PRIMA LEZIONE

Una struttura algebrica è un insieme S munito di una o più operazione ciascuna:

- Unaria (Un solo operando)
- Binaria (Due operandi)
- Ternaria (Tre operandi)
- ECC

Un operazione è una funzione che associa ad uno o più elementi di S un risultato che si trova nell'insieme di S.

A seconda delle proprietà delle funzioni di S parleremo di:

- **Gruppi**
- **Anelli**
- **Campi**

Gruppi

Struttura algebrica caratterizzata da un insieme G e da un operazione binaria, questa operazione (Che indicherò con ç) deve ammettere 3 proprietà:

1. L'operazione deve essere associativa.
2. Esiste un elemento neutro per ç.
3. Ogni elemento di G ha un inverso.

NB: Non è richiesta la proprietà commutativa, se l'operazione ç è anche commutativa allora il gruppo sarà un gruppo abeliano.

Esempi:

(R, +) è un gruppo abeliano:

1. - è associativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

2. Esiste un elemento neutro:

$$e=0; x+0=0+x=x$$

3. Ogni elemento di R ha un inverso: $\forall x \in R \; Ey = -x$

$(Q, +); (Z, +); (C, +)$ Sono dei gruppi;
$(R, *)$ Non è un gruppo.

Anelli

Struttura algebrica formata da un insieme A dotato di due operazioni (Che chiameremo + e x) che verificano le seguenti condizioni:

1. $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
2. x è associativa;
3. Valgono le leggi distributive;

Esempi:

$(Z, +, x)$ è un anello;
$(R[x], +, x)$ è un anello;
$(M(n), +, x)$ è un anello;

NB:

- Se x è commutativa, l'anello si dice commutativo;
- Se x ha un elemento neutro, A è un anello con unità;
- Se $(A - 0, x)$ è un gruppo, A è un anello di divisione o corpo;
- Un corpo commutativo è un **campo**, per esempio $(R, +, x)$

$B \subset A$ è un sottoanello di A se $(B, +, x)$ è un anello.

Richiami di geometria Euclidea

Le parti importanti da ricordarsi della geometria euclidea sono concetti e elementi come:

1. **Rette** (Che chiameremo A^1)
2. **Piano affine** (Che chiameremo A^2)
3. **Spazio affine** (Che chiameremo A^3)
4. **Punti** (Che indicheremo con p)

In A^2 possiamo ritrovare punti, infatti:

$$A^2 \supseteq p; A^2 \ni p$$

E rette:

$$A^2 \supseteq A^1 \quad con \quad p \in A^1 \; o \; p \notin A^1$$

Ipotizziamo di avere due rette in A^2, cioè $r_1 \;\; e \;\; r_2$, queste sono:

- Incidenti se $r_1 \cap r_2 = p$;
- Parallele se $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ oppure se $r_1 = r_2$, cioè se coincidono;

L'ultimo tipo di "struttura" da vedere è la spazio affine, quest'ultimo può contenere tutto quello che abbiamo visto fino ad adesso, per semplificare la scrittura andremo a riferirci ai punti, rette e piani le rispettive lettere: p, r, π.

Le configurazioni possibili in A^3 sono:

$$p \in r \quad o \quad p \notin r$$

$$p \in \pi \quad o \quad p \notin \pi$$

Ipotizziamo di avere due piani affini, π^1 e π^2, questi sono;

- Incidenti se $\pi^1 \cap \pi^2 = retta$;
- Paralleli se $\pi^1 \cap \pi^2 = \varnothing$ oppure se $\pi^1 = \pi^2$;

r e π sono incidenti se: $r \cap \pi = punto$
r e π sono parallele se: $r \cap \pi = \varnothing$ o se $r \subseteq \pi$

Inoltre due rette possono essere:

- Complanari se $\exists \pi : \;\; r^1 \subseteq \pi \supseteq r^2$, di conseguenza possono essere incidenti o parallele;
- Sghembe se $r^1 \cap r^2 = \varnothing$ e $r^1 \; e \; r^2$ non sono parallele.

Vettori orientati in $A^{1/2/3}$

Fissiamo un punto O in $A^{1/2/3}$:

Def: Un vettore orientato in O è una "freccia" OP con $p \in A^{1/2/3}$

$$V_0^{1/2/3} = (OP : p \in A^{1/2/3})$$

Con V indichiamo l'insieme dei vettori applicati in O

Def: Esiste una funzione:

$$\phi_0 : A_0^{1/2/3} \to V_0^{1/2/3}$$

data da:

$$\phi_0(p) = OP \ \ \forall \ p \in A^{1/2/3}$$

Nota: Questa funzione è biettiva.

Def: $\forall \ v^1 = OP^1 \ \ e \ \ v^2 = OP^2 \ \ in \ \ V_0^{1/2/3} \ \exists! \ \ v = OP \ \ in \ \ V_0^{1/2/3}$ dato da:

$$p = vertice \ opposto \ a \ O \ nel \ parallelogramma \ costruito \ su \ OP^1 \ e \ OP^2$$

Inoltre si dice **SOMMA** do $OP^1 \ e \ OP^2$ il vettore: $OP = OP^1 + OP^2$