I sistemi di logica modale T, S4, S5: Sintassi e Semantica

1 Nozioni Preliminari

Premettiamo allo studio di sistemi di logica modale la definizione di sintassi e semantica di un sistema formale per il calcolo proposizionale, che da ora in poi denoteremo con CP, da usare come base per la definizione dei sistemi formali successivi. È possibile presentare un tale sistema in vari modi, tutti pressoché equivalenti tra di loro. Noi seguiremo seguire la strada di [Hughes-Cresswell], definendo un linguaggio con un numero ristretto di connettivi primitivi e introducendo successivamente i connettivi mancanti definendoli a partire dai connettivi primitivi. Questa scelta ci permette di usare tutti i connettivi che siamo soliti adoperare, rendendo quindi la scrittura delle formule più chiara, ma allo stesso tempo ci permette anche di considerare solo i connettivi primitivi nello studio delle proprietà del sistema, semplificandoci il lavoro.

1.1 Il Linguaggio

Per definire il linguaggio di CP avremo bisogno di un insieme di oggetti di base, chiamati variabili proposizionali. Senza soffermarci ulteriormente sulla natura di questi oggetti, possiamo tranquillamente assumere che esista un insieme A non vuoto numberabile disgiunto da $\{\neg, \vee, (,)\}$.

Definizione 1 *Chiamiamo variabile proposizionale ogni elemento di A.*

Scegliamo come connettivi primitivi $\neg$ e $\vee$, a partire da essi sarà possibile definire tutti gli altri. L'alfabeto di CP è dunque dato dall'insieme $\Sigma = A \cup \{\neg, \vee, (,)\}$.

Chiamiamo $\Sigma^* = \bigcup_{n \in A} \Sigma^n$ l'insieme delle espressioni e definiamo l'insieme delle formule ben formate (fbf) $L_{CP} \subseteq \Sigma^*$ con la seguente definizione per induzione:

- $x \in A \Rightarrow x \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP} \Rightarrow \neg(\alpha) \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP} \Rightarrow (\alpha) \vee (\beta) \in L_{CP}$;
- Non ci sono altri elementi in L_{CP}.

Una volta definito il linguaggio, definiamo i connettivi che mancano a partire da $\neg$ e $\vee$ come segue:

Definizione 2 *Se $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP}$, allora:*

- $(\alpha) \wedge (\beta) := \neg(\neg(\alpha) \vee \neg(\beta))$
- $(\alpha) \rightarrow (\beta) := (\neg(\alpha)) \vee (\beta)$
- $(\alpha) \leftrightarrow (\beta) := ((\alpha) \rightarrow (\beta)) \wedge ((\beta) \rightarrow (\alpha))$

Al fine di rendere le formule che scriveremo più comprensibili, seguendo la prassi, ometteremo spesso le parentesi usando le convenzioni descritte in [Tortora; pag 46].

1.2 L'apparato deduttivo

Per la definizione dell'apparato deduttivo di CP seguiamo quanto fatto in [Tortora].

Vale la pena far notare che questa non è l'unica possibilità, ma ci sono tante altre scelte sia per quanto riguarda gli assiomi che le regole di deduzione, che sono altrettanto valide e che portano allo stesso risultato. La motivazione dietro la nostra scelta risiede semplicemente nel fatto che questo approccio è quello da noi ritenuto più familiare.

Definizione 3 *Gli assiomi di CP sono ottenuti dai seguenti schemi sostituendo in modo uniforme formule ben formate al posto di α, β, γ:*

- *(HPD)* $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- *(HPMP)* $(\gamma \to (\alpha \to \beta)) \to (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$
- *($\vee$-I1)* $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
- *($\vee$-I2)* $\beta \to (\alpha \vee \beta)$
- *($\vee$-E)* $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$
- *($\wedge$-I)* $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$
- *($\wedge$-E1)* $\alpha \wedge \beta \to \alpha$
- *($\wedge$-E2)* $\alpha \wedge \beta \to \beta$
- *($\neg$-I)* $(\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
- *(TER)* $\alpha \vee \neg\alpha$

L'unica regola di deduzione di CP è il *Modus Ponens*:

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$$

Notiamo che gli assiomi che abbiamo scelto per CP non sono in numero finito, ma sono infiniti. L'uso di schemi di assiomi porta a notevoli semplificazioni nella pratica; infatti ci permette di dimostrare in una sola volta famiglie di teoremi, senza dover ripetere volta per volta un procedimento che sarebbe essenzialmente sempre uguale.

Diamo ora le seguenti definizioni che introducono i concetti di dimostrazione e di deduzione, strettamente collegati tra loro.

Definizione 4 *Una dimostrazione è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa almeno una delle seguenti condizioni*

- *D_i è un assioma;*
- *esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per Modus Ponens da D_h e D_k.*

Se $\alpha \in L_{CP}$ ed esiste una dimostrazione D il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una dimostrazione di α e scriviamo $\vdash \alpha$.

Definizione 5 *Se $\Gamma \subseteq L_{CP}$, una deduzione a partire dalle ipotesi Γ è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa almeno una delle seguenti condizioni*

- *$D_i \in \Gamma$;*
- *D_i è un assioma;*
- *esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per Modus Ponens da D_h e D_k.*

Se $\alpha \in L_{CP}$, $\Gamma \subseteq L_{CP}$ ed esiste una deduzione D a partire dalle ipotesi Γ il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una deduzione di α a partire dalle ipotesi Γ e scriviamo $\Gamma \vdash \alpha$.

Nel seguito, scriveremo $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ per indicare $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Vale la pena ricordare il seguente teorema:

Teorema di deduzione

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$$

Dim. [Tortora]

•

Terminiamo questo paragrafo mostrando un esempio di dimostrazione di una famiglia di teoremi, che ci tornerà utile anche nel seguito.

Teorema(Sillogismo) Se $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP}$

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$$

Dim. Semplifichiamo il lavoro dimostrando

$$(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha \vdash \gamma$$

in luogo di

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$$

e sfruttiamo poi il teorema di deduzione sopra menzionato.
Una possibile deduzione per γ a partire dalle ipotesi $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha\}$ è la seguente.
(1) $\alpha \to \beta$; ipotesi
(2) α ; ipotesi

(3) β ; Modus Ponens di (1) e (2)

(4) $\beta \to \gamma$; ipotesi

(5) γ ; Modus Ponens di (3) e (4)

Possiamo dunque affermare:

$$(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha \vdash \gamma$$

Infine, applicando tre volte il teorema di deduzione otteniamo:

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$$

•

1.3 Semantica di CP

Ci proponiamo ora di fornire una semantica per CP. La semantica che intendiamo fornire per CP è quella standard, in particolare seguiamo l'esposizione di [Tortora] per presentarla. L'idea è quella di associare ad ogni formula un valore di verità, interpretando le variabili proposizionali come proposizioni che descrivono fatti della *realtà*, ad esempio "Michele è altisonante", il simbolo $\neg$ come il connettivo logico "non" dell'italiano e il simbolo $\vee$ come disgiunzione inclusiva, ossia quel connettivo logico che in italiano si rappresenta spesso come "o..., o..., oppure entrambi". Per fare ciò dovremmo definire cosa si intende per proposizione, ma possiamo omettere questo passaggio, a dire il vero un po' problematico. Infatti, osserviamo che, associando ad ogni variabile proposizionale un valore di verità, siamo in grado di associare un valore di verità ad ogni formula ben formata. Infatti, il valore di verità di "non α" dipende solo dal valore di verità di α e allo stesso modo il valore di verità di "o α, o β, oppure entrambi" dipende solo dal valore di verità di α e β.

Connettivi che hanno questa peculiarità vengono detti operatori vero-funzionali.

Passiamo ora alla formalizzazione di queste idee e diamo le seguenti definizioni:

Definizione 6 *Chiamiamo interpretazione una funzione* $I : A \to \{0, 1\}$

Data un'interpretazione I definiamo per ricorsione la funzione di valutazione V_I che associa ad ogni formula del linguaggio di CP un valore dell'insieme $\{0, 1\}$ come segue:

Se $\alpha, \beta \in L_{CP}$:

- $V_I(p) = I(p), \forall p \in A$
- $V_I(\alpha \vee \beta) = max\{V_I(\alpha), V_I(\beta)\}$
- $V_I(\neg\alpha) = 1 - V_I(\alpha)$

Quindi un'interpretazione ci dà in un certo senso una lista di tutte le proposizioni vere e di tutte le proposizioni false. Usiamo poi i valori assegnati dall'interpretazione per determinare il valore di verità delle formule in base alla semantica che abbiamo assegnato a ciascun connettivo (che sono codificate nelle regole che abbiamo usato per definire la funzione V_I).

Definizione 7 *Sia* $\alpha \in L_{CP}$*, diremo che* α *è valida e scriveremo* $\models \alpha$ *se* $V_I(\alpha) = 1$*, per ogni interpretazione* I*.*

È noto, e una discussione approfondita di questo argomento si può trovare in [Mendelson], che è possibile definire qualsiasi tipo di operatore vero-funzionale usando solo gli operatori di negazione e disgiunzione inclusiva. Quindi, analogamente a quanto fatto per i connettivi $\wedge, \to, \leftrightarrow$, possiamo pensare di aggiungere qualsiasi operatore vero-funzionale ci venga in mente a CP definendolo in termini di $\neg$ e $\vee$. Quindi anche se dalla presentazione non sembrerebbe, in realtà in CP sono presenti tutti gli operatori vero-funzionali possibili.

1.4 Alcune proprietà importanti di CP

Terminiamo questo capitolo richiamando alcune proprietà di CP fondamentali, omettendone le dimostrazioni. Un trattamento più approfondito di questi argomenti si può trovare in [Tortora] o [Mendelson].

Esiste una procedura di decisione che data una qualsiasi formula ben formata di CP ci permette sempre di determinare in un numero finito di passi se questa è valida o no.

Inoltre vale il seguente teorema che collega l'aspetto sintattico all'aspetto semantico di CP:

Teorema di completezza

$$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha$$

Un corollario immediato del teorema di completezza è che anche l'insieme dei teoremi di CP è un insieme decidibile, infatti secondo il teorema di completezza l'insieme dei teoremi di CP e l'insieme delle formule ben formate di CP valide coincidono, quindi usando la procedura di decisione per le formule valide possiamo anche determinare le formule che sono teoremi.

2 Logica modale

Ora che abbiamo definito un sistema formale per la logica proposizionale, lo estenderemo in vari modi.

Il nostro obiettivo è avere un sistema formale nel quale possiamo definire e studiare le proprietà di due nuovi operatori unari che vorremmo avessero un comportamento che rispecchi i concetti di "necessità" e "possibilità".

Prima di cominciare facciamo delle osservazioni importanti. Ricordiamo che un operatore verofunzionale è una funzione il cui risultato è univocamente determinato dal valore di verità dei parametri da cui dipende. Inoltre, si può dimostrare che nel calcolo proposizionale si possono esprimere tutti gli operatori verofunzionali possibili in termini di $\neg e \vee$. Quindi, se gli operatori che vogliamo aggiungere fossero verofunzionali, potremmo continuare il nostro studio usando CP e non servirebbe altro. Notiamo, però, che gli operatori che vogliamo aggiungere non possono essere verofunzionali, infatti il valore di verità della frase "è necessario che p" non dipende *solo* dal valore di verità che si associ, infatti, il fatto che p sia vera, non ci permette di concludere che p sia necessariamente vera. Quindi per avere una speranza di formalizzare i concetti di necessità e possibilità siamo costretti ad estendere il sistema CP in maniera sostanziale.

A tal proposito, non è esattamente chiaro come caratterizzare formalmente le nozioni di "necessità" e "possibilità", e anzi vedremo che queste potranno essere intese in modi diversi. Questa ricchezza di significati si rifletterà in una varietà di sistemi formali più o meno potenti. Noi ci focalizzeremo in particolare su quattro sistemi formali:

- Sistema T
- Sistema S4
- Sistema S5

Questi sistemi differiscono tra di loro soltanto per gli assiomi scelti in ognuno di essi. Quindi iniziamo definendo la parte comune di tutti i sistemi formali, ovvero il linguaggio e le regole di deduzione.

L'alfabeto dei sistemi è ottenuto dall'alfabeto del sistema CP aggiungendo il simbolo $\Box$, che vorremo far corrispondere alla nozione di "necessità".

Per quanto riguarda le formule ben formate, la definizione induttiva che genera l'insieme L delle formule ben formate è ottenuta dalle regole usate per definire L in CP più la seguente regola aggiuntiva:

- Se $\alpha \in L$, allora $\Box(\alpha) \in L$

Diamo la seguente definizione, il cui intento è esprimere l'altro operatore che ci interessa, quello corrispondente alla nozione di "possibilità", in termini di $\Box$.

Definizione 8 *Se $\alpha \in L$:*

$$\diamond(\alpha) := \neg\Box\neg(\alpha)$$

Infine, per quanto riguarda le regole di deduzione, alle due di CP aggiungiamo una nuova regola, detta **Regola di necessitazione**:

$$\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha$$

Una volta definita la parte comune a tutti i sistemi a cui siamo interessati, passiamo ora ad esaminare per ogni sistema gli assiomi che lo caratterizzano.

2.1 Sistema T

Il sistema T ha come assiomi tutti gli assiomi di CP più:

- (K) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

- (T) $\Box\alpha \to \alpha$

2.2 Sistema S4

Il sistema S4 ha come assiomi tutti gli assiomi del Sistema T più il seguente assioma:

$$(S4)\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$$

2.3 Sistema S5

Il sistema S5 ha come assiomi tutti gli assiomi del Sistema T più:

$$(S5) \diamond \alpha \to \Box \diamond \alpha$$

Ora che abbiamo definito il linguaggio e l'apparato deduttivo di tutti i sistemi che ci interessano, facciamo delle osservazioni su di essi.

Definizione 9 *Diremo che un sistema formale è meno forte di un altro se tutte i teoremi del primo sono teoremi anche del secondo.*

Ovviamente, per come abbiamo costruito i nostri sistemi formali, il Sistema T è meno forte sia di S4 che di S5. Ora, però mostreremo che anche S4 è meno forte di S5. A tal fine premettiamo alcuni risultati preliminari.

Teorema $\vdash \alpha \to \diamond\alpha$ in T

Dim.

(1) $\Box\neg\alpha \to \neg\alpha$; $T[\neg\alpha/\alpha]$

(2) $\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$; Contrapposta di (1)

(3) $\alpha \to \diamond\alpha$; Definizione di $\diamond$

•

Lemma 1 $\vdash \diamond\Box x \to \Box x$ in $S5$

Dim.

(1) $\diamond\neg x \to \Box\diamond\neg x$; $S5[\neg x/\alpha]$

(2) $\neg\Box\diamond\neg x \to \neg\diamond\neg x$; contrapposta di (1)

(3) $\diamond\neg\diamond\neg x \to \neg\diamond\neg x$; definizione di $\diamond$

(4) $\diamond\Box x \to \Box x$; definizione di $\diamond$ e $\Box$

•

Teorema 1 $\vdash \Box x \to \Box\Box x$ in $S5$, ovvero il Sistema S5 è più forte del Sistema S4.

Dim.

(1) $\Box x \to \diamond\Box x$; Teorema

(2) $(\Box x \to \diamond\Box x) \to (\diamond\Box x \to \Box\diamond\Box x) \to (\Box x \to \Box\diamond\Box x)$; Teorema

(3) $\diamond x \to \Box\diamond x$; Assioma S5

(4) $\Box x \to \Box\diamond\Box x$; Due volte Modus Ponens usando (1) (2) e (3)

(5) $\diamond\Box x \to \Box x$; Lemma 1

(4) $\Box(\diamond\Box x \to \Box x)$; Necessitazione (5)

(5) $\Box(\diamond\Box x \to \Box x) \to \Box\diamond\Box x \to \Box\Box x$; Assioma K

(6) $\Box\diamond\Box x \to \Box\Box x$; Modus Ponens (4) e (5)

(7) $(\Box x \to \diamond\Box x) \to (\Box\diamond\Box x \to \Box\Box x) \to (\Box x \to \Box\Box x)$; Teorema

(8) $\Box x \to \Box\Box x$; Due volte Modus Ponens usando (1) (5) e (6)

•

2.4 Un teorema di deduzione (DA AGGIUSTARE)

In questo paragrafo proviamo a derivare un teorema di deduzione per il Sistema $S4$. Non possiamo aspettarci che il teorema di deduzione per il calcolo proposizionale CP valga, infatti la regola di deduzione di necessitazione ci porterebbe ad asserire che:

$$x \vdash \Box x \Rightarrow \vdash x \to \Box x$$

E ciò vorrebbe dire che le modalità non aggiungono nulla al sistema del calcolo proposizionale.

Se guardiamo attentamente la regola di necessitazione e la scriviamo in questo modo:

$$x \vdash \Box x$$

possiamo notare che l'ipotesi x è sufficiente per dimostrare $\Box x$ che afferma molto più che semplicemente x. Notiamo anche che la regola di necessitazione ci permette di provare

$$x \vdash \Box\Box x$$

Quindi, far semplicemente passare la x da sinistra a destra, significherebbe affermare che da ipotesi più deboli si possono comunque dedurre le stesse conclusioni. Allora possiamo provare, nello spostare la x da sinistra a destra di $\vdash$, ad aggiungere un $\Box$. Questo può bastare in sistemi come $S4$ o più potenti, perché da $\Box x$ possiamo dedurre $\Box\Box x$, $\Box\Box\Box x$, ecc... Mentre nel sistema T questo non è vero e quindi dovremo risolvere diversamente.

Recuperiamo quindi un teorema di deduzione, facendo la seguente modifica:

$$\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \Box\alpha \to \beta$$

Ora il precedente problema è facilmente risolvibile, infatti, la deduzione $x \vdash \Box x$ diventa il teorema $\vdash \Box x \to \Box x$ banalmente valido. Otteniamo però anche il seguente teorema, $\vdash \Box x \to \Box\Box x$ che è l'assioma $S4$ Ecco perché abbiamo supposto di trovarci nel sistema $S4$.

Diamo una dimostrazione di

Teorema $\alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \Box\alpha \to \beta$ in $S4$

Dim. Lasciata al lettore, è una banale modifica della dimostrazione nel caso del calcolo proposizionale. L'unica parte interessante è quella riguardante i teoremi ottenuti con la regola di necessitazione. In quel caso dobbiamo far uso dell'assioma $S4$ ed è tutto banale.

2.5 Modalità e funzioni modali

Rendiamo più formale il concetto di modalità. **Definizione** Una modalità è una successione di 0 o più di uno dei seguenti simboli: $\neg, \diamond, \Box$.

Viene da domandarci, ora, quante sono le modalità distinte che ci sono in ognuno dei sistemi che abbiamo considerato. Si può dimostrare che nel Sistema T ce ne sono infinite, mentre in $S4$ e $S5$ ce ne sono solo un numero finito.

Parleremo più approfonditamente di tali questioni solo dopo aver introdotto una semantica per il nostro linguaggio.

Definizione 1
Una funzione modale è una formula contenente almeno una funzione modale

In T ovviamente c'è un numero infinito di funzioni modali esprimibili. In $S5$ ce n'è un numero finito, mentre sorprendentemente, in $S4$ ce ne sono infinite, nonostante le modalità esprimibili siano in numero finito.

2.6 Una semantica per i sistemi di logica modale

Dopo aver definito il linguaggio comune a tutti i sistemi di logica modale introdotti, lo abbiamo usato unicamente come base di un calcolo che usa le regole di deduzione per costruire dimostrazioni. Come ben sappiamo un linguaggio può anche essere usato per parlare di qualcosa, di oggetti esterni al sistema formale. Fare ciò significa associare ad ogni formula ben formata del linguaggio un oggetto che rappresenti il suo significato. Quando seguiamo questo procedimento diciamo che abbiamo fornito una semantica per il linguaggio.

Definire semantiche per i sistemi formali ci aiuta sia a confrontare sistemi formali con strutture maggiormente conosciute e ad assicurarci che alcune costruzioni corrispondano alla nostra intuizione, sia a determinare alcune proprietà del sistema formale. E nel nostro caso ci aiuterà anche a comprendere meglio quali siano le nozioni di modali rappresentate in ciascuno dei sistemi che abbiamo definito e come differiscono tra di loro.

Come abbiamo fatto per l'apparato deduttivo, prima di dare una semantica ai nostri sistemi, partiamo ricordando come è fatta la semantica classica per CP.

Per i nostri sistemi di logica modale possiamo pensare di fare qualcosa di simile, però non possiamo aspettarci che V_I per formule del tipo $\Box\alpha$ si basi solo sul valore di $V_I(\alpha)$.

La semantica che useremo è in gran parte dovuta a Saul A. Kripke (vale la pena notare che pubblicò un teorema di completezza per i sistemi di logica modale all'età di 17 anni) e si basa su un concetto già introdotto da Leibniz, quello dei mondi possibili. Quindi non supponiamo più che esista un'unica realtà, ma che esistono tanti mondi possibili, e in più, e questa è una delle idee chiave della semantica di Kripke, da alcuni mondi si può accedere ad altri mondi, cioè sapere come sono fatte altre realtà alternative. Il mondo in cui si può accedere agli altri mondi sarà la base per distinguire tra i vari concetti di necessità e tra i vari sistemi formali che abbiamo definito prima.

2.7 Semantica per il Sistema T

Definiamo un T-modello come una tripla (W, R, I), in cui:

- W è un insieme non vuoto i cui elementi saranno chiamati mondi;

- R è una relazione binaria riflessiva su W, detta relazione di accessibilità;

- I è una funzione dall'insieme $L \times W$ all'insieme $\{0, 1\}$;

L'insieme W è l'insieme di tutti i mondi. I ci fornisce per ogni mondo la lista di proposizione vere e quella delle proposizioni false, analogamente al suo corrispettivo nella semantica per CP. R, infine, è la *relazione di accessibilità*, essa ci permette di determinare a quali mondi si può accedere da un determinato mondo. Quindi se $w_1, w_2 \in Wew_1Rw_2$, allora una persona in w_1 potrà accedere al mondo w_2 e sapere quali proposizioni sono vere in w_2. Il fatto che R sia riflessiva ci dice che l'unica garanzia che abbiamo è che ogni persona può accedere al proprio mondo, e questa è una garanzia molto scarsa.

Definiamo come prima una funzione di valutazione $V : L \times W \to \{0, 1\}$ che dipenderà da un dato T-modello (w, W, R, I).

Se $\alpha, \beta \in L$:

- $V(p, w) = I(p, w)$, $\forall p \in A$

- $V(\neg\alpha, w) = 1 - V(\alpha, w)$

- $V(\alpha \vee \beta, w) = max\{V(\alpha, w), V(\beta)\}$

- $V(\Box\alpha, w) = min\{V(\alpha, w') : wRw'\}$

Le prime tre regole sono pressoché identiche a quelle specificate per la semantica di CP, tranne per il fatto che nella prima regola usiamo la funzione I valutandola per il mondo w a cui siamo interessati.

La novità è la quarta regola, quella riguardante la semantica di $\Box$. Questa regola afferma che nel mondo w, α è necessariamente vera se e solo se è α vera in tutti i mondi accessibili da w.

Diciamo che una formula α è T-valida e scriviamo $\models \alpha$ se per ogni T-modello (w, W, R, I) $\forall w \in W. V(\alpha, w) = 1$.

Ci occupiamo adesso di mostrare che tutti i teoremi del sistema T sono formule valide nella semantica che abbiamo fornito.

Teorema di adeguatezza per T $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ in T

Dim.

Premettiamo alla dimostrazione vera e propria le seguenti osservazioni:

Se (W, R, I) è un T-modello, $w \in W$ e $\alpha, \beta \in L$, allora:

$V(\alpha \to \beta, w) = V(\neg\alpha \vee \beta, w) = 0$ se e solo se $V(\neg\alpha, w) = 0$ e $V(\beta, w) = 0$, ovvero, se e solo se $V(\alpha, w) = 1$ e $V(\beta, w) = 0$.

Se poi $V(\alpha \to \beta, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$, allora, se fosse $V(\beta, w) = 0$, per quanto detto prima avremmo $V(\alpha \to \beta, w) = 1$, ma ciò è assurdo, quindi deve essere $V(\beta, w) = 1$.

Occupiamoci ora di dimostrare il teorema di adeguatezza, la strategia che seguiremo è la seguente: mostriamo che tutti gli assiomi sono T-validi e che le regole di deduzione conservano la T-validità. Di conseguenza per le condizioni che abbiamo dato sulle formule ben formate che formano una dimostrazione, deduciamo che tutte le formule ben formate che appaiono in una dimostrazione sono T-valide ed in particolare l'ultima formula della sequenza finita è T-valida. Questo sarà sufficiente per giungere alla tesi.

Iniziamo col mostrare che tutti gli assiomi sono T-validi:

Mostriamo che $\models \Box\alpha \to \alpha$:

Se (W, R, I) è un T-modello, per quanto visto in precedenza abbiamo che: $V(\Box\alpha \to \alpha, w) = 0 \Leftrightarrow V(\Box\alpha, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$. Siccome R è una relazione riflessiva, dalla definizione di V segue che: $V(\Box\alpha, w) <= V(\alpha, w)$ e quindi se $V(\Box\alpha, w) = 1$, si ha anche che $V(\alpha, w) = 1$ e quindi otteniamo che $\forall w \in W. V(\Box\alpha \to \alpha, w) = 1$ e per l'arbitrarietà del T-modello otteniamo l'asserto.

Mostriamo che $\models \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$:

Se (W, R, I) è un T-modello, come prima abbiamo che:

$V(\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta), w) = 0 \Leftrightarrow V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$ e

$V(\Box\alpha \to \Box\beta, w) = 0$.

Se $V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$, allora: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha \to \beta, w') = 1$ Se fosse $V(\Box\alpha, w) = 1$ e $V(\Box\beta, w) = 0$, allora si avrebbe la seguente situazione: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha, w') = 1$. Quindi avremmo che: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha \to \beta, w') = 1$ e $V(\alpha, w') = 1$, dunque per l'osservazione precedente si avrebbe: $\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\beta, w') = 1$ e perciò $V(\Box\beta, w) = 1$, il che è assurdo.

Quindi se $V(\Box(\alpha \to \beta), w) = 1$, deve essere $V(\Box\alpha \to \Box\beta, w) = 1$, e quindi per l'arbitrarietà di w e del T-modello otteniamo l'asserto.

Ci resta da verificare la T-validità degli assiomi derivanti dagli schemi di assiomi ereditati da CP. Gli assiomi di CP sono ottenuti sostituendo in modo uniforme le metavariabili con formule del linguaggio L_{CP}. Per il teorema di completezza per CP, tutti gli assiomi sono formule valide per CP, questo significa che fissata un'interpretazione I per CP, non importa quale sia il valore di verità delle formule sostituite nello schema, l'assioma risultante sarà sempre vero.

Quindi, poiché, una volta forniti i valori di verità per α e β, le regole per determinare i valori di verità delle formule $\neg\alpha$ e $\alpha \vee \beta$ sono le stesse sia per CP che per il sistema T ($\neg$ e $\vee$ sono interpretati allo stesso modo sia in T che in CP) e poiché gli schemi di assiomi ereditati da CP contengono solo $\neg$ e $\vee$ come connettivi (gli altri connettivi di CP sono definiti in termini di questi due), possiamo dedurre che tutte le possibili sostituzioni uniformi di formule di L negli schemi di assiomi derivati da CP forniscono formule

ancora valide.
Ora dimostriamo che il *Modus Ponens* conserva la validità:
Se $\alpha \to \beta$ e α sono T-valide, allora fissato un T-modello (W, R, I),
$\forall w \in W.V(\alpha \to \beta, w) = 1$ e $V(\alpha, w) = 1$. Allora per l'osservazione che abbiamo fatto prima otteniamo che: $\forall w \in W.V(\beta, w) = 1$. Per l'arbitrarietà del T-modello otteniamo l'asserto.
Infine dimostriamo che la regola di necessitazione conserva la validità:
Fissato un T-modello (W, R, I) e un mondo $w \in W$, se α è T-valida, allora $\forall w' \in W.V(\alpha, w') = 1$, quindi in particolare si ha:
$\forall w' \in W.wRw' \Rightarrow V(\alpha, w') = 1$. Quindi $V(\Box\alpha, w) = 1$ e per l'arbitrarietà di w e del T-modello otteniamo l'asserto.

•

2.8 Semantica per i sistemi S4 e S5

Con leggere modifiche alla definizione di T-modello possiamo costruire delle semantiche anche per i sistemi S4 e S5.

Definizione 10 *Un S4-modello è un T-modello* (W, R, I) *in cui* R *oltre ad essere riflessiva è anche transitiva.*

Definizione 11 *Un S5-modello è un T-modello* (W, R, I) *in cui* R *è la relazione di equivalenza totale (e in particolare è una relazione di equivalenza), vale a dire che si ha:* $\forall w_1, w_2 \in W.w_1Rw_2$.

Teorema di adeguatezza per S4 $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ in $S4$
Dim. Siccome un S4-modello è anche un T-modello e poiché ogni teorema del Sistema T è anche un teorema del Sistema S4, possiamo sfruttare il

teorema di adeguatezza per T e dimostrare qui solo che l'assioma $S4$ è una formula valida:
Se (W, R, I) è un S4-modello e $w \in W$, se $V(\Box\alpha, w) = 1$, allora $\forall w_1 \in W.wRw_1 \Rightarrow V(\alpha, w_1) = 1$, quindi poiché R è riflessiva e transitiva se $w_1, w_2 \in W$ e wRw_1, w_1Rw_2, risulta wRw_2, quindi per ipotesi, $\forall w_2 \in W.w_1Rw_2 \Rightarrow V(\alpha, w_2) = 1$, quindi $V(\Box\alpha, w_1) = 1$ e perciò $\forall w_1 \in W.wRw_1 \Rightarrow V(\Box\alpha, w_1) = 1$, dunque $V(\Box\Box\alpha, w) = 1$. Per l'arbitrarietà di w e dell'S4-modello abbiamo la tesi.

•

Teorema di adeguatezza per S4 $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ in $S5$
Dim. Siccome un S5-modello è anche un T-modello e poiché ogni teorema del Sistema T è anche un teorema del Sistema S5, possiamo sfruttare il teorema di adeguatezza per T e dimostrare qui solo che l'assioma $S5$ è una formula valida:
Se (W, R, I) è un S5-modello e $w \in W$,
se $V(\diamond\alpha, w) = 1$, allora $\exists w_1 \in W.wRw_1$ e $V(\alpha, w_1) = 1$,
Se $w_2 \in W$ e wRw_2, allora siccome R è simmetrica, w_2Rw e poiché è transitiva w_2Rw_1, ma $V(\alpha, w_1) = 1$, quindi $\exists w_1 \in W.w_2Rw_1$ e $V(\alpha, w_1) = 1$, cioè $V(\diamond\alpha, w_2) = 1$.
Ciò ci permette di affermare che $\forall w_2 \in W.wRw_2 \Rightarrow V(\diamond\alpha, w_2) = 1$ e quindi $V(\Box \diamond \alpha, w) = 1$. Per l'arbitrarietà di w e dell'S5-modello otteniamo la tesi.

•

2.9 Proprietà dei sistemi T, S4, S5

I teoremi di adeguatezza che abbiamo dimostrato ci dicono che ogni teorema è anche una formula valida per i vari sistemi. Questo significa che il concetto di semantico di validità che abbiamo poco fa definita si concilia bene con quello di dimostrabilità. Ciò è una buona assicurazione circa la bontà delle semantiche.

Il teorema di adeguatezza ci permette di dimostrare varie importanti proprietà tramite strumenti semantici e che sarebbero difficili da dimostrare usando solo l'apparato deduttivo.

Teorema S4 e T sono due sistemi distinti, ovvero l'assioma S4 non è una tesi del sistema T.
Dim.
In virtù del teorema di adeguatezza se troviamo un T-modello nel quale l'assioma S4 sia falso, potremo dedurre che S4 non può essere un teorema del sistema T.
Consideriamo 3 mondi $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- w_1Rw_2;
- w_2Rw_3;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W. I(x, w) = 0$;
- $I(p, w_1) = I(p, w_2) = 1$;
- $I(p, w_3) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un T-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva.
Inoltre $V(p, w_1) = V(p, w_2) = 1$ e $V(p, w_3) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\Box p, w_1) = 1$, mentre $V(\Box p, w_2) = 0$. Quindi $\Box p$ non è vera in tutti i mondi accessibili da w_1 e quindi $V(\Box\Box p, w_1) = 0$ e perciò: $V(\Box p \to \Box\Box p, w_1) = 0$. Quindi $\Box p \to \Box\Box p$ non è una formula valida per il sistema T e quindi non è dimostrabile. Nel sistema S4 invece è un'istanza dell'assioma (S4) e quindi è banalmente dimostrabile. Possiamo perciò concludere che i sistemi S4 e T non hanno gli stessi teoremi e quindi non sono lo stesso sistema formale.

Corollario S5 e T sono due sistemi distinti
Dim.
Abbiamo dimostrato in precedenza che l'assioma (S4) è una tesi di S5 e quindi per il teorema precedente, S5 ha più tesi di T.

Teorema S5 e S4 sono due sistemi distinti, ovvero l'assioma S5 non è una tesi del sistema S4.
Dim.
In virtù del teorema di adeguatezza se troviamo un S4-modello nel quale l'assioma S5 sia falso, potremo dedurre che S5 non può essere un teorema del sistema S4.
Consideriamo 2 mondi $W = \{w_1, w_2\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- $w_1 R w_2$;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W.I(x, w) = 0$;
- $I(p, w_1) = 1$;
- $I(p, w_2) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un S4-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva e transitiva.
Inoltre $V(p, w_1) = 1$ e $V(p, w_2) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\diamond p, w_1) = 1$, mentre $V(\diamond p, w_2) = 0$. Quindi $\diamond p$ non è vera in tutti i mondi accessibili da w_1 e quindi $V(\Box \diamond p, w_1) = 0$ e perciò:
$V(\diamond p \rightarrow \Box \diamond p, w_1) = 0$. Quindi $\diamond p \rightarrow \Box \diamond p$ non è una formula valida per il sistema S4 e quindi non è dimostrabile. Nel sistema S5 invece è un'istanza dell'assioma (S5) e quindi è banalmente dimostrabile. Possiamo perciò concludere che i sistemi S5 e S4 non hanno gli stessi teoremi e quindi non sono lo stesso sistema formale.

In definitiva abbiamo dimostrato che i sistemi T, S4 e S5 sono tre sistemi distinti e questo significa che presentano tre nozioni diverse di "necessità" e "possibilità".

Forniamo, infine quest'ultima dimostrazione:

Teorema Esiste $\alpha \in L$, tale che $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ non è una tesi di T (e quindi nemmeno di S4 e S5)
Dim.
Costruiamo un T-modello in cui $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ è falsa.
Consideriamo 2 mondi $W = \{w_1, w_2\}$, e definiamo la relazione di accessibilità in questo modo:

- $wRw, \forall w \in W$;
- $w_1 R w_2$;
- Non ci sono altre relazioni tra mondi.

Siccome A è non vuoto, esiste $p \in A$ e definiamo la seguente interpretazione I :

- Se $x \in A \setminus \{p\}, \forall w \in W. I(x, w) = 0$;
- $I(p, w_1) = 1$;
- $I(p, w_2) = 0$.

È facile vedere che (W, R, I) è un T-modello, infatti W è non vuoto e R è una relazione binaria riflessiva.
Inoltre $V(p, w_1) = 1$ e $V(p, w_2) = 0$, quindi per come è definita la relazione di accessibilità, $V(\Box p, w_1) = 1$, perciò: $V(p \to \Box p, w_1) = 0$. Quindi $\diamond p \to \Box \diamond p$ non è una formula valida per il sistema T e quindi non è dimostrabile. Abbiamo ottenuto così la tesi.

Nei sistemi di logica modale in cui per ogni $\alpha \in L$ vale $\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$ si dice che avviene il collasso delle modalità. Questi sistemi sono solo una versione barocca, con simboli inutili, di un sistema formale per il calcolo proposizionale: gli operatori modali sono inutili, infatti la formula precedente ci dice che affermare $\Box\alpha$ è esattamente lo stesso che affermare α e quindi non aggiungono niente di nuovo.

Il teorema che abbiamo appena dimostrato ci assicura che nei sistemi definiti non avviene il collasso delle modalità e che quindi gli operatori modali introdotti non sono solo inutili orpelli che non aggiungono niente a CP.