CAPITOLO 1 - TEORIA DEGLI INSIEMI

TUTTO IN MATEMATICA È UN INSIEME

3 CONCETTI PRIMITIVI NELLA MATEMATICA:

- INSIEME
- ELEMENTO
- APPARTENENZA

INSIEME → COLLEZIONE DI ELEMENTI APPARTENENTE ALL'INSIEM

RAPPRESENTAZIONE

$$A = \{2, 3, 7\}$$

OSS:

1) UN INSIEME PUÒ ESSERE ELEMENTO DI UN ALTRO INSIEME
2) IN UN INSIEME L'ORDINE NON CONTA
3) IN UN INSIEME NON CI SONO RIPETIZIONI

EX:

1) $\{1, 3, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ → È UN INSIEME
2) $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
3) $\{1, 2, 2\}$ → NON È UN INSIEME

NOTAZIONI PARTICOLARI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ → NUMERI NON NEGATIVI

$\mathbb{P} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ → POSITIVI

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2 \ldots\}$ → RELATIVI

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ → RAZIONALI

SE $a \in \mathbb{N}$ ALLORA:

$$[a] = \{1, 2, 3 \ldots a\}$$

$A = \{\ldots\}$ → A È L'INSIEME DEFINITO DA $\{\ldots\}$

$x \in A$ → X È UN ELEMENTO APPARTENENTE AD A

$x \notin A$ → X NON È UN ELEMENTO APPARTENENTE AD A

UN INSIEME SENZA ELEMENTI SI DICE INSIEME VUOTO ($\emptyset$)

$$\emptyset = \{\}$$

1.2 - OPERAZIONI TRA INSIEMI

A e B SONO INSIEMI, SCRIVIAMO:

$A \cap B \rightarrow$ INTERSEZIONE TRA A E B

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$$

$A \cup B \rightarrow$ UNIONE TRA A E B

$$A \cup B = \{x \in A , x \in B\}$$

OSS:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$

SI DICE CHE B È UN SOTTOINSIEME DI A, SCRITTO $B \subseteq A$, SE OGNI ELEMENTO DI B È ANCHE IN A

1) $\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix} \rightarrow A = B$ 2) $\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{matrix} \rightarrow A \subseteq C$

SCRIVIAMO $B \subsetneq A$ PER DIRE $B \subseteq A$ E CHE $B \neq A$

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \leftrightarrow B \subseteq A$$

PROPRIETÀ 1.2.1

SIANO A, B, C INSIEMI, ALLORA:

$$\left.\begin{matrix} 1) \; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ 2) \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{matrix}\right\} \text{PROPRIETÀ ASSOCIATIVA}$$

PROPRIETÀ 1.2.2

SIANO A, B, C INSIEMI, ALLORA:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ 2)\ A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{array}\right\} \text{PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA}$$

DIMOSTRAZIONE:

- DIMOSTRIAMO CHE $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$:

$$x \in A\cup(B\cap C) \rightarrow \begin{array}{l} x\in A \\ x\in(B\cap C) \end{array}$$

SE $x \in A$, ALLORA:

$$x \in A\cup B \text{ e } x\in A\cup C$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

- VICEVERSA, DIMOSTRIAMO CHE $(A\cup B)\cap(A\cup C) \subseteq A\cup(B\cap C)$:
  - SE $x \in (A\cup B)\cap(A\cup C) \rightarrow x\in A\cup B$ e $x\in A\cup C$
  - SE $x \in A \rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$
  - SE $x \notin A \rightarrow x\in B$ e $x\in C \rightarrow x\in B\cap C \rightarrow x\in A\cup(B\cap C$

PARADOSSO:

$$\mathcal{A} = \{A : A \notin A\} \qquad \mathcal{A} \in \mathcal{A}\,?$$

SE $\mathcal{A} \in \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$

SE $\mathcal{A} \notin \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A}$

IL PARADOSSO SI RISOLVE, ASSUMENDO CHE TUTTI GLI INSIEMI SONO SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME $\mathcal{U}$, DETTO UNIVERSO

SIA A UN INSIEME: IL SUO COMPLEMENTARE È

$$A' = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

PROPRIETÀ 1.2.3

SIANO A e B INSIEMI ALLORA:

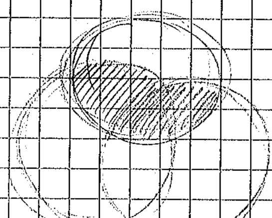
$$\left.\begin{array}{l} (A\cup B)' = A'\cap B' \\ (A\cap B)' = A'\cup B' \end{array}\right\} \text{LEGGI DI DE MORGAN}$$

TAVOLE DI VERITÀ

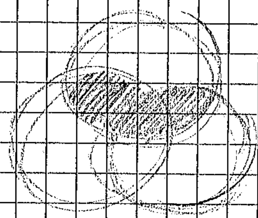
A, B, C INSIEMI, ALLORA:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

POSSIAMO INTUIRLO TRAMITE UN DIAGRAMMA DI VENN



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

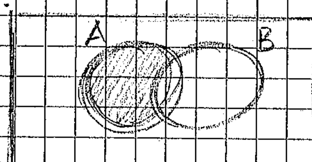
POSSIAMO DIMOSTRARLO TRAMITE LE TABELLE DI VERITÀ

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup B$	$A \cup C$	$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

SIANO A, B INSIEMI:

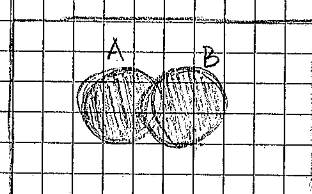
- LA DIFFERENZA TRA A E B È:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$



- LA DIFFERENZA SIMMETRICA TRA A E B È:

$$A \triangle B = \{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}$$



OSS: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

OSS: $A \setminus A = \emptyset$

IL PRODOTTO CARTESIANO DI A E B È:

$$A \times B = \{ \underbrace{(a,b)}_{\text{COPPIA ORDINATA}} \; a \in A, \; b \in B \}$$

NELLE COPPIE ORDINATE CONTA L'ORDINE:

$$(1,2) \neq (2,1)$$

SIMILMENTE CON PIU' INSIEMI:

$$A \times B \times C = \{ (a,b,c) \; a \in A, \; b \in B, \; c \in C \}$$

SIA A UN INSIEME, L'INSIEME POTENZA (O DELLE PARTI) DI A È:

$$P(A) = \{ S : S \subseteq A \}$$

PROPRIETA' 1.2.4

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

DIMOSTRAZIONE:

SIA $(x,y) \in A \times (B \cap C) \longrightarrow x \in A$ e $y \in B \cap C$

$$\Downarrow$$

$$x \in A, \; y \in B, \; y \in C$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y) \in A \times B \text{ E } (x,y) \in A \times C$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

VICEVERSA:

SIA $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\Downarrow$$

$$(x,y) \in A \times B \text{ E } (x,y) \in A \times C$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A \text{ E } y \in B$$
$$x \in A \text{ E } y \in C$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A \text{ E } y \in (B \cap C)$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y) \in A \times (B \cap C) \; \square$$

OSS: NOTIAMO CHE

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ E } x \in B$$

$$(x, y) \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ E } y \in B$$

1.3 - APPLICAZIONI TRA INSIEMI

UNA APPLICAZIONE TRA A E B, DA A IN B, È UNA LEGGE CHE ASSOC
OGNI ELEMENTO DI A AD UNO E UN SOLO ELEMENTO DI B

NOTAZIONI:

$\forall \rightarrow$ PER OGNI

$\exists \rightarrow$ ESISTE

$\nexists \rightarrow$ NON ESISTE

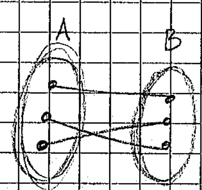
$\exists! \rightarrow$ ESISTE UN UNICO

UN' APPLICAZIONE (FUNZIONE O MAPPA) DA A IN B È UN SOTTOINSIE
$f \subseteq A \times B$ TALE CHE $\forall a \in A$ ESISTE UN UNICO $b \in B$ TALE CHE L
COPPIA (a, b) È IN f

SI DICE CHE $f(a) = b$ E $f: A \rightarrow B$

SIA $f: A \rightarrow B$:

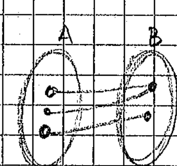
- f È INIETTIVA SE:



$$\begin{matrix} a_1 \in A \\ a_2 \in A \end{matrix} \quad a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

AD OGNI ELEMENTO DI B È ASSOCIATO UN SOLO ELEMENTO DI A

- f È SURIETTIVA SE:



$\forall b \in B$ ESISTE $a \in A$ TALE CHE $f(a) = b$

- f È BIUNIVOCA (O BIEZIONE) SE È:

$\left.\begin{matrix} \cdot \text{ INIETTIVA} \\ \cdot \text{ SURIETTIVA} \end{matrix}\right\}$ CONTEMPORANEAMENTE

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

SIANO A, B, C INSIEMI E SIANO:

$$f: A \to B \quad e \quad g: B \to C$$

LA COMPOSIZIONE DI g CON f È LA FUNZIONE:

$$g \circ f: A \to C$$, DEFINITA PONENDO:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

PROPRIETÀ 1.3.1: SIANO A, B, C INSIEMI $f: A \to B$ e $g: B \to C$ ALL

1) Se f È INIETTIVA E g È INIETTIVA ALLORA $(g \circ f)$ È INIETTIVA
2) Se f e g SONO SURIETTIVE, ALLORA $(g \circ f)$ È SURIETTIVA
3) Se f e g SONO BIUNIVOCHE, ALLORA $(g \circ f)$ È BIUNIVOCA

DIMOSTRAZIONE:

1) SIANO a_1 e $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2) \to g(f(a_1)) \neq g(f(a$

2) SIA $c \in C \to \exists b \in B : g(b) = c \to \exists a \in A : f(a) = b \to g(f(a)) =$
$\to (g \circ f)(a) = c$ □

ESEMPI

1) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,5), (4,2)\}$$

NON UNA FUNZIONE → ASSOCIAMO 3 E 4 AD 1

2) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,3), (2,4), (4,2)\}$$

NON UNA FUNZIONE → NON ASSOCIAMO NULLA A 3

3) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,4), (2,5), (3,4), (4,2)\}$$ → È UNA FUNZIONE

RIPASSO MATEMATICA $\emptyset$

FRAZIONI:

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

3) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{c}\right)} = \frac{ad}{bc}$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

ESPONENTI E LOGARITMI:

SIA $x > 0$, IL LOGARITMO NOTEVOLE DI x È:

$$\log_e(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

PROPRIETÀ:

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(1) = 0$
- $\log_e(e) = 1$

e^x È LA FUNZIONE INVERSA DI $\log(x)$:

- $e^x = y \leftrightarrow x = \log(y) \quad y > 0$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad (a, b \in \mathbb{R})$
- SIANO $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} \rightarrow \log_b(b) = 1$$

SE $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ALLORA:

- $a^x = e^{x\log(a)}$

PROPRIETÀ:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$
- $y = a^x \leftrightarrow x = \frac{\log(y)}{\log(a)} = \log_a(y)$

- SIANO A, B INSIEMI E $f: A \to B$, SIA $X \subseteq A$:

L'IMMAGINE DI X TRAMITE f È UN INSIEME

$$f(X) = \{b \in B : \exists a \in X : f(a) = b\} \leftrightarrow \{f(a) : a \in X\}$$

- SIA $Y \subseteq B$, LA CONTROIMMAGINE DI Y TRAMITE f È:

$$f^{-1} = \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

- SIA $f: A \to B$ BIUNIVOCA, L'INVERSA DI f È: $f^{-1}: B \to A$, DEFINITA D

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

OSS: $f(a) = b \leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

- LA FUNZIONE IDENTITÀ SU A È UNA FUNZIONE:

$$I_A : A \to A \quad \text{DEFINITA DA } I_A(a) = a \quad \forall a \in A$$

PROPRIETÀ 1.3.2

SIANO $f, g, h : A \to A$, TUTTE E TRE BIUNIVOCHE, ALLORA:

1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
2) $f \circ I_A = I_A \circ f = f$
3) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$

DIMOSTRAZIONE

1) SIA $a \in A$, ALLORA:

$(f \circ (g \circ h))(a) = f((g \circ h)(a)) =$
$= f(g(h(a)))$ e $(f \circ g) \circ h(a) =$
$= (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$

2) SIA $a \in A$, ALLORA:

$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$ e $(I_A \circ f)(a) = I_A(f(a)) = f(a)$

3) SIA $a \in A$, ALLORA:

$(f \circ f^{-1})(a) = (f^{-1}(a))$, SIA $b = f^{-1}(a) = a$

INOLTRE

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$$

SIA $c = f(a) \rightarrow f^{-1}(c) = a$, QUINDI:

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(c) = a = I_A(a) \quad \square$$

- SE $f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$, ALLORA $f = g$

IL GRUPPO SIMMETRICO (DI RANGO N) È:

$$S_N = \{ f: [N] \rightarrow [N] : f \text{ È UNA BIEZIONE} \}$$

GLI ELEMENTI DI S_N SI DICONO PERMUTAZIONI

NOTAZIONE: SIA $f \in S_N$ SCRIVIAMO $f = a_1, a_2, \dots, a_n$ PER DIRE $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ ....

EX:

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

OSS:

1) SE $f, g \in S_N$, $f = a_1, a_2 \dots a_n$ $g = b_1 \dots b_n$ ALLORA $f \circ g = a_{b_1} \dots\dots$

2) SIA $f \in S_N$ $f = a_1, \dots, a_n$ ALLORA $f^{-1} = b_1, \dots, b_n$

1.3.3: SIA $f: A \rightarrow B$ E SIANO $X, Y \subseteq B$, ALLORA:

1) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

2) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

DIMOSTRAZIONE

1) SIA $a \in f^{-1}(X \cap Y) \rightarrow f(a) \in X \cap Y \rightarrow f(a) \in X$ E $f(a) \in Y$
$\rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y) = a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

VICEVERSA:

SIA $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y) \rightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \in Y$
$\rightarrow f(a) \in X \cap Y \rightarrow f^{-1}(X \cap Y)$

2) ANALOGA $\square$

OSS: $f(a) \in X \leftrightarrow a \in f^{-1}(X)$

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

SIANO A, B, C INSIEMI E SIANO:

$$f: A \rightarrow B \quad e \quad g: B \rightarrow C$$

LA COMPOSIZIONE DI g CON f È LA FUNZIONE:

$$g \circ f: A \rightarrow C$$, DEFINITA PONENDO:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

PROPRIETÀ 1.3.1: SIANO A, B, C INSIEMI $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, ALLORA:

1) Se f È INIETTIVA E g È INIETTIVA ALLORA $(g \circ f)$ È INIETTIVA
2) Se f E g SONO SURIETTIVE, ALLORA $(g \circ f)$ È SURIETTIVA
3) Se f E g SONO BIUNIVOCHE, ALLORA $(g \circ f)$ È BIUNIVOCA

DIMOSTRAZIONE:

1) SIANO a_1 e $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ $\square$

2) SIA $c \in C \rightarrow \exists b \in B: g(b) = c \rightarrow \exists a \in A: f(a) = b \rightarrow g(f(a)) = c \rightarrow (g \circ f)(a) = c$ $\square$

ESEMPI

1) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,5), (4,2)\}$$

NON UNA FUNZIONE → ASSOCIAMO 3 E 4 AD 1

2) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,3), (2,4), (4,2)\}$$

NON UNA FUNZIONE → NON ASSOCIAMO NULLA A 3

3) $A = [4] \quad B = [5]$

$$f = \{(1,4), (2,5), (3,4), (4,2)\}$$ → È UNA FUNZIONE

RIPASSO MATEMATICA Ø

FRAZIONI:

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

3) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a}{c}\right)} = \frac{ad}{bc}$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO:

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

ESPONENTI E LOGARITMI:

SIA $x > 0$, IL LOGARITMO NOTEVOLE DI x È:

$$\log_e(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

PROPRIETÀ:

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(1) = 0$
- $\log_e(e) = 1$

e^x È LA FUNZIONE INVERSA DI $\log(x)$:

- $e^x = y \Leftrightarrow x = \log(y) \quad y > 0$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad (a, b \in \mathbb{R})$
- SIANO $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} \rightarrow \log_b(b) = 1$$

SE $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ALLORA:

- $a^x = e^{x\log(a)}$

PROPRIETÀ:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$
- $y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\log(y)}{\log(a)} = \log_a(y)$

1.4 - RELAZIONE

UNA RELAZIONE DA A A B È UN SOTTOINSIEME $R \subseteq A \times B$

SE $(a, b) \in R$ SI DICE CHE: "a È IN RELAZIONE R CON b" E SI SCRI

$$aRb$$

SE $A = B$ SI DICE CHE R È UNA RELAZIONE SU A

PROPRIETÀ:

SIA R UNA RELAZIONE SU A:

1) R È RIFLESSIVA SE $(a, a) \in R$ PER $\forall a \in A$ (aRa)
2) R È SIMMETRICA SE $\forall a, b \in A$ È VERO CHE SE $(a, b) \in R \leftrightarrow (b, a) \in R$ (a
3) R È TRANSITIVA SE $\forall a, b, c \in A$ È VERO CHE
$$(a, b) \in R \text{ E } (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

- R SI DICE RELAZIONE D'EQUIVALENZA SE È:
  - RIFLESSIVA
  - SIMMETRICA
  - TRANSITIVA

SIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A, SIA $a \in A$, ALLORA

LA CLASSE DI EQUIVALENZA DI a RISPETTO AD R È:

$$[a]_R = \{b \in A : aRb\}$$

PROPRIETÀ 1.4.1: SIA R UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA SU A, SIANO $a, b, c \in$

$$[a]_R = [b]_R \quad \text{OPPURE} \quad [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$$

DIMOSTRAZIONE

SE $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset \rightarrow$ OK

SIA $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \rightarrow$ ALLORA $\exists c \in [a]_R \cap [b]_R \rightarrow c \in [a]_R$ E $c \in [b]_R$
$\rightarrow aRc$ E $bRc \longrightarrow aRb$

QUINDI $(bRa) = (aRb)$

SIA $x \in [a]_R \rightarrow aRx \rightarrow xRa \rightarrow xRb \rightarrow bRx \rightarrow x \in [b]_R$

SIMILMENTE SE $x \in [b]_R \rightarrow x \in [a]_R$ $\square$

UNA PARTIZIONE INSIEMISTICA (PARTIZIONE) DI A È UN INSIEME

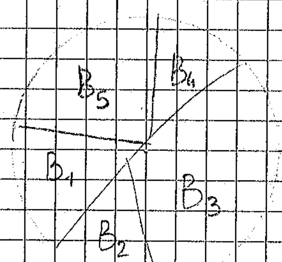
$$\Pi = \{B_1, \dots, B_K\} \text{ TALI CHE:}$$

1) $B_i \subseteq A \quad (\forall i = 1 \dots k)$

2) $B_i \neq \emptyset \quad (\forall i = 1 \dots k)$

3) SE $1 \leq i \leq J \leq k \Rightarrow B_i \cap B_J = \emptyset$

4) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$



$B_1, B_2 \dots B_k$ SI DICONO BLOCCHI DI Π, Π HA K BLOC

Ex: $A = [9]$

$$\Pi = \{\{1,4\}, \{2,5,9\}, \{3,8\}, \{6,7\}\}$$

PARTIZIONE DI A IN 4 BLOCCHI

PROPRIETÀ 1.4.2: SIA A UN INSIEME E SIA R UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA SU A, ALLORA LE CLASSI D'EQUIVALENZA DI R SONO UNA PARTIZIONE DI A

DIMOSTRAZIONE: SIA $b \in A \rightarrow [b]_R \subseteq A$ E $[b]_R \neq \emptyset$

INOLTRE:

1.4.1 E

$$\bigcup [b]_R = A \quad (\text{SE } b \in A \rightarrow b \in [b]_R \rightarrow b \in \bigcup [a]_R) \square$$

POSSIAMO DIRE CHE DATA UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA R IN UN INSIEME A SI CHIAMA CLASSE D'EQUIVALENZA

EX: $A = \mathbb{Z}$, $aRb \leftrightarrow 3 \mid (b-a) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$

1) VEDI SE R È UNA RELAZIONE D'EQUIVALENZA

2) CALCOLI LA CLASSE

IN GENERALE $(3 \mid (b-a))$ SE $i \in \mathbb{Z}$:

$$[i]_R = \{3k + i : k \in \mathbb{Z}\}$$

OSS: $[a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb \quad (\forall a, b \in A)$

IN QUESTO ESEMPIO LA PARTIZIONE CORRISPONDENTE AD R È:

$$\Pi = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$$