Appunti di Fondamenti dell'Informatica

Romeo Francesco

Sommario

1 Le relazioni

Definita una relazione R essa può avere alcune caratteristiche.

- **Relazione Riflessiva**: Per ogni x appartenente ad A esiste una relazione del tipo xRx.
- **Relazione Irriflessiva**:Per nessuna x appartenente ad A esiste una relazione del tipo xRx.
- **Relazione Simmetrica**: Per ogni x, y appartenente ad A se esiste una relazione del tipo xRy deve esistere anche quella yRx.
- **Relazione Asimmetrica**: Per ogni x, y appartenente ad A se esiste una relazione del tipo xRy non deve esistere anche quella yRx.
- **Relazione Antisimmetrica**: Per ogni x, y appartenente ad A se esiste una relazione del tipo xRy e anche quella yRx allora $x = y$.
- **Relazione Trasitiva**: Per ogni x, y, z appartenente ad A se esiste una relazione del tipo xRy e yRz allora esiste anche xRz.
- *Tricotomica*: si tratta di una proprietà particolare che si ha quando per ogni x, y o $x = y$ o xRy o yRx

Nota Bene:

- Se R è **asimmetrica** allora è anche **irriflessiva** e **antisimmetrica**.
- Se R è **irriflessiva e trasitiva** allora è anche **asimmetrica**.
- Se R è **antisimmetrica e riflessiva** allora è anche **asimmetrica** e **viceversa**.

2 Come si rappresentano le relazioni

Le relazioni possono essere rappresentate principalmente in tre modi.

Posso utilizzare una rappresentazione tabellare, una grafo bipartito o un grafo orientato, ognuno dei quali ha delle particolarità che lo rendono preferibile agli latri.

Prendiamo come esmepio tre insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$ $C = \{1.0, 2.0, 3.0\}$

2.1 Rappresentazione tabellare

$R \subset A * B$

$R = \{< 1, a >, < 1, b >, < 3, c >, < 2, b >\}$

	1	2	3
a	1	0	0
b	1	1	0
c	0	0	1

Questo tipo di rappresentazione, *utile per R binarie* rende facile capire se si tratta di relazioni **riflessive**, in tal caso la diagonale che parte da *sù, sx* e arriva a *giù, dx* sarà formata da soli 1, (in caso fossero tutti 0 la relazione sarebbe **irriflessiva**) o di relazioni **simmetriche** in questo caso la matrice sarebbe specchiata rispetto alla diagonale descritta prima.

2.2 Rappresentazione mediante grafo bipartito

$R \subset A * B$
$R = \{< 1, a >, < 2, a >, < 3, b >, < 1, b >, < 2, c >\}$

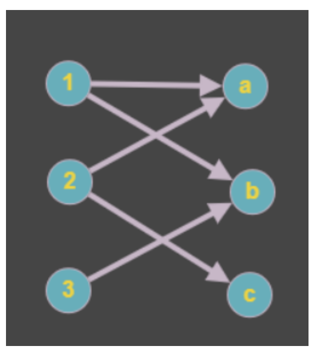

Figure 1: Grafo bipartito della relazione R

Utilizzando un grafo bipartito è semplice stabilire se la relazione R è una **funzione** e in caso se si tratta du una funzione **totale** o **parziale**, per farlo ovviamnete guardo le freccie che partono da ogni nodo d'origine.

2.3 Rappresentazione mediante grafo orientato

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R \subset A * A$
$R = \{<1, 1>, <2, 4>, <3, 1>, <4, 1>, <4, 4>\}$

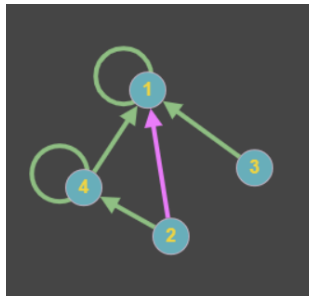

Figure 2: Grafo orientato della relazione R

Tramite il grafo orientato possiamo analizzare svariate cose:

- **Cammino**: Una sequenza di nodi dove ciascun nodo è legato al successivo da un arco uscnete dal primo ed entrante nel secodno.
- **Semicammino**: Una sequenza di nodi uniti da un arco del quale non conta la direzione della freccia.
- **Nodi Pozzo**: Un nodo senza archi uscenti.
- **Nodi Isoalti**: Un nodo senza archi.
- **Nodi Sorgente**: Un nodo senza archi entranti.
- **Cappi**: Un arco che torna al suo nodo.
- **Proprietà dei singoli nodi**:
  - **Ciclo**: Cammino che va da quel nodo a se stesso.
  - **Semiciclo**: Semicammino che va da quel nodo a se stesso.
- **Proprietà di una coppia di nodi**:
  - **Simmetria**: Dati due nodi esiste una freccia che va dal primo al secondo e viceversa.
  - **Asimmetrica**: Nessun nodo possiede un arco entrante che parte da un nodo in cui entra un suo arco.
- **Chiusura trasitiva**: Dati 3 nodi a, b, c se esiste un arco tra a, b e b, c allora posso definire un terzo arco a, c.

2.3.1 Approfondimento sui grafi

Grafi connessi Sono tutti quei grafi in cui presi due nodi distinti è sempre presente un semicammino che li unisce.

DAG Un DAG è un grafico che non presenta nessun ciclo al suo interno, il DAG più importante è l'**albero**.

Albero Un albero è composto da tre elementi, che sono:

- **Radice**: Unico nodo **Sorgente**.
- **Nodi**: Tutti i nodi **nè pozzo nè sorgente**.
- **Foglie**: Tutti i nodi **Pozzo**.

Parte superflua ma interessante: Definito l'albero è possibile fare ancora un ulteriore classificazione e definire un **albero binario**, con ciò si intende un albero che possiede per ogni nodo al più due archi uscenti, *ulteriore restrizione può essere fatta con gli **alberi strettamnete binari** nei quali ogni nodo possiede o 0 o 2 archi uscenti, andando ancora più in dettaglio si possono definire gli alberi **strettamnete binari bilanciati** nei quali ogni cammino ha la stessa lunghezza,* possimao dunque arrivare a definire un **albero di ricerca**.

Albero di ricerca Si tratta di un **albero binario bilanciato** che rispetta alcune regole sia come albero sia in ogni suo sotto-albero.
tali regole sono:

- Il sottoalbero *sx* è composto solo da nodi che hanno valore minore rispetto al nodo di origine X.
- Il sottoalbero *dx* è composto solo da nodi che hanno valore maggiore rispetto al nodo di origine X.
- Sia il sottoalbero *dx* che *sx* devono essere alberi di ricerca.

3 Le relazioni di ordinamento

Data una relazione R definita negli insiemi $S * S$ si dice che R è un:

- **PreOrdine** se possiede le seguenti proprietà:
  - **Riflessività**
  - **Trasitività**
- **Ordine Largo** *(parziale o semiOrdine)* se possiede le seguenti proprietà:
  - **Riflessività**
  - **Trasitività**
  - **Antisimmetria**
- **Ordine Stretto** se possiede le seguenti proprietà:
  - **Trasitività**
  - **Asimmetria**

Le definizioni delle proprietà si trovano qui.

3.1 Diagramma di Hasse

Si tratta di una più semplice rappresentazione di una relazione di ordine largo.

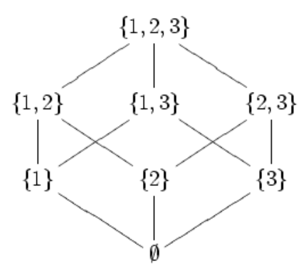

Figure 3: Diagramma di hasse di una relazione R

Questo diagramma rappresenta intrinsecamente le proprietà di un ordine largo.

- Ogni nodo ha un cappio, anche se non esplicitamente diseganto. **Riflessività**
- Dato un nodo $n1$ unito ad $n2$ ed un nodo $n2$ unito ad $n3$ il nodo $n1$ sarà unito al nodo $n3$ anche se l'unione non sarà riportata graficamente. **Trasitività**
- Il grafo andrà letto dal basso verso l'alto anche se gli archi non avranno verso.

4 Massimi, minimi ecc.

Data una struttura S che rappresenta un qualsiasi tipo di relazione è possibile individuare alcuni elementi che sono massimali, minmali, maggioranti, minoranti, massimi e minimi.

4.1 Minimali e Massimali

Sono in assoluto il più grande ed il più piccolo elemento dell'insieme S.

4.2 Minoranti e Maggioranti

Dato un sottoinsieme X di S minoranti e maggioranti sono un qualsiasi elemento di S *(anche non di X)* che è più grande o più piccolo di tutti gli elementi di X.

4.2.1 Minimo maggiorante e Massimo minorante

Un elemento s è minimo maggiorante se è il più piccolo tra i maggioranti di X, mentre è massimo minorante se è il più grande dei minoranti di X.

4.3 Massimo e Minimo

Definiti Minimo maggiorante e Massimo maggiorante se questi appartengono all'insieme X sono detti Minimi e Massimi dell'insieme.

Inutile ma interessante: Il minimo è utile per definire un sistema **ben fondato**, in quanto un ordinamento è detto tale solo se ogni suo sottoinsieme possiede un minimo.

5 I reticoli

Un reticolo è un particolare ordine largo *(Le definizione si trova qui)* rappresentato attraverso un diagramma di hasse che in più possiede questa caratteristica:

- Dati **2 elementi** qualsiasi dell'insieme si ha sempre un **massimo minorante ed un minimo maggiorante comune**.

Come abbiamo detto per ogni coppia di nodi abbiamo massimo minorante e minimo maggiorante, che sono definiti come:

- $x \sqcup y$ join, massimo minorante.
- $x \sqcap y$ meet, minimo maggiorante.

Da questo ne deducaimo che in un reticolo è sempre possibile individuare **massimo e minimo assoluto**.

6 I tableaux

I tableaux sono utilizzati per dimostrare la veridicità di un teorema o di una **FBF**[1] all'interno di una logica proposizionale. Definita una logica L con 4 costanti logiche ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$) possiamo utilizzare i tableaux per determinare se una **FBF** del linguaggio è:

- Una **tautologia**: sempre vera.
- Una **contradizione**: mai vera.
- Una **Formula soddisfacibile**: a volte vera a volte falsa.

Costanti logiche	T-Regole	F-regole
$\neg$	$T(\neg A) = F(A)$	$F(\neg A) = T(A)$
$\vee$	$T(A \vee B) = T(A)/T(B)$	$F(A \vee B) = F(A), F(B)$
$\wedge$	$T(A \wedge B) = T(A), T(B)$	$F(A \wedge B) = F(A)/F(B)$
$\rightarrow$	$T(A \rightarrow B) = F(A)/T(B)$	$F(A \rightarrow B) = T(A), F(B)$

Un tableaux si dice chiuso quando in ogni suo ramo ho una contraddizione, ossia una stessa formula segnata come vera e come falsa, non è importante in che ordine applico le regole, basta solo applicare le giuste precedenze.

7 I tableaux nella logica predicativa

In questi tableaux indroduco oltre alle regole già note la regola per il $\forall$ e per l'$\exists$.

Costanti logiche	T-Regole	F-regole
$\forall$	$T(\forall x A(x)) = T(A(a)), T(\forall x A(x))$	$F(\forall x A(x)) = F(A(b))$
$\exists$	$T(\exists x A(x)) = T(A(a))$	$F(\exists x A(x)) = F(A(a)), F(\exists x A(x))$

Nota bene: Nel caso dell'esiste vero e del per ogni falso devo usare variabili mai presenti nel tableaux, è quindi consiglaito applicarle per prime.

[1]Per FBF di un linguaggio si intende una formula ben formata, ossia una formula che rispetta le regole della logica a cui ci si sta riferendo.

8 Traduzione in linguaggio di primo ordine

Avendo una frase di un linguaggio *(come per esempio una frase in italiano)* per tradurla in linguaggio di prim'ordine devo definire la segnatura:

- **Costanti**, spesso nomi propri.
- **Funzioni**, utili per ottenere da un elemento x uno e un solo elemento y.
- **Predicati**, verbi, aggettivi, ecc.

Per rendere più comprensibile riporto qualche esempio:

1. ”Socrate è un uomo”
2. ”Tutti gli uomini sono mortali”
3. ”Socrate è mortale”

Scrivo la segnatura

- **Costanti**: Socrate
- **Funzioni**: /
- **Predicati**: $uomo(x), mortale(x)$

Traduco le frasi

1. $uomo(Socrate)$
2. $\forall x(uomo(x) \rightarrow mortale(x))$
3. $mortale(Socrate)$