

La logica modale è un'estensione della logica classica. Studieremo la validità di argomenti che comprendono le modalità. Le modalità sono modi in cui si può affermare che una proposizione è vera in certe circostanze. Ad esempio, “è possibile che  $\alpha$ ” significa che  $\alpha$  non è detto sia vera, ma nulla vieta che non lo sia. Quindi estendiamo il numero di proposizioni su cui possiamo dare un giudizio circa la loro validità. Di conseguenza partiremo da un sistema formale per il calcolo proposizionale, che chiameremo  $CP$  e definiamo una sua estensione<sup>1</sup>  $CM$  <sup>2</sup>

## 1 Definizione del linguaggio di $CM$

Usiamo come base quella di  $CP$ . Una sua definizione la si può trovare in [Tortora]. Aggiungiamo un nuovo operatore monadico<sup>3</sup> che indicheremo con il simbolo  $\Box$ .

## 2 Definizione dell'apparato deduttivo per $CM$

Aggiungiamo anche una nuova regola di deduzione, chiamata necessitazione:

$$x \vdash \Box x$$

L'operatore che vogliamo aggiungere, ha una natura non verofunzionale. Vale a dirsi, che la verità o falsità della proposizione  $\Box\alpha$  non dipende solo dal valore di verità di  $\alpha$ .

Per quanto riguarda gli assiomi, la situazione si complica. Infatti sono stati sviluppati moltissimi sistemi di logica modale, ognuno che rispecchiasse una certa visione delle proprietà della modalità che si considera. Tutti ereditano da  $CP$  i suoi assiomi, e ne aggiungono di nuovi. Noi ci occuperemo, in particolare di tre tipi di sistemi formali:

- Sistema  $T$
- Sistema  $S4$
- Sistema  $S5$

Tali sistemi sono in relazione tra di loro, infatti, il Sistema  $T$  è contenuto in  $S4$  che è contenuto in  $S5$ . Tutti i sistemi hanno lo stesso linguaggio e le stesse regole di deduzione. Ciò che cambia sono gli assiomi.

---

<sup>1</sup>Definire cos'è un'estensione, à la Tortora

<sup>2</sup>Calcolo Modale? Un po' bruttino

<sup>3</sup>decidere se è più bello monadico o unario

Partiamo con l'analizzare gli assiomi del sistema più debole, il sistema  $T$ .

### 3 Il Sistema $T$

Il Sistema  $T$  aggiunge i seguenti assiomi:

- **Assioma 1**  $\Box\alpha \rightarrow \alpha$  (Assioma di necessità)
- **Assioma 2**  $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

### 4 Il Sistema $S4$

Il Sistema  $S4$  aggiunge al Sistema  $T$  il seguente assioma, detto assioma  $S4$ :

**Assioma 3**  $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

### 5 Il Sistema $S5$

Il Sistema  $S5$  aggiunge al Sistema  $T$  il seguente assioma, detto assioma  $S5$ :

**Assioma 4**  $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

**Lemma 1**  $\vdash \Diamond\Box x \rightarrow \Box x$  in  $S5$

*Dim.*

- (1)  $\Diamond\neg x \rightarrow \Box\Diamond\neg x$  ; sostituzione di  $\neg x$  in assioma  $S5$
- (2)  $\neg\Box\Diamond\neg x \rightarrow \neg\Diamond\neg x$  ; contrapposta di (1)
- (3)  $\Diamond\neg\Diamond\neg x \rightarrow \neg\Diamond\neg x$  ; definizione di  $\Diamond$
- (4)  $\Diamond\Box x \rightarrow \Box x$  ; definizione di  $\Diamond$  e  $\Box$

•

**Teorema 1**  $T + S5 \rightarrow T + S4$ , ovvero Il sistema  $S5$  contiene il sistema  $S4$

*Dim.*

- (1)  $\Box x \rightarrow \Diamond\Box x$  ; Necessitazione per possibilità
- (2)  $\Box x \rightarrow \Box\Diamond\Box x$  ; Sillogismo di (1) e  $S5$
- (3)  $\Diamond\Box x \rightarrow \Box x$  ; Lemma 1
- (4)  $\Box(\Diamond\Box x \rightarrow \Box x)$  ; Necessitazione di (3)
- (5)  $\Box\Diamond\Box x \rightarrow \Box\Box x$  ; Assioma 2
- (6)  $\Box x \rightarrow \Box\Box x$  ; Sillogismo di (1) e (5)

•

## 6 Un teorema di deduzione

In questo paragrafo proviamo a derivare un teorema di deduzione per il Sistema  $S4$ . Non possiamo aspettarci che il teorema di deduzione per il calcolo proposizionale  $CP$  valga, infatti la regola di deduzione di necessitazione ci porterebbe ad asserire che:

$$x \vdash \Box x \Rightarrow \vdash x \rightarrow \Box x$$

E ciò vorrebbe dire che le modalità non aggiungono nulla al sistema del calcolo proposizionale.

Se guardiamo attentamente la regola di necessitazione e la scriviamo in questo modo:

$$x \vdash \Box x$$

possiamo notare che l'ipotesi  $x$  è sufficiente per dimostrare  $\Box x$  che afferma molto più che semplicemente  $x$ . Notiamo anche che la regola di necessitazione ci permette di provare

$$x \vdash \Box \Box x$$

Quindi, far semplicemente passare la  $x$  da sinistra a destra, significherebbe affermare che da ipotesi più deboli si possono comunque dedurre le stesse conclusioni. Allora possiamo provare, nello spostare la  $x$  da sinistra a destra di  $\vdash$ , ad aggiungere un  $\Box$ . Questo può bastare in sistemi come  $S4$  o più potenti, perché da  $\Box x$  possiamo dedurre  $\Box \Box x$ ,  $\Box \Box \Box x$ , ecc... Mentre nel sistema  $T$  questo non è vero e quindi dovremo risolvere diversamente.

Recuperiamo quindi un teorema di deduzione, facendo la seguente modifica:

$$\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \Box \alpha \rightarrow \beta$$

Ora il precedente problema è facilmente risolvibile, infatti, la deduzione  $x \vdash \Box x$  diventa il teorema  $\vdash \Box x \rightarrow \Box x$  banalmente valido. Otteniamo però anche il seguente teorema,  $\vdash \Box x \rightarrow \Box \Box x$  che è l'assioma  $S4$ . Ecco perché abbiamo supposto di trovarci nel sistema  $S4$ .

Diamo una dimostrazione di

**Teorema**  $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \Box \alpha \rightarrow \beta$  in  $S4$

*Dim.* Lasciata al lettore, è una banale modifica della dimostrazione nel caso del calcolo proposizionale. L'unica parte interessante è quella riguardante i teoremi ottenuti con la regola di necessitazione. In quel caso dobbiamo far uso dell'assioma  $S4$  ed è tutto banale.

## 7 Modalità e funzioni modali

Rendiamo più formale il concetto di modalità. **Definizione** Una modalità è una successione di 0 o più di uno dei seguenti simboli:  $\neg, \diamond, \Box$ .

Viene da domandarci, ora, quante modalità ci sono in ognuno dei sistemi che abbiamo considerato. Si può dimostrare che nel Sistema  $T$  ce ne sono infinite, mentre in  $S4$  e  $S5$  ce ne sono solo un numero finito.

Parleremo più approfonditamente di tali questioni solo dopo aver introdotto una semantica per il nostro linguaggio.

### Definizione 1

Una funzione modale è una formula contenente almeno una funzione modale

In  $T$  ovviamente c'è un numero infinito di funzioni modali esprimibili. In  $S5$  ce n'è un numero finito, mentre sorprendentemente, in  $S4$  ce ne sono infinite, nonostante le modalità esprimibili siano in numero finito.

## 8 Un sistema interessante

Dedichiamo questo paragrafo un sistema di logica modale particolare, chiamato Sistema  $B$ . Esso è intimamente collegato alla logica intuizionista, come si evince dal nome, infatti la  $B$  è la iniziale di Brouwer, logico padre dell'intuizionismo.

## 9 Una semantica per i sistemi modali

Seguendo la tradizione, proviamo a dare una semantica per i sistemi formali sopra definiti. La costruzione che presenteremo è dovuta a Kripke e Hintikka ed altri.