Fondamenti dell'Informatica

Esercitazione 4

(CON RISPOSTE)

Esercizio 1. Relazioni

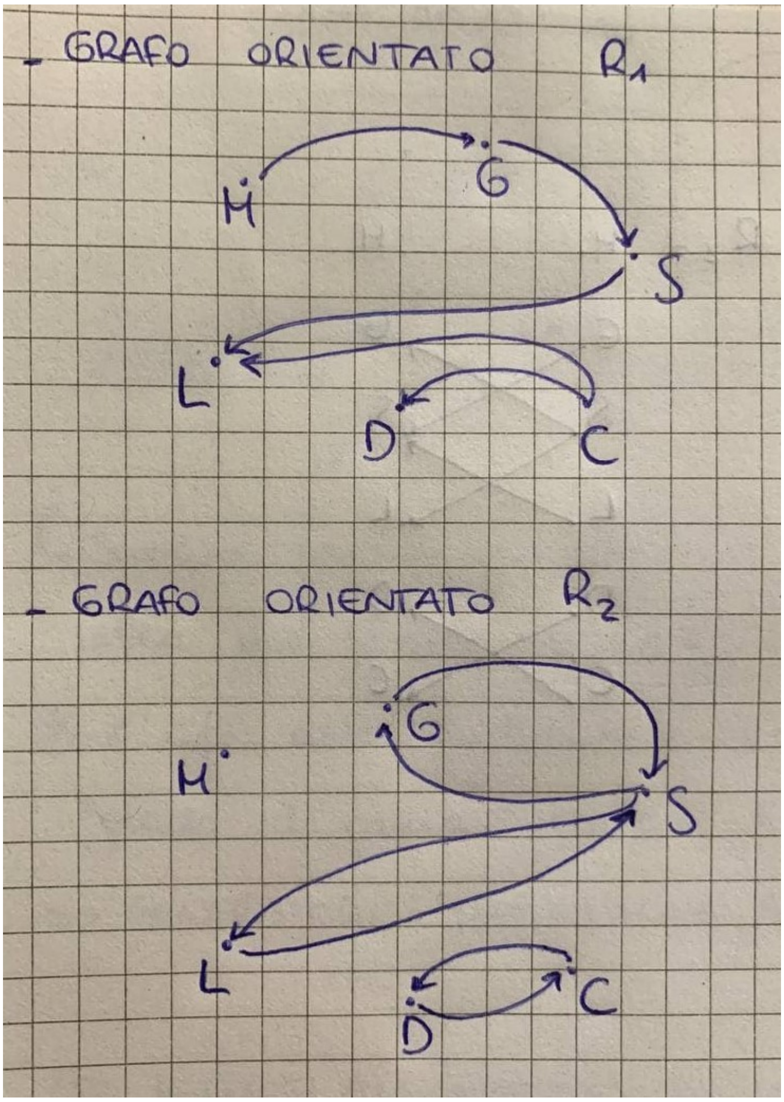
Sia $U = \{marco, giulio, sara, luca, daniela, carlo\}$ un insieme di individui. Si considerino le relazioni $R_1 \subseteq U \times U$ e $R_2 \subseteq U \times U$ definite come segue:

$$R_1 = \{\langle marco, giulio\rangle, \langle giulio, sara\rangle, \langle sara, luca\rangle, \langle carlo, daniela\rangle, \langle carlo, luca\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle giulio, sara\rangle, \langle sara, luca\rangle, \langle carlo, daniela\rangle, \langle sara, giulio\rangle, \langle luca, sara\rangle, \langle daniela, carlo\rangle\}$$

1. Elencare (qualora esistano) sul grafo che rappresenta R_1:
   - tutti i cammini di lunghezza 4
   - tutti i cammini di lunghezza 3
   - tutti i semicammini di lunghezza 5
2. Per i grafi che rappresentano R_1 e R_2 dire se:
   - sono connessi
   - contengono cicli o semicicli
   - contengono nodi sorgente o pozzo
3. Indicare i risultati delle seguenti composizioni di relazioni:
   - $R_1 \circ R_1$
   - $R_2 \circ R_1$
   - $R_1 \circ R_2$
4. Rappresentare estensionalmente R_1^{-1} e R_2^{-1}.

Risposta 1.

$$R_1 = \{\langle m, g\rangle, \langle g, s\rangle, \langle s, l\rangle, \langle c, d\rangle, \langle c, l\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle g, s\rangle, \langle s, l\rangle, \langle c, d\rangle, \langle s, g\rangle, \langle l, s\rangle, \langle d, c\rangle\}$$



Per il grafo che rappresenta R_1:

- Non esistono cammini di lunghezza 4
- L'unico cammino di lunghezza 3 è $\langle marco, giulio, sara, luca \rangle$

- Ci sono due semicammini di lunghezza 5:
  il primo è $\langle marco, giulio, sara, luca, carlo, daniela \rangle$ e il secondo è $\langle daniela, carlo, luca, sara, giulio, marco \rangle$

Per i grafi che rappresentano R_1 e R_2:

- R_1 è connesso, mentre R_2 no
- R_1 non contiene cicli o semicicli, mentre R_2 sì
- Per R_1, M e C sono nodi sorgente e D ed L sono nodi pozzo, mentre R_2 non ha nodi sorgente o pozzo

Per le composizioni di relazioni:

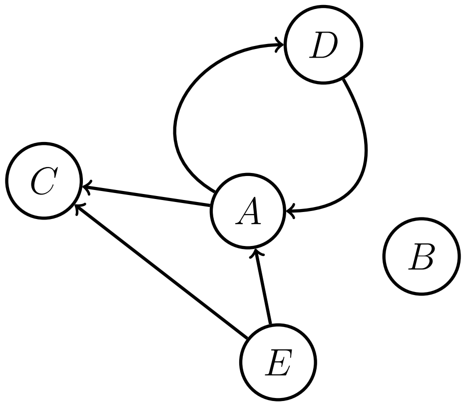
- $R_1 \circ R_1 = \{\langle m, s \rangle, \langle g, l \rangle\}$
- $R_2 \circ R_1 = \{\langle m, s \rangle, \langle g, l \rangle, \langle g, g \rangle, \langle s, s \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, s \rangle\}$
- $R_1 \circ R_2 = \{\langle g, l \rangle, \langle s, s \rangle, \langle l, l \rangle, \langle d, d \rangle, \langle d, l \rangle\}$

Per le relazioni inverse:

- $R_1^{-1} = \{\langle g, m \rangle, \langle s, g \rangle, \langle l, s \rangle, \langle d, c \rangle, \langle l, c \rangle\}$
- $R_2^{-1} = \{\langle s, g \rangle, \langle l, s \rangle, \langle d, c \rangle, \langle g, s \rangle, \langle s, l \rangle, \langle c, d \rangle\} = R_2$

Esercizio 2. **Grafi 1**

Si consideri il seguente grafo G:



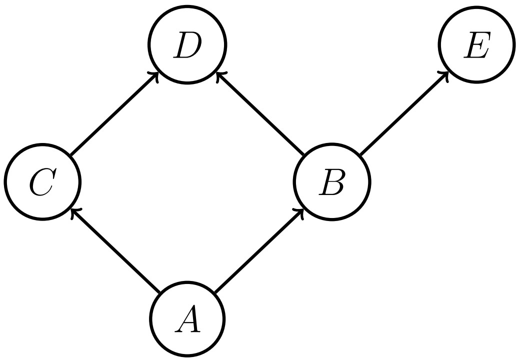
1. Rappresentare estensionalmente la relazione R rappresentata dal grafo;
2. Indicare il numero di archi in entrata e in uscita per ogni nodo, specificando eventuali proprietà dei nodi;
3. Indicare gli eventuali cicli del grafo;
4. Indicare se G sia un grafo connesso o meno;
5. Indicare la distanza fra i seguenti nodi:
   - E e D
   - E e C
   - C e C
   - D e A
   - D e C
   - D e E

Risposta 2.

1. Rappresentazione estensionale di R: $R = \{\langle A, C\rangle, \langle A, D\rangle, \langle D, A\rangle, \langle E, A\rangle, \langle E, C\rangle\}$;
2. Archi in entrata e in uscita per ogni nodo:
   - A = 2 archi in entrata, 2 archi in uscita
   - B = *0 archi in entrata, 0 archi in uscita* = nodo isolato
   - C = 2 archi in entrata, *0 archi in uscita* = nodo pozzo
   - D = 1 arco in entrata, 1 arco in uscita
   - E = *0 archi in entrata*, 2 archi in uscita = nodo sorgente
3. C'è un unico ciclo sul grafo: $\langle A, D, A\rangle$
4. G non è un grafo connesso in quanto non esiste nessun semicammino che porta da un qualsiasi nodo a B.
5. Per le distanze fra i nodi:
   - E e $D = 2$
   - E e $C = 1$
   - C e $C = 0$
   - D e $A = 1$
   - D e $C = 2$
   - D e $E = \infty$ (questo perché non esiste un cammino fra i due nodi)

Esercizio 3. **Grafi 2**

Si consideri il seguente grafo G:

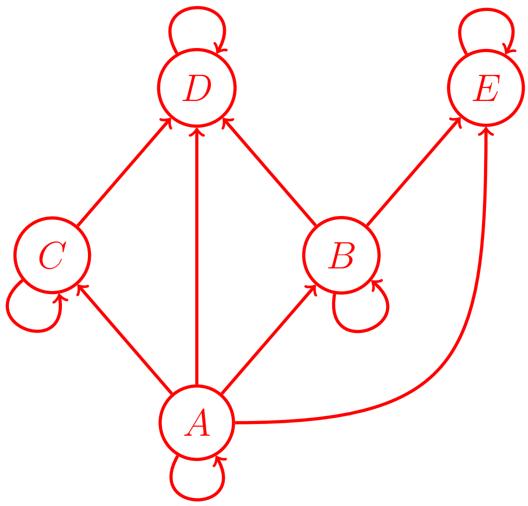


1. Elencare le proprietà di cui gode la relazione rappresentata tramite il grafo;
2. Completare il grafo con gli archi mancanti affinché la relazione rappresentata sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Risposta 3.

1. Proprietà di G: irriflessività, asimmetria.

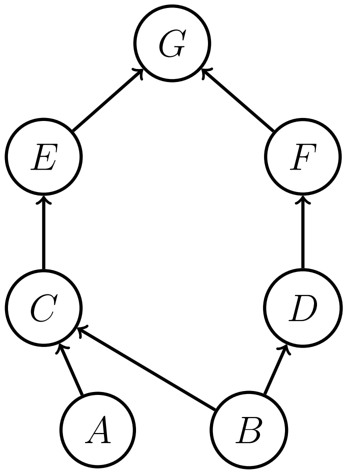
2. Grafo completato:



   Il grafo rappresentato ora garantisce riflessività, antisimmetria e transitività della relazione. Risulta quindi essere un ordine parziale (o POSET).

Esercizio 4. **DAG e Alberi**

Si consideri la relazione R rappresentata dal seguente grafo G:



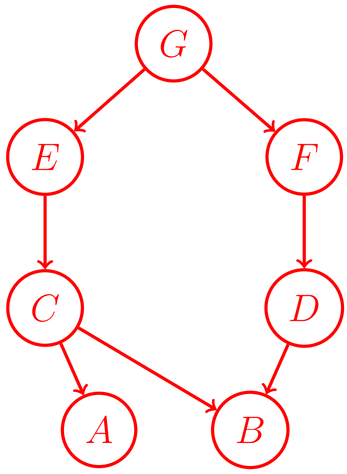
1. G è un albero?
2. G è un DAG?
3. Si disegni il grafo G' ottenuto dalla relazione R^{-1}.
4. G' è un albero?

Risposta 4.

1. G non è un albero, dato che non esiste soltanto un nodo sorgente e c'è almeno un nodo (C) con più di un arco entrante.

2. G è però un DAG, dato che risulta essere un grafo diretto e privo di cicli.

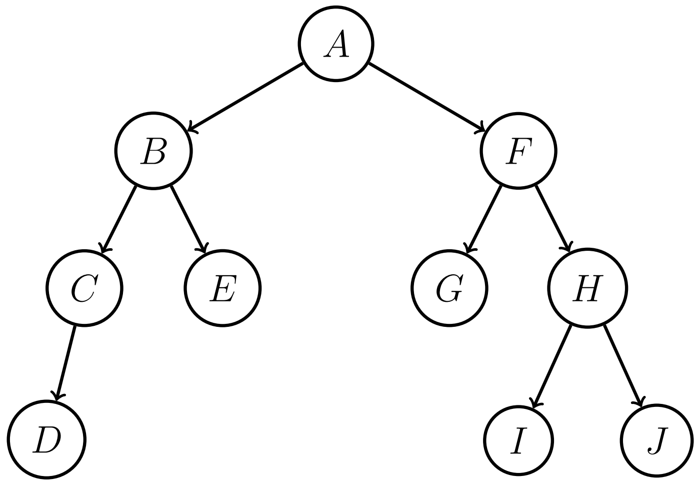
3. $R^{-1} = \{\langle G, E\rangle, \langle G, F\rangle, \langle E, C\rangle, \langle F, D\rangle, \langle C, A\rangle, \langle C, B\rangle, \langle D, B\rangle\}$; Di conseguenza, il grafo G' risulta essere:



4. Anche in questo caso G' non è un albero, in quanto esiste sì un solo nodo sorgente (G) ma c'è comunque almeno un nodo (B) con più di un arco entrante.

Esercizio 5. **Alberi**

Si consideri il seguente albero G:



1. Indicare la radice e le foglie dell'albero;
2. Indicare i figli dei nodi C ed F;
3. Indicare gli archi che compongono il cammino da B a D e da A a J;
4. Indicare l'altezza dell'albero e determinare a che livello di profondità si trovi ogni nodo;
5. G è un albero binario?
6. Visitare l'albero in preordine, inordine, postordine e in ampiezza.

Risposta 5.

1. Nodo radice: A; foglie: E, G, D, I, J
2. Figli di C: D; figli di F: G, H;
3. Per i cammini:
   - da B a D: $(B, C), (C, D)$
   - da A a J: $(A, F), (F, H), (H, J)$
4. L'albero in oggetto è di altezza 3, con i nodi distribuiti sulle seguenti profondità:
   - Profondità 0: A
   - Profondità 1: B, F
   - Profondità 2: C, E, G, H
   - Profondità 3: D, I, J
5. Sì, G soddisfa le condizioni per gli alberi binari: l'albero ha un nodo (radice), un albero binario sinistro (eventualmente vuoto) e un albero binario destro (eventualmente vuoto), e lo stesso vale per tutti i sottoalberi sinistri e destri del grafo.
6. Attraversamento dell'albero:
   - Preordine (preorder):
     A - B - C - D - E - F - G - H - I - J
   - Inordine (inorder):
     D - C - B - E - A - G - F - I - H - J
   - Postordine (postorder):
     D - C - E - B - G - I - J - H - F - A
   - In ampiezza (breadth-first):
     A - B - F - C - E - G - H - D - I - J

Esercizio 6. **Alberi binari (extra)**

Si consideri l'insieme $\{1, 3, 4, 8, 10, 11, 1318, 25, 26, 30\}$. Disegnare gli alberi binari di ricerca G_1, G_2, G_3 tali che:

1. G_1 è bilanciato
2. G_2 è completo
3. G_3 è pieno (strettamente binario)