Topologie Combinatoire et Algorithmique
Notes de Cours

Francis Lazarus

Novembre 2008

Table des matières

Chapitre 1

Homologie des graphes et des surfaces

1.1 Homologie des graphes

Définition 1.1.1 *Un* graphe *est un quadruplet $G = (S, A, o, \iota)$, où S et A sont des ensembles (respectivement de sommets et d'arcs (= arêtes orientées)), $o : A \mapsto S$ une application qui associe à tout arc son* origine *et $\iota : A \mapsto A$ une involution sans point fixe qui associe à tout arc son arc opposé (ou inverse).*

Dans la pratique on note $e^{-1} = \iota(e)$ l'arc inverse de l'arc e. Le sommet $o(e^{-1})$ est la *destination* de l'arc e et une *extrémité* de e est soit son origine soit sa destination. Une *boucle* est un arc dont les extrémités sont confondues. Une *arête* (non-orientée) est une paire de la forme $\{e, e^{-1}\}$. Puisque ι est une involution sans point fixe on peut écrire $A = A^+ \cup (A \setminus A^+)$ où ι réalise une bijection entre A^+ et son complémentaire. Une arête s'identifie donc à un élément de A^+. Ceci permet de considérer les arêtes comme des arcs, c'est à dire que **les arêtes ont une orientation par défaut**. Nous utiliserons cette convention dans toute la suite de ce document.

La *subdivision élémentaire* d'une arête d'un graphe consiste à couper cette arête en deux en ajoutant un sommet au milieu de l'arête. Une *subdivision* d'un graphe est le résultat d'une séquence de subdivisions élémentaires.

Deux graphes sont dits *combinatoirement équivalents* s'ils ont des subdivisions isomorphes.

La *caractéristique (d'Euler)* d'un graphe G est la quantité $\chi(G) = |S| - |A^+|$.

Lemme 1.1.2 *Deux graphes combinatoirement équivalents ont même caractéristique.*

Preuve : Vérifier qu'une subdivision d'arête ne modifie pas la caractéristique. □

Une *contraction d'arête* dans un graphe consiste à supprimer l'arête puis à identifier ses extrémités dans le graphe.

On dit que deux graphes ont le même *type d'homotopie* si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de contractions d'arêtes non-boucles (d'extrémités distinctes) et d'opérations inverses. On vérifie que la contraction d'arêtes non-boucles préserve la caractéristique. Deux graphes ayant le même type d'homotopie ont donc la même caractéristique.

La notion d'homologie pour les graphes apparaît dans un article de Kirchhoff de 1847 [BLW98, p. 133] traitant des circuits électriques.

La Loi des tensions exprime que dans tout cycle (chemin fermé) d'un circuit, on a la relation

$$\sum_j r_j I_j = \sum_j E_j$$

la somme portant sur les arcs du cycle orienté considéré ; les r_j désignent les résistances, les I_j les intensités des courants et les E_j les forces électromotrices. Connaissant les résistances et les forces électromotrices, le problème de Kirchhoff est de trouver le nombre minimal d'équations, et donc de cycles, permettant de déterminer les courants. La réponse est donnée par le nombre *cyclomatique* du graphe sous-jacent au circuit électrique. C'est encore la dimension de l'*espace des cycles* ou *premier groupe d'homologie* de ce graphe.

1.1.1 H_1

On considère un graphe $G = (S, A, o, \iota)$.

Définition 1.1.3 *L'*espace des 0-chaînes *(resp. des 1-chaînes) du graphe G est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles à coefficients réelles de sommets (resp. d'arêtes) de G. Il possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel*[1] *de dimension $|S|$ (resp. $|A^+|$). On note C_0 (resp. C_1) l'espace des 0(resp.1)-chaînes. Le* support *d'une chaîne c est l'ensemble des sommets (arêtes) de coefficients non-nuls. On définit un* opérateur bord $\partial : C_1 \to C_0$ *par extension linéaire de sa restriction aux arêtes :*

$$\begin{array}{rcl} \partial : A^+ & \to & C_0 \\ a & \mapsto & o(a^{-1}) - o(a) \end{array}$$

Définition 1.1.4 *L'*espace des cycles *de G est par définition le noyau de l'opérateur bord ∂. On le note $H_1(G, \mathbb{R})$ ou plus simplement $H_1(G)$. On s'intéresse en général uniquement à la structure de groupe (additif) de $H_1(G)$ et on l'appelle le* premier groupe d'homologie *de G.*

[1]Plus généralement on peut prendre les coefficients des combinaisons linéaires dans un groupe, un anneau, ou un autre corps. Les espaces de chaînes se trouvent alors respectivement munis d'une structure de groupe, de module ou d'espace vectoriel.

Lemme 1.1.5 *Tout cycle est une combinaison de cycles simples.*

Preuve : Soit un cycle $c = \sum_i \alpha_i a_i$. On raisonne par récurrence sur $|support(c)|$. Ou bien $support(c)$ contient une arête boucle a_k. Alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $c - \alpha_k a_k$. Sinon, soit $\alpha_k \neq 0$ et $\partial a_k = s - s'$. Puisque c est un cycle, il existe $i \neq k$ tel que $a_i \in support(c)$ et $\partial a_i = \epsilon(s' - s'')$ où $\epsilon = \pm 1$. Si $s'' = s$ on a un cycle simple $c' = a_k + \epsilon a_i$ dont le support est inclus dans $support(c)$. Sinon on continue jusqu'à retomber sur un sommet $s, s', s'', \dots$ déjà rencontré. On en déduit un cycle simple c' de support inclus dans celui de c. Finalement, considérant une arête $e_j \in support(c')$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $c - \alpha_j c'$. □

Lemme 1.1.6 *Un arbre est acyclique, i.e. son espace des cycles est trivial.*

Preuve : D'après le lemme précédent il suffit de remarquer qu'un arbre n'a pas de cycle simple (par définition). □

On suppose G connexe. Soit T un arbre couvrant de G. Rappelons qu'une *corde* de T est une arête de G qui n'est pas dans T. On associe à chaque corde e (avec son orientation par défaut) de T le cycle c_e obtenu en complétant e avec l'unique chemin simple dans T joignant la destination à l'origine de e. Si e est un arc de G tel que e^{-1} est une corde de T, alors par convention c_e désigne le cycle $-c_{e^{-1}}$.

Proposition 1.1.7 *Les cycles c_e, lorsque e parcours l'ensemble des cordes de T, forment une base de $H_1(G)$.*

Preuve : Ces cycles sont indépendants car chaque corde est dans le support d'un unique c_e. D'après le lemme 1.1.5, il suffit de vérifier que les c_e engendrent les cycles simples. Soit c un cycle simple. On écrit $c = c_1.e_1.c_2.e_2...$ où $e_1, e_2, \dots$ sont les cordes de T (ou leurs inverses) apparaissant dans c et où $c_1, c_2, \dots$ sont des chemins dans T. Le cycle $c - \sum_i c_{e_i}$ a son support inclus dans T, et est donc nul par le lemme 1.1.6. D'où $c = \sum_i c_{e_i}$. □

Définition 1.1.8 *La dimension de $H_1(G)$ est appelée* nombre de cycles *ou* nombre cyclomatique *ou encore* premier nombre de Betti. *On la note $\beta_1(G)$.*

Par la proposition 1.1.7, si G est connexe, le nombre cyclomatique est le nombre de cordes d'un arbre couvrant. Comme ce dernier a $|S| - 1$ arêtes, on a $\beta_1(G) = |A^+| - |S| + 1 = 1 - \chi(G)$. Notons que $\beta_1(G)$ est aussi le nombre maximal d'arêtes qu'on peut ôter à G sans le déconnecter.

Si G n'est pas connexe, il suffit de travailler indépendamment sur chacune de ses composantes connexes car l'homologie de G est la somme directe des homologies de chacune de ses composantes. On peut d'ailleurs affiner ce découpage pour travailler sur chaque “composante” 2-connexe (un bloc au sens de la théorie des graphes).

1.1.2 H_0

On définit également le groupe d'homologie de dimension 0.

$$H_0(G) = C_0/Im\partial$$

Proposition 1.1.9

$$H_0(G) \simeq \mathbb{R}^{\beta_0(G)}$$

où $\beta_0(G)$ est le nombre de composantes connexes de G.

Preuve : Soit $S' \subset S$ un sous-ensemble de sommets de G comportant exactement un sommet par composante de G. Tout sommet x de S est homologue à un tel sommet ; il suffit de considérer le bord d'un chemin reliant x au sommet de S' dans le composante de x. Par ailleurs, on vérifie que la somme des coefficients des sommets dans le bord d'une 1-chaîne est nulle sur chaque composante du graphe. Par conséquent, les sommets de S' engendrent un sous-espace de C_0 en somme directe avec $Im\partial$. Ainsi, les classes d'homologie des sommets de S' forment une base de $H_0(G)$. □

1.2 Classification des surfaces

1.2.1 Triangulation et caractéristique

Définition 1.2.1 *Un* 2-complexe simplicial affine *de $\mathbb{R}^n$ est une collection $\mathcal{C}$ de sommets, arêtes, triangles de $\mathbb{R}^n$ telle que*
- *toute extrémité d'une arête de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$ et toute arête d'un triangle de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$,*
- *l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{C}$ est soit vide soit une face (sommet ou arête) commune de ces éléments.*

La réunion de tous les éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$ est appelée espace total.

Définition 1.2.2 *Une* surface triangulée *est un 2-complexe simplicial affine pur (tout sommet ou arête est incident à un triangle) tel que*
- *toute arête est incidente à un ou deux triangles,*
- *le graphe d'adjacence des triangles incidents à un sommet est soit un cycle soit une chaîne.*

Les arêtes incidentes à deux triangles sont dites internes. *Les autres constituent (avec leurs sommets) le* bord *de la surface.*

Le *1-squelette* ou *graphe* d'un surface triangulée $\mathcal{M}$ est le graphe constitué des sommets et des arêtes de $\mathcal{M}$.

Lemme 1.2.3 *Les arêtes du bord d'une surface forment une union disjointe de cycles dans son 1-squelette.*

Preuve : Il suffit de vérifier que chaque sommet du sous-graphe formé par les arêtes du bord est de degré deux. Mais ceci résulte de la définition d'une surface triangulée. □

Définition 1.2.4 *Le* nombre de bords *d'une surface triangulée est le nombre de composantes connexes, donc de cycles, de son bord.*

Une triangulation d'une variété de dimension 2 est un homéomorphisme entre une surface triangulée et cette variété. Radò a montré en 1925 que toute variété compacte de dimension 2 admet une triangulation. On confondra une triangulation et la surface triangulée sous-jacente.

Définition 1.2.5 *La caractéristique (d'Euler) d'une surface $\mathcal{M}$ est la somme alternée de son nombre de sommets $S(\mathcal{M})$, d'arêtes $A(\mathcal{M})$, et de triangles $F(\mathcal{M})$:*

$$\chi(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + F(\mathcal{M})$$

Lemme 1.2.6 *La caractéristique d'une triangulation d'un disque vaut 1.*

Preuve : Voir la formule d'Euler dans l'étude des graphes planaires. □

Définition 1.2.7 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée. Une* subdivision *de $\mathcal{M}$ est une surface triangulée $\mathcal{M}'$ ayant même espace total que $\mathcal{M}$ et telle que tout simplexe (un sommet, une arête ou une face) de $\mathcal{M}'$ est contenu dans un simplexe de $\mathcal{M}$.*

En particulier, les simplexes de $\mathcal{M}'$ contenus dans un simplexe σ de $\mathcal{M}$ forment une triangulation de σ.

Définition 1.2.8 *Deux surfaces triangulées sont dites* combinatoirement équivalentes *si elles admettent des subdivisions isomorphes.*

Clairement, deux surfaces combinatoirement équivalentes sont homéomorphes. Le problème inverse, savoir si deux surfaces triangulées homéomorphes sont combinatoirement équivalentes, porte le nom de *Hauptvermutung*. Le Hauptvermutung est vrai pour les surfaces triangulées. Il est également vrai pour les variétés de dimension 3 comme démontré par Moise [Moi77] dans les années 1950.

Proposition 1.2.9 *Deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même caractéristique.*

Preuve : Une première preuve consiste à montrer que toute subdivision s'obtient comme une succession de subdivisions élémentaires, puis à vérifier que les subdivisions élémentaires préservent la caractéristique. On s'en tient ici à la définition générale de subdivision.

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée sans bord et $\mathcal{M}'$ une subdivision de $\mathcal{M}$. D'après le lemme 1.2.6, la caractéristique χ_t de la restriction de $\mathcal{M}'$ à tout triangle t de $\mathcal{M}$ vaut 1. En sommant χ_t sur tous les triangles de $\mathcal{M}$ on compte deux fois chaque arête ou sommet de $\mathcal{M}'$ inclus dans l'intérieur d'une arête de $\mathcal{M}$ et on compte un nombre de fois égale à son degré chaque sommet de $\mathcal{M}'$ qui est un sommet de $\mathcal{M}$. On a ainsi :

$$\chi(\mathcal{M}') = \sum_{t \in \mathcal{M}} \chi_t - \chi(G') - \sum_{s \in \mathcal{M}} (d(s) - 2).$$

où G' est la restriction de $\mathcal{M}'$ au graphe G de $\mathcal{M}$. Comme G' est une subdivision de G on a $\chi(G') = \chi(G)$. On a de plus par double énumération des incidences sommet/arête d'un graphe : $\sum_{s \in \mathcal{M}} d(s) = 2A(\mathcal{M})$. Et finalement

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{M}') &= \sum_{t \in \mathcal{M}} 1 - (S(G) - A(G)) - (2A(\mathcal{M}) - 2S(\mathcal{M})) \\ &= F(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + S(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

□

1.2.2 Orientabilité et classification

Une *orientation* d'un triangle de $\mathcal{M}$ de sommets u, v, w est le choix d'une des deux permutations cycliques (u, v, w) ou (u, w, v) (ce sont les seules !) sur ses sommets. Une orientation d'un triangle induit une orientation de ses arêtes allant d'un sommet vers son itéré dans la permutation choisie. Deux triangles adjacents ont des orientations *compatibles* s'ils induisent des orientations opposées sur leur arête commune.

Une surface triangulée est *orientable* si on peut orienter chacun de ses triangles de sorte que deux triangles adjacents quelconques aient des orientations compatibles. Il n'y a que deux manières possibles d'orienter les triangles d'une surface orientable connexe pour que cette propriété soit vérifiée. On dit qu'une surface connexe (orientable) est *orientée* si on a choisi une de ces deux orientations possibles.

Proposition 1.2.10 *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont même orientabilité.*

Preuve : Il suffit de le vérifier pour une surface $\mathcal{M}'$ subdivision d'une surface $\mathcal{M}$. Supposons $\mathcal{M}'$ orientable et orientée. On oriente chaque triangle τ de $\mathcal{M}$ de la manière suivante : On considère les triangles orientés de $\mathcal{M}'$ contenus dans τ. Ceux-ci (avec leurs arêtes et sommets) forment une triangulation orientée $\mathcal{T}$ de τ. Chaque arête de $\mathcal{T}$ située sur le bord de τ possède une orientation induite par l'unique triangle orienté de $\mathcal{T}$ le contenant. Il est clair que ces orientations sont cohérentes sur tout le bord de τ (le vérifier !). On en déduit une orientation de τ. La compatibilité de ces orientation sur les triangles de $\mathcal{M}$ résulte immédiatement de celle sur $\mathcal{M}'$.

Supposons maintenant $\mathcal{M}$ orientable et orientée. Soit σ un triangle de $\mathcal{M}'$. Ce triangle est contenu dans un unique triangle τ de $\mathcal{M}$. Soit P le plan affine engendré par τ. L'orientation de τ induit un orientation de P qui induit à nouveau une orientation de σ. Reste à voir que les orientations des triangles de $\mathcal{M}'$ ainsi construites sont compatibles. Pour cela il suffit de vérifier que pour toute arête a de $\mathcal{M}'$ incidente à deux triangles, les orientations des triangles incidents sont compatibles. Si a est intérieure à un triangle τ de $\mathcal{M}$, il en est de même des deux triangles de $\mathcal{M}'$ incidents à a. Il est facile de vérifier que ces deux triangles se situent de part et d'autre de la droite support de a dans le plan de τ. On en déduit la compatibilité des orientations de ces triangles. Si a est intérieure à une arête b de $\mathcal{M}$, on peut raisonner de la même manière après avoir 'déplié' les deux triangles de $\mathcal{M}$ incidents à b. □

Lemme 1.2.11 *Toute triangulation d'un disque est orientable.*

Preuve : Ceci résulte du lemme précédent et du Hauptvermutung puisqu'un triangle est évidemment orientable et constitue une triangulation d'un disque. Une preuve directe sans le Hauptvermutung est laissée à titre d'exercice. □

Exercice 1.2.12 *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation d'un disque. Montrer par récurrence sur son nombre de sommets que $\mathcal{T}$ est une subdivision de la triangulation formée d'un seul triangle. On pourra distinguer le cas où $\mathcal{T}$ contient des sommets intérieurs au disque ou non.*

Cette preuve montre en particulier que $\mathcal{T}$ peut être obtenue à partir du triangle par une succession de subdivisions 'élémentaires'. En déduire que $\mathcal{T}$ est orientable.

On a vu que deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même orientabilité (lemme 1.2.10) et caractéristique (lemme 1.2.9). Clairement elles ont également même nombre de bords. Inversement on montre (Brahana, 1922) que

Théorème 1.2.13 (de classification des surfaces) *Deux surfaces triangulées ayant mêmes caractéristique, orientabilité et nombre de bords sont combinatoirement équivalentes.*

Si $\mathcal{M}$ est une surface orientable dont le bord a b composantes on appelle genre de $\mathcal{M}$ la quantité $g = (2 - b - \chi(\mathcal{M}))/2$. Si $\mathcal{M}$ est une surface non-orientable le genre est défini par $g = 2 - b - \chi(\mathcal{M})$. D'après le théorème de classification et le Hauptvermutung, il existe à homéomorphisme près une unique surface orientable de genre g sans bord. On note $\mathcal{M}_g$ une triangulation de cette surface.

1.3 Homologie des surfaces

1.3.1 H_0

Comme pour les graphes, on pose $H_0(\mathcal{M}) = C_0/Im\partial$. On a de la même façon

Proposition 1.3.1 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée connexe, alors $H_0(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$.*

1.3.2 H_1

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée. On considère les espaces vectorielles suivants :
- l'espace C_0 des combinaisons linéaires formelles de sommets de $\mathcal{M}$,
- l'espace C_1 des combinaisons linéaires formelles d'arêtes de $\mathcal{M}$,
- l'espace C_2 des combinaisons linéaires formelles de triangles de $\mathcal{M}$.

Les éléments de C_i sont appelés des i-chaînes.

Comme pour les graphes, les arêtes sont supposées orientées. Ceci permet de définir un opérateur bord (par extension linéaire)

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 : C_1 & \rightarrow & C_0 \\ a & \mapsto & o(a^{-1}) - o(a) \end{array}$$

Une arête a se note également $[o(a), o(a^{-1})]$. On pose par convention d'écriture que $[o(a^{-1}), o(a)] = -[o(a), o(a^{-1})]$ On suppose également que chaque triangle est orienté. On note $[s, t, u]$ un triangle orienté par la permutation (s, t, u). Avec cette notation on a $[s, t, u] = [t, u, s] = [u, s, t]$. On définit alors un opérateur bord ∂_2 (par extension linéaire) :

$$\begin{array}{rcl} \partial_2 : C_2 & \rightarrow & C_1 \\ [s, t, u] & \mapsto & [t, u] - [s, u] + [s, t] = [s, t] + [t, u] + [u, s] \end{array}$$

L'espace des 1-cycles est défini comme pour les graphes par $Z_1(\mathcal{M}) = \ker \partial_1$. L'espace des 1-bords est défini par $B_1(\mathcal{M}) = Im\partial_2$. Deux 1-cycles sont dit *homologues* si leur différence est un bord (i.e. borde une 2-chaîne). L'espace des classes d'homologie $H_1(\mathcal{M}) = Z_1(\mathcal{M})/B_1(\mathcal{M})$ est appelé le *premier groupe d'homologie* de $\mathcal{M}$. On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas des orientations choisies pour les arêtes et triangles de $\mathcal{M}$.

Intuitivement deux cycles sont homologues si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue autorisant les fusions et scissions de cycles, ainsi que l'ajout/suppression de cycles séparateurs.

Lemme 1.3.2 *Le premier groupe d'homologie d'une triangulation d'un disque est nul.*

Preuve : Par le lemme 1.1.5, il suffit de montrer que tout cycle simple d'un disque triangulé orienté borde une 2-chaîne. Mais ceci résulte directement du théorème de Jordan qui permet de considérer la 2-chaîne constituée des triangles (orientés suivant l'orientation du disque) intérieurs à un cycle simple. Il est clair que le bord de cette 2-chaîne est, à un signe près, le cycle simple en question. □

Proposition 1.3.3 $H_1(\mathcal{M}_g) \simeq \mathbb{R}^{2g}$

Soit T^* un arbre couvrant du graphe d'adjacence des triangles de $\mathcal{M}_g$. L'ensemble des triangles de $\mathcal{M}_g$ recollés suivant les adjacences de T^* forme donc un disque triangulé D. Chaque arête du bord de D s'identifie à une arête de $\mathcal{M}_g$. Inversement, chaque arête de $\mathcal{M}_g$ apparaît soit une fois comme arête interne à D soit deux fois sur le bord de D. Soit G le sous-graphe de $\mathcal{M}_g$ induit par les arêtes apparaissant sur le bord de D.

Lemme 1.3.4 *Tout cycle de $Z_1(\mathcal{M}_g)$ est homologue à un cycle dont le support est dans G, autrement dit à un cycle de $Z_1(G)$.*

Preuve : Soit $c \in Z_1(\mathcal{M}_g)$ et a une arête du support de c. Si a est interne à D on considère un chemin p_a sur le bord de D joignant $o(a^{-1})$ à $o(a)$. Par le lemme 1.3.2, le cycle $a + p_a$ borde dans D donc dans $\mathcal{M}_g$. On en déduit que c est homologue à

$$c' = c - \sum_{\substack{a \in support(c), \\ a \notin G}} \alpha_a(a + p_a),$$

où α_a est le coefficient de a dans c. On conclut en remarquant que $support(c') \subset G$. □

Preuve de la proposition 1.3.3 : Soit K un arbre couvrant de G. Considérons les classes d'homologie $[c_e]$ des cycles c_e de G associés aux cordes de K. On sait par la proposition 1.1.7 que ces cycles génèrent $Z_1(G)$. Le lemme précédent montre que leurs classes d'homologie génèrent $H_1(\mathcal{M}_g)$. Montrons de plus que les $[c_e]$ constituent une famille libre de $H_1(\mathcal{M}_g)$ et donc une base. Pour cela considérons une combinaison $\sum_e \alpha_e c_e$ homologue à 0, i.e. telle que

$$\sum_e \alpha_e c_e = \partial_2 \sum_i \beta_i t_i$$

Soit a une arête interne à D. Comme aucune arête interne à D n'apparaît dans le membre de gauche de cette égalité on en déduit que, dans le membre de droite, les coefficients β_i et β_j des deux triangles incidents à a sont égaux. Par connexité de T^*, on conclut que tous les coefficients β_i du membre de droite sont égaux à un même coefficient β, d'où

$$\sum_e \alpha_e c_e = \beta \partial_2 \sum_i t_i$$

Or $\partial_2 \sum_i t_i = 0$ car $\mathcal{M}_g$ est orientée et fermée. Il suit que $\sum_e \alpha_e c_e = 0$ dans $Z_1(G)$ et donc que tous les α_e sont nuls par la proposition 1.1.7.

La dimension de $H_1(\mathcal{M}_g)$ est donc égale au nombre de cordes de K dans G. Je note β_1 ce nombre, aussi appelé premier nombre de Betti de $\mathcal{M}_g$. On a

$$\begin{aligned} \beta_1 &= A(G) - A(K) = (A - A(T^*)) - (S - 1) \\ &= A - (F - 1) - (S - 1) = A - F - S + 2 = 2 - \chi(\mathcal{M}_g) = 2g \end{aligned}$$

où S, A et F sont respectivement le nombre de sommets, arêtes et triangles de $\mathcal{M}$. □

Remarque 1.3.5 *Si on découpe $\mathcal{M}_g$ suivant le graphe G introduit ci-dessus on obtient un disque triangulé (et même une arborescence de triangles). Plus généralement on appelle* graphe de coupe *tout sous-graphe du 1-squelette de $\mathcal{M}_g$ qui découpe $\mathcal{M}_g$ en un disque triangulé. Clairement, on peut remplacer le graphe G dans tout ce qui suit la proposition 1.3.3 par n'importe quel graphe de coupe.*

Exercice 1.3.6 *En s'inspirant de la preuve de la proposition 1.3.3, montrer que si $\mathcal{M}_{g,b}$ est une surface orientable de genre g à b bords, alors $H_1(\mathcal{M}_{g,b}) \simeq \mathbb{R}^{2g+b-1}$. On remarquera que le bord de la 2-chaîne définie par la somme de tous les triangles (orientés) de $\mathcal{M}_{g,b}$ est non-nul et égal à la somme des b composantes (orientées) du bord de $\mathcal{M}_{g,b}$. En déduire que les classes d'homologie des g cycles formés par ces composantes sont linéairement liés.*

1.3.3 H_2

On définit $H_2(\mathcal{M})$ comme le sous-espace $\ker \partial_2$ des cycles de C_2.

Proposition 1.3.7 *Si $\mathcal{M}$ est connexe et orientable alors, $H_2(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$*

Preuve : Supposons $\mathcal{M}$ orientée. Soit c un 2-cycle de $\mathcal{M}$. Les coefficients dans c de deux triangles adjacents dans $\mathcal{M}$ sont nécessairement égaux puisque l'arête commune apparaît avec une orientation opposée dans leur bord respectif. Par connexité du graphe d'adjacence des faces on a que c est de la forme $\alpha \sum_{t \in \mathcal{M}} t$. Comme $\sum_{t \in \mathcal{M}} t$ est effectivement un 2-cycle, on en déduit que $H_2(\mathcal{M})$ est engendré par ce 2-cycle. □

Théorème 1.3.8 *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont des groupes d'homologie isomorphes.*

Preuve pour les surfaces orientables sans bord : D'après ce qui précède les groupes d'homologie ne dépendent que du genre de la surface et deux surfaces de genres différents ont des groupes distincts. On conclut par le théorème de classification. □

Chapitre 2

Optimisation et homologie

2.1 Calcul d'une base optimale de H_1

2.1.1 Cas des graphes

Si G est connexe, la proposition 1.1.7 montre que l'on peut construire une base de $H_1(G)$ à partir d'un arbre couvrant T de G, en reliant chaque corde de T par l'unique chemin simple dans T qui joint ses extrémités. Une telle base est parfois appelée *base fondamentale des cycles* ou *base de Kirchhoff*.

Si G n'est pas connexe, il suffit de travailler indépendamment sur chacune de ses composantes connexes, puisque l'homologie est la somme directe des homologies de chaque composante. On peut d'ailleurs raffiner ce découpage pour travailler sur chaque "composante" 2-connexe (un bloc au sens de la théorie des graphes).

Exercice 2.1.1 *Montrer que l'homologie d'un graphe combinatoire est la somme directe des homologies de chacune de ses composantes 2-connexes. On pourra étudier l'application qui associe à tout cycle du graphe sa trace sur chacune des composantes 2-connexes.*

Si les arêtes de G portent des poids, ou longueurs, on peut chercher à calculer une famille de cycles génératrice de l'homologie qui soit de longueur totale minimale. On conviendra, par un léger abus de langage, d'appeler *base minimale* une telle famille. On peut également se demander s'il existe une base minimale qui soit fondamentale (i.e. associée à un arbre couvrant). Contrairement au cas de l'homotopie, la réponse à cette dernière question est généralement négative comme le montre l'exemple de la figure 2.1 tirée de Hartvigsen et Mardon [HM93]. Dans ce même article, Hartvigsen et Mardon caractérisent les graphes pour lesquels on peut toujours trouver une base minimale qui soit fondamentale, et ce quelque soient les poids associés aux arêtes. Par ailleurs, Deo, Prabhu et Krishnamoorty [DPeK82] ont montré que le calcul d'une base fondamentale minimale est NP-complet. Cependant, le calcul d'une base minimale de *l'homologie à coefficients dans* $\mathbb{Z}_2$ peut être effectué en

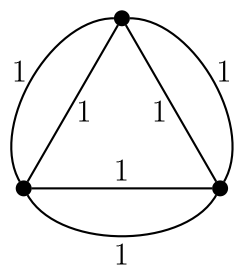

FIG. 2.1 – Tous les arbres couvrants de ce graphe sont isomorphes à une chaîne de deux arêtes. Les bases fondamentales associées se composent de deux 2-cycles et deux 3-cycles, cependant que la base minimale est formée de trois 2-cycles et un 3-cycle.

temps polynomial. Nous décrivons l'algorithme proposé par Horton [Hor87]. Nous supposons donné par la suite un graphe G fini et connexe dont les arêtes sont munies de poids non-négatifs. Notons que $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ est fini et isomorphe à l'ensemble des sous-graphes eulériens de G munis de la différence symétrique. Si c est un cycle de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ on note $|c|$ la somme des poids de ses arêtes, appelée également *longueur* de c.

Le calcul d'une base minimale repose sur l'observation suivante :

Lemme 2.1.2 *Fixons un ordre total sur les cycles de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ qui étende l'ordre partiel sur leur longueur. Considérons les bases de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ sous forme de suites de r cycles rangés dans cet ordre croissant où r est le rang de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$. (Ici, r est le nombre cyclomatique, noté $\beta_1(G)$ dans la définition 1.1.8). Alors la base minimale de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ pour l'ordre lexicographique est de longueur minimale.*

Preuve : Soit $B = (b_1, \dots, b_r)$ la base minimale pour l'ordre lexicographique et soit $C = (c_1, \dots, c_r)$ une base quelconque de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$. On considère l'ensemble d'indices $I = \{i \in [1, r], |b_i| > |c_i|\}$. Montrons que I est vide et donc que C est au moins aussi longue que B. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit k le plus petit indice dans I. Il existe un cycle c parmi $(c_1, \dots, c_k)$ tel que $\{b_1, \dots, b_{k-1}\} \cup \{c\}$ constitue une famille libre de rang k. Puisque $|c| \leq |c_k| < |b_k|$, c est plus petit que b_k pour l'ordre fixé sur les cycles. La famille $\{b_1, \dots, b_{k-1}, c\}$ peut ensuite être complétée en une base avec des éléments de $\{b_k, \dots, b_r\}$. Mais cette base est lexicographiquement inférieure à B, une contradiction. □

Ce lemme assure que l'algorithme "glouton" suivant renvoie une base minimale :

1. Initialiser une liste B à vide.
2. Parcourir $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ dans un ordre croissant des longueurs des cycles, et pour chaque cycle c parcouru, l'ajouter à B si $B \cup \{c\}$ constitue une famille libre.
3. retourner B.

Il y a en général bien trop de cycles dans $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ pour que cet algorithme soit efficace. L'idée de Horton est de caractériser les cycles de toute base minimale afin de restreindre le parcours (2) à ces cycles.

Lemme 2.1.3 *Soit b un cycle d'une base B de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ égal à la somme (modulo 2) de deux cycles non nuls c et d. Alors l'une des deux familles $B \setminus \{b\} \cup \{c\}$ et $B \setminus \{b\} \cup \{d\}$ est une base de $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$.*

Preuve : On ne peut avoir à la fois c et d liés à $B \setminus \{b\}$, car b le serait. □

Corollaire 2.1.4 *Tout cycle d'une base de longueur minimale est simple.*

Preuve : Tout cycle b non-simple est la somme de deux cycles disjoints (par arêtes), i.e. on peut écrire $b = c + d$ avec $|b| = |c| + |d|$. Le lemme précédent montre que b ne peut appartenir à une base minimale. □

Lemme 2.1.5 *Soit b un cycle d'une base des cycles B de longueur minimale. Soient x et y deux sommets de b et soient p et q les deux chemins joignant x et y dans b. Alors p ou q est un plus court chemin dans G.*

Preuve : Soit t un plus court chemin joignant y et x. Appliquer le lemme 2.1.3 à la somme $b = p.t + q.t$ (avec une petite confusion abusive entre chemins et chaînes), en comparant les longueurs des chemins $p.t$ et $q.t$ à $|b|$. □

Corollaire 2.1.6 *Soit b un cycle d'une base des cycles de longueur minimale, B. Soit x un sommet de b, alors b s'écrit sous la forme $p.a.q$ où a est un arc de G, et p et q sont deux plus courts chemins joignant x aux extrémités de a.*

Preuve : Le résultat est trivial si b contient un unique arc (donc une boucle). Supposons que ce n'est pas le cas et écrivons $b = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ avec $x = o(a_1) = o(a_k^{-1})$. Soit i l'indice maximal tel que $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ est un plus court chemin. Alors b s'écrit sous la forme $(a_1, a_2, \dots, a_i).a_{i+1}.(a_{i+2}, \dots, a_k)$ et le lemme précédent indique que $(a_{i+2}, \dots, a_k)$ est un plus court chemin. □

S'il y a unicité des plus courts chemins entre chaque paire de sommets, alors ce corollaire permet de restreindre le parcours (2) de l'algorithme glouton à $O(|S||A|)$ cycles – un par paire (sommet,arête). Dans le cas général, cependant, le nombre de cycles ayant la forme $p.a.q$ du corollaire peut être trop grand.

Pour chaque couple (x, y) de sommets on choisit un plus court chemin $p(x, y)$ entre x et y. À tout couple $(x, a) \in S \times A$ on associe le cycle $c(x, a) = p(x, o(a)).a.p(x, o(a^{-1}))^{-1}$.

Lemme 2.1.7 *Le parcours (2) de l'algorithme glouton peut être restreint aux cycles $c(x, a)$, $(x, a) \in S \times A$, de sorte que la base retournée est de longueur minimale.*

Preuve : Il suffit de montrer qu'il existe une base de longueur minimale composée uniquement de cycles de la forme $c(x, a)$ (cf. exercice 2.1.8).

On choisit un ordre total sur S. On choisit également pour chaque sommet $x \in S$ un ordre total sur les chemins $p(x, y)$, $y \in S$, qui étende l'ordre partiel sur leur longueur $|p(x, y)|$. On considère enfin l'ordre total sur les couples (x, y) de sommets définit par l'ordre lexicographique des couples $(x, p(x, y))$.

Soit B une base de longueur minimale. Pour chaque couple de sommets (x, y) pris dans cet ordre, on modifie B en substituant à tout cycle de B contenant x et y un cycle contenant $p(x, y)$ de sorte que la famille ainsi obtenue soit toujours une base de longueur minimale. Ceci est toujours possible car si $b \in B$ se décompose en deux chemins p et q joignant x à y, alors on peut écrire $b = p.p(x, y) + q.p(x, y)$ et le lemme 2.1.3 permet d'échanger $b \in B$ avec l'un des deux termes de la somme. De plus, compte tenu du lemme 2.1.5, ni $p.p(x, y)$ ni $q.p(x, y)$ ne sont plus longs que b et la base après substitution est encore minimale. En particulier, le cycle substitué est simple d'après le corollaire 2.1.4.

Soit c un cycle de la base minimale B' ainsi obtenue, et soit x le sommet de c le plus grand pour l'ordre choisi sur S. Par le lemme 2.1.6 on a $c = p.a.q$ où p et q sont deux plus courts chemins joignant x aux extrémités de a. Notons $y = o(a)$ et $z = o(a^{-1})$ ces deux extrémités. Supposons, sans perte de généralité, que $(x, z) > (x, y)$. Alors un couple strictement plus grand que (x, z) n'a pu modifier c. Dit autrement, c est resté inchangé après la modification de la base induite par (x, z) et on a deux cas possibles : $p(x, z) = q$ ou $p(x, z) = p.a$.

Dans le premier cas on note $c' = p.a.q'$ le cycle juste avant modification de c par (x, z). Le dernier couple (x, w) strictement compris entre (x, y) et (x, z) ayant pu modifier c' est tel que w est un sommet de q' puisque $p(x, w) > p(x, y)$. De plus le sous-chemin de q' joignant x à w est l'unique plus court chemin entre ces deux sommets dans c'. On en déduit que la modification associée au couple (x, w) n'a pas modifié p. Par récurrence sur le nombre de w du type considéré, on en déduit que p était dans le cycle courant juste après modification par (x, y), i.e. que $p = p(x, y)$.

Dans le second cas $p.a = p(x, z)$ et q sont des plus courts chemins. Soit w le voisin de z dans q, alors en substituant les rôles de y et z à z et w on se ramène au premier cas.

c est donc bien de la forme $c(x, a)$. □

Exercice 2.1.8 *Vérifier que si l'on restreint le parcours (2) de l'algorithme glouton ci-dessus à une partie $A \subset H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ contenant une base B de longueur minimale, alors la base retournée par l'algorithme est bien de longueur minimale.*

Exercice 2.1.9 *La preuve du lemme 2.1.7 suppose implicitement que le poids des arêtes est strictement positif. Adapter la preuve au cas où des poids peuvent être nuls.*

Proposition 2.1.10 *Soit $G = (S, A, o,^{-1})$ un graphe connexe fini dont les arêtes sont munies de poids (longueurs) non-négatifs. Alors on peut calculer une base de* *longueur minimale en temps $O(|S|^2 \log |S| + r^2|S||A|) = O(|S||A|^3)$, où $r = |A| - |S| + 1$.*

Preuve : Suivant le lemme 2.1.7 On restreint l'algorithme glouton aux cycles de la forme $c(x,a)$. Pour chaque sommet x, le calcul des $c(x,a)$ peut se faire à l'aide d'un arbre de plus courts chemins de source x en calculant pour chaque corde a de cet arbre la concaténation de a avec les chemins joignant dans l'arbre les extrémités de a à la source x. Il y a r cycles de ce type, où r est le rang de $H_1(G)$. (En fait seules les cordes dont le chemin simple associé passe par x sont à considérer). Il y a donc en tout $O(r|S|)$ cycles de taille $O(|S|)$ à considérer. Ils peuvent être calculés et stockés en temps $O\big(|S|(|S|\log|S|+|A|)+r|S|^2\big)$ en utilisant l'algorithme de Dijkstra pour le calcul de l'arbre. Leur tri nécessite un temps $O\big(r|S|\log(r|S|)\big)$. Pour tester si un cycle est indépendant d'une famille donnée, on code les cycles par des vecteurs de $(\mathbb{Z}_2)^{A^+}$. Par l'algorithme du pivot de Gauss on maintient une version triangulée de la famille libre courante. Celle-ci est composée d'au plus r vecteurs. L'ajout d'un vecteur à cette famille par l'algorithme du pivot de Gauss nécessite $O(r|A|)$ opérations. Le temps consacré aux tests d'indépendance est donc un $O(r^2|S||A|)$. On obtient au total un calcul en temps

$$O\big(|S|(|S|\log|S|+|A|)+r^2|S|+r|S|\log(r|S|)+r^2|S||A|\big) = O(|S|^2\log|S|+r^2|S||A|)$$

$\square$

Remarquons que l'on peut encore restreindre le parcours dans la preuve ci-dessus. Par exemple, on peut éliminer $c(x,a)$ lorsque $p(x,o(a)).a.p(o(a^{-1}),x)$ n'est pas un cycle simple. On peut également décomposer les cycles sur une base de Kirchhoff fixée associée aux cordes d'un arbre couvrant. Un cycle simple s'exprime dans une telle base à l'aide de sa trace sur les cordes. On remplace ainsi une matrice de taille rA par une matrice de taille r^2.

Le calcul d'une base minimale de cycles portent le nom de MCB (Minimum Cycle Basis problem) dans la littérature. On trouve de nombreuses notions et propriétés de bases minimales et de cycles "courts" dans cette littérature. La thèse de Gleiss [Gle01], fort justement intitulée "Short Cycles", contient une impressionnante bibliographie à ce propos.

Ces notions peuvent être replacées dans le cadre plus général de l'espace des cycles d'un matroïde. Golinski et Horton [GH02] ont étudiés en particulier le calcul de base minimale pour certains types de matroïdes. Notons que l'algorithme glouton présenté plus haut n'est autre que l'algorithme du même nom pour les matroïdes (où l'on considère cette fois l'espace des cycles comme un matroïde et non comme les cycles d'un matroïde). Le cours de DEA de Victor Chepoi [Che] donne une introduction très claire et concise sur les matroïdes et présente l'algorithme glouton. Pour une vue plus générale sur le sujet on pourra consulter l'article des *Notices of the American Mathematical Society* sur W. Tutte [HO04]. Par ailleurs, la complexité de l'algorithme de la proposition 2.1.10 n'est pas optimale et des améliorations ont été apportées [KMMP04, MM].

Un problème ouvert est de calculer une base minimale pour l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Cette fois-ci $H_1(G, \mathbb{Z})$ ne constitue plus un matroïde. (C'est le cas pour $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ car $\mathbb{Z}_2$ étant un corps, $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ se trouve munie d'une structure d'espace vectoriel).

2.1.2 Cas des surfaces

Soit $\mathcal{M}_g$ une surface triangulée sans bord de genre g dont les arêtes sont munies de poids (ou longueur). Comme pour les graphes, on s'intéresse au calcul d'une base minimale de $H_1(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}_2)$, c'est à dire à une famille de cycles $\{c_1, \ldots, c_{2g}\}$ dont les classes d'homologie forment une base de $H_1(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z}_2)$ et qui minimise $\sum_i |c_i|$. La méthode qui suit, proposée par Erickson et Whittlesey [EW05], est une adaptation aux surfaces du calcul sur les graphes. On notera n le nombre de sommets de $\mathcal{M}_g$.

Le lemme 2.1.2 pour les graphes reste valide à condition de redéfinir le rang par $r = 2g$. L'algorithme glouton peut donc s'appliquer en remplaçant le test d'indépendance des cycles par celui de leur classe d'homologie. Les corollaires 2.1.4 et 2.1.6 qui caractérisent les cycles candidats à une base minimale restent également valides. Il en est de même du lemme 2.1.7, utile lorsque l'unicité du plus court chemin entre deux sommets n'est pas assurée. Notons que de manière générale cette condition peut être induite par perturbation des poids, ou plus précisément en considérant un ordre total sur les parties de 2^A. Un lemme probabiliste, dit lemme d'isolation de Mulmuley, Vazirani et Vazirani [MVV87], permet d'obtenir cette condition avec une bonne probabilité en associant à chaque arête un entier aléatoire borné par un nombre suffisamment grand (dépendant du nombre d'arêtes de $\mathcal{M}_g$).

Par la suite, pour tout sommet x de $\mathcal{M}_g$, on note T_x un arbre de plus courts chemins de source x dans le graphe (1-squelette) de $\mathcal{M}_g$. Pour toute arête a on pose, comme dans le cas des graphes, $c(x, a) = p(x, o(a)).a.p(x, o(a^{-1}))^{-1}$ où $p(x, y)$ est le chemin simple de x à y dans T_x.

Comme pour le cas des graphes, l'algorithme de calcul d'une base minimale consiste à appliquer l'algorithme glouton à l'union des cycles $c(x, a)$ lorsque x parcourt les sommets de $\mathcal{M}_g$ et a les cordes de T_x. On peut cependant faire deux modifications, l'une portant sur le nombre de cycles à prendre en considération, l'autre portant sur le test d'indépendance pour l'ajout d'un cycle à la famille libre courante. La première modification repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.1.11 *Soit x un sommet de $\mathcal{M}_g$. L'ensemble des classes d'homologie des cycles $c(x, a)$, lorsque a parcourt les arêtes de $\mathcal{M}_g$, contient au plus $6g - 3$ éléments.*

Ce lemme permet de restreindre l'algorithme glouton à $O(gn)$ cycles ($O(g)$ pour chaque sommet). Sa preuve utilise une propriété générale des graphes cubiques (i.e. 3-régulier)

Lemme 2.1.12 *Le nombre d'arêtes d'un graphe cubique est égal à -3 fois sa caractéristique d'Euler.*

Preuve : La relation d'incidence sommet/arête donne 3s = 2a ; d'où $3\chi = 3s - 3a = -a$. □

Preuve du lemme 2.1.11 : On note $[c]$ la classe d'homologie d'un cycle c. Soit G^* le graphe dual associé aux arêtes complémentaires de T_x : Les sommets de G^* correspondent aux triangles de $\mathcal{M}_g$ et les arêtes aux paires de triangles partageant une arête qui n'est pas dans T_x. On note a^* l'arête duale d'une arête a de $\mathcal{M}_g$. Clairement, $[c(x,a)] = 0$ si $a \in T_x$. Il suffit donc de considérer les arêtes dont la duale est dans G^*. Notons que tout sommet de G^* est de degré un, deux ou trois. Soient deux arêtes a et b n'appartenant pas à T_x (i.e. $a^*, b^* \in G^*$).

1. si a^* a une extrémité de degré un dans G^*, alors $[c(x,a)] = 0$,
2. si a^* et b^* ont une extrémité en commun de degré deux dans G^*, alors $[c(x,a)] = [c(x,b)]$.

Pour la première propriété, on considère le triangle t correspondant au sommet de degré un de a^*. Soient u et v les extrémités de a, et w le sommet de t opposé à a. Comme les arêtes uw et vw sont dans T_x, on en déduit que l'une des trois relations suivantes est vérifiée :
- $p(x,u) = p(x,w).wv$ et $p(x,v) = p(x,w).wu$, ou
- $p(x,v) = p(x,u).uw.wv$, ou
- $p(x,u) = p(x,v).vw.wu$.

On en déduit dans chacun des cas que $[c(x,a)]$ borde t, d'où $[c(x,a)] = 0$.

Pour la seconde propriété, on considère le triangle t correspondant au sommet de degré deux commun à a^* et b^*. Les arêtes de ce triangles sont a, b et une troisième arête, de T_x, d'extrémités u et v. On a cette fois deux relations possibles : $p(x,v) = p(x,u).uv$ ou $p(x,u) = p(x,v).vu$. On en déduit aisément que $c(x,a) - c(x,b)$ borde t.

Ces deux propriétés montrent que le nombre de classes d'homologie des cycles $c(x,a)$, lorsque a parcourt les arêtes de $\mathcal{M}_g$, est égal au nombre d'arcs du graphe cubique H^* obtenu à partir de G^* en contractant toutes les arêtes incidentes à un sommet de degré un ou deux (c'est donc un mineur de G^*). Par le lemme 2.1.12, le nombre de classes est encore $-3\chi(H^*)$. Mais H^* et G^* ont le même type d'homotopie, d'où $\chi(H^*) = \chi(G^*)$.

On a par ailleurs
$$\chi(G^*) = S(G^*) - A(G^*) = F(\mathcal{M}_g) - A(G^*).$$
Or
$$A(G^*) = A(\mathcal{M}_g) - A(T_x) = A(\mathcal{M}_g) - S(T_x) + 1 = A(\mathcal{M}_g) - S(\mathcal{M}_g) + 1.$$
D'où
$$\chi(G^*) = F(\mathcal{M}_g) - A(\mathcal{M}_g) + S(\mathcal{M}_g) - 1 = \chi(M_g) - 1 = 1 - 2g.$$
□

Pour un sommet x de $\mathcal{M}_g$ on peut construire les $O(g)$ cycles pertinents de la forme $c(x,a)$ en temps $O(n \log n + gn)$. Il suffit pour cela de construire T_x par l'algorithme de Dijkstra puis de parcourir G^* et de retenir le plus court cycle de la forme $c(x,a)$ dans chaque branche de G^*, i.e. lorsque a^* parcours une chaîne maximale de G^*.

La seconde modification porte sur le test d'indépendance – pour les classes d'homologie – d'un cycle $c(x,a)$ avec une famille libre de cycles déjà calculée. Dans le cas de l'homologie des graphes, la notion de cycle se confond avec celle de classe d'homologie. Les cycles formant un sous-espace des chaînes, on a pu travailler avec une base des chaînes, c.-à-d. les arêtes, pour exprimer matriciellement le test d'indépendance. Dans le cas des surfaces cette confusion n'est plus possible et il faut commencer par calculer une base de référence pour l'homologie afin d'exprimer les cycles dans cette base. On peut par exemple choisir une base associée à un graphe de coupe (cf. remarque 1.3.5). Une telle base peut être obtenue en temps $O(gn)$ suivant la construction de la proposition 1.3.3. Rappelons que les éléments de cette base sont en bijection avec les $2g$ cordes d'un arbre couvrant du graphe de coupe et que l'expression de la classe d'homologie d'un cycle quelconque se réduit à la trace de ce cycle sur les cordes. Le calcul des $2g$ composantes (de la classe d'homologie) de chaque cycle candidat $c(x,a)$ dans la base de référence prend donc a priori un temps $O(gn)$. Pour un sommet x fixé, on peut cependant calculer dans le même temps les composantes de *tous* les $O(g)$ cycles candidats $c(x,a)$. Pour cela on commence par calculer les *composantes* (i.e. les traces sur les cordes de la base de référence) de tous les chemins $p(x,y)$ en parcourant l'arbre de plus courts chemins T_x. Ceci prend un temps (et une place) $O(gn)$. Ensuite, les composantes de chacun des $O(g)$ cycles candidats $c(x,a)$ s'obtiennent en ajoutant en temps $O(g)$ celles de $p(x,o(a))$, a, et $p(x,o(a^{-1}))$. Le temps amorti pour le calcul des composantes d'un cycle candidat est donc $O(n)$ au lieu de $O(gn)$.

Par l'algorithme du pivot de Gauss on maintient une version triangulée de la famille libre courante. Celle-ci est composée d'au plus $2g$ cycles. L'ajout d'un cycle à cette famille par l'algorithme du pivot de Gauss nécessite donc $O(g^2)$ opérations.

Théorème 2.1.13 *On peut construire une base minimale de l'homologie de $\mathcal{M}_g$ en temps $O(n^2 \log n + gn^2 + g^3 n)$*

Preuve : On applique l'algorithme glouton aux $O(gn)$ cycles pertinents. Ces derniers, ainsi que leurs composantes sur une base de référence, se calculent en temps $O(n^2 \log n + gn^2)$ d'après la discussion précédente. Le tri de ces cycles suivant leur longueur prend un temps $O(gn \log n)$ auquel il faut ajouter le $O(g^3 n)$ pour les tests de dépendance linéaire. □

Chapitre 3

Homologie en dimension supérieure

3.1 Complexes simpliciaux et homologie simpliciale

Pour construire des espaces topologiques ayant une description combinatoire on utilise des briques élémentaires appelées simplexes.

Définition 3.1.1 *Un* simplexe *affine de dimension n, ou n-simplexe affine, est l'enveloppe convexe dans un espace $\mathbb{R}^p$ de $n+1$ points, appelés sommets, affinement indépendants. Une* face *d'un simplexe σ est un simplexe défini par un sous-ensemble des sommets de σ.*

La notion de complexe simplicial permet de définir précisément ce qu'est un assemblage de briques élémentaires convenablement recollées entre-elles.

Définition 3.1.2 *Un* complexe simplicial *affine de $\mathbb{R}^p$ est une collection $\mathcal{C}$ de simplexes de $\mathbb{R}^p$ telle que*

1. *toute face d'un simplexe de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$,*
2. *deux simplexes quelconques de $\mathcal{C}$ s'intersectent selon une face commune, éventuellement vide.*

*La réunion de tous les simplexes de $\mathcal{C}$, vue comme sous-espace topologique de $\mathbb{R}^p$, est appelée l'*espace total *du complexe. La* dimension *d'un complexe simpliciale est la dimension maximale de ses simplexes.*

Comme pour les graphes et les surfaces triangulées, on définit les groupes d'homologie d'un complexe simplicial à partir d'espaces de chaînes et de morphismes de bord.

Définition 3.1.3 *L'espace des n-*chaînes *d'un complexe simplicial est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles de ses n-simplexes. Cet espace est naturellement muni d'une structure de groupe, module ou espace vectoriel, selon que les coefficients des combinaisons linéaires sont respectivement pris dans un groupe, anneau ou corps. On note $C_n(K)$ l'espace des n-chaînes du complexe K.*

Soit σ un n-simplexe de sommets $s_0, \ldots, s_n$. On définit une relation d'équivalence sur les permutations des sommets de σ : deux permutations sont dites équivalentes si elles ont même parité. Tout n-simplexe σ pour $n \geq 1$ (resp. $n = 0$) possède donc deux classes (resp. une classe) d'équivalence de permutations. Une *orientation* de σ est le choix d'une de ses classes d'équivalence. La notation $[s_0, s_1, \ldots, s_n]$ désigne le simplexe σ, doté de l'orientation définie par la permutation (ou ordre) $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$. On a ainsi un isomorphisme entre l'espace des n-chaînes de simplexes et l'espace des n-chaînes de simplexes *orientés* modulo les relations

$$[\phi(s_0), \phi(s_1), \ldots, \phi(s_n)] = (-1)^{signe(\phi)}[s_0, s_1, \ldots, s_n] \tag{3.1}$$

où ϕ désigne une permutation quelconque de $s_0, \ldots, s_n$.

On définit ensuite le *bord* d'un simplexe orienté par

$$\partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n]$$

où $\hat{s}_i$ dénote l'omission du sommet s_i. Le bord est compatible avec les relations (3.1) (c'est un exercice !). Cela permet de définir le bord d'un n-simplexe, *muni d'une orientation par défaut*, modulo ces relations. Ce bord est une $(n-1)$-chaîne et le bord d'une n-chaîne est obtenu par extension linéaire :

$$\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K), \qquad \sum \alpha_\sigma \sigma \mapsto \sum \alpha_\sigma \partial_n \sigma$$

où $\sum \alpha_\sigma \sigma$ désigne une n-chaîne de coefficients α_σ. Notons que l'opérateur bord dépend de l'orientation par défaut de chaque simplexe.

La relation essentielle dit que le bord d'un bord est nul :

Lemme 3.1.4 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Preuve : Puisque les simplexes orientés génèrent les chaînes de simplexes (modulo les relations (3.1)), il suffit de vérifier la relation ci-dessus pour les simplexes orientés :

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \partial_{n-1}(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n])$$

Or,

$$\partial_{n-1}[s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n] = \sum_{j<i} (-1)^j [s_0, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n] - \sum_{j>i} (-1)^j [s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, s_n]$$

D'où

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n[s_0, s_1, \ldots, s_n] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j<i} (-1)^{i+j} [s_0, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n] - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j>i} (-1)^{i+j} [s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, s_n] = 0$$

puisque les deux membres de cette différence portent sur les mêmes termes. □

Définition 3.1.5 *Soit K un complexe simplicial. Le groupe des n-*cycles *de K est le noyau du bord ∂_n. On le note $Z_n(K)$. Le groupe des n-*bords *de K est l'image de ∂_{n+1}. On le note $B_n(K)$. Le lemme précédent montre que $B_n(K) \subset Z_n(K)$, ce qui permet de définir le n-ième groupe d'homologie de K par le quotient*

$$H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K) = \ker \partial_n / im\ \partial_{n+1}$$

L'intérêt principal des groupes d'homologie réside dans leur invariance par rapport à la subdivision utilisée pour les calculs.

Théorème 3.1.6 *À isomorphisme près, les groupes d'homologie $H_n(K)$ ne dépendent que de l'espace total $|K|$ du complexe K et non de la décomposition simpliciale particulière utilisée pour les calculer.*

Dit autrement l'homologie est un invariant topologique. La démonstration de ce théorème est difficile et repose sur la notion d'homologie singulière qui s'applique à tous les espaces topologiques, sans restriction à des espaces triangulés. On pourra consulter Hatcher [Hat02] ou Munkres [Mun93] sur le sujet.

3.2 Homologie à coefficients entiers

Pour définir les groupes de chaînes d'un complexe simplicial K on a vu que l'on avait un certain choix sur le type de coefficients intervenant dans les combinaisons linéaires formelles de simplexes. A priori chaque type de coefficients donne des groupes de chaînes différents et donc des groupes d'homologie différents. Il se trouve qu'à partir du calcul de l'homologie avec des coefficients dans $\mathbb{Z}$ on peut déduire l'homologie avec n'importe quel autre type de coefficients par un calcul qui ne fait plus intervenir le complexe K. Cette propriété universelle qu'ont les coefficients entiers porte le nom de *théorème des coefficients universels* dans la littérature. Il est donc intéressant de pouvoir calculer en premier lieu l'homologie sur $\mathbb{Z}$.

3.2.1 Forme normale de Smith des matrices à coefficients entiers

En choisissant des coefficients entiers les groupes de chaînes se trouvent munis d'une structure de $\mathbb{Z}$-module libre (l'ensemble des n-simplexes forme par définition une base des n-chaînes). On peut donc représenter chaque morphisme de bord ∂_n par une matrice entière relativement à des bases des groupes $C_n(K)$ et $C_{n-1}(K)$. Pour des bases convenablement choisies cette matrice prend une forme particulière, appelée forme (normale) de Smith (1861), à partir de laquelle on peut directement lire l'homologie de K.

Définition 3.2.1 *Une matrice à coefficients entiers est dite sous* forme normale de Smith *si elle est diagonale et si chaque coefficient diagonal est non-négatif et multiple du coefficient précédant dans la diagonale.*

Notons que certains coefficients (nécessairement les derniers) peuvent être nuls.

Théorème 3.2.2 *Soit $u : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ un morphisme de $\mathbb{Z}$-module. Il existe des bases de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^q$ relativement auxquelles la matrice de u est sous forme de Smith. De plus, cette forme est unique.*

On a le lemme préparatoire, avec les notations du théorème :

Lemme 3.2.3 *Il existe des bases de $\mathbb{Z}^p$ et $\mathbb{Z}^q$ relativement auxquelles tous les coefficients de la matrice (m_{ij}) de u sont multiples du coefficient m_{11}.*

Preuve : Soit (m_{ij}) la matrice de u relativement à une base (e_i) de $\mathbb{Z}^p$ et à une base (f_j) de $\mathbb{Z}^q$ (par exemple les bases canoniques). On suppose $u \neq 0$, le lemme étant trivial dans le cas contraire. Soit m_{ij} un coefficient non-nul de valeur absolue minimale. La preuve s'obtient par récurrence sur $\alpha = |m_{ij}|$.

1. Ou bien α divise tous les coefficients de M. Les changements de bases qui échangent e_1 avec e_i et f_1 avec f_j permutent les coefficients de M de sorte que $m_{11} = \alpha$. Le lemme est donc vérifié.
2. Ou bien α ne divise pas l'un des coefficients, m_{ik}, de sa ligne i. On a par division euclidienne : $m_{ik} = \lambda\alpha + \alpha'$ avec $0 < \alpha' < \alpha$. Le changement de base remplaçant e_k par $e_k - \lambda e_j$ transforme le coefficient m_{ik} de M en α'. On invoque alors l'hypothèse de récurrence pour conclure.
3. Ou bien α ne divise pas l'un des coefficients de sa colonne j, et un raisonnement analogue au précédent permet de conclure.
4. Ou bien tous les coefficients de la ligne i et de la colonne j sont multiples de α, mais un coefficient m_{kl} n'est pas divisible par α. On a en particulier $m_{il} = \lambda\alpha$. On effectue le changement de base remplaçant e_l par $e_l - (\lambda - 1)e_j$, de sorte que le coefficient m_{il} est transformé en α et le coefficient m_{kl} en un certain m'_{kl}. Ou bien $|m'_{kl}| < \alpha$, et on conclut par récurrence, ou bien on se retrouve dans la configuration 3 précédente ($m'_{il} = \alpha$ ne divise pas m'_{kl}) ce qui permet également de conclure.

□

Preuve du théorème 3.2.2 : Par le lemme précédent on peut supposer avoir choisi une base (e_i) de $\mathbb{Z}^p$ et une base (f_j) de $\mathbb{Z}^q$ telles que tous les coefficients de la matrice (m_{ij}) de u dans ces bases sont multiples du coefficient m_{11}. On suppose à nouveau $u \neq 0$ et donc $m_{11} \neq 0$. Le changement de base qui remplace tous les $e_j, j > 1$, par $e_j - \frac{m_{1j}}{m_{11}} e_1$ et tous les $f_i, i > 1$, par $f_i - \frac{m_{i1}}{m_{11}} f_1$ laisse inchangé le coefficient m_{11}

et annule tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne. Dans cette base, la matrice de u est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où M' est une matrice dont tous les coefficients sont multiples de m_{11}. Quitte à remplacer e_1 par son opposé, on peut supposer m_{11} positif. On termine la preuve de l'existence d'une forme normale par récurrence sur la dimension de M, en remarquant que les changements de base mis en jeux pour mettre M' sous forme de Smith n'affectent pas la première ligne ni la première colonne de M et que tous les coefficients restent des multiples de m_{11}.

Il reste à vérifier l'unicité. On note pour cela que les changements de base se traduisent par des multiplications à gauche et à droite de la matrice de u par des matrices carrées à coefficients entiers et de déterminants ± 1 (puisque ces matrices sont inversibles sur $\mathbb{Z}$). De telles matrices sont dites *unimodulaires* et se décomposent en produit d'*opérations élémentaires* sur les lignes et les colonnes comme vu dans la preuve ci-dessus : permutations de lignes (colonnes) ou ajout du multiple d'une ligne (colonne) à une autre ligne (colonne). Soit d_i le p.g.c.d. de l'ensemble des sous-déterminants, ou mineurs, d'ordre i de la matrice de u relativement à des bases fixées (on pose $d_0 = 1$). On vérifie que les opérations élémentaires ne modifient pas les d_i ; c'est évident pour les permutations de lignes et colonnes et résulte facilement de la multi-linéarité du déterminant dans les autres cas. Le quotient d_i/d_{i-1}, $1 \leq i \leq rang(u)$, est donc indépendant des bases fixées. Or, dans le cas d'une forme de Smith ce quotient est précisément le $i$ème coefficient diagonal. □

La preuve ci-dessus de l'existence d'une forme normale fournit de fait un algorithme facilement implémentable en machine. La complexité d'un tel algorithme, en particulier la croissance des coefficients dans les calculs intermédiaires, semble néanmoins difficile à évaluer. Kannan et Bachem [KB79] ont montré que la mise sous forme normale d'une matrice à coefficients entiers pouvait être obtenue en temps polynomial en fonction du nombre total de bits utilisés pour coder les entiers de la matrice. De nombreuses améliorations ont été obtenues depuis [DSV01].

Exercice 3.2.4 (Classification des groupes commutatifs de type fini) *Soit G un groupe commutatif de type fini. Dit autrement, G contient une famille* finie *$\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que tout élément de G est combinaison linéaire à coefficients entiers des e_i. On veut montrer qu'il existe des nombres entiers $\beta \geq 0$ et $1 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_r$ avec τ_i divise τ_{i+1}, $1 \leq i \leq r-1$, tels que G est isomorphe au groupe*

$$\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/\tau_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\tau_r\mathbb{Z} \tag{3.2}$$

De plus cette décomposition est unique au sens où les nombres $\beta, \tau_1, \ldots, \tau_r$ sont entièrement déterminés par G. L'entier β est le rang *de G et les τ_i ses* coefficients de torsion*.*

1. *Soit $\phi : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{Z}^q$ un morphisme de groupe (i.e. une application $\mathbb{Z}$-linéaire). Montrer à l'aide du théorème 3.2.2 que le groupe coker$\phi = \mathbb{Z}^q/\text{im } \phi$ est de la forme (3.2) ci-dessus et que cette forme est unique.*
2. *Soit G un groupe commutatif de type fini. Exhiber un morphisme surjectif $\phi : \mathbb{Z}^q \to G$ et en déduire que G est isomorphe au quotient de $\mathbb{Z}^q$ par un sous-groupe de $\mathbb{Z}^q$.*
3. ***Sous-groupe d'un groupe libre.*** *Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}^q$. Montrer que H est isomorphe à un $\mathbb{Z}^p$ avec $p \leq q$. On pourra raisonner par récurrence sur q :*
   (a) Vérifier l'assertion pour $q = 1$.
   (b) Pour l'étape inductive, on considère le sous-groupe $H' = (\mathbb{Z}^{q-1} \times \{0\}) \cap H$ de $\mathbb{Z}^{q-1} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}^{q-1}$. Conclure si $H = H'$.
   (c) Sinon, soit $x \in (H \setminus H')$ de q-ième coordonnée minimale en valeur absolue. Montrer que $H = H' \oplus \mathbb{Z}x$ et conclure.
4. *Déduire de ce qui précède que tout groupe commutatif de type fini est isomorphe à un unique groupe de la forme (3.2).*

3.2.2 Calcul effectif des groupes d'homologie

Étant donné un complexe simplicial K fini (ayant un nombre fini de simplexes), il est possible de calculer explicitement ses groupes d'homologie sur $\mathbb{Z}$. On se sert pour cela de la forme normale de Smith des matrices des opérateurs bord. Pour simplifier les calculs des groupes d'homologie on utilise une forme de Smith modifiée obtenue par simple permutation des colonnes de la forme normale :

Définition 3.2.5 *Une matrice à coefficients entiers est sous* forme de Smith modifiée *si elle est de la forme*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & \tau_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \tau_r \\ \hline 0 & & 0 & \end{array}\right) \tag{3.3}$$

où $\tau_1|\tau_2|\ldots|\tau_r$ et $\tau_i > 0$, $1 \leq i \leq r$.

Lemme 3.2.6 *On peut trouver des bases de $C_{n-1}(K), C_n(K)$ et $C_{n+1}(K)$ pour lesquelles les matrices des bord ∂_n et ∂_{n+1} sont sous forme de Smith modifiée.*

Preuve : Par le théorème 3.2.2 on peut trouver des bases b_{n-1} et b_n respectives de $C_{n-1}(K)$ et $C_n(K)$ telles que la matrice Δ_n du bord ∂_n est sous la forme de Smith modifiée (3.3). Soit Δ_{n+1} la matrice de ∂_{n+1} relativement à b_n et à la base canonique (des simplexes) de $C_{n+1}(K)$. La relation du lemme 3.1.4 se traduit par $\Delta_n\Delta_{n+1} = 0$. Si Δ_n est de rang r, il en résulte que les r dernières lignes de Δ_{n+1} sont nulles.

L'algorithme de mise sous forme de Smith appliqué à Δ_{n+1} ne manipule donc que les $k_n - r$ premiers vecteurs de b_n, où k_n est le nombre de n-simplexes de K. Mais la forme (3.3) indique que ces $k_n - r$ vecteurs sont dans le noyau de ∂_n et il suit que ces manipulations ne modifient pas Δ_n. □

Proposition 3.2.7 *Supposons avoir choisi des bases de $C_{n-1}(K), C_n(K)$ et $C_{n+1}(K)$ pour lesquelles les matrices Δ_n et Δ_{n+1} des bord ∂_n et ∂_{n+1} sont sous forme de Smith modifiée. Soient r et r' les rangs respectifs de Δ_n et de Δ_{n+1}, soit k_n le nombre de n-simplexes de K et $\tau_1|\tau_2|\ldots|\tau_{r'}$ les coefficients non-nuls de Δ_{n+1}. Alors $H_n(K)$ est isomorphe à*

$$\mathbb{Z}^\beta \times \mathbb{Z}/\tau_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\tau_{r'}\mathbb{Z}$$

où $\beta = k_n - r - r'$.

Notons que $\mathbb{Z}/\tau_i\mathbb{Z}$ est trivial pour $\tau_i = 1$.

Preuve : Notons $(e_1, e_2, \ldots, e_{k_n})$ la base choisie pour $C_n(K)$. On a alors de par la forme de Smith modifiée :

$$\text{im } \partial_{n+1} =< \tau_1 e_1, \tau_2 e_2, \ldots, \tau_{r'} e_{r'} > \text{ et } \ker \partial_n =< e_1, e_2, \ldots, e_{k_n - r} >$$

□

L'entier β s'appelle le n-ième nombre de Betti de K et les entiers $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r'}$ ses n-ième coefficients de Torsion.

3.3 Calcul des nombres de Betti

On se place ici dans le cas où les coefficients sont dans un corps F. Les groupes d'homologie $H_i(K)$ ont ainsi une structure de F-espace vectoriel. La dimension $\beta_i(K)$ de cet espace est le *ième nombre de Betti* de K (relativement aux coefficients F). Pour F de caractéristique nulle, le théorème des coefficients universels mentionné plus haut implique que ce nombre coïncide avec le $i$ème nombre de Betti de l'homologie entière.

On a $\beta_i(K) = \dim H_i(K) = \dim \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1} = \dim \ker \partial_i - \dim \text{im } \partial_{i+1}$. On en déduit une relation fameuse entre les nombres de Betti et les nombres de simplexes de chaque dimension d'un complexe.

Théorème 3.3.1 (Formule d'Euler-Poincaré) *Soit K un complexe simplicial fini de dimension k et n_i son nombre de simplexes de dimension i, alors*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \beta_i(K) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i n_i$$

Preuve : Par la formule du rang d'une application linéaire, on a

$$\dim\ker\partial_i = n_i - \dim\operatorname{im}\,\partial_i$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\beta_i(K) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(n_i - \dim\operatorname{im}\,\partial_i - \dim\operatorname{im}\,\partial_{i+1})\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i n_i - (-1)^k\dim\operatorname{im}\,\partial_{k+1} - \dim\operatorname{im}\,\partial_0\end{aligned}$$

Mais les bords ∂_0 et ∂_{k+1} sont nuls. □

Cette relation ne suffit évidemment pas à déterminer tous les nombres de Betti. On peut utiliser des méthodes matricielles pour les évaluer : si D_i est la matrice de ∂_i dans les bases canoniques des i et $(i-1)$-simplexes, on a ainsi $\beta_i(K) = corang(D_i) - rang(D_{i+1})$. Dans cet esprit, on pourra consulter la méthode du Laplacien combinatoire de Friedman [Fri98] issue de la théorie de Hodge.

3.3.1 Calcul incrémental

Repose sur un article de Delfinado et Edelsbrunner [DE95].

Soit K un complexe simplicial. On considère une filtration $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m$ de K dont les incréments sont des simplexes. On peut par exemple ajouter un à un les simplexes de K dans l'ordre de leur dimension en choisissant un ordre arbitraire entre les simplexes de même dimension. Le principe du calcul incrémental est de maintenir les nombres de Betti de K_j pour j variant de 1 à m.

Proposition 3.3.2 *Soient K, K' des complexes tels que $K' = K \cup \sigma$ où σ est un k-simplexe de K'. Si le bord de σ dans K' borde également dans K, alors*

$$\beta_i(K') = \begin{cases}\beta_i(K)+1 & \textit{si } i = k\\ \beta_i(K) & \textit{sinon}\end{cases}$$

Sinon

$$\beta_i(K') = \begin{cases}\beta_i(K)-1 & \textit{si } i = k-1\\ \beta_i(K) & \textit{sinon}\end{cases}$$

Preuve : On note avec un prime les objets relatifs à K'. On remarque d'abord que les complexes de chaîne de K et de K' sont identiques en dehors du segment

$$C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}$$

en particulier pour $i \neq k$ on a $\ker\partial'_i = \ker\partial_i$ et $\operatorname{im}\,\partial'_i = \operatorname{im}\,\partial_i$. Donc $\beta'_i = \beta_i$ pour $i \neq k, k-1$.

Supposons que $\partial'_k\sigma$ borde dans K, i.e. $\partial'_k\sigma \in \text{im } \partial_k$. Alors $\text{im } \partial'_k = \text{im } \partial_k$. D'où $\dim \text{im } \partial'_k = \dim \text{im } \partial_k$ et

$$\dim \ker \partial'_k = \dim C'_k - \dim \text{im } \partial'_k = \dim C_k + 1 - \dim \text{im } \partial_k = \dim \ker \partial_k + 1$$

On en déduit $\beta'_k = \dim \ker \partial'_k - \dim \text{im } \partial'_{k+1} = \beta_k + 1$.

Supposons maintenant que $\partial'_k\sigma \notin \text{im } \partial_k$. Alors $\dim \text{im } \partial'_k = \dim \text{im } \partial_k + 1$ et du coup $\dim \ker \partial'_k = \dim \ker \partial_k$ ce qui permet également de conclure. □

Notons que la condition « $\partial\sigma$ borde également dans K » dans la proposition équivaut à dire que σ est dans le support d'un cycle de K'.

Dans la pratique, si K possède m simplexes, la proposition précédente permet de calculer les nombres de Betti en m étapes. Chaque étape consiste à déterminer si le simplexe ajouté dans la filtration est dans le support d'un cycle ou non. Pour le calcul de β_0, cela se réduit à vérifier si une arête appartient à un cycle, c'est-à-dire si ses extrémités appartiennent à une même composante connexe. En particulier, β_0 compte le nombre de composantes connexes. La structure Union-Find permet par exemple de calculer β_0 en temps $O(m\alpha(m))$ où $\alpha(m)$ est "l'inverse" de la fonction d'Ackermann. Des extensions aux surfaces et aux complexes de dimension 2 plongés dans $\mathbb{R}^3$ sont exposées dans [DE95].

3.4 Le foncteur homologique

L'homologie peut être vue comme une boîte noire qui transforme un espace topologique en groupes. L'objectif est de pouvoir "comparer" plus facilement des formes puisqu'intuitivement un groupe est un objet plus simple qu'un espace topologique. Le fait de pouvoir comparer des objets est intimement lié à l'existence de relations entre ces objets. Pris isolément, les objets d'un univers n'ont pas d'intérêt particulier. Leurs richesses provient de la possibilité de les mettre en relation. Dans le langage des catégories ces relations ont pour nom *morphismes* (ou *flèches*). Ainsi, les morphismes de la catégorie des espaces topologiques sont les applications continues, ceux de la catégorie des groupes, les morphismes de groupes. Une transformation entre les objets de deux catégories est d'autant plus opérante qu'elle s'applique également aux relations entre les objets. On sous-entend ici une cohérence minimale entre les transformations des objets et des morphismes. Une transformation ayant cette double capacité s'appelle un *foncteur*. De fait, l'homologie définie un foncteur entre la catégorie des espaces topologiques avec les applications continues et la catégorie des groupes avec les morphismes de groupes. Dit autrement, si $f : X \to Y$ est une application continue entre les espaces X et Y alors on sait définir un morphisme $H_*(f) : H_*(X) \to H_*(Y)$ entre leurs groupes d'homologie. Dans notre cadre algorithmique les espaces topologiques sont remplacés par les complexes simpliciaux. La notion d'application continue est alors remplacée par celle d'*application simpliciale*.

Définition 3.4.1 *Une application $f : K \to L$ entre deux complexes K et L est dite* simpliciale *si elle envoie les sommets de K sur les sommets de L et toute face d'un simplexe sur une face de son image.*

Une application simpliciale f s'étend par linéarité en une application $f_\#$ entre les groupes de chaînes respectifs de K et L. On vérifie aisément que cette extension commute avec l'opérateur bord. On en déduit que $f_\#$ envoie un cycle (resp. un bord) de K sur un cycle (resp. un bord) de L. Par conséquent $f_\#$ "passe au quotient" et induit un morphisme $H_*(f)$ entre les groupes d'homologie de K et L.

Exercice 3.4.2 *Vérifier que $H_*(Id_K) = Id_{H_*(K)}$ et que si $f : K \to L$ et $g : L \to M$ sont deux application simpliciales, alors $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$. On dit que le foncteur d'homologie est* covariant.

Chapitre 4

Persistance homologique

4.1 Motivation

La notion de persistance homologique apparaît dans les articles de Robins [Rob99] puis d'Edelsbrunner et al. [ELZ00] dans le cadre de la théorie de l'approximation. Cette notion a donné suite à de nombreux développements [ZC05, CSEM06, EMP06, CSEH07, CSEH08, EH08]. Le principe est d'encoder un processus d'évolution d'un objet plutôt que l'objet lui-même. Pour commencer, on se donne une filtration d'un complexe simplicial K :

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = K$$

Cette filtration induit d'après la section 3.4 une suite de morphismes en homologie :

$$H_*(K_1) \to \ldots \to H_*(K_n)$$

où chaque flèche est induite par l'inclusion. Clairement, cette suite de morphismes est un invariant plus riche pour la filtration que la simple collection des groupes d'homologie. On pourra considérer par exemple deux filtrations de longueur 2 du tore commençant par un cycle contractile ou non.

En travaillant avec des coefficients dans un corps on obtient ainsi une chaîne d'applications linéaires. On définit de manière naturelle une notion de morphismes entre deux telles chaînes : c'est une suite d'applications linéaires entre les espaces des deux chaînes telle que le diagramme global commute. La question se pose alors de classifier les chaînes à isomorphisme près. On va montrer que la notion d'intervalle de persistance fournit un invariant complet.

4.2 Classification des chaînes d'applications linéaires

4.2.1 Décomposition canonique

On se donne une chaîne d'applications linéaires de longueur n entre des espaces vectoriels E_i de dimensions finies sur un corps F donné :

$$E_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E_{n+1} \tag{4.1}$$

Pour tout $(i,j) \in [1, n+1]^2$ on définit $\phi_{i,j} : E_i \longrightarrow E_j$ comme la composition des ϕ_k entre E_i et E_j. Plus précisément, on pose

- $\forall i \in [1,n] : \phi_{i,i} = Id_{E_i}$
- $\forall 1 \leq i < j \leq n+1 : \phi_{i,j} = \phi_{i+1,j} \circ \phi_i$ et $\phi_{j,i} = 0$.

Exemple 4.2.1 *On note $F(i,j)$ la chaîne*

$$\underbrace{0 \to \dots \to 0}_{(i-1)\times 0} \to \underbrace{F^1 \xrightarrow{Id} \dots \xrightarrow{Id} F^1}_{(j-i+1)\times F^1} \to \underbrace{0 \to \dots \to 0}_{(n-j+1)\times 0}$$

C'est-à-dire avec les notations ci-dessus : E_k est l'espace de dimension 1 sur F pour $k \in [i,j]$ et 0 sinon, tandis que ϕ_k est l'identité pour $k \in [i,j[$ et l'application nulle sinon.

Le résultat principal de cette section est une décomposition canonique des chaînes d'applications linéaires.

Théorème 4.2.2 *Pour toute chaîne $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$ de longueur n de la forme (4.1), il existe un unique multi-ensemble d'intervalles, I, tel que $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$ est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{[i,j]\in I} F(i,j) \tag{4.2}$$

où chaque intervalle $[i,j]$ apparaît dans cette somme avec sa multiplicité dans I. Les intervalles de I sont appelés intervalles de persistance *de $(\phi_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Dans cette somme directe l'espace d'indice k est la somme directe des espaces – ici 0 ou F^1 – de même indice dans les $F(i,j)$. Les applications linéaires sont également obtenus par somme directe des applications – ici 0 ou l'identité – de même indice.

Soit I le multi-ensemble d'intervalles de persistances du théorème. On note $n_{i,j}$ la multiplicité de l'intervalle de persistance $[i,j]$ dans I. Pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$ on pose $\beta_{i,j} = rang(\phi_{i,j})$.

Lemme 4.2.3 *Pour tout* $1 \leq i < j \leq n+1$: $n_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta_{i-1,j} - (\beta_{i,j+1} - \beta_{i-1,j+1})$

Preuve : Clairement, chaque $F(k,\ell)$ de la décomposition contribue pour 1 dans $\beta_{i,j}$ si et seulement si $[i,j] \subset [k,\ell]$. Par suite, $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j}$ compte le nombre d'intervalles de persistance de la forme $[i,\ell]$ avec $\ell \geq j$. Soit encore $\beta_{i,j} - \beta_{i-1,j} = \sum_{\ell \geq j} n_{i,\ell}$. On en déduit le lemme. □

Le lemme montre l'unicité du multi-ensemble d'intervalles dans le théorème. L'existence, montrée ci-dessous, repose sur la notion de base compatible.

4.2.2 Bases compatibles

Pour $x \in E_i$, on pose

$$x(j) = \begin{cases} \phi_{i,j}(x) \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Définition 4.2.4 *Une* base compatible *pour la chaîne (4.1) est la donnée d'une famille* $X \subset \bigcup_i E_i$*, l'union étant considérée comme disjointe, telle que pour* $1 \leq i \leq n+1$ *la famille*

$$\{x(i) \mid (x \in X) \wedge (x(i) \neq 0)\}$$

est une base de E_i*.*

Par la suite on utilise par commodité la fonction d'activation $a : X \to [1, n+1]$ telle que $\forall x \in X : x \in E_{a(x)}$.

Proposition 4.2.5 *Toute chaîne du type (4.1) admet une base compatible.*

Preuve : On procède par récurrence sur la longueur de la chaîne. Pour une longueur nulle (E_1 seul est donné), une base quelconque de E_1 fournit une base compatible. On considère une chaîne du type (4.1) de longueur $n > 0$ et on suppose que X est une base compatible pour la sous-chaîne de longueur $n-1$:

$$E_1 \xrightarrow{\phi_1} \ldots \xrightarrow{\phi_{n-1}} E_n \tag{4.3}$$

Soit $k = |X|$ le nombre d'éléments de X. On définit de manière récursive des bases compatibles $X_1 = X, X_2, \ldots, X_k$ pour (4.3). Le but est d'obtenir une base compatible X_k dont les éléments s'envoient dans E_{n+1} soit sur 0 soit sur une sous-famille libre de E_{n+1}. Pour cela on commence par ordonner les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de X de manière non-décroissante pour l'activation, i.e. $a(x_j) \leq a(x_{j+1})$. On suppose avoir construit $X_{i-1} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ pour un $i > 1$, l'ordre des y_j étant non-décroissant pour l'activation, de sorte que les images non-nulles dans E_{n+1} de $\{y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}\}$ forment une famille libre.

– Si $y_i(n+1)$ $\big(= \phi_n\big(y_i(n)\big)\big)$ est nul ou linéairement indépendant de $\{y_j(n+1)\}_{j<i}$ alors on pose $X_i = X_{i-1}$,
– sinon, on peut écrire $y_i(n+1) = \sum_{j<i} \lambda_j y_j(n+1)$ et on pose $y_i' = y_i - \sum_{j<i} \lambda_j y_j(i)$ et
$$X_i = X_{i-1} \setminus \{y_i\} \cup \{y_i'\}$$
Clairement X_i est compatible pour (4.3) : les familles de la définition 4.2.4 pour X_i sont obtenues par des changements de bases élémentaires à partir des familles correspondantes pour X_{i-1}. De plus, par construction, les images non-nulles dans E_{n+1} des i premiers éléments de X_i forment une famille libre.

On obtient par récurrence une base compatible X_k de (4.3) telle que les éléments non nuls de $\{x(n+1)\}_{x \in X_k}$ forment une famille libre dans E_{n+1}.

Il reste à compléter X_k par une base d'un supplémentaire de $\phi_n(E_n)$ pour obtenir une base compatible pour (4.1). □

Définition 4.2.6 *À tout élément x d'une base compatible, on associe son* intervalle de persistance $\{i \mid x(i) \neq 0\}$.

Lemme 4.2.7 *Les intervalles de persistance des éléments d'une base compatible coïncident avec les intervalles de persistance du théorème 4.2.2.*

Preuve : Il suffit d'adapter la preuve du lemme 4.2.3 en définissant cette fois n_{ij} comme la multiplicité de l'intervalle $[i, j]$ parmi les intervalles de persistance des éléments d'une base compatible. □

Preuve de l'existence de la décomposition canonique du théorème 4.2.2 : Notons tout d'abord qu'une décomposition canonique admet une base compatible formée, pour chaque $F(i, j)$ de la décomposition, d'un générateur de F^1 dans l'espace d'indice i. L'intervalle de persistance d'un tel générateur est précisément $[i, j]$.

Soit une chaîne de la forme (4.1). Par la proposition 4.2.5, on peut choisir une base compatible X pour cette chaîne. Soit I le multi-ensemble des intervalles de persistance des éléments de X et soit Y une base compatible de la décomposition canonique (4.2) construite comme ci-dessus. On note F_i l'espace d'indice i dans la décomposition canonique et on considère une bijection $f : X \to Y$ qui respecte les intervalles de persistance (cf. lemme 4.2.7). Cette bijection induit pour chaque i un morphisme $f_i : E_i \to F_i$ obtenu en envoyant la base de E_i associée à X (cf. définition 4.2.4) sur la base correspondante de F_i via f : $f_i(x(i)) = f(x)(i)$. Clairement les f_i forment une application de chaîne et l'inverse de f induit l'application inverse. □

4.2.3 Persistance des sous-chaînes

On considère une chaîne $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$:
$$E_1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} E_{n+1}$$

et une injection croissante $\kappa : [1, m+1] \to [1, n+1]$. On définit une *sous-chaîne* $(\phi'_j)_{1 \le j \le m}$:

$$E'_1 \xrightarrow{\phi'_1} \dots \xrightarrow{\phi'_m} E'_{m+1}$$

de la chaîne $(\phi_i)_{1 \le i \le n}$ en posant $E'_j = E_{\kappa(j)}$, pour $j \in [1, m+1]$, et en posant, avec les notations de la section 4.2.1, $\phi'_j = \phi_{\kappa(j), \kappa(j+1)}$, pour $j \in [1, m]$. On pose de plus

$$\begin{array}{rcl} \lambda : [1, \kappa(m+1)] & \to & [1, m+1] \\ i & \mapsto & \min\{j \in [1, m+1] \mid \kappa(j) \ge i\} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mu : [\kappa(1), n+1] & \to & [1, m+1] \\ i & \mapsto & \max\{j \in [1, m+1] \mid \kappa(j) \le i\} \end{array}$$

Lemme 4.2.8 *Soit I le multi-ensemble des intervalles de persistance de la chaîne $(\phi_i)_{1 \le i \le n}$. Alors le multi-ensemble des intervalles de persistance de $(\phi'_j)_{1 \le j \le m}$ est $\{[\lambda(i), \mu(j)] \mid [i, j] \in I$ et $\lambda(i) \le \mu(j)\}$.*

Preuve : Il suffit de partir d'une décomposition canonique de $(\phi_i)_{1 \le i \le n}$ de la forme (4.2) et de remarquer qu'une composition d'applications identité ou nulle reste de l'un de ces deux types. Nous laissons le lecteur combler les détails. Une autre preuve consiste à partir d'une une base compatible X pour $(\phi_i)_{1 \le i \le n}$. On note $a : X \to [1, n+1]$ la fonction d'activation telle que $\forall x \in X : x \in E_{a(x)}$ et on pose $a'_x = \kappa \circ \lambda(a(x))$ si $a(x) \le \kappa(m+1)$. Alors, avec les notations de la section 4.2.2, il est immédiat que la famille $X' = \{x(a'_x) \mid x \in X$ et $a(x) \le \kappa(m+1)$ et $x(a'_x) \neq 0\}$ est une base compatible pour $(\phi'_j)_{1 \le j \le m}$. Notons que $x(a'_x) \in E_{a'_x} = E'_{\kappa^{-1}(a'_x)} = E'_{\lambda(a(x))}$. De plus si l'intervalle de persistance (cf. définition 4.2.6) de $x \in X$ est $[a_x, b_x]$, celui de $x(a'_x) \in X'$ est $[\lambda(a_x), \mu(b_x)]$. □

4.3 Persistance des filtrations de complexes simpliciaux

Soit K un complexe simplicial et $\mathcal{K}$ une filtration :

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = K \tag{4.4}$$

Les inclusions de cette filtration induisent une chaîne de morphismes entre les groupes d'homologie de chaque complexe de la filtration :

$$H(K_1) \to H(K_2) \to \dots \to H(K_n) \tag{4.5}$$

On considère l'homologie sur un corps F, de sorte que les $H(K_i)$ sont des espaces vectoriels. Selon l'usage on note $C(K_i)$ (resp.$Z(K_i)$, resp. $B(K_i)$) l'espace des chaînes (resp. cycles, resp. des bords) de K_i. On omet volontairement la dimension pour ne pas alourdir les notations. On peut soit la rétablir partout où elle est utile, soit considérer que les espaces $C(K_i), Z(K_i), B(K_i), H(K_i)$ sont des sommes directes de ces espaces usuellement pris dans chaque dimension.

Définition 4.3.1 *On appelle* intervalles de persistance *de la filtration $\mathcal{K}$ les intervalles de persistance de la chaîne induite (4.5). On note $I(\mathcal{K})$ le multi-ensemble des intervalles de persistance de $\mathcal{K}$.*

4.3.1 Filtration simples

Pour des raisons algorithmiques on s'intéresse aux filtrations obtenues en ajoutant un à un les simplexes de K. La filtration $\mathcal{K}$ est dite *simple* si K_1 est réduit à un sommet $\sigma_1 \in K$ et si K_i, $2 \leq i \leq n$, se déduit de K_{i-1} par l'ajout d'un unique simplexe $\sigma_i \in K$. Une filtration simple s'identifie donc à un ordre sur les simplexes de K dont les préfixes sont des sous-complexes de K. On supposera $\mathcal{K}$ simple dans ce qui suit.

En considérant l'application bord comme un endomorphisme de $C(K_i)$, on obtient par la formule du rang d'une application linéaire :

$$\dim C(K_i) = \dim Z(K_i) + \dim B(K_i)$$

On en déduit en retranchant à cette équation celle pour K_{i-1}, et en notant que $\dim C(K_i)$ est le nombre de simplexes de K_i :

$$\big(\dim Z(K_i) - \dim Z(K_{i-1})\big) + \big(\dim B(K_i) - \dim B(K_{i-1})\big) = 1$$

Les deux termes entre parenthèses étant positifs ou nuls on a pour tout i,

1. ou bien $\dim Z(K_i) = \dim Z(K_{i-1}) + 1$ et $B(K_i) = B(K_{i-1})$,
2. ou bien $Z(K_i) = Z(K_{i-1})$ et $\dim B(K_i) = \dim B(K_{i-1}) + 1$.

Définition 4.3.2 *On dira que l'indice i (ou le simplexe σ_i) dans la filtration simple $\mathcal{K}$ est* positif *dans le premier cas, et* négatif *dans le second. L'ensemble des indices positifs et négatifs de $\mathcal{K}$ sont respectivement notés $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{K})$.*

Lemme 4.3.3 *Les conditions suivantes sont équivalentes*
- *σ_i est positif,*
- *σ_i est dans le support d'un cycle $z \in Z(K_i)$ et $Z(K_i) = Z(K_{i-1}) \oplus Fz$,*
- *$\partial\sigma_i \in B(K_{i-1})$,*

La preuve est laissée à titre d'exercice. Notons que dans tous les cas on a

$$B(K_i) = B(K_{i-1}) + F\partial\sigma_i, \tag{4.6}$$

la somme étant directe si et seulement si σ_i est négatif.

Lemme 4.3.4 *Tout intervalle de $I(\mathcal{K})$ est de la forme $[i, j]$ avec*

$$(i, j+1) \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \times (\mathcal{N}(\mathcal{K}) \cup \{n+1\}).$$

De plus,

- *tout indice positif est la borne inférieure d'un unique intervalle de $I(\mathcal{K})$ de multiplicité un, et*
- *tout indice négatif j est tel que $j-1$ est la borne supérieure d'un unique intervalle de $I(\mathcal{K})$ de multiplicité un.*

On notera que $n+1$ n'est pas un indice de la filtration et que n peut être la borne supérieure de plusieurs intervalles de persistance.

Preuve : On note n_i (resp. m_i) le nombre d'intervalles de persistance de (4.5) commençant (resp. se terminant) en i. On note également β_i le rang du morphisme $H(K_i) \to H(K_{i+1})$ induit par l'inclusion $K_i \subset K_{i+1}$. D'après la forme canonique (4.2), la dimension de $H(K_i)$ est le nombre d'intervalles de persistance contenant i. En partitionnant ces intervalles en ceux qui commencent en i et les autres, on obtient :

$$\dim H(K_i) = n_i + \beta_{i-1}$$

de même, en séparant ces intervalles en ceux qui se terminent en i et les autres, on obtient :

$$\dim H(K_i) = m_i + \beta_i$$

Puisque $B(K_i) \subset B(K_{i+1}) \subset Z(K_i) \subset Z(K_{i+1})$, l'image de $H(K_i) = Z(K_i)/B(K_i)$ dans $H(K_{i+1}) = Z(K_{i+1})/B(K_{i+1})$ est isomorphe à $Z(K_i)/B(K_{i+1})$, d'où

$$\beta_i = \dim Z(K_i) - \dim B(K_{i+1})$$

On en déduit, avec $\dim H(K_i) = \dim Z(K_i) - \dim B(K_i)$, que

$$n_i = \dim Z(K_i) - \dim Z(K_{i-1}) \quad \text{et} \quad m_i = \dim B(K_{i+1}) - \dim B(K_i)$$

Ces deux égalités permettent de conclure, compte tenu de la définition des indices positifs et négatifs. □

Définition 4.3.5 *Le lemme précédent permet de définir les applications* naissance *et* mort

$$N : \mathcal{N}(\mathcal{K}) \to \mathcal{P}(\mathcal{K}) \quad \textit{et} \quad M : \mathcal{P}(\mathcal{K}) \to \mathcal{N}(\mathcal{K}) \cup \{n+1\}$$

telles que pour tout indice i positif et tout indice j négatif les intervalles $[i, M(i)-1]$ et $[N(j), j-1]$ sont des intervalles de $I(\mathcal{K})$.

4.3.2 Famille compatible des bords

Notre objectif est de calculer les signes des simplexes et les intervalles de persistance de la filtration (4.4) de manière efficace. On introduit pour cela la notion de famille compatible des bords.

Définition 4.3.6 *Une* famille compatible des bords *pour la filtration (4.4) est une famille $\{x_j\}_{j\in J}$, $J \subset [1,n]$, de cycles de K vérifiant les conditions*

1. *$\forall i \in [1,n], \{x_j \mid (j \in J) \wedge (j \leq i)\}$ est une base de $B(K_i)$,*
2. *L'application $\nu : J \to [1,n]$ qui associe à tout j l'indice maximal $\nu(j)$ des simplexes du support de x_j est injective.*

Lemme 4.3.7 *La fonction ν définie ci-dessus coïncide avec la fonction N de la définition 4.3.5.*

Preuve : La condition 1 ci-dessus et la note suivant l'équation (4.6) montrent que $J = \mathcal{N}(\mathcal{K})$. Le lemme 4.3.3 montre également que pour tout $j \in J$, $\nu(j) \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$. On définit des cycles $z_i \in Z(K_i)$ pour tout $i \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ comme suit :

- Si $i \in \mathcal{P}(\mathcal{K})\backslash\nu(J)$, on choisit z_i tel que $Z(K_i) = Z(K_{i-1}) \oplus F z_i$ (cf. lemme 4.3.3).
- Sinon, $i = \nu(j)$ pour un certain $j \in J$ et on pose $z_{\nu(j)} = x_j$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les classes d'homologie des z_i (pris dans $H(K_i)$) forment une base compatible pour (4.5) au sens de la définition 4.2.4 et que les intervalles de persistance des $z_{\nu(j)}$ sont de la forme $[\nu(j), j-1]$. □

Proposition 4.3.8 *Toute filtration simple admet une famille compatible des bords.*

La preuve est donnée par l'algorithme qui suit.

Exercice 4.3.9 *Montrer que $N(i+1) = i$ implique que σ_i est une face de σ_{i+1}.*

4.3.3 Algorithme

Le lemme 4.3.7 ci-dessus indique qu'il suffit de construire une famille compatible des bords pour calculer le signe de chaque simplexe et les intervalles de persistance d'une filtration simple.

La construction se fait par récurrence sur la taille n de la filtration. Le cas $n = 1$ est trivial puisque l'unique simplexe de la filtration est nécessairement positif. Supposons donc avoir construit une famille compatible des bords $\{x_j\}_{j\in J}$ pour la sous-filtration $\mathcal{K}'$:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{n-1}$$

On désigne par $N : J \to \mathcal{P}(\mathcal{K}')$ la fonction de naissance associée. Supposons pouvoir calculer une décomposition du bord de σ_n sous la forme

$$\partial\sigma_n = \sum_{j \in J} \alpha_j x_j + x_n \tag{4.7}$$

de sorte que

1. ou bien x_n est nul,
2. ou bien l'indice maximal des simplexes du support de x_n n'est pas dans $N(J)$.

Si x_n est nul alors $B(K_n) = B(K_{n-1})$ (cf. (4.6)) et $\{x_j\}_{j \in J}$ reste une famille compatible des bords pour $\mathcal{K}$. Sinon, c'est le cas pour $\{x_j\}_{j\in J} \cup \{x_n\}$.

Notons que toute famille compatible des bords forme une base échelonnée de vecteurs sur la base canonique des simplexes (cf. condition 2 de la définition 4.3.6). La décomposition (4.7) peut donc s'obtenir par la méthode du pivot de Gauss décrite par le pseudo-code suivant :

$y := \partial\sigma_n$
$i :=$ indice maximal des simplexes du support de y
Tant que ($(y \neq 0) \wedge (i \in N(J))$)
  $j := N^{-1}(i)$
  $\alpha :=$coefficient de σ_i dans y
  $\beta :=$coefficient de σ_i dans x_j
  $y := y - (\alpha/\beta)x_j$
  $i :=$ indice maximal des simplexes du support de y
Fin tant que
* *y contient x_n à la sortie de la boucle* *\

Analyse de la complexité On stocke chaque cycle x_j par la liste des coefficients de ses simplexes dans un tableau indexé par les n simplexes de K. On représente la fonction N par un tableau de taille n ; la case j contient $N(j)$ si σ_j est négatif et 0 sinon. On stocke également la fonction inverse N^{-1} $(= M)$ dans un tableau de taille n. Le calcul de x_n dans l'algorithme précédent prend un temps $O(n^2)$. On en déduit

Proposition 4.3.10 *Le calcul d'une famille compatible des bords et de la fonction N pour une filtration de longueur n requiert un temps $O(n^3)$ sur une machine F-RAM (i.e. les opérations élémentaires $+, -, *, \div$ sur F prennent un temps constant). En particulier, on peut calculer les intervalles de persistance de la filtration dans le même temps.*

4.4 Diagramme de persistance

Se donner une filtration d'un complexe K revient à se donner une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ qui soit non décroissante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall \sigma, \tau \in K : \sigma \prec \tau \implies f(\sigma) \leq f(\tau)$$

où $\prec$ est la relation "être face de". En effet, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est la suite croissante des *valeurs* de f alors la suite de complexes

$$f^{-1}([-\infty, x_1]) \subset f^{-1}([-\infty, x_2]) \subset \ldots \subset f^{-1}([-\infty, x_n]) \tag{4.8}$$

fournit une filtration de K que l'on note $\mathcal{K}_f$. Inversement, toute filtration $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = K$ est de la forme $\mathcal{K}_f$ pour la fonction f définie par $f(\sigma) = i$ pour $\sigma \in K_i \setminus K_{i-1}$.

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction non décroissante et $I = I(\mathcal{K}_f)$ le multi-ensemble d'intervalles de persistance de la filtration $\mathcal{K}_f$ associée. Dit autrement, I est le multi-ensemble d'intervalles de persistance de la chaîne :

$$H(K_1) \to H(K_2) \to \ldots \to H(K_n)$$

où l'on a posé $K_i = f^{-1}([-\infty, x_i])$.

Définition 4.4.1 *Le* diagramme de persistance *de f, noté $D(f)$, est la réunion dans le plan étendu* $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$
- *du multi-ensemble de points $\{(x_i, x_{j+1})\}_{[i,j] \in I}$, où l'on a posé $x_{n+1} = +\infty$, et*
- *des points de la diagonale du plan $\{x = y\}$ comptés chacun avec multiplicité infinie (dénombrable).*

On note Δ^∞ le multi-ensemble des points de la diagonale avec multiplicité infinie.

On dira qu'une filtration $\mathcal{K} : K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = K$ est *compatible* avec la fonction $f : K \to \mathbb{R}$ si $\mathcal{K}_f$ est une sous-filtration de $\mathcal{K}$. Autrement dit, si f est constante sur chaque $K_i \setminus K_{i-1}$ et si la fonction $f_\mathcal{K} : [1, m] \to \mathbb{R}$, $i \mapsto f(K_i \setminus K_{i-1})$ est non-décroissante.

Définition 4.4.2 *le diagramme de persistance d'une fonction non-décroissante $f : K \to \mathbb{R}$ relativement à une filtration $\mathcal{K}$ compatible avec f est le multi-ensemble de points*

$$D(f, \mathcal{K}) = \Delta^\infty \cup \{(f_\mathcal{K}(i), f_\mathcal{K}(j+1))\}_{[i,j] \in I(\mathcal{K})}$$

où l'on a posé $f_\mathcal{K}(m+1) = +\infty$, m étant la longueur $\mathcal{K}$.

En particulier, $D(f) = D(f, \mathcal{K}_f)$.

Lemme 4.4.3 *$D(f) = D(f, \mathcal{K})$ pour toute filtration $\mathcal{K}$ compatible avec f.*

Preuve : Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la suite croissante des valeurs (distinctes) de f sur K. On pose $\kappa : [1, n] \to [1, m], i \mapsto \max\{j \mid f_{\mathcal{K}}(j) = x_i\}$. Clairement, $f^{-1}([-\infty, x_i]) = K_{\kappa(i)}$ et la chaîne d'homologie induite par $\mathcal{K}_f$ définit, avec l'injection κ, une sous-chaîne de celle induite par $\mathcal{K}$ selon la terminologie de la section 4.2.3. On en déduit par le lemme 4.2.8 que $I(\mathcal{K}_f) = \{[\lambda(i), \mu(j)] \mid [i, j] \in I(\mathcal{K}) \text{ et } \lambda(i) \leq \mu(j)\}$, avec λ et μ comme dans le lemme. D'où

$$D(f) = D(f, \mathcal{K}_f) = \Delta^\infty \cup \{(x_{\lambda(i)}, x_{\mu(j)+1}) \mid [i, j] \in I(\mathcal{K}) \text{ et } \lambda(i) \leq \mu(j)\}$$

On vérifie aisément avec les définitions de κ, λ et μ que $x_{\lambda(i)} = f_{\mathcal{K}}(i)$ et $x_{\mu(j)+1} = f_{\mathcal{K}}(j+1)$. Soit encore

$$D(f) = \Delta^\infty \cup \{(f_{\mathcal{K}}(i), f_{\mathcal{K}}(j+1)) \mid [i, j] \in I(\mathcal{K}) \text{ et } \lambda(i) \leq \mu(j)\}$$

Mais si $\lambda(i) > \mu(j)$ pour un certain intervalle $[i, j] \in I(\mathcal{K})$ alors $f_{\mathcal{K}}(i) = f_{\mathcal{K}}(j+1)$ et le point correspondant $(f_{\mathcal{K}}(i), f_{\mathcal{K}}(i))$ est "absorbé" par la diagonale Δ^∞. On conclut finalement
$D(f) = \Delta^\infty \cup \{(f_{\mathcal{K}}(i), f_{\mathcal{K}}(j+1))\}_{[i,j] \in I(\mathcal{K})} = D(f, \mathcal{K})$. □

Ainsi le diagramme de persistance de f peut être calculé à partir de n'importe quelle filtration compatible avec f.

4.4.1 Stabilité du diagramme de persistance

Soient $f, g : K \to$ deux fonctions non-décroissantes. On note

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{\sigma \in K} |f(\sigma) - g(\sigma)|$$

leur distance L_∞.

On définit également une distance d entre diagrammes de persistance par

$$d(D, D') = \sup_\phi \sup_{p \in D} \|p - \phi(p)\|_\infty$$

où $\phi : D \to D'$ décrit l'ensemble des bijections entre D et D' et $\|p - q\|_\infty = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$. Notons que D et D' ont tous les deux même cardinal (du continu) du fait de la présence de la diagonale Δ^∞.

Proposition 4.4.4 $d(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty$

Preuve : On pose $f_t = f + t(f - g)$. Notons que f_t est non-décroissante sur K. Pour toute paire de simplexes $\sigma, \tau \in K$, il existe un réel $u \in [0, 1]$ tel que le signe (au sens large) de $f_t(\sigma) - f_t(\tau)$ reste constant pour $t \in [0, u]$ et de même pour $t \in [u, 1]$. Il existe donc une partition finie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$ de[1] $[0, 1]$ telle que l'ordre

[1] $r \leq \binom{m}{2} + 2$ où m est le nombre de simplexes de K

relatif des f_t-valeurs des simplexes soit constant sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. On en déduit pour chaque $i \in [0, r-1]$ une filtration $\mathcal{K}_i$ compatible avec *toutes* les fonctions f_t pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Par le lemme 4.4.3, on a

$$D(f_t) = \Delta^\infty \cup \{\big(f_{t_i}(\sigma_a), f_{t_i}(\sigma_{b+1})\big)\}_{[a,b]\in I(\mathcal{K}_i)}$$

où σ_a est un simplexe du a-ième complexe de la filtration $\mathcal{K}_i$ qui maximise f_t (indépendamment de $t \in [t_i, t_{i+1}]$). En considérant la bijection évidente entre $D(f_{t_i})$ et $D(f_{t_{i+1}})$ qui vaut l'identité sur Δ^∞ et envoie $\big(f_{t_i}(\sigma_a), f_{t_i}(\sigma_{b+1})\big)$ sur $\big(f_{t_{i+1}}(\sigma_a), f_{t_{i+1}}(\sigma_{b+1})\big)$, on déduit $d(D(f_{t_i}), D(f_{t_{i+1}})) \leq (t_{i+1} - t_i)\|f - g\|_\infty$. Par application de l'inégalité triangulaire on obtient finalement

$$d(D(f), D(g)) \leq \sum_i (t_{i+1} - t_i)\|f - g\|_\infty = \|f - g\|_\infty$$

$\square$

Chapitre 5

Homologie et approximation

Soit X un sous-espace fermé d'un espace métrique (M, d) (On pourra prendre $M = \mathbb{R}^n$). Connaissant une approximation Y de X on souhaite extrapoler la topologie de X. Robins [Rob99] a montré comment déduire en pratique l'homologie de X à partir de voisinages tubulaires de Y. Par définition l'ϵ-voisinage tubulaire de Y est

$$Y^\epsilon = \{x \in M \,:\, d(x, Y) \leq \epsilon\}$$

Le principe développé par Robins est le suivant. Si Y est suffisamment proche de X pour la distance de Hausdorff alors un petit voisinage tubulaire de Y se trouve emboîtés entre deux petits voisinages tubulaires de X et réciproquement. Pour peu que X soit suffisament régulier, les petits voisinages tubulaires de X ont la même homologie et un simple calcul algébrique montre que cette homologie peut s'exprimer en fonction des homologies des voisinages tubulaires de Y. Notons que des arguments et conclusions similaires ont été obtenus par Cohen-Steiner et al. [CSEH07] et Chazal et Lieutier [CL05]. Ce dernier travail, spécifique aux sous-espaces de $M = \mathbb{R}^n$, montre également comment déduire le groupe fondamental de (petits voisinages tubulaires) de X à partir de voisinages tubulaires de Y.

Dans la suite on note $d_X : y \in M \mapsto d(y, X) = \inf_{x\in X} d(y, x)$ la fonction distance au sous-espace X et $X^\epsilon = d_X^{-1}([0, \epsilon])$ le ϵ-voisinage de X.

Définition 5.0.5 *Un réel positif a est dit* valeur régulière homologique *de d_X s'il existe ϵ positif tel que l'inclusion $j : X^{a-\epsilon} \hookrightarrow X^{a+\epsilon}$ induit un isomorphisme en homologie, i.e. $j_* : H_k(X^{a-\epsilon}) \to H_k(X^{a+\epsilon})$ est un isomorphisme pour tout k.*

Dans le cas contraire a est dit valeur critique homologique.

*On définit $hfs(X)$ (*homological feature size*) comme l'infimum des valeurs critiques homologiques non-nulles de d_X.*

On note d_H la distance de Hausdorff :

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x\in X} d_Y(x), \sup_{y\in Y} d_X(y)\}$$

Exercice 5.0.6 *Montrer que*

$$d_H(X,Y) = \inf\{\epsilon \geq 0 : Y \subset X^\epsilon \text{ et } X \subset Y^\epsilon\}$$

Lemme 5.0.7 *Pour tout $\epsilon \geq 0$, on a $X^\epsilon \subset Y^{\epsilon + d_H(X,Y)}$.*

Preuve : Soit $z \in X^\epsilon$, alors

$$\forall x \in X : d(z,Y) \leq d(z,x) + d(x,Y) \leq d(z,x) + d_H(X,Y)$$

On en déduit $d(z,Y) \leq \epsilon + d_H(X,Y)$ par passage à l'infimum du membre de droite. D'où $z \in Y^{\epsilon + d_H(X,Y)}$. □

remarquons que les rôles de X et Y peuvent être interchangés.

On peut désormais énoncé le résultat principal (appelé théorème d'inférence homologique dans [CSEH07])

Théorème 5.0.8 *Soit X et Y deux sous-espaces d'un espace métrique (M,d) tels que $hfs(X) > 0$ et $d_H(X,Y) < hfs(X)/4$.*
Alors, pour tous nombres positifs ϵ, δ tels que $d_H(X,Y) + \epsilon \leq \delta < hfs(X)/4$, l'homologie de X^ϵ (en toutes dimensions) est isomorphe à l'image du morphisme induit en homologie par l'inclusion $Y^\delta \subset Y^{3\delta}$.

La proposition mentionne le voisinage tubulaire X^ϵ et non X lui-même. Pour de nombreux espaces (sous-variétés compactes et lisses de $\mathbb{R}^n$, complexes affines finis plongés dans $\mathbb{R}^n$,...) X^ϵ se rétracte par déformation sur X. Par suite X^ϵ et X ont la même homologie (et même type d'homotopie). Chazal et Lieutier [CL05] donnent cependant un exemple d'un sous-espace compacte X du plan avec $hfs(X) > 0$ pour lequel X et X^ϵ n'ont pas la même homologie : l'espace X, parfois appelé la sinusoide fermée du topologue, est obtenu en recollant le graphe de la fonction $\sin \frac{1}{x} :]0, \frac{2}{3\pi}] \to \mathbb{R}$ avec la courbe polygonale joignant les points $(0,1), (0,-2), (\frac{2}{3\pi}, -2)$ et $(\frac{2}{3\pi}, -1)$. Alors X^ϵ a le type d'homotopie d'un cercle (épaissi) alors que X est contractile. Sur ce sujet on pourra également consulter la notion d'espace ANR (Absolute Neighborhood Retract) (cf. [GH81]).

La preuve du théorème repose sur un petit lemme préparatoire. La démonstration facile est laissée au lecteur.

Lemme 5.0.9 *Soit une chaîne de morphismes*

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$$

telle que $b \circ a$ et $d \circ c$ sont des isomorphismes. Alors A est isomorphe à l'image de $c \circ b$.

Preuve du théorème : Par hypothèse sur ϵ et δ et compte tenu du lemme 5.0.7, on a la suite d'inclusions

$$X^{\epsilon} \subset Y^{\delta} \subset X^{2\delta} \subset Y^{3\delta} \subset X^{4\delta}$$

Puisque $4\delta < hfs(X)$, les inclusions $X^{\epsilon} \subset X^{2\delta} \subset X^{4\delta}$ induisent des isomorphismes en homologie et on conclut avec le lemme précédent après passage aux morphismes induits en homologie. $\square$

Chapitre 6

Homotopie

6.1 Version continue

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x \in X$.

Un *lacet* de X de point base x est une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = f(1) = x$. On note 1_x le lacet constant ($\forall t \in [0,1] : 1_x(t) = x$).

Une *homotopie* (à point base) entre deux lacets f et g est une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $H(0,.) = f$, $H(1,.) = g$ et $H(.,0) = H(.,1) = x$. On dit alors que f et g sont *homotopes*. La *classe d'homotopie* d'un lacet est l'ensemble des lacets qui lui sont homotopes.

La *concaténation* de deux lacets f et g est le lacet

$$f.g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie aisément que pour tous lacets f_0, f_1, g_0, g_1 :
– les lacets f_0, $f_0.1_x$ et $1_x.f_0$ sont homotopes,
– le lacet $f_0.f_0^{-1}$ est homotope au lacet constant,
– si f_0 est homotope à f_1 et g_0 est homotope à g_1 alors $f_0.g_0$ est homotope à $f_1.g_1$.
On en déduit que l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de point base x forme un groupe pour la loi de concaténation (modulo l'homotopie) ; son élément neutre est la classe du lacet constant. Ce groupe est appelée le *groupe fondamental* de X et noté $\pi_1(X, x)$.

Exercice 6.1.1 *Montrer, en utilisant la connexité par arc de X, que pour tout $x, y \in X$, les groupes $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes.*

Le groupe fondamental d'un espace peut être commutatif ou non, fini ou non. Pour la plupart des espaces rencontrés, ce groupe est cependant de type fini (i.e., engendré par une famille finie d'éléments). Dans la pratique le *calcul* du groupe fondamental d'un espace revient à déterminer une famille génératrice et à fournir les *relations* entre ces générateurs qui permettent de reconstituer entièrement le groupe. Ces relations expriment l'identité entre l'élément neutre et certains produits de générateurs et de leurs inverses. une telle représentation d'un groupe, par générateurs et relations, est dite *combinatoire*.

Par exemple le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ admet une représentation combinatoire avec un unique générateur et une unique relation exprimant que la puissance p-ième de ce générateur est l'identité. On note cette représentation sous la forme

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =< g \mid g^p = 1 >$$

6.1.1 Représentation combinatoire des groupes

On explicite la notion de représentation combinatoire.

Soit G un ensemble de symboles. On note G^{-1} l'ensemble des symboles de G affublés du signe $^{-1}$. Intuitivement les symboles de G^{-1} représentent les inverses des symboles de G dans un certain groupe. On définit une relation d'équivalence sur les mots formés à partir des symboles de $G \cup G^{-1}$: deux mots sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'ajouts ou de suppressions de sous-mots de la forme $g.g^{-1}$ ou $g^{-1}.g$ où $g \in G$. On vérifie que la loi de concaténation sur les mots est compatible avec cette relation d'équivalence.

À partir de G on construit un groupe appelé le *groupe libre* sur G. Il est noté $L(G)$. C'est l'ensemble des mots sur l'alphabet $G \cup G^{-1}$ modulo la relation d'équivalence précédente et muni de la loi de concaténation. Son élément neutre est le mot vide.

Soient u, w deux éléments de $L(G)$. Le *conjugué* de w par u est l'élément $u^{-1}.w.u$ de $L(G)$. Si R est une partie de $L(G)$, le *sous-groupe distingué engendré par* R est le sous-groupe $C(R)$ de $L(G)$ constitué des éléments de R, de leurs inverses, de tous leurs conjugués (par des éléments de $L(G)$) et des produits de tels éléments. Dit autrement, $C(R)$ est le plus petit sous-groupe distingué de $L(G)$ contenant R.

On peut maintenant définir formellement la notion de représentation combinatoire : le groupe de représentation combinatoire

$$< G \mid R >$$

est le groupe quotient $L(G)/C(R)$. Intuitivement, c'est l'ensemble des mots sur $G \cup G^{-1}$, où l'on identifie deux mots si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations du type

1. ajout ou suppression de sous-mots de la forme $g.g^{-1}$ ou $g^{-1}.g$ où $g \in G$,
2. ajout ou suppression de mots de R ou de leurs inverses.

Exercice 6.1.2 *en admettant si besoin un nombre infini de générateurs ou de relations, montrer que tout groupe admet une représentation combinatoire.*

Un des outils fondamentaux pour le calcul effectif du groupe fondamental est le théorème de Seifert-van Kampen qui permet de calculer le groupe fondamental d'un espace à partir d'une décomposition de cet espace en morceaux. Voir Massey [Mas77] pour une excellente introduction au groupe fondamental et ses applications.

Lorsque les espaces étudiés sont triangulés, une approche purement combinatoire du groupe fondamental peut s'avérer plus simple. Bien entendu, la définition combinatoire du groupe fondamental dans ce qui suit est isomorphe à celle qu'on obtient dans le cas continu. En particulier, cette définition donne des résultats isomorphes pour des triangulations combinatoirement équivalentes. La démonstration de l'équivalence entre continu est combinatoire fait intervenir de la topologie générale et peut être assez fastidieuse, mais elle ne recèle pas de difficultés particulières.

6.2 Version combinatoire

6.2.1 Le groupe fondamental des graphes

On considère un graphe connexe $G = (S, A, o, ^{-1})$.

Définition 6.2.1 *Un* chemin *de G est une suite finie d'arcs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, éventuellement vide si $n = 0$, telle que la destination de e_i coïncide avec l'origine de e_{i+1}. Un* lacet *(combinatoire) ou* chemin fermé *de G est un chemin dont l'origine coïncide avec le sommet terminal. On appelle* (point) base *cette origine. Le chemin vide est un lacet de point base indéterminé. La* taille *d'un chemin (lacet) γ, notée $|\gamma|$, est son nombre d'arcs. L'*inverse *du chemin $\gamma = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est le chemin $\gamma^{-1} = ({e_n}^{-1}, \ldots, {e_2}^{-1}, {e_1}^{-1})$.*

Définition 6.2.2 *Un chemin est* réduit *s'il ne contient pas de sous-chemin de la forme (e, e^{-1}). Une* réduction élémentaire *est la suppression dans un chemin, d'un sous-chemin de la forme (e, e^{-1}).*

Les réductions élémentaires engendrent une relation d'équivalence sur les chemins de G. On appelle *homotopie* cette relation. Par une caractérisation fondamentale des groupes libres, chaque classe d'homotopie contient un unique chemin réduit. Un lacet homotope au lacet vide est dit *homotope à un point* ou *contractile* (par anglicisme ?).

Proposition 6.2.3 *Soit x un sommet de G. L'ensemble des classes d'homotopie de lacets de base x forme un groupe pour la loi de concaténation, noté $\pi_1(G, x)$.*

Soit T un arbre couvrant de G, et soit x un sommet de T. On associe à tout arc e de T, le lacet

$$\gamma_e^T = \gamma_{x,o(e)}^T . e . \gamma_{o(e^{-1}),x}^T$$

où $\gamma^T_{u,v}$ est l'unique chemin réduit de u à v dans T.

On note E' l'ensemble des cordes de T dans G.

On vérifie aisément que tout chemin $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de G est homotope au chemin $\gamma^T_{e_1}.\gamma^T_{e_2}.\dots.\gamma^T_{e_n}$. De plus, pour tout arc e de T, γ^T_e est homotope au lacet constant. On en déduit que $\pi_1(G,x)$, est engendré par les γ^T_e, avec e (munie de son orientation par défaut) dans E'. Clairement, puisque chaque arête de E' apparaît une unique fois dans les lacets de la famille $\{\gamma^T_e\}_{e\in E'}$, cette famille ne vérifie aucune relation non triviale et engendre de ce fait librement $\pi_1(G,x)$. On en conclut que

Théorème 6.2.4 $\pi_1(G,x)$ *est isomorphe au groupe libre engendré par les cordes de tout arbre couvrant de* G.

6.2.2 Le groupe fondamental des surfaces

On considère une surface triangulée connexe $\mathcal{M}$. On notera respectivement S, A et F ses ensembles de sommets, arêtes et faces.

Définition 6.2.5 *Un* chemin *(resp. lacet)* γ *de* $\mathcal{M}$ *est un chemin (resp. lacet) de son 1-squelette. Une* homotopie élémentaire *de* γ *est soit une réduction élémentaire (suppression de* $e.e^{-1}$*) soit la suppression dans* γ *d'un sous-chemin* (a,b,c) *qui borde un triangle de* $\mathcal{M}$.

Les homotopies élémentaires engendrent une relation d'équivalence sur les chemins (resp. lacets) de $\mathcal{M}$. On appelle *homotopie* cette relation.

Proposition 6.2.6 *Soit* x *un sommet de* $\mathcal{M}$. *L'ensemble des classes d'homotopie de lacets de base* x *forme un groupe pour la loi de concaténation, noté* $\pi_1(\mathcal{M},x)$ *et appelé le groupe fondamental de* $(\mathcal{M},x)$.

Exercice 6.2.7 *Soient* x *et* y *deux sommets d'une surface triangulée connexe* $\mathcal{M}$. *Montrer que* $\pi_1(\mathcal{M},x)$ *et* $\pi_1(\mathcal{M},y)$ *sont isomorphes. On notera* $\pi_1(\mathcal{M})$ *la classe des groupes fondamentaux de* $\mathcal{M}$ *à isomorphisme près.*

Par définition tout lacet de $\mathcal{M}$ est un lacet de son 1-squelette $\mathcal{M}^1$. Si T est un arbre couvrant de $\mathcal{M}^1$, on en déduit que les lacets γ^T_e (relativement au point base x) où e parcourt l'ensemble E' des cordes de T, génèrent $\pi_1(\mathcal{M},x)$. On note E'^{-1} l'ensemble des inverses de E' et $L(E')$ le groupe libre engendré par les cordes de T.

Considérons maintenant pour chaque face f de $\mathcal{M}$, la trace $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ sur l'ensemble $E' \cup E'^{-1}$ du bord de l'une des deux orientations de f (ici f est un triangle, donc $k \leq 3$). On associe à f l'élément r_f de $L(E')$, appelé *relation faciale* (relativement à E') :

$$r_f = e_1.e_2 \dots e_k.$$

Bien évidemment, si e_i se trouve être l'inverse d'une corde, il doit être interprété comme $(e_i^{-1})^{-1}$. Notons également que la trace de f ci-dessus étant définie à permutation cyclique près, r_f est définie à conjugaison (et inverse pour le choix de l'orientation de f) près dans $L(E')$.

Proposition 6.2.8 *Soit T un arbre couvrant du 1-squelette de la surface $\mathcal{M}$. On note E' l'ensemble des cordes de T, et $\{r_f\}_{f\in F}$ l'ensemble des relations faciales de $\mathcal{M}$ relativement à E'. Alors $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ est isomorphe à la représentation combinatoire*

$$< E' \mid \{r_f\}_{f\in F} >$$

Preuve : On considère le morphisme $\gamma : L(E') \to \pi_1(\mathcal{M}, x)$ qui associe à une corde e la classe d'homotopie de γ_e^T. Ce qui précède indique que γ est surjective. Par ailleurs, par définition de l'homotopie, un élément est dans le noyau de γ si et seulement si il est dans le sous-groupe distingué engendré par les relations faciales. $\square$

Dans la pratique on peut simplifier la représentation combinatoire de la proposition ci-dessus. On note pour cela K^* un arbre couvrant du graphe d'adjacence des faces de $\mathcal{M}$. L'arborescence de faces correspondant à K^* forme un disque triangulé D. Les arêtes du bord de D s'identifient sur $\mathcal{M}$ à un sous-graphe G du 1-squelette $\mathcal{M}^1$. On note T un arbre couvrant de G ; c'est également un arbre couvrant de $\mathcal{M}^1$. Soit E' les cordes de T dans G et I les arêtes internes de D (complémentaires de G dans $\mathcal{M}^1$). D'après la proposition précédente, $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ admet la représentation combinatoire

$$< E' \cup I \mid \{r_f\}_{f\in F} > .$$

On supposera que les faces de $\mathcal{M}$ sont orientées de manière compatible dans D, i.e. que les orientations induites par les triangles deux incidents à chaque arête interne de D sont opposées. Pour chaque triangle f, la relation r_f correspondante s'obtient en considérant les 3 arêtes du bord de f et en ne retenant que les arêtes de I (internes à D) et de E' (celles sur le bord de D qui sont des cordes de T). Si le triangle t correspond à un sommet de degré un dans K^*, alors r_t a l'une des trois formes possibles : e, $e.a$ ou $e.a.b$ où e est l'unique arête interne de f et a, b les deux autres arêtes de t, possiblement dans E'. On en déduit que, dans le groupe $< E' \cup I \mid \{r_f\}_{f\in F}. >$, l'élément e est soit l'identité, soit s'exprime en fonction d'éléments de E' (puisque $e = 1$ ou $e.a = 1$ ou $e.a.b = 1$ dans le groupe). On en déduit une nouvelle représentation combinatoire de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ avec un générateur de moins :

$$< E' \cup I \setminus \{e\} \mid \{r'_f\}_{f\in F\setminus\{t\}} >$$

où r'_f est obtenue en remplaçant dans r_f les éventuelles occurrences de e par son expression en fonction de a et b. (Notons qu'ici il n'y a qu'un unique triangle $t' \neq t$ qui contient e). Une telle modification de la représentation combinatoire s'appelle une *transformation de Tietze*. L'arbre K'^* obtenu en supprimant le sommet t^* (dual de t) de K^* est un arbre couvrant sur $F \setminus \{t\}$.

En supprimant récursivement les triangles correspondant à des sommets de degrés un dans l'arbre dual sur les triangles restants, on élimine ainsi tous les générateurs dans I. Il est facile de voir qu'il ne reste à la fin qu'une unique relation obtenue en prenant la trace sur E' du bord de D. On a vu que si $\mathcal{M}$ est orientable sans bord, de genre g, alors E' contient $2g$ cordes qui apparaissent chacune deux fois sur le bord de D. On a ainsi montrer que les lacets $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ forment une famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$. Plus précisément,

Proposition 6.2.9 *Le groupe fondamental de $\mathcal{M}_g$ admet une représentation combinatoire composée des $2g$ générateurs $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ et d'une unique relation de longueur $4g$.*

On peut montrer, via la classique classification des surfaces (cf. [Sti93] ou [Mas77]), que l'unique relation peut prendre la forme *canonique*

$$a_1.b_1.a_1^{-1}.b_1^{-1}.a_2.b_2.a_2^{-1}.b_2^{-1}\dots a_g.b_g.a_g^{-1}.b_g^{-1}$$

où $a_1, b_1, \dots a_g, b_g$ sont les cordes de T dans G avec les notations ci-dessus.

Comme pour le calcul de l'homologie, on peut en fait travailler avec des subdivisions dont les faces sont des polygones à plus (ou moins) de trois côtés. En se ramenant à une subdivision n'ayant qu'un seul sommet et une seule face, la proposition précédente devient évidente.

Par ailleurs la famille génératrice $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ ci-dessus est en fait de taille minimale.

Proposition 6.2.10 *Toute famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$ contient au moins $2g$ éléments.*

Preuve : On remarque que la relation d'homotopie est compatible avec celle d'homologie. Donc deux lacets homotopes sont homologues (plus précisément leur classe d'homologie le sont. Ces classes sont obtenues en remplaçant la concaténation d'arêtes par une somme). On en déduit que la classe d'homologie de tout cycle simple s'exprime à partir des classes d'homologie d'une famille génératrice de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$. Par conséquent ces classes d'homologies engendrent $H_1(\mathcal{M}_g) = \mathbb{R}^{2g}$. Mais toute famille génératrice de $\mathbb{R}^{2g}$ a au moins $2g$ vecteurs. □

On appelle *base* de $\pi_1(\mathcal{M}_g, x)$ une famille génératrice de taille minimale. Les lacets d'une base construite comme ci-dessus vérifient une relation obtenue en prenant la trace sur E' du bord de D. En effet on obtient par concaténation des lacets correspondants un lacet qui borde un disque, donc contractile.

Chapitre 7

Optimisation et homotopie

7.1 calcul d'une base optimale du π_1

7.1.1 Cas des graphes

Suivant la discussion qui précède la proposition 6.2.4, on peut construire une base libre $\{\gamma_e^T\}_{e\in E'}$ de $\pi_1(G,x)$ à partir des arêtes complémentaires d'un arbre maximal en temps proportionnel à la taille $\sum_{e\in E'}|\gamma_e^T|$ de cette base. Remarquons cependant que toutes les bases de $\pi_1(G,x)$ ne proviennent pas nécessairement d'une telle construction.

Peut-on calculer efficacement une base de taille minimale ? Existe-t-il une base minimale associée à un arbre couvrant ? Avant de répondre (positivement) à ces deux questions "géométriques", donnons un petit lemme préparatoire :

Lemme 7.1.1 *Soit L un groupe libre de rang fini n et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une base de L. Alors pour toute base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de L, il existe une permutation σ de $[1, n]$ telle que x_i apparaît dans l'expression réduite de $u_{\sigma(i)}$ en fonction des x_j.*

Preuve : Soit f l'automorphisme de L défini par $f(x_i) = u_i$. Par passages aux quotients, f défini un automorphisme du groupe libre commutatif de rang n, $L/[L, L]$. Il suffit donc de prouver la propriété pour les automorphismes de $\mathbb{Z}$-modules de rang n. Or la matrice d'un tel automorphisme est inversible, donc de déterminant non nul. L'un des $n!$ termes de l'expression usuelle du déterminant est donc non nul, ce qui exprime précisément la propriété recherchée. $\square$

Proposition 7.1.2 *Soit $x \in V$ un sommet d'un graphe connexe fini G, alors la base de $\pi_1(G,x)$ associée à l'arbre de tout parcours en largeur de G à partir de x est de taille minimale.*

Preuve : Soit T l'arbre d'un parcours en largeur à partir de x et soit E' l'ensemble des cordes de T dans G. Par définition de T, on a que pour tout sommet $y \in V$, la distance de x à y dans G coïncide avec cette distance dans T, i.e. avec $|\gamma^T_{x,y}|$. Pour tout $e \in E'$, on remarque donc que $\{\gamma^T_e\}$ est un lacet de point base x contenant e de taille minimale avec cette propriété.

Considérons une base B de $\pi_1(G, x)$. D'après le lemme préparatoire, les éléments de la base $B_T = \{\gamma^T_e\}_{e \in E'}$ peuvent être mis en bijection avec les éléments de B de sorte que γ^T_e apparaisse dans l'expression réduite (dans B_T) de son correspondant dans B. On en déduit que e apparaît dans tout lacet représentant ce correspondant, et la remarque précédente permet de conclure. □

Exercice 7.1.3 *Montrer, sans utiliser la notion de groupe, que parmi toutes les bases associées à des arbres couvrants, celles associées à des parcours en largeur sont de taille minimale.*

On remarquera que la proposition 7.1.2 reste vraie si on suppose que les arêtes de G sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

7.1.2 Cas des surfaces

De même que pour les graphes, il est possible de calculer une base minimale du groupe fondamentale d'une surface de manière efficace. L'algorithme qui suit est tiré de Erickson et Whittlesey [EW05].

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée orientable sans bord de genre g et x un sommet de $\mathcal{M}$. Comme pour les graphes, on commence par calculer un arbre couvrant T obtenu par un parcours en largeur. Pour toute corde e de T dans le 1-squelette $\mathcal{M}^1$, on a un lacet γ^T_e qui est le plus court lacet de base x contenant e (cf. la preuve de la proposition 7.1.2). On définit de manière récursive un *générateur glouton* $\gamma^T_{e_i}$, $i \geq 1$ par

$\mathcal{M} \setminus (T \cup e_1, \ldots, e_i)$ *est connexe et* $|\gamma^T_{e_i}|$ *est minimal avec cette propriété.*

Il est facile de voir à l'aide la caractéristique d'Euler que le graphe dual G^* de $\mathcal{M}^1 \setminus T$, c.a.d le graphe d'adjacence entre les faces de $\mathcal{M} \setminus T$, possède $2g$ cycles. Il y a donc $2g$ générateurs gloutons. Ces générateurs peuvent être vus comme associés aux cordes de T dans $H = T \cup \{e_1, \ldots, e_{2g}\}$. Comme $\mathcal{M} \setminus H$ est un disque (une arborescence de triangles), on se retrouve dans la situation précédant la proposition 6.2.9, et les générateurs gloutons forment donc une base de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, dite *gloutonne*. Les classes d'homologies des générateurs gloutons constituent également de ce fait une base de $H_1(\mathcal{M})$.

Soit G^* le graphe d'adjacence des faces de $\mathcal{M} \setminus T$. Le graphe d'adjacence des faces dans D constitue un arbre couvrant K^* de G^*. On associe à chaque arête e^* de G^* le poids $|\gamma^T_e|$, longueur du lacet associé à la corde e de T primale de e^*. On remarque alors que K^* est un arbre couvrant de poids maximal dans G^*. Ceci donne une définition globale d'une base gloutonne.

Définition 7.1.4 *Fixons une base gloutonne de $(\mathcal{M}, x)$. Soit ℓ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. Un* facteur homologique *de ℓ (relativement à la base gloutonne fixée) est un générateur glouton qui apparaît avec un coefficient non nul dans l'expression de la classe d'homologie de ℓ sur la base gloutonne.*

Lemme 7.1.5 *Avec les notations précédentes, on a que pour toute corde e de T dans $\mathcal{M}^1$, le lacet γ_e^T est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

Preuve : Si γ_e^T est un générateur glouton, il n'y a rien à montrer. Supposons que ce n'est pas le cas. Soient alors $\gamma_{e_1}^T, \ldots, \gamma_{e_k}^T$ les générateurs gloutons qui ne sont pas plus long que γ_e^T. Si $\mathcal{M} \setminus (T \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k \cup e)$ est connexe, alors $k < 2g$ et par définition de k, on a que $\gamma_{e_{k+1}}^T$ est strictement plus long que γ_e^T, ce qui contredit la définition d'une base gloutonne. Donc $\mathcal{M} \setminus (T \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k \cup e)$ n'est pas connexe, tandis que $\mathcal{M} \setminus (T \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k)$ l'est. Soit $\mathcal{M}'$ une des deux composantes de $\mathcal{M} \setminus (T \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k \cup e)$. l'arête e apparaît exactement une fois sur le bord de $\mathcal{M}'$. Lequel bord est inclus dans $T \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k \cup e$. La classe d'homologie de ce bord est donc une combinaison des classes d'homologies de $\gamma_{e_1}^T, \ldots, \gamma_{e_k}^T$ et γ_e^T, avec un coefficient +/- 1 pour cette dernière. Comme la classe de ce bord est nulle (c'est un bord !), on en déduit que la classe de γ_e^T s'exprime en fonction de celles de $\gamma_{e_1}^T, \ldots, \gamma_{e_k}^T$. □

Lemme 7.1.6 *Tout lacet de point base x est au moins aussi long que chacun de ses facteurs homologiques.*

Preuve : Soit ℓ un lacet de $(\mathcal{M}, x)$. On exprime la classe d'homotopie de ℓ, vu comme lacet de $(\mathcal{M}^1, x)$, dans la base libre associée aux cordes de T dans $\mathcal{M}^1$: $\ell \simeq \gamma_{a_1}^T, \ldots, \gamma_{a_p}^T$. On suppose que cette expression est réduite, de sorte que chaque arête a_i apparaît nécessairement dans ℓ. Par conséquent ℓ est plus long que chaque $\gamma_{a_i}^T$. Mais tout facteur homologique de ℓ est facteur homologique de l'un des $\gamma_{a_i}^T$, et on conclut avec le lemme précédent. □

Lemme 7.1.7 *Pour toute base $\{\ell_i\}_{1 \leq i \leq 2g}$ de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$, il existe une permutation σ de $[1, 2g]$ telle que pour tout $i \in [1, 2g]$, le générateur glouton $\gamma_{e_{\sigma(i)}}$ est un facteur homologique de ℓ_i.*

Preuve : La preuve est essentiellement la même que pour le lemme 7.1.1. □

Les deux lemmes précédents impliquent immédiatement que

Proposition 7.1.8 *Toute base gloutonne est de longueur totale minimale parmi toutes les bases de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.*

On remarque comme pour les graphes que la proposition reste vraie si on suppose que les arêtes de $\mathcal{M}$ sont munies de poids positifs, que la taille est remplacée par le poids total, et que le parcours en largeur est modifié par l'algorithme de Dijkstra [CLRS02].

Théorème 7.1.9 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée orientable sans bord de genre g ayant un nombre total n de sommets, arêtes et faces. Il existe un algorithme de complexité $O(n \log n + gn)$ qui calcule une base minimale de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$.*

Preuve : Il suffit d'après la proposition précédente de construire une base gloutonne. Pour cela on commence par calculer un arbre couvrant T de plus courts chemins à l'aide de l'algorithme de Dijkstra en temps $O(n \log n)$. On peut en temps linéaire calculer la longueur de γ_e^T pour chaque corde de T. D'après la définition globale d'une base gloutonne, il suffit ensuite de calculer un arbre couvrant K^* de poids maximal dans le graphe d'adjacence G^* des faces de $\mathcal{M} \setminus T$ muni des poids $|\gamma_e^T|$. Ceci peut se faire en temps $O(n \log n)$ par des algorithmes classiques de calcul d'arbre couvrant de poids maximal (ou minimal) [CLRS02]. Soient $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ l'ensemble des arêtes primales correspondant aux cordes de K^* dans G^*, alors $\{\gamma_{e_1}, \dots, \gamma_{e_{2g}}\}$ constitue une base gloutonne qui peut être construite en temps proportionnel à sa taille $O(gn)$. $\square$

7.2 Calculs de lacets sur les surfaces

Un bon nombre d'algorithmes et de problèmes portant sur l'homotopie des courbes sur les surfaces ont été étudiés ces dernières années. Citons :

- le test d'homotopie entre deux courbes [DS95, DG99],
- le calcul de système fondamental canonique de lacets pour l'homotopie [VY90, LPVV01],
- le calcul d'un système fondamental minimal dans sa classe d'homotopie [CdVL05],
- le calcul d'une décomposition en pantalons minimale dans sa classe d'homotopie [CdVL07],
- le calcul d'un cycle non contractile ou d'un cycle non séparateur minimal [MT01, CM05],
- le calcul d'une courbe minimale dans sa classe d'homotopie [CE06],
- le calcul d'un cycle séparateur minimal [CCdVE+08],
- etc...

Chapitre 8

Graphe des contours d'un polyèdre valué

Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre, c'est à dire une variété simpliciale, et $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ une fonction affine par morceaux (i.e. affine par restriction à chaque simplexe de $\mathcal{P}$). On identifie deux points de $\mathcal{P}$ si on peut les joindre par un chemin dans $\mathcal{P}$ le long duquel f est constante. Le *graphe des contours* de f est par définition l'espace quotient de $\mathcal{P}$ par cette identification. Chaque point du graphe des contours correspond à une composante connexe d'un ensemble iso-valeur de f sur $\mathcal{P}$. On appelle *contour* une telle composante.

On cherche à calculer le graphe des contours de manière efficace pour un polyèdre et une fonction donnée. Tarasov et Vyalyi [TV98], puis Carr et al. [CSA03], ont obtenu un algorithme optimal lorsque $\mathcal{P}$ est simplement connexe. Leur méthode repose en partie sur des liens simples entre graphes et ordres exposés ci-dessous.

8.1 Arbres des jonctions et des scissions

Soit X un ensemble de sommets ordonné par une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ injective : $\forall x, y \in X : x <_f y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Soit R une relation sur X, subordonnée à $<_f$, i.e.

$$x \, R \, y \implies x <_f y$$

On note G_R le graphe orienté de R que l'on supposera connexe ($(x, y) \in G_R \Leftrightarrow x \, R \, y$). J'appelle *R-prédécesseur* (resp. *R-successeur*) de x tout $y \in X$ tel que $x \, R \, y$ (resp. $y \, R \, x$).

Par la suite on réservera les termes *dessous, dessus* aux sommets de X par référence à l'ordre $\leq_f$. Ainsi, x est au dessous de y signifie $x <_f y$.

Remarque 8.1.1 *Si G est un graphe connexe non orienté simple (sans boucle ni arête multiple) sur X, alors la relation R définie par $x \, R \, y \Leftrightarrow (\{x, y\} \in G$ et $x <_f y)$ est subordonnée à $<_f$ et G_R est une version orientée de G.*

Soit J (pour Jonction) la relation, notée aussi $\leq_J$, définie par $x <_J y$ si

$$x <_f y \text{ et } (\exists z_1, \ldots, z_p : z_1 = x,\ z_p = y,\ \forall i \in [1, p-1] : z_i <_f y \text{ et } z_i \, R \, z_{i+1} \text{ ou } z_{i+1} \, R \, z_i).$$

Dit autrement, $x <_J y$ si et seulement si il existe un chemin $x \rightsquigarrow y$ dans G_R au dessous de y. Comme f est injective $\leq_J$ est un ordre partiel et je note $\lhd_J$ (resp. G_J) la relation (resp. le diagramme) de Hasse associée à $\leq_J$.

Je définis de même une relation d'ordre S (pour Scission), notée aussi $\leq_S$, par

$$x <_S y \Leftrightarrow x <_f y \text{ et } (\exists z_1, \ldots, z_p : z_1 = x,\ z_p = y,\ \forall i \in [2, p] : x <_f z_i \text{ et } z_i \, R \, z_{i+1} \text{ ou } z_{i+1} \, R \, z_i).$$

Dit autrement, $x <_S y$ si et seulement si il existe un chemin $x \rightsquigarrow y$ dans G_R au dessus de x. S est un ordre et je note $\lhd_S$ (resp. G_S) la relation (resp. le diagramme) de Hasse associée à $\leq_S$.

Remarque 8.1.2 *J et S ne dépendent que de la clôture transitive de R.*

Définition 8.1.3 *On appelle respectivement arbre des jonctions et arbre des scissions de G_R (relativement à f) les diagrammes de Hasse G_J et G_S.*

Lemme 8.1.4 *Un élément de X a au plus un J-successeur et au plus un S-prédécesseur.*

Preuve (pour J) : Un sommet de G_J ne peut avoir deux successeurs car $x \lhd_J y$ et $x \lhd_J z$ avec $f(y) < f(z)$ entraîne $y <_J z$, une contradiction. □

Corollaire 8.1.5 *Si G_R est connexe, alors G_J et G_S sont des arbres.*

Preuve (pour J) : Le sommet f-minimal de tout cycle simple a au moins deux successeurs, en contradiction avec le lemme précédent. Donc G_J est acyclique. Par ailleurs G_J est connexe puisque tout élément est J-inférieur au sommet de f-valeur maximale. □

Pour tout sommet $x \in X$, on note $G_R^-(x)$ (resp. $G_R^+(x)$) le sous-graphe de G_R induit par les sommets strictement en dessous (resp. strictement au dessus) de x.

Proposition 8.1.6 *Les J-prédécesseurs d'un sommet $x \in X$ sont en bijection avec les composantes connexes de $G_R^-(x)$ contenant au moins un R-prédécesseur de x ; dans chaque telle composante, le sommet maximal est un J-prédécesseur de x.*

Preuve : Soit C une composantes connexe de $G_R^-(x)$ contenant au moins un R-prédécesseur de x. Soit y le sommet le plus haut de C. Clairement, $y <_J x$. De plus, tout sommet t tel que $y \leq_J t <_J x$ est dans C. Donc $y \lhd_J x$.

Inversement, soit y un J-prédécesseur de x. Il existe donc un chemin $y \rightsquigarrow x$ dans G_R en dessous de x, ce qui montre que y est dans la composante de $G_R^-(x)$ contenant le R-prédécesseur de x dans ce chemin. On considère t, le sommet le plus haut de cette composante. On a $y \leq_J t <_J x$, et donc $y = t$. □

De manière analogue :

Proposition 8.1.7 *Les S-successeurs d'un sommet $x \in X$ sont en bijection avec les composantes connexes de $G_R^+(x)$ contenant au moins un R-successeur de x ; dans chaque telle composante, le sommet minimal est un S-successeur de x.*

Les deux propositions précédentes fournissent un algorithme pour construire les arbres des jonctions et des scissions.

Théorème 8.1.8 *Si G_R a $n = |X|$ sommets et m arêtes, et si les sommets de X sont triés par ordre f-monotone, alors les arbres G_J et G_S peuvent être construit en temps $O(m\alpha(n))$, où α est l'inverse de la fonction d'Ackerman [CLRS02].*

Preuve : Pour construire G_J on balaye ses sommets dans l'ordre f-croissant. Au cours du balayage, on maintient les composantes connexes de $G_R^-(x)$ où x est le sommet courant de balayage. Pour chaque composante c on maintient également son sommet le plus haut $c.h$. On utilise la structure Union-Find [CLRS02] pour représenter les composantes de $G_R^-(x)$. La propositions 8.1.6 montre que l'algorithme suivant calcule correctement G_J. Makeset(x) crée une composante contenant le sommet x, Find(x) renvoie la composante contenant x et Union(x, y) fusionne les composantes de x et de y.

Pour $x \in X$
    $c :=$ Makeset(x)
    $c.h := x$
Pour $x \in X$ pris dans l'ordre f-croissant
    Pour y voisin de x au dessous de x
        Si Find$(x) \neq$ Find(y)
            Ajouter l'arête $(x, Find(y).h)$ à G_J
            c := Union(x, y)
            c.h := x

Le nombre d'opérations Union et Find est un O de la somme des degrés des sommets et donc un $O(m)$, d'où la complexité anoncée. Un algorithme analogue peut être écrit pour construire G_S. $\square$

8.1.1 Cas où G_R est un arbre

On suppose désormais que la version non orientée de G_R est acyclique.

Je note respectivement $d_R^+(x)$, $d_S^+(x)$, $d_R^-(x)$ et $d_J^-(x)$ le nombre de R-successeurs, de S-successeurs, de R-prédécesseurs et de J-prédécesseurs de x.

Proposition 8.1.9 $\forall x \in X, d_R^-(x) = d_J^-(x)$ *et* $d_R^+(x) = d_S^+(x)$.

Preuve : C'est une conséquence directe des propositions 8.1.6 et 8.1.7. □

Corollaire 8.1.10 *Un sommet x est R-minimal si et seulement s'il est J-minimal. De même, x est R-maximal si et seulement s'il est S-maximal.*

On regarde comment construire G_R à partir de G_J et G_S. Le principe est d'effeuiller G_R progressivement. Pour cela, on extrait de G_J et G_S une arête de G_R qui est nécessairement incidente à une feuille. On simule alors la suppression de cette arête dans G_R en mettant à jour G_J et G_S de manière cohérente. On recommence jusqu'à épuisement des sommets de G_J et G_S.

Lemme 8.1.11 *Si u est le J-successeur (resp. S-prédécesseur) de x, alors les sommets internes du chemin $x \rightsquigarrow u$ de G_R sont en dessous (resp. au dessus) de x.*

Preuve (pour J) : Dans le cas contraire, soit v le sommet interne de $x \rightsquigarrow u$ qui est f-maximal. Alors $x <_J v <_J u$, contredisant $x \lhd_J u$. □

La construction incrémentale de G_R découle de l'observation suivante :

Proposition 8.1.12 *Le sommet x est R-minimal et possède un unique R-successeur u si et seulement si x est J-minimal, u est le J-successeur de x et x a précisément un S-successeur.*

Preuve : Pour l'implication directe, on sait par le corollaire 8.1.10 que x est J-minimal. De plus, si v est le J-successeur de x alors, par le lemme 8.1.11, les éventuels sommets internes de $v \rightsquigarrow x$ dans G_R sont en dessous de x. Comme x est R-minimal cela implique que (v, x) est une arête de G_R. Par unicité du R-successeur de x on en déduit $v = u$. Enfin, la proposition 8.1.9 montre que x a un unique S-successeur.

Pour la réciproque, x est R-minimal par le corollaire 8.1.10. De plus, le lemme 8.1.11 implique que le chemin $x \rightsquigarrow u$ de G_R est réduit à l'arête (x, u), donc que u est un R-successeur de x. Enfin, la proposition 8.1.9 montre que x a un unique R-successeur. □

Par symétrie on obtient une version "S" de ce qui précède :

Proposition 8.1.13 *Le sommet x est R-maximal et possède un unique R-successeur u si et seulement si x est S-maximal, u est le S-prédécesseur de x et x a précisément un J-prédécesseur.*

On en déduit :

Proposition 8.1.14 *Si G_R est acyclique, il peut être construit en temps $O(|X|)$ à partir de G_J et de G_S.*

Preuve : Les propositions 8.1.12 et 8.1.13 permettent de sélectionner une feuille de G_R, et son unique voisin dans G_R, à l'aide de G_J et G_S seulement. De plus, puisque G_R est un arbre, il a nécessairement une feuille tant qu'il contient au moins deux sommets.

Soit donc z une feuille de G_R. On note J' (S') la relation de jonction (scission) pour l'arbre $G_R - z$. Clairement, les ordres J' et S' sont les restrictions respectives à $X \setminus \{z\}$ des ordres J et S. Par conséquent

$$x \lhd_{J'} y \Leftrightarrow (x \lhd_J y \vee x \lhd_J z \lhd_J y)$$

et on a une équivalence semblable en remplaçant J par S. Si la feuille z est un R-minimum, elle a un unique J-successeur et un unique S-successeur (cf. propositions 8.1.12). Donc $G_{J'}$ et $G_{S'}$ se déduisent respectivement de G_J et G_S par contraction de l'arête qui relie z a respectivement son J-successeur et son S-successeur. On conclut de même si z est un R-maximum.

Par récurrence sur la taille de G_R, on peut par ce procédé d'effeuillage, reconstruire toutes les arêtes de G_R.

Sur le plan algorithmique on maintient l'ensemble F des feuilles de G_R. C'est, d'après les propositions 8.1.12 et 8.1.13, l'ensemble $F^- \cup F^+$ où

$$F^- = \{x \in X \mid (d_J^-(x) = 0 \wedge d_S^+(x) = 1)\} \text{ et } F^+ = \{(d_S^+(x) = 0 \wedge d_J^-(x) = 1)\}$$

Soit $z \in F$. Si $z \in F^-$ (resp. $z \in F^+$) on ajoute l'arête (z, u) à la partie reconstruite de G_R où u est le J-successeur (resp. S-prédécesseur) de z. En supposant que G_J et G_S sont représentés par des classiques listes d'adjacences, on obtient en temps constant les arbres $G_{J'}$ et $G_{S'}$ sur $X \setminus z$ obtenus par contraction d'arête (voir plus haut). Il est également facile de maintenir l'ensemble F correspondant à $G_R - z$ en temps constant, puisque seul u est potentiellement une nouvelle feuille. $\square$

Remarque 8.1.15 *Soient deux arbres G_J et G_S sur un ensemble X de sommets. La seule hypothèse que les degrés entrants dans G_J et sortants dans G_S sont au plus un n'implique pas nécessairement que G_J et G_S sont les arbres des jonctions et des scissions associés à un arbre G_R. Un contre-exemple est fourni par les arbres en forme de $\vee$ et $\wedge$ sur 3 sommets.*

8.1.2 Cas où G_R n'est pas un arbre

On abandonne momentanément l'hypothèse d'acyclicité de G_R et on regarde le lien avec G_J et G_S. Notons, à la suite de la remarque 8.1.15, que G_J et G_S ne permettent plus de reconstruire G_R.

Proposition 8.1.16 *Si $c_R = |A(G_R)| - |S(G_R)| + 1$ est le nombre de cyclomatique de G_R, alors*

$$\forall x \in X, d_J^-(x) \leq d_R^-(x) \text{ et } d_S^+(x) \leq d_R^+(x),$$

de plus,

$$\sum_{x\in X} d_J^-(x) = \sum_{x\in X} d_S^+(x) = \sum_{x\in X} d_R^-(x) - c_R = \sum_{x\in X} d_R^+(x) - c_R = |A(G_R)| - c_R.$$

Preuve : Les inégalités découlent directement des propositions 8.1.6 et 8.1.7. Les égalités se déduisent du fait que la somme des degrés entrants (resp. sortants) dans un graphe orienté est égal à son nombre d'arêtes et que pour un arbre (comme G_J ou G_S) ce nombre est encore le nombre de sommets moins un. □

Si x a un défaut de degré dans G_J, i.e. $d_J^-(x) < d_R^-(x)$, alors au moins deux des R-prédécesseurs de x sont reliés par un chemin dans G_R au dessous de x. On a bien sûr un résultat analogue pour $d_S^+(x)$. On en déduit

Lemme 8.1.17 *Pour tout $x \in X$, $d_J^-(x) + d_S^+(x) \leq d_R(x)$ et l'inégalité est stricte pour au plus $2c_R$ éléments de X (cf. proposition 8.1.16). De plus chaque sommet pour lequel cette inégalité est stricte est incident à un cycle de G_R dont ce sommet est maximum ou minimum. Réciproquement, chaque cycle admet au moins deux sommets (le plus haut et le plus bas) pour lesquelles cette inégalité est stricte.*

8.2 Application

8.2.1 Graphe des contours d'un polyèdre valué

On suppose que X est l'ensemble des sommets (ou des points critiques ?) d'une variété simpliciale sans bord, $\mathcal{P}$. Soit une fonction injective $f : X \to \mathbb{R}$. On étend f sur $\mathcal{P}$ par linéarité. Si $\gamma : [0,1] \to \mathcal{P}$ est un chemin de $\mathcal{P}$, on dira qu'il est (strictement) f-croissant (resp. f-décroissant, resp. f-constant) si $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ est (strictement) croissante (resp. décroissante, resp. constante). Dans ce qui suit, tous les chemins considérés sur $\mathcal{P}$ sont linéaires par morceaux.

On définit la relation R sur X par $x\,R\,y$ si

1. il existe un chemin $\gamma : x \rightsquigarrow y$ de $\mathcal{P}$ qui soit f-croissant,
2. il n'existe pas de sommet z avec deux chemins f-croissants $\delta : x \rightsquigarrow z$ et $\delta' : z \rightsquigarrow y$, de sorte que γ soit homotope à $\delta.\delta'$ dans $\mathcal{P}$.

Le graphe G_R de R est appelé le *graphe des contours* de f. La dénomination est justifiée par le fait suivant. Le graphe G_R, considéré comme un graphe topologique, est homéomorphe à l'espace quotient $\mathcal{P}/\overset{f}{\sim}$ où, pour tout $u, v \in \mathcal{P}, u \overset{f}{\sim} v$ si et seulement si u et v peuvent être reliés par un chemin f-constant dans $\mathcal{P}$.

Notons que la clôture transitive, $\leq_R$ de R est donnée par $x \leq_R y$ si et seulement si il existe un chemin f-croissant reliant x et y. On en déduit la propriété remarquable suivante.

Lemme 8.2.1 *Les arbres des jonctions et des scissions de G_R (relativement à f) sont les arbres des jonctions et des scissions du 1-squelette $\mathcal{P}^1$ de $\mathcal{P}$ (relativement à f).*

Preuve (pour J) : Il suffit de montrer que les relations de jonction sont les mêmes pour G_R et $\mathcal{P}^1$. Soit J la relation de jonction pour G_R. On a que $x <_J y$ si et seulement s'il existe un chemin de G_R liant x à y au dessous de y. Par la note précédente on en déduit l'existence d'un chemin dans $\mathcal{P}$ au dessous de y. En repoussant ce chemin vers le bas sur les arêtes de $\mathcal{P}$, on en déduit un chemin dans $\mathcal{P}^1$ en dessous de y. Donc $x <_J y$, où cette fois J est la relation de jonction pour $\mathcal{P}^1$.

Inversement, si $x <_J y$ pour la relation de jonction de $\mathcal{P}^1$, on a un chemin reliant x et y dans $\mathcal{P}^1$, au dessous de y. Ce chemin fournit directement un chemin dans $\mathcal{P}$ qui est f-monotone entre chacun de ses sommets. On en déduit un chemin de G_R au dessous de y, d'où $x <_J y$, où cette fois J est la relation de jonction pour G_R. $\square$

Lemme 8.2.2 *Si $x <_R y$, alors il existe un chemin $x \rightsquigarrow y$ strictement f-croissant. Plus précisément si $\gamma : x \rightsquigarrow y$ est un chemin f-croissant, avec $f(x) < f(y)$, alors il existe un chemin $x \rightsquigarrow y$ strictement f-croissant et homotope à γ.*

Preuve : Plus généralement on suppose que x et y sont deux points de $\mathcal{P}$ avec $f(x) < f(y)$ et que leur f-valeur sont distinctes de celles des sommets à moins que eux-mêmes ne soient des sommets. Soit un chemin f-croissant $\gamma : x \rightsquigarrow y$. Soit $\ell = \tau_1, \ldots, \tau_k$ la liste[1] des simplexes (relativement ouverts) traversés par γ. Notons que nécessairement $\tau_i \prec \tau_{i+1}$ ou $\tau_i \succ \tau_{i+1}$ ($\prec$ est la relation "être face de"). On obtient le résultat par récurrence sur k : si $k = 1, 2$ c'est évident, le segment $[x, y]$ convient. Sinon, soit i le plus petit indice tel que $\tau_i \cap \gamma$ contient un point z avec $f(z) > f(x)$. On peut supposer $f(z) < f(y)$. Si $i \neq 1, k$ alors on peut appliquer la récurrence sur les deux morceaux $x \rightsquigarrow z$ et $z \rightsquigarrow y$. Sinon si $i = 1$ deux cas se présentent.
- Ou bien $\tau_1 \prec \tau_2$. Soit $z' \in \tau_2 \cap \gamma$. On remplace le morceau $z \rightsquigarrow z'$ de γ par le segment $[z, z']$ et on coupe le nouveau chemin au milieu de ce segment pour appliquer la récurrence.
- Ou bien $\tau_1 \succ \tau_2$. Soit $z' \in \tau_2 \cap \gamma$. Alors τ_2 contient nécessairement un point z'' tel que $f(z) \leq f(z'') \leq f(z')$ et $f(z'') < f(y)$. On remplace le morceau $z \rightsquigarrow z'$ de γ par les segments $[z, z'']$ et $[z'', z']$ et on coupe le nouveau chemin en z'' pour appliquer la récurrence.

Le cas où $i = k$ se traite de manière analogue. $\square$

Définition 8.2.3 *Un simplexe σ de $\mathcal{P}$ est* traversé *par un niveau $a \in \mathbb{R}$ si σ contient au moins un sommet de f-valeur supérieure à a et au moins un sommet de f-valeur inférieure à a. On note $L(a)$ l'ensemble des simplexes traversés par a.*

[1] Rappelons que les chemins sont supposés affines par morceaux. Par convexité, un segment de γ intersecte chaque simplexe (relativement ouvert) selon un segment possiblement vide. Ceci permet d'ordonner les simplexes croisant un segment de γ. Par concaténation de ces ordres, et en supprimant les doublons on en déduit la liste des simplexes traversés.

Remarquons que si σ est traversé par un niveau a alors toute coface de σ (i.e les simplexes dont σ est une face) est également traversée par le niveau a.

On considère le complexe cellulaire abstrait $K(a)$ dont les k-cellules pour $k = 0, \ldots, d-1$ sont en bijection avec les $(k+1)$-simplexes de $L(a)$. Une cellule σ est une face de τ dans $K(a)$ si c'est le cas pour les simplexes correspondant dans $L(a)$.

Dans ce qui suit ϵ est un réel positif inférieur à l'écart entre les f-valeurs de deux sommets distincts quelconques. On dira qu'un sommet de $\mathcal{P}$ est *incident* à $K(a)$ s'il est incident à un simplexe de $L(a)$. Par abus de langage, on dira également d'un simplexe de $L(a)$ qu'il est *contenu* dans $K(a)$.

Remarque 8.2.4 *Si x est incident à un simplexe σ de $L(a)$, avec $f(x) \neq a$, alors x est incident à une arête de $L(a)$, i.e. x est incident à un sommet de $K(a)$.*

Proposition 8.2.5 *Les R-successeurs d'un sommet x de $\mathcal{P}$ sont en bijection avec les composantes connexes de $K(f(x)+\epsilon)$ incidentes à x ; pour chaque telle composante, le sommet de f-valeur minimale parmi les sommets au dessus de x et incidents à cette même composante est un R-successeur de x.*

Preuve : Soient K_j une composante connexe $K(f(x)+\epsilon)$, L_j l'ensemble de simplexes correspondant dans $L(f(x)+\epsilon)$ et y_j le sommet de f-valeur minimale parmi les sommets au dessus de x et incidents à K_j. Montrons que y_j est bien un R-successeur de x. Considérons pour cela un chemin de K_j reliant des sommets de K_j incidents respectivement à x et y_j (cf. remarque précédente). Les arêtes de ce chemin correspondent à une suite $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de triangles de L_j telle que σ_i est adjacent à σ_{i+1} pour $i = 1, \ldots, n-1$, x appartient à σ_i pour la seule valeur $i = 1$ et y_j appartient à σ_i pour la seule valeur $i = n$. On choisit dans chaque arête $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ un point z_i tel que $f(z_i) = f(x) + i\frac{f(y_j)-f(x)}{n}$, ce qui est possible car les f-valeurs des sommets de cette arête encadrent l'intervalle $[f(x), f(y)]$. La chaîne polygonale $x, z_1, \ldots, z_{n-1}, y_j$ constitue un chemin γ strictement f-croissant. Par conséquent $x <_R y_j$. Supposons qu'il existe un sommet z et deux chemins strictement f-croissants (cf. lemme 8.2.2), $\delta : x \rightsquigarrow z$ et $\delta' : z \rightsquigarrow y_j$ avec γ homotope à $\delta.\delta'$. Soit alors t le point de γ tel que $f(t) = f(z)$.

Le lemme 8.2.6 suivant établie l'existence d'un chemin f-constant $t \rightsquigarrow z$. Soit $\tau_1, \ldots, \tau_k = z$ la liste des simplexes traversés par ce chemin. Par construction de γ, le simplexe τ_1 est dans L_j. On en déduit $\tau_2 \in L_j$ (regarder les deux cas $\tau_1 \prec \tau_2$ ou $\tau_1 \succ \tau_2$ et utiliser le fait que les sommets de τ_1 ont une f-valeur hors de l'intervalle $]f(x), f(y_j)[$). De proche en proche on en déduit que z est incident à K_j, ce qui contredit la définition de y_j. finalement, on conclut $x \lhd_R y_j$.

Réciproquement, soit y un R-successeur de x et $\gamma : x \rightsquigarrow y$ un chemin strictement f-croissant. Soit u le point de γ tel que $f(u) = f(x)+\epsilon$. Par définition de ϵ, le point u n'est pas un sommet de $\mathcal{P}$. Je considère le simplexe σ contenant u en son intérieur. Le simplexe σ est donc traversé par le niveau $f(x)+\epsilon$ et on considère la composante

K_j de $K(f(x)+\epsilon)$ contenant σ. Soit alors y_j le sommet incident à K_j et de f-valeur minimale parmi les sommets incidents à cette même composante et au dessus de x. On va montrer que $y = y_j$, ce qui terminera la preuve de la proposition.

Tout d'abord, y ne peut être en dessous de y_j, car de proche en proche on montrerait comme ci-dessus que y est incident à K_j, contredisant la définition de y_j. Supposons alors que y est au dessus de y_j et soit t le point de γ tel que $f(t) = f(y_j)$. Le point t est contenu dans un simplexe de L_j (toujours par le même raisonnement) et distinct de y_j (sinon on aurait $x <_R y_j <_R y$). Par connexité de K_j, on peut construire un chemin f-constant $\zeta : t \rightsquigarrow y_j$. On note δ la concaténation du sous chemin de γ de x à t et de ζ et on note δ' la concaténation de ζ^{-1} avec le sous-chemin de γ de t à y. Alors, quitte à utiliser le lemme 8.2.2 pour se ramener à des chemins strictement croissants, on contredit la définition de R-successeur avec $\gamma \sim \delta.\delta'$. Finalement, on conclut que $f(y) = f(y_j)$, d'où $y = y_j$. □

Un lemme équivalent peut bien sûr être établi pour les R-prédécesseurs d'un sommet.

Lemme 8.2.6 *Soient $x, y \in \mathcal{P}$. Soient $\gamma : x \rightsquigarrow y$ et $\delta : x \rightsquigarrow y$, deux chemins homotopes (avec extrémités fixes) et strictement f-croissants. Alors pour tout $u = \gamma(t_u)$ et tout $v = \delta(t_v)$ tels que $f(u) = f(v)$, il existe un chemin f-constant $u \rightsquigarrow v$.*

Preuve : Soit $h : [0,1]\times[0,1] \mapsto \mathcal{P}$ l'homotopie en question ($h(.,0) = \gamma(.), h(.,1) = \delta, h(0,.) = x, h(1,.) = y$). On peut supposer que h est affine par morceaux.[2] Montrons que $(t_u, 0)$ et $(t_v, 1)$ sont reliés par un chemin polygonal ϕ dans $(f\circ h)^{-1}(f(u))$. Par un argument de compacité il existe η positif tel que $f \circ h(w) < f(u)$ pour $w \in]0, \eta[\times]0, 1[$. Soit V la composante connexe de $\{w \in]0, 1[\times]0, 1[\mid f\circ h(w) < f(u)\}$ contenant $]0, \eta[\times]0, 1[$. L'adhérence de V est polygonale (car $f\circ h$ est affine par morceaux) et le bord externe de V est donc une ligne polygonale fermée. Ce bord est constitué des segments joignant dans l'ordre $(t_u, 0), (0, 0), (0, 1)$, et $(t_v, 1)$ et d'une ligne polygonale joignant $(t_u, 0)$ à $(t_v, 1)$. Cette ligne est contenue dans $(f\circ h)^{-1}(f(u))$ et fournie le ϕ cherché. Finalement le chemin $h \circ \phi$ convient. □

Le graphe G_R peut être vu comme un graphe topologique. Formellement, il s'agit du quotient de l'espace produit $[0,1] \times R$, où R est vu comme un espace discret de couples (x,y), par la relation d'identification des sommets :

$$(0,(x,y)) \sim (0,(x,z)), (0,(x,y)) \sim (1,(z,x)), (1,(x,y)) \sim (1,(z,y)).$$

Comme affirmé au début de cette section, le graphe G_R correspond bien à la notion usuelle de graphe des contours.

[2] Par compacité, on peut considérer $\eta > 0$ tel que tout carré de côté η de $[0,1]\times[0,1]$ est envoyé par h dans l'étoile d'un sommet. Dans la grille de maille η de $[0,1]\times[0,1]$, deux sommets adjacents sont envoyés dans les étoiles de sommets adjacents. Partant d'une telle grille, il est possible de construire une homotopie affine par morceaux.

Proposition 8.2.7 *G_R est homéomorphe à l'espace quotient $\mathcal{P}/\overset{f}{\sim}$ où, pour tout $u, v \in \mathcal{P}, u \overset{f}{\sim} v$ si et seulement si u et v peuvent être reliés par un chemin f-constant dans $\mathcal{P}$.*

Preuve : Il suffit de construire un homéomorphisme $\phi : \mathcal{P}/\overset{f}{\sim} \longrightarrow G_R$.

Si $u \in \mathcal{P}$, on note $\bar{u}$ sa classe dans $\mathcal{P}/\overset{f}{\sim}$, i.e. la composante connexe de $f^{-1}(f(u))$ contenant u.

- Si $\bar{u}$ contient un sommet x de $\mathcal{P}$, on pose $\phi(\bar{u}) = x$,
- sinon, on considère la composante K_u de $K(f(u))$ qui 'contient' u. Soit x le sommet de $\mathcal{P}$ incident à K_u le plus haut au dessous de u, i.e. :

$$x = \arg\min\{f(z) \,|\, z \text{ incident à } K_u \text{ et } f(z) < f(u)\}$$

  De même, soit y le sommet de $\mathcal{P}$ incident à K_u le plus bas au dessus de u. On pose alors

$$\phi(\bar{u}) = (t, (x, y)) \text{ où } t = \frac{f(u) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

Notons que ϕ est bien définie puisque $\bar{u} = \bar{v}$ implique $K_u = K_v$.

Soit $(t, (x, y)) \in [0, 1] \times R$. Par abus de notation on note $(t, (x, y))$ sa propre classe dans G_R. On choisit un sommet de la composante de $K(f(x) + \epsilon)$ incidente à x et à y (cf. proposition 8.2.5). Ce sommet correspond à une arête (w, z) de $\mathcal{P}$ traversée par $f(x) + \epsilon$. On pose alors

$$\psi((t, (x, y))) = \bar{u}$$

où $u = (1 - \alpha)w + \alpha z$ et α vérifie $f(u) = (1 - \alpha)f(w) + \alpha f(z) = (1 - t)f(x) + tf(y)$.

On vérifie aisément que $\phi \circ \psi$ et $\phi \circ \psi$ sont égales à l'identité sur leurs espaces respectifs. Il reste à montrer que ϕ est continue. Par compacité on en déduit que ϕ est un homémorphisme. Par définition de $\mathcal{P}/\overset{f}{\sim}$, la continuité de ϕ équivaut à la continuité de $\phi \circ \pi$ où π est le quotient $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}/\overset{f}{\sim}$. Il suffit donc de vérifier que $(\phi \circ \pi)^{-1}(U)$ est ouvert dans $\mathcal{P}$ pour U un segment ouvert d'une arête de G_R ou U un homothétique de l'étoile d'un sommet de G_R. Ces ouverts forment en effet une base d'ouverts de G_R. Nous laissons cette vérification au lecteur. $\square$

Remarque 8.2.8 *La proposition 8.2.5 fournit un un algorithme de complexité $O(n_0 n_2)$ pour la construction de l'arbre des contours de $\mathcal{P}$ où n_i est la taille (nombre total de simplexes) du i-squelette de $\mathcal{P}$. En effet, pour chaque sommet x de $\mathcal{P}$ on détermine ses R-successeurs en parcourant les composantes connexes du contour de niveau $f(x) + \epsilon$ et en sélectionnant le sommet de f-valeur minimale et supérieure à $f(x)$ dans chaque composante. Notons que la détermination des composantes de $K(f(x)+\epsilon)$ ne nécessite que la connaissance de son 1-squelette, i.e. du 2-squelette de $\mathcal{P}$. Ceci est d'ailleurs cohérent avec le fait que l'homotopie de courbes est déterminée par le 2-squelette.*

On peut cependant obtenir des algorithmes plus efficaces pour des familles particulières de polyèdres.

8.2.2 Cas d'un polyèdre simplement connexe

Lemme 8.2.9 *Si $\mathcal{P}$ est simplement connexe, alors G_R est un arbre.*

Preuve : Supposons par l'absurde que G_R possède un cycle C. Soient x le sommet de C de f-valeur minimale et y et z ces deux voisins dans C. Soient $\gamma : x \rightsquigarrow y$ et $\delta : x \rightsquigarrow y$, deux chemins correspondant aux deux chemins $x \xrightarrow{*} y$ dans C (l'un se réduit à l'arête (x, y) et l'autre passe par z) et obtenus par concaténation de chemins strictement f-monotones associés à chaque arête de C. Soient $u = \gamma(t_u)$ et $v = \delta(t_v)$ tels que $f(u) = f(v)$ et $f(u)$ est inférieur à la f-valeur de tout sommet de $C - x$. Par hypothèse $\gamma \simeq \delta$ et en adaptant le lemme 8.2.6 on en déduit une isoligne $u \rightsquigarrow v$. On aboutit à une contradiction comme dans la preuve de la proposition 8.2.5 en montrant que les composantes de $K(f(x) + \epsilon)$ incidentes à y et z sont identiques. $\square$

Par le lemme 8.2.1 et le théorème 8.1.8, on peut calculer en temps $O(m\alpha(n))$ les arbres des jonctions et des scissions du graphe des contours de f. Puis, le lemme 8.2.9 et la proposition 8.1.14 montrent que l'on peut en déduire en temps linéaire le graphe des contours. En ajoutant le temps nécessaire au tri initial des sommets dans un ordre f-monotone, on en déduit :

Théorème 8.2.10 (Carr et al.) *L'arbre des contours d'un polyèdre simplement connexe à n sommets et m arêtes peut être construit en temps $O(n \log n + m\alpha(n))$.*

8.2.3 Cas d'une surface orientable de genre g

On note $\mathcal{M}_g$, plutôt que $\mathcal{P}$, une surface triangulée orientable de genre g. On garde la notation X pour les sommets de $\mathcal{M}_g$ et $f : X \to \mathbb{R}$ pour désigner une fonction injective que l'on étend par linéarité sur $\mathcal{M}_g$.

Définition 8.2.11 *Pour tout sommet $x \in X$, la* valuation *de x (relativement à f), notée $V(x)$, est le nombre de changements de signes dans la liste circulaire des $f(y) - f(x)$ où y parcourt les voisins de x dans $\mathcal{M}_g$.*

*L'*indice *de x (relativement à f), noté $I(x)$, est la quantité $I(x) = 1 - V(x)/2$.*

Lemme 8.2.12 (Banchoff [Ban70])

$$\sum_{x \in X} I(x) = \chi(\mathcal{M}_g)$$

où $\chi(\mathcal{M}_g) = 2 - 2g$ est la caractéristique d'Euler de $\mathcal{M}_g$.

Preuve : $V(x)$ est aussi le nombre de triangles incidents à x pour lesquels $f(x)$ est la valeur médiane des f-valeurs de leurs trois sommets. Chaque triangle contribue donc à une unité dans la somme des valuation, i.e. $\sum_{x \in X} V(x) = F$, où F est le nombre de triangles de $\mathcal{M}_g$. On en déduit

$$\sum_{x \in X} I(x) = \sum_{x \in X} (1 - V(x)/2) = |X| - F/2.$$

Or, par la relation d'incidence arêtes-triangles sur $\mathcal{M}_g$, on a $3F = 2A$, où A est le nombre d'arêtes de $\mathcal{M}_g$. Finalement

$$\sum_{x \in X} I(x) = |X| - A + F = \chi(\mathcal{M}_g).$$

□

Dans ce qui suit, ϵ désigne à nouveau un réel positif inférieur à l'écart entre les f-valeurs de deux sommets distincts quelconques.

Définition 8.2.13 *Pour tout réel r, je note $\mathcal{M}_g^-(r) = f^{-1}(]-\infty, r])$ la partie de $\mathcal{M}_g$ au dessous de r. Je note de même $\mathcal{M}_g^+(r) = f^{-1}([r, +\infty[)$ la partie de $\mathcal{M}_g$ au dessus de r. L'atome d'un sommet x, noté $\mathcal{A}(x)$, est la composante connexe de $\mathcal{M}_g^-(f(x) + \epsilon) \cap \mathcal{M}_g^+(f(x) - \epsilon)$ contenant x.*

Dit autrement l'atome de x est une petite tranche de $\mathcal{M}_g$ autour de x. Il n'est pas très difficile de voir que $\mathcal{A}(x)$ est une surface à bord homéomorphe à un disque (centré en x) auquel on a recollé $V(x)/2$ bandes comme sur la figure 8.1. On note $b(x)$ le nombre de bords de $\mathcal{A}(x)$ et $g(x)$ son genre. Les $b(x)$ bords de $\mathcal{A}(x)$ se répar-

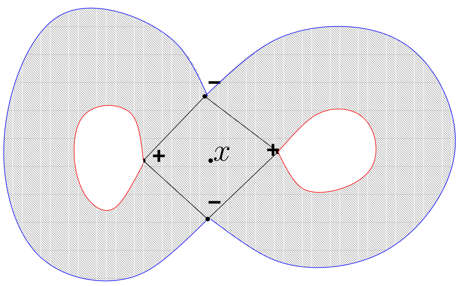

FIG. 8.1 – Un sommet d'indice -1 et son atome.

tissent en bords inférieurs de niveau $f(x) - \epsilon$ et bords supérieurs de niveau $f(x) + \epsilon$. D'après la proposition 8.2.5, ces bords sont en bijection avec les R-prédécesseurs et R-successeurs de x dans le graphe des contours G_R. Donc $b(x) = d_R(x)$.

Proposition 8.2.14

$$c_R = g - \sum_{x \in X} g(x)$$

où c_R est le nombre cyclomatique de G_R.

Preuve : En décomposant $\mathcal{A}(x)$ en $V(x)/2$ bandes recollées à un disque, on calcule

$$\chi(\mathcal{A}(x)) = 1 + V(x)/2 - 2V(x) + V(x) = I(x).$$

D'où, puisque $\chi(\mathcal{A}(x)) = 2 - 2g(x) - b(x)$,

$$I(x) = 2 - 2g(x) - d_R(x). \tag{8.1}$$

Par le lemme de Banchoff, on en déduit

$$\chi(\mathcal{M}_g) = 2|X| - 2\sum_{x \in X} g(x) - \sum_{x \in X} d_R(x) = 2|X| - 2\sum_{x \in X} g(x) - 2A(G_R)$$

où $A(G_R)$ est le nombre d'arêtes de G_R. On conclut avec les relations $\chi(\mathcal{M}_g) = 2-2g$ et $c_R = A(G_R) - |X| + 1$. □

Cette proposition montre en particulier que le nombre cyclomatique du graphe des contours est majoré par g. On peut voir de manière directe que c_R est majoré par $2g$. Pour cela on considère l'application quotient $\mathcal{M}_g \to G_R$. Il est facile de voir que cette application induit un morphisme surjectif entre les groupes fondamentaux respectifs (tout cycle de G_R est la projection d'un cycle de $\mathcal{M}_g$). L'application quotient induit donc également un morphisme surjectif entre les homologies de dimension 1. D'où la comparaison entre les nombres de Betti. Pour arriver à la borne g il faut remplir $\mathcal{M}_g$ en une variété de dimension 3 ayant $\mathcal{M}_g$ pour bord et d'étendre f à cette variété.

Un algorithme de balayage relativement simple, décrit par Cole-McLaughlin et al. [CMEH+03], permet de construire G_R en temps $O(n \log n)$ où n est le nombre total de simplexes de la surface. Ceci est optimal comme montré par van Kreveld et al. [vKvOB+97] par réduction du problème du tri au calcul de graphe des contours.

On détaille ci-dessous un autre algorithme, non-optimal, utilisant les techniques développées pour les variété simplement connexes.

Théorème 8.2.15 *Le graphe des contours d'une surface de genre g peut être construit en temps $O(gn + n \log n)$ où n est le nombre total de simplexes de la surface.*

Preuve : Si $\mathcal{M}_g$ a un genre g positif, alors son graphe des contours peut contenir des cycles. Le principe est de couper $\mathcal{M}_g$ par des contours, ajoutant un maximum et un minimum local pour chaque coupe, de sorte que le graphe des contours de la surface découpée (et rebouchée par les extrema locaux) soit un arbre. On pourra alors appliquer les résultats du cas où G_R est un arbre. Il suffira pour terminer d'identifier les paires de maxima et minima introduits lors des coupes pour retrouver le graphe des contours de $\mathcal{M}_g$. On sait qu'il suffit de couper par c_R contours correspondant à c_R arêtes de G_R. On peut, suivant le lemme 8.1.17, choisir ces arêtes incidentes à des sommets ayant un défaut de degré, c'est à dire pour lesquels $d_J^-(x) + d_S^+(x) < d_R(x)$.

Pour repérer de tels sommets sans avoir à calculer d_R, on remarque d'après l'équation 8.1 que $d_R(x) = b(x) = 2 - 2g(x) - I(x)$. Par conséquent $d_J^-(x) + d_S^+(x) < d_R(x)$

implique $d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x)$. Cette dernière inégalité est vrai soit lorsque $d_J^-(x)+d_S^+(x) < d_R(x)$, ce qui peut arriver pour au plus $2c_R$ sommets (lemme 8.1.17), soit lorsque $d_R(x) < 2-I(x)$. Or, par la proposition 8.2.14, on a $c_R = g - \sum_{x \in X} g(x)$. Comme $c_R \geq 0$ on en déduit que $g(x)$ est non nul en au plus g sommets, ou encore que $d_R(x) < 2 - I(x)$ en au plus g sommets. Par conséquent l'inégalité $d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x)$ sera stricte pour au plus $3g$ sommets.

Connaissant G_J et G_S on obtient $d_J^-(x) + d_S^+(x)$ pour tous les sommets en temps total linéaire. Le calcul de l'indice nécessite également un temps total linéaire. Notons qu'il suffit en fait de couper par des contours inférieurs incidents à des sommets pour lesquels $d_J^-(x) < d_R^-(x)$. On procède aux coupes par balayage des sommets de bas en haut. Pour chaque sommet x ayant un défaut de degré $(d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x))$, on regarde les composantes connexes de $\mathcal{M}_g^-(f(x)+\epsilon)$, et pour chaque composante connexe on coupe par tous les contours incidents à x, sauf un (en particulier si la composante a un seul bord, on ne coupe pas). Dans la pratique on peut maintenir les composantes à l'aide de la structure Union-Find, exactement comme pour le calcul de G_J.

Le traitement de chaque sommet avec un défaut de degré prend un temps linéaire (fonction du nombre total de simplexes de $\mathcal{M}_g$), soit en temps $O(gn)$ au total. On obtient ainsi une surface découpée $\mathcal{M}'$ de taille $O(n)$ - elle a $O(n+g) = O(n)$ sommets - dont le graphe des contours est un arbre. (mais $\mathcal{M}'$ n'est pas nécessairement une sphère, cf. section suivante). Le calcul de cet arbre peut se faire en temps $O(n \log n)$ d'après le théorème 8.2.10. On ajoute finalement $O(g)$ arêtes à cet arbre, correspondant aux cycles que l'on a coupé. □

Sur le nombre de cycles du graphe des contours

La proposition 8.2.14 montre que c_R est majoré par g. On décrit un exemple de fonction f pour laquelle la majoration est stricte, c'est à dire pour laquelle l'atome d'au moins un sommet est de genre non nul. Cet exemple se retrouve chez Banchoff et Takens [BT75] pour le calcul de fonctions ayant précisément 3 singularités sur une surface.

La figure 8.2 montre l'atome d'un sommet dont le genre est 1. On remarque que cet atome a un unique bord inférieur et un unique bord supérieur.

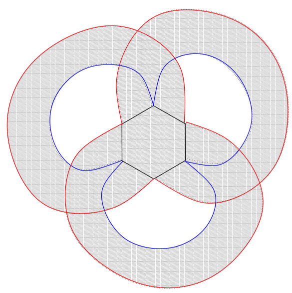

FIG. 8.2 – Un sommet d'indice -2 et son atome.

Une telle configuration apparaît dans un tore dont les sommets sont valués comme sur la figure 8.3. Sur cette figure on a représenté une portion du revêtement universel du tore composée de quatre copies d'un domaine fondamental.

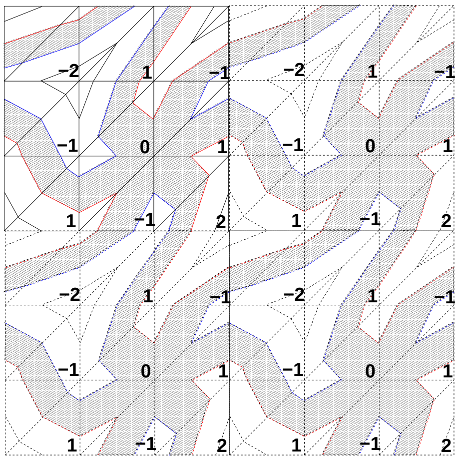

FIG. 8.3 – Les lignes de niveaux tracées dans le revêtement universel du tore. Le sommet valué à 0 est dans le configuration de la figure 8.2.

La figure 8.4 montre l'atome du sommet de valeur nulle sur une réalisation géométrique de ce tore. Le graphe des contours correspondant à ce tore valué est donc un

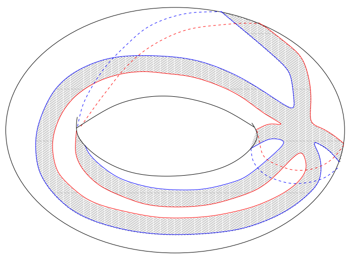

FIG. 8.4 – Ce tore est revêtu par le plan de la figure 8.3 ci-dessus.

arbre (dans ce cas précis on peut même vérifié que c'est une chaîne). De manière générale, on peut construire à partir de cet exemple une surface valuée de genre quelconque dont le graphe des contours est une chaîne.

Bibliographie

[Ban70] T. F. Banchoff. Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces. *American Mathematical Monthly*, 77 :475–485, 1970.

[BLW98] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph theory 1736-1936*. Oxford University Press, 1998.

[BT75] Thomas F. Banchoff and Floris Takens. Height functions on surfaces with three critical points. *Illinois J. of Mathematics*, 76 :325–335, 1975.

[CCdVE+08] Erin W. Chambers, Éric Colin de Verdière, Jeff Erickson, Francis Lazarus, and Kim Whittlesey. Splitting (complicated) surfaces is hard. *Computational Geometry, Theory and Applications*, 41 :94–110, oct 2008.

[CdVL05] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. Optimal System of Loops on an Orientable Surface. *Discrete & Computational Geometry*, 33(3) :507 – 534, March 2005.

[CdVL07] É. Colin de Verdière and F. Lazarus. Optimal Pants Decomposition and Shortest Cycles on an Orientable Surface. *Journal of the ACM*, 54(4) :art. 18, jul 2007.

[CE06] Éric Colin de Verdière and Jeff Erickson. Tightening non-simple paths and cycles on surfaces. In *Proc. 17th Annu. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, 2006.

[Che] Victor Chepoi. Méthodes Géométriques et optimisation combinatoire. Notes de cours. `http ://www.lif-sud.univ-mrs.fr/~chepoi/dea.ps`.

[CL05] F. Chazal and A. Lieutier. Weak Feature Size and persistent homology : computing homology of solids in Rn from noisy data samples. In *Proc. of the 21st Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 2005.

[CLRS02] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. *Introduction à l'algorithmique 2nd edition*. Dunod, 2002.

[CM05] Sergio Cabello and Bojan Mohar. Finding shortest non-separating and non-contractible cycles for topologically embedded graphs. In *Proc. 13th Annu. European Sympos. Algorithms*, volume 3669 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 131–142, 2005.

[CMEH+03] K. Cole-McLaughlin, H. Edelsbrunner, J. Harer, Natarajan V., and V. Pascucci. Loops in Reeb graphs of 2-manifolds. In *Proc. 19th Ann. Sympos. Comput. Geom.*, pages 344–350, 2003.

[CSA03] Hamish Carr, Jack Snoeyink, and Ulrike Axen. Computing contour trees in all dimensions. *Computational Geometry*, 24 :75–94, 2003.

[CSEH07] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of Persistence Diagrams. *Discrete & Computational Ceometry*, 37(1) :103–120, 2007.

[CSEH08] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and John Harer. Extending persistence using poincaré and lefschetz duality. *Foundations of Computational Mathematics*, 2008.

[CSEM06] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and Dmitriy Morozov. Vines and Vineyards by Updating Persistence in Linear Time. In *22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 119–126, 2006.

[DE95] C. J. A. Delfinado and H. Edelsbrunner. An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere. *Computer Aided Geometric Design*, 12 :771–784, 1995.

[DG99] Tamal K. Dey and Sumanta Guha. Transforming Curves on Surfaces. *Journal of Computer and System Sciences*, 58(2) :297–325, 1999.

[DPeK82] N. Deo, G. M. Prabhu, and M. S. et Krishnamoorty. Algorithms for generating fundamental cycles in a graph. *ACM Trans. Math. Software*, 8 :26–42, 1982.

[DS95] T. Dey and H. Schipper. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection. *Discrete and Computational Geometry*, 14 :93–110, 1995.

[DSV01] J.G. Dumas, B.D. Saunders, and G. Villard. On efficient sparse integer matrix Smith normal form computations. *Computer Algebra and Mechanized Reasoning*, 32(1-2) :71–99, 2001.

[EH08] H. Edelsbrunner and J. Harer. Persistent homology — a survey. In J. E. Goodman, J. Pach, and R. Pollack, editors, *Twenty Years After.* AMS, 2008.

[ELZ00] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological Persistence and Simplification. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 454–463, 2000.

[EMP06] Herbert Edelsbrunner, Dmitriy Morozov, and Valerio Pascucci. Persistence-Sensitive Simplification of Functions on 2-Manifolds. In *22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 127–134, 2006.

[EW05] Jeff Erikson and Kim Whittelsey. Greedy optimal homotopy and homology generators. In *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1038–1046, 2005.

[Fri98] J. Friedman. Computing Betti Numbers via Combinatorial Laplacians. *Algorithmica*, 21(4) :331–346, aug 1998.

[GH81] M. J. Greenberg and J. R Harper. *Algebraic topology. A first course.* The Benjamin/Cummings publishing company, 1981.

[GH02] Alexander Golynski and Joseph D. Horton. A Polynomial-Time Algorithm to Find the Minimal Cycle Basis of a Regular Matroid. In *8th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, 2002.

[Gle01] Petra Manuela Gleiss. *Short Cycles.* PhD thesis, Université de Vienne, 2001. `http ://www.tbi.univie.ac.at/papers/Abstracts/pmg-diss.pdf`.

[Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002. Avalaible at `http ://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html`.

[HM93] David Hartvigsen and Russel Mardon. When Do Short Cycles Generate the Cycle Space. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 57 :88–99, 1993.

[HO04] Arthur Hobbs and James Oxley. William T. Tutte (1917-2002). *Notices of the American Mathematical Society*, 51(3) :320–330, march 2004.

[Hor87] J. D. Horton. A Polynomial-Time Algorithm to Find the Shortest Cycle Basis of a Graph. *SIAM Journal of Computing*, 16(2) :358–366, 1987.

[KB79] Ravindran Kannan and Achim Bachem. Polynomial Algorithms for Computing the Smith and Hermite Normal Forms of an Integer Matrix. *SIAM Journal on Computing*, 8(4) :499–507, nov 1979.

[KMMP04] Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, Dimitrios Michail, and Katarzyna Paluch. A Faster Algorithm for Minimum Cycle Basis of Graphs. In *ICALP*, 2004.

[LPVV01] F. Lazarus, M. Pocchiola, G. Vegter, and A. Verroust. Computing a Canonical Polygonal Schema of an Orientable Triangulated Surface. In *Proc. of the 17th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 80–89, 2001.

[Mas77] William S. Massey. *Algebraic Topology : An Introduction*, volume 56 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer Verlag, 1977.

[MM] Kurt Mehlhorn and Dimitrios Michail. Minimum Cycle Bases : Faster and Simpler.

[Moi77] E. E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, volume 47 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, 1977.

[MT01] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on Surfaces.* John Hopkins University Press, 2001.

[Mun93] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology.* Westview Press, 1993. reprint of Addison Wesley, 1984.

[MVV87] Ketan Mulmuley, Umesh V. Vazirani, and Vijay V. Vazirani. Matching is as easy as matrix inversion. In *nineteenth annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 345–354, New York, NY, USA, 1987. ACM Press.

[Rob99] V. Robins. Towards computing homology from finite approximations. *Topology proceedings*, 24, 1999.

[Sti93] J Stillwell. *Classical topology and combinatorial group theory.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[TV98] S. P. Tarasov and M. N. Vyalyi. Construction of contour trees in 3D in O(n log n) steps. In *14th Annu. ACM Sympos. on Comput. Geom*, pages 68–75, 1998.

[vKvOB+97] M. van Kreveld, R. van Oostrum, C. Bajaj, V. Pascucci, and D. Schikore. Contour Trees and Small Seed Sets for Isosurface Traversal. In *13th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 212–219, Nice, France, June 1997. ACM Press.

[VY90] G. Vegter and C. K. Yap. Computational complexity of combinatorial surfaces. In *Proc. 6th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 102–111, 1990.

[ZC05] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2) :249–274, 2005.