# Metodi numerici per problemi ai limiti

Progetto di didattica innovativa

Andrea Colombo
Francesco Guzzetta
Giulia Torregrossa
Francesco Zeng

FONDAMENTI DI CALCOLO NUMERICO

Politecnico di Milano, AA 2019-2020

# Indice

# 1. Introduzione dei problemi ai limiti

Definiamo problemi ai limiti quei problemi che si pongono l'obiettivo di studiare un'equazione differenziale per le quali il valore della soluzione è assegnato al bordo dell'intervallo in cui sono definiti. L'intervallo su cui può essere delimitato il problema può essere monodimensionale, dunque un intervallo (a, b) di una retta reale per i quali sono assegnati gli estremi, o multidimensionale, dunque un aperto Ω appartenente a $R^2$ o $R^3$ di cui sono noti i valori al bordo.
Questa classe di problemi tratta equazioni differenziali che coinvolgono l'uso di derivate. La soluzione coinvolge le derivate parziali della soluzione rispetto alle coordinate spaziali.

Vengono invece chiamati problemi evolutivi i problemi dello stesso tipo, che coinvolgono nella soluzione le derivate rispetto al tempo. In questo caso, andranno assegnate condizioni iniziali rispetto al tempo t=0.
Nel caso l'equazione differenziale dipenda solo linearmente dalle derivate di ordine massimo, questa viene chiamata quasi-lineare.
Un particolare tipo di equazioni quasi-lineari , in cui i coefficienti sono solo funzione delle variabili indipendenti, è detta semi-lineare.

I problemi ai limiti possono essere ulteriormente suddivisi in 3 categorie principali in base alla loro descrizione matematica:

**Problema ellittico**

Questo tipo di equazioni modellizzano adeguatamente una vasta gamma di fenomeni descrivendone spesso le condizioni di equilibrio o dove non c'è più dipendenza dal tempo come nel caso delle condizioni di stazionarietà.
L' equazione di Poisson è il prototipo di questa sottoclasse di problemi.

$$-u'' = f(x), \qquad x \in (a, b), \qquad (1)$$

o, in più dimensioni,

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \Omega, \quad (2)$$

Dove f è una funzione nota e $\Delta$ è *l'operatore di Laplace*.

**Problema parabolico**

Questa classe di problemi descrive problemi che variano in funzione del tempo e infatti è peculiare la presenza della derivata prima rispetto al tempo.

Noto esempio di questa seconda categoria è l'equazione del calore.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (3)$$

o, in più dimensioni,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \mu \Delta u(x,t) = f(x,t), \;\; x \in \Omega, \;\; t > 0 \qquad (4)$$

Dove μ è il coefficiente che rappresenta la diffusività termica ed è necessariamente maggiore di zero mentre f è una funzione assegnata.

**Problema iperbolico**

Si può definire problema iperbolico un problema di ordine n, le cui n-1 derivate hanno un problema ai valori iniziali ben posto.

Spesso le equazioni che descrivono fenomeni meccanici sono di tipo iperbolico. L'equazione delle onde infatti è una possibile definizione di problema iperbolico

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \;\; x \in (a,b), \;\; t > 0 \qquad (5)$$

o, in più dimensioni,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathrm{c}\Delta u(x,t) = 0, \qquad x \in \Omega, \;\; \mathrm{t} > 0 \qquad (6)$$

Dove c è una costante strettamente positiva.

# 2. Condizioni al contorno

Come già accennato per ottenere un'unica soluzione del problema ai limiti è necessario definire le condizioni al contorno.
Le due principali tipologie di condizioni sono le condizioni di Dirichlet e di Neumann.
Una condizione al contorno di Dirichlet può essere anche indicata come condizione al contorno fissa.
Prendendo in esame il caso monodimensionale dell'equazione di Poisson possiamo perciò definire il *problema ai limiti di Dirichlet* come:

$$\begin{aligned} &-u''(x) = f(x), \ \ per\ x \in (a,b) \\ &u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta \end{aligned} \tag{7}$$

In questo caso agli estremi dell'intervallo viene assegnato un valore definito alla funzione.

Il *problema ai limiti di Neumann* invece si mostra nella forma

$$\begin{aligned} &-u''(x) = f(x) \qquad per\ x \in (a,b) \\ &u'(a) = \gamma, \qquad u'(b) = \delta \end{aligned} \tag{8}$$

Dove gamma e delta soddisfano la condizione di compatibilità:

$$\gamma - \delta = \int_a^b f(x)dx$$

Le condizioni al contorno in questo caso sono definite in quanto la derivata prima agli estremi del dominio è assegnata.
È importante notare che in questo caso la soluzione del problema è definita a meno di una costante additiva.

Estendendo nel caso bidimensionale il problema ai limiti di Dirichlet si presenta nella forma

$$\begin{aligned} &-\Delta u(x) = f(x) \ \ per \ \ x \in \ \Omega \\ &u(x) = g_D(x) \ \ per\ x \ \ \in \ \partial\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

Dove $f(x)$ e $g_D(x)$ sono due equazioni date.

# 3. Approssimazione alle differenze finite del problema monodimensionale di Poisson

Si consideri un Problema di Poisson monodimensionale definito in un intervallo chiuso $(a, b)$ come

$$-u''(x) = f(x) \quad per\ x \in (a, b) \qquad (10)$$

Per la risoluzione dell'equazione differenziale è conveniente suddividere l'intervallo $(a, b)$ in N sottointervalli, e trasformare la derivata seconda con un suo opportuno rapporto incrementale.
È così possibile scrivere la (1) come

$$-u''(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, N$$

Ogni punto $x_j$ è chiamato nodo.
Per approssimare l'equazione si sfrutta un opportuno rapporto incrementale della derivata seconda, approssimazione tanto più corretta tanto maggiore è il numero dei nodi interni all'intervallo (N).
Si osserva che data una funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare in un intorno di $\bar{x} \in (a, b)$ la quantità

$$\delta^2 u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} - h)}{h^2} \qquad (11)$$

fornisce una approssimazione di $u''(\bar{x})$ di ordine 2 rispetto ad $h$.
Da cui si ricava l'approssimazione che è opportuno utilizzare per il problema in esame (1).

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j), \quad j = 1, \dots, N \qquad (12)$$

Dove $u_j$ è un'approssimazione di $u(x_j)$ .

Le equazioni (2) formano insieme alle condizioni al contorno il sistema Lineare

$$A_{fd}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad (13)$$

Dove $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$ è il vettore delle incognite

È necessario ora trattare le condizioni al contorno che possono essere, come precedentemente citato, di 3 tipologie:

- Condizioni al contorno di Dirichlet
- Condizioni al contorno di Neumann
- Condizioni al contorno di Robin

**Dirichlet**

Le condizioni al contorno di Dirichlet (7) forniscono i valori di $u_0 = \alpha$ e $u_{N+1} = \beta$ di conseguenza nella (3) risulta $\boldsymbol{f} = (f(x_1) + {}^{\alpha}/_{h^2}, \dots, f(x_N), f(x_N) + {}^{\beta}/_{h^2})^T$ e $A_{fd} = h^{-2}\hat{A}$, dove $\hat{A}$ è matrice tridiagonale.

Il sistema Lineare relativo al problema di Poisson monodimensionale (10) con condizioni al contorno di Dirichlet diventa quindi:

$$h^{-2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(x_1) + {}^{\alpha}/_{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + {}^{\beta}/_{h^2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

**Neumann**

Le condizioni al contorno di Neumann (8) sono condizioni sulle derivate prime.
Si procede quindi approssimando le condizioni al loro opportuno rapporto incrementale per poi inserirle nel sistema lineare.
Ci sono diverse approssimazioni possibili con diversi gradi di precisione per quanto riguarda le derivate prime, la più adatta va scelta in base alla tipologia di problema e ai risultati che si vogliono ottenere.

Data una funzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare in un intorno di $\bar{x} \in (a, b)$ si definisce:

- Approssimazione centrata di $u'(\bar{x})$ al secondo ordine

$$\delta u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h}$$

- Approssimazione in avanti di $u'(\bar{x})$ al primo ordine

$$\delta u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h}$$

- Approssimazione indietro di $u'(\bar{x})$ al primo ordine

$$\delta u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h}$$

- Approssimazione decentrata di $u'(\bar{x})$

$$\delta u(\bar{x}) = \frac{-3u(\bar{x}) + 4u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} + 2h)}{2h}$$

Utilizzando l'approssimazione decentrata, il sistema Lineare relativo al problema di Poisson monodimensionale (10) con condizioni al contorno di Neumann diventa:

$$h^{-2}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma/h \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \\ \delta/h \end{bmatrix} \qquad (15)$$

I sistemi (14) e (15) ammettono un'unica soluzione, $A_{fd}$ nel caso (14) in particolare è simmetrica e definita positiva, entrambi possono essere risolti mediante diversi metodi, come ad esempio il metodo di Thomas.

**Robin**

Le condizioni al contorno di Robin si caratterizzano come combinazione lineare di condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann e di conseguenza devono essere approssimate nella stessa maniera, attraverso il rapporto incrementale.

Di seguito esemplificativamente è riportato il problema di Poisson monodimensionale con una condizione al contorno di Robin (sull'estremo a) e una di Dirichlet (sull'estremo b).

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad per\ x \in (a,b) \\ u(a) + u'(a) = \gamma \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

# 4. Analisi dell'approssimazione con differenze finite del problema di Poisson 1D

Una volta mostrato che la soluzione del problema approssimato esiste ed è unica, andiamo a studiare l'errore dell'approssimazione fatta.
Sia u(x) la soluzione del problema (7). Se vale:

$$\text{per } h \to 0 \qquad \max_{j=0,\ \dots,N} \left|u(x_j) - u_j\right| \leq C(h)$$

$$\text{con } C(h)\ t.c.\ \ \lim_{h\to 0} C(h) = 0$$

allora il metodo usato per calcolare la soluzione è convergente e vale il seguente risultato:

$$se\ f \in C^2([a,b])$$

$$max_{j=0,\dots,N+1}\left|u(x_j) - u_j\right| \leq \frac{(b-a)^2}{96} h^2 \cdot max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

ovvero, il metodo alle differenze finite converge con ordine 2 rispetto ad h.
Dato che la convergenza di un metodo numerico è conseguenza della consistenza e della stabilità, ora andiamo a vedere come ciò si applica al metodo (12).

**Consistenza**

Si definisca errore di troncamento locale:

$$\tau_h(x_j) = -\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - f(x_j) \qquad (j = 1, \dots, N) \qquad (16)$$

e norma del massimo discreta:

$$\|\tau_h\| = max_{j=1,\dots,N+1}\left|\tau_h(x_j)\right|$$

Il metodo è consistente se:

$$\|\tau_h\| \to 0 \quad quando\ h \to 0$$

In particolare, è consistente di ordine $\boldsymbol{q}$ (con q un intero positivo) se:

$$\|\tau_h\| = O(h^q) \quad quando\ h \to 0$$

Ipotizzando che la derivata quarta di $u$ sia $u \in C^4([a,b])$, il metodo approssima $u''(x_j)$ con accuratezza al 2° ordine rispetto a $h$, ovvero:

$$\delta^2 u(\bar{x}) - u''(\bar{x}) = O(h^2) \qquad per\ h \to 0$$

Attraverso la **(7)** e la **(11)** l'errore di troncamento locale dell'approssimazione utilizzata è:

$$\tau_h(x_j) = \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta_j) + O(h^4)$$

per un opportuno $\eta_j$ in un intorno di $x_j$.
La norma del massimo discreta tende a 0, quindi il metodo alle differenze finite è consistente di ordine 2 rispetto a $h$.

**Stabilità**
Per garantire la stabilità del sistema numerico si chiede che a piccole perturbazioni sui dati il metodo possa generare piccole perturbazioni sulla soluzione.
Si chiede quindi che a soluzione numerica dipenda con continuità dai dati, ovvero che:

$$\exists h_0 > 0,\ C > 0\ t.c.\ \forall h < h_0$$

e si abbia che

$$\max_{j=1,\dots,N} |u_j| \le C \cdot \max_{j=1,\dots,N} |f(x_j)| + |\alpha| + |\beta|$$

Nel metodo alle differenze finite questa stabilità è soddisfatta con $C = \frac{(b-a)^2}{8}$.

**Errore**
Si definisca *errore nei nodi*:

$$e_j = u(x_j) - u_j \quad con\ j = 1, \dots, N$$

Sottraendo le equazioni (12) dalle corrispondenti (16) si possono analizzare le equazioni dell'errore:

$$-\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = \tau_h(x_j) \qquad j = (1, \dots, N)$$

Essendo dello stesso tipo delle (12) con un procedimento analogo si può concludere che:

$$\max_{j=0,\dots,N+1} |e_j| \le C \max_{j=0,\dots,N} |\tau_h(x_j)| \le \frac{C}{12} h^2 \max_{x \in (a,b)} |f''(x)|$$

# Bibliografia:


1. *Scientific Computing with MATLAB and Octave* - Alfio Quarteroni, Fausto Saleri, Paola Gervasio, Quarta Edizione, ed. Springer

2. Differential Equations - Jeffrey R. Chasnov, The Hong Kong University of Science and Technology