13)TREDICESIMA LEZIONE

Possiamo calcolare autovalori e autovettori quando abbiamo un endomorfismo, una particolare applicazione lineare.
Consideriamo: V su un campo K e

$$f : V \to V$$

Questo è un endomorfismo, cioè un'applicazione lineare che va da uno spazio V a se stesso.

In questo caso diremo che $v \in V$ e $\lambda \in K$ sono rispettivamente autovalore e autovattore quando accade la seguente cosa:

$$f(v) = \lambda v$$

Otteniamo un valore proporzionale a v.

Esempio:

$$f : R^3 \to R^3$$

$$f(x, y, z) = (x, y + z, x + y + z)$$

Determiniamo gli autovalori e gli autovettori:

1. Scegliamo una base in R^3, per convenienza prendiamo quella canonica, cioè mettendo come valore di input $1, 0, 0$ e $0, 1, 0$ e $0, 0, 1$:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \quad f(0, 1, 0) = (0, 1, 1) \quad f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$$

2. Scriviamo la matrice associata:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ora calcoliamo la matrice $H = M - \lambda I_3$

$$H = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$$

4. Calcoliamo il determinante di questa matrice e otteniamo il polinomio caratteristico:

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda - 1)(1 - \lambda + 1) = 0$$

5. Adesso risolviamo l'equazione e otteniamo gli autovalori: $\lambda = 0 \;\; \lambda = 1 \;\; \lambda = 2$

Se da una applicazione lineare ad n variabili ottieni n autovalori, allora l'endomorfismo è detto semplice, che significa che esiste una base dell'endomorfismo fatta solo da autovalori.

Adesso cerchiamo gli autovettori: $f(v_1) = 0v$ $f(v_2) = 1v$ $f(v_3) = 2v$:

1. Partiamo dalla matrice H e la moltiplico per un vettore generico di $R^3 = (0, 0, 0)$:

$$H * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Scriviamo il sistema:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda) * y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

3. Sostiutisco gli autovalori ad ogni λ, questo va fatto per ogni autovalore, quindi otterrò 3 sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \to (0, -z, z)$$

Possiamo assegnare un qualsiasi valore a z, perchè è una variabile libera; $(0, -1, 1)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \to (-y, y, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} -x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \to (0, z, z) = (0, 1, 1)$$

Quindi ricapitolando:

- $(0, -1, 1)$ è un autovettore del autovalore $\lambda = 0$
- $(-1, 1, 0)$ è un autovettore del autovalore $\lambda = 1$
- $(0, 1, 1)$ è un autovettore del autovalore $\lambda = 2$

Possiamo anche vederlo con la teoria:

- $f(0, -1, 1) = 0(0, -1, 1)$
- $f(-1, 1, 0) = 1(-1, 1, 0)$
- $f(0, 1, 1) = 2(0, 1, 1)$

Un argomento molto connesso è quello della matrice diagonalizzabile.