11)UNDICESIMA LEZIONE

Un'applicazione lineare (o anche trasformazione lineare, mappa lineare o omomorfismo) è una funzione tra spazi vettoriali definiti sullo stesso campo.
Le operazioni dei campi sono conservate.

Immaginiamo di avere due spazi vettoriali: V e W definiti su un campo K, F è una funzione da V in W:

$$F : V \rightarrow W$$

F prende il nome di applicazione lineare e soddisfa le seguenti condizioni:

- $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ ------------- Addittività.
- $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ ------------- Omogeneità.

Se $\beta = (v_1, v_2, \ldots., v_n)$ è una base di V e $v \in V$, allora:

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = x_1 T(v_1) + \ldots x_n T(v_n)$$

Ad ogni applicazione lineare possiamo associare una matrice $A = M(T)$ che ha per colonne le immagini degli elementi della base di V , espresse rispetto alla base di W. Salvo indicazioni le basi di V e W sono le basi canoniche. Usando la matrice associata

$$T(V) = A * v$$

Una applicazione lineare può essere definita tramite:

- La regola: $T : R^2 \rightarrow R^3$ tale che:

$$T(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$$

- Le immagini di una base: $T : R^2 \rightarrow R^3$ tale che:

$$T(e_1) = (1, 2, 1) \quad T(e_2) = (1, 0, -1)$$

- La matrice associata rispetto ad una base: $T : R^2 \rightarrow R^3$ tale che la matrice associata rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'**Immagine** $Im(T)$ di una applicazione lineare $T : V \rightarrow W$ è lo spazio generato dalle immagini degli elementi di una base $B = v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V :

$$Im(T) = (T(v) : v \in V) = [T(v_1), \ldots., T(v_n)] \subseteq W$$

Utilizzando la matrice $A = M(T)$, otteniamo:

- $Im(T) =$ Spazio generato dalle colonne di A.
- $B(Im(T)) =$ Colonne linearmente indipendenti di A.
- $dim(Im(T))$ = Rango di A.

Il **Nucleo** $N(T)$ di una applicazione lineare $T : V \to W$ è il sottospazio di V formato dagli elementi la cui immagine è lo 0:

$$N(T) = v \in V | T(v) = 0 \subseteq V$$

Utilizzando la matrice A associata:

- $N(T)$ = {Soluzioni del sistema omogeneo associato a A }
- $dim(N(T)) = n - rg(A)$, dove $n = dim(V)$ = numero delle incognite del sistema lineare.

Teorema della nullità del rango: Se $T : V \to W$,allora:

$$dim(N(T)) + dim(Im(T)) = n = dim(V)$$

l'applicazione è detta:

- **Iniettiva** se $dim(N(T)) = 0$, cioè se $N(T) = (0)$.
- **Suriettiva** se $dim(Im(T)) = dim(W)$, cioè se $Im(T) = W$.
- **Biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva, un'applicazione è invertibile se è biettiva.

Notiamo che:

- Il nucleo di T corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A .
- L'immagine di T corrisponde allo spazio generato dai vettori colonna di A.
- w appartiene all'imagine di T se il sistema $A|w$ ha soluzione, cioè se $rg(A) = rg(A|w)$