Le funzioni

Definizione di funzione:

> Dati due insiemi A e B, una funzione $f(x) : A \rightarrow B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A *(dominio)* un unico elemento di B *(insieme immagine o spazio di arrivo)*

📢 Nota Bene, dare una funzione equivale a sepcificare sia la legge f, che il suo dominio D

Altre definizioni:

- $f(x)$ è l'immagine in B di x tramite f
- $f(A)$ è l'insieme immagine: $\{f(x), x \in A\} \subseteq \ B$ nel caso coincida f è surriettiva ossia l'insieme di tutti i valori che $f(x)$ assume in B
- $G(f)$ è il grafico di f: l'insieme delle coppie del prodotto cartesiano $\{(x, y) \in AxB : y = f(x)\}$ *y è immagine di x, x è controimmagine di y.*

Restrizione del dominio:

Per restrizione del dominio si intende prenderne in cosiderazione una sua parte, anche non continua *es* $(1,5) \cup [7,10)$.

Il nuovo insieme prende il nome di C *(sottoinsieme di A)* e la nuova funzione si scrive $f|_c(x)$ dove C è il nuovo dominio.

Tipologie di funzione:

- Funzione composta: $g(x) \circ f(x) = g(f(x))$
- Funzione iniettiva: $f(x) \neq f(x') \iff x \neq x', \forall\ x, x' \in A$ ossia *ogni x è associata ad una sola y.*
- Funzione surriettiva: $f(A) = B$ ossia *la funzione dà come risultato tutti i numeri dello spazio di arrivo.*
- Funzione biunivoca: f è biunivoca se è sia iniettiva che surriettiva.
- Funzione inversa: data una f biunivoca si chiama f^{-1} *(funzione inversa)* la funzione $f^{-1}B \to A : f^{-1}(y) = x,\ x \in A : f(x) = y$
- Funzione identità su A: $id_A : A \to A$ la funzione che: $id_a(a) = a$ ossia *la funzione identità di un dominio A è quella funzione che restituisce come valore esattamnete quello passatogli.*

📢 Nota Bene, $f^{-1}(f(x)) = id_A(x)$ e $f(f^{-1}(y)) = id_A(y)$

Monotonia delle funzioni:

- monotona crescente:

  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \leq f(x_2)$
- monotona strettamente crescente:

  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) < f(x_2)$
- monotona decrescente:

  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) > f(x_2)$

- monotona strettamente decrescente:

  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \geq f(x_2)$

> 📢 Nota Bene, una funzione parallela all'asse delle x è sia crescente che decrescente

---

Limitatezza di una funzione:

Si dice che una funzione f è sup. o inf. limitata se:

$f(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sup. o inf. limitato, nel dettaglio:

- f è sup. limitata se $\exists\ K \in \mathbb{R} : f(x) \leq K,\ \forall x \in A$
- f è inf. limitata se $\exists\ H \in \mathbb{R} : f(x) \geq H,\ \forall x \in A$

Una funzione f è detta limitata se è sia sup. che inf. limitata

> 📢 La limitatezza della funzione è la limitatezza della sua immagine, ossia dell'insieme di arrivo B.

Massimi e Minimi:

Si dice che f ha massimo in A se $f(A)$ ammette massimo *(M)*, ossia:

$\exists x_0 \in A : f(x_0) \geq f(x) \forall x \in A$

Si dice che f ha minimo in A se $f(A)$ ammette minimo *(m)*, ossia:

$\exists x_0 \in A : f(x_0) \leq f(x) \forall x \in A$