

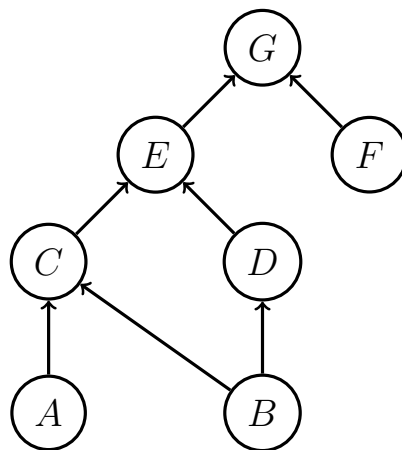
Fondamenti dell'Informatica

Esercitazione 5

(CON RISPOSTE)

Esercizio 1. Ordini parziali e Diagrammi di Hasse 1

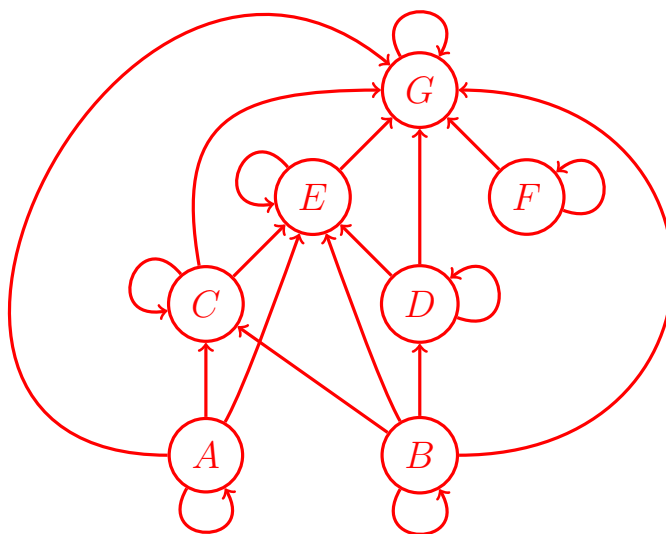
Si consideri il seguente grafo G basato sulla relazione R :



1. Il grafo rappresenta un ordine parziale? In caso contrario, come trasformare la relazione R affinché ne risulti un nuovo grafo G_1 rappresentante un ordine parziale?
2. Si consideri G_1 , e si prendano i sottinsiemi $X = \{E, C, D\}$ e $Y = \{A, C, D\}$. Indicare, se presenti:
 - Elementi minimali e massimali in G_1
 - Elementi minimi e massimi in G_1
 - Minoranti di X e Y in G_1
 - Maggioranti di X e Y in G_1
 - Massimi minoranti di X e Y in G_1
 - Minimi maggioranti di X e Y in G_1
3. Rappresentare G_1 come diagramma di Hasse.

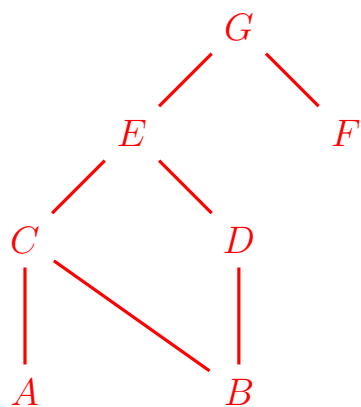
Risposta 1.

1. Il grafo G non rappresenta un ordine parziale, perché non vengono rispettate, riflessività e transitività. Trasformando R in modo che queste proprietà vengano osservate, si ottiene il seguente grafo G_1 :



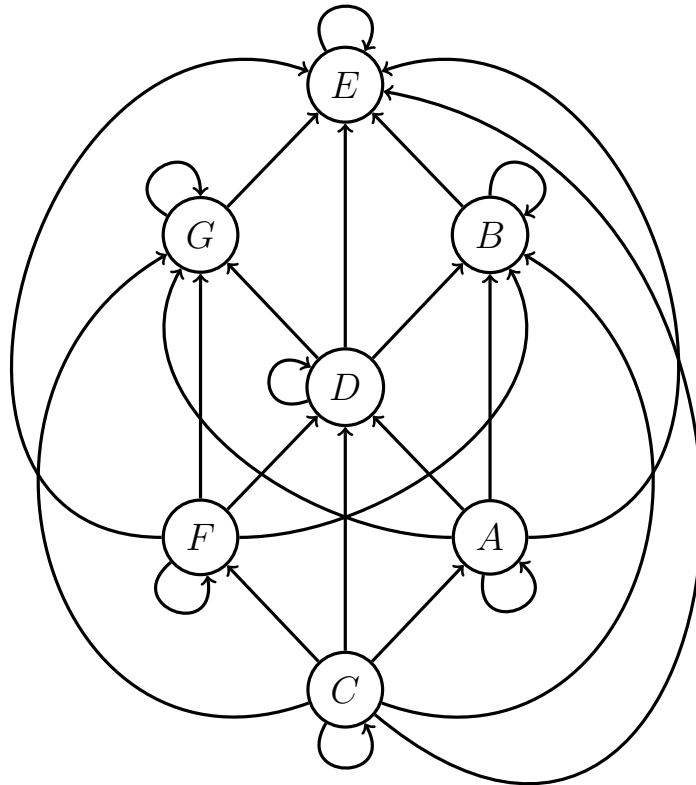
2. Considerato G_1 e i sottinsiemi $X = \{E, C, D\}$ e $Y = \{A, C, D\}$ si hanno:
 - Minimali = $\{A, B, F\}$, Massimali = $\{G\}$.
 - Minimi = $\{\}$, Massimi = $\{G\}$.
 - Minoranti per $X = B$, Minoranti per $Y = //$.
 - Maggioranti per $X = E, G$, Maggioranti per $Y = E, G$.
 - Massimi minoranti per $X = B$, Massimi minoranti per $Y = //$.
 - Minimi maggioranti per $X = E$, Minimi maggioranti per $Y = E$.

3. Rappresentazione di G_1 come diagramma di Hasse:



Esercizio 2. Ordini parziali e Diagrammi di Hasse 2

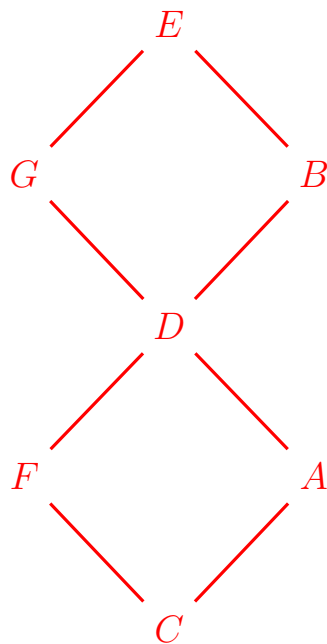
Si consideri il seguente grafo G :



1. Verificare se il grafo rappresenti un POSET;
2. In caso il grafo non sia un POSET, renderlo tale per poi trasformarlo in un diagramma di Hasse;
3. Determinare se il grafo sia un reticolo motivando la risposta.

Risposta 2.

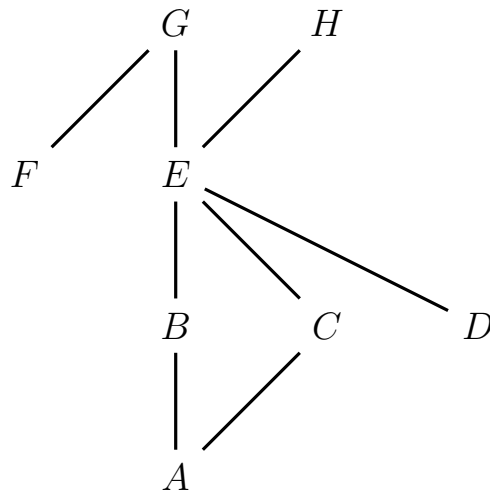
1. Il grafo presentato in figura è un ordine parziale, dato che vengono rispettate riflessività, antisimmetria e transitività.
2. Rappresentazione di G in diagramma di Hasse:



3. Il grafo presentato risulta essere un reticolo, in quanto ogni coppia di elementi possiede sia un estremo inferiore che un estremo superiore.
-

Esercizio 3. Diagrammi di Hasse 1

Si consideri il seguente diagramma di Hasse:



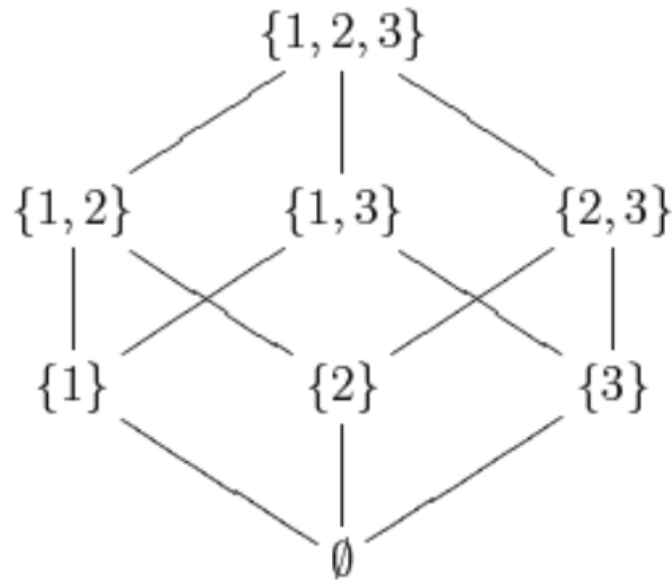
1. Elencare le proprietà di cui gode la relazione rappresentata dal diagramma di Hasse.
2. Si prendano i sottinsiemi $X = \{B, C\}$, $Y = \{B, E, G\}$ e $Z = \{F, D\}$. Indicare, se presenti:
 - Elementi minimali e massimali del diagramma di Hasse
 - Elementi minimi e massimi del diagramma di Hasse
 - Minoranti di X , Y e Z
 - Maggioranti di X , Y e Z
 - Massimi minoranti di X , Y e Z
 - Minimi maggioranti di X , Y e Z
3. Il diagramma di Hasse rappresenta un reticolo?

Risposta 3.

1. Dato che i diagrammi di Hasse si usano per rappresentare insiemi parzialmente ordinati, la relazione rappresentata dal diagramma di Hasse gode di riflessività, antisimmetria e transitività.
 2. Presi i sottinsiemi $X = \{B, C\}$, $Y = \{B, E, G\}$ e $Z = \{F, D\}$ si ha che:
 - Minimali = $\{A, D, F\}$, Massimali = $\{G, H\}$
 - Minimi = $\{\}$, Massimi = $\{\}$
 - Minoranti per $X = A$, Minoranti per $Y = B, A$, Minoranti per $Z = //$
 - Maggioranti per $X = E, G, H$, Maggioranti per $Y = G$, Maggioranti per $Z = G$
 - Massimi minoranti per $X = A$, Massimi minoranti per $Y = B$, Massimi minoranti per $Z = //$
 - Minimi maggioranti per $X = E$, Minimi maggioranti per $Y = G$, Minimi maggioranti per $Z = G$
 3. Il diagramma di Hasse non rappresenta un reticolo perché non viene rispettata la presenza di un minimo maggiorante e di un massimo minorante per ogni coppia di nodi presi arbitrariamente.
-

Esercizio 4. Diagrammi di Hasse 2

Si consideri il seguente diagramma di Hasse:



1. Trasformare il diagramma di Hasse in un grafo diretto;
2. Utilizzare il diagramma di Hasse per dimostrare che si tratta di un reticolo;
3. Dire se il reticolo in questione risulti essere complementato.