Regole di calcolo per i numeri reali estesi e limiti

$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

ℹ️ indichiamo con $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ i numeri reali estesi.

In che modo si posizionano $\pm\infty$ nella gerarchia dei numeri reali:

📌 $\forall x \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} : -\infty < x < +\infty$

Come si comportano $\pm\infty$ nei calcoli:

- $x \pm \infty = \pm\infty$
- $x * \pm\infty = \pm\infty$
- $\pm\infty * \pm\infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $-x * \pm\infty = \mp\infty$
- $\pm\infty * \mp\infty = -\infty$

- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Estensione delle operazioni sui limiti

Date le successioni: $\{an\}, \{b_n\}$ con $a_n \to l, b_n \to l', l, l' \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$

- $a_n + b_n \to l + l'$
- $a_n * b_n \to l * l'$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{l'}$

Purchè $l + l', l * l', \frac{l}{l'}$ siano definiti

es.

$$\lim_{n\to+\infty}(2^n + \sqrt{n}) \to \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to +\infty,\ 2^n \to +\infty = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3 + (-1)^n) \to n^3 \to +\infty,\ -1^n \to \text{non ha limiti quindi:}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^3(1 + \frac{(-1)^n}{n^3}) \to \frac{(-1)^n}{n^3} \to 0$$
$$n^3 \to +\infty, \frac{(-1)^n}{n^3} \to 0$$
$$\text{quindi } \to +\infty$$

🚨 Se $a_n \to 0$ e b_n è limitata allora: $a_n * b_n \to +\infty$

Alcune forme di indecisione

- $\pm\infty \mp \infty$
- $0 * \pm\infty$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$

Svolgendo questi limiti si arriva a dei risultati che sono sempre differenti, non è quindi possibile stabilire una regola generale.

Teorema di esistenza del limite *di successioni* monotone

Definiamo in primis la **monotonia crescente.**

⚠️ Si dice che $\{a_n\}$ è monotona crescente se: $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Si dice che $\{a_n\}$ è monotona **strettamente** crescente se: $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Definita la monotonia possiamo dire che:

⚠️ Sia $\{a_n\}$ monotona crescente e sia $l = sup\{a_n\}$ ALLORA $a_n \to l$ quindi $\{a_n\}$ è regolare (ammette limiti)

Il teorema vale anche con la monotonia decrescnte, basta cambiare i maggiorni con i minori e il sup. con l'inf. della successione.