大作业

许盛飏

本次作业来自课件《**V-cycle**》。

1 Stokes 方程与交错网格上的 MAC 格式

考虑 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\Delta\vec{\boldsymbol{u}} + \nabla p = \vec{\boldsymbol{F}}, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ \operatorname{div}\vec{\boldsymbol{u}} = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \end{cases} \tag{1}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} &= b, \quad y=0, & \frac{\partial u}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} &= t, \quad y=1, \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} &= l, \quad x=0, & \frac{\partial v}{\partial \vec{\boldsymbol{n}}} &= r, \quad x=1, \\ u &= 0, \quad x=0,1, & v &= 0, \quad y=0,1, \end{aligned}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{u}} = (u,v)$ 为速度, p 为压力, $\vec{\boldsymbol{F}} = (f,g)$ 为外力, $\vec{\boldsymbol{n}}$ 为外法向方向.

利用交错网格上的 MAC 格式离散 Stokes 方程 (1), 可得到如下线性方程组

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

2 数值算例

在区域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ 上, 外力为

$$\begin{aligned} f(x,y) =& -4\pi^2(2\cos(2\pi x)-1)\sin(2\pi y) + x^2, \\ g(x,y) =& 4\pi^2(2\cos(2\pi y)-1)\sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Stokes 方程 (1) 的真解为

$$\begin{aligned} u(x,y) =&(1-\cos(2\pi x))\sin(2\pi y),\\ v(x,y) =&-(1-\cos(2\pi y))\sin(2\pi x),\\ p(x,y) =&\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

利用这些真解可以计算出所有边界条件.

3 大作业要求

1. 分别取 $N=64,128,256,512,1024,2048$, 以 DGS 为磨光子, 用基于 V-cycle 的多重网格方法求解离散问题 $(*)$, 停机标准为 $\|\boldsymbol{r}_h\|_2/\|\boldsymbol{r}_0\|_2 \le 10^{-8}$, 对不同的 ν_1,ν_2,L, 比较 V-cycle 的次数和 CPU 时间, 并计算误差

$$e_N = h\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left|u_{i,j-\frac12}-u(x_i,y_{j-\frac12})\right|^2+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left|v_{i-\frac12,j}-v(x_{i-\frac12},y_j)\right|^2\right)^{\frac12}.$$

2. 分别取 $N=64,128,256,512$, 以 Uzawa Iteration Method 求解离散问题 $(*)$, 停机标准为 $\|\boldsymbol{r}_h\|_2/\|\boldsymbol{r}_0\|_2 \le 10^{-8}$, 并计算误差

$$e_N = h\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left|u_{i,j-\frac12}-u(x_i,y_{j-\frac12})\right|^2+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left|v_{i-\frac12,j}-v(x_{i-\frac12},y_j)\right|^2\right)^{\frac12}.$$

3. 分别取 $N=64,128,256,512,1024,2048$, 以 Inexact Uzawa Iteration Method 为迭代法求解离散问题 $(*)$, 停机标准为 $\|\boldsymbol{r}_h\|_2/\|\boldsymbol{r}_0\|_2 \le 10^{-8}$, 其中以 V-cycle 多重网格方法为预条件子, 利用共轭梯度法求解每一步的子问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{k+1}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_k$, 对不同的 $\alpha,\tau,\nu_1,\nu_2,L$, 比较外循环的迭代次数和 CPU 时间, 并计算误差

$$e_N = h\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N-1}\left|u_{i,j-\frac12}-u(x_i,y_{j-\frac12})\right|^2+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left|v_{i-\frac12,j}-v(x_{i-\frac12},y_j)\right|^2\right)^{\frac12}.$$

此外, 要求大家要把所有误差结果以**表格**或者**图像**呈现, 要能体现**误差收敛阶**.

4 提示与注意事项

1. 注意到原微分方程的解中压力 p 不唯一: 会相差一个常数. 故离散之后的代数方程组解中压力 $\boldsymbol{P}$ 也在相差一个常数意义下唯一. 为了确定一个解可以令 p 的积分平均为零（这是真解 p 中 $-1/12$ 的来源）, 对应到离散解 $\boldsymbol{P}$ 即其平均值为零.

2. 为提高程序运行速度, 减小内存及存储开销, 在实现迭代法时可不直接存储线性方程组 $(*)$ 的系数矩阵, 也可将 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}$ 等向量以矩阵的形式存储, 此时矩阵向量乘法 $\boldsymbol{AU}, \boldsymbol{BP}$ 可看作 $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{P}$ 与某些矩阵的矩阵卷积. 而在底层网格上求解可以使用只需矩阵向量乘法运算的共轭梯度法.

3. 如果 $\boldsymbol{B}$ 是离散的梯度算子 ∇, 那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 应该离散梯度算子的伴随算子, 即负的散度算子 $-\nabla\cdot$. 而在对残量方程做提升或限制后, 得到的新线性方程组一般并不满足数值散度为 0 的条件, 此时待求解的线性方程组将形如

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix}. \tag{$**$}$$

其中 $\boldsymbol{D} = [d_{i,j}]$ 为负的数值散度. 在利用 DGS 迭代法求解线性方程组 $(**)$ 时, 散度方程的残量 $r_{i,j}$ 将变为

$$r_{i,j} = -\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{h} - d_{i,j}.$$

即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{D} = -\nabla_h \cdot \boldsymbol{U}_{k+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{D}$. 在利用 Uzawa 和 Inexact Uzawa 迭代法求解线性方程组 $(**)$ 时, 更新的压力 $\boldsymbol{P}_{k+1}$ 将变为

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = \boldsymbol{P}_k + \alpha(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{U}}_{k+1} - \boldsymbol{D}).$$

特别地, 当 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ 时, 得到的迭代格式即为课件上给出的迭代格式.

4. 通过算子运算可以部分得到矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征信息, 这将有助于选取 Uzawa 迭代法中的最优参数 α^*.

5. 在计算粗网格上的 $\boldsymbol{A}_{2h}, \boldsymbol{B}_{2h}$ 时, 按照课件上的方法, $\boldsymbol{A}_{2h}, \boldsymbol{B}_{2h}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{2h} & \boldsymbol{B}_{2h} \\ \boldsymbol{B}_{2h}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_h^{2h} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_h & \boldsymbol{B}_h \\ \boldsymbol{B}_h^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2h}^h,$$

但这样计算得到的 $\boldsymbol{A}_{2h}, \boldsymbol{B}_{2h}$ 形式会比较奇怪. 在实际应用中, 可以直接利用在粗网格上的 MAC 格式离散 Stokes 方程得到的系数矩阵去近似 $\boldsymbol{A}_{2h}, \boldsymbol{B}_{2h}$, 以方便算法的实现.

6. 在 DGS 迭代中, 扫描全部单元的顺序会对收敛性产生一定的影响, 但在本问题中不会影响是否收敛, 在实现时可以采用课件上的顺序, 也可以尝试按行列遍历或红黑格迭代. (选用其中一种方便实现的方法实现即可)

7. 提升限制算子的选择有很多种，课件上给出了两种不同的提升算子，一种满足转置关系，另一组不满足，可以尝试采用任意一种进行数值实现，也可以比较两种算子的效果.

截止时间为 2026 年 1 月 15 日晚 23:59，需要同时提交代码和上机报告，上机报告需使用 LaTeX 或 Markdown 完成，并提交 PDF 文档，总页数不得超过 30 页。在提交上机作业时，需将代码、上机报告源码、上机报告打包为 zip 压缩包，作为附件发送至邮箱 hujun@math.pku.edu.cn，其中邮件名、压缩包、上机报告需按"数值代数 ＋ 大作业 ＋ 姓名 ＋ 学号（.zip/.pdf）"的格式命名，如：数值代数 ＋ 大作业 ＋ 许盛飏 ＋ 2501110054（.zip/.pdf）"。