Teoremi

TEOREMA DEL RACCORDO

Sia $f X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulo di X ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \{x_n\} \subset X; x_n \to x_0$ si ha che $f(x_n) \to l$

Se X non è superiormente limitato allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \{x_n\}, x_n \to +\infty$ sia ha che $f(x_n) \to l$

TEOREMA DI UNCITA' DEL LIMITE

Sia x_0 di accumulazione per X e sia f $\text{definita in } X \to \mathbb{R}$, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora è unico.

La dimostrazione è la stessa delle successioni

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 di accumulazioen per X

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l <_{>} 0$ ALLORA $\exists r > 0 : f(x) <_{>} 0 \forall x \in X \cap (x_o - r, x_0 + r)/\{x_0\}$

TEOREMA DEL CONFRONTO

$f, g, h . X \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per X e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \forall x \in X \cap (x_o - r, x_0 + r)/\{x_0\}$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

esempio:

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \to$
il sin oscilla tra -1 ed 1 quindi la funzione può assumere al massimo i valori di: $-x^2, x^2 \to$
$\lim_{x \to 0} -x^2 < \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} < \lim_{x \to 0} x^2 \to$
$-x^2$ e x^2 tendono a 0 quindi $\to$
$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$

ESISTENZA DEL LIMITE

Sia $f : X \to R$ e x_0 punto di accumulazione sia destro che sinistro ALLORA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ **SE E SOLO SE** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

ESISTENZA DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE MONOTONA

Sia $f : X \to R$ e x_0 punto di accumulazione destro per X

Sia f monotona crescente ALLORA

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$

> ⚠️ In caso di punto di accumulazione sinistro avrei preso il $\sup_{x < x_0} f(x)$
> In caso di monotonia decrescente avrei invertito $\sup$ e $\inf$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f : [a, b]$ continua in tutto $[a, b]$ ALLORA

f ha massimo e minimo *cioè*

$\exists x_1, x_2 : f(x_1) \leq f(x) \land f(x_2) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$
