6) SESTA LEZIONE

Consideriamo di avre uno spazio vettoriale V, per indicare un sottospazio W rispetto ad uno spazio vettoriale, scriviamo:

$$W \subset V$$

Il sottospazio W ha le stesse proprietà dello spazio in cui è contenuto:

- Somma
- Prodotto scalare
- Esistenza del valore nullo

Esempio:

1. Considero R^3 come spazio vettoriale, $W \subset R^3$ $W = [(x, y, z) \in R^3 : \ x + y - z = 0]$

Prendo un vettore $v_1 = (1, 1, 2) \in R^3$ appartiene al sottospazio W? Si, perchè le componenti del vettore v_1 soddisfano la condizione $x + y - z = 0$.

Prendo un vettore $v_2 = (1, 1, 1) \in R^3$ appartiene al sottospazio W? No, perchè non soddisfa la condizione $x + y - z = 0$.

Prendo un vettore $v_3 = (2, 0, 2) \in W$.

Se faccio la somma tra $v_1 + v_3 = (3, 1, 4)$ che ha la particolarità di appartenere al sottospazio W. Ciò vale anche per la moltiplicazione.
Adesso per assicurarci che le proprietà del sottospazio W sono soddisfatte ci tocca solo capire se esiste il valore nullo, il chè è vero perchè $(0, 0, 0) \in W$.

Se le condizioni non fossero state soddisfate allora W non sarebbe stato un sottospazio.

2. Considero R^{2x2} come spazio vettoriale, $U = [\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x & y \\ y & 0 \end{bmatrix}]$

Quindi t dovrà essere sempre uguale a 0 e z sempre uguale ad y:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in U \quad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in U$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin U$$

Se faccio la somma tra due elementi del sottospazio ottengo un'altro elemento del sottospazio? Si:

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in U$$

La stessa cosa vale per la moltiplicazione e per il valore nullo, quindi U è un sottospazio vettoriale.

Combinazione lineare:

Consideriamo uno spazio vettoriale V su un campo K, ipotizziamo di avere diversi vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $v \in V$ è una combinazione lineare.
Ciò significa che: $\exists a_1, a_2, \ldots., a_n \in K : \quad v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots. + a_n v_n$

Esempio:

Ci troviamo in R^2 con $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, -1)$ e $v = (2, 3)$, quindi.

$$a_1(1, 0) + a_2(0, -1) = (2, 3)$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

Generatori di spazi vettoriali:

Consideriamo uno spazio vettoriale V su un campo K, ipotizziamo di avere diversi vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $v \in V$.

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono generatori dello spazio V se $\forall v \in V$ lo posso sempre scirvere come combinazione lineare:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots. a_n v_n$$

Se non riesco a trovare una combinazione lineare, allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ non generano V.

Esempio:

1. Stiamo in R^2 con $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$, $v_3 = (-1, 1)$, questi vettori generano R^2?

Intanto tutti i vettori appartengono ad R^2, ora applichiamo l'applicazione, scegliendo un generico vettore di R^2, cioè (x, y).

$$(x, y) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = x \\ a_2 + a_3 = y \end{cases}$$

Risoviamo il sistema scegliendo un'incognita libera:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x + a_3 \\ a_2 = y - a_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = x + a_3 - y + a_3 \\ a_2 = y - a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = x - y + 2a_3 \\ a_2 = y - a_3 \end{cases}$$

Adesso scegliamo un valore arbitrario per $a_3 = 0$ e scelgo un vettore da usare come combinazione lineare: $(1, 4)$: $a_1 = -3, a_2 = 4, a_3 = 0$.

NB: All'incognita libera possiamo dargli qualsiasi valore.

2. Stiamo in R^3, $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ generano R^3

$$(x, y, z) = a_1(1, 0, -1) + a_2(1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ 0 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases}$$

Ricaviamoci a_1 e a_2:

$$\begin{cases} 2a_2 = x + z \\ 2a_1 = x - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = 1/2(x + z) \\ 2a_1 = 1/2(x - z) \end{cases}$$

Scegliamo un vettore casuale $(2, 0, 3)$: $a_1 = -1/2$ e $a_2 = (5/2)$, per questo vettore la combinazione è soddisfatta perchè $y = 0$.

Proviamo un altro vettore di R^3: $(2, 1, 2)$: $a_1 = 0$ e $a_2 = 2$, ma $y = 1 = 0$ che non ha senso, quindi non è vero che i due vettori v_1 e v_2 riescono a generare R^3, ma solo una parte.

Base di uno spazio vettoriale:

dati un spazio V su un campo K, allora $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ costituiscono una base di V se:

1. Se $v_1, v_2, ..v_n$ sono L.I (Linearmente Indipendenti, cioè nessuno è il vettore nullo,non devono essere proprozionali e nessuno si può scrivere come combinazione lineare di altri).
2. $v_1, v_2, \ldots v_n$ devono generare lo spazio $V = y(v_1, v_2, \ldots v_n)$

Esempio:

1. Considero R^2 con $v_1 = (1, 1)$ $v_2 = (-1, 1)$ questi vettori sono una base di R^2?

v_1 e v_2 sono L.I? SI:

$$a_1(1, 1) + a_2(-1, 1) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = a_2 = 0$$

Scelto un qualsiasi vettore:

$$(x, y) = a_1(1, 1) + a_2(-1, 1)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = x \\ a_1 + a_2 = y \end{cases}$$

$$a_1 = (x + y)/2 \;\; a_2 = (-x + y)/2$$

Sostituendo x e y troveremo un unico valore per a_1 e a_2 che ci dà come risultato il vettore iniziale (x, y).