机器学习第二周作业

樊泽羲 2200010816

2023 年 9 月 22 日

题目 1. 验证感知机为什么不能表示 XOR

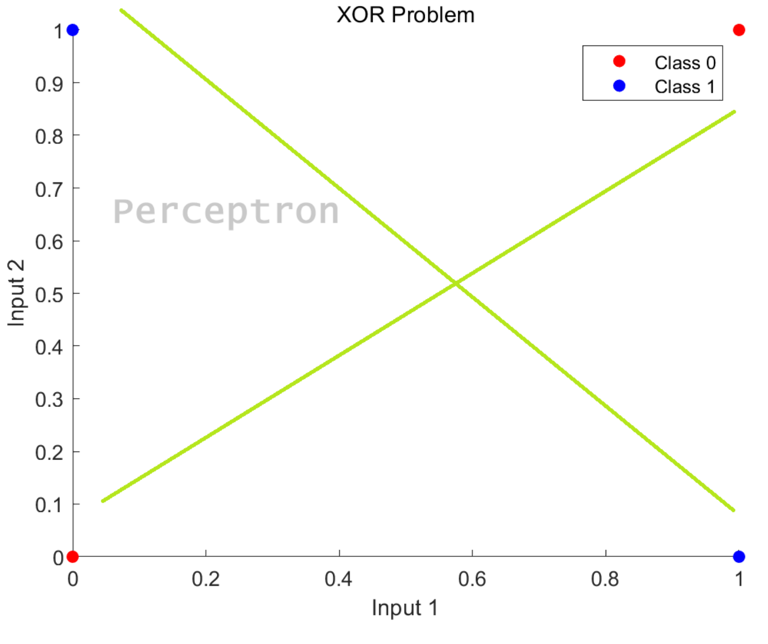

图 1: Failure on XOR

解答. 感知机的分类公式为 $f(x) = sign(w \cdot x + b)$，只能解决严格线性可分的问题，但是在 XOR 的分类中，两个类别的点分别分布在两条对角线上，

不存在可以将它们分开的超平面，因此无法由感知机实现分类

题目 2. 求证：样本集线性可分的充分必要条件是正实例点集所构成的凸壳与负实例点集所构成的凸壳互不相交

解答. $\Rightarrow$: 当存在超平面 $H : y = w \cdot x + b$ 将两种实例点分开时，有：

$$w \cdot x_i + b > 0, 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

$$w \cdot y_i + b < 0, 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

其中 x_i 为正实例点，y_i 为负实例点

因此有：

$$w \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i + b > 0, 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

$$w \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot y_i + b < 0, 1 \leq i \leq n \tag{4}$$

其中 $\lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

因此两个凸壳也分布在超平面的两侧，从而两个凸壳无交

$\Leftarrow$: 由于两个凸壳无交，并且它们分别是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集和闭集，因此它们存在正距离. 又因为二者都是闭集，因此存在取到这个最小距离的 $a \in C_1, b \in C_2$. 只需取二者的中垂面，即：

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, a) = d(x, b)\} \tag{5}$$

那么对 $y \in C_1$ 有 $d(y, a) < d(y, b)$，对 $y \in C_2$ 有 $d(y, a) > d(y, b)$，从而 H 就是所要求的超平面