I Sistemi di Logica Modale T, S4, S5:

Sintassi e Semantica

Francesco Magliocca

18/12/2019

Calcolo Proposizionale

Introduciamo un sistema formale per il Calcolo Proposizionale che chiameremo CP.

Calcolo Proposizionale: L'alfabeto

Sia A insieme numerable disgiunto da $\{\neg, \vee, (,)\}$ e contenente almeno tre elementi che indicheremo con p, q, r.
Chiamiamo l'insieme $\Sigma = A \cup \{\neg, \vee, (,)\}$ *alfabeto* e gli elementi di A *variabili proposizionali*.

Calcolo Proposizionale: Il linguaggio

L'insieme delle formule ben formate (fbf) L_{CP} è il più piccolo sottoinsieme di $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ tale che:

- $x \in A \Rightarrow x \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP} \Rightarrow \neg(\alpha) \in L_{CP}$;
- $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP} \Rightarrow (\alpha) \vee (\beta) \in L_{CP}$.

Calcolo proposizionale: Connettivi aggiuntivi

Se $\alpha \in L_{CP}$ e $\beta \in L_{CP}$, allora diamo le seguenti definizioni:

- $(\alpha) \wedge (\beta) := \neg(\neg(\alpha) \vee \neg(\beta))$;
- $(\alpha) \rightarrow (\beta) := (\neg(\alpha)) \vee (\beta)$;
- $(\alpha) \leftrightarrow (\beta) := ((\alpha) \rightarrow (\beta)) \wedge ((\beta) \rightarrow (\alpha))$.

Calcolo Proposizionale: Gli assiomi

- HPD: $p \to (q \to p)$
- HPMP: $(r \to (p \to q)) \to (r \to p) \to (r \to q)$
- $\vee$-I1: $p \to (p \vee q)$
- $\vee$-I2: $q \to (p \vee q)$
- $\vee$-E: $(p \to r) \to (q \to r) \to (p \vee q \to r)$
- $\wedge$-I: $p \to q \to p \wedge q$
- $\wedge$-E1: $p \wedge q \to p$
- $\wedge$-E2: $p \wedge q \to q$
- $\neg$-I: $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \to \neg p$
- TER: $p \vee \neg p$

Calcolo Proposizionale: Le regole di deduzione

1. Modus Ponens:

$$\frac{\alpha \to \beta \;\; \alpha}{\beta}$$

2. Regola di sostituzione:
   Se $\alpha \in L_{CP}$, $x \in A$ e $\beta \in L_{CP}$, allora la formula $\alpha[x/\beta]$ ottenuta sostituendo uniformemente β al posto di x all'interno di α è una conseguenza di α.

Calcolo Proposizionale: Dimostrazioni

Una dimostrazione è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa una delle seguenti condizioni

- D_i è un assioma;
- esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per *Modus Ponens* da D_h e D_k.
- esiste D_h, con $h < i$, tale che D_i è derivato tramite la regola di *sostituzione* a partire da D_h.

Se $\alpha \in L_{CP}$ ed esiste una dimostrazione D il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una dimostrazione di α e scriviamo $\vdash \alpha$.

Calcolo Proposizionale: Semantica

Chiamiamo *interpretazione* una funzione $I : A \to \{0,1\} \subset \mathbb{N}$ Data un'interpretazione I definiamo la funzione $V_I : L_{CP} \to \{0,1\} \subset \mathbb{N}$ come segue:

- $V_I(x) = I(x)$, $\forall x \in A$
- $V_I((\alpha) \vee (\beta)) = max\{V_I(\alpha), V_I(\beta)\}$
- $V_I(\neg(\alpha)) = 1 - V_I(\alpha)$

Sia $\alpha \in L_{CP}$, diciamo che α è *valida* e scriviamo $\models \alpha$ se $V_I(\alpha) = 1$, per ogni interpretazione I.

Calcolo Proposizionale: Semantica

Tutti i connettivi presenti in CP sono interpretati come operatori vero-funzionali.

Calcolo Proposizionale: Semantica

Chiamiamo *interpretazione* una funzione $I : A \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ Data un'interpretazione I definiamo la funzione $V_I : L_{CP} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ come segue:

- $V_I(x) = I(x), \forall x \in A$
- $V_I((\alpha) \vee (\beta)) = max\{V_I(\alpha), V_I(\beta)\}$
- $V_I(\neg(\alpha)) = 1 - V_I(\alpha)$

Calcolo Proposizionale: Teorema di Completezza

Per il sistema *CP* vale il seguente importante risultato, chiamato *Teorema di Completezza*:
Per ogni $\alpha \in L_{CP}$ si ha:

$$\vdash \alpha \Leftrightarrow \models \alpha$$

Logica Modale

Estendiamo il sistema CP in modo da introdurre due nuovi connettivi, $\Box$ e $\Diamond$ corrispondenti alle nozioni di *necessità* e *possibilità*.

Logica Modale: Sulla vero-funzionalità di $\Box$ e $\Diamond$

È noto che qualsiasi operatore vero-funzionale sia definibile in termini di negazione e disgiunzione. Quindi se $\Box$ e $\Diamond$ fossero interpretabili come operatori vero-funzionali, potremmo semplicemente aggiungerli come connettivi derivati in CP senza aggiungere altro.

Logica Modale: Sulla vero-funzionalità di $\Box$ e $\Diamond$

Ma così non è!
Infatti non basta sapere che "Vincenzo è ricco" è vera per esprimersi circa la verità dell'affermazione "È necessario che Vincenzo sia ricco".
Dobbiamo allora estendere CP in maniera sostanziale.

Logica Modale: I Sistemi

Non c'è un unico sistema per la logica modale, anzi ce ne sono molti. Ne presentiamo tre:

1. Sistema T
2. Sistema S4
3. Sistema S5

Sistema T: L'alfabeto

Estendiamo l'alfabeto di CP aggiungendo il simbolo $\Box$, quindi chiamiamo l'insieme $\Sigma_1 = A \cup \{\neg, \vee, \Box, (,)\}$ alfabeto

Sistema T: Il linguaggio

L'insieme delle formule ben formate (fbf) L è il più piccolo sottoinsieme di $\Sigma_1^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_1^n$ tale che:

- $x \in A \Rightarrow x \in L$;
- $\alpha \in L \Rightarrow \neg(\alpha) \in L$;
- $\alpha \in L$ e $\beta \in L \Rightarrow (\alpha) \vee (\beta) \in L$;
- $\alpha \in L \Rightarrow \Box(\alpha) \in L$.

Sistema T: Connettivi aggiuntivi

Se $\alpha \in L$, allora diamo la seguente definizione:

$$\Diamond(\alpha) := \neg(\Box(\neg(\alpha)))$$

Sistema T: Regole di deduzione

1. Modus Ponens:

$$\frac{\alpha \to \beta \;\; \alpha}{\beta}$$

2. Regola di sostituzione:
   Se $\alpha \in L$, $x \in A$ e $\beta \in L$, allora la formula $\alpha[x/\beta]$ ottenuta sostituendo uniformente β al posto di x all'interno di α è una conseguenza di α.

3. Regola di necessitazione:

$$\frac{\alpha}{\Box alpha}$$

Sistema T: Assiomi

Gli assiomi del Sistema T sono tutti gli assiomi di CP più i seguenti:

- T: $\Box p \to p$
- K: $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Sistema S4

Il Sistema S4 è ottenuto aggiungendo al Sistema T l'assioma S4:

$$\Box p \rightarrow \Box\Box p$$

Sistema S5

Il Sistema S5 è ottenuto aggiungendo al Sistema T l'assioma S5:

$$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$$

Logica Modale: Dimostrazioni

Una dimostrazione in un sistema S ($\in \{T, S4, S5\}$) è una sequenza finita D di fbf tale che ogni termine D_i della sequenza soddisfa una delle seguenti condizioni

- D_i è un assioma di S;
- esistono D_h, D_k, con $h < i, k < i$, tali che D_i è derivato per *Modus Ponens* da D_h e D_k.
- esiste D_h, con $h < i$, tale che D_i è derivato tramite la regola di *sostituzione* a partire da D_h.
- esiste D_h, con $h < i$, tale che D_i è derivato tramite la regola di *necessitazione* a partire da D_h.

Se $\alpha \in L$ ed esiste una dimostrazione D in un sistema S il cui ultimo termine è α, diciamo che esiste una dimostrazione di α e scriviamo $\vdash_S \alpha$.

Relazioni tra i sistemi T, S4, S5

Definizione

Diremo che un sistema formale è meno forte di un altro se tutti i teoremi del primo sono teoremi anche del secondo.

Nota

È ovvio che CP è meno forte del Sistema T, che è meno forte sia del sistema $S4$ che del sistema $S5$.

Relazioni tra i sistemi T, S4, S5 II

Teorema

$\vdash \Box p \rightarrow \Box\Box p$ *in S5, ovvero il Sistema S5 è più forte del Sistema S4.*

Logica Modale: Semantica

Un modello di Kripke è una terna (W, R, I) costituita da:

- W insieme non vuoto i cui elementi sono detti *mondi*;
- R relazione binaria su W detta *relazione di accessibilità*;
- $I : A \times W \to \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ detta *interpretazione*.

Logica Modale: Semantica II

Dato un modello di Kripke $K = (W, R, I)$ definiamo la funzione $V_K : L \times W \to \{0, 1\}$ come segue. Fissato $w \in W$:

- $V(x, w) = I(x, w), \forall x \in A$
- $V(\neg(\alpha), w) = 1 - V(\alpha, w)$
- $V((\alpha) \vee (\beta), w) = max V(\alpha, w), V(\beta, w)$
- $V(\Box(\alpha), w) = min\{V(\alpha, w') : w' \in W \text{ e } wRw'\}$

Sistema T: Semantica

Chiamiamo T-modello un modello di Kripke in cui la relazione di *accessibilità* sia **riflessiva**.
Se $\alpha \in L$, diciamo che α è T-valida e scriviamo $\models_T \alpha$ se per ogni T-modello $K = (W, R, I)$ si ha $\forall w \in W. V_K(\alpha, w) = 1$.

Sistema S4: Semantica

Chiamiamo S4-modello un modello di Kripke in cui la relazione di *accessibilità* sia **riflessiva** e **transitiva**.
Se $\alpha \in L$, diciamo che α è S4-valida e scriviamo $\models_{S4} \alpha$ se per ogni S4-modello $K = (W, R, I)$ si ha $\forall w \in W. V_K(\alpha, w) = 1$.

Sistema S5: Semantica

Chiamiamo S5-modello un modello di Kripke in cui la relazione di *accessibilità* sia la relazione binaria totale su W.
Se $\alpha \in L$, diciamo che α è S5-valida e scriviamo $\models_{S5} \alpha$ se per ogni S5-modello $K = (W, R, I)$ si ha $\forall w \in W. V_K(\alpha, w) = 1$.

T, S4, S5: Teorema di adeguatezza

Per tutti e tre i sistemi vale il teorema di adeguatezza che afferma:
Per ogni formula $\alpha \in L$:

$$\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$$

Collasso nel calcolo proposizionale

In nessun sistema è dimostrabile la formula $p \to \Box p$
quindi non è un teorema la formula $p \leftrightarrow \Box p$ in nessun sistema.

Collasso nel calcolo proposizionale

Basta costruire un $S5$-modello come segue:

- $W = \{w_1, w_2\}$;
- $R = WxW$;
- $I(1, w_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = p \text{ e } w = w_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Sistema T: Procedura di decisione

Data $\alpha \in L$, cerchiamo un T-modello che falsifichi α, ovvero un T-modello K in cui esista un mondo w tale che:

$$V_K(\alpha, w) = 0$$

.

Rappresentiamo graficamente questo procedimento con dei diagrammi detti T-diagrammi

Sistema T: Procedura di decisione

$$w_1 \quad \boxed{\Diamond(p \wedge \Diamond q) \underset{0}{\rightarrow} (\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box q)}$$

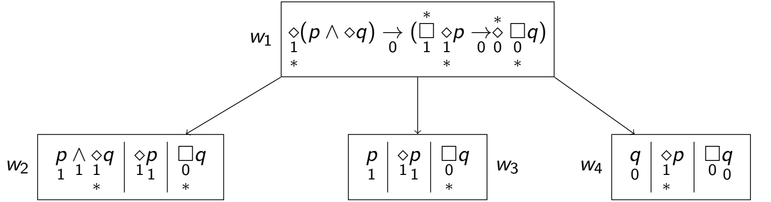
Sistema T: Procedura di decisione

$$w_1 \quad \boxed{\underset{\underset{*}{1}}{\Diamond}(p \wedge \Diamond q) \underset{0}{\rightarrow} (\overset{*}{\underset{1}{\Box}} \Diamond p \underset{0}{\rightarrow} \overset{*}{\underset{0}{\Diamond}} \Box q)}$$

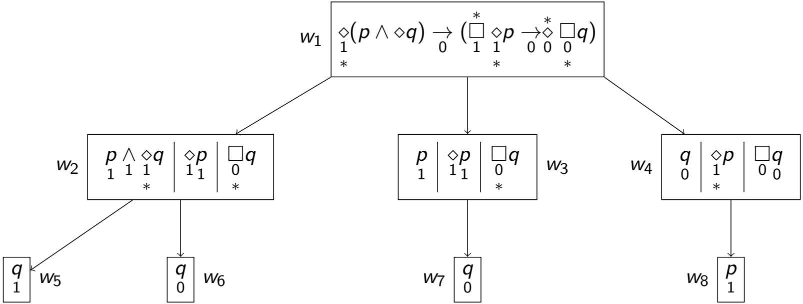
Sistema T: Procedura di decisione

$$w_1 \quad \boxed{\underset{\underset{*}{1}}{\Diamond}(p \wedge \Diamond q) \underset{0}{\rightarrow} (\overset{*}{\underset{1}{\Box}}\, \underset{\underset{*}{1}}{\Diamond} p \underset{0}{\rightarrow} \overset{*}{\underset{0}{\Diamond}}\, \underset{\underset{*}{0}}{\Box} q)}$$

Sistema T: Procedura di decisione



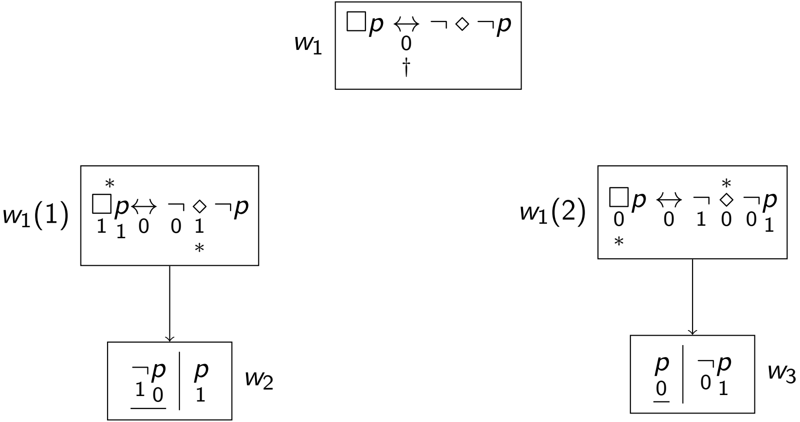
Sistema T: Procedura di decisione



Sistema T: Procedura di decisione II

$$w_1 \quad \boxed{\Box p \underset{0}{\leftrightarrow} \neg \Diamond \neg p}$$

Sistema T: Procedura di decisione II



Sistema T: Procedura di decisione III

Data una formula $\alpha \in L$, una volta seguita tutta la procedura diciamo che abbiamo ottenuto un sistema completo di T-diagrammi per α.

Sistema T: Teorema di completezza

Data una formula $\alpha \in L$ costruiamo il suo sistema completo di T-diagrammi. Ad ogni rettangolo w_i associamo la formula:

$$w_i' := \gamma \vee \neg\beta_1 \vee \ldots \vee \neg\beta_n$$

Sistema T: Teorema di completezza

Lemma 1

Dato un sistema completo di T-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo, se β è una sottoformula di w_i' e a β è assegnato univocamente il valore di verità falso nel rettangolo w_i, allora $\vdash \beta \rightarrow w_i'$ in T
Se invece a β è associato il valore di verità vero, allora $\vdash \neg\beta \rightarrow w_i'$ in T

Sistema T: Teorema di completezza

Lemma 2

Dato un sistema completo di T-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo in cui non ci sono operatori contrassegnati con †, se in w_i c'è un'inconsistenza, allora $\vdash w_i'$ in T.

Sistema T: Teorema di completezza

Lemma 3

Dato un sistema completo di T-diagrammi e sia w_i un suo rettangolo in cui non ci sono operatori contrassegnati con †, se in w_i c'è un'inconsistenza, allora $\vdash w_i'$ in T.

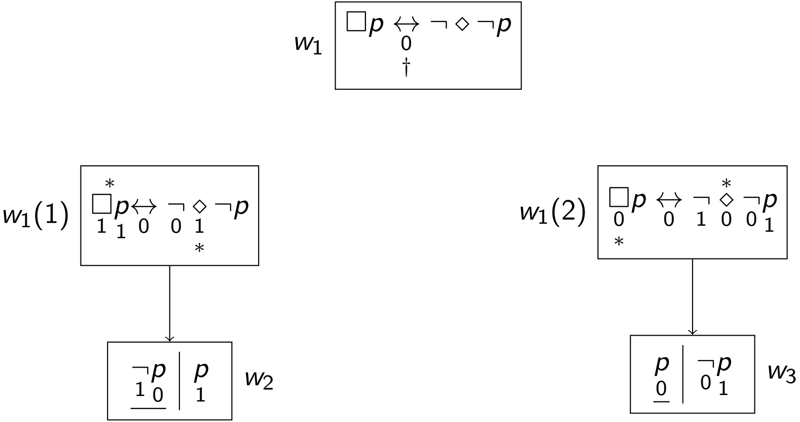
Sistema T: Teorema di completezza

Lemma 4

Se nel rettangolo w_i c'è un operatore contrassegnato con † e $w_i(1), w_i(2), w_i(3)$ sono i suoi rettangoli alternativi:

$$\vdash w_i(1)', \vdash w_i(2)', \vdash w_i(3)' \rightarrow \vdash w_i'$$

Sistema T: Teorema di completezza



Sistema T: Teorema di completezza

Se $\alpha \in L$ e $\models_T \alpha$, nel sistema completo di T-diagrammi di α c'è sicuramente un'inconsistenza. Sfruttando i lemmi che abbiamo enunciato poc'anzi si riesce a mostrare che w_1' è un teorema, ma per costruzione w_1' è α. Quindi otteniamo:

$$\vdash_T \alpha \Leftrightarrow \models_T \alpha$$

Grazie per l'attenzione.