

# 第九周作业

许盛飚

本次作业来自课上板书与教材《数值线性代数》.

## 1 书面作业

课上留 欲求解线性方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  对称正定, 真解记作  $\mathbf{x}_*$ . 选定初值  $\mathbf{x}_0$ , 初始误差记作  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*$ , 初始残量  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ . 证明

$$\mathbf{e}_0 \in \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}_0\}.$$

**P158 7.** 设  $\mathbf{A}$  是一个只有  $k$  个互不相同特征值的  $n \times n$  实对称矩阵,  $\mathbf{r}$  是任一  $n$  维实向量. 证明: 子空间

$$\text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}\}$$

的维数至多是  $k$ .

**P159 9.** 证明: 用共轭梯度法求得的  $\mathbf{x}_k$  有如下的误差估计:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 \leq 2\sqrt{\kappa_2} \left( \frac{\sqrt{\kappa_2} - 1}{\sqrt{\kappa_2} + 1} \right)^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\|_2,$$

其中  $\kappa_2 = \kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2$ .

**P159 11.** 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称正定的,  $\mathcal{X}$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个  $k$  维子空间. 证明:  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}$  满足

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|_{\mathbf{A}} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\|_{\mathbf{A}}$$

的充分必要条件是  $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k$  垂直于子空间  $\mathcal{X}$ , 其中  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  是任意给定的.

**P159 12.** 试写出用共轭梯度法求解正则化方程组  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$  的详细算法, 要求算法中不出现计算  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的情形, 这里  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是非奇异的.

提交时间为 11 月 12 日上午 10:00, 需提交纸质版作业, 并在纸质版作业的每一页上标注姓名、学号及页码.

## 2 第四次上机作业

本次上机作业来自教材《数值线性代数》第 160 页.

### 2.1 利用 QR 分解求解最小二乘问题

实现基于共轭梯度法求解线性方程组的子程序，并利用你实现的程序完成下面三个计算任务.

(1) 求解如下的 Hilbert 矩阵线性方程组

$$\mathbf{H}_n \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad b_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n h_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

你可以测试若干不同的维数  $n$  来考察条件数对于收敛速度的影响.

(2) 实现 Jacobi 与 Gauss-Seidel 迭代法，并用你所实现的 Jacobi 方法、Gauss-Seidel 方法和共轭梯度法来求解下述方程组，解释你所观察到的结果.

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

截止时间为 **11 月 19 日上午 10:00**，需要同时提交代码和上机报告，上机报告需使用 LaTeX 或 Markdown 完成，并提交 PDF 文档，总页数**不得超过 10 页**. 在提交上机作业时，需将代码、上机报告源码、上机报告打包为 zip 压缩包，作为附件发送至邮箱 2501110054@stu.pku.edu.cn，其中**邮件名、压缩包、上机报告**需按“**数值代数 + 第四次上机作业 + 姓名 + 学号 (.zip/.pdf)**”的格式命名，如：数值代数 + 第四次上机作业 + 许盛翫 +2501110054 (.zip/.pdf)” .