Variabili Aleatorie Discrete

Def: X è un variabile aleatoria se:

$$X : \Omega \to E \subset R$$

Le variabili aleatorie si possono dividere in discrete o continue.
Le variabili discrete sono quelle che hanno un numero finito o numerabile di elementi in Ω.

> **Esempio: Il lancio di un dado è una variabile aleatoria discreta perché:**
> $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

Una funzione di distribuzione, o funzione di distribuzione cumulativa (CDF), è una funzione che descrive la probabilità che una variabile aleatoria assuma un valore minore o uguale a un certo valore. In altre parole, per una variabile aleatoria X, la funzione di distribuzione è definita come:

$F(x) = P(X \leq x)$

Ricordiamo che è una funzione: $F : R \to [0, 1]$ con dominio la retta reale e immagine l'intervallo $[0, 1]$.
Una funzione *F* è una valida funzione di distribuzione se è non decrescente, continua a destra e se:

- $F(x) \geq 0 \ \ \forall x$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$

Dove $F(x)$ rappresenta la probabilità che X sia minore o uguale a x.
Una distribuzione aleatoria descrive come i valori di una variabile sono distribuiti.
Esistono diverse distribuzioni delle variabili aleatorie:

Distribuzione di Bernoulli:

Se un evento si può dividere in successo e insuccesso, chiamiamola $X - Bernoulli(p)$.
Quindi:

$$X = 1(successo) \qquad X = 0(insuccesso)$$

Allora la probabilità di avere successo è $P(X = 1) = p$, mentre quella di avere un insuccesso è $P(X = 0) = 1 - p$.

Di conseguenza la densità discreta di X è data da:

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$p(1) = P(X = 1) = p$$

Distribuzione Binomiale:

Quando vogliamo sapere il numero totale di successi in n prove indipendenti., chiamiamola $X - Bin(n, p)$ dove n è il numero di prove e p è la probabilità di successo nel singolo esperimento.

> **Ogni prova sulle n prove può essere considerata una Bernoulli, quindi contro n Bernoulli indipendenti.**
>
> Di conseguenza la densità discreta di X è data da:
>
> $$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k (1 - p)^{n-k}$$

Distribuzione Geometrica:

Vogliamo sapere il numero di prove indipendenti per vedere il primo successo, chiamiamola $X - Geom(p)$

La densità discreta sarà:

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Dove k è il numero di prove fatte per vincere.

> **Proprietà: Assenza di Memoria, significa che ad ogni prova o vinco o perdo indipendentemente da cosa è successo prima.**

Distribuzione Binomiale Negativa:

Numero di prove indipendenti per ottenere il k-esimo successo, chiamiamola $X - BinNeg(n, k, p)$, dove:

- n è il numero di prove ripetute;
- k è il numero di successi che voglio avere nelle n prove;
- p è il numero del successo dell'esperimento.

La densità discreta sarà:

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k-1} * p^k(1-p)^{n-k}$$

Distribuzione Ipergeometrica:

Vogliamo contare da un'estrazione senza rimpiazzo il numero di palline B estratte dove:

- Il campione estratto = n
- Urna ha N palline dove m palline sono $B(bianche)$, mentre il restante, $N - m$ sono $n(nere)$

Abbiamo quindi $X - Ipergeom(p)$

La densità discreta sarà:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} * \binom{n-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Distribuzione di Poisson:

Vogliamo contare il numero di successi in un certo intervallo di tempo abbiamo la variabile aleatoria: $X - Poisson(\lambda)$ dove λ rappresenta il numero medio di successi.

La distribuzione discreta è:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda}{k!}$$