Cose da sapere per l'orale di GAL

Francesco Romeo

Giugno 2022

1 Prodotto e somma tra matrici

1.1 Somma tra matrici

La somma tra matrici è possibile solo con matrici che hanno lo stesso numero di colonne e di righe: i valori che occupano lo stesso posto vengono sommati.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

1.2 Prodotto tra matrici

Il prodotto fra due matrici è possibile solo se le due matrici sono conformabili, ossia che il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. Per svolgere il prodotto si prende la prima riga della prima matrice e la prima colonna della seconda, si moltiplicano gli elementi corrispondenti *(primo con primo secondo con seconod etc.)* e si sommano, e così per tutte le righe e tutte le colonne.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*8+1*5 & 3*4+1*2 & 3*0+1*3 \\ 0*8+2*5 & 0*4+2*2 & 0*1+2*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 10 & 3 \\ 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2 Determinante di una matrice

Definizione: Il determinante di una matrice è un numero associato a ciascuna matrice quadrata, e ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche.

2.1 Proprietà del determinante

Matrice con determinante 0 Una matrice con determinante 0 sarà composta da elementi linearmente dipendenti.

Operazioni che non cambiano il determinante

1. Scrivere una riga come combinazione lineare di un altra *(lo stesso vale per le colonne)*.
2. Scomporre una matrice in due sottomatrici, il determinate della matrice originale sarà uguale alla somma delle due sottomatrici.
3. Trasporre una matrice non ne cambia il determinante.

Determinante di matrici particolari

1. La matrice nulla ha determinante uguale a 0.
2. La matrice identità ha determinate uguale a 1.

3 Rago ed indipendenza

3.1 Il rango

Definizioni:

- Il **rango** è il numero di righe con pivot di una amtrice ridotta a scala, ossia il numeroo di vettori linearmente indipendenti che costituiscono la matrice.
- Il rango di una matrice è anche:
  1. L'**ordine massimo** delle **sottomatrici** quadrate con det. non nullo.
  2. La **dimensione** del **sottospazio** vettoriale generato dalle righe/colonne della matrice.

3.2 Indipendenza lineare

Definizione: **Due o più vettori** si dicono **indipendenti** quando **non** è **possibile ottenerne** nessuno come combianzione lineare degli altri. n *vettori linearmnete indipendenti formano una base di* R^n.

3.3 Teorema di Cramer

Definizione: Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se la matrice incompleta ad esso associata ha determinante non nullo (ed uguale alla matrice completa).

3.4 Teorema di Rouché-Capelli

Definizione: Un sistema lineare con n incognite ed m equazioni ammette soluzioni solo se il rango della matrice della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa $A|b$, il numero di soluzioni è uguale a ∞^{n-r} con r rango della matrice.

- n $<$ r: **non** ho **soluzioni**.
- n $>$ r: **infinite soluzioni**.
- n $=$ r: solo **una soluzione**.

4 Vettori nel piano

4.1 Vettori

Definizione: Un **vettore** v è un oggetto individuato da:

- Una **direzione**: *La retta su cui giace il vettore.*
- Un **verso**: *L'orientamento del vettore.*
- L'**intensità**: *La "lunghezza" del vettore, detta norma* $||v||$.

4.1.1 Norma

Come abbiamo già visto per norma di un vettore intendiamo la sua intensità, essa si calcola come: $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.1.2 Versori

Si tratta di particolari vettori che hanno norma = 1, essi servono ad "indicare" la direzione di un vettore.

4.2 Prodotto scalare

Definizione: E' un operazione che si indica con il simbolo $\cdot$ definita da $R^n x R^n$ in R essa quindi associa ad una coppia di vettori un numero reale, il prodotto scalare unito alla norma può darci l'angolo compreso tra due vettori, con la formula: $\frac{v \cdot w}{||v||||w||}$.

Significato geometrico: Il prodotto scalare rappresenta la proiezione di un vettore sull'altro.

Nota bene: *Nel caso di vettori ortogoanli il risultato sarà 0.*

4.3 Prodotto vettoriale

Definizione: Si tratta di un operazioen che indichiamo come: $v \wedge w$, dati due vettori indipendenti in R^3 ci permette di trovare il terzo vettore ortogonale a quesi due e quindi indipendente da essi. Il modo più semplice per calolare il prodotto vettoriale è calcolare il determinante della matrice composta dai vettori $(x, y, z), (v_x, v_x, v_z), (w_x, w_x, w_z)$ usati come colonne.

$$Det(\begin{pmatrix} x & v_x & w_x \\ y & v_y & w_y \\ z & v_z & w_z \end{pmatrix})$$

Significato geometrico: Il prodotto vettoriale tra due vettori ci consente di trovare il vettore ortogonale ai due dati ed unito al calcolo della norma, di calcolare l'area del paralleolgramma individuato dai 2 vettori.

Nota bene: *Nel caso in cui $v \wedge w$ faccia 0 vorrà dire che i due vettori sono paralleli.*

5 Rette e piani

5.1 Rette

Equazioni parametriche della retta Si tratta di un sistema di equazioni che rappresenta la retta nello spazio.

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

Questa equazione rappresenta una retta r passante per (a, b, c) e parallela al vettore $w = \alpha x + \beta y \gamma z$.

Equazione cartesiana di una retta nello spazio Si tratta di un sistema che rappresenta una retta nello spazio come interesezione di due piani non paralleli.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}$$

5.2 Piano

Equazioni parametriche del piano Si tratta di un sistema di equazioni che rappresenta il piano nello spazio.

$$\begin{cases} x = x_0 + sl_1 + tl_2 \\ y = y_0 + sm_1 + tm_2 \\ z = z_0 + sn_1 + tn_2 \end{cases}$$

Questa equazione rappresenta un piano ϕ passante per (x_0, y_0, z_0) e parrallelo ai vettori $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2)$.

Equazione cartesiana di un piano nello spazio Si tratta di un sistema che rappresenta un piano nello spazio.

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Se d = 0 il piano passa per l'origine (dim 2).
- Se una tra a,b,c è uguale a 0 il piano sarà parallelo all'asse relativo.
- Se una combinazione di due tra a,b,c è uguale a 0 il piano sarà parallelo al piano relativo alle due.

5.3 Come passare da forma cartesiana a forma parametrica:

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{pongo z = t} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + t + 1 = 0 \\ x - y + 2t - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{esprimo in fuznione di t} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -y - t - 1 \\ x - y + 2t - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{sostituisco la x} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -y - t - 1 \\ -y - t - 1 - y + 2t - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{svolgo i calcoli} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t - 1 \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{svolgo i calcoli} \rightarrow$$

5.4 Come passare da forma parametrica a forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 5t + 5 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{ricavo t e sostituisco} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -3(y + 1) + 2 \\ t = y + 1 \\ z = 5(y + 1) + 5 \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{svolgo i calcoli} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ -5y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

5.5 Un altro modo dati i vettori:

Per l'equazione parametrica basta usare due vettori che individuano il piano ed usarli come coefficienti dei parametri r,s.
Per l'equazione cartesiana basta trovare il vettore ortogonale a due vettori che individuano il piano, che otteniamo usando il prodotto scalare.

5.6 Posizione tra piano e retta

- Una retta ed un piano sono incidenti se e solo se $Rk(A) = Rk(A|b) = 3$.
- Una retta giace su un piano se e solo se $Rk(A) = Rk(A|b) = 2$.
- Una retta è parallela esterna al piano se e solo se $Rk(A) \neq Rk(A|b)$.

6 Matrice associata ad un applicazione lineare

Per trovare la matrice associata ad un applicazioni lineare devo:

- calcolare la funzione f sulla base di partenza, per ogni elemento della base.
- Se la base di arrivo è la base canoncia scrivo i vettori riga come vettori colonna.
- Se la base di arrivo è diversa dalla base canonica devo risolvere l'equazione che lega la base di arrivo al vettore ottenuto da f.

Guardare esercizio

7 Matrici diagonalizzabili

Definizione: Una matrice si dice diagonalizzabile quando nella sua classe di appartenenza è presente almeno una matrice diagonale.

7.1 Autovalori

Definizione: Sono le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda)$, se tutte le radici hanno molteplicità algebrica 1 e la loro somma è uguale al rango della matrice la matrice è diagonalizzabile.

7.2 Autovettori

Definizione: Sono i vettori che compongono il $Ker(A - \lambda I)$, ogni λ definsice un autovettore differente ed autovettori di autovettori diversi sono sicuramente linearmente indipendenti.

8 Regressione Lineare

1. Determino se i punti sono allineati, in tal caso la rispsota è 0.
2. Calcolo il valore medio di x ($\overline{x}$)e di y($\overline{y}$).
3. Calcolo il valore di m come $\frac{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{(x-\overline{x})^2} \forall x, y$.
4. Calcolo q come $\overline{y} - m\overline{x}$.