10)DECIMA LEZIONE

All'interno di un sistema lineare le incognite possono essere inserire all'interno di una n-upla: $(x_1, x_2, \dots . x_n)$.

Risolvere un sistema significa trovare tutte le n-uple che soddisfano tutte le equazioni.

La cosa che ci interessa in particolare quando svolgiamo un sistema è capire se ci sono o meno delle soluzioni, in caso affermativo ci interessa capire quante sono.

Possiamo riscrivere il nostro sistema come una matrice:

$$\begin{cases} a_{1-1}x_1 + a_{1-2}x_2 + \dots + a_{1-m}x_m = b_1 \\ a_{2-1}x_1 + a_{2-2}x_2 + \dots + a_{2-m}x_m = b_2 \\ \dots \\ a_{m-1}x_1 + a_{m-2}x_2 + \dots + a_{m-m}x_m = b_m \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & \dots . & a_{1-m} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & \dots . & a_{2-m} \\ \dots . & \dots . & \dots . & \dots . \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots . & a_{n-m} \end{bmatrix}$$

Questa è detta anche matrice incompleta, la matrice completa invece è la matrice incompleta con una nuova colonna in cui inseriamo i risultati delle equazioni del sistema.

Teorema di Rouchè-Capelli: Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

Teorema di Struttura per l'insieme di soluzioni di un sistema lineare:

Permette di descrivere le soluzioni di un sistema linera non omogeneo partendo da una sua qualsiasi soluzione.

Rappresentiamo il nostro sistema nella forma matriciale: $Ax = b$

Un sistema lineare omogeneo è un sistema in cui tutte le b_i sono pari a zero.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Al contrario un sistema lineare **non** omogeneo è un sistema in cui tutte le b_i sono valori diversi da zero:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Enunciato del teorema: Siano $Ax = b$ un sistema lineare e v_0 una sua soluzione. Tutte e sole le soluzioni v del sistema sono della forma: $v = v_0 + w$.
Dove w è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad: $Ax = b$.

Esempio:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Una delle soluzione è $v_0 = (1, 1, 1)$, adesso scriviamo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

E troviamo le soluzioni, impostando la y come parametro libero otteniamo:

$$\begin{cases} y = \alpha \\ z = 2\alpha \\ x = -3\alpha \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistena omogeneo sono: $(x, y, z) = (-3\alpha, \alpha, 2\alpha) + v_0 =$

$$(-3\alpha + 1, \alpha + 1, 2\alpha + 1)$$

Il vero punto di forza di questo teorema è una delle sue conseguenze, da questo sistema possiamo capire che l'insieme S delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = b$, lo possiamo scrivere come:

$$S = v_0 + W = (v_0 + w : w \in W)$$

Dove v_0 è una soluzione di $Ax + b$ e W è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo.

Ricordando che le soluzioni di un sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ di n equazioni e a coefficiente in un campo K sono un sottospazio vettoriale di K^n, dal teorema di struttura segue che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ è un sottospazio affine di K^n.

Criterio di risolubilità: Un sistema ammette soluzioni se e soltanto se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Criterio di unicità: Un sistema compatibile ha una sola soluzione se e soltanto se le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

Due vettori u, v sono linearmente indipendenti se:

$$au + bv = 0$$

e:

$$a = 0, b = 0$$

In altre parole, i vettori u e v sono linearmente indipendenti se non esiste alcuna coppia di scalari a e b, diversa dalla coppia $(0, 0)$, che soddisfa l'equazione sopra. Se esistono tali scalari non nulli a e b, allora i vettori sono linearmente dipendenti.

Se gli scalari annullano la combinazione lineare formata con i vettori e non sono tutti nulli, allora significa che i vettori sono linearmente indipendenti.