ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 34

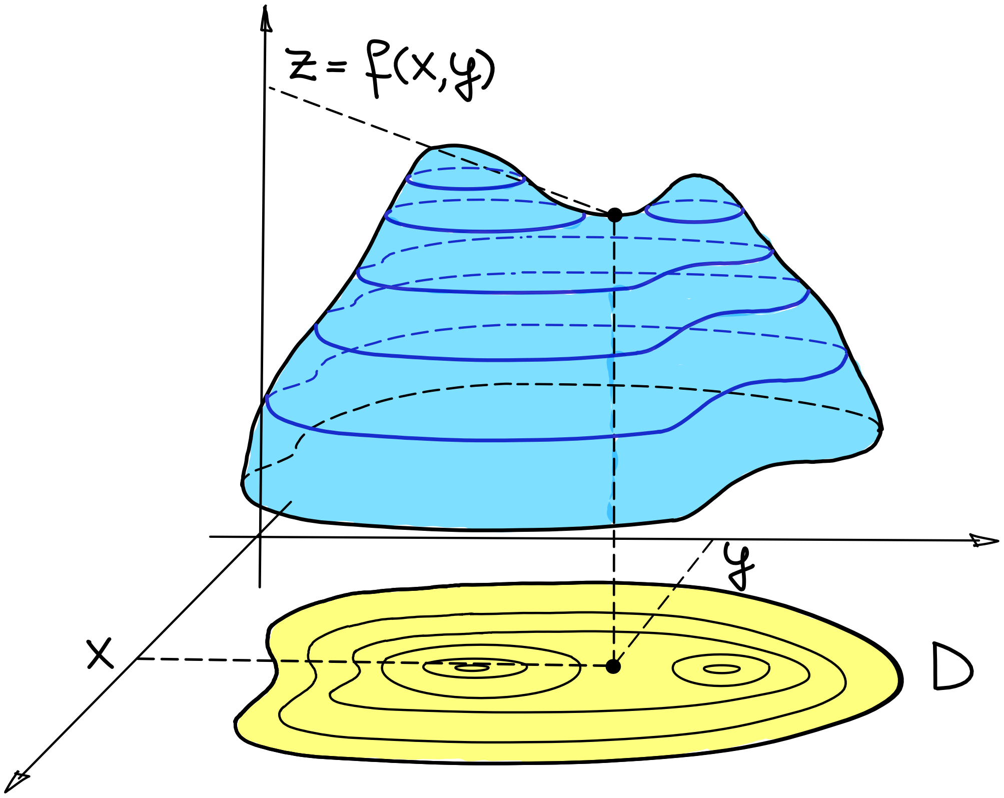
INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE O PIÙ VARIABILI

Una FUNZIONE DI n VARIABILI reali a valori reali

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{con } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

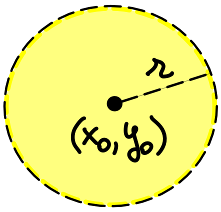
è una corrispondenza che assegna ad ogni elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (dominio di f) il valore $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Per semplicità qui considereremo solo il caso $n=2$ dove $x_1 = x$, $x_2 = y$.



$$\text{grafico di } f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$$

Introducendo la definizione di INTORNO di un punto (x_0, y_0) di raggio $r>0$



$$B_r(x_0,y_0) = \left\{ (x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r \right\}$$

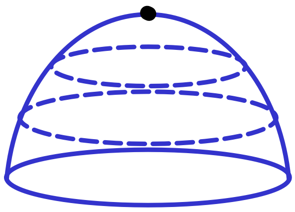
si estendono le nozioni di limite e continuità.
Inoltre abbiamo le seguenti definizioni.

$(x_0,y_0) \in D$ è un punto di MASSIMO RELATIVO di f se

$$\exists r>0 : \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap D \quad f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

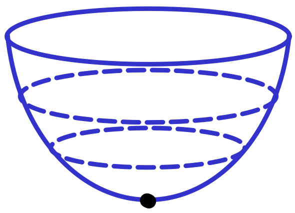
$(x_0,y_0) \in D$ è un punto di MINIMO RELATIVO di f se

$$\exists r>0 : \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap D \quad f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$



$f(x,y) = -x^2-y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI MAX. REL.



$f(x,y) = x^2+y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI MIN. REL.

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO A x in (x_0,y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

notazioni alternative

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO A y in (x_0,y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

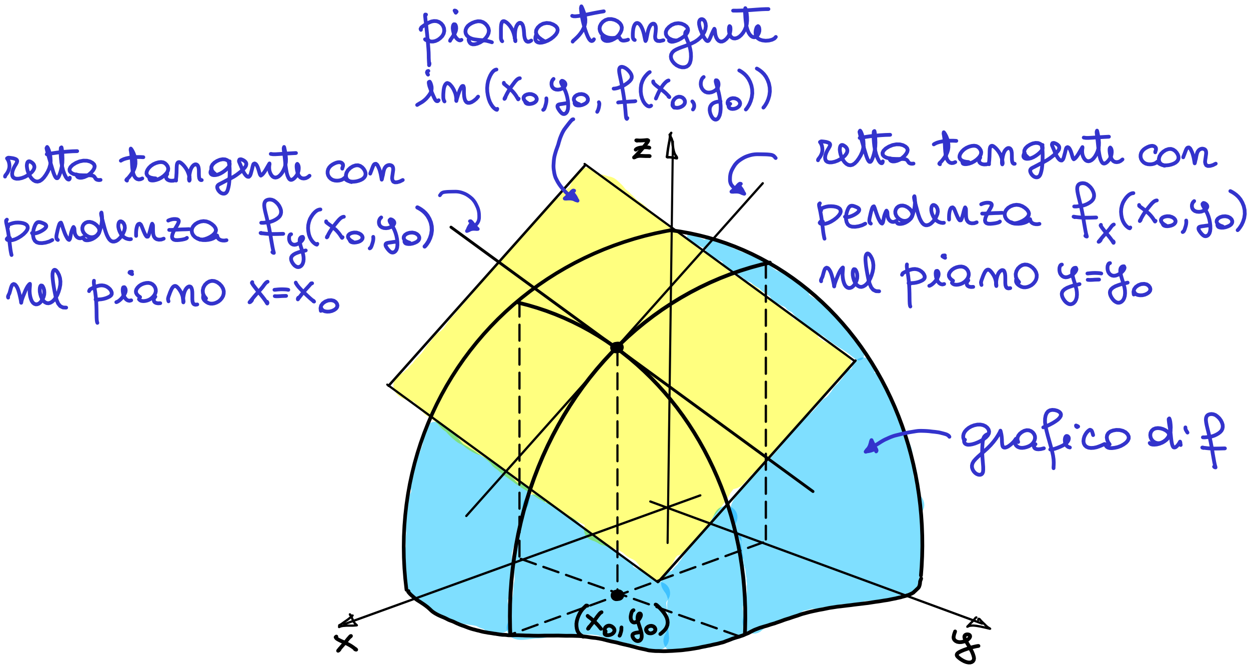
La coppia di derivate parziali definisce il vettore GRADIENTE di $f(x,y)$ in (x_0,y_0)

$$\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$$

Se $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$ allora (x_0,y_0) si dice PUNTO CRITICO.

L'equazione del PIANO TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ è

$$z = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$



OSSERVAZIONE

Le definizioni date implicano che

1) per il calcolo di f_x si deriva f rispetto a x nel modo usuale trattando y come una costante;

2) per il calcolo di f_y si deriva f rispetto a y nel modo usuale trattando x come una costante.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $f(x,y)=\dfrac{y\log(x)}{x^2+y^2}$ $\qquad$ f è definita in $D=\{(x,y):x>0\}$

Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y)=\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot(x^2+y^2)-\log(x)\cdot 2x\right)$$

$$f_y(x,y)=\frac{\log(x)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\left(1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y\right)$$

Il gradiente di f in $(1,1)$ è

$$\nabla f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=\left(\tfrac{1}{2},0\right)$$

$(1,0)$ è un punto critico di f perché

$$\nabla f(1,0)=(f_x(1,0),f_y(1,0))=(0,0).$$

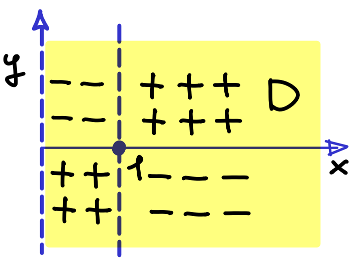
Le equazioni dei piani tangenti al grafico di f nei punti $(1,1,f(1,1))$ e $(1,0,f(1,0))$ sono

$$(1,1,0)\Rightarrow z=0+\tfrac{1}{2}(x-1)+0\cdot(y-1)=\tfrac{1}{2}(x-1)$$

$$(1,0,0)\Rightarrow z=0+0\cdot(x-1)+0\cdot(y-0)=0$$

PIANO ORIZZONTALE

il segno di f in D



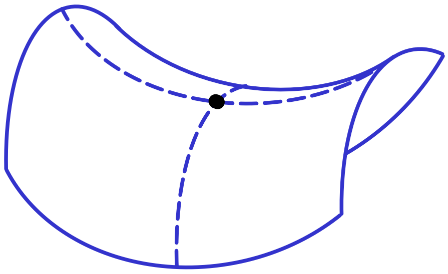
$(1,0)$ non è un punto di max/min

OSSERVAZIONE Se f è C^1 ($\leftarrow f,\nabla f$ continui) in un intorno di (x_0,y_0) e (x_0,y_0) è un punto di max/min relativo di f allora (x_0,y_0) è un punto critico.

Tuttavia non tutti i punti critici sono max/min relativi. Ci sono anche i punti di sella.

$(x_0, y_0) \in D$ è un punto di SELLA di f se (x_0, y_0) è un punto critico e

$$\forall r > 0: \begin{array}{l} \exists (x_1, y_1) \in B_r(x_0, y_0) \cap D: f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0) \\ \exists (x_2, y_2) \in B_r(x_0, y_0) \cap D: f(x_2, y_2) < f(x_0, y_0) \end{array}$$



$f(x, y) = x^2 - y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI SELLA

Per studiare la natura di un punto critico è utile introdurre le DERIVATE PARZIALI SECONDE:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x)(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(f_y)(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0)$$

Le quattro derivate seconde sono gli elementi della MATRICE HESSIANA:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

$$\det(H_f) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

Nel caso in cui le derivate seconde siano continue si dimostra che $f_{xy} = f_{yx}$.

In analogia a quanto visto in una variabile si introduce il POLINOMIO DI TAYLOR del secondo ordine di f in (x_0,y_0):

$$T_2(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

$\leftarrow f, \nabla f, H_f$ continui

Se f è C^2 in un intorno di (x_0,y_0) allora

$$f(x,y)=T_2(x,y)+o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right) \quad \text{per } (x,y)\to(x_0,y_0).$$

Tale relazione permette lo studio di f "vicino" a (x_0,y_0). In particolare si dimostra il seguente criterio.

TEOREMA (CRITERIO DELLE DERIVATE SECONDE)

Sia (x_0,y_0) un punto critico di f.

1) Se $\det(H_f(x_0,y_0))>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ allora (x_0,y_0) è un massimo relativo.

2) Se $\det(H_f(x_0,y_0))>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ allora (x_0,y_0) è un minimo relativo.

3) Se $\det(H_f(x_0,y_0))<0$ allora (x_0,y_0) è un punto di sella.

OSSERVAZIONE Nel caso in cui $\det(H_f(x_0,y_0))=0$ il criterio è inconcludente.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- Determinare tutti i punti critici di
$$f(x,y)=x^3+8y^3-12xy \qquad D=\mathbb{R}^2.$$
e studiarne la natura.

Le derivate parziali prime di f sono
$$f_x(x,y)=3x^2-12y \quad , \quad f_y(x,y)=24y^2-12x$$
e quindi i punti critici di f si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2-12y=0 \\ 24y^2-12x=0 \end{cases}, \begin{cases} x^2=4y \\ 2y^2=x \end{cases}, \begin{cases} (2y^2)^2=4y \\ 2y^2=x \end{cases} \rightarrow y(y^3-1)=0$$

$$y=0 \rightarrow x=0 \qquad y=1 \rightarrow x=2$$

Così i punti critici sono:
$$(0,0) \quad e \quad (2,1).$$

Le derivate parziali seconde di f sono
$$f_{xx}(x,y)=6x, \; f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-12, \; f_{yy}(x,y)=48y.$$
e quindi la matrice hessiana è
$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{bmatrix}$$

Infine

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H_f)=-12^2<0 \implies (0,0) \text{ PUNTO DI SELLA}$$

$$H_f(2,1)=\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{bmatrix} \quad \det(H_f)=12\cdot 48-12^2>0 \implies (2,1) \text{ PUNTO DI MIN.REL.}$$
$$f_{xx}=12>0$$