# 5) QUINTA LEZIONE

Un campo è un'insieme, $K$ in cui sono definite due operazioni interne (somma e prodotto) che godono delle seguenti proprietà:

1. $\forall x, y, x \in K \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (Proprietà Associativa)
2. $\forall x, y \in K: \quad x+y = y+x$ (Proprietà Commutativa)
3. $\exists 0 in K: \quad x+0 = 0+x = x$ (Esistenza dell'elemento neutro)
4. $\forall x \in K \exists y \in K: \quad x+y = 0$ (Esistenza dell'opposto)
5. $\forall x, y, z \in K \quad (x*y)*z = x*(y*z)$ (Proprietà associativa del prodotto)
6. $\forall x, y \in K \quad x*y = y*x$ (Proprietà commutativa del prodotto)
7. $\exists 1 \in K: \quad x*1 = 1*x = x$ (Esistenza dell'elemento neutro del prodotto)
8. $\forall x \in K - [0] \;\; \exists y \in K: \quad x*y = 1$ (Esistenza dell'inverso)
9. $\forall x, y, x \in K \quad x(y+z) = x*y + x*z$ (Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma)

Uno spazio vettoriale su un campo $K$ è un insieme $V$ in cui sono definite:

- Un'operazione interna tra elementi di $V$, detta somma;
- Un'operazione di prodotto che associa ad ogni coppia formata da un elemento di $V$ (vettore) e da un elemento di $K$(scalare) un (unico) elemento di $V$

che deve rispettare le proprietà precedenti.

**Esempio:**

1. L'insieme $R^n = [(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) : x_i \in R]$ di tutte le n-uple ordinate di numeri reali con le due operazioni di somma e moltiplicazione per ino scalare così definite:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) + (y_1, y_2, \ldots y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots . x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots . \lambda x_n)$$

E' uno spazio vettoriale.

In particolare:

- Il vettore nullo è $0 = (0, 0, \ldots, 0)$
- L'opposto di $v = (x_1, x_2, \ldots)$ è $-v = (-x_1, -x_2, \ldots)$
- L'insieme dei vettori nel piano e dei vettori nello spazio possono essere identificati come

$R^2$ e $R^3$

2. L'insieme $M_{mxm}$ delle matrici $mxm$ a coefficienti in $R$ con le due operazioni di somma tra matrici e moltiplicazione di un numero reale per una matrice è uno spazio su $R$ in particolare:

- Lo 0 di cui si parla è la matrice nulla
- L'opposto di cui si parla è la matrice con tutti i valori cambiati di segno

3. L'insieme $R[x] = [a_0 + a_1 + a_2^2 + ... + a_n^n : n \in N, a_i \in R]$ dei polinomi a coeffiecienti reali con le due operazioni di somma tra polinomi e moltiplicazione di un numero reale (scalare) per un polinomio è un spazio vettoriale su $R$, in particolare:

- Lo 0 è il polinomio nullo $p(x) = 0$ con coefficienti nulli
- l'opposto è il polinomio avente tutti i coefficienti cambiati di segno