9)NONA LEZIONE

Una matrice a gradini è una matrice rettangolare o quadrata in cui il primo elemento non nullo di ogni riga è più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Il primo elemento non nullo di ogni riga di una matrice a gradini prende il nome di **pivot**

In una matrice ridotta a scala il numero di pivot coincide con il rango della matrice

Esempi:

Le seguenti sono tutte matrici a scalini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Altri esempi di matrici a scala sono:

- La matrice nulla
- La matrice diagonale
- Una qualsiasi matrice triangolare superiore con gli elementi sulla diagonale diversi da zero.

Uno dei principali vantaggi delle matrici a gradini è il calcolo del rango, infatti coincide col numero di righe non nulle.

Algoritmo di Gauss:

Tutte le matrici possono essere ridotte in matrici a gradini tramite l'algoritmo di Gauss o eliminazione gaussiana.

Questo algoritmo viene utilizzato per risolvere sistemi lineari e per calcolare il rango di una matrice.

Per usare questo algoritmo possiamo utilizzare ciò che si chiamano **mosse di Gauss**

- Scambiare due righe.
- Moltiplicare una riga della matrice per uno scalare.
- Sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommanfo a essa un multiplo di un'altra.

Ecco invece i passi dell'algoritmo di Gauss:

Indichiamo con A una matrice non ridotta a scalini con m righe ed n colonne:

1. Sia C_k con $1 <= k <= n$, la prima colonna a partire da sinistra che contine almeno un termine a non nullo.

Detta R_1 la prima riga della matrice, possono presentarsi due eventualità:

2. A: Se a è un elemento di R_1 passiamo al punto 3).
3. B: Se $a \notin R_1$, scambiamo la riga che contine a con R_1. Controlliamo se la matrice ottenuta dopo lo scambio è ridotta a gradini, se lo è allora possiamo fermarci.
4. L'obiettivo è annullare tutti gli elementi della $k - esima$ colonna al di sotto di a. Sostituiamo ogni riga R_i con $i > 1$ e con $k - esimo$ elemento non nullo, con $R_i + \lambda R_1$, λ è uno scalare scelto in maniera tale che la somma tra R_i e λR_1 abbia il $k - esimo$ elemento nullo.
5. Se la matrice risultatnte è ridotta a scala, abbiamo finito; in caso contrario tralasciamo la prima riga e le prime k colonne e troniamo al punto 1)

Teorema di Rouchè-Capelli:

Un sistema di equazioni $Ax = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti di A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|B)$$

inoltre:

- Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) = \textit{ numero delle incognite}$
- Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) < \textit{ numero delle incognite}$