8) OTTAVA LEZIONE

Per determinare la matrice prodotto bisogna verificare per quali condizioni si possa fare.

Consideriamo una matrice $A\ \ n*p$ e una matrice $B\ \ p*m$ e possibile eseguire AB? Si, ma solo perchè il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

$$AB = C^{n*m}$$

Adesso calcoliamo gli elementi di C:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & .... & a_{1-p} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & .... & a_{2-p} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n-1} & a_{n-2} & .... & a_{n-p} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{1-1} & b_{1-2} & .... & b_{1-m} \\ b_{2-1} & b_{2-2} & .... & b_{2-m} \\ .... & .... & .... & .... \\ b_{p-1} & b_{p-2} & .... & b_{p-m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1-1} & c_{1-2} & .... & c_{1-m} \\ c_{2-1} & c_{2-2} & .... & c_{2-m} \\ .... & .... & .... & .... \\ c_{n-1} & c_{n-2} & .... & c_{n-m} \end{bmatrix}$$

Consideriamo il generico elemento di C, cioè c_{i-j}, per ricavarlo dobbiamo identificare la $i - esima$ riga di A, in modo analogo selezioniamo la $j - esima$ colonna di B.

$$c_{i-j} = a_{i,1} * b_{1,j} + a_{i,2} * b_{2,j} + ... + a_{i,p} * b_{p,j}$$

NB: Il prodotto non gode della proprietà commutativa con le matrici.

Determinante:

Quando parliamo di determinante ci riferiamo sempre a matrici quadrate, il determinante è un numero reale.

Immaginiamo una matrice $2x2$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Indichiamo il determinante con:

$$|A| = ad - bc$$

Non è possibile risalire alla matrice tramite il determinante.

Immaginiamo una matrice $3x3$: Quando la nostra matrice è una $3x3$ o maggiore, utilizziamo il teorema di Laplace:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & .... & a_{1-n} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & .... & a_{2-n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n-1} & a_{n-2} & .... & a_{n-n} \end{bmatrix}$$

Prendiamo una riga o una colonna della nostra matrice: possibilmente quella con più zeri.

$$a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}$$

$$|A| = a_{i,1} * C_{i,1} + a_{i,2} * C_{i,2} + ... + a_{i,n} * C_{i,n}$$

$C_{i,j}$ è il complemento algebrico di $a_{i,j}$ è sarebbe il determinante ottenuto eliminando la riga e la colonna a cui appartiene il nostro elemento, se il nostro elemento è di classe dispari (La somma degli indici è dispari), allora cambiamo C di segno.

Proprietà dei determinanti:

1. Se in una matrice quadrata contiene una riga o una colonna composta solo da 0, allora il determinante della matrice sarà 0;
2. Se in una matrice quadrata due due righe o colonne parallele sono proporzionali o uguali, allora il determinante sarà 0;
3. Se in una matrice una linea è una combinazione lineare di due o più linee parallele, allora il determinante è 0;

Altre proprietà per semplificare il calcolo:

1. Ipotizziamo di avere una matrice A di ordine n, il determinante della matrice A è uguale al determinante della matrice trasposta.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \quad |A^T| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

2. Consideriamo matrice A di ordine n triangolare superiore o inferiore, in questo caso il valore del determinante si ricava facendo il prodotto degli elementi della diagonale principale:

$$|A| = a_{1,1}a_{2,2}....a_{n,n}$$

3. Consideriamo una matrice A di ordine n, scambiando due linee parallele il determinanre della matrice che né esce fuori sarà uguale a $-|A|$.
4. Consideriamo una matrice A di ordine n e consideriamo il determinante $|A|$, se moltiplico una qualsiasi linea per uno scalare β, allora $|A|$ diventerà $\beta|A|$, se moltiplico n linee, allora il determinante sarà $\beta^n|A|$.

5. Consideriamo una matrice A, se ad una linea aggiungo una linea parallela moltiplicata per uno scalare β il determinante rimmarrà invariato.
6. Consideriamo due matrici A e B dello stesso ordine n, la matrice $C = AB$, il determinate della matrice prodotto è uguale ai determinanti di A e B.

$$|C| = |A| * |B|$$

   Questo si chiama anche Teorema di Binet e può essere esteso a K matrici.
7. In una matrice a blocchi il determinante si calcola tramite il calcolo dei determinanti delle sottomatrici diverse dalla sottomatrice di zero.

Matrice Inversa:

Consideriamo una matrice A di ordine n tale che il determinante sia diverso da zero, allora esiste un'unica matrice inversa A^{-1}.

La matrice inversa è una matrice di ordine n tale che $A * A^{-1} = I$, la moltiplicazione fà la matrice Identità.

Per trovare la matrice inversa dobbiamo calcolare il complemento algebrico per ogni elemento della matrice.

Creiamo una matrice $A^{(a)}$ trasposta sugli elementi trovati dal passo precedente e dividiamo ogni elemento della nuova matrice per il determinante.

Rango di una matrice:

Il rango è un numero naturale e corrisponde alla dimensione delle colonne o delle righe di una matrice.

In una matrice si definisce Elemento speciale un elemento non nullo sotto al quale ci sono solo zeri.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso 5 è un elemento speciale.

Facciamo un esempio sul calcolo del rango:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Andiamo a calcolare il rango di B, $r(B)$:

Nella prima riga ci sta almeto un elemento speciale? Si, cioè -1.
Nella secoda riga? Si, 1.
Nella terza riga? Si, abbiamo 5 e 2.

La matrice B ha almeno un elemento speciale per riga, quindi ha rango 3, la stesso ragionamento lo possiamo fare anche con le colonne.

Facciamo un altro esempio:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se questa matrice avesse rango pieno, allora avrà rango 3, il massimo del rango di una matrice è uguale al numero di righe, se il numero delle righe è minore rispetto alle colonne, altrimenti viceversa.

Possiamo eseguire delle trasformazioni per semplificare il calcolo del rango:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Moltiplichiamo per 2 la terza riga e la sottraiamo alla prima.

La nuova riga la otteniamo così: $R^{3'} \to 2R^3 - R^1$

Abbiamo trovato quindi un nuovo elemento speciale nella prima riga.

Controlliamo la seconda riga, non ci sono elementi speciali, possiamo fare la stessa cosa:
Quindi la nuova $R^{3''} \to 2R^{3'} - R^2$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Adesso in questa nuova matrice abbiamo almeno un elemento speciale su ogni riga, quindi il ragno sarà 3.

Se abbiamo una matrice quadrata, possiamo calcolare direttamente il determinante, se il determinante è diverso da zero, allora il rango sarà uguale all'ordine della matrice, altrimenti per calcolare il rango possiamo utilizzare lo stesso metodo, ma andando a calcolare il rango su una sottomatrice della matrice originale, nella situazione in cui il determinate fosse diverso da zero, allora il rango sarà uguale all'ordine della matrice meno il numero di applicazioni di questo processo.

Calcolo del rango di una matrice tramite il Teorema degli Orlati:

Il teorema di kronecker ci dice: Sia A grande una matrice $n * m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & .... & a_{1-m} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & .... & a_{2-m} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n-1} & a_{n-2} & .... & a_{n-m} \end{bmatrix}$$

Sia p un indice naturale con $p <= min(n, m)$, si definisce minore di ordine p il determinante ottenuto dalla sottomatrice selezionata con p righe e colonne.
All'interno di una matrice ci possono essere diversi minori.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scegliamo per esempio di eliminare la colonna numero 3:

$$\delta_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ci sono un totale di 5 minore di ordine 4 e possiamo anche ottenere minori di ordine minore eliminando un numero maggiore di righe.

$$\delta_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il minore sarebbe il determinante di queste sottomatrici.

Teorema degli Orlati - Kronecker:

Il rango di una matrice è uguale a k se esiste almento un minore di k diverso da zero, il cui determinante è diverso da zero, mentre tutti i minori di $k+1$ devono essere tutti uguali a zero.

$$\delta_k \;\; != 0 \quad \delta_{k+1} = 0$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Siccome A è una matrice $3x4$, 3 sarà il massimo del rango che la matrice può ottenere.
Costruiamo tutti i minori della matrice A:

$$\delta_3^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se il determinante risulta diverso da zero,allora il rango è 3, altrimenti devo andare avanti:

$$\delta_3^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante risulta -3, quindi ci possiamo fermare, la matrice originale ha rango uguale a 3.

Se il risultato di tutte le matrici di dimensione $3x3$ fosse stato uguale a zero, allora il rango della matrice sarebbe stato diverso da 3, in questa situazione bisogna fare il test del rango 2 che è la stessa cosa del test del rango 3, ma prendiamo in considerazione tutte le sottomatrici $2x2$ della matrice originale.
Il problema principale è che ci sono molte sottomatrici, quindi non conviene svolgere tutti i determinante dei minori di due, basta farlo finchè non si trova un determinante diverso da zero.

Consideriamo $A\ nxm$ e consideriamo una sottomatrice avente kxk, "Orlare" una sottomatrice significa aggiungere una riga o una colonna ad una matrice.

Per esempio se ho una matrice $3x3$ se decido di orlarla otterrò una matrice $4x4$.
Possiamo orlare una qualsiasi riga e colonna della nostra matrice alla sottomatrice.

Esempio con il calcolo degli orlati:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrice $3x5$, la matrice può avere rango $3, 2\ o\ 1$
Proviamo a considerare una matrice $2x2$ che è più semplice da calcolare:

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} != 0$$

Adesso controlliamo se funziona per la sottomatrice $3x3$, ma invece che prenderne una nuova, orliamo la nostra sottomatrice $2x2$, come riga dobbiamo per forza scegliere la riga 3 come colonna possiamo usare la prima,la seconda o la terza, otteniamo:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Invece di considerare tutti i minori di ordine 3 della matrice originale, che sono:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$$

Possiamo andare a considerare le sottomatrici che abbiamo ottenuto tramite il metodo degli orlati che sono solo 3, e ne possiamo calcolare il determinante:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix} = 0$$

Il rango della matrice A è 2 in accordo con il teorema di Kronecker.

Altre proprietà del rango:

Per calcolare il rango di una matrice possiamo utilizzare i sottodeterminanti oppure i pivot. Infatti valgono le seguenti proprietà:

1. Il rango di una matrice A corrisponde al massimo ordine di una sua sottomatrice (quadrata) con determinante non nullo.
2. Il rango di una matrice A corrisponde al numero dei suoi pivot, una volta che A e stata ridotta a gradini.
3. Il rango di una matrice A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti.
4. Il rango di una matrice A e uguale al numero di colonne linearmente indipendenti.

Osservazioni:

- Come conseguenza delle proprietà 3) e 4) si ha che se A è una matrice n × m, allora rg(A) ≤ min{m, n}
- Per utilizzare la proprietà 1) si può anche ridurre (parzialmente) a gradini la matrice.