Le serie

Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione, definiamo **serie** di termine generale a_k l'operazione che associa ad $\{a_k\}$ la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dove $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$

Indichiamo come $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$ la successione delle somme parziali

Esempio:

$a_k = (-1)^k \rightarrow (1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1\ ecc)$

Le somme parziali di a_k sono: $s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 0, s_n = \frac{1+(-1)^2}{2}$

SERIE CON TERMINE GENERALE DI SEGNO COSTANTE

Supponiamo che sia $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ *vale anche per* $\leq$

Sia $\sum_{k=o}^{+\infty} a_k, a_k \geq 0$ allora la serie è regolare, ossia o converge o diverge.

CONVERGENZA

> 🚨 Diciamo che la serie di termine generale a_k è **convergente** se **esiste** ed **è finito** il limite di s_n per $n \to +\infty$, se questo limite esiste si chiamerà S e sarà la somma della serie: $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n = S$

Teorema necessario per la convergenza

Se $\sum_{k=o}^{+\infty} a_k$ **converge,** allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ **MA** non è vero che se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ allora $\sum_{k=o}^{+\infty} a_k$ converge.

Convergenza assoluta

Se data una serie $\sum_{k=o}^{+\infty} a_k$ la serie $\sum_{k=o}^{+\infty} |a_k|$ **converge** si dice che la serie è **convergente assoluta**, e se la serie con termine generale $|a_k|$ converge assolutamnete allora la serei con termine a_k **converge semplicemente**

DIVERGENZA

La serie tende a $\pm\infty$

PROPRIETA'

- Data $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$ cambiando un numero finito di valori della serie il suo carattere non cambia.
- Data $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$ e $c \neq 0$ la serie $\sum_{n=o}^{+\infty} ca_n$avrà lo stesso carattere di $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n = \pm\infty$ se diverge oppure $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n = cS$ se la serie converge
- Date due serie $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=o}^{+\infty} b_n$:

- Se convergono una ad S e l'laltra ad S' allora $\sum_{n=o}^{+\infty}(a_n+b_n)=S+S'$
- Se $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=o}^{+\infty}(a_n+b_n)$ diverge

---

SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=o}^{+\infty} x^n$

(si chiama serie geometrica di ragione x)

$\sum_{n=o}^{+\infty} x^n$

(si chiama serie geometrica di ragione 6)

ecc..

Tutte le serie geometriche hanno $S_n = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}\begin{cases} x>1 \text{ diveregnte a } +\infty \\ -1<x<1 \text{ convergente a } \frac{1}{1-x} \\ x \leq -1 \text{indeterminata} \end{cases}$

es:

$\sum_{n=o}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$ base compresa tra -1 e 1 quindi converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$

SERIE TELESOPICHE

$\sum_{n=o}^{+\infty} a_k$ dove $a_k = b_k - b_{k+1}$

$\sum_{n=o}^{+\infty}[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}] = S_n$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} =$
$= 1-\frac{1}{n+2}=1$

(si chiama serie geometrica di ragione x)