**Fondamenti dell'Informatica**
Esercitazione 2

(CON RISPOSTE)

**Esercizio 1.** **Relazioni 1**

Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $R_1 \subseteq A \times A$ e $R_2 \subseteq A \times A$ due relazioni definite intensionalmente come segue:

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \mid y = x + 2\}$$
$$R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x + y > 6\}$$

Rappresentare estensionalmente $R_1$ ed $R_2$.

---

**Risposta 1.**

1. $R_1 = \{< 1, 3 >, < 2, 4 >, < 3, 5 >, < 4, 6 >\}$
2. $R_2 = \{< 1, 6 >, < 2, 5 >, < 2, 6 >, < 3, 4 >, < 3, 5 >, < 3, 6 >,$
   $< 4, 3 >, < 4, 4 >, < 4, 5 >, < 4, 6 >,$
   $< 5, 2 >, < 5, 3 >, < 5, 4 >, < 5, 5 >, < 5, 6 >,$
   $< 6, 1 >, < 6, 2 >, < 6, 3 >, < 6, 4 >, < 6, 5 >, < 6, 6 >\}$

---

**Esercizio 2.** **Funzioni e proprietà**

Siano $q_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $q_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $q_{mix} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dove:

$$
\begin{aligned}
q_{\mathbb{N}}(x) &= x^2 \\
q_{\mathbb{Z}}(x) &= x^2 \\
q_{mix}(x) &= x^2 \\
f(x, y) &= tr\left(\frac{x}{y}\right) \\
g(x) &= 2^x \\
h(x) &= x + 5
\end{aligned}
$$

Determinare le proprietà di $q_{\mathbb{N}}, q_{\mathbb{Z}}, q_{mix}, f, g, h$ (tra totale, iniettiva, suriettiva, invertibile, biiettiva, biunivoca).

---

**Risposta 2.**

1. $q_{\mathbb{N}}$ = totale, iniettiva, non suriettiva, invertibile, non biiettiva, non biunivoca
2. $q_{\mathbb{Z}}$ = totale, non iniettiva, non suriettiva, non invertibile, non biiettiva, non biunivoca
3. $q_{mix}$ = totale, non iniettiva, non suriettiva, non invertibile, non biiettiva, non biunivoca
4. $f$ = parziale, non iniettiva, suriettiva, non invertibile, non biiettiva, non biunivoca
5. $g$ = totale, iniettiva, non suriettiva, invertibile, non biiettiva, non biunivoca
6. $h$ = totale, iniettiva, non suriettiva, invertibile, non biiettiva, non biunivoca

---

**Esercizio 3.** **Composizione di funzioni**

Si considerino le funzioni dell'esercizio precedente, ovvero $f(x,y) = tr\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g(x) = 2^x$ e $h(x) = x + 5$, con i rispettivi domini e codomini. Valutare se è possibile comporre le funzioni come definito sotto e, se si, determinare l'espressione analitica che denota tale composizione; infine, determinare le proprietà delle funzioni composte

1. $f \circ h$
2. $h \circ f$
3. $g \circ h$
4. $h \circ g$
5. $g \circ f$
6. $f \circ g$

---

**Risposta 3.**

1. $f \circ h =$ non è possibile ($f$ è binaria);
2. $h \circ f =$ è possibile; $h(f(x,y)) = h(tr\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = tr\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5$
3. $g \circ h =$ è possibile (il codominio di $h$ è sottinsieme del dominio di $g$); $g(h(x)) = g(x+5) = 2^{x+5}$
4. $h \circ g$ non è possibile (il codominio di $g$ non è sottinsieme del dominio di $h$);
5. $g \circ f$ è possibile; $g(f(x,y)) = g(tr\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 2^{tr\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$
6. $f \circ g$ non è possibile ($f$ è binaria e $g$ non produce i due output necessari per l'input di $f$);

---

**Esercizio 4.** **V/F**

(extra) Vero o falso:

1. c'è una relazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2. per ogni insieme $A$, esiste una funzione suriettiva $f : \mathscr{P}(A) \to A$
3. per ogni insieme $A$, esiste una funzione iniettiva $f : \mathscr{P}(A) \to A$
4. esiste un insieme $A$ e una funzione biunivoca $f : \mathscr{P}(A) \to A$
5. $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ hanno la stesa cardinalità

---

**Risposta 4.**

1. **Vero.** $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono due insiemi infiniti appartenenti entrambi alla classe di cardinalità chiamata *aleph-zero* ($\aleph_0$, potenza del numerabile) e, per definizione, un insieme infinito ha cardinalità aleph-zero se esiste una relazione biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Essendo $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ definita su $\mathbb{Z}$, è possibile effettuare una mappatura uno a uno fra gli elementi di questo insieme e gli elementi dell'insieme $\mathbb{N}$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ | $2^0 = 1$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $2^{+1} = 2$ | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $2^{+2} = 4$ | ... |

Per quanto riguarda le domande successive, in caso stessimo cercando una *funzione totale* la risposta è **Falso** per tutte. Per quanto riguarda una *funzione parziale*, invece:

2. **Vero.** In questo caso basta prendere la funzione che associa ad ogni $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$ il relativo $x \in A$. $A$ viene esaurito dalla funzione (suriettività).

3. **Vero.** Tenendo sempre conto della precedente funzione possiamo vedere come, ad ogni elemento $x \in A$ è associato un solo $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$ per costruzione (iniettività).

4. **Falso.** Tenendo conto della funzione precedentemente descritta e della distinzione fra biiettività e biunivocità, dato che abbiamo a che fare con una funzione parziale abbiamo che $f$ è biiettiva ma non biunivoca.
5. **Vero.** Dato che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ appartengono alla medesima classe di infinito, avendo entrambi cardinalità *aleph-zero* come detto prima, anche $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ e $\mathscr{P}(\mathbb{Z})$ avranno la medesima cardinalità.

---

**Esercizio 5.** **extra**

1. quante relazioni binarie su $A$ esistono?
2. se $B$ ha $n$ elementi, costruire una funzione biunivoca tra $\mathscr{P}(B)$ e $\{1, \ldots, 2^n\}$
3. può un'operazione binaria avere un punto fisso?

---

**Risposta 5.**

---