Tarea

Producto de matrices triangulares

Curso Álgebra Lineal

Entradas de la matriz

Pregunta 1

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son los que se encuentran marcados en negrita

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \mathbf{a_{55}} \end{pmatrix}$$

Los elementos estrictamente superiores de una matriz son los que se encuentran por encima de la diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & \mathbf{a_{15}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} & \mathbf{a_{25}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mathbf{a_{34}} & \mathbf{a_{35}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \mathbf{a_{45}} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

¿Cómo son los elementos estrictamente inferiores?

Pregunta 2

Dados los siguientes elementos de la matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$, di cuáles se encuentran en la diagonal principal, cuáles por encima y cuales por debajo:

$$a_{11},\ a_{23},\ a_{15},\ a_{21},\ a_{32},\ a_{44},\ a_{53}$$

Pregunta 3

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ relaciona correctamente

$$\begin{array}{lcc} A_{i,j}\ i<j & & \text{está en la diagonal principal} \\ A_{i,j}\ i=j & \text{con} & \text{está por encima de la diagonal principal} \\ A_{i,j}\ i>j & & \text{está por debajo de la diagonal principal} \end{array}$$

Con lo cual definiremos las entradas de la matriz en la diagonal principal, por encima de la diagonal principal y por debajo de la diagonal principal, respectivamente como:

$$A_{ij} \text{ está en la diagonal principal } \Leftrightarrow i\ ?\ j$$

$$A_{ij} \text{ está por encima de la diagonal principal } \Leftrightarrow i\ ?\ j$$

$$A_{ij} \text{ está por debajo de la diagonal principal } \Leftrightarrow i\ ?\ j$$

Definiendo los conjuntos de matrices triangulares superiores e inferiores

Pregunta 4

Definimos el conjunto de las matrices diagonales como

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, \text{ si } i \neq j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\}$$

Define formalmente los conjuntos de matrices triangulares inferiores ($L_n(\mathbb{K})$) y superiores ($U_n(\mathbb{K})$)

$$L_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}, \text{ si } i?j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\}$$ si $i > j$

$$U_n(\mathbb{K}) :=$$ $A \in M_n(\mathbb{K}) : \forall i,j \in \{1 \ldots n\}$

si $i<j$, $A_{ij} = 0$

Pregunta 5

Busquemos la relación entre las matrices triangulares superiores e inferiores.

Recordemos que A^t es la matriz transpuesta de A. Con lo cual, podemos afirmar que

$$A \in U_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^t \in\ ?$$

Producto de matrices triangulares superiores

Pregunta 6

Volvamos a un ejemplo específico

Dadas las matrices $A, B \in U_3(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

Calula el producto AB (llena todas las entradas)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & & \\ & & \\ & & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora, observa que hay algunas que valen 0:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 & & \\ & & \\ & & 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Quita los sumandos nulos y obtendrás la respuesta final:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Pregunta 7

Basándote en lo que has obtenido anteriormente, completa las siguientes afirmaciones

- Las entradas por debajo de la diagonal principal son ...
- La matriz $AB \in \ldots$
- El elemento $(i, i)-$ésimo de la diagonal principal es ...

Calculando las entradas del producto por debajo de la diagonal principal, en la diagonal principal y por encima de la diagonal principal

Pregunta 8

Ahora trabajaremos con el caso particular $n = 8$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} & b_{67} & b_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{77} & b_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{88} \end{pmatrix}$$

Para calcular la entrada AB_{42} del producto AB, por definición del producto de matrices, la entrada de la matriz AB en la cuarta fila y la segunda columna, es el producto de la cuarta fila de A por la segunda columna de B, que es

$$AB_{42} = \sum_{i=1}^{8} a_{4i}b_{i2} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} + a_{44}b_{42} + a_{45}b_{52} + a_{46}b_{62} + a_{47}b_{72} + a_{48}b_{82}$$

que pasa a ser lo siguiente cuando sustituimos las entradas nulas

$$AB_{42} = 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{22} + 0 + a_{44} \cdot 0 + a_{45} \cdot 0 + a_{46} \cdot 0 + a_{47} \cdot 0 + a_{48} \cdot 0 = 0$$

Siguiendo el ejemplo, calcula las siguientes entradas primero escribiendo todos los sumandos, a continuación indicando los factores nulos y finalmente, simplificando las sumas

Entradas por debajo de la diagonal principal:

- AB_{75}
- AB_{61}
- AB_{32}
- AB_{74}
- AB_{87}

Entradas de la diagonal principal:

- AB_{77}
- AB_{11}
- AB_{33}
- AB_{44}
- AB_{88}

Entradas por encima de la diagonal principal:

- AB_{78}
- AB_{15}
- AB_{36}
- AB_{24}
- AB_{58}

Deduciendo la fórmula general para las entradas del producto de matrices triangulares superiores

Pregunta 9

Ahora vamos a generalizar el ejemplo anterior a orden n.

Para ello empecemos formalizando el producto de matrices

Si $A, B \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{12,3} = a_{12,1}b_{13} + a_{12,2}b_{23} + \cdots + a_{12,15}b_{15,3} = \sum_{k=1}^{15} a_{12,k}b_{k3}$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_8(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{85} =$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_9(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{36} =$$

Siguiendo lo anterior, la fórmula general para

$$AB_{ij} = \quad + \quad + \cdots + \quad + \quad = \sum_{k=1}^{n}$$

Partición de una suma

Pregunta 10

Ahora, vamos a hablar de particiones de una suma. Básicamente, se trata de dividir una suma en partes, cosa que a veces resulta más cómodo.

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{5} s_k = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = (s_1 + s_2 + s_3) + (s_4 + s_5) = \sum_{k=1}^{3} s_k + \sum_{k=4}^{5} s_k$$

o también,

$$\sum_{k=1}^{15} s_k = \sum_{k=1}^{6} s_k + \sum_{k=7}^{10} s_k + \sum_{k=11}^{15} s_k$$

Ahora es tu turno, completa las siguientes particiones de sumas:

$$\sum_{k=1}^{20} = \sum_{k=1}^{7} s_k + \sum_{k=} s_k$$

$$\sum_{k=1}^{29} s_k = \sum_{k=} s_k + \sum_{k=9}^{20} s_k + \sum_{k=} s_k$$

Supongamos ahora que sabemos el valor de los s_k, Por ejemplo, $s_k = 7 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 6\}$ y $s_k = 5 \quad \forall k \in \{7, \ldots, 20\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{20} = \sum_{k=1}^{6} s_k + \sum_{k=7}^{20} s_k = 6 \cdot 7 + 14 \cdot 5 = 112$$

Siguiendo el ejemplo, completa las siguientes particiones y calcula su resultado:

$$\sum_{k=1}^{17} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 2 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 10\},\ s_k = 3 \quad \forall k \in \{11, \ldots, 17\}$$

$$\sum_{k=1}^{25} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 7 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 12\},\ s_k = 9 \quad \forall k \in \{13, \ldots, 19\},\ s_k = 5 \quad \forall k \in \{20, \ldots, 25\}$$

Simplifica las sumas:

$$\sum_{k=1}^{31} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 9\} \cup \{25, \ldots, 31\}$$

$$\sum_{k=1}^{27} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 7\} \cup \{12, \cdots, 19\} \cup \{24, \dots, 27\}$$

Entradas del producto por debajo de la diagonal principal con partición de sumas

Pregunta 11

En los ejemplos siguientes se considera el producto de dos matrices triangulares superiores $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$

Queremos demostrar que $AB_{13,5} = 0$. Por definición, nosotros sabemos que

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{15} a_{13,k} b_{k5}$$

Podemos dividir la suma en tres partes:

- k desde 1 hasta 5
- k desde 6 hasta 12
- k desde 13 hasta 15

De este modo,

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{5} a_{13,k} b_{k5} + \sum_{6}^{12} a_{13,k} b_{k5} + \sum_{13}^{15} a_{13,k} b_{k5}$$

El primer sumando cumple que $a_{13,k} = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, 5\}$ ya que recordemos, $A \in U_{15}$, con lo cual $a_{ij} = 0$ si, y solo si, $i > j$.

De forma similar, el segundo sumando cumple tanto que $a_{13,k} = 0 \ \forall k \in \{6, \dots, 12\}$ como que $b_{k5} = 0$ $\forall k \in \{6, \dots, 12\}$ porque en ambos casos $i > j$.

Finalmente, siguiendo el mismo argumento que en los dos casos anteriores, el tercer sumando cumple que $b_{k5} = 0 \ \forall k \in \{13, 15\}$ ya que de nuevo se cumple que $i > j$.

Por tanto, lo que tenemos es que

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{5} 0 \cdot b_{k5} + \sum_{6}^{12} 0 \cdot 0 + \sum_{13}^{15} a_{13,k} \cdot 0 = 0$$

Como de costumbre, ahora es tu turno: demuestra que las siguientes entradas del producto AB son nulas

- AB_{93}
- AB_{31}
- $AB_{15,3}$

Entradas diagonales del producto con partición de sumas

Pregunta 12

Seguimos en el caso particular $n = 15$, donde $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$ son matrices triangulares superiores de orden 15

Siguiendo un razonamiento similar al del caso de las entradas por debajo de la diagonal principal, calculemos la entrada AB_{77} por definición y utilizando partición de la suma. De nuevo, volvemos a requerir 3 sumandos:

$$AB_{77} = \sum_{k=1}^{6} a_{7k}b_{k7} + a_{77}b_{77} + \sum_{k=8}^{15} a_{7k}b_{k7}$$

El primer sumando cumple que $a_{7,k} = 0 \ \forall k \in \{1, \dots, 6\}$ ya que recordemos, $A \in U_{15}$, con lo cual $a_{ij} = 0$ si, y solo si, $i > j$.

De forma similar, siguiendo el mismo argumento, el tercer sumando cumple tanto que $b_{k7} = 0 \ \forall k \in \{8, \dots, 15\}$ porque $i > j$.

De este modo,

$$AB_{77} = 0 + a_{77}b_{77} + 0 = a_{77}b_{77}$$

Calcula las siguientes entradas del producto siguiendo el razonamiento anterior:

- AB_{55}
- $AB_{10,10}$
- $AB_{15,15}$

Entradas del producto por encima de la diagonal principal con partición de sumas

Pregunta 13

Seguimos en el caso particular $n = 15$, donde $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$ son matrices triangulares superiores de orden 15

Para calcular la entrada $AB_{6,14}$, seguimos el razonamiento anterior: partimos la suma en 3 del siguiente modo:

$$AB_{6,14} = \sum_{k=1}^{5} a_{6k}b_{k,14} + \sum_{k=6}^{14} a_{6k}b_{k,14} + a_{6,15}b_{15,14} = \sum_{k=6}^{14} a_{6k}b_{k,14}$$

Calcula las siguientes entradas del producto AB

- $AB_{1,5}$
- $AB_{10,13}$
- $AB_{6,9}$

Demostración del caso general

Pregunta 14

El Teorema enuncia lo siguiente: *El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior*

Por lo tanto, lo que queremos demostrar es que dadas $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, el producto $AB \in U_n(\mathbb{K})$.

Sean $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que $i > j$. Demostremos pues que las entradas $AB_{ij} = 0$.

Por definición del producto de matrices, la entrada $(i, j)-$ésima de la matriz producto AB se da del siguiente modo:

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Como las matrices A, B son triangulares superiores, tenemos que

$$A_{ik} = 0 \qquad \forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tales que } i > k$$

$$B_{kj} = 0 \qquad \forall j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tales que } k > j$$

De este modo, partimos la suma en 3 sumandos

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Donde el primer sumando vale 0 porque para todo $k \in \{1, \ldots, j\}$, $k \leq j < i$; el segundo sumando es 0 porque $\forall k \in \{j+1, \ldots, i-1\}$, $j < k < i$; y, finalmente, el último sumando es nulo porque para todos los valores de k, $k \in \{i, \ldots, n\}$, $j < i \leq k$.

Así queda demostrado que $AB \in U_n$.

- En el caso de que $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, calcula la fórmula para las entradas diagonales AB_{ii}
- En el caso de que $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, calcula la fórmula para las entradas no triviales AB_{ij} con $i \leq j$
- Enuncia y demuestra el resultado para matrices triangulares inferiores. Calcula para este caso las fórmulas de las entradas diagonales y las entradas no triviales.
- Enuncia y demuestra el resultado para matrices diagonales.