Alla mia famiglia e ai miei amici

Indice

Introduzione **4**

1 Logica Proposizionale Classica **5**

1.1 Il Linguaggio 5

1.2 L'apparato deduttivo 7

1.3 Semantica di CP 11

1.4 Alcune proprietà importanti di CP 13

2 I Sistemi di Logica Modale **14**

3 Una semantica per i sistemi di logica modale **20**

3.1 Semantica per il Sistema T 21

3.2 Semantica per i sistemi S4 e S5 26

3.3 Proprietà dei sistemi T, S4, S5 27

4 Procedure di decisione e teorema di completezza **33**

4.1 Procedura di decisione per T 33

4.2 Procedura di decisione per S4 38

4.3 Procedura di decisione per S5 40

4.4 Teorema di completezza per T 40

4.5 Teorema di completezza per S4 45

4.6 Teorema di completezza per S5 47

Conclusioni **50**

Ringraziamenti **52**

Bibliografia **53**

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è di applicare i metodi della logica matematica alla studio della logica modale che si occupa dei ragionamenti che fanno uso delle nozioni di *necessità* e *possibilità*. Nel primo capitolo introduciamo un sistema formale per il calcolo proposizionale da usare come base per gli sviluppi successivi, presentandone apparato deduttivo, semantica e ricordandone alcune delle proprietà più importanti come il teorema di completezza. Nel secondo capitolo presentiamo tre dei più comuni sistemi formali per la logica modale: T, S4 e S5 come estensione del calcolo proposizionale definito nel primo capitolo, Nel terzo capitolo ci occupiamo di introdurre una semantica nello stile di Kripke insieme ad un teorema di adeguatezza per ciascuno dei sistemi e con questi strumenti procediamo poi ad un'analisi approfondita di alcune proprietà dei sistemi T, S4, S5, mostrando le differenze e i punti in comune tra essi e chiarendo in che senso ciascun sistema formalizza i concetti di *necessità* e *possibilità*. Infine, nel quarto capitolo mostriamo per ciascun sistema una procedura di decisione per le formule valide e terminiamo il lavoro iniziato con la dimostrazione del teorema di adeguatezza nel terzo capitolo, dimostrando il teorema di completezza per ciascun sistema.

Capitolo 1

Logica Proposizionale Classica

Premettiamo allo studio di sistemi di logica modale la definizione di sintassi e semantica di un sistema formale per il calcolo proposizionale, che da ora in poi denoteremo con CP, da usare come base per la definizione dei sistemi formali successivi. È possibile presentare un sistema di questo tipo in vari modi, tutti pressoché equivalenti tra di loro e la strada che intendiamo seguire è stata preferita alle altre solo perché riteniamo che sia quella che serve gli sviluppi successivi nel modo più semplice.

1.1 Il Linguaggio

Nel definire il linguaggio di CP seguiamo l'approccio di [1] definendo un linguaggio con un numero ristretto di connettivi primitivi e introducendo successivamente i connettivi mancanti definendoli a partire dai connettivi primitivi. Questa scelta ci permette di usare tutti i connettivi che siamo soliti adoperare, rendendo quindi la scrittura delle formule più chiara, ma allo stesso tempo ci permette di considerare solo un numero esiguo di connettivi nello studio delle proprietà del sistema, semplificandoci il lavoro.

Supponiamo di avere un insieme A non vuoto e numerabile disgiunto da $\{\neg, \vee, (,)\}$ (ad esempio possiamo usare l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) e che contenga come elementi degli oggetti che denotiamo con p, q, r.

Definizione 1.1 *Chiamiamo variabile proposizionale ogni elemento di A.*

Come connettivi primitivi scegliamo $\neg$ e $\vee$, a partire da essi sarà possibile definire tutti gli altri connettivi. L'alfabeto di CP è dunque dato dall'insieme $\Sigma = A \cup \{\neg, \vee, (,)\}$.

Chiamiamo $\Sigma^* = \bigcup_{n \in A} \Sigma^n$ l'insieme delle espressioni e definiamo l'insieme delle formule ben formate (fbf) $L_{CP} \subseteq \Sigma^*$ come segue:

Definizione 1.2 *L_{CP} è il più piccolo sottoinsieme di Σ^* tale che:*

- $x \in A \Rightarrow x \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP} \Rightarrow \neg(\alpha) \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP}$ *e* $\beta \in L_{CP} \Rightarrow (\alpha) \vee (\beta) \in L_{CP}$;

Una volta definito il linguaggio, definiamo i connettivi che mancano a partire da $\neg$ e $\vee$ come segue:

Definizione 1.3 *Se $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP}$, allora:*

- $(\alpha) \wedge (\beta) := \neg(\neg(\alpha) \vee \neg(\beta))$
- $(\alpha) \rightarrow (\beta) := (\neg(\alpha)) \vee (\beta)$
- $(\alpha) \leftrightarrow (\beta) := ((\alpha) \rightarrow (\beta)) \wedge ((\beta) \rightarrow (\alpha))$

Al fine di rendere le formule che scriveremo più comprensibili, seguendo la prassi, ometteremo spesso le parentesi usando le convenzioni descritte in [4] a p. 64.

1.2 L'apparato deduttivo

Anche per l'apparato deduttivo ci basiamo su [1], eccezion fatta per la lista di assiomi, questi ultimi sono presi dal sistema di calcolo proposizionale definito in [2].

Vale la pena far notare ancora una volta che questo modo di procedere non è l'unico possibile, ma ci sono tante altre scelte sia per quanto riguarda gli assiomi che le regole di deduzione, che sono altrettanto valide e che portano allo stesso risultato. La motivazione dietro la nostra scelta risiede semplicemente nel fatto che questo approccio è quello da noi ritenuto più familiare.

Definizione 1.4 *Gli assiomi di CP sono i seguenti:*

- *(HPD)* $p \to (q \to p)$
- *(HPMP)* $(r \to (p \to q)) \to (r \to p) \to (r \to q)$
- *($\vee$-I1)* $p \to (p \vee q)$
- *($\vee$-I2)* $q \to (p \vee q)$
- *($\vee$-E)* $(p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q \to r)$
- *($\wedge$-I)* $p \to q \to p \wedge q$
- *($\wedge$-E1)* $p \wedge q \to p$
- *($\wedge$-E2)* $p \wedge q \to q$
- *($\neg$-I)* $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \to \neg p$
- *(TER)* $p \vee \neg p$

Usiamo due regole di deduzione:

La prima è la seguente:

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

comunemente chiamata *Modus Ponens*

mentre per enunciare la seconda dobbiamo prima dare la seguente definizione:

Definizione 1.5 *Se $\alpha \in L_{CP}, x \in A$, e $\beta \in L_{CP}$, allora la formula ottenuta sostituendo uniformemente β al posto di x in α e che indichiamo con $\alpha[x/\beta]$ è definita come segue:*

- *Se $\alpha = x$, allora $\alpha[x/\beta] = \beta$,*
- *Se $\alpha \in A \setminus \{x\}$, allora $\alpha[x/\beta] = \alpha$,*
- *Se $\alpha = \neg(\gamma)$, allora $\alpha[x/\beta] = \neg(\gamma[x/\beta])$,*
- *Se $\alpha = (\gamma) \vee (\delta)$, allora $\alpha[x/\beta] = (\gamma[x/\beta]) \vee (\delta[x/\gamma])$*

Possiamo ora enunciare la regola di *sostituzione* nel seguente modo:

> Se α è un teorema, $\beta \in L_{CP}$, e $x \in A$, allora la formula $\alpha[x/\beta]$ è un teorema

Mentre il *Modus Ponens* è una regola pressoché standard, la regola di *sostituzione* non è molto comune. Abbiamo deciso di introdurla perché ci permette di dimostrare vari teoremi essenzialmente in un solo colpo, evitando di dover eseguire tante dimostrazioni che sarebbero essenzialmente sempre uguali. Un altro metodo equivalente sarebbe potuto essere quello di usare un insieme infinito di assiomi, facendo uso di schemi di assiomi, ma riteniamo che utilizzare un insieme finito di formule di L_{CP} congiuntamente alla regola di *sostituzione* ci permette di estendere più agevolmente CP e rende più chiaro perché sostituzioni di formule del sistema esteso (possibilmente contenenti simboli estranei a CP) in teoremi di CP ci forniscono ancora teoremi.

Diamo ora le seguenti definizioni che introducono i concetti di dimostrazione e di deduzione, strettamente collegati tra loro.

Definizione 1.6 *Una dimostrazione è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa almeno una delle seguenti condizioni*

- D_i *è un assioma;*
- *esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per* Modus Ponens *da D_h e D_k.*
- *esiste D_h, con $h < i$, tale che D_i è ottenuto tramite la regola di* sostituzione *a partire da D_h.*

Se $\alpha \in L_{CP}$ ed esiste una dimostrazione D il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una dimostrazione di α e scriviamo $\vdash \alpha$.

Definizione 1.7 *Se $\Gamma \subseteq L_{CP}$, una deduzione a partire dalle ipotesi Γ è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa almeno una delle seguenti condizioni*

- $D_i \in \Gamma$*;*
- D_i *è un assioma;*
- *esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per* Modus Ponens *da D_h e D_k.*
- *esiste D_h, con $h < i$, tale che D_i è ottenuto tramite la regola di* sostituzione *a partire da D_h.*

Se $\alpha \in L_{CP}$, $\Gamma \subseteq L_{CP}$ ed esiste una deduzione D a partire dalle ipotesi Γ il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una deduzione di α a partire dalle ipotesi Γ e scriviamo $\Gamma \vdash \alpha$.

Nel seguito, scriveremo $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ per indicare $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Vale la pena ricordare il seguente teorema:

Teorema 1.1 (Teorema di deduzione) *Se* $\alpha, \beta \in L_{CP}$,

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Dim. Una dimostrazione può essere trovata in [3], e può essere facilmente adattata al sistema CP.

$\bullet$

Terminiamo questo paragrafo mostrando un esempio di dimostrazione di una famiglia di teoremi, che ci tornerà utile anche nel seguito.

Teorema 1.2 (Sillogismo)

$$\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$$

Dim. Semplifichiamo il lavoro dimostrando

$$(p \to q), (q \to r), p \vdash r$$

in luogo di

$$\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$$

e sfruttiamo poi il teorema di deduzione sopra menzionato.

Una possibile deduzione per r a partire dalle ipotesi $\{(p \to q), (q \to r), p\}$ è la seguente.

(1)	$p \to q$	ipotesi
(2)	p	ipotesi
(3)	q	Modus Ponens di (1) e (2)
(4)	$q \to r$	ipotesi
(5)	r	Modus Ponens di (3) e (4)

Possiamo dunque affermare:

$$(p \to q), (q \to r), p \vdash r$$

Infine, applicando tre volte il teorema di deduzione otteniamo:

$$\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to (p \to r)$$

$\bullet$

1.3 Semantica di CP

Ci proponiamo ora di fornire una semantica per CP. La semantica che intendiamo fornire per CP è quella standard, in particolare seguiamo l'esposizione di [4] per presentarla. L'idea è quella di interpretare una formula come una proposizione a cui associare un valore di verità. Quindi vorremo interpretare le variabili proposizionali come proposizioni che descrivono fatti della *realtà* (ad esempio "Michele è altisonante"), il simbolo $\neg$ come il connettivo logico "non" dell'italiano e il simbolo $\vee$ come disgiunzione inclusiva, ossia quel connettivo logico che in italiano si rappresenta spesso come "o..., o..., oppure entrambi". Per fare ciò dovremmo definire cosa si intende per proposizione, ma possiamo omettere questo passaggio, a dire il vero un po' problematico. Infatti, osserviamo che, associando ad ogni variabile proposizionale un valore di verità, siamo in grado di associare un valore di verità ad ogni formula ben formata. Infatti, il valore di verità di "non α" dipende solo dal valore di verità di α e allo stesso modo il valore di verità di "o α, o β, oppure entrambi" dipende solo dal valore di verità di α e β.

Connettivi che hanno questa peculiarità vengono detti operatori vero-funzionali.

Passiamo ora alla formalizzazione di queste idee e diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.8 *Chiamiamo interpretazione una funzione* $I : A \to \{0, 1\}$

Data un'interpretazione I definiamo per ricorsione la funzione di valutazione V_I che associa ad ogni formula del linguaggio di CP un valore dell'insieme $\{0, 1\}$ come segue:

Se $\alpha, \beta \in L_{CP}$:

- $V_I(p) = I(p), \forall p \in A$
- $V_I(\alpha \vee \beta) = max\{V_I(\alpha), V_I(\beta)\}$
- $V_I(\neg\alpha) = 1 - V_I(\alpha)$

Quindi un'interpretazione ci dà in un certo senso una lista di tutte le proposizioni vere e di tutte le proposizioni false. Usiamo poi i valori assegnati dall'interpretazione per determinare il valore di verità delle formule in base alla semantica che abbiamo assegnato a ciascun connettivo (che sono codificate nelle regole che abbiamo usato per definire la funzione V_I).

Definizione 1.9 *Sia* $\alpha \in L_{CP}$*, diremo che* α *è valida e scriveremo* $\vDash \alpha$ *se* $V_I(\alpha) = 1$*, per ogni interpretazione* I*.*

È noto, e una discussione approfondita di questo argomento si può trovare in [3] pp. 27–29, che è possibile definire qualsiasi tipo di operatore vero-funzionale usando solo gli operatori di negazione e disgiunzione inclusiva.

Quindi, analogamente a quanto fatto per i connettivi $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$, possiamo pensare di aggiungere qualsiasi operatore vero-funzionale ci venga in mente a CP definendolo in termini di $\neg$ e $\vee$. Quindi anche se dalla presentazione non sembrerebbe, in realtà in CP sono presenti tutti gli operatori vero-funzionali possibili.

1.4 Alcune proprietà importanti di CP

Terminiamo questo capitolo richiamando alcune proprietà di CP fondamentali, omettendone le dimostrazioni. Un trattamento più approfondito di questi argomenti si può trovare in [4] o [3].

Esiste una procedura di decisione che, data una qualsiasi formula ben formata di CP, ci permette sempre di determinare in un numero finito di passi se questa è valida o meno.

Inoltre vale il seguente teorema che collega l'aspetto sintattico all'aspetto semantico di CP:

Teorema 1.3 (Teorema di completezza) *Se* $\alpha \in L_{CP}$*,*

$$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha$$

Un corollario immediato del teorema di completezza è che anche l'insieme dei teoremi di CP è un insieme decidibile, infatti secondo il teorema di completezza l'insieme dei teoremi di CP e l'insieme delle formule ben formate di CP valide coincidono, quindi usando la procedura di decisione per le formule valide possiamo anche determinare le formule che sono teoremi.

Capitolo 2

I Sistemi di Logica Modale

Ora che abbiamo definito un sistema formale per la logica proposizionale, lo estenderemo in vari modi.

Il nostro obiettivo è avere un sistema formale nel quale possiamo definire e studiare le proprietà di due nuovi operatori unari che vorremmo avessero un comportamento che rispecchi i concetti di *necessità* e *possibilità*.

Prima di cominciare facciamo delle osservazioni importanti. Ricordiamo che un operatore vero-funzionale è una funzione il cui risultato è univocamente determinato dal valore di verità dei parametri da cui dipende. Inoltre, si può dimostrare che nel calcolo proposizionale si possono esprimere tutti gli operatori verofunzionali possibili in termini di $\neg e \vee$. Quindi, se gli operatori che vogliamo aggiungere fossero vero-funzionali, potremmo continuare il nostro studio usando CP e non servirebbe altro. Notiamo, però, che gli operatori che vogliamo aggiungere non possono essere vero-funzionali, infatti il valore di verità della frase "è necessario che p" non dipende *solo* dal valore di verità che si associa a p, infatti, il fatto che p sia vera, non ci permette di concludere che p sia necessariamente vera. Quindi per avere una speranza di formalizzare i concetti di necessità e possibilità siamo costretti ad estendere il sistema CP in maniera sostanziale.

A tal proposito, non è esattamente chiaro come caratterizzare formalmente le nozioni di *necessità* e *possibilità*, e anzi vedremo che queste potranno essere intese in modi diversi. Questa ricchezza di significati si rifletterà in una varietà di sistemi formali più o meno potenti. Noi ci focalizzeremo in particolare su tre dei sistemi formali definiti in [1]:

- Sistema T
- Sistema S4
- Sistema S5

Questi sistemi differiscono tra di loro soltanto per gli assiomi scelti in ognuno di essi. Quindi iniziamo definendo la parte comune di tutti i sistemi formali, ovvero il linguaggio e le regole di deduzione.

L'alfabeto dei sistemi è ottenuto dall'alfabeto del sistema CP aggiungendo il simbolo $\Box$, che vorremo far corrispondere alla nozione di *necessità*.

Per quanto riguarda le formule ben formate, la definizione induttiva che genera l'insieme L delle formule ben formate è ottenuta dalle regole usate per definire L in CP più la seguente regola aggiuntiva:

- Se $\alpha \in L$, allora $\Box(\alpha) \in L$

Diamo la seguente definizione, il cui intento è esprimere l'altro operatore che ci interessa, quello corrispondente alla nozione di *possibilità*, in termini di $\Box$.

Definizione 2.1 *Se $\alpha \in L$:*

$$\Diamond(\alpha) := \neg\Box\neg(\alpha)$$

Infine, per quanto riguarda le regole di deduzione, usiamo il *Modus Ponens* e la regola di *sostituzione* come per CP. Per la regola di sostituzione bisogna però fare attenzione, infatti la nozione di sostituzione uniforme di formule al posto di variabili proposizionali va aggiornata e quindi per le formule di L definiamo:

Definizione 2.2 *Se $\alpha \in L, x \in A$, e $\beta \in L$, allora la formula ottenuta sostituendo uniformemente β al posto di x in α e che indichiamo con $\alpha[x/\beta]$ è definita come segue:*

- *Se $\alpha = x$, allora $\alpha[x/\beta] = \beta$,*
- *Se $\alpha \in A \setminus \{x\}$, allora $\alpha[x/\beta] = \alpha$,*
- *Se $\alpha = \neg(\gamma)$, allora $\alpha[x/\beta] = \neg(\gamma[x/\beta])$,*
- *Se $\alpha = \Box(\gamma)$, allora $\alpha[x/\beta] = \Box(\gamma[x/\beta])$,*
- *Se $\alpha = (\gamma) \vee (\delta)$, allora $\alpha[x/\beta] = (\gamma[x/\beta]) \vee (\delta[x/\gamma])$*

Osserviamo che la nuova definizione è un'estensione della definizione data per le formule di CP e quindi ogni sostituzione uniforme in CP è anche una sostituzione uniforme nei nuovi sistemi che stiamo definendo.

Quindi enunciamo la regola di *sostituzione* come segue:

> Se α è un teorema, $\beta \in L$, e $x \in A$, allora la formula $\alpha[x/\beta]$ è un teorema

A queste due regole ne aggiungiamo una completamente nuova, detta *Regola di necessitazione*:

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

Vale la pena soffermarsi brevemente sulla regola di necessitazione, infatti interpretando $\Box$ come "è necessario che" la regola di necessitazione sembra affermare che da α si possa dedurre che α sia necessaria e quindi che da ipotesi deboli si possa arrivare ad una conclusione più forte. Invece mettiamo in evidenza che ciò che effettivamente la regola di necessitazione afferma è che se α è un teorema, allora da essa possiamo dedurre $\Box\alpha$, quindi non è assolutamente possibile applicare la regola di necessitazione a qualsiasi formula, ma solo alle formule che sono teoremi, e in un certo senso ciò che questa regola afferma è che dire che α è un teorema è sufficiente per dedurre che α sia necessaria, conclusione che ora ci sembra più sensata.

Una volta definita la parte comune a tutti i sistemi a cui siamo interessati, passiamo ora ad esaminare per ogni sistema gli assiomi che lo caratterizzano.

Il sistema T ha come assiomi tutti gli assiomi di CP più:

- (K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
- (T) $\Box p \to p$

Il sistema S4 ha come assiomi tutti gli assiomi del Sistema T più il seguente assioma:

$$(S4)\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$$

Il sistema S5 ha come assiomi tutti gli assiomi del Sistema T più:

$$(S5) \diamond \alpha \to \Box \diamond \alpha$$

Ora che abbiamo definito il linguaggio e l'apparato deduttivo di tutti i sistemi che ci interessano, facciamo delle osservazioni su di essi.

Definizione 2.3 *Diremo che un sistema formale è meno forte di un altro se tutte i teoremi del primo sono teoremi anche del secondo.*

Ovviamente, per come abbiamo costruito i nostri sistemi formali, il Sistema T è meno forte sia di S4 che di S5. Inoltre il sistema CP è meno forte sia di T che di S4 che di S5. Ora, però mostreremo che anche S4 è meno forte di S5. A tal fine premettiamo alcuni risultati preliminari.

Teorema 2.1 $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$ *in* T

Dim.

(1)	$\Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	$T[\neg\alpha/\alpha]$
(2)	$\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$	Contrapposta di (1)
(3)	$\alpha \to \Diamond\alpha$	Definizione di $\Diamond$

•

Lemma 2.1 $\vdash \Diamond\Box x \to \Box x$ *in* $S5$

Dim.

(1)	$\Diamond\neg x \to \Box\Diamond\neg x$	$S5[\neg x/\alpha]$
(2)	$\neg\Box\Diamond\neg x \to \neg\Diamond\neg x$	contrapposta di (1)
(3)	$\Diamond\neg\Diamond\neg x \to \neg\Diamond\neg x$	definizione di $\Diamond$
(4)	$\Diamond\Box x \to \Box x$	definizione di $\Diamond$ e $\Box$

•

Teorema 2.2 $\vdash \Box x \to \Box\Box x$ *in* $S5$*, ovvero il Sistema S5 è più forte del Sistema S4.*

Dim.

(1)	$\Box x \to \Diamond\Box x$	Teorema 2.1
(2)	$(\Box x \to \Diamond\Box x) \to (\Diamond\Box x \to \Box \Diamond \Box x) \to (\Box x \to \Box \Diamond \Box x)$	Sostituzioni di Teorema 1.2
(3)	$\Diamond x \to \Box \Diamond x$	Assioma S5
(4)	$(\Diamond\Box x \to \Box \Diamond x) \to \Box x \to \Box \Diamond \Box x$	Modus Ponens di (1) (2)
(5)	$\Box x \to \Box \Diamond \Box x$	Modus Ponens (3) e (4)
(6)	$\Diamond\Box x \to \Box x$	Lemma 2.1
(7)	$\Box(\Diamond\Box x \to \Box x)$	Necessitazione (5)
(8)	$\Box(\Diamond\Box x \to \Box x) \to \Box \Diamond \Box x \to \Box\Box x$	Assioma K
(9)	$\Box \Diamond \Box x \to \Box\Box x$	Modus Ponens (4) e (5)
(10)	$(\Box x \to \Diamond\Box x) \to (\Box \Diamond \Box x \to \Box\Box x) \to (\Box x \to \Box\Box x)$	Sostituzioni di Teorema 1.2
(11)	$(\Box \Diamond \Box x \to \Box\Box x) \to (\Box x \to \Box\Box x)$	Modus Ponens di (1) e (10)
(12)	$\Box x \to \Box\Box x$	Modus Ponens (9) e (11)

$\bullet$

Capitolo 3

Una semantica per i sistemi di logica modale

Dopo aver definito il linguaggio comune a tutti i sistemi di logica modale introdotti, lo abbiamo usato unicamente come base di un calcolo che usa le regole di deduzione per costruire dimostrazioni. Come ben sappiamo un linguaggio può anche essere usato per parlare di qualcosa, di oggetti esterni al sistema formale. Fare ciò significa associare ad ogni formula ben formata del linguaggio un oggetto che rappresenti il suo significato. Quando seguiamo questo procedimento diciamo che abbiamo fornito una semantica per il linguaggio.

Definire semantiche per i sistemi formali ci aiuta sia a confrontare sistemi formali con strutture maggiormente conosciute e ad assicurarci che alcune costruzioni corrispondano alla nostra intuizione, sia a determinare alcune proprietà del sistema formale. E nel nostro caso ci aiuterà anche a comprendere meglio quali siano le nozioni di modali rappresentate in ciascuno dei sistemi che abbiamo definito e come differiscono tra di loro.

Per i nostri sistemi di logica modale possiamo pensare di fare qualcosa di simile a quanto fatto per CP, però poiché $\Box$, come abbiamo visto, non può essere un operatore vero-funzionale, non possiamo aspettarci di poter definire V_I per formule del tipo $\Box\alpha$ basandoci unicamente sul valore di $V_I(\alpha)$.

La semantica che useremo è in gran parte dovuta a Saul A. Kripke (vale la pena notare che pubblicò un teorema di completezza per i sistemi di logica modale all'età di 17 anni) e si basa su un concetto già introdotto da Leibniz, quello dei mondi possibili. Quindi non supponiamo più che esista un'unica realtà, ma che esistono tanti mondi possibili, e in più, e questa è una delle idee chiave della semantica di Kripke, da alcuni mondi si può accedere ad altri mondi, cioè sapere come sono fatte altre realtà alternative. Il mondo in cui si può accedere agli altri mondi sarà la base per distinguire tra i vari concetti di necessità e tra i vari sistemi formali che abbiamo definito prima.

3.1 Semantica per il Sistema T

Definiamo un T-modello come una tripla (W, R, I), in cui:

- W è un insieme non vuoto i cui elementi saranno chiamati mondi;
- R è una relazione binaria riflessiva su W, detta relazione di accessibilità;
- I è una funzione dall'insieme $L \times W$ all'insieme $\{0, 1\}$;

L'insieme W è l'insieme di tutti i mondi. I ci fornisce per ogni mondo la lista di proposizione vere e quella delle proposizioni false, analogamente al suo corrispettivo nella semantica per CP. R, infine, è la *relazione di accessibilità*, essa ci permette di determinare a quali mondi si può accedere da un determinato mondo. Quindi se $w_1, w_2 \in W e w_1 R w_2$, allora una persona in w_1 potrà accedere al mondo w_2 e sapere quali proposizioni sono vere in w_2. Il fatto che R sia riflessiva ci dice che l'unica garanzia che abbiamo è che ogni persona può accedere al proprio mondo, e questa è una garanzia molto scarsa.

Definiamo come prima una funzione di valutazione $V : L \times W \to \{0, 1\}$ che dipenderà da un dato T-modello (w, W, R, I).

Se $\alpha, \beta \in L$:

- $V(p, w) = I(p, w)$, $\forall p \in A$
- $V(\neg\alpha, w) = 1 - V(\alpha, w)$
- $V(\alpha \vee \beta, w) = max\{V(\alpha, w), V(\beta)\}$
- $V(\Box\alpha, w) = min\{V(\alpha, w') : wRw'\}$

Le prime tre regole sono pressoché identiche a quelle specificate per la semantica di CP, tranne per il fatto che nella prima regola usiamo la funzione I valutandola per il mondo w a cui siamo interessati.

La novità è la quarta regola, quella riguardante la semantica di $\Box$. Questa regola afferma che nel mondo w, α è necessariamente vera se e solo se è α vera in tutti i mondi accessibili da w.

Diciamo che una formula α è T-valida e scriviamo $\vDash \alpha$ se per ogni T-modello (w, W, R, I) $\forall w \in W.V(\alpha, w) = 1$.

Ci occupiamo adesso di mostrare che tutti i teoremi del sistema T sono formule valide nella semantica che abbiamo fornito. Un risultato di questo tipo nel quale ci si assicura che ogni teorema di un sistema formale è anche una formula valida in una sua semantica viene chiamato *teorema di adeguatezza* e può essere visto come una conferma importante che la semantica scelta sia una buona scelta per l'interpretazione del sistema formale. Procediamo dunque all'enuciazione e alla dimostrazione del:

Teorema 3.1 (Teorema di adeguatezza per T) $\forall \alpha \in L. \vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ *in* T

Dim.

Premettiamo alla dimostrazione vera e propria le seguenti osservazioni:

Se (W, R, I) è un T-modello, $w \in W$ e $\alpha, \beta \in L$, allora: $V(\alpha \to \beta, w) = V(\neg\alpha \vee \beta, w) = 0$ se e solo se $V(\neg\alpha, w) = 0$ e $V(\beta, w) = 0$, ovvero, se e solo se $V(\alpha, w) = 1$ e $V(\beta, w) = 0$.

Se poi $V(\alpha \to \beta, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$, allora, se fosse $V(\beta, w) = 0$, per quanto detto prima avremmo $V(\alpha \to \beta, w) = 1$, ma ciò è assurdo, quindi deve essere $V(\beta, w) = 1$.

Occupiamoci ora di dimostrare il teorema di adeguatezza, la strategia che seguiremo è la seguente: mostriamo che tutti gli assiomi sono T-validi e che le regole di deduzione conservano la T-validità. Di conseguenza per le condizioni che abbiamo dato sulle formule ben formate che formano una dimostrazione, deduciamo che tutte le formule ben formate che appaiono in una dimostrazione sono T-valide ed in particolare l'ultima formula della sequenza finita è T-valida. Questo sarà sufficiente per giungere alla tesi.

Iniziamo col mostrare che tutti gli assiomi sono T-validi:

Mostriamo che $\models \Box\alpha \to \alpha$:

Se (W, R, I) è un T-modello, per quanto visto in precedenza abbiamo che: $V(\Box\alpha \to \alpha, w) = 0 \Leftrightarrow V(\Box\alpha, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$. Siccome R è una relazione riflessiva, dalla definizione di V segue che: $V(\Box\alpha, w) <= V(\alpha, w)$ e quindi se $V(\Box\alpha, w) = 1$, si ha anche che $V(\alpha, w) = 1$ e quindi otteniamo che $\forall w \in W. V(\Box\alpha \to \alpha, w) = 1$ e per l'arbitrarietà del T-modello otteniamo l'asserto.

Mostriamo che $\models \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$:

Se (W, R, I) è un T-modello, come prima abbiamo che: $V(\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta), w) = 0 \Leftrightarrow V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$ e $V(\Box\alpha \to \Box\beta, w) = 0$.

Se $V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$, allora: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha \to \beta, w') = 1$ Se fosse $V(\Box\alpha, w) = 1$ e $V(\Box\beta, w) = 0$, allora si avrebbe la seguente situazione: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha, w') = 1$. Quindi avremmo che: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha \to \beta, w') = 1$ e $V(\alpha, w') = 1$, dunque per l'osservazione precedente si avrebbe: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\beta, w') = 1$ e perciò $V(\Box\beta, w) = 1$, il che è assurdo.

Quindi se $V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$, deve essere $V(\Box\alpha \to \Box\beta, w) = 1$, e quindi per l'arbitrarietà di w e del T-modello otteniamo l'asserto.

Ci resta da verificare la T-validità degli assiomi ereditati da CP. Per il teorema di completezza per CP, tutti gli assiomi sono formule valide per CP, e poiché per la definizione di V per i T-modelli coincide con la definizione di V_I nella semantica di CP per quanto riguarda le formule contenenti solo variabili proposizionali e i connettivi comuni a T e CP, è facile verificare che gli assiomi derivati da CP sono anche T-validi.

Quindi, poiché, una volta forniti i valori di verità per α e β, le regole per determinare i valori di verità delle formule $\neg\alpha$ e $\alpha \vee \beta$ sono le stesse sia per CP che per il sistema T ($\neg$ e $\vee$ sono interpretati allo stesso modo sia in T che in CP) e poiché gli schemi di assiomi ereditati da CP contengono solo $\neg$ e $\vee$ come connettivi (gli altri connettivi di CP sono definiti in termini di questi due), possiamo dedurre che tutte le possibili sostituzioni uniformi di formule di L negli schemi di assiomi derivati da CP forniscono formule ancora valide.

Ora dimostriamo che il *Modus Ponens* conserva la validità:

Se $\alpha \to \beta$ e α sono T-valide, allora fissato un T-modello (W, R, I), $\forall w \in W.V(\alpha \to \beta, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$. Allora per l'osservazione che abbiamo fatto prima otteniamo che: $\forall w \in W.V(\beta, w) = 1$. Per l'arbitrarietà del

T-modello otteniamo l'asserto.

Poi dimostriamo che la regola di *sostituzione* conserva la validità: Se α è T-valida, x è una variabile proposizionale occorrente in α e $\beta \in L$, dato un T-modello (W, R, I) definiamo la funzione $I' : A \times W \to \{0,1\}$ in questo modo:

- $I'(x, w) = V(\beta, w), \forall w \in W$
- $I'(y, w) = I(y, w), \forall w \in W, \forall y \in A \setminus \{x\}$

Poiché α è T-valida, dato il T-modello (W, R, I'), vale $V(\alpha, w) = 1, \forall w \in W$. Mostriamo, allora, per induzione sulla lunghezza di α che vale $V(\alpha[x/\beta], w) = V'(\alpha, w), \forall w \in W$:

- Se $\alpha = x \in A$, allora $V'(x, w) = I'(x, w) = I(\beta, w)$ e quindi l'asserto;
- Se $\alpha = y \in A \setminus \{x\}$, allora l'asserto è banale;
- Se $\alpha = \neg\gamma$, allora per ipotesi induttiva, $V'(\gamma, w) = V(\gamma[x/\beta], w), \forall w \in W$ e quindi l'asserto;
- Se $\alpha = \gamma \vee \delta$, allora per ipotesi induttiva, $V'(\gamma, w) = V(\gamma[x/\beta], w), \forall w \in W$, $V'(\delta, w) = V(\delta[x/\beta], w), \forall w \in W$ e quindi l'asserto;
- Se $\alpha = \Box\gamma$, allora per ipotesi induttiva, $V'(\gamma, w) = V(\gamma[\gamma[x/\beta], w), \forall w \in W$, quindi l'asserto.

Ora, poiché α è T-valida, allora $V(\alpha[x/\beta], w) = V'(\alpha, w) = 1, \forall w \in W$, e per l'arbitrarietà del T-modello, otteniamo che $\alpha[x/\beta]$ è una formula T-valida.

Infine dimostriamo che la regola di necessitazione conserva la validità: Fissato un T-modello (W, R, I) e un mondo $w \in W$, se α è T-valida, allora $\forall w' \in W. V(\alpha, w') = 1$, quindi in particolare si ha: $\forall w' \in W. wRw' \Rightarrow$

$V(\alpha, w') = 1$. Quindi $V(\Box\alpha, w) = 1$ e per l'arbitrarietà di w e del T-modello otteniamo l'asserto.

•

3.2 Semantica per i sistemi S4 e S5

Con leggere modifiche sulle condizioni da richiedere per la relazione di accessibilità dei T-modello possiamo costruire delle semantiche anche per i sistemi S4 e S5.

Definizione 3.1 *Un S4-modello è un T-modello* (W, R, I) *in cui* R *oltre ad essere riflessiva è anche transitiva.*

Definizione 3.2 *Un S5-modello è un T-modello* (W, R, I) *in cui* R *è la relazione di equivalenza totale (e in particolare è una relazione di equivalenza), vale a dire che si ha:* $\forall w_1, w_2 \in W.w_1 R w_2$.

Anche per S4 e S5 proviamo un teorema di adeguatezza

Teorema 3.2 (Teorema di adeguatezza per S4) $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ *in* $S4$

Dim. Siccome un S4-modello è anche un T-modello e poiché ogni teorema del Sistema T è anche un teorema del Sistema S4, possiamo sfruttare il teorema di adeguatezza per T e dimostrare qui solo che l'assioma $S4$ è una formula valida:

Se (W, R, I) è un S4-modello e $w \in W$, se $V(\Box\alpha, w) = 1$, allora $\forall w_1 \in W.wRw_1 \Rightarrow V(\alpha, w_1) = 1$, quindi poiché R è riflessiva e transitiva se $w_1, w_2 \in W$ e wRw_1, w_1Rw_2, risulta wRw_2, quindi per ipotesi, $\forall w_2 \in W.w_1Rw_2 \Rightarrow V(\alpha, w_2) = 1$, quindi $V(\Box\alpha, w_1) = 1$ e perciò $\forall w_1 \in W.wRw_1 \Rightarrow V(\Box\alpha, w_1) =$

1, dunque $V(\Box\Box\alpha, w) = 1$. Per l'arbitrarietà di w e dell'S4-modello abbiamo la tesi.

$\bullet$

Teorema 3.3 (Teorema di adeguatezza per S5) $\vdash \alpha \Rightarrow \vDash \alpha$ *in* $S5$

Dim. Siccome un S5-modello è anche un T-modello e poiché ogni teorema del Sistema T è anche un teorema del Sistema S5, possiamo sfruttare il teorema di adeguatezza per T e dimostrare qui solo che l'assioma $S5$ è una formula valida:

Se (W, R, I) è un S5-modello e $w \in W$,

se $V(\diamond\alpha, w) = 1$, allora $\exists w_1 \in W.wRw_1$ e $V(\alpha, w_1) = 1$,

Se $w_2 \in W$ e wRw_2, allora siccome R è simmetrica, w_2Rw e poiché è transitiva w_2Rw_1, ma $V(\alpha, w_1) = 1$, quindi $\exists w_1 \in W.w_2Rw_1$ e $V(\alpha, w_1) = 1$, cioè $V(\diamond\alpha, w_2) = 1$.

Ciò ci permette di affermare che $\forall w_2 \in W.wRw_2 \Rightarrow V(\diamond\alpha, w_2) = 1$ e quindi $V(\Box \diamond \alpha, w) = 1$. Per l'arbitrarietà di w e dell'S5-modello otteniamo la tesi.

$\bullet$

3.3 Proprietà dei sistemi T, S4, S5

I teoremi di adeguatezza che abbiamo dimostrato ci dicono che ogni teorema è anche una formula valida per i vari sistemi. Questo significa che il concetto di semantico di validità che abbiamo poco fa definita si concilia bene con quello di dimostrabilità. Ciò è una buona assicurazione circa la bontà delle semantiche.

Il teorema di adeguatezza ci permette di dimostrare varie importanti proprietà tramite strumenti semantici e che sarebbero difficili da dimostrare usando solo l'apparato deduttivo.

Teorema 3.4 *S4 e T sono due sistemi distinti, ovvero l'assioma S4 non è una tesi del sistema T.*

Dim. In virtù del teorema di adeguatezza se troviamo un T-modello nel quale l'assioma S4 sia falso, potremo dedurre che S4 non può essere un teorema del sistema T.

Consideriamo 3 mondi $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- w_1Rw_2;
- w_2Rw_3;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W. I(x, w) = 0$;
- $I(p, w_1) = I(p, w_2) = 1$;
- $I(p, w_3) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un T-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva.

Inoltre $V(p, w_1) = V(p, w_2) = 1$ e $V(p, w_3) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\Box p, w_1) = 1$, mentre $V(\Box p, w_2) = 0$. Quindi

$\Box p$ non è vera in tutti i mondi accessibili da w_1 e quindi $V(\Box\Box p, w_1) = 0$ e perciò: $V(\Box p \to \Box\Box p, w_1) = 0$. Quindi $\Box p \to \Box\Box p$ non è una formula valida per il sistema T e quindi non è dimostrabile. Nel sistema S4 invece è un'istanza dell'assioma (S4) e quindi è banalmente dimostrabile. Possiamo perciò concludere che i sistemi S4 e T non hanno gli stessi teoremi e quindi non sono lo stesso sistema formale.

•

Corollario 3.1 *S5 e T sono due sistemi distinti*

Dim. Abbiamo dimostrato in precedenza che l'assioma (S4) è una tesi di S5 e quindi per il teorema precedente, S5 ha più tesi di T.

•

Teorema 3.5 *S5 e S4 sono due sistemi distinti, ovvero l'assioma S5 non è una tesi del sistema S4.*

Dim.

In virtù del teorema di adeguatezza se troviamo un S4-modello nel quale l'assioma S5 sia falso, potremo dedurre che S5 non può essere un teorema del sistema S4.

Consideriamo 2 mondi $W = \{w_1, w_2\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- w_1Rw_2;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W.I(x,w) = 0$;
- $I(p, w_1) = 1$;
- $I(p, w_2) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un S4-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva e transitiva.

Inoltre $V(p, w_1) = 1$ e $V(p, w_2) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\diamond p, w_1) = 1$, mentre $V(\diamond p, w_2) = 0$. Quindi $\diamond p$ non è vera in tutti i mondi accessibili da w_1 e quindi $V(\Box \diamond p, w_1) = 0$ e perciò: $V(\diamond p \rightarrow \Box \diamond p, w_1) = 0$. Quindi $\diamond p \rightarrow \Box \diamond p$ non è una formula valida per il sistema S4 e quindi non è dimostrabile. Nel sistema S5 invece è un'istanza dell'assioma (S5) e quindi è banalmente dimostrabile. Possiamo perciò concludere che i sistemi S5 e S4 non hanno gli stessi teoremi e quindi non sono lo stesso sistema formale.

•

In definitiva abbiamo dimostrato che i sistemi T, S4 e S5 sono tre sistemi distinti e questo significa che presentano tre nozioni diverse di "necessità" e "possibilità".

Forniamo, infine quest'ultima dimostrazione:

Teorema 3.6 *Esiste $\alpha \in L$, tale che $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ non è una tesi di T (e quindi nemmeno di S4 e S5)*

Dim.

Costruiamo un T-modello in cui $\alpha \to \Box\alpha$ è falsa.

Consideriamo 2 mondi $W = \{w_1, w_2\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- $w_1 R w_2$;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W.I(x, w) = 0$;
- $I(p, w_1) = 1$;
- $I(p, w_2) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un T-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva.

Inoltre $V(p, w_1) = 1$ e $V(p, w_2) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\Box p, w_1) = 1$, perciò: $V(p \to \Box p, w_1) = 0$. Quindi $\Diamond p \to \Box \Diamond p$ non è una formula valida per il sistema T e quindi non è dimostrabile. Abbiamo ottenuto così la tesi.

•

Nei sistemi di logica modale in cui per ogni $\alpha \in L$ vale $\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$ si dice che avviene il collasso delle modalità. Questi sistemi sono solo una versione barocca, con simboli inutili, di un sistema formale per il calcolo proposizionale: i connettivi $\Box$ e $\Diamond$ sono inutili, infatti la formula precedente ci dice che affermare $\Box\alpha$ è esattamente lo stesso che affermare α e quindi non aggiungono niente di nuovo.

Il teorema che abbiamo appena dimostrato ci assicura che nei sistemi definiti non avviene il collasso delle modalità e che quindi i nuovi connettivi introdotti non sono solo inutili orpelli che non aggiungono niente a CP.

Capitolo 4

Procedure di decisione e teorema di completezza

4.1 Procedura di decisione per T

Ci occupiamo ora di definira una procedura di decisione per l'insieme delle formule T-valide.

Per verificare la T-validità di una formula $\alpha \in L$ avremmo bisogno di verificare che essa sia vera in tutti i mondi di tutti i possibili T-modelli, ciò che invece ci proponiamo di fare è provare a dimostrare che la formula non è T-valida e quindi costruire un T-modello falsificante per α, ossia un T-modello in cui c'è un mondo in cui α sia falsa. Se ciò risulta impossibile avremo dimostrato che la α è T-valida.

Per rendere il lavoro più semplice, invece che costruire un T-modello tramite la determinazione diretta della terna (W, R, I), procediamo alla costruzione progressiva di un diagramma che rappresenti i vari mondi, le relazioni di accessibilità stabilite tra essi e i valori di verità associati alle formule in ciascun mondo. I mondi vengono rappresentati da rettangoli (che avranno lo stesso nome dei mondi da loro rappresentati) dentro i quali vengono scrivere delle formule a cui vengono associati dei valori di verità a seconda di come si vuole vengano interpretate nel mondo corrispondente a quel rettangolo. La relazione di accessibilità è rappresentata tramite frecce che collegano i rettangoli in modo che se w_1 è accessibile da w_2, allora c'è una frecca che parte dal rettangolo di w_2 ed è diretta verso il rettangolo di w_1.

Allora procediamo come segue: Data la formula $\alpha \in L$, iniziamo introducendo un rettangolo w_1 e al suo interno scriviamo α e le assegniamo il valore 0 scrivendo uno zero sotto al suo operatore principale.

Dato un qualsiasi rettangolo w_i, questo conterrà un numero finito di formule $\beta_1, ..., \beta_n$ e a ciascuna di essa è associato un valore di verità, allora proviamo a determinare un assegnamento di valori di verità per le variabili proposizionali che occorrono nelle formule del rettangolo w_i in modo che tutte le $\beta_1, ..., \beta_n$ abbiano contemporanemanete il valore di verità che le era stato associato. Per farlo sfruttiamo la definizione di V e la struttura delle varie formule.

Rappresentiamo graficamente questi passaggi scrivendo sotto all'operatore principale di ogni sottoformula $\gamma_{i,j}$ di ogni formula β_i il valore di verità associato a $\gamma_{i,j}$.

Diamo un esempio di questo procedimento provando a trovare un assegnamento di valori di verità che falsifichi $p \to q$:

Siccome vogliamo che la formula sia falsa, iniziamo scrivendo 0 sotto l'operatore principale $\to$:

$$p \underset{0}{\to} q$$

Ora, dalla definizione di $\to$ e dalla definizione di V deduciamo che affinché la formula sia falsa, c'è bisogno che a p sia assegnato 1 e a q 0, e quindi scriviamo:

$$\underset{1}{p} \underset{1}{\rightarrow} \underset{0}{q}$$

Se nel fare ciò si arriva a dover associare alla stessa sottoformula due valori di verità diversi, allora arrestiamo il processo e sottolineiamo la sottoformula incriminata.

Fornire un altro esempio

Durante questo procedimento possono presentari vari casi particolari: Può capitare che nel rettangolo w_i l'operatore principale di una sottoformula β sia tale che le regole di V non ci permettono di determinare univocamente dei valori di verità per le sue sottoformule. Ad esempio ciò succede se vogliamo che $\gamma \vee \delta$ sia vera, in questo caso abbiamo tre possibili assegnamenti:

- γ vera e δ falsa
- γ vera e δ vera
- γ falsa e δ vera

In eventualità come questa facciamo tante copie del diagramma (che chiameremo versioni alternative) quante sono i possibili assegnamenti di verità e di volta in volta, sostituiamo al rettangolo w_i contenente le ambiguità, un rettangolo $w_i(n)$ detto rettangolo alternativo di w_i in cui alle sottoformule con valore ambiguo viene associato ciascuno dei possibili assegnamenti. E infine poniamo un † sotto all'operatore principale di β nel rettangolo w_i. Per ciascun diagramma continuiamo questo procedimento separatamente.

Quindi nel caso precedente avremmo tre rettangoli: $w_i(1), w_i(2), w_i(3)$. Nel primo alle sottoformule γ e δ saranno assegnati rispettivamente i valori 1 e 0, nel secondo i valori 1 e 1 e nel terzo i valori 0 e 1.

Se invece ci ritroviamo a dover assegnare ad una formula del tipo $\Box\beta$ il valore di verità 0 nel rettangolo w_i, allora disegniamo un asterisco sotto al simbolo $\Box$ e introduciamo un nuovo rettangolo w_j accessibile da w_i (cioè disegniamo una freccia diretta verso w_j che congiunge w_i a w_j) e in w_j scriviamo la formula β e le associamo il valore 0, così che sia giustificato l'assegnamento del valore 0 alla formula $\Box\beta$. Il rettangolo w_i viene detto *predecessore diretto* del rettangolo w_j.

Infine se dobbiamo assegnare ad una formula del tipo $\Box\beta$ il valore di verità 1 nel rettangolo w_i, allora disegniamo un asterisco sopra al simbolo $\Box$ e in ogni rettangolo w_j (diverso da w_i) accessibile da w_i scriviamo la formula β e le associamo il valore 1, così che risulti giustificato l'assegnamento del valore 1 alla formula $\Box\beta$, mentre in w_i associamo a β il valore 1.

Ogni volta che introduciamo un nuovo rettangolo ripetiamo per esso la procedura.

Un diagramma costruito secondo le regole appena descritte è detto T-diagramma.

Inoltre un insieme di T-diagrammi a cui non si può applicare più nessuna regola è detto un sistema completo di T-diagrammi.

Se in un rettangolo è necessario assegnare ad una sottoformula due valori di verità diversi, allora diciamo che il rettangolo è esplicitamente inconsistente. Se un rettangolo esplicitamente inconsistente w_j è accessibile da un rettangolo w_i, allora w_i è esplicitamente inconsistente.

Se un rettangolo ha dei rettangoli alternativi e questi sono tutti esplicitamente inconsistenti, allora anch'esso è esplicitamente inconsistente.

Per il modo in cui viene costruito un sistema completo di T-diagrammi, è facile dedurre che $\alpha \in L$ è T-valida se e solo se nel suo sistema completo di T-diagrammi, il rettangolo w_1 è esplicitamente inconsistente.

Non ci resta che dimostrare che la procedura che abbiamo definito è effettivamente una procedura di decisione, vogliamo cioè dimostrare che per ogni formula di L essa ci permette di determinare in modo univoco e in un numero finito di passi se questa è T-valida o meno.

Il fatto che il procedimento funzioni e che se il procedimento termina la risposta è univoca sono ovvi, dobbiamo solo mostrare che per costruire un sistema completo di T-diagrammi sono necessari solo un numero finito di passi:

Iniziamo osservando che in un rettangolo w_i la determinazione dei valori di verità delle sottoformule della formula α, nel caso in cui non ci siano ambiguità comporta solo un numero finito di passaggi. Se c'è qualche ambiguità bisogna usare la regola per introdurre i rettangoli alternativi. Il numero di possibili combinazioni di valori di verità è finito e quindi i rettangoli alternativi introdotti sono in numero finito.

Notiamo ora che se è necessario introdurre un nuovo mondo w_j accessibile da w_i, allora in questo mondo le formule avranno un numero strettamente inferiore di operatori modali rispetto al numero di operatori modali nelle formule di w_i, questo perché le formule scritte in w_j si tutte ottengono rimuovendo un operatore da una sottoformula della formula scritta in w_i. Dal momento che in w_1 c'è solo un numero finito di operatori modali, allora il numero di mondi da dover introdurre sarà necessariamente finito.

Abbiamo perciò che il numero di rettangoli in un sistema completo di T-diagrammi è finito e che per ciascuno di essi le operazioni da compiere sono finite. In definitiva la procedura che abbiamo definito termina in un numero finito di passi.

Mettere foto esempi

4.2 Procedura di decisione per S4

Cerchiamo di adattare la procedura appena definita per decidere le formule S4-valide. Siccome un S4-modello ha una relazione di accessibilità riflessiva e transitiva, allora bisogna stare attenti che qualora si introducano mondi nuovi le relazioni di accessibilità siano correttamente registrate in modo che se w_3 è accessibile da w_2 e w_2 è accessibile da w_1, allora w_3 risulti accessibile da w_1 e quindi bisogna aggiungere il giusto numero di di frecce per far si che la transitività della relazione di accessibilità sia rispettata Questa situazione ci porta delle complicazione, per illustrare bene il problema mostriamo cosa succede con la seguente formula:

$$MLp \to LMp$$

fare il grafico

Il problema che riscontriamo è che essendo la relazione di accessibilità transitiva, quando in w_i si ha che $\Box\alpha$ è vera, dobbiamo registrare in ogni altro mondo accessibile da w_i che α è vera, e in particolare se c'è un mondo w_j accessibile da w_i e un mondo w_k accessibile da w_j, allora w_k è accessibile da w_i e quindi sia in w_j che in w_k dobbiamo registrare che α deve essere vera, ma ciò significa che ora nei mondi accessibili da un mondo w_m non è più detto che il numero di operatori modali presenti nelle formule sia diminuito e quindi può capitare come nell'esempio precedente di avere un numero infinito di mondi.

Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 4.1 *diciamo che i mondi $w_1, ..., w_n$ formano una catena se: w_{i+1} è accessibile da w_i per ogni $i = 1, ..., n-1$*

Se in un rettangolo w_{i+1} della catena ci sono delle condizioni introdotte a partire dal mondo w_i, allora quelle condizioni devono valere in ogni altro elemento successivo della catena.

Per ovviare al problema che abbiamo riscontrato, osserviamo che in ogni rettangolo sono presenti solo sottoformule ben formate della formula α presente in w_1, siccome tutte le sottoformule possibili di α sono in numero finito, allora ad un certo punto, quando dovremo aggiungere un nuovo rettangolo w_i al termine di una catena, ci sarà sicuramente un rettangolo più in alto nella catena che contenga la formula e tutte le condizioni che vogliamo aggiungere w_i. Inoltre notiamo che anche se questo rettangolo contiene più condizioni di w_i, ciò non è un problema, perché essendo w_i accessibile da questo rettangolo, quelle condizioni valgono anche in w_i, facendo parte della stessa catena. capiterà sicuramente che esista un altro rettangolo già introdotto con la stessa formula.

I T-diagrammi in cui la relazione tra i rettangoli è transitiva e si usa la regola appena definita vengono detti S4-diagrammi. Se poi questi particolari T-diagrammi sono un sistema completo di T-diagrammi, allora si dirà che sono un sistema completo di S4-diagrammi.

Con questa modifica possiamo dimostrare che il numero di rettangoli in un sistema completo di S4-diagrammi è finito:

Una catena di rettangoli è finita, per quanto detto prima. Ogni catena inizia da w_1, siccome si introducono rettangoli solo in corrispondenza di operatori modali, e ogni rettangolo contiene solo un numero finito di operatori modali, allora il numero di catene necessarie è finito così come il numero di rettangoli.

4.3 Procedura di decisione per S5

Un S5-diagramma è un S4-diagramma in cui, però, ogni rettangolo è accessibile da ogni altro rettangolo. Con un argomento molto simile a quello usato per dimostrare che la costruzione di un sistema completo di S4-diagrammi termina dopo un numero finito di passi, si può dimostrare lo stesso risultato per gli S5-diagrammi. Quindi anche per S5 c'è una procedura di decisione per le formule S5-valide.

4.4 Teorema di completezza per T

Data una formula α, una volta costruito il suo sistema completo di T-diagrammi, associamo ad ogni rettango w_i del sistema una formula w'_i definita in questo modo:

nel rettangolo w_i c'è una formula β che deve essere falsa ed eventualmente delle condizioni, cioè un numero finito di formule $\gamma_1, ...\gamma_n$ che devono essere vere, ereditate dal suo predecessore diretto, allora definiamo w'_i come la formula $\beta \vee \neg\gamma_1 \vee ... \vee \neg\gamma_n$, con $n \geq 0$.

Lemma 1 Dato un sistema completo di T-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo, se β è una sottoformula di w'_i e a β è assegnato univocamente il valore di verità falso nel rettangolo w_i,
allora $\vdash \beta \rightarrow w'_i$ in T
Se invece a β è associato il valore di verità vero,
allora $\vdash \neg\beta \rightarrow w'_i$ in T
Dim.
Supponiamo che a β sia associato il valore di verità falso, l'altro caso è analogo, allora se $\delta_1, ..., \delta_n$ sono tutte le sottoformule ben formate di w'_i è

facile vedere che

$$(\Box\delta_1 \to \delta_1) \to ... \to (\Box\delta_n \to \delta_n) \to (\beta \to w_i')$$

è ottenuta per sostituzione da una tautologia di CP, infatti l'unico modo per rendere falsa questa formula è assegnare a δ_k 1 ogni volta che associamo a δ_k 1, per $k = 1...n$, assegnare 1 a β e 0 a w_i'. Ma sappiamo, per quanto dedotto dal T-diagramma, e per il fatto, che se w_i' ha valore di verità 1, allora β deve avere valore di verità 0.
Quindi otteniamo l'asserto.

Lemma
Dato un sistema completo di T-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo in cui non ci sono operatori contrassegnati con †, se in w_i c'è un'inconsistenza, allora $\vdash w_i'$ in T.
Dim.
Siccome w_i è esplicitamente inconsistente, esiste una sottoformula β di w_i' tale che ad essa è associata sia il valore di verità 0 che il valore di verità 1, allora per il lemma precedente si ha:

$$\vdash \beta \to w_i'$$

e

$$\vdash \neg\beta \to w_i'$$

È facile provare che $(\neg\beta \to \alpha) \to (\beta \to \alpha) \to \alpha$ è una tautologia in CP e quindi è un teorema in CP e dunque è un teorema nel sistema T.
Allora applicando due volte il modus ponens e sfruttando anche i teoremi che abbiamo mostrato poco sopra, otteniamo che $\vdash w_i'$.

Lemma

Dato un sistema completo di T-diagrammi e un rettangolo w_i, se $\vdash w'_i$ e w_j è il suo predecessore diretto e in w_j non ci sono connettivi contrassegnati con †, allora $\vdash w'_j$

Dim.

Se w_i e w_j sono lo stesso rettangolo, non c'è niente da dimostrare. Mentre se w_i e w_j sono due rettangoli diversi, siccome w_i è costruito a partire da w_j secondo le regole della procedura, allora in w_i c'è una formula γ a cui è assegnato il valore 0 e tale che in w_j c'è $\Box\gamma$ a cui è assegnato il valore 0 e poi ci sono delle formule $\beta_1, ..., \beta_n$ a cui è assegnato il valore 1 e tali che in w_j a $\Box\beta_1, ..., \Box\beta_n$ è assegnato il valore 1 in w_i. Per questo motivo w'_j è la formula: $\neg\beta_1 \vee ...\neg\beta_n \vee \gamma$.

Quindi per ipotesi abbiamo:

$$\vdash \neg\beta_1 \vee ...\neg\beta_n \vee \gamma$$

per la regola di necessitazione, otteniamo:

$$\vdash \Box(\neg\beta_1 \vee ...\neg\beta_n \vee \gamma)$$

Applicando la definizione di $\rightarrow$:

$$\vdash \Box(\beta_1 \rightarrow ...\beta_n \rightarrow \gamma)$$

Per applicazioni ripetute dell'assioma K:

$$\vdash (\Box\beta_1 \rightarrow ...\Box\beta_n \rightarrow \Box\gamma)$$

E quindi per definizione di $\rightarrow$:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \Box\gamma)$$

Siccome in w'_j abbiamo assegnato a $\Box\beta_m$ il valore di verità 1, per $m = 1...n$, per il lemma mostrato prima abbiamo che:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \rightarrow w'_j$$

$$...$$

$$\vdash \neg\Box\beta_n \rightarrow w'_j$$

Allora, usando un ragionamento valido in CP, otteniamo:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \Box\gamma) \rightarrow w'_j$$

Dunque per Modus Ponens si ricava:

$$\vdash w'_j$$

cioè la tesi.

Consideriamo ora il caso in cui un rettangolo contenga delle sottoformule a cui non è possibile dare un valore di verità univoco e per cui bisogna usare la regola dei rettangoli alternativi. Se nelle formule rimuoviamo tutte le occorrenze di connettivi non primitivi, sostituendoli con la loro definizione in termini di $\neg$ e $\vee$, allora otteniamo che l'unico connettivo per cui si può presentare una situazione di ambiguità e $\vee$ e per le sue sottoformule sono possibili tre assegnamenti diversi. Inoltre ricordiamo che un rettangolo a cui è stata applicata la regola dei rettangoli alternativi è esplicitamente inconsistente se tutti i rettangoli alternativi sono inconsistenti. Quindi dato un rettangolo a cui è applicata la regola dei rettangoli alternativi non perdiamo di generalità se assumiamo che i rettangoli alternativi siano tre. Allora dimostriamo il seguente lemma:

Lemma

$$\vdash w_i(1)', \vdash w_i(2)', \vdash w_i(3)' \rightarrow \vdash w'_i$$

Dim.

Siccome in w_i c'è un'ambiguità sappiamo che c'è una sottoformula in w_i' del tipo $\beta \vee \gamma$ a cui è stato assegnato 1, quindi vale:

$$\vdash \neg(\beta \vee \gamma) \rightarrow w_i'$$

In $w_i(1)$ a β è associato 1, a γ 0, quindi $w_i(1)'$ è $w_i' \vee \neg\beta \vee \gamma$.
In $w_i(2)$ a β è associato 0, a γ 1, quindi $w_i(2)'$ è $w_i' \vee \beta \vee \neg\gamma$.
In $w_i(3)$ a β è associato 1, a γ 1, quindi $w_i(3)'$ è $w_i' \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$.
Perciò, per ipotesi, abbiamo rispettivamente:

$$\vdash w_i' \vee \neg\beta \vee \gamma$$

$$\vdash w_i' \vee \beta \vee \neg\gamma$$

$$\vdash w_i' \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$$

Ora usiamo la tautologia di CP:

$$\vdash (\neg(\delta \vee \epsilon) \rightarrow \rho) \rightarrow (\rho \vee \neg\delta \vee \neg\epsilon) \rightarrow (\rho \vee \delta \vee \neg\epsilon) \rightarrow (\rho \vee \neg\delta \vee \epsilon) \rightarrow \rho$$

Sostituendo al posto di ρ la formula w_i', al posto di δ la formula β e al posto di ϵ la formula γ.
Dunque abbiamo, sfruttando anche la definizione di $w_i(1)'$, $w_i(3)'$, $w_i(3)'$:

$$\vdash (\neg(\beta \vee \epsilon) \rightarrow w_i') \rightarrow (w_i(1)' \rightarrow w_i(2)' \rightarrow w_i(3)' \rightarrow w_i')$$

Allora applicando quattro volte il Modus Ponens, otteniamo $\vdash w_i'$

Questi lemmi che abbiamo dimostrato ci permettono di concludere facilmente che se in un sistema completo di T-diagrammi per la formula c'è un rettangolo esplicitamente inconsistente, allora $\vdash w_1'$.

Quindi se $\vDash \alpha$, allora il sistema completo di T-diagrammi per α è inconsistente e quindi $\vdash w_1'$, ma $w_1' = \alpha$, quindi $\vdash \alpha$.

4.5 Teorema di completezza per S4

Mostriamo ora il teorema di completezza per il sistema S4. Data una formula α, una volta costruito il suo sistema completo di 4-diagrammi, associamo ad ogni rettango w_i del sistema una formula w_i'' definita in questo modo:

nel rettangolo w_i c'è una formula β che deve essere falsa ed eventualmente delle condizioni, cioè un numero finito di formule $\gamma_1, ...\gamma_n$ che devono essere vere, ereditate dal suo predecessore diretto, allora definiamo w_i'' come la formula $\beta \vee \neg\Box\gamma_1 \vee ... \vee \neg\Box\gamma_n$, con $n \geq 0$.

Lemma Dato un sistema completo di S4-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo,
allora $\vdash w_i' \rightarrow w_i''$ in T
Dim.
La dimostrazione è semplice e si basa sul fatto che vale: $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\Box\alpha$ in T

Da questo lemma e dal lemma precedente per T ricaviamo che se un rettangolo w_i di un sistema completo di S4-diagrammi è esplicitamente inconsitente allora $\vdash w_i''$

Mostriamo ora:

Lemma
Dato un sistema completo di S4-diagrammi e un rettangolo w_i, se $\vdash w_i''$ e w_j è il suo predecessore diretto e in w_j non ci sono connettivi contrassegnati con †, allora $\vdash w_j''$
Dim.
Se w_i e w_j sono lo stesso rettangolo, non c'è niente da dimostrare. Mentre se w_i e w_j sono due rettangoli diversi, siccome w_i è costruito a partire da w_j secondo le regole della procedura, allora in w_i c'è una formula γ a cui è

assegnato il valore 0 e tale che in w_j c'è $\Box\gamma$ a cui è assegnato il valore 0 e poi ci sono delle formule $\beta_1, ..., \beta_k$, con $k \geq 0$ a cui è assegnato il valore 1 e tali che in w_j a $\Box\beta_1, ..., \Box\beta_n$ è assegnato il valore 1 in w_i, e infine ci sono delle formule $\beta_{k+1}, ..., \beta_n$, con $n \geq 0$, ereditate da qualche altro rettangolo nella catena a cui appartengono sia w_j che w_i.
Quindi per il lemma visto nel paragrafo precedente, abbiamo:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_k \vee \Box\gamma) \to w'_j$$

Usando il lemma precedente e il teorema di sillogismo otteniamo:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_k \vee \Box\gamma) \to w''_j$$

Se $n > 0$, siccome $\beta_{k+1}, ..., \beta_n$ sono ereditate sia da w_i che da w_j, allora w''_j sarà del tipo $\delta \vee \neg\Box\beta_{k+1} \vee ... \vee \Box\beta_n$, per qualche $\delta \in L$, Quindi poiché $p \to (p \vee q)$ è una tautologia di CP e quindi un teorema, otteniamo:
$\vdash \neg\Box\beta_{k+1} \vee ... \vee \Box\beta_n \to w''_j$.
e quindi usando un'altra tautologia di CP:
$(p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q) \to r$ e usando due volte il modus ponens, otteniamo:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \Box\gamma) \to w''_j$$

Poiché $\vdash w''_i$, si ha:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \gamma)$$

Per necessitazione, definizione di $\to$ e per l'assioma K otteniamo:

$$\vdash (\neg\Box\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\Box\beta_n \vee \Box\gamma)$$

Ora sfruttando il fatto che in S4 si ha: $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$, otteniamo:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \Box\gamma)$$

Dunque poiché come abbiamo visto:

$$\vdash (\neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \Box\gamma) \rightarrow w''_j$$

Per modus ponens:

$$\vdash w''_j$$

Infine, con qualche piccola accortezza si può giungere anche qui a dimostrare il lemma:

Lemma

$$\vdash w_i(1)', \vdash w_i(2)', \vdash w_i(3)' \rightarrow \vdash w'_i$$

E perciò come prima otteniamo il nostro teorema di completezza.

4.6 Teorema di completezza per S5

Per il sistema S5 possiamo sfruttare quanto fatto finora per il sistema S4, l'unico inconveniente è che w''_1 non è la formula che ci aspettiamo, infatti poiché la relazione di accessibilità deve essere anche riflessiva, allora w''_1 sarà del tipo: $\alpha \vee \neg\Box\beta_1 \vee ... \vee \neg\Box\beta_n$, con $n \geq 0$. Nel caso in cui $n > 0$, dobbiamo aggiungere dei passaggi per poter ottenere $\vdash \alpha$. Se $n > 0$, allora nel rettangolo w_1 c'è una formula β_1 che è stata scritta perché c'è un rettangolo w_j, in cui c'è una sottoformula del tipo $\Box\beta_1$ a cui è stata assegnato il valore di verità 1 e dunque a β_1 è assegnato il valore di verità 1 La formula w''_j associata a w_j è del tipo $\gamma \vee \neg\Box\delta_1 \vee ... \vee \neg\Box\delta_k$, con $k \geq 0$, e per come sono costruiti gli S5-diagrammi, $\Box\beta_1$ può essere o una sottoformula di γ o una sottoformula di qualche δ_i, con $i < n$

Se $\Box\beta_1$ è una sottoformula di γ, allora per un argomento simile al lemma 1 abbiamo che:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \rightarrow \gamma$$

e quindi per necessitazione e grazie all'assioma K:

$$\vdash \Box\neg\Box\beta_1 \to \Box\gamma$$

Ma per l'assioma S5:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \to \Box\neg\Box\beta_1$$

Quindi per sillogismo:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \to \Box\gamma$$

Ma per come sono costruiti gli S5-diagrammi, o w_j è w_1 e γ è α, oppure w_j ha un predecessore diretto che chiamiamo w_l e in w_l a $\Box\gamma$ è associato il valore di verità 0.

Se $\Box\beta_1$ è una sottoformula di δ_i, con $i < n$, allora, per un argomento simile al lemma 1

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \to \neg\delta_i$$

e poiché

$$\vdash \neg\delta_i \to \neg\Box\delta_i$$

e per sillogismo:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \to \neg\Box\delta_i$$

Ma per come sono costruiti gli S5-diagrammi, c'è un rettangolo w_l in cui a $\Box\delta_i$ è stato associato 1.

Se abbiamo ottenuto $\neg\Box\beta_1 \to \alpha$, ci fermiamo, altrimenti, usando la formula, che chiameremo σ, implicata da $\neg\Box\beta_1$ ($\Box\gamma$ o $\neg\Box\delta_i$, a seconda dei casi) reiteriamo questo procedimento e otteniamo che è un teorema di S5 che σ uno dei disgiunti della formula w_l'', e quindi per sillogismo $\neg\Box\beta_1$ implica uno dei disgiunti della formula w_l'' Osserviamo, però, che ad ogni iterazione di questo procedimento la lunghezza della formula implicata da $\neg\Box\beta_1$ aumenta sempre di più, inoltre ogni formula è sempre una delle formule scritta nell'S5-diagramma che sono in numero finito, quindi non è possibile dover iterare questo procedimento all'infinito, ma prima o poi bisognerà arrivare in un numero finito di passi alla formula α che è la formula più lunga di tutte nell'S5-diagramma.

Abbiamo perciò dimostrato che $\vdash \neg\Box\beta_1 \rightarrow \alpha$, è possibile fare lo stesso per tutti gli altri β_i, con $i = 2, ..., n$. Dunque abbiamo

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \rightarrow \alpha$$

...

$$\vdash \neg\Box\beta_n \rightarrow \alpha$$

e inoltre:

$$\vdash \neg\Box\beta_1 \vee ...\neg\Box\beta_n \vee \alpha$$

Dunque sfruttando svariate volte la tautologia di CP:

$$(p \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow (r \vee q)$$

e il modus ponens, otteniamo:

$$\vdash \alpha \vee ... \vee \alpha$$

che è facile far vedere che ci porta a poter affermare che

$$\vdash \alpha$$

Conclusioni

Abbiamo inizialmente introdotto tre sistemi di logica modale: T, S4 ed S5, dicendo che non era chiaro se ci fosse un sistema da preferire agli altri. Dopo aver introdotto delle semantiche di Kripke per essi, abbiamo mostrato come queste semantiche rispecchino perfettamente l'apparato deduttivo dei sistemi formali. Ora possiamo usare i concetti introdotti da queste semantiche per fare alcune riflessioni circa la natura dei tre sistemi introdotti. Infatti è emerso dallo studio che abbiamo condotto che i tre sistemi rappresentano connotazioni diverse del concetto di "necessità" che abbiamo in mente. Ad esempio nel sistema S5, abbiamo visto grazie alla semantica, che è possibile determinare che una proposizione è necessaria solo quando questa è vera in tutti i mondi possibili. Mentre in S4 e in T, ciò non è detto, infatti in questi sistemi una proposizione è necessaria in un mondo quando è vera in tutti i mondi accessibili da quel mondo. Questa differenza di definizioni mette in mostra una proprietà importante della necessità, infatti non è detto che una persona sia in grado di concepire tutti i mondi possibili, ma la nostra capacità di concepire stati di cose diversi è sicuramente condizionata dal mondo in cui viviamo. Proprio su quest'osservazione possiamo indagare sulla la distinzione tra T e S4, infatti in S4 quando si concepisce un mondo alternativo è possibile concepire quel mondo come se ci vivessimo dentro, e quindi è per noi possibile concepire tutti i mondi che sarebbero concepibili se vivessimo in quel mondo.

Al contrario in T non è così, concepire un mondo significa solo pensare ad un mondo alternativo, senza che questo influisca sulla nostra capacità di concepire mondi alterantivi.

In definitiva ciò che viene messo in evidenza dalle semantiche di Kripke per questi sistemi è che il concetto di necessità è in un certo senso collegato al concetto di conoscenza, più è possibile conoscere mondi alternativi, più sarà forti saranno le proposizioni che possiamo affermare essere vere.

Questo fatto ci spinge a pensare alla pluralità di sistemi modali possibili come a una fonte di ricchezza di sfumature del concetto di "necessità" e perciò non ha molto senso chiedersi quale sia il sistema formale migliore, mentre ha più senso usare tali sistemi come strumento per un'analisi più approfondita per distinguere le varie sfumature del concetto di "necessità" che si usano nei ragionamenti. Alcuni esempi di questo approccio sono forniti da Lemmon [Lemmon] e terminiamo riportandone qui alcuni: Se vogliamo interpretare $\Box\alpha$ come "è analiticamente vero che α", allora il sistema formale S5 è quello corretto. Mentre se vogliamo interpretare $\Box\alpha$ come è "informalmente dimostrabile in matematica che α", allora il sistema corretto è S4.

Ringraziamenti

Ringrazio solo me stesso e nessun altro.

Bibliografia

[1] G.E. Hughes, M.J. Cresswell, *Introduzione alla logica modale*, edizione a cura di C. Pizzi, [1973], Milano, Il Saggiatore, 1983^{2}.

[2] S.C. Kleene, *Mathematical Logic*, New York, J. Wiley & Sons, 1967.

[3] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, [1964], Londra, Chapman & Hall, 1997^{4}.

[4] R. Tortora, *Elementi di teoria degli insiemi*, Napoli, E.DI.S.U. - Napoli 1, 1989.