TERZA LEZIONE

Quando parliamo di rette nel piano cartesiano generalmente usiamo solitamente l'equazione cartesiana:

- **Forma esplicita**: $y = mx + q$
- **Forma implicita**: $ax + by + c = 0$

La forna esplicita è comoda perché m e q hanno un significato geometrico semplice.
Ha lo svantaggio di non includere le retti verticali
Problema che non si presenta nella forma implicita, però in questo caso i termini a, b, c possono avere valori diversi, ma rappresentare sempre la stessa retta, il che è scomodo.

L'equazione parametrica vettoriale della retta è la seguente:

$$P_0 + tv$$

$P_0 = (x, y)$ indica la posizione al tempo $t = 0$;
$v = (a, b)$ indica la direzione del vettore;

L'equazione parametrica scalare invece è la seguente:

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $$Inquestomodoeliminiamoiproblemipresentinell'altretipodirette. Dettociòpossiamopa

Il vettore direttore determina l'inclinazione di una retta in un'equazione vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_0 + tv_r$$

Esempio

Il punto P_0 appartiene alla retta r:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La retta e ha il seguente vettore direttore:

$$v_r = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'equazione vettoriale della retta è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_0 + tv_r$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Siano r e r^1 due rette nello spazio, aventi rispettivamente come vettori direzione v e v^1:

Le due rette sono parallele se v e v^1 sono paralleli, cioè se esiste un numero reale λ tale che $v = \lambda v^1$:

$$r = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad r = \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

$$v = (1, 2, -1) \quad v^1 = (-2, -4, 2)$$

Quindi:

$$v^1 = 2v$$

I vettori sono paralleli e quindi anche le rette lo sono.

Le due rette invece saranno ortogonali se v e v^1 sono ortogonali, cioè se $v * v^1 = 0$:

$$r = \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad r = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$$v = (-2, -4, 2) \quad v^1 = (1, 1, 3)$$

Facendo il prodotto scalare otteremo:

$$v^1 * v = (1, 1, 3) * (-2, -4, 2) = -2 - 4 + 6 = 0$$

Siano r e r^1 due rette nello spazio aventi rispettivamente come vettori direzione v e v^1:

- Le due rette sono parallele se v e v^1 sono un multiplo dell'altro;
- Le due rette sono incidenti se si intersecano in in punto;
- Le due rette sono coincidenti se si intersecano e v e v^1 sono uno multiplo dell'altro;
- Le due rette sono sghembe se non si intersecano e v e v^1 non sono uno multiplo dell'altro.

Per il momento abbiamo parlato solo di rette adesso introduciamo le operazioni nello spazio con i piani:

Consideriamo un piano π, un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore $v = (a, b, c)$ non nullo ed ortogonale a π.

$$P = (x, y, z) \quad appartiene\ a\ \pi\ se\ e\ solo\ se\ P_0P * v = 0$$

$P_0P = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ dunque l'equazione vettoriale equivale a:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

L'equazione cartesiana del piano è quindi: $ax + by + cz + d = 0$
Se moltpilico a,b,c,d per un numero diverso da zero, la nuova equazione rappresenta comunque lo stesso piano.

Esercizi

1 - Determinare un'equazione parametrica della retta passante per:

$$A = (2, -1, 1) \ e \ B = (6, 1, -3)$$

Un possibile vettore direzione è:

$$v = (6 - 2, 1 + 1, -3 - 1) = (4, 2, -4)$$

Se scelgo A come "punto di partenza" ottengo:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

In forma vettoriale: $(2, -1, 1) + t(4, 2, -4)$ o $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

NB: L'esercizio sarebbe comunque stato giusto se avessi usato le coordinate di B per x_0, y_0, z_0 o se avessi deciso di usare un multiplo del vettore direzione, anche se ovviamente sarebbero usciti risultati diversi.

2 - Determinare l'equazione cartesiana di:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

Per risovere l'esercizio basta ricavare il valore di t:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - 2(y - 2) \\ t = y - 2 \end{cases} \to x + 2y - 5 = 0$$

3 - Stabilire se le rette r e r^1 sono parallele,incidenti o sghembe:

$$r = \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \quad r^1 = \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 0 \\ z = 5 + 12t \end{cases}$$

$v = (-1, -1, -1) \ \ e \ \ v^1 = (4, 0, 12)$ non sono uno multiplo dell'altro, quindi non sono parallele e non sono coincidenti.

Controlliamo se si intersecano, dando ad uno delle rette un altro parametro e mettendo tutto a sistema:

$$r = \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \quad r^1 = \begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = 0 \\ z = 5 + 12k \end{cases}$$

Quindi dobbiamo risolvere:

$$\begin{cases} 2 - t = 3 + 4k \\ 1 - t = 0 \\ -t = 5 + 12k \end{cases} \quad \$\$Ilsistemahaun'unicasoluzione : \$t = 1\$e\$k = -1/2\$Siccomeilsistemahaun'unicas$$

Troviamo il punto di intersezione q imponendo cje il vettore PQ sia ortogonale al vettore di direzione r:

$$(5 + 2t - 3, 1 - t - 1, 6 + 3t - 3) * (2, -1, 3) = 0$$

$$4t + 4 + t + 9t + 9 = 0 \rightarrow t = -13/14$$

Sostituiamo il risultato nell'equazione parametrica e otterremo che le coordinate del punto Q sono: $Q = (22/7; 27/14; 45/14)$.

Adesso possiamo trovare il vettore $PQ = (X_Q - X_P, Y_Q - Y_P, Z_Q - Z_P) = (1/7; 13/14; 3/14)$

$$s = \begin{cases} x = 3 + 1/7 * k \\ y = 1 + 13/14 * k \\ z = 3 + 3/14 * k \end{cases}$$

Possiamo semplificare il risultato moltiplicando per 14 tutte le componento del vettore PQ:

$$s = \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 + 13 * k \\ z = 3 + 3 * k \end{cases}$$