

## ANALISI MATEMATICA 1

### Funzioni elementari

Trovare le soluzioni delle seguenti disequazioni.

$$(1) \frac{x}{2} + \frac{4}{5} > \frac{8+5x}{10}$$

$$(2) 5x + 10 > 0, \quad x - 4 < 0$$

$$(3) \frac{x-2}{x-3} \geq 1$$

$$(4) \frac{x+1}{x+2} > \frac{3}{2x+4}$$

$$(5) 5x^2 - 4x - 2 \geq (x+2)(x-2)$$

$$(6) x^2 - x + 2 > 0, \quad x^2 + 5x + 6 \leq 0, \quad x^2 > 5x$$

$$(7) \sqrt{x^2+1} < \sqrt{4x^2-1}$$

$$(8) \sqrt{3x^2-2x-1} < 2$$

$$(9) x+2 < \sqrt{4-x^2}$$

$$(10) 5^{2x-1} - 5^x + \frac{4}{5} > 0$$

$$(11) \frac{e^{3x} - 4e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$(12) \frac{\log_2 x - 1}{\log_{1/2} x - 1} > 0$$

$$(13) |\log_5(x+1)| - 2 > 0$$

$$(14) \sin^2 x - 2 \sin x > 0$$

$$(15) \tan^2 x - \tan x < 0$$

## ANALISI MATEMATICA 1

## Numeri complessi

Determinare la forma algebrica o trigonometrica dei seguenti numeri complessi

$$(1) \frac{1-i}{1+i} + i - \frac{1}{i}$$

$$(2) 1+i, \quad \sqrt{3}-i$$

$$(3) \frac{(2+i)(5-\frac{1}{2}i)}{(1+\frac{1}{2}i)}$$

$$(4) 3-3i$$

Risolvere le seguenti equazioni:

$$(1) |z-i| = |z+1|$$

$$(2) z + |z|^2 = 2$$

$$(3) |z|^2 - z|z| + z = 0$$

$$(4) z^2 + 2|z|^2 + (\bar{z})^2 = 1$$

$$(5) (z+i)^4 = 4$$

$$(6) z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$$

$$(7) z^3 = i - 1$$

$$(8) z^3 = -4 + 4i$$

$$(9) \text{ Trovare le radici dell'equazione complessa } 2\sqrt{3}|z|^2 z^2 = 3 + i\sqrt{3}$$

$$(10) \text{ Dire se il seguente sistema di equazioni ammette soluzioni } z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} |z-2| = 1, \\ |z-2-3i| = 2 \end{cases}$$

ed eventualmente trovarle tutte.

$$(11) \text{ Considerato il polinomio } p(z) = z^4 + z^3 - 11z^2 + z - 12 \text{ calcolare } p(i) \text{ dopodiché trovare le radici dell'equazione complessa } p(z) = 0.$$

$$(12) \text{ Trovare le soluzioni complesse dell'equazione } (z-1)^4 + 16 = 0.$$

$$(13) \text{ Sapendo che } 1+i \text{ e } 2-i \text{ sono radici del seguente polinomio complesso } p(z) = z^5 - 12z^4 + 51z^3 - 108z^2 + 118z - 60, \text{ dire se } p \text{ ammette radici puramente reali e/o puramente immaginarie.}$$

$$(14) \text{ Dire se l'equazione } (z+1)^3 = e^{i\pi/4} \text{ ammette radici complesse di modulo maggiore di 3.}$$

## ANALISI MATEMATICA 1

## Esercizi sulle successioni e i limiti

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + 3n - 1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - n + 1}{2n^2 - 3n + 2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^3 + n^2 - 1}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2}{5 - n^2}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 + n}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 1}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + 2n}{n - \sqrt{n + 1}}$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n + 3}{\log_{10} n + 1}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cos n}{n \sqrt{n} + 2}$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n \cos n}{\sin n - 2n}$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{12} + n^4 \cos n}{\sin n - 2^n}$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

$$(14) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

$$(15) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$$

$$(17) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n^2}$$

$$(18) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2}$$

$$(20) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n} + 5^n}{6^n}}$$

$$(21) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^n)}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$(22) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\sin^2 \frac{1}{n}}$$

$$(23) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$(24) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{1}{n^3}\right) \left(\frac{n^4 - 1}{n + 1}\right)$$

$$(25) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2n!}$$

$$(26) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$(27) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{dove } a_1 = \alpha > 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} - 1$$

$$(28) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{dove } a_1 = \alpha > 0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n + (a_n)^2$$

$$(29) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{dove } a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

## ANALISI MATEMATICA 1

**Limiti di funzioni**

Calcolare i seguenti limiti di funzioni:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2x^2}{3x^2 - 2\sqrt{x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/3} - x^{1/2}}{\log x^9 + x^7}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + x)}{\log(1 + 3x)}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2} - x}{x \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2} - x}{x \arctan x^2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 3 \tan x}{e^{x/2} - 1}$$

## ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle funzioni continue**

- (1) Esempi sul Teorema di Weierstrass:
  - (a) La funzione  $x - x^2$  definita su  $(0, 1)$  ha massimo ma non ha minimo.
  - (b) La funzione  $\sqrt{\sin x}$  ha massimo e minimo nel suo dominio.
  - (c) La funzione  $\frac{1}{1+x^2}$  ha massimo ma non ha minimo in  $\mathbb{R}$ .
  - (d) La funzione  $\frac{x}{1+x^2}$  ha massimo e minimo in  $\mathbb{R}$ .
  - (e) La funzione  $\arctan x$  non ha massimo né minimo in  $\mathbb{R}$ .
  - (f) La funzione  $\frac{1}{x}$  ha massimo e minimo in  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ .
- (2) Esempi sul Teorema di esistenza degli zeri e dei valori intermedi:
  - (a) L'equazione  $x^4 - 2x^2 + 1 = k$  ha 2 soluzioni per  $k = 0$ , 4 soluzioni per  $0 < k < 1$ , 3 soluzioni per  $k = 1$ , 2 soluzioni per  $k > 1$ , nessuna soluzione per  $k < 0$ .
  - (b) L'equazione  $|x^2 - 1|^2 = k$  ha, al variare di  $k$ , lo stesso numero di soluzioni dell'equazione precedente.
  - (c) L'equazione  $e^x = x^2 - 2x + k$  ha almeno una soluzione per ogni  $k \in \mathbb{R}$ .
  - (d) Provare che esiste almeno una soluzione in  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  dell'equazione  $\tan x + e^x - 5 = 0$ .
- (3) Il valore assoluto è una funzione 1-lipschitziana.
- (4) La funzione  $\sin x^2$  non è uniformemente continua.
- (5) La funzione  $\sqrt{x}$  è uniformemente in  $[0, +\infty)$  ma non è lipschitziana.

## ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle derivate**

(1) Calcolare la derivata della funzione  $(3x^2 - 1)^8$ .

(2) Calcolare la derivata della funzione

$$\log \left( \frac{3x + 1}{4x^2 + 2} \right).$$

(3) Calcolare la derivata della funzione  $x^x$  e della funzione  $f(x)^{g(x)}$ , supponendo che  $f$  e  $g$  siano derivabili.

(4) Calcolare la derivata della funzione  $3^{\sin^2 x}$ .

(5) Calcolare la derivata della funzione  $\arcsin 9x$ .

(6) Definizioni e proprietà delle funzioni iperboliche e delle loro inverse.

(7) Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$ .

(8) Calcolare la derivata della funzione  $\arcsin \left( \sqrt{1 - x^2} \right)$ .

(9) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = x^2 + 3x - 1$  nel punto  $x = 1$ . Scrivere il vettore normale e il vettore tangente.

(10) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \left( \frac{1}{x} \right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(11) Studiare la funzione  $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ .

(12) Studiare la funzione  $f(x) = x \log x$ .

## ANALISI MATEMATICA 1

**Studi di funzioni**

Tracciare i grafici delle funzioni così definite

$$(1) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}.$$

$$(2) f(x) = \log |x| \sqrt{x}.$$

$$(3) f(x) = |x - 1| \sqrt{x + 1}.$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{3}x^3 \sqrt{1 - x^2}.$$

$$(5) f(x) = \log |x| - |x^2 - 3x + 2|.$$

$$(6) f(x) = x e^{\frac{1}{1-|x|}}.$$

$$(7) f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{|x^4 - 16|}.$$

$$(8) f(x) = \log |x^2 + x| - x.$$

$$(9) f(x) = x \log |x - 2|.$$

$$(10) f(x) = \log(|x| - \sqrt{2 + x}).$$

$$(11) f(x) = \arctan \sqrt{\left| \frac{2 - x}{x} \right|}.$$

$$(12) f(x) = x - \left( \frac{4x}{1 - \log |x|} \right).$$

$$(13) f(x) = 2|x| - \left( \frac{\log |x| + 1}{\log |x| - 1} \right).$$

$$(14) f(x) = |4x - 2x^2| e^{-x/2}.$$



## ANALISI MATEMATICA 1

**Uso della formula di Taylor per il calcolo di limiti**

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x - \arctan x^2}{x^\alpha}$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x^3} - \sin x}{\tan(x + x^2)}.$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 - 1 + \cos x^2}{x^8 + x^4}.$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x + x^2)} - \frac{1}{\log(1 + x)} \right).$
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)^2}{(e^{(x^2-9)} - 1)^4}.$
- (6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 3x - 4)^2}{\sqrt{x^2 - 15} - 1}.$
- (7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + x^2) - \sin x - x^2}{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}.$
- (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{\sin(1/x)}.$
- (9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha (1 - \cos x) \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (10)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - \cos \sqrt{2x}}{(\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x})^2} \log \left( 2 - \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right).$
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x\sqrt{1+x}) - 2x - x^2}{\log[\cos x + \frac{1}{2} \tan^2 x]}.$
- (12)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos x + 2 \log \cos x}{(2\sqrt{x} - \sqrt{x} \log 2 - 1)^2 - x^2}.$

## ANALISI MATEMATICA 1

**Calcolo di integrali**

$$(1) \int_3^5 \frac{\log(x^2 - 4)}{x^3} dx.$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-2x} \sqrt{1 - e^{-4x}} dx.$$

$$(3) \int \frac{4}{\sqrt{x+1}(4x+12\sqrt{x+1}+14)} dx.$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{2^x - 4}} dx.$$

$$(5) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 4}} dx.$$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx.$$

(7) Dire se il seguente integrale è convergente:

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1}\right) dx.$$

$$(8) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + \alpha} dx \quad (\alpha \geq 4).$$

$$(9) \int_2^3 \frac{1}{2x\sqrt{x-2}} dx.$$

$$(10) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$(11) \int_1^2 x \log(1 + x^2) dx.$$

$$(12) \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$$

$$(13) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - e}} dx.$$

## ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle serie**

- (1) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sin \left( n\pi + \frac{1}{\log n} \right) \right]^n.$$

- (2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right].$$

- (3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right).$$

- (4) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad (\alpha > 0).$$

- (5) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin \left( \tan \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{n^2} \right]^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

- (6) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[3]{8n^3 + 3n} - 2n \right)^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

- (7) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\log \left( e - \frac{1}{n} \right)}{\alpha} \right)^n \quad (\alpha > 0).$$

- (8) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n + n^2}}.$$

- (9) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \alpha^{-n+1}.$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

- (10) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{2n}{\sin(1/n)} - n^2 - \frac{1}{\sin^2(1/n)} \right].$$

- (11) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

- (12) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - \cos \frac{1}{n} \right) \log(n!)$$

- (13) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\log(n-1)}{\log n} \right)^{n\sqrt{n}}.$$

- (14) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+|x|^n}$$

al variare del parametro  $x \in \mathbb{R}$ .

## ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizi sulle successioni di funzioni**

- (1) Studiare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{3 + n^4 x^4}, \quad x \in [0, 1]$$

e dire se vale l'uguaglianza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

- (2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni definite su tutto
- $\mathbb{R}$
- da

$$f_n(x) = \left( \frac{1}{n} + \cos^2 x \right)^n$$

e calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx.$$

Rispondere alle stesse domande nel caso  $f_n(x) = \left( \frac{1}{n} + \cos^2 x \right)^{n^2}$ .

- (3) Dopo aver studiato la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2 x + 1}}, \quad x \in [0, 1],$$

calcolare il  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ ; si poteva prevedere il risultato?

- (4) Data la successione di funzioni
- $f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n^2}$
- (
- $x \in \mathbb{R}$
- ), studiarne la con-

vergenza, calcolare il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$  e verificare l'applicabilità dei teoremi noti sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

- (5) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \sin(nx) e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (6) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = (x^2 - x)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (7) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \left( x^{(n+1)/n} - x \right), \quad x > 0.$$

- (8) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (9) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

### Esercizi sulle serie di funzioni

- (1) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(x-1)^n}$$

e determinarne la somma.

- (2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1-x^2}{3x-1} \right)^n.$$

Calcolarne la somma.

- (3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (1 + \log x)^n.$$

Calcolarne la somma.

- (4) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}$$

e calcolarne la somma.

- (5) Studiare, al variare del parametro  $\alpha > 0$ , la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^\alpha} \log \left( 1 + \frac{x^2}{n^\alpha} \right).$$

- (6) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 4}{\sqrt{8} + x^2} \right)^n$$

e calcolarne la somma.

- (7) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^3(x-1)^n}.$$

- (8) Studiare la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (9) Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1};$$

giustificare i passaggi e il significato del risultato.

- (10) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e calcolarne la somma.

- (11) Calcolare la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$$

giustificando i passaggi e precisando l'insieme di convergenza.

- (12) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}.$$

- (13) Studiare la convergenza semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}$$

e calcolarne la somma.

- (14) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

- (15) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n.$$

- (16) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}.$$

- (17) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}.$$

- (18) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}.$$

- (19) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}.$$

- (20) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} x^n.$$

- (21) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2}.$$

- (22) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n n^3}.$$

- (23) Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x) = \frac{3x-4}{(x-1)^2}$$

e studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie ottenuta.

- (24) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( nx^{n-1} + \frac{\log^n 2}{n!} \right).$$

Calcolarne la somma.

- (25) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (1-4x^2)^{2n}.$$

- (26) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt{x}-1)^n}.$$

e calcolarne la somma.

- (27) Studiare, al variare del parametro
- $\alpha > 0$
- , la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^\alpha} \log \left( 1 + \frac{x^2}{n^\alpha} \right).$$

- (28) Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^\alpha}}$$

al variare del parametro  $\alpha > 0$ .

- (29) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x-1}{x^2+1} \right)^n.$$

- (30) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x + 1}{3^{n x}}.$$



- (31) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2} \sin(nx)}{n^2 x}.$$

- (32) Studiare la convergenza semplice e totale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\log n}.$$

- (33) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}.$$

- (34) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x+2}{x^2+1} \right)^n.$$

- (35) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n(x^2 + x + 1)}.$$

- (36) Sviluppare in serie di potenze di punto iniziale 0 la funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}.$$

- (37) Sviluppare in serie di Taylor centrata nel punto  $x = 0$  la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 3x + 2).$$

- (38) Studiare la convergenza semplice e totale della serie di funzioni definita da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \right)^{n/2}.$$

- (39) Determinare l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n-1} x.$$

- (40) Sviluppare in serie di Mac Laurin la seguente funzione:

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}),$$

precisando la convergenza della serie ottenuta. (*Suggerimento:* utilizzare lo sviluppo in serie della derivata di  $f$ )

- (41) Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^{nx^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (42) Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2-periodica

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & -1 < x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

e studiare la convergenza della serie ottenuta.

- (43) Studiare la serie di Fourier relativa al prolungamento periodico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi+x}{2} & x \in [-\pi, 0] \\ \frac{\pi-x}{2} & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- (44) Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1-x}{2} & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

e precisarne la convergenza puntuale ed uniforme.

- (45) Determinare la serie di Fourier della funzione 2-periodica definita in  $[-1, 1)$  da

$$f(x) = x^2.$$

Precisare il tipo di convergenza della serie trovata.

- (46) Calcolare la serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica definita nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = x^2$$

e precisarne la convergenza puntuale ed uniforme. Esplicitare nel caso in esame l'uguaglianza di Parseval.

- (47) Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

- (48) Determinare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2 definita da

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 \quad x \in [-1, 1[.$$

- Dire se tale serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente, totalmente su  $\mathbb{R}$ .
- Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

- Si può utilizzare il teorema di derivazione per serie per ottenere la serie di Fourier delle derivate della funzione  $f$ ?

- (49) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = e^x$  per  $x \in (-\pi, \pi)$  e discutere la convergenza della serie ottenuta.

- (50) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione 2-periodica definita nell'intervallo  $[0, 2]$  da

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1] \\ 4 - 2x & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Dire se  $f$  è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

Dedurre dal risultato precedente la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

- (51) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione 2-periodica definita nell'intervallo  $[0, 2]$  da

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Dire se  $f$  è sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

- (52) Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = |\sin x|.$$

- (53) Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $2\pi$ -periodica definita in  $[-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = x(\pi^2 - x^2)$$

- (54) Sviluppare in serie di Fourier la funzione  $2\pi$  periodica definita in  $[-\pi, \pi]$  da  $f(x) = x(\pi - |x|)$ . Utilizzare il risultato precedente e il teorema di derivazione per serie per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

- (55) Sviluppare in serie di soli coseni la funzione  $f$  definita nell'intervallo  $0 < x < 2$  come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}.$$

- (56) Calcolare lo sviluppo in soli seni della funzione 2-periodica definita da  $f(x) = 1 - x^2$  per  $x \in (0, 1)$  e discutere la convergenza della serie ottenuta.

- (57) Sviluppare in serie di soli seni la funzione  $f(x) = x^2$ , definita nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .

- (58) Sviluppare in serie di soli seni la funzione 4-periodica definita in  $[0, 2[$  da

$$f(x) = e^x - 1.$$

e studiare la convergenza della serie ottenuta.

- (59) Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione 2-periodica definita in  $[0, 1[$  da

$$f(x) = x^2(1 - x)$$

e, successivamente, precisare gli intervalli di convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.