

# MODELLO NUMERICO PER INDUZIONE ELETTROMAGNETICA IN GEOMETRIE ASSIALI

A cura di:

Andrea Colombo

Francesco Zeng

---

Progetto d'Esame per il corso di *Fondamenti di Calcolo Numerico* (054221)

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Politecnico di Milano.

Anno Accademico 2020-2021

# Indice

<b>1. Sommario</b>	<b>3</b>
<b>2. Introduzione al problema</b>	<b>3</b>
<b>3. Modellizzazione matematica</b>	<b>4</b>
<i>3.1 Trasformazione in nuove coordinate per la soluzione alle differenze finite di problemi a simmetria cilindrica</i>	<i>7</i>
<i>3.2 Discretizzazione tramite Metodo alle Differenze Finite</i>	<i>8</i>
<i>3.3 Dimensioni e costanti fisiche</i>	<i>9</i>
<b>4. Codice MATLAB</b>	<b>11</b>
<i>4.1 Costanti e dimensioni iniziali</i>	<i>11</i>
<i>4.2 Funzione potenziale vettore</i>	<i>12</i>
<i>4.3 Funzione generazione matrice</i>	<i>15</i>
<i>4.4 Risultati e Grafici</i>	<i>17</i>
<b>5. Valori previsti</b>	<b>21</b>
<b>6. Confronto e analisi dei risultati</b>	<b>22</b>
<b>Bibliografia e Sitografia</b>	<b>24</b>

# 1. Sommario

Nella seguente trattazione viene affrontato e discusso il discorso di induzione elettromagnetica di un core metallico a simmetria assiale durante un processo di riscaldamento ad induzione. Viene presentato un modello matematico di un sistema semplificato composto solo da un solenoide in aria, risolto numericamente tramite il Metodo delle Differenze Finite. I risultati vengono ottenuti tramite l'implementazione su linguaggio MATLAB del modello numerico.

## 2. Introduzione al problema

Il riscaldamento ad induzione viene ampiamente utilizzato nell'industria oggi giorno in processi come la tempra metallica e il preriscaldamento di metalli per forgiatura o brasatura. È un processo complesso che coinvolge fenomeni elettromagnetici e termici.

L'esempio di processo di riscaldamento ad induzione da cui partono le osservazioni seguenti è quello ottenuto tramite una serie di spire metalliche percorse da corrente all'interno delle quali si trova un cilindro metallico che verrà surriscaldato.

In questa trattazione ci si occupa dello studio del solo processo di induzione elettromagnetica ottenuto da una semplificazione del modello precedentemente citato, ossia un solenoide in aria a simmetria assiale. L'obiettivo è utilizzare un modello matematico e numerico per simulare il nostro problema, osservarne e valutarne i risultati e ottenere delle considerazioni finali.

Il modello si compone di un solenoide di lunghezza infinita in cui scorre una corrente sinusoidale. All'interno del solenoide si trova aria che per semplicità assumerà la costante dielettrica del vuoto.

Le spire del solenoide permettono la formazione di un campo magnetico in tutto lo spazio, la variazione del quale permetterebbe lo scorrimento delle correnti di Foucault all'interno di un qualsiasi metallo inserito dentro il solenoide, esse sono strettamente legate al fenomeno di riscaldamento termico.

Per costituzione del problema al solenoide è stata imposta la tensione ai conduttori al posto che la corrente totale. Per ragioni di efficienza si è deciso di limitare il campo di applicazione della simulazione a tensioni sinusoidali.

Si assume che nel metallo non vi siano né correnti di spostamento né di superficie. Le proprietà caratteristiche dei materiali come la permeabilità magnetica, conducibilità elettrica, conducibilità termica, densità e calore specifico possono dipendere dalla temperatura, e vengono considerate all'interno della relazione al loro valore a temperatura a regime (tempo di riscaldamento tendente ad infinito) di 950° Celsius (valore di temperatura approssimativamente corretto, a regime, fornito da dati sperimentali). Tale approssimazione è consentita in quanto lo studio è relativo solo all'induzione elettromagnetica e non all'equazione del calore.

Si suppone una tensione totale sinusoidale applicata  $V_k e^{i\omega t}$  imposta nei conduttori.

La lunghezza idealmente illimitata del solenoide, permette di studiare il problema in una sola dimensione, ossia secondo la coordinata radiale, di un sistema di coordinate cilindriche.

### 3. Modellizzazione matematica

Per giungere alla modellizzazione matematica, si parte dalle equazioni di Maxwell e le leggi di Ohm, trascurando le correnti di spostamento. Viene indicato con  $\mathbf{E}$  il campo elettrico, con  $\mathbf{H}$  il campo magnetico, con  $\mathbf{B}$  il campo induzione magnetica, con  $\mathbf{j}$  la densità di corrente e con  $\nu$  la riluttanza magnetica (inverso della permeabilità magnetica  $\mu$ ). Le equazioni di Maxwell forniscono un sistema composto dalle seguenti equazioni, valide in tutto lo spazio:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (2.3)$$

$$\nu \mathbf{B} = \mathbf{H} \quad (2.4)$$

Dalle leggi di Ohm si ottengono all'interno dei conduttori:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

mentre nello spazio esterno ai conduttori:

$$\mathbf{j} = 0 \quad (2.6)$$

Sia  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  la terna ortogonale associata al sistema di coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  e sia l'asse  $Oz$  l'asse di simmetria del sistema di riscaldamento per induzione. Avendo considerato il solenoide di lunghezza infinita, la densità di corrente dipenderà solo da  $r$ . Essa ha espressione  $\mathbf{j} = j(r)e^{j\omega t}\vec{e}_\theta$ , dove  $\omega$  (omega) è la frequenza angolare della corrente e  $t$  è il tempo. Si è anche assunto che le componenti dei campi  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  nel sistema  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  dipendano solo da  $r$  e  $t$ . Conseguentemente, dalla (2.3) si deduce che  $\mathbf{H}(r)$  abbia forma:

$$\mathbf{H}(r) = H_r(r)e^{i\omega t}\vec{e}_r$$

Sia  $\mathbf{A}$  il vettore potenziale magnetico, un campo che soddisfa l'espressione

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Si considera  $\mathbf{A}$  a divergenza nulla ("Coulomb Gauge"). Usando le (2.4), (2.7), (2.8) è possibile mostrare che  $\mathbf{A}$  può essere espressa in termini di un potenziale scalare  $\phi$  continuo e dipendente solo da  $r$ :

$$\mathbf{A} = e^{i\omega t}\phi(r)\vec{e}_\theta$$

Utilizzando la notazione  $\mathbf{B}(r) = B_r(r)e^{i\omega t}\vec{e}_r$ , si ottiene dalla (2.8)

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{d(r\phi)}{dr} \quad (2.9)$$

Dalla (2.2) si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0$$

utilizzando la (2.8) si ottiene

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\omega \mathbf{A}) = 0$$

In ogni conduttore vale la legge di Ohm (2.5), conseguentemente si ha

$$\nabla \times ((\sigma^{-1}j + i\omega\phi)\vec{e}_\theta) = 0$$

Segue che  $(\sigma^{-1}rj + i\omega r\phi)$  è costante in ogni componente del conduttore. Si dimostra che questa costante è pari a  $\frac{v_k}{2\pi}$ , dove  $v_k$  è la tensione totale imposta nel conduttore. In fine, si ottiene che in ogni conduttore  $\Omega_k$

$$j = \sigma \left( -i\omega\phi + \frac{v_k}{2\pi r} \right) \quad (2.10)$$

Usando le (2.3), (2.4), (2.9) e (2.10), si ottiene che all'interno dei conduttori vale l'equazione

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \frac{d(r\phi)}{dr} \right) + i\sigma\omega\phi = \sigma \frac{v_k}{2\pi r} \quad (2.11)$$

Similmente, le relazioni (2.3), (2.4), (2.6) e (2.9) combinate assieme forniscono la seguente equazione nello spazio esterno ai conduttori:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \frac{d(r\phi)}{dr} \right) = 0 \quad (2.12)$$

Dato che non sono presenti correnti di superficie, vale sul bordo di qualunque conduttore la seguente condizione all'interfaccia:

$$\frac{v}{r} \frac{d(r\phi)}{dr} n_r = 0 \quad (2.13)$$

essa denota la funzione salto sul bordo del conduttore ed  $\mathbf{n} = n_r \vec{e}_r$  è il vettore normale all'interfaccia.

Per i calcoli del problema elettromagnetico, si consideri un rettangolo nel piano  $rz$  con i lati paralleli e perpendicolari all'asse  $z$ , che circondi il sistema di riscaldamento a induzione. Sia esso abbastanza grande da poter considerare debole il campo magnetico ai bordi (Fig. 1).

L'ipotesi di Biot-Savart implica che il campo  $\mathbf{B}$  si comporti come  $\frac{1}{r^3}$  lontano dai conduttori. Per grandi valori di  $r$ , il comportamento di  $\phi$  può essere considerato simile a  $\frac{1}{r^2}$ . Ai bordi del rettangolo paralleli all'asse di simmetria si è imposta la condizione di Robin:

$$\frac{d(r\phi)}{dr} + \phi = 0. \quad (2.14)$$

Riguardo ai lati del rettangolo, perpendicolari all'asse di simmetria, è complicato imporre una condizione di Robin. Quindi, è stata imposta la condizione:

$$\frac{d(r\phi)}{dz} = 0 \quad (2.15)$$

che nasce dall'assunzione che la componente radiale del campo magnetico sia prossima a zero su quei bordi.

In fine, per via della simmetria cilindrica rispetto all'asse di rivoluzione si impone

$$\phi = 0 \quad (2.16)$$

Riassumendo, il modello elettromagnetico da risolvere consiste delle (2.11) e (2.12), insieme alle condizioni (2.13), le condizioni al contorno (2.14), (2.15) e la condizione di simmetria (2.16).

### ***3.1 Trasformazione in nuove coordinate per la soluzione alle differenze finite di problemi a simmetria cilindrica***

Per problemi a simmetria assiale, le equazioni di Maxwell per la magnetostatica in coordinate cilindriche sono ben note. Nel tentativo di giungere ad una risoluzione col metodo alle differenze finite si incontrano problemi per via delle singolarità nell'intorno di  $r = 0$ . Si richiama qui una semplice soluzione al problema generale monodimensionale, verrà effettuata una trasformazione del vettore potenziale in una forma più adatta ai fini dei calcoli algebrici, successivamente la soluzione verrà applicata al caso qui trattato.

Definendo il vettore potenziale  $\mathbf{A}$  rispetto al campo induzione magnetica  $\mathbf{B}$  come

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

vale l'equazione di Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) = -J_\phi$$

Per aggirare la singolarità si applica la trasformazione  $s = r^2$  e si considera  $\frac{A_\phi}{r}$  come il potenziale, giungendo così ad una forma esente dal  $r$  al denominatore:

$$2\sqrt{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{2}{\mu} \frac{\partial}{\partial s} (\sqrt{s} A_\phi) \right) = -J_\phi$$

$$\frac{4\sqrt{s}}{\mu} \frac{d^2(\sqrt{s} A_\phi)}{ds^2} = -J_\phi.$$

Ora, applicando lo stesso metodo alle equazioni al problema, si giunge ad una nuova formulazione delle (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) qui sotto riportate:

$$-4v\sqrt{s} \left( \frac{d^2(\sqrt{s}\phi)}{ds^2} \right) + i\sigma\omega\phi = \sigma \frac{v_k}{2\pi\sqrt{s}} \quad (2.11)$$

$$4v\sqrt{s} \left( \frac{d^2(\sqrt{s}\phi)}{ds^2} \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$2v \frac{d(\sqrt{s}\phi)}{ds} n_r = 0 \quad (2.13)$$

$$2\sqrt{s} \frac{d(\sqrt{s}\phi)}{ds} + \phi = 0 \quad (2.14)$$

Nella (2.13)  $n_r$  ha stessa direzione di  $s$ . Si considera come nuovo potenziale

$$V = (\sqrt{s}\phi).$$

### ***3.2 Discretizzazione tramite Metodo alle Differenze Finite***

La formula standard per approssimare tramite discretizzazione una derivata seconda è:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2}$$

L'equazione in aria (2.12) viene discretizzata così:

$$4v\sqrt{s} \cdot \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} = 0 \quad (2.18)$$

L'equazione nel metallo (2.11) diventa:

$$-4vS \cdot \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} + V_i \cdot (j\sigma\omega) = \sigma \frac{v_k}{2\pi} \quad (2.19)$$



L'equazione al contorno di Robin (2.14) diventa:

$$V_N \left( \frac{2S}{h} + 1 \right) + V_{N-1} \left( \frac{2S}{h} \right) = 0 \quad (2.20)$$

In questo modo sono state ricavate tutte le equazioni fondamentali ai fini del calcolo del vettore potenziale in una forma discretizzata che le approssima. A partire dal capitolo successivo viene illustrato l'impostazione dell'algoritmo in codice MATLAB.

### ***3.3 Dimensioni e costanti fisiche***

Il sistema che viene preso in considerazione è composto da un solenoide di raggio interno  $Rc1$  e raggio esterno  $Rc2$ , di lunghezza infinita e composto da Acciaio inossidabile [*X5CrNi 18/9 (1.4301)*].

Il solenoide presenta 200 spire per metro, le spire hanno sezione circolare e vengono considerate molto vicine una all'altra, una distanza infinitesima si può immaginare tra le spire.

Il sistema è studiato in regime sinusoidale, la corrente e la tensione sono quindi alternate, nello specifico viene applicata una tensione  $v_k$  su ogni metro del solenoide.

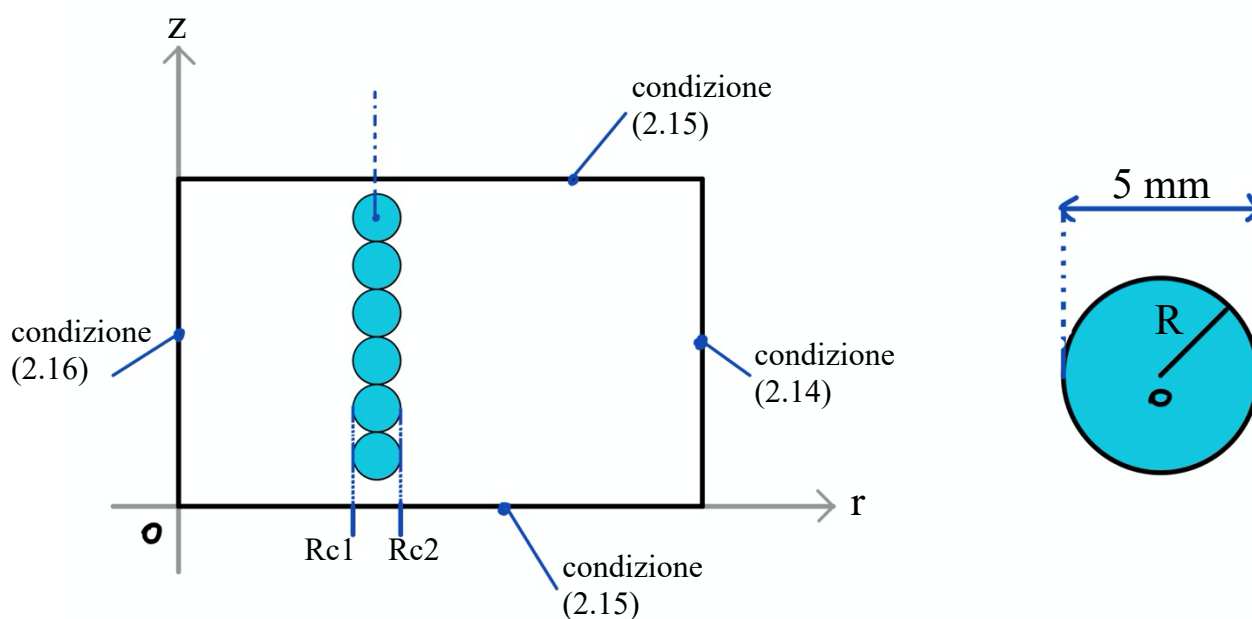
Le caratteristiche fisiche degli elementi vengono definite nel seguente modo: la permeabilità magnetica viene considerata equivalente a quella nel vuoto  $\mu_0$ , mentre la conducibilità elettrica  $\sigma$  è un parametro dipendente dalla temperatura, viene conseguentemente calcolata a regime, cioè alla temperatura massima raggiunta in sperimentazioni analoghe all'interno del metallo in oggetto, circa 950° celsius.

Le condizioni al contorno di Robin (2.14) vengono applicate in un punto lontano dal centro dal solenoide di raggio  $10 \cdot Rc2$ .

Tutte i dati utilizzati vengono presentati nella seguente tabella

Raggio Interno Solenoide	$R_{c1} = 25\text{mm}$
Raggio Esterno Solenoide	$R_{c2} = 30\text{mm}$
Numero di spire per metro	$n = 200 \text{ spire/m}$
Tensione applicata ad ogni metro	$v_k = 77e^{(i\omega t)} \text{ V}$
Permeabilità Magnetica	$\mu_0 = 1.256637 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Conducibilità Elettrica (950°)	$\sigma = 9.8744 \times 10^5 \text{ S/m}$

**Tab. 1**



**Fig. 1** Sezione trasversale del sistema (a sinistra)

Sezione trasversale del filo del coil (a destra)

## 4. Codice MATLAB

### 4.1 Costanti e dimensioni iniziali

```
f = 10000;           % frequenza[Hz]
w = 2*pi*f;         % pulsazione
Tf = 950;           % temp. finale [Gradi Celsius]
Tamb = 20;          % temp. ambiente [Gradi Celsius]
vk = 77;            % tensione applicata[V]
mu = 1.256637e-6;    % perm. magnetica nel vuoto[H/m]
stb = 5.670374e-8;   % cost.di Stefan-Boltzmann [W*m^-2*K^-4]
% Costanti per il calcolo della sigma
a = 4.9659e-7;
b = 8.4121e-10;
c = -3.7246e-13;
d = 6.1960e-17;
sigma = 1/(a+b*Tf+c*Tf^2+d*Tf^3);    % conducibilità elettrica[S/m]
% Distanza tra l'origine e il..
Rc1 = 25e-3;          % ..raggio interno del coil
Rc2 = 30e-3;          % ..raggio esterno del coil
```

Per prima cosa vengono definite le costanti del problema. La maggior parte derivano da sperimentazioni precedenti e evidenze scientifiche tutte citate all'interno dei paper [1] e [2].

La conducibilità elettrica  $\sigma$  deriva da una formula presente all'interno del paper [2] ed è dipendente dalla temperatura, qui calcolata a 950° C.

Frequenza, temperatura e tensione applicata sono state scelte per valori verosimili ad un sistema reale e di sufficiente comodità di utilizzo.

## 4.2 Funzione potenziale vettore

```
% Phi: vettore potenziale  
[phi,hs,B] = vett_pot(sigma, w, vk, mu, Rc1, Rc2);
```

Per il calcolo del potenziale vettore  $\phi$  viene implementata la funzione “*vett\_pot*”. Nella chiamata alla funzione vengono inviati i valori delle costanti fisiche del problema e le dimensioni.

Vengono invece restituiti i valori: *phi*, cioè il vettore potenziale vettore  $\phi$ ; *hs*, vettore che contiene il valore della spaziatura tra due nodi adiacenti in tutto l’intervallo preso in considerazione; *B*, campo magnetico indotto.

### Discretizzazione dell’intervallo

```
N = 300; % punti utilizzati per discretizzare  
% generaz. di p.ti equispaziati nei 3 intervalli  
hs1 = (linspace(0,Rc1^2,floor(N/3)))';  
hs2 = (linspace(Rc1^2,Rc2^2,floor(N/3)+1))';  
hs3 = (linspace(Rc2^2,(Rc2*10)^2,floor(N/3)+1))';  
a = numel(hs1);  
b = a+numel(hs2)-1;  
c = b+numel(hs3)-1;  
hs = [hs1(1:end-1);hs2(1:end-1);hs3(1:end)];  
N = numel(hs);  
h = diff(hs); % spaziatura tra 2 p.ti adiacenti  
hmu = 4/mu;
```

All'interno della funzione *vett\_pot* l'intervallo considerato  $(0, 10Rc2)$  sull'asse radiale, viene suddiviso in 3 parti distinte. La prima zona  $(0, Rc1)$  consiste nello spazio interno al solenoide che si trova in aria. La seconda zona  $(Rc1, Rc2)$  è l'interno del cavo del coil ed è composto da metallo conduttore. Il terzo e ultimo intervallo  $(Rc2, 10Rc2)$  è lo spazio esterno al solenoide delimitato da un punto sufficientemente lontano agli scopi perseguiti  $(10 \times Rc2)$ , in aria.

Una volta scelto un numero adeguato di nodi ( $N=300$ ), i 3 intervalli distinti vengono divisi ciascuno in  $N/3$  nodi attraverso la funzione *linspace*, che definisce i vettori *hs1*, *hs2*, *hs3*.

I punti ai confini di *hs1*, *hs2*, *hs3* vengono denominati, per semplicità di utilizzo, nell'ordine *0*, *a*, *b*, *c*, verranno utilizzati per condizioni al contorno e d'interfaccia.

Viene poi definita per comodità la costante *hmu*, che come si vedrà nei passaggi successivi è molto frequente.

## Generazione Matrice Afd

```
Afd = gen_Afd(a,b,c,N,sigma,w,hs,h,hmu,mu);
```

Per la risoluzione del problema tramite differenze finite è necessario costruire la matrice caratteristica, per questa ragione viene implementata e chiamata la funzione *gen\_Afd* che verrà descritta dettagliatamente nel paragrafo successivo.

Alla funzione vengono passati i valori relativi ai nodi di interfaccia, di contorno, costanti fisiche necessarie, dimensioni e numero totale dei nodi.

Restituisce la matrice caratteristica *Afd*.

## Risoluzione del sistema

```
f = zeros(N,1);  
f(a+1:b-1) = sigma*vk/(2*pi);    %[a+1,b-1] è il dominio  
                                   interno al cavo  
  
% Soluzione V  
V = Afd\f;  
  
% Soluzione phi  
phi = V./sqrt(hs);  
phi(1) = V(1);
```

Si procede alla creazione del vettore  $f$  che contiene i termini noti del sistema differenziale.

Successivamente, tramite l'operatore *mldivide* “\”, il sistema algebrico composto dalla matrice ottenuta  $Afd$  e dai termini noti in  $f$  viene risolto. L'unica soluzione ottenuta è restituita nel vettore  $V$ .

Il vettore  $V$  contiene i valori quadrati del potenziale vettore  $\phi$ , al quale è possibile ricondursi facilmente tramite la funzione *sqrt*.

## Calcolo campo B

```
B(1)=2*(V(2)-V(1))/h(1);  
for j=2:a-1  
    B(j)=(V(j+1)-V(j-1))/(h(j));  
end
```

Utilizzando nuovamente il metodo delle differenze finite si ricava agevolmente il valore del campo  $B$  all'interno del solenoide tramite la (2.9). Per questo calcolo si utilizza il vettore ausiliario  $V$ , a questo punto la funzione *vett\_pot* è terminata.

### 4.3 Funzione generazione matrice

#### Creazione matrice e coefficienti

```
function [Afd] = gen_Afd(a,b,c,N,sigma,w,hs,h,hmu,mu)
% Funzione che genera la matrice AFd
% Inizializzazione della matrice ed inserimento dei
coefficienti
Afd = zeros(N,N);
% all'interno del coil
for j=(2):(a-1)
Afd(j,j-1) = hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
Afd(j,j) = -2*hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
Afd(j,j+1) = hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
end

% nel filo del coil
for j=(a+1):(b-1)
Afd(j,j-1) = -hmu.*hs(j)./(h(j).^2);
Afd(j,j) = 2*hmu.*hs(j)./(h(j).^2)+1i*sigma*w;
Afd(j,j+1) = -hmu.*hs(j)./(h(j).^2);
end

% fuori dal coil
for j=(b+1):(c-1)
Afd(j,j-1) = hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
Afd(j,j) = -2*hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
Afd(j,j+1) = hmu.*sqrt(hs(j))./(h(j).^2);
end
```

La funzione *gen\_Afd* si occupa di creare la matrice caratteristica necessaria a risolvere le equazioni differenziali approssimandole ad un sistema lineare tramite le differenze finite.

Innanzitutto, viene utilizzata la funzione *zeros* per creare una matrice quadrata di zeri di dimensione N, successivamente tramite tre cicli for vengono inseriti i termini della matrice derivanti dalla discretizzazione tramite metodo alle differenze finite delle equazioni (2.11) e (2.13).

Sono necessari 3 differenti cicli for, uno per ognuno degli intervalli presi in considerazione, rispettivamente  $(0, a)$ ,  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ .

## Condizioni d'interfaccia

```
% Condiz. interf. in a: 25mm
Afd(a,a-1) = -2/(mu.*h(a));
Afd(a,a)   = 4/(mu.*h(a));
Afd(a,a+1) = -2/(mu.*h(a));

% Condiz. interf. in b: 30mm
Afd(b,b-1) = -2/(mu.*h(b));
Afd(b,b)   = 4/(mu.*h(b));
Afd(b,b+1) = -2/(mu.*h(b));
```

È necessario imporre delle condizioni di interfaccia nei punti a e b, nei quali si trova l'interfaccia tra il metallo e l'aria. Qui si ha che la derivata normale a destra e sinistra dell'interfaccia è nulla. Per entrambi i punti si procede nel medesimo modo: si calcolano le derivate in avanti ed indietro nel punto di interfaccia, imponendo che esse siano uguali.



## Condizioni al Contorno

```
% Condiz. al contorno di Dirichlet in 0
```

```
Afd(1,1) = 1;
```

```
% Condiz. al contorno di Robin in c
```

```
Afd(c,c-1) = 2.*hs(c)./h(c-1);
```

```
Afd(c,c) = 2.*hs(c)./h(c-1)+1;
```

Infine, ci si occupa delle condizioni al contorno di Dirichlet nel punto 0 e di Robin nel punto  $c$ , si vanno cioè a modificare i coefficienti della prima e dell'ultima riga della matrice, imponendo i valori ottenuti nella (2.16) e (2.20). La funzione *gen\_Afd* termina e restituisce la matrice caratteristica *Afd* necessaria al calcolo del sistema

## 4.4 Risultati e Grafici

### Valori dei campi B e H

```
% Valori dei campi H e B all'interno del coil
```

```
campoH = max(abs(B)/mu)
```

```
campoB = max(abs(B))
```

Sono stati presi i valori massimi dei moduli dei rispettivi campi.

## Generazione dei grafici dei campi $B$ , $H$ e $\Phi$

```
% Grafici potenziale vettore e Campi B,H
figure(1)
plot(sqrt(hs), abs(phi), 'r')
title('MODULO DEL VETTORE POTENZIALE')
xlabel('RAGGIO r');
ylabel('MODULO DI PHI');
legend('PHI')

figure(2)
plot(sqrt(hs(1:99)),abs(B),'b')
title('MODULO DEL CAMPO INDUZIONE MAGNETICA')
ylabel('MODULO DI B')
xlabel('RAGGIO r')
legend('B')

figure (3)
plot(sqrt(hs(1:99)),abs(B)/mu,'k')
title('MODULO DEL CAMPO MAGNETICO')
ylabel('MODULO DI H')
xlabel('RAGGIO r')
legend('H')
```

Tramite le funzioni plot vengono generati i grafici del modulo del campo  $B$ ,  $H$  e del modulo del vettore potenziale, riportati rispettivamente in Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4.

Come prevedibile il grafico del potenziale vettore sale linearmente dall'origine fino a al cavo del solenoide, all'interno nel quale deflette e inizia a decrescere all'esterno del coil in modo simile a  $\frac{1}{x^2}$ .

Il campo B all'interno del coil è costante, coerentemente alle aspettative fisiche.

$$B = 0.0114 \text{ T/m}$$

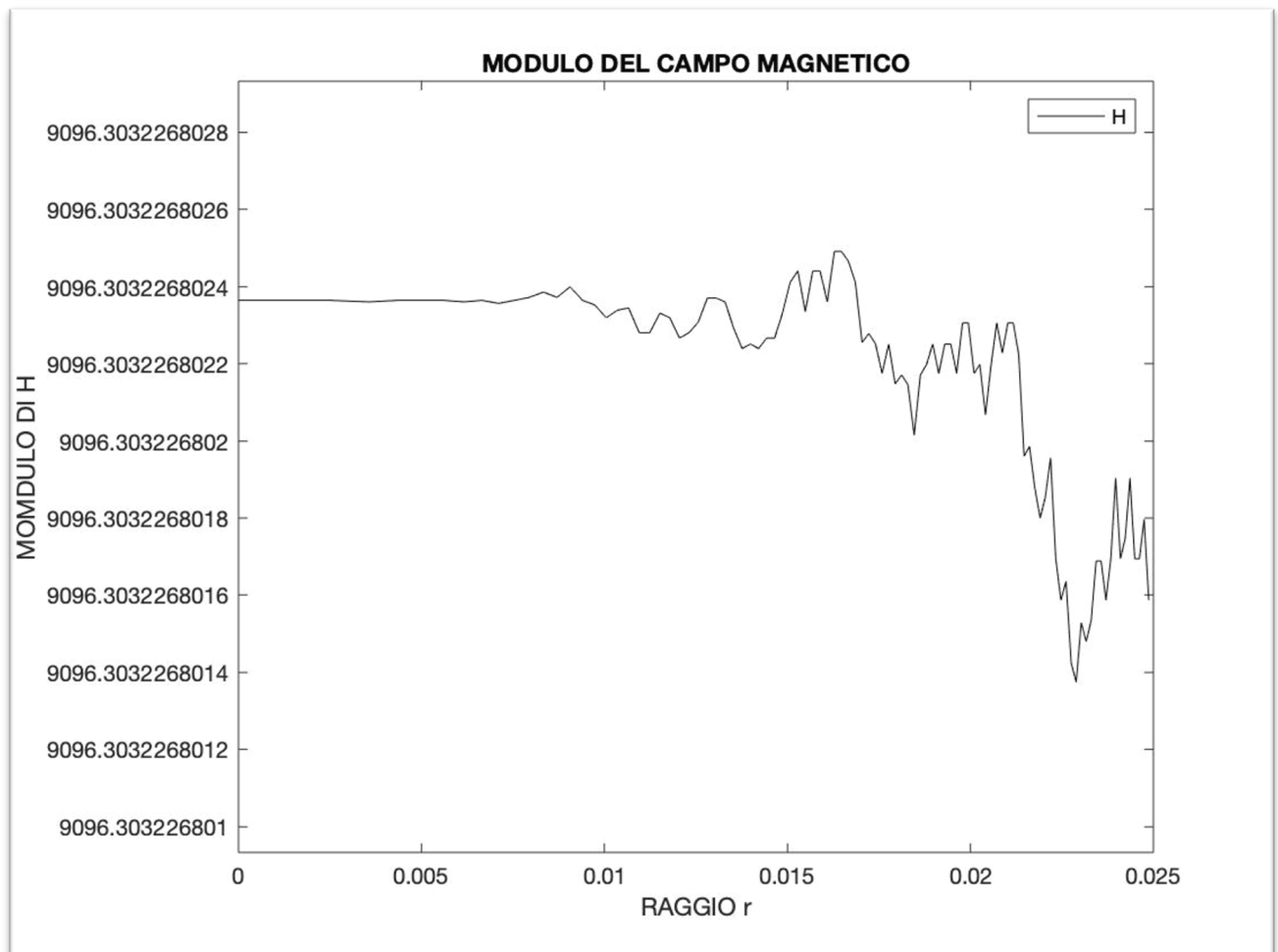


Fig.2

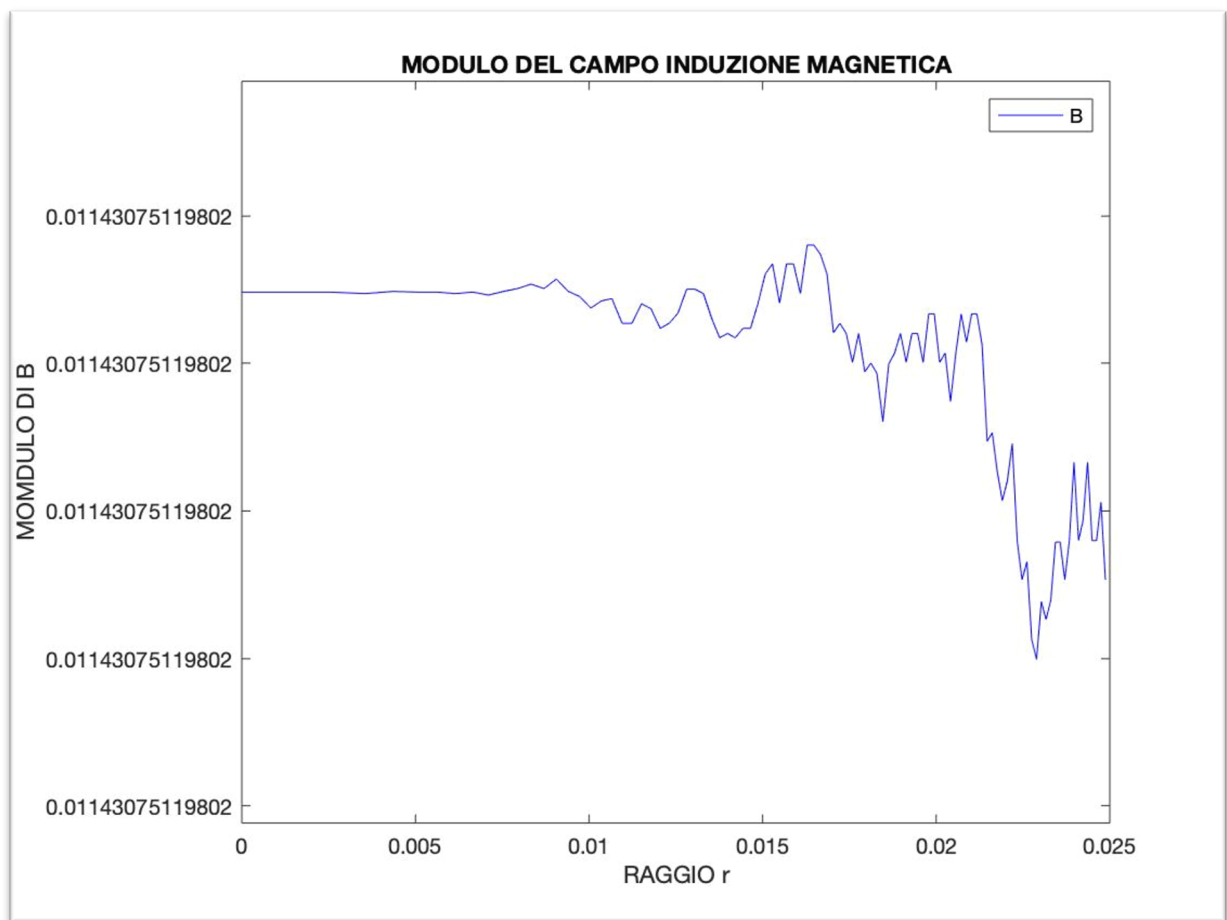


Fig. 3

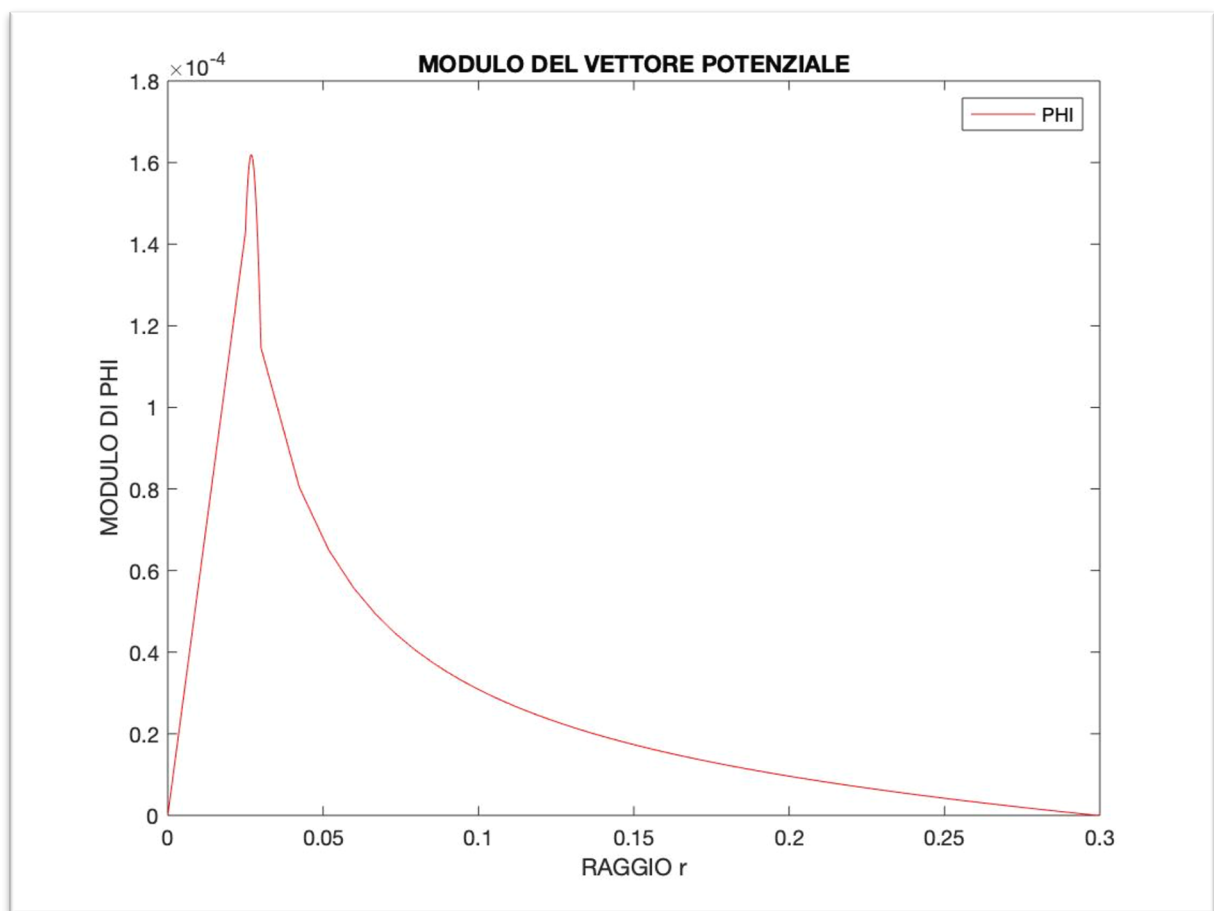


Fig. 4

## 5. Valori previsti

Sono stati effettuati, a priori, calcoli analitici al fine di ottenere dei valori con cui confrontare i risultati forniti dalla simulazione numerica. Il ragionamento si basa sulle conoscenze dei due studenti e sulle basi teoriche accuratamente spiegate nei libri di testo riportati in bibliografia.

Seguono i calcoli per il campo magnetico  $H$  ed induzione magnetica  $B$ . Si è assunta l'assenza di correnti di spostamento. Per i dati si faccia riferimento alla *Tab. 1* a pagina 9.

Considerato un solenoide con un numero di spire pari a  $n_{spi}$  percorso da una corrente  $I$ , la cui lunghezza è maggiore rispetto al diametro delle spire, il campo magnetico generato dentro e fuori di esso è noto. Infatti, mentre all'esterno il campo magnetico è nullo, all'interno il campo magnetico è dato dall'espressione:

$$B = \mu \cdot n_{spi} \cdot I$$

in cui  $\mu$  è la *permeabilità magnetica* del mezzo.

Dai dati forniti dal sistema, attraverso la legge di Ohm, si ottiene il valore della *corrente* che scorre nelle spire:

$$I = \frac{Vk}{Res}$$

$Res$  indica la *resistenza del coil per unità di lunghezza* e ha espressione:

$$Res = \frac{L}{\sigma\pi \cdot r_{spi}^2}$$

in cui  $\sigma$  è la *conducibilità* e  $L$  la *lunghezza degli avvolgimenti del coil per unità di lunghezza* (del solenoide). Quest'ultima è stata calcolata facendo il prodotto tra la circonferenza della spira (il raggio è rispetto al centro del filo stesso) e il numero di spire:

$$L = 2\pi(Rc1 + r_{spi}) \cdot n_{spi} = 34.56m$$

In conclusione, sono stati ottenuti i seguenti valori per ciascuna grandezza:

$$Res = \frac{L}{\sigma\pi \cdot r_{spi}^2} = 1.7824 \frac{\Omega}{m}$$

$$I = \frac{Vk}{Res} = 43.2 \text{ A}$$

$$B = \mu \cdot n_{spi} \cdot I = 0.0109 \text{ T/m}$$

$$H = \frac{B}{\mu} = 8.64 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

N.B.:

Lo *spessore pelle*  $\delta$  è stato trascurato in quanto maggiore rispetto al diametro del coil:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}} = 5.1mm$$

## 6. Confronto e analisi dei risultati

Dai calcoli analitici effettuati si ottiene un valore atteso del campo B pari a

$$B = 0,0109 \text{ T/m}$$

e campo magnetico H pari a

$$H = 8.6402 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

I risultati dalla simulazione numerica sono:

$$H = 9.0963 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

$$B = 0.0114 \text{ T/m}$$

I risultati sono coerenti con le aspettative dei i calcoli analitici a meno di un errore pari al 4.59%. Una riduzione dell'errore potrebbe essere effettuata, se necessaria, tramite diversi metodi. Ad esempio, una facile implementazione che tenda a migliorare i risultati potrebbe essere aumentare il numero di nodi in cui viene discretizzato l'intervallo preso in valutazione, facendolo tendere sempre più ad infinito, questo però a scapito di una molto più lunga compilazione da parte dell'elaboratore.

Il grado di approssimazione accettabile dipende dalle circostanze e dagli obiettivi da perseguire. Per ottenere un buon risultato si deve tenere conto di tutte le specifiche di progetto e trovare un adeguato “trade-off” tra precisione e complessità.

Il campo induzione magnetica  $B$ , coerentemente con quanto ci si poteva aspettare da uno studio teorico del sistema, risulta costante all'interno del coil, all'esterno del quale, essendo infinito, tende a raggiungere un valore infinitesimo.

Lo studio più interessante è certamente quello del vettore potenziale  $\phi$ , il quale all'interno del coil cresce linearmente, per poi deflettere all'esterno con un andamento che a considerevole distanza dal centro è simile a  $\frac{1}{x^2}$ , come osservabile nel grafico della Fig. 4.

I risultati sono assolutamente coerente con gli studi teorici che confermano l'andamento sia dei campi  $B$  e  $H$ , che del vettore potenziale  $\phi$ . I valori sono realistici, anche se non esattamente verificabili sperimentalmente a causa dell'idealità del sistema considerato, il coil infatti si suppone essere infinitamente lungo.

Uno studio altrettanto valido per la verifica dei risultati potrebbe essere ottenuto mediante il calcolo della potenza dissipata dal sistema, attraverso il calcolo della densità di corrente. Metodo, quest'ultimo, più complesso dal punto di vista matematico, ma altrettanto perseguibile.

## Bibliografia e Sitografia

- [1] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, D. Mari, J. Rappaz, e M. Swierkosz, “*Numerical Modeling in Induction Heating for Axisymmetric Geometries*”, IEEE Trans. Magn., vol. 33, pp. 739-745, 1994.
- [2] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, J. Rappaz, M. Swierkosz, e R. Touzani, “*Numerical modelling in induction heating of long workpieces*”, IEEE Trans. Magn., vol. 30, pp. 5026-5037, 1994.
- [3] J.B.M. Melissen, J. Simkin, “*A new coordinate transform for the finite element solution of axisymmetric problems in magnetostatics*”, IEEE Trans. Magn., vol. 26, no. 2, 1990.
- [4] Quarteroni A., Saleri F., Gervasio P., *Calcolo scientifico Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave*, Springer, Milano, 2017.
- [5] Chiappe V., *La trasmissione del calore: analisi e soluzione numerica del problema differenziale associato*, 2016.
- [6] Barbieri S., Cavinato M., Giliberti M., *Riscoprire il potenziale vettore per ambientarlo nella scuola superiore*, Università degli studi di Palermo, Università degli studi di Milano.
- [7] Carbone V., Primavera L., Stabile F., *Appunti di Metodi Numerici*, Rende (CS), URL: <http://www.fis.unical.it/astroplasmi/carbone.pdf>
- [8] P.Dreyfuss, J.Rappaz, *Numerical Modelling of induction heating for two dimensional geometries*, URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/ad23/8cc258b963d3da02dfb0b2b5d9f17a26a93f.pdf>
- [9] Shan Zhao, G.W. Wei, *Matched interface and boundary (MIB) for the implementation of boundary conditions in high-order central finite differences*, 2017, URL: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2871773/>
- [10] Edmund E., Callaghan e Stephen H. Malsen, *The magnetic field of a solenoid*, NASA Technical note D-465, Cleveland, Ohio, 1960, URL: <https://paginas.fe.up.pt/~ee08173/wp-content/uploads/2014/03/finite-solenoid.pdf>