f'(x_0) = \frac{1}{x \ln a}$$
$$f(x_0) = \sin x,\ f'(x_0) = \cos x$$
$$f(x_0) = \cos x,\ f'(x_0) = -\sin x$$
$$f(x_0) = \tan x,\ f'(x_0) = 1 + \tan^2 x \textit{ oppure } \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$f(x_0) = \arcsin x,\ f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x_0) = \arccos x,\ f'(x_0) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x_0) = \arctan x,\ f'(x_0) = \frac{1}{1+x^2}$$

7.3 Massimi e minimi

Definita una **funzione continua** in un intervallo, é sempre possibile **determinare** punti di **minimo** e di **massimo**, che possono essere **locali**, se sono di massimo e di minimo solo di un segemtno della funzione **o globali** se lo sono per tutta la funzione.

7.4 *o* piccolo

Definite due funzioni f, g si dice che f é *o* piccolo di g se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, una funzione f può essere anche *o* piccolo di x ma solo se tende a 0 piu' velocemente.

7.5 Polinomio di Taylor

Definita una funzione f derivabile n volte in x_0 si chiama **polinomio di taylor d'ordine** n e centrato in x_0 il polinomio:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di Mac Lourin Si tratta del polinomio di taylor se $x_0 = 0$

7.5.1 Teorema di Taylor

Definita una funzione f derivabile $n - 1$ volte nel suo intervallo e n volte in un punto x_0 allora per il suo calcolo dell'imite possono sostituire alcune parti della funzione con il rispettivo polinomio di Taylor + *o*$(x - x_0)^n$ dove n é l'ordine del polinomio di Taylor.

Nota bene: *o*$(x - x_0)^n$ tende a 0.

7.5.2 Formula di Taylor sugli estremanti

La formula di Taylor può essere utilizzata anche per determinare se un punto critico é un punto estremante o meno. Ma ancora non so come.

7.6 Concavità o convessità

é possibile stabilire se una funzione é **convessa o concava** studiando il **segno della sua derivata seconda** in un punto x_0, se la derivata seconda é **maggiore di 0** allora la funzione in quel punto sara' **convessa**, se invece la derivata seconda ha valore **minore di 0** la funzione sara' **concava**.

8 Gli integrali

Gli integrali indefiniti sono utilizzati per determinare la primitiva di una funzione data mentre gli integrali definiti sono utilizzati per calcolare l'area compresa tra due funzioni. Non tutte le funzioni sono integrabili. Alcune lo sono sempre.

8.1 Proprietà degli integrali

- **Linearità**:$\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$
- **Additività**:$\int_a^b (f) = \int_a^c f + \int_c^b f$
- **Monotonia**: se $f(x) < g(x)$ allora $\int_a^b (f) < \int_a^b (g)$

8.2 Gli integrali elementari

Da imparare assolutamnete a memoria *(sono le derivate al contrario)*

$$\int kdx = kx + c$$

$$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha} dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + k^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + c$$

Se $f(x) = x$ allora $f'(x) = 1$ in tutti questi integrali

Integrale per parti: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

9 I teoremi

9.1 Limiti di successioni

9.1.1 Teorema dell'unicità del limite

Semplicemnete se una successione ammette limiti questo è unico.

9.1.2 Teorema di permanenza del segno

In una successione sono un certo n il segno sarà lo stesso del limite.

9.1.3 Teorema del confronto

Date $a_n \leq b_n \leq c_n$ con $\lim a_n = \lim c_n$ allora anche c_n avrà quel limite.

9.2 Teoremi e criteri delle serie

9.2.1 Criterio del confronto

$0 \leq a_n \leq b_n$ allora se:

- b_n converge lo fa anche a_n
- a_n diverge lo da anche b_n

9.2.2 Criterio del confronto asintotico

Se il limite del rapporto di due serie positive è k le due serie hanno lo stesso carattere.

9.2.3 Criterio di condensazione

Data una serie sempre positiva il cui termine generale è una successione monotona decrescente allora, posso sostituire il termine generale a_n con $2^n a_{2^n}$

9.2.4 Criterio della radice

Qualora il termine generale sia una potenza n posso calcolare il $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Se il risultato del limite è:

- $>$ 1 la serie diverge.
- $<$ 1 la serie converge.
- $=$ 1 non posso dedurre nulla.

9.2.5 Criterio del rabborto

Utile nel caso in cui il termine generale abbia n come fattoriale. posso calcolare il $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se il risultato del limite è:

- $>$ 1 la serie diverge.
- $<$ 1 la serie converge.
- $=$ 1 non posso dedurre nulla.

9.2.6 Criterio di Leibniz

Definita una funzione di segno alterno se rispetta tutti e tre i criteri **converge**.

1. $a_n > 0$ *(Positiva)*
2. $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$ *(Tende a 0)*
3. $a_n \leq a_{n+1}$ *(Monotona decrescente)*

9.3 Le funzioni

9.3.1 Teorema di Weierstrass

Definita una funzione continua in $[a,b]$ allora avrà sicuramente max e min.

9.3.2 Teorema degli 0

Definita una funzione continua in $[a,b]$ se $f(a)f(b) < 0$ allora esisterà un punto p della funzione tale che $f(p) = 0$.

9.3.3 Teorema dei valori intermedi

Definita una funzione continua in un intervallo essa assumerà tutti i valori tra il min e il max assoluto.

9.4 Limiti di funzioni

I teoremi sono gli stessi delle successioni che posso trovare ai punti:

- Confronto: 9.1.3
- Permanenza: 9.1.2
- U ncità: 9.1.1

9.5 Le derivate

9.5.1 Teorema di Fermat

Definita una funzione derivabile in un punto x_0 interno all'intervallo di definizione, se x_0 è punto di massimo o minimo relativo allora $f'(x_0) = 0$.

9.5.2 Teorema di Rolle

Definita una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) con $f(a) = f(b)$ allora esisterà un punto c interno ad (a, b) in cui $f'(c) = 0$ *ossia la funzione cambierà di segno*.

9.5.3 Teorema di Lagrange

Definita una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) allora esisterà un punto c appartenente a (a, b) e tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ da questo ne deduciamo che:

- se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e se $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ allora f è costante.
- se $f'(x) = g'(x) \forall x \in (a, b)$ allora $f(x) = g(x) + k$

9.5.4 Teorema di De L'Hopital

Siano f, g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) con $g'(x) \neq 0$, sia:

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \vee \pm\infty$
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Allora: $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

9.6 Calcolo Integrale

9.6.1 Teorema della media integrale

Definita una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$ se M è l'estremo superiore e m l'estremo inferiore allora $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$ è la media integrale della funzione ed esisterà un x_0 tale che $\frac{x_0(b-a)}{2} = \int_a^b f(x)$

9.6.2 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Definita una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ allora $F(x) = \int_a^x f$ è una primitiva di f *Ossia* F *è derivabile* e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$

9.6.3 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Definita una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ e sia G una primitiva di quella funzione, allora $\int_a^b f = G(b) - G(a)$