Le successioni e i limiti

> Si dice successione una funzione a valori reali definita su $\mathbb{N}$ *(ossia che ha come argomento i numeri naturali).* Si può scrivere in diversi modi $f(n) = a_n,\ \{a_n\}\ n \in \mathbb{N},\ \{a_1, a_2, a_3\}$; il grafico du una duccessione è fatto da punti disgiunti.

$\{a_n\}$ è detto termine generale della successione

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

> Si dice che $\{a_n\}$ converge ad $a \in \mathbb{R}$ e si indica con $(\lim_{n\to+\infty} a_n = a)$

> Si dice che $\{a_n\}$ diverge positivamente a $+\infty$ $(\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty)$

> Si dice che $\{a_n\}$ diverge negativamente a $-\infty$ $(\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty)$

- Una successione che ha limite numerico si dice convergente.
- Una successione che ha limite infinito si dice divergente *(la divergenza può essere positiva o negativa)*.

ALGEBRA DEI LIMITI

> ℹ️ Siano $\{a_n\} \to a \wedge \{b_n\} \to b$

- $\{a_n\} + \{b_n\} \to a + b$
- $\{a_n\} - \{b_n\} \to a - b$
- $\{a_n\}\{b_n\} \to ab$
- $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} \to \frac{a}{b}$
- $\{|a_n|\} \to |a|$

TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE + *dimostrazione*

> ℹ️ Sia $\{a_n\}$ una successione: $\lim_{n\to+\infty}\{a_n\} = a \forall n \geq n_1 \wedge \lim_{n\to+\infty}\{a_n\} = a' \forall n \geq n_2$ e $a < a'$ e $\epsilon < \frac{a'-a}{2}$

Dopo un certo numero N_0 i limiti inziano ad avere valore decidiamo quindi un numero $\bar{N} = max(n_1, n_2)$ in modo che valgano entrambi i limiti e impostiamo le disequazioni date dalla definizione di limite.

$$\begin{cases} L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \\ L' - \epsilon < a_n < L' + \epsilon \end{cases}$$

$a' - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

$a' - \epsilon < a + \epsilon$

$-\epsilon - \epsilon < a' - a$

$-2\epsilon < a' - a$

$\epsilon > \frac{a'-a}{2}$

discorde con la prima supposizione

📢 Se $\{a_n\}$ ammette limite questo è unico.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

ℹ️ Sia $\{a_n\}$: $a_n \to a > 0 \vee a_n \to +\infty$

ℹ️ Sia $\{a_n\}$: $a_n \to a < 0 \vee a_n \to -\infty$

TEOREMA DEL CONFRONTO

ℹ️ Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$

DIM.

$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \; \forall n > n_0$
$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon \; \forall n > n_1$
$L - \epsilon < c_n < L + \epsilon \; \forall n > n_2$

$\bar{N} = max(n_0, n_1, n_2)$ *il valore per cui tutti i limiti sono validi*

cobiniamo $\{a_n\} < \{b_n\} < \{c_n\}$ con le precedendi disequazioni e troviamo che:

$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$

b_n è compresa tra $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$ quindi L è il suo limite *esempio di limite*

$\lim_{n \to +\infty} \{a_n\} = n^x$

- Se x > 0 allora il limite tende a +∞
- Se x < 0 allora il limite tende a 0
- Se x = 0 allora il limite è 1

OSSERVAZIONE

> Se $\{a_n\}$ è convergnete allora è limitata da $a + \epsilon$ superiormente e $a - \epsilon$ inferiormente