Introduzione ai grafi

Origini storiche

L'idea della teoria dei gradi nasce dal problema dei ponti di Konigsberg del 1736 affrontato da Eulero.
L'idea per risolverlo era quello si schematizzare la pianta della città eliminando eliminando dettagli topografici inutili, creando a tutti gli effeti un grafo.

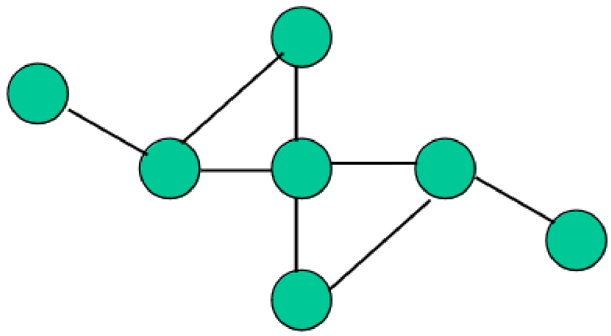
Definizione di grafo non orientato

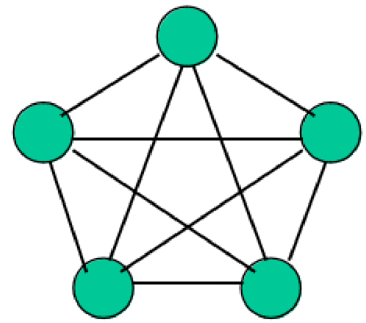
Un grafo $G = (V, E)$ consiste in:

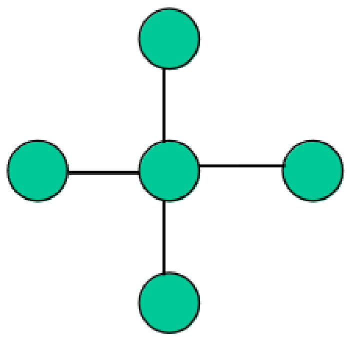
- Un insieme V di vertici o nodi;
- Un insieme E di coppie (non ordinare) di vertici, detti archi

Nota

Un grafo è detto multigrafo se contiene archi paralleli.







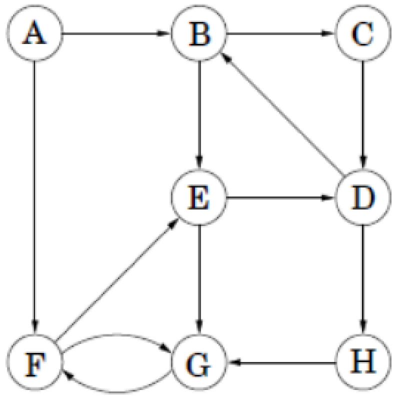
Possiamo distinguere i grafi in due categorie: **non orientato** e **diretto**

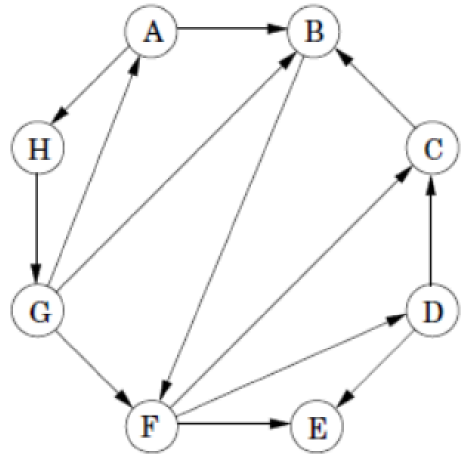
definizione di grafo diretto

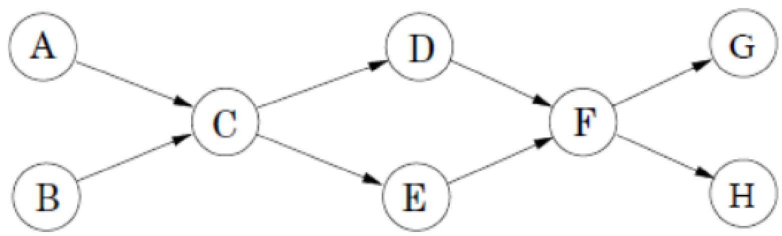
Un grafo diretto $D = (V, A)$ consiste in:

- Un insieme V di vertici o nodi;

- Un insieme A di coppie ordinate di vertici, detti archi diretti







Terminologia Grafi non orientati e Grafi diretti

$G = (V, E)$ ---> Grafo non diretto;

$n = |V|$ ---> Numero di vertici;

$m = |E|$ ---> Numero di archi;

u ed v sono adiacenti (vicini);

(u, v) è incidente a u e v (detti estremi);

$\delta(u)$ ---> grado di u: Numero di archi incidenti ad u

Grado di G = $max_{v \in V}(\delta(v))$

$G = (V, E)$ ---> Grafo diretto;

$n = |V|$ ---> Numero di vertici;

$m = |E|$ ---> Numero di archi;

u ed v sono adiacenti (vicini);

(u, v) è uscente a u ed entrante in v

$\delta_{out}(u)$ ---> grado uscente di u: Numero di archi uscenti da u

$\delta_{in}(u)$ ---> grado entrante di u: Numero di archi entranti da u

Grado entrante di G = $max_{v \in V}(\delta_{in}(v))$

Grado uscente di G = $max_{v \in V}(\delta_{out}(v))$

Proprietà (Relazione fra grado dei nodi e numero di archi)

Cosa ottengo se sommo i gradi di ogni nodo:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

In ogni grafo il numero dei nodi di grado dispari è pari.

Cosa succede se lo faccio in un grafo diretto:

$$\sum_{v \in V} \delta_{out}(v) = \sum_{v \in V} \delta_{in}(v) = m$$

Terminologia (Parte 2)

- **Cammino:** Sequenza di nodi connessi da archi.
- **Lunghezza di un cammino**: Numero di archi del cammino.
- **Distanza**: La lunghezze del più corto cammino tra due vertici. (Nei grafi orientati deve rispettare l'orientamento degli archi).
- G è **connesso** se esiste un cammino per ogni coppia di vertici.
- **Ciclo:** Un cammino chiuso, un cammino da un vertice a se stesso.
- **Diametro:** Massima distanza fra due nodi, il diametro di un grafo non connesso è ∞

Grafo pesato

Un grafo pesato $G = (V, E, w)$ è un grafo in cui ogni arco viene associato un valore definito dalla funzione peso w.

Altri tipi di grafi

- **Grafo totalemente sconnesso**: Grafo tale che $V = \emptyset$ e $E = \emptyset$

- **Grafo completo:** Per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge, lo indichiamo con K_n ed ha $m = |E| = n(n-1)/2$.

Un grafo, senza cappi o archi paralleli, può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$

Definizione

Un albero è un grafo connesso ed aciclico.

Teorema

Sia $T = (V, E)$ un albero, allora $|E| = |V| - 1$

Quindi se G è connesso avremo che $m = \Omega(n)$ e $m = O(n^2)$

Risoluzione del problema dei ponti di Konigsberg

Per risolvere il problema dobbiamo introdurre una nuova definizione e un teorema:

Definizione:

Dato un grafo G, un ciclo (Rispettivamente un cammino) euleriano è un ciclo (Rispettivamente un cammino non chiuso) di G che passa per tutti gli archi di G una e una sola volta.

Teorema di Eulero:

Un grafo G ammette un Ciclo euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari. Inoltre ammette un ciclo euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari tranne due (I due nodi di grado dispari sono gli estremi del cammino).

Utilizzando il teorema sul problema dei ponti di Konigsberg otteniamo che **il problema non ammette soluzione.**

Reti delle dipendenze

Sono grafi particolari in cui i nodi sono compiti da svolgere, mentre gli archi (u, v) vanno a definire quale compito deve essere eseguito prima, in questo caso dobbiamo prima eseguire u

poi v.

Esempi di problemi con questi grafi:

- Trovare il massimo numero di compiti eseguibili.
- Colorazione di un grafo.
- Trovare un ordine in cui eseguire i compiti in modo da rispettare le seguenze.