CAPITOLO 14

Esercizi riguardanti principio di induzione e successioni definite per ricorrenza

14.1. Principio di induzione

✍ **Esercizio 14.1.1.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $3^n \geq \frac{n}{2}2^n$

Sia $P(n) = \{3^n \geq \frac{n}{2}\, 2^n\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $3^1 \geq \frac{1}{2}\, 2 = 1$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$3^{n+1} = 3^n\, 3 \overset{P(n)}{\geq} \frac{n}{2}\, 2^n\, 3 \overset{???}{\geq} \frac{n+1}{2} 2^{n+1}$$

Questo accade se e solo se

$$\frac{n}{2}\, 3 \geq \frac{n+1}{2}\, 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; n \geq 2$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.
Si poteva anche procedere ponendo equivalentemente

$$P(n) = \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{n}{2} \right\}$$

✍ **Esercizio 14.1.2.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $3^n \geq n2^n$

Sia $P(n) = \{3^n \geq n\,2^n\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $3^1 \geq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$3^{n+1} = 3^n\,3 \overset{P(n)}{\geq} n\,2^n\,3 \overset{???}{\geq} (n+1)\,2^{n+1}$$

Questo accade se e solo se

$$3n \geq 2(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.
Si poteva anche procedere ponendo equivalentemente

$$P(n) = \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n \right\}$$

✍ **Esercizio 14.1.3.** *Provare per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha $2^n + 4^n \leq 5^n$*

Sia $P(n) = \{2^n + 4^n \leq 5^n\}$. Allora $P(2)$ è vera, infatti $2^2 + 4^2 = 20 \leq 5^2 = 25$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$5^{n+1} = 5^n\,5 \overset{P(n)}{\geq} 5(2^n + 4^n) \geq 2\,2^n + 4\,4^n = 2^{n+1} + 4^{n+1}$$

Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.4.** *Provare per induzione che per ogni $n \geq 6$ si ha $n^n \geq 2^n\,n!$*

Sia $P(n) = \{n^n \geq 2^n\,n!\}$. Allora $P(6)$ è vera, infatti $6^6 = 46656 \geq 2^6 \cdot 6! = 64 \cdot 720 = 46080$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)!2^{n+1} = n!2^n(n+1)2 \overset{P(n)}{\leq} n^n(n+1)2 \overset{???}{\leq} (n+1)^{n+1}$$

e questo è vero perché $(\frac{n+1}{n})^n \geq 2$ (si vede applicando la disuguaglianza di Bernoulli).
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.5.** *Provare che la proposizione $2^n \geq n^2$ è induttiva per $n \geq 3$; per quali valori di n la proposizione è vera?*

Sia $P(n) = 2^n \geq n^2\}$. Dimostrare che $P(n)$ è induttiva per $n \geq 3$ significa dimostrare che per $n \geq 3$, se è vera $P(n)$ allora è anche vera $P(n+1)$. Supponiamo allora che sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$2^{n+1} = 2^n\, 2 \overset{P(n)}{\geq} n^2\, 2 \overset{???}{\geq} (n+1)^2$$

e questo è vero perché $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ per $n \geq 3$.
Con questo abbiamo provato solo che $P(n)$ è induttiva per $n \geq 3$, NON che $P(n)$ è VERA per $n \geq 3$. Infatti per $n = 3$ $P(3)$ è falsa. $P(n)$ è vera per $n \geq 4$, quindi il principio di induzione lo posso applicare per $n \geq 4$. Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 4$.

✍ **Esercizio 14.1.6.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n! \geq 2^{n-1}$*

Sia $P(n) = \{n! \geq 2^{n-1}\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $1! = 1 \geq 2^0 = 1$. $P(2)$ è anche vera, infatti $2! = 2 \geq 2^1$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\geq} 2^{n-1}(n+1) \overset{???}{\geq} 2^n$$

e questo è vero perché $n \geq 1$.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.7.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $a \geq -1$ si ha $(1+a)^n \geq 1 + na$ (disuguaglianza di Bernoulli)*

Sia $P(n) = \{(1+a)^n \geq 1 + na\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $1 + a \geq 1 + a$. $P(2)$ è anche vera, infatti $(1+a)^2 = 1 + a^2 + 2a \geq 1 + 2a$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \overset{P(n)}{\geq} (1+na)(1+a) \overset{???}{\geq} (1+(n+1)a)$$

e questo è vero se e soltanto se $1 + a + na + na^2 \geq 1 + na + a$ e questo è sempre vero.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.8.** *Provare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $e^n \geq n + 1$*

Sia $P(n) = \{e^n \geq n+1\}$. Allora $P(1)$ è vera, infatti $e \geq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$e^{n+1} = e^n\, e \overset{P(n)}{\geq} (n+1)e \overset{???}{\geq} (n+2)$$

e questo è vero se e soltanto se $ne + e - n - 2 \geq 0$ e questo è sempre vero perché $ne - n \geq 0$ e $e - 2 \geq 0$
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.9.** *Provare per induzione che la somma dei cubi interi da 0 a n vale* $S(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 2^3 = 9 = 3^2$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)^3 \overset{S(n)}{\geq} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}[n^2+4n+4] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.10.** *Provare per induzione che la somma dei n interi vale* $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 2 = 3 = \frac{2\,3}{2} = 3$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (n+1) \overset{S(n)}{\geq} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)}{2}[n+2] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.11.** *Provare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $n^n \geq n!$

Sia $P(n) = \{n^n \geq n!\}$. $P(1)$ è banalmente vera. $P(2) = 2^2 = 4 \geq 2! = 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\leq} n^n(n+1) \overset{???}{\leq} (n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1)$$

e questo è vero visto che $n^n \leq (n+1)^n$.
Quindi per il principio di induzione, $P(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.12.** *Provare per induzione che la somma dei primi n numeri dispari vale* $S(n) = n^2$

$S(1)$ è banalmente vera. $S(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$. Supponiamo sia vera $S(n)$. Dimostriamo che è vera $S(n+1)$. Allora

$$S(n+1) = S(n) + (2n+1) \overset{S(n)}{\geq} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Quindi per il principio di induzione, $S(n)$ è vera per ogni n.

✍ **Esercizio 14.1.13.** *Provare per induzione la formula di Stirling*

$$\forall n \qquad \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n}\, n\, e$$

Sia $P(n) = \{(\frac{n}{e})^n \leq n!\}$. $P(1)$ è banalmente vera. $P(2) = (\frac{2}{e})^2 = \frac{4}{e^2} \leq 2$. Supponiamo sia vera $P(n)$. Dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{P(n)}{\geq} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \overset{???}{\geq} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

e questo è vero visto che $e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (la successione a secondo membro è crescente e tende ad e che quindi è il suo estremo superiore.
Sia ora $Q(n) = \{(\frac{n}{e})^n ne \geq n!\}$. $Q(1)$ è banalmente vera. $Q(2) = (\frac{2}{e})^2 2e = \frac{8}{e} \geq 2$. Supponiamo sia vera $Q(n)$. Dimostriamo che è vera $Q(n+1)$. Allora

$$(n+1)! = n!(n+1) \overset{Q(n)}{\leq} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)\, n\, e \overset{???}{\leq} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} (n+1)\, e$$

e questo è vero visto che $e \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ (la successione a secondo membro è decrescente e tende ad e che quindi è il suo estremo inferiore.
Quindi per il principio di induzione, la disuguaglianza di Stirling è vera per ogni n.

14.2. Successioni definite per ricorrenza

14.2.1. Esercizi con traccia della soluzione

✍ **Esercizio 14.2.1.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + a_n}{2} \end{cases}$$

Hint della soluzione: occorre distinguere i casi:
CASO 1: $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. In tal caso la successione è costantemente uguale a 1 (o rispettivamente -1) per ogni n
CASO 2: $\alpha > 1$
(1) La successione è ben definita
(2) La successione è monotona crescente. Infatti occorre dimostrare che $a_{n+1} \geq a_n$ cioè

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \geq a_n$$

che è vero se $a_n \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$
(3) Si dimostra per induzione che $a_n \geq \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vero perché $\alpha > 1$)
(4) Quindi dal passo (2), essendo la successione monotona crescente, si sa che esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

finito o infinito.
(5) Passiamo al limite nella relazione di ricorrenza, si ha

$$\ell = \frac{\ell^3 + \ell}{2}$$

da cui i possibili limiti reali sono $\ell = 0$, $\ell = 1$ oppure $\ell = -1$. Sono però tutti e tre da escludere perché dal passo (3) abbiamo dimostrato che $a_n \geq \alpha > 1$. Quindi se $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

CASO 3: $\alpha < -1$. Analogamente a quanto visto ora, si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

CASO 4: $0 < \alpha < 1$.
(1) La successione è ben definita
(2) La successione è monotona decrescente. Infatti occorre dimostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ cioè

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \leq a_n$$

che è vero se $a_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$
(3) Si dimostra per induzione che $0 \leq a_n \leq \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (vero perché $0 < \alpha < 1$)
(4) Quindi dal passo (2), essendo la successione monotona decrescente, si sa che esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

finito o infinito.
(5) Passiamo al limite nella relazione di ricorrenza, si ha come prima che i possibili limiti reali sono $\ell = 0$, $\ell = 1$ oppure $\ell = -1$. Sono però da escludere $\ell = \pm 1$ perché dal passo (3) abbiamo dimostrato che $0 \leq a_n \leq \alpha < 1$. La stessa relazione ci permette di escludere anche i limiti infinit, quindi se $0 < \alpha < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

CASO 5: $-1 < \alpha < 0$. Analogo al precedente.

✍ **Esercizio 14.2.2.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1} \end{cases}$$

Hint della soluzione:
(1) la successione è ben definita;
(2) per induzione si prova che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(3) la successione è monotona decrescente (si dimostra per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(4) dal punto (3) esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ con $\ell \geq 0$
(5) passando al limite dentro la legge ricorsiva si ottiene che al secondo membro c'è ℓ diviso una quantità che tende all'infinito e che deve uguagliare ℓ per cui deve necessariamente essere $\ell = 0$. Riassumendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

✍ **Esercizio 14.2.3.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + 1} \end{cases}$$

Hint della soluzione:
(1) la successione è ben definita;
(2) per induzione si prova che $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
(3) la successione è monotona decrescente ma è difficile dimostrare la monotonia attraverso la definizione: $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ in quanto si dovrebbe dimostrare che $x + 1 \leq x^n$ (difficile!). Aggirando l'ostacolo, si prova a dimostrare che $a_n \leq 2012 + n$ per induzione.
(4) A questo punto dalla legge ricorsiva

$$a_n = \sqrt[n]{a_{n-1} + 1} \overset{(3)}{\leq} \sqrt[n]{2012 + (n-1) + 1} = \sqrt[n]{2012 + n}$$

quindi dal passo (2)

$$1 < a_n \leq \sqrt[n]{2012 + n}$$

e quindi dal teorema del confronto si conclude che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

14.2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 14.2.4.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

✍ **Esercizio 14.2.5.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_1 = 2012 \\ a_{n+1} = \pi a_n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$