Week3 Problem

1.1 不选主元与列主元 Gauss 消去法的比较

考虑下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 8 & 6 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 8 & 6 & 1 \\ & & & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \\ \vdots \\ 15 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{1}$$

已知精确解是 $x^* = (1, \cdots, 1)^T$。对于数值解，我们定义其与精确解的误差的l^2范数和l^∞范数 $||x^* - x||_2$，$||x^* - x||_\infty$ 为

$$||x^* - x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i^* - x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad ||x^* - x||_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|x_i^* - x_i|\} \tag{2}$$

现分别取 $n = 2, 12, 24, 48, 84$，分别采用 Gauss 消去法和列主元 Gauss 消去法求解上述方程组，计算数值解与精确解的误差的两种范数，并将误差随n的变化用表格或者图像进行展示，由此谈谈你对Gauss 消去法的看法。

1.2 Gauss 消去法、平方根法与带状平方根法的比较

利用五点差分格式去近似求解 Dirichlet 边界的二维 Possion 方程

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, & (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$，源函数 $f = 2\pi^2 sin(\pi x) sin(\pi y)$，真解 $u = sin(\pi x) sin(\pi y)$。

对于区域进行均匀剖分，沿x轴和沿y轴方向分别以间距 h_x 和 h_y 来进行等分，在这里只考虑 $h = h_x = h_y = \frac{1}{N}$ 的N等分情况。对于 $1 \le i, j \le N+1$, 记 $x_i = (i-1)h_x$，$y_j = (j-1)h_y$ 以及 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$，$f_{i,j} = f(x_i, y_j)$。

当 (x_i, y_j) 为Ω内部点时，即 $2 \le i, j \le N$，利用二阶中心差分格式去近似 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}, \tag{5}$$

进而得到近似方程

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \approx h^2 f_{i,j}, \quad 2 \le i, j \le N. \tag{6}$$

再由边界条件，可知

$$u_{1,j} = u_{N+1,j} = u_{i,1} = u_{i,N+1} = 0, \quad 1 \le i, j \le N+1. \tag{7}$$

令 $U_{i,j}$ 为如下方程组的数值解，$1 \le i, j \le N+1$

$$\begin{cases} 4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = h^2 f_{i,j}, & 2 \le i, j \le N, \\ U_{1,j} = U_{N+1,j} = U_{i,1} = U_{i,N+1} = 0, & 1 \le i, j \le N+1. \end{cases} \tag{8}$$

那么 $U_{i,j}$，$2 \le i, j \le N$ 可视为 $u_{i,j}$ 的数值近似，其中需求解的未知数只有内部点 $U_{i,j}$，将其按列排列成一个向量

$$U_h = (U_{2,2}, U_{2,3}, \ldots, U_{2,N}, U_{3,2}, U_{3,3}, \ldots, U_{3,N}, \ldots, U_{N,2}, U_{N,3}, \ldots, U_{N,N})^T, \tag{9}$$

同时将 $f_{i,j}$ 也按列排列成一个向量

$$F_h = (f_{2,2}, f_{2,3}, \ldots, f_{2,N}, f_{3,2}, f_{3,3}, \ldots, f_{3,N}, \ldots, f_{N,2}, f_{N,3}, \ldots, f_{N,N})^T, \tag{10}$$

可以得到一个关于 U_h 的线性方程组

$$A_h U_h = h^2 F_h \tag{11}$$

其中

$$A_h = \begin{bmatrix} X & -I & & & \\ -I & X & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & X & -I \\ & & & -I & X \end{bmatrix}_{(N-1)^2 \times (N-1)^2} \tag{12}$$

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)} \tag{13}$$

为了衡量数值解的精度，我们定义离散误差为

$$e_N = h\left(\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} |u_{i,j} - U_{i,j}|^2\right)^{1/2} \tag{14}$$

对于 $N = 16, 32, 64, 128, 256$ 时，分别利用 Gauss 消去法、LDL^T 方法与带状 LDL^T 方法求解上述线性方程组，将不同算法的计算求解时间与计算误差通过表格或图像进行展示， 由此来比较、分析各情况、方法的效果。

截止时间为10月13日下午15:00，需要同时提交代码和上机报告，上机报告需使用LaTeX 或Markdown完成，并提交 PDF 文档，总页数不得超过10页。在提交上机作业时，需将代码、上机报告源码、上机报告打包为 zip压缩包，作为附件发送至邮箱 `2501110054@stu.pku.edu.cn`，其中邮件名、压缩包、上机报告需按“数值代数+第一次上机作业+姓名+学号(.zip/.pdf)" 的格式命名，如：“数值代数+第一次上机作业+许盛+2501110054(.zip/.pdf)”。