Analisi Combinatoria

E' utile avere un metodo per contare il numero di modi in cui avvengono certi fenomeni, infatti molti problemi delle probabilità si risolvono semplicemente calcolando il numero di modi in cui avviene l'evento.

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Principio fondamentale del calcolo combinatori: Se un esperimento a m esiti possibili e se un altro ha n esiti possibili, allora i due esperimenti hanno mn esiti possibili.

Permutazioni

Possiamo creare le permutazioni seguendo lo stesso concetto del principio fondamentale combinatorio.
Se abbiamo un insieme di 3 elementi ci saranno 6 modi distinti per ordinarli: infatti alla primo "evento" posso scegliere uno dei 3 elementi, al secondo 2, all'ultimo 1, cioè:

$$3 * 2 * 1 = 6$$

Generalizzando su n elementi abbiamo:

$$n(n-1)(n-2)...3-2-1 = n!$$

Quindi su n oggetti abbiamo $n!$ permutazioni possibili.

Una formula importante da ricordare è:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Vi sono permutazioni distinte di n oggetti, dei quali n_1 sono identici fra loro, n_2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti fino ad n_r.

Combinazioni

Servono a determinare il numero di insiemi che si possono formare con r oggetti a partire da un insieme di n oggetti.

Definiamo $\binom{n}{r}$, per $r <= n$,come:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$ rappresenta il numero di combinazioni di r oggetti tra n pertanto è il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare con n oggetti, senza tenere conto dell'ordine della selezione.

Teorema del binomio

E' quel teorema che ci permette di capire tutti gli sviluppi di $(x+y)^n$, infatti:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} * x^k * y^{n-k}$$

Si può dimostrare per induzione con la combinatoria, qui è omessa.

Coefficienti multinomiali

Dobbiamo distribuire n oggetti distinti in r scatole distinte in modo tale che ciascuna di esse contenga nell'ordine $n_1, n_2, \ldots n_r$ oggetti, in quanti modi si possono dividere?

Se $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ si definisce $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_r}$ come:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

Che rappresenta il numero di suddivisione di n oggetti distinti in r gruppi distinti con, rispettivamente $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementi.