Continuità

Sia $f : X \to R$ e $x_0 \in X$

- Se x_0 è un punto ISOLATO f è continua in x_0 in quanto una funzione è continua in ogni punto isolato
- Se x_0 è un punto di ACCUMULAZIONE, f è continua in x_0 SE e SOLO SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \wedge l = f(x_0)$

> ⚠️ Si dice che una funzione $f : X \to R$ è continua in tutto X se è continua in ogni punto di X
> Le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio in quanto è possibile trovare per ogni punto x_0 un intorno nel dominio.

TIPI DI DISCONTINUITA'

- Discontinuità di I specie (salto): $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L' \wedge L \neq L' \wedge L, L' \in R$ la distanza tra L ed L' è detta SALTO di f in x_0
- Discontinuità di II specie: almeno uno dei due limite non esiste o è infinito.

- Discontinuità di III specie (eliminabile): $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$. Si chiama eliminabile perché basta definire $f(x)_0 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e la discontinuità è risolta

osservazione

Una funzione può essere resa continua in x_0 assegnandogli il valore del suo limite.

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI CONTINUE

- OPERAZIONI ALGEBRICHE

  siano $f(x)$, $g(x)$ $continue\ su\ R$: allora sono continue anche
  $f(x) \pm g(x)$
  $f(x) \cdot g(x)$
  $\frac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$
  $g(x) \circ f(x)$ (se è lecito comporle)

- PERMANANEZA DEL SEGNO

  Se $f : X \to R, x_0 \in X$ e x_0 di accumulo, SE $f(x)$ è continua in X e $f(x_0) > 0$ ALLORA

  $\exists r > 0, f(x) \forall x \in X \subset (x_0 - r, x_0 + r)$