7) SETTIMA LEZIONE

Una matrice è una tabella ordinata dove compiaiono n righe ed m colonne:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & .... & a_{1-m} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & .... & a_{2-m} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n-1} & a_{n-2} & .... & a_{n-m} \end{bmatrix}$$

Il generico elemento si scrive come: a_{i-j} dove i e la riga e j è la colonna.

Quando $n\ != m$, allora la matrice è rettangolare, se $n = m$ allora abbiamo una matrice quadrata.

Con le matrici quadrate possiamo calcolare il determinante.

Quindi a_{i-j} è uno scalare $\in K$, in questo caso la matrice $A \in K^{n,m}$, possiamo considerare ogni riga o colonna della nostra matrice come un vettore ad m o n componenti.

Esempi:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix} \in R^{2,3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & i & 2-i \\ 3 & 5i & 2-3i \end{bmatrix} \in C^{2,3}$$

Possiamo scrivere la matrice complessa come somma di una matrice Reale con una Complessa:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrici quadrate:

Se abbiamo una matrice $n * n$ la possiamo anche chiamare matrice di ordine n.

Gli elementi della diagonale principale di una matrice sono tutti quegli elementi a_{ij} dove: $i = j$.

Gli elementi della diagonale secondaria di una matrice sono: $a_{1,n}, a_{2,n-1} ... a_{n,1}$, si noti che la somma tra gli indici fa sempre $n + 1$.

NB: Si parla di diagonali solo per matrice quadrate

Matrici triangolari:

Una matrice è di tipo triangolare inferiore significa che tutti gli elementi "al di sopra" della diagonale principale sono tutti 0, per essere più formali si intende che tutti gli elementi $a_{i,j} = 0$ con $i < j$.

Una matrice è di tipo triangolare superiore significa che tutti gli elementi "al di sotto" della diagonale principale sono tutti 0, per essere più formali si intende che tutti gli elementi $a_{i,j} = 0$ con $i > j$.

Una matrice di tipo Diagonale è una matrice quadrata dove gli elementi al di fuori della diagonale principale sono tutti nulli, ciò non significa però che gli elementi sulla diagonale non possano essere nulli, quindi $a_{i,j} = 0$ con $i != j$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Una matrice diagonale particolare è la matrice Identità, dove ci stanno solo 1 nella diagonale principale, mentre tutti gli altri elementi sono uguali a 0:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice trasposta:

Immaginiamo di avere una matrice $A \in K^{n*m}$, la matrice trasposta è: A^T(la T deve stare sull'altro lato), ed è una matrice che si ottiene scambiato ordinatamente righe con colonne di A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{T^T} = A$$

Consideriamo una mareice quadrata A in K^{n*n}, anche per le matrici quadrate si può trovare la trasposta, ma nel caso in cui $A = A^T$, allora ci troviamo di fronte ad una matrice simmetrica, quindi tutti gli elementi $ai, j = aj, i$.

Consideriamo una matrice di ordine 4, chiamata A, una matrice è antisimmetrica se l'elemento $a_{i,j} = -a_{i,j}$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -7 & 1/2 \\ -2 & 0 & -1 & 12 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \\ -1/2 & -12 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli elementi della diagonale principale sono caraterizzati dal fatto che $i = j$, quindi $a_{i,i} = -a_{i,i} \to a_{i,i} + a_{i,i} = 0 \to 2a_{i,i} = 0 \to a_{i,i} = 0$, quindi tutti gli elementi della diagonale principale devono essere uguali a 0.

Operazione tra matrici:

- Prodotto di uno scalare per una matrice:

$$2\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

- Somma e differenza tra matrici: Si possono fare somma e differenza di matrici solo di matrici dello stesso tipo (Stesse colonne e righe), per farla semplicemente facciamo somma o differenza fra gli elementi in posizione $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$.
- Prodotto tra matrici.
- Trovare l'inversa di una matrice.