Principio di induzione: esempi ed esercizi

Principio di induzione:

Se una proprietà $\mathcal{P}(n)$ dipendente da una variabile intera n vale per $n = 1$ e se, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ allora $\mathcal{P}$ vale su tutto $\mathbb{N}$.

Variante del principio di induzione:

Se una proprietà $\mathcal{P}(n)$ dipendente da una variabile intera n vale per un intero n_0 e se, per ogni intero $n \geq n_0$ vale $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ allora $\mathcal{P}$ vale da n_0 in poi. (n_0 può essere un intero relativo).

Esercizi:

Si possono dimostrare per induzione le seguenti proprietà:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$

5. Se $\quad x > -1 \quad$ allora $\quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$

6. $n! \geq 2^{n-1}.$

7. $n^2 > 2n + 1 \quad$ per ogni intero $n \geq 3$.

8. $2^n > n^2 \quad$ per ogni intero $n \geq 5$.

9. $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) \qquad$ da cui segue
   $\displaystyle 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad$ per ogni $q \neq 1$.

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}.$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$

13. $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$

Dimostrazioni.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
Supposta vera per n verifichiamo per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. La proprietà è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1 = 1^2$.
Supposta vera per n verifichiamo per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right) + (2n+2-1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Vero per $n = 1 : 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Verifica che $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. Vero per $n = 1$. Verifica che $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

5. $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Per $n = 1$ vale l'uguaglianza. $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

si noti che la prima disuguaglianza della riga precedente vale perché $1 + x > 0$ e la seconda perché $nx^2 \geq 0$.

6. $n! \geq 2^{n-1}$: banalmente vera (con l'uguale) per $n = 1$ e per $n = 2$.
$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$, infatti

$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ perché $n + 1 \geq 2$.

7. $n^2 > 2n + 1$ per ogni intero $n \geq 3$. Falso per $n = 1$ e per $n = 2$, vero per $n = 3$.

$\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ per ogni $n \geq 3$, infatti
$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n+1) + 2n + 1 \geq 7 + 2n + 1 = 2n + 8 > 2(n+1) + 1$.

8. $2^n > n^2$ per ogni intero $n \geq 5$. La proposizione è falsa per $n = 1, 2, 3, 4$ vera per $n = 5$.

Per ogni $n \geq 5$ si ha $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$ per la proposizione precedente.

9. $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$
Ovvio per $n = 1$. Per il passaggio da n ad $n+1$ si può procedere così:
$a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1} = a^n (a-b) + b\,(a^n - b^n) =$
$= a^n (a-b) + b\,(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right) =$
$= (a-b)\left(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n\right).$
Ponendo nella formula precedente $a = 1, b = q$ si ottiene (per $q \neq 1$)
$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ che può essere verificata, nel passaggio da n ad $n+1$, così:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

N. B. Da $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ si ottiene $q \cdot S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} q^k = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$
da cui, sottraendo de due uguaglianze,
$S_n - qS_n = (1-q)\,S_n = 1 - q^{n+1}$, quindi $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

10. Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi. Ovvio per $n = 1$.

Supponiamo che E_n abbia 2^n sottoinsiemi e sia $E_{n+1} = E_n \cup \{z\}$ (dove $z \notin E_n$).

Dividiamo i sottoinsiemi di E_{n+1} in due famiglie: quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che non contengono z e quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che lo contengono.

La prima famiglia è costituita da tutti i sottoinsiemi di E_n (che sono 2^n), ogni insieme della seconda famiglia può essere costruito come unione di $\{z\}$ con un insieme della prima: abbiamo ancora 2^n insiemi: In tutto $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

11 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$. Per $n = 1$ si ha $\dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{2+1}$.

Per il passaggio da n ad $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Osservazione: questa uguaglianza può essere dimostrata direttamente tenendo conto che
$\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$ quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

N. B. Nei passaggi precedenti si è fatto un cambiamento di variabile: ponendo $k = h - 1$ si ottiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{h=2}^{n+1} \frac{1}{2h-1}$. Si sono poi semplificati tutti i termini che compaiono col segno opposto nella prima e nella seconda somma.

12 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Per $n = 1$ si ha $\dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{3}{2}$. Per il passaggio da n ad $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

Osservazione: per questa uguaglianza, come per la maggior parte delle precedenti, è essenziale verificarne la validità per almeno un valore di n : l'implicazione $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vale anche in $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 7 - \frac{n+2}{2^n}$ ma questa uguaglianza è sempre falsa (a 7 si può sostituire qualunque numero diverso da 2 e l'uguaglianza resta falsa).

13. $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$

È bene ricordare che per ogni $n > 0$ e per ogni $k : 0 < k < n$ vale l'uguaglianza

$\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ infatti

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = (n-1)! \cdot \frac{n-k+k}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

L'uguaglianza

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$$

è vera per $n = 1$. Supposta vera per $n - 1$ cioè

$$(a+b)^{n-1} = a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 + \binom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 + \cdots + \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + \cdots + b^{n-1}$$

scriviamo (incolonnando i fattori simili)

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} (a+b) =$$

$$= \left\{ a^{n-1} + \tbinom{n-1}{1} a^{n-2} b^1 + \tbinom{n-1}{2} a^{n-3} b^2 + \cdots + \tbinom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + \cdots + b^{n-1} \right\} \cdot (a+b) =$$

$$= \begin{array}{cccccccccccc} a^n + & \tbinom{n-1}{1} a^{n-1} b^1 & + & \tbinom{n-1}{2} a^{n-2} b^2 & + \cdots + & \tbinom{n-1}{k} a^{n-k} b^k & + \cdots + & a b^{n-1} & & + & \\ & a^{n-1} b^1 & + & \tbinom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 & + \cdots + & \tbinom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k & + \cdots + & \tbinom{n-1}{n-2} a b^{n-1} + & & & b^n \end{array}$$

ed otteniamo il risultato: il coefficiente di $a^{n-k} b^k$ è: $\displaystyle\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Esercizi.

$i)$ Calcolare il coefficiente di $\quad x^9y^{12} \quad$ nello sviluppo di $\quad \left(\frac{2}{3}x^2y - \frac{3}{4}\frac{y^2}{x}\right)^9.$

$$\left(\frac{2}{3}x^2y - \frac{3}{4}\frac{y^2}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^k\left(-\frac{3}{4}\frac{y^2}{x}\right)^{9-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^{2k}y^k\left(-\frac{3}{4}\right)^{9-k} y^{18-2k}x^{k-9} = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{3}{4}\right)^{9-k} x^{3k-9}y^{18-k}.$$

Deve essere $k = 6$ quindi il coefficiente cercato è

$$\binom{9}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6\cdot 3^3}{3\cdot 2\cdot 3^6\cdot 4^3} = -\frac{28}{9}.$$

$ii)$ Risolvere l'equazione $\quad 8\cdot\binom{n}{17} = 9\cdot\binom{n}{15} \quad$ **(n intero maggiore di 16)**

Ricordando che

$$\binom{n}{17} = \frac{n!}{17!\cdot(n-17)!} \quad , \quad \binom{n}{15} = \frac{n!}{15!\cdot(n-15)!}$$

l'equazione è:

$8\cdot\dfrac{n!}{17!\cdot(n-17)!} = 9\cdot\dfrac{n!}{15!\cdot(n-15)!} \quad$ semplificando per $n!$

$\dfrac{8}{17!\cdot(n-17)!} = \dfrac{9}{15!\cdot(n-15)!} \quad$ e riscrivendo meglio

$$\frac{8}{17\cdot 16\cdot 15!\cdot(n-17)!} = \frac{9}{15!\cdot(n-15)\cdot(n-16)\cdot(n-17)!}$$

semplificando ancora per tutto il semplificabile

$\dfrac{8}{17\cdot 16} = \dfrac{9}{(n-15)\cdot(n-16)} \quad$ dunque $\quad (n-15)\cdot(n-16) = 18\cdot 17.$

Le soluzioni sono $\quad n = -2 \quad$ e $\quad n = 33 \quad$ quindi l'unica soluzione è $\quad n = 33.$

$iii)$ Risolvere l'equazione $\binom{n}{5} = \binom{n}{8} \quad$ **(n intero maggiore di 8)**

Da $\quad \dfrac{n!}{5!\cdot(n-5)!} = \dfrac{n!}{8!\cdot(n-8)!} \quad$ si ottiene l'equazione (di terzo grado)

$(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7) = 8\cdot 7\cdot 6 \quad$ cioè

$n^3 - 18n^2 + 107n - 13\cdot 42 = 0.$

Certamente $n = 13$ è soluzione, per la simmetria del coefficiente binomiale. Dividendo per $(n-13)$ ci si accorge che non esistono altre soluzioni reali:

$n^3 - 18n^2 + 107n - 546 = (n-13)\,(n^2 - 5n + 42)$

$iv)$ Risolvere l'equazione $\binom{n}{5} = \binom{n}{9} \quad$ **(n intero maggiore di 9)**

Procedendo come sopra si ottiene l'equazione di quarto grado

$(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ cioè
$n^4 - 26n^3 + 251n^2 - 1066n - 1344$.
Di questa equazione conosciamo la soluzione $n = 14$ e si può verificare che anche $n = -1$ è soluzione dell'equazione (per noi da scartare, almeno per il momento). Non esistono altre soluzioni reali:
$n^4 - 26n^3 + 251n^2 - 1066n - 1344 = (n-14)(n+1)(n^2 - 13n + 96)$.

v) Calcolare $\displaystyle\sum_{k=6}^{n} (4k-1)$.

Ricordando che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ si ottiene:

$$\sum_{k=6}^{n} (4k-1) = 4\sum_{k=6}^{n} k - \sum_{k=6}^{n} 1 = 4\left(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{5} k\right) - (n-5) =$$
$$4\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2}\right) - (n-5) = 2n(n+1) - 60 - n + 5 = 2n^2 + n - 55.$$

Altre proprietà che si possono verificare per induzione.

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^n}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$.
- Per ogni a intero dispari 2^{n+2} divide $a^{2^n} - 1$ (per induzione su n).
- $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.
- Ogni insieme finito ammette sempre sia massimo che minimo.