

# Chapitre 3

## Triangulation

Une triangulation d'une région polygonale du plan est une décomposition de cette région en triangles dont les sommets sont ceux du bord de la région. Une triangulation permet souvent de résoudre plus facilement des problèmes portant sur la région qu'elle triangule. Le problème du gardiennage d'une galerie d'art en est un bel exemple.

Au début du *XXe* siècle N. J. Lennes montre de manière constructive que tout polygone simple admet une triangulation (Lennes, N., Theorems on the simple finite polygon and polyhedron, Amer. J. Math., 33 (1911), pp. 36-62). Cette construction fournit de fait un algorithme de complexité quadratique en fonction du nombre de sommets. Du temps de l'émergence de la géométrie algorithmique, Garey et al. (1978) ont proposé un algorithme de complexité  $O(n \log n)$  pour trianguler un polygone à  $n$  côtés. Après diverses améliorations (cf. notes historiques du livre de de Berg et al.), Bernard Chazelle montre en 1991 qu'un polygone simple peut être triangulé en temps linéaire. L'algorithme de Chazelle, décrit dans

- Triangulating a simple polygon in linear time. B. Chazelle. Discrete and Computational Geometry, 6 :485-524, 1991.

est réputé très complexe. Une version plus simple et randomisée est décrite dans

- A randomized algorithm for triangulating a simple polygon in linear time. Amato, Goodrich and Ramos. Discrete and Computational Geometry, 26 :245-265, 2001.

Le problème de la triangulation de l'intérieur d'un polyèdre dans  $\mathbb{R}^3$  est beaucoup plus compliqué. Contrairement au cas bidimensionnel le nombre de tétraèdre d'une triangulation d'un polyèdre (même convexe) à  $n$  sommets peut varier suivant la triangulation. De plus, tous les polyèdres ne sont pas triangulables, à moins d'ajouter des sommets intérieurs (dits de Steiner), comme le montre le cas du polyèdre de Shönhardt. Ce polyèdre est obtenu à partir d'un prisme de base triangulaire en tournant légèrement le triangle supérieur par rapport au triangle inférieur. Du coup, les faces verticales du prisme (des quadrilatères) ne sont plus planes et il faut ajouter une diagonale pour trianguler chacun de ces quadrilatères gauches. En choisissant cette diagonale de manière à rendre les quadrilatères 'concaves', on vérifie que toute nouvelle arête entre deux sommets du polyèdre est extérieure au polyèdre. Il n'est donc pas possible de trianguler son intérieur.

**Références :**

- Handbook of Discrete and Computational Geometry. Edited by Goodman and O'Rourke. CRC Press 2004.

## 3.1 Existence

**Définitions** La *ligne polygonale* de sommets  $(s_1, \dots, s_n)$  est la suite de segments  $(s_1s_2, \dots, s_{n-1}s_n)$ . Cette ligne polygonale est *fermée* si  $s_1 = s_n$ ; elle est simple si deux de ses segments non consécutifs sont disjoints et si deux de ses segments consécutifs s'intersectent en un unique sommet. Un *polygone* est une ligne polygonale simple et fermée. On appelle *arêtes* les segments d'un polygone. Par le théorème de Jordan (version affine), un polygone  $P$  sépare le plan en deux régions connexes appelées *intérieur* et *extérieur* de  $P$ . Dans ce chapitre, on notera respectivement  $IntP$  et  $extP$  ces régions (ce sont des ouverts du plan).

Une *diagonale* d'un polygone  $P$  est un segment dont l'intérieur relatif (i.e. le segment privé de ses extrémités) est intérieur à  $P$  et dont les extrémités sont des sommets de  $P$ . Une *triangulation* de  $P$  est un recouvrement de son intérieur (au sens large, i.e. de  $\overline{IntP}$ ) par des triangles d'intérieurs disjoints et dont les côtés sont soit des arêtes soit des diagonales de  $P$ .

**Lemme 3.1** *Tout polygone ayant au moins 4 sommets admet une diagonale.*

**Preuve :** Soit  $P$  un polygone et soit  $s$  le sommet de  $P$  de coordonnées minimales pour l'ordre lexicographique ( $s$  est le sommet le plus bas parmi les sommets les plus à gauche). Soit  $p$  le sommet précédant  $s$  et  $q$  le sommet suivant  $s$  pour l'ordre circulaire dans  $P$ .

- Si le triangle  $spq$  ne contient (au sens large) aucun sommet de  $P \setminus \{s, p, q\}$ , alors le segment  $pq$  est une diagonale : aucune arête de  $P$  ne peut rencontrer l'intérieur ni le bord de  $spq$  car l'une de ses extrémités serait contenue dans  $spq$ . Donc toute demi-droite issue d'un point  $x$  intérieur au segment  $pq$  et passant par  $s$  ne rencontre  $P$  qu'une seule fois (en  $s$ ). Par le théorème de Jordan, et puisque la droite est extérieure à  $P$  à l'infini, le point  $x$  est intérieur à  $P$ .
- Sinon, soit  $r$  un sommet de  $P$  intérieur au triangle  $spq$  et qui minimise la distance à la droite  $pq$ . On montre aisément que le segment  $sr$  est une diagonale de  $P$ .

□

**Exercice 3.2** *Compléter la preuve précédente en indiquant en particulier où intervient l'hypothèse sur le nombre minimal (4) de sommets.*

**Théorème 3.3** *Tout polygone admet une triangulation.*

**Preuve :** Soit  $P$  un polygone et soit  $D$  un ensemble de diagonales de  $P$  d'intérieurs disjoints qui soit maximal pour l'inclusion. Toute région bornée du graphe plan  $P \cup D$  est nécessairement un triangle ; dans la négative le lemme précédent contredirait la maximalité de  $D$ . □

On montre par récurrence sur  $n$  que toute triangulation d'un polygone à  $n$  sommets a exactement  $n - 2$  triangles et  $n - 3$  diagonales.

**Exercice 3.4** *La preuve de Lennes pour l'existence d'une triangulation est proche de la précédente quoique légèrement différente. Soit  $spq$  un triangle et soit  $R$  un ensemble de points intérieurs à ce triangle. Montrer qu'il existe  $r \in R$  tel que  $rsp \cap R = \{r\}$  (ici  $rsp$  désigne le bord et l'intérieur du triangle). Compléter la preuve de Lennes.*

## 3.2 Algorithmes

Si un polygone  $P$  est décrit sous forme d'une liste doublement chaînée de sommets, la recherche d'une diagonale selon la preuve du lemme 3.1 prend un temps  $O(n)$ , où  $n = |P|$  est le nombre de sommets de  $P$ . On en déduit aisément un algorithme de triangulation de complexité quadratique. Nous allons voir deux algorithmes plus efficaces.

**Théorème 3.5** *Il existe un algorithme qui triangule tout polygone à  $n$  sommets en temps  $O(n \log n)$  et espace  $O(n)$ .*

Nous proposons ci-dessous deux preuves – c'est à dire deux algorithmes – pour ce théorème. Elles sont respectivement décrites dans les articles suivants :

- A theorem on polygon cutting with applications. B. Chazelle. In Proc. IEEE Sympos. Found. Compu. Sci., pp. 339-349, 1982.
- Triangulating a simple polygon. M.R. Garey, D. S. Johnson, F. P. Preparata and R. E. Tarjan. Inform. Process. Lett., 7 :175-179, 1978.

### 3.2.1 Algorithme diviser pour régner

L'algorithme de Chazelle consiste à calculer en temps linéaire une diagonale du polygone  $P$  qui coupe  $P$  en deux sous-polygones de tailles approximativement égales. En appliquant ce calcul de manière récursive à chacun des deux sous-polygones on obtient un algorithme de triangulation de complexité  $O(|P| \log |P|)$ .

On supposera que  $P$  est décrit sous forme d'une liste cyclique doublement chaînée de ses sommets dans l'ordre (cyclique) le long de  $P$ . Par la suite  $P$  désignera aussi bien un polygone que sa liste doublement chaînée. On supposera également disposer de la liste  $L$  doublement chaînée des sommets de  $P$  triés selon l'ordre lexicographique de leurs coordonnées ainsi que de la liste  $V$  des paires d'arêtes de  $P$  *verticalement visibles*, i.e. des paires d'arêtes pour lesquelles il existe un segment vertical intérieur à  $P$  et dont les extrémités sont respectivement intérieures à chacune de ces deux arêtes. En considérant la taille de la carte des trapèzes (cf. section ??), il est facile de voir que la liste  $V$  a une taille linéaire en fonction de  $|P|$ .

**Théorème 3.6 (du polygon cutting, Chazelle 1982)** *Soit  $P$  un polygone à  $n$  sommets et soient  $L$  et  $V$  les listes associées (respectivement des sommets triés selon l'ordre*

lexicographique des coordonnées et des paires d'arêtes verticalement visibles). Il existe un algorithme de complexité  $O(n)$  pour calculer une diagonale de  $P$  qui coupe  $P$  en deux polygones  $P_1$  et  $P_2$  tels que

$$|P_1|, |P_2| \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1.$$

De plus, les listes  $P_i$ ,  $L_i$  et  $V_i$  relatives à chacun des deux polygones pour  $i = 1, 2$  peuvent être calculées en temps  $O(n)$  également.

On montre dans un premier temps qu'il existe un segment vertical intérieur à  $P$  et qui le coupe en deux polygones de tailles approximativement égales.

**Lemme 3.7** *Soit  $P$  un polygone à  $n$  sommets. Il existe un segment vertical  $pq$  (i.e.  $x_p = x_q$ ) intérieur à  $P$  et intersectant  $P$  en ses deux extrémités  $p$  et  $q$  exactement de sorte que les deux composantes de  $P \setminus \{p, q\}$  contiennent chacune au plus  $\lceil \frac{2}{3}n \rceil$  sommets de  $P$ .*

**Preuve :** On considère la décomposition trapézoïdale de  $P$  (cf. section ??). On suppose dans un premier temps que  $P$  est en position générique, c'est à dire que tous les sommets de  $P$  ont des abscisses distinctes. Il suit que chaque trapèze de la décomposition intérieur à  $P$  est bordé par exactement un sommet de  $P$  sur sa gauche et un sommet de  $P$  sur sa droite. Soit  $T$  le graphe plan obtenu en reliant par un segment chaque paire de sommets incidents à un même trapèze (il y a donc un segment par trapèze).  $T$  est connexe (utiliser par exemple la connexité du graphe d'adjacence des trapèzes) et acyclique (utiliser l'acyclicité du graphe d'adjacence des trapèzes), i.e. que  $T$  est un arbre. De plus, l'hypothèse de position générique montre que chaque sommet est incident à trois trapèzes au plus et donc que le degré des sommets de  $T$  est au plus trois.

Remarquons qu'on peut associer à chaque arête  $a$  de  $T$  un segment vertical intérieur à  $P$  et intersectant  $P$  en ses extrémités. Le nombre de sommets des deux lignes polygonales de  $P$  coupées par ces extrémités est précisément le nombre de sommets de chaque sous arbre de  $T - a$ . Le lemme suivant permet donc de conclure.

Dans le cas non-générique, on perturbe les sommets en tournant de manière infinitésimale le polygone afin de distinguer toutes les abscisses des sommets de  $P$ . Cette rotation est elle-même simulée en considérant l'ordre lexicographique sur les paires (abscisses, ordonnées) des coordonnées des sommets.  $\square$

**Lemme 3.8** *Soit  $T$  un arbre à  $n$  sommets,  $n \geq 2$ . On suppose que chaque sommet de  $T$  est de degré au plus 3. Alors il existe une arête  $a$  de  $T$  telle que chaque composante de  $T - a$  possède au plus  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$  sommets.*

**Preuve :** Soit  $a$  une arête de  $T$ . Si une composante  $C$  de  $T - a$  est telle que  $|C| < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  alors il existe une arête  $b$  de  $T$  telle que

1. ou bien une composante  $K$  de  $T - b$  vérifie

$$|C| < |K| < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$$

2. ou bien chaque composante de  $T - b$  est de taille au moins  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

En effet, soit  $C'$  la composante complémentaire de  $C$  dans  $T - a$  et  $x$  le sommet incident à  $C'$  et  $a$ . Par les hypothèses sur  $T$ ,  $x$  est de degré  $d \leq 2$  dans  $C'$ .

- On ne peut avoir  $d = 0$  car dans ce cas on aurait  $|C'| = 1 > \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ , en contradiction avec  $n \geq 2$ .
- Si  $d = 1$ , on choisit pour  $b$  l'unique arête incidente  $x$  dans  $C'$ . Alors  $T - b$  a une composante  $K$  (de fait  $C + a$ ) de taille  $|C| + 1$ . On se retrouve alors dans le cas 1 ou 2 ci-dessus selon que  $|C| + 1$  est respectivement strictement inférieur ou égal à  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .
- Sinon  $d = 2$ . Soient  $a_1, a_2$  les deux arêtes incidentes à  $x$  dans  $C'$  et soit  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) la composante de  $C' - a_1$  (resp. de  $C' - a_2$ ) qui n'est pas incidente à  $x$ . Si  $|C_1| > \lceil \frac{2n}{3} \rceil$  alors on se retrouve dans le cas 1 en choisissant  $b = a_1$  (et  $K = C + a + C_2$ ). De même en choisissant  $b = a_2$  si  $|C_2| > \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ . On peut donc supposer  $|C_1| \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$  et  $|C_2| \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ . Puisqu'on ne peut avoir à la fois  $|C_1| < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  et  $|C_2| < \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , on a  $|C_1| \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  ou  $|C_2| \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . On se retrouve dans le cas 2 en choisissant  $b = a_1$  dans le premier cas et  $b = a_2$  dans le second cas.

La preuve du lemme est alors terminée par récurrence sur  $|C|$ .  $\square$

**Preuve du théorème 3.6 :** On sait d'après le lemme 3.7 qu'il existe une verticale dont les extrémités coupent  $P$  en deux lignes polygonales contenant chacune au plus  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$  sommets. En parcourant la liste  $V$  des paires d'arêtes verticalement visibles on trouvera donc nécessairement une paire  $(a, b)$  telle que tout segment vertical de visibilité entre les deux arêtes  $a$  et  $b$  coupe  $P$  comme ci-dessus. Fixons un sommet  $s$  de  $P$  et indexons les sommets de  $P$  de 0 à  $n - 1$  dans l'ordre direct le long de  $P$  à partir de  $s$ . À partir de ces indices on peut calculer en temps constant la longueur de la ligne polygonale entre deux sommets d'indices  $i$  et  $j$  : en incluant les deux sommets et en considérant la ligne de  $i$  vers  $j$  dans le sens direct, cette longueur vaut  $j - i + 1$  si  $j \geq i$  et  $n - j + i - 1$  sinon. On peut donc tester en temps constant si une paire d'arêtes convient et de ce fait déterminer  $(a, b)$  en temps linéaire.

Il n'est en général pas possible de relier deux des extrémités de  $a$  et de  $b$  par une diagonale car celle-ci peut recouper  $P$ . Considérons le quadrilatère  $Q$  formé par  $a$ ,  $b$  et les deux segments  $c$  et  $d$  reliant les extrémités de  $a$  et  $b$  situés d'un même côté d'une verticale de visibilité entre  $a$  et  $b$ . Le quadrilatère  $Q$  forme bien un polygone (simple) de par l'existence d'un segment de visibilité qui sépare  $c$  et  $d$ . Soit  $P_c$  (resp.  $P_d$ ) la sous-ligne polygonale de  $P$  bordée par les extrémités de  $c$  (resp. de  $d$ ) et ne contenant ni  $a$  ni  $b$ . L'objectif est de calculer une diagonale entre un sommet de  $P_c$  intérieur à  $Q$  et un sommet de  $P_d$  intérieur à  $Q$  de sorte que cette diagonale sépare  $P$  comme voulu. Pour cela on considère l'ensemble  $S_c$  (resp.  $S_d$ ) des composantes de  $P \cap \overline{Int}Q$  qui s'appuient sur  $c$  (resp. sur  $d$ ). On pose  $C_c = Conv(S_c)$  et  $C_d = Conv(S_d)$ .

**Affirmation I :**  $C_c$  et  $C_d$  sont disjointes. De plus, les sommets de  $C_c$  (resp. de  $C_d$ ) sont les sommets de  $P_c$  (resp. de  $P_d$ ).

**Preuve de l'affirmation I :** Par hypothèse, il est facile de voir – à l'aide du théorème de Jordan – que  $S_c$  et  $S_d$  sont séparées dans  $Q$  par un segment vertical. Il en est donc de même de leurs enveloppes convexes. Par ailleurs, toujours à l'aide du théorème de Jordan, on montre que toute région bordée par une composante de  $S_c \cap P_d$  et un segment de  $c$

est contenue dans une région bordée par une composante de  $S_c \cap P_c$  et un segment de  $c$ . On en déduit que  $C_c = \text{Conv}(S_c \cap P_c)$ . Donc  $C_c$  est l'enveloppe convexe des sommets de  $S_c \cap P_c$  qui comprend les sommets de  $P_c$  inclus dans  $S_c$  et les extrémités des composantes de  $S_c$ . Or ces sommets sont tous sur  $c$  donc dans l'enveloppe convexe des extrémités de  $c$  qui sont des sommets de  $P_c$ . Un raisonnement analogue montre que les sommets de  $C_d$  sont des sommets de  $P_d$ .  $\square$

L'affirmation précédente permet de sélectionner en temps  $O(n)$  un sous-ensemble  $A$  des sommets de  $P$  tel que  $C_c = \text{Conv}(A)$  : il suffit de parcourir  $P_c$  et de retenir les sommets de  $P_c$  compris entre deux intersections successives de  $P_c$  avec  $c$ , lorsque  $P_c$  entre dans  $Q$  à la première intersection. On peut extraire de  $L$  la sous-liste  $L_A$ , triée selon l'ordre lexicographique des coordonnées, des sommets de  $A$ . On obtient finalement  $C_c$  en temps linéaire à partir de  $L_A$  par l'algorithme classique de balayage ??.<sup>1</sup> De manière analogue on calcule  $C_d$  en temps linéaire.

On considère maintenant le polygone  $Q'$  formé des arêtes  $a$  et  $b$  et des deux chaînes concaves  $C'_c = C_c - c$  et  $C'_d = C_d - d$ . Notons que  $Q'$  est bien une ligne polygonale simple d'après l'affirmation I. Notre but est de montrer que dans toute triangulation  $\mathcal{T}$  de  $Q'$  l'une des arêtes de  $\mathcal{T}$  fournit une diagonale qui sépare  $P$  comme voulu. On remarque tout d'abord que tout triangle de  $\mathcal{T}$  contient nécessairement une arête de  $C'_c$  ou bien de  $C'_d$ . En effet,  $C'_c$  et  $C'_d$  étant concaves, un tel triangle ne peut avoir deux sommets non adjacents sur une même de ces deux chaînes. Le dual de  $\mathcal{T}$  est donc une chaîne simple, ce qui permet d'ordonner les diagonales de  $\mathcal{T}$  de la première, incidente au même triangle que  $a$ , à la dernière, incidente au même triangle que  $b$ . On note  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  ces diagonales, on pose  $\delta_{k+1} = b$  et pour  $i = 1, \dots, k-1$ , on note  $\gamma_i$  la troisième arête du triangle de  $\mathcal{T}$  bordé par  $\delta_i$  et  $\delta_{i+1}$ . Donc  $\gamma_i$  est une arête de  $C'_c$  ou de  $C'_d$  et on note  $\Gamma_i$  la sous-chaîne de respectivement  $P_c$  ou  $P_d$  joignant les extrémités de  $\gamma_i$ . Pour chaque diagonale  $\delta_i$  de  $\mathcal{T}$ , on note enfin  $\Delta_i$  la sous-chaîne de  $P$  contenant  $a$  et joignant les extrémités de  $\delta_i$ .

**Affirmation II :** Une des arêtes de  $\mathcal{T}$  (soit une diagonale soit une arête de  $Q'$ ) est une diagonale de  $P$  qui coupe  $P$  en deux lignes polygonales (extrémités incluses) de taille au plus  $\lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1$ .

**Preuve de l'affirmation II :** Supposons qu'une arête  $\gamma_i$  de  $C'_c$  ou de  $C'_d$  ne soit pas une arête de  $P$  (et soit donc une diagonale de  $P$ ) et que

$$|\Gamma_i| \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1.$$

On a alors, en notant  $\Gamma'_i$  l'autre chaîne de  $P$  joignant les extrémités de  $\gamma_i$

- d'une part :  $|\Gamma_i| \leq \max\{|P_c|, |P_d|\} \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ ,
- d'autre part :  $|\Gamma_i| + |\Gamma'_i| = n + 2$ , d'où  $|\Gamma'_i| \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1$ .

L'affirmation est donc vérifiée en choisissant  $\gamma_i$  comme diagonale de  $P$ .

Supposons maintenant à l'inverse que pour toute arête  $\gamma_i$  de  $C'_c$  ou de  $C'_d$  on ait

$$|\Gamma_i| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor.$$

---

<sup>1</sup>Chazelle utilise un autre argument. Il extrait de  $S_c$  une ligne polygonale simple joignant les extrémités de  $c$  et dont l'enveloppe convexe est  $C_c$ . Cette ligne est constituée de composantes de  $S_c$  et de segments de  $c$ . Il utilise ensuite l'algorithme de complexité linéaire pour calculer l'enveloppe convexe d'une ligne polygonale simple.

On a en particulier

$$|\Delta_1| = |\Gamma_1 + a| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1.$$

Par ailleurs si pour un certain  $i \in [1, k]$  on a  $|\Delta_i| \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  alors  $\delta_i$  n'est pas la dernière diagonale de  $\mathcal{T}$  (i.e.  $i < k$ ) et

$$|\Delta_i| < |\Delta_{i+1}| \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1.$$

En effet, on a

$$|\Delta_{i+1}| = |\Delta_i + \Gamma_i| = |\Delta_i| + |\Gamma_i| - 1 \leq 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1.$$

Alors que  $|\Delta_k| \geq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1$  (faire un raisonnement analogue à la majoration de  $|\Delta_1|$ ). On conclut par récurrence sur  $k$  que l'une au moins des diagonales  $\delta_i$  vérifie

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1 \leq |\Delta_i| \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1.$$

Ceci permet également de confirmer l'affirmation en choisissant  $\delta_i$  comme diagonale de  $P$ .  $\square$

**Affirmation III :**  $Q'$  peut être triangulé en temps linéaire.

**Preuve de l'affirmation III :** D'après la preuve de l'affirmation II, on peut trianguler  $Q'$  de manière incrémentale en calculant chaque diagonale  $\delta_{i+1}$  en fonction de la diagonale  $\delta_i$  calculée précédemment : en notant  $p_c$  et  $p_d$  les extrémités de  $\delta_i$  et  $p_cq_c$  et  $p_dq_d$  les arêtes de  $Q'$  respectivement incidentes à  $p_c$  et  $p_d$  et "au dessus" de  $\delta_i$ , alors on a soit  $\delta_{i+1} = p_cq_d$  soit  $\delta_{i+1} = p_dq_c$ . Il suffit de tester si  $q_d$  (resp.  $p_c$ ) est au dessous de la droite  $p_cq_c$  (resp.  $p_dq_d$ ) pour savoir si  $p_cq_d$  (resp.  $p_dq_c$ ) est une diagonale. Il se peut que les deux le soient, auquel cas l'une ou l'autre convient puisque dans les deux cas on se retrouve dans une configuration où la partie de  $Q'$  au dessus de  $\delta_{i+1}$  est constituée de deux chaînes concaves reliées par deux segments, ce qui permet d'appliquer la récurrence.  $\square$

La conjonction des affirmations II et III permet de conclure la première partie du théorème. Il reste à vérifier, en appelant  $P_1$  et  $P_2$  les deux polygones coupés par la diagonale  $\delta$  trouvée, que les listes  $P_i$ ,  $L_i$  et  $V_i$  relatives au polygone  $P_i$  pour  $i = 1, 2$  peuvent être calculées en temps  $O(n)$  également. C'est clair pour les listes  $P_i$  et  $L_i$  (ces listes contiennent plus précisément des pointeurs bidirectionnels sur un tableau des sommets fixé une fois pour toute. On peut associer à chacun des sommets du tableau un drapeau qui permet de sélectionner dans une première passe les sommets qui nous intéressent). Pour la liste  $V_i$  il suffit de remarquer qu'elle est constituée d'une part des paires d'arêtes de  $V$  qui sont dans  $P_i$  et d'autre part des paires  $(a, \delta)$  pour chaque paire  $(a, b)$  de  $V$  dont la visibilité est obstruée par  $\delta$  et telle que  $a$  est une arête de  $P_i$  (et donc  $b$  n'est pas une arête de  $P_i$ ). En parcourant  $V$ , on peut ainsi construire  $V_i$  de la manière suivante. Pour chaque paire  $(a, b)$  de  $V$  :

1. si  $a \in P_i$  et  $b \in P_i$ , alors on place  $(a, b)$  dans  $V_i$ ,

2. sinon, si  $a$  et  $b$  ne sont pas dans le même polygone, disons  $a \in P_i$ ,  $b \notin P_i$ , et si les projections verticales sur l'axe des abscisses des arêtes  $a$ ,  $b$  et  $\delta$  ont une intersection non vide, alors on place  $(a, \delta)$  dans  $V_i$  après avoir vérifié que cette paire n'était pas déjà présente dans  $V_i$ . Cette dernière vérification s'obtient en temps constant en marquant au fur et à mesure les arêtes  $a$  de  $P$  telles que  $(a, \delta)$  est dans  $V_i$ .

□

**Preuve du théorème 3.5 :** Soit  $P$  donc un polygone à  $n$  sommets. L'algorithme consiste à appliquer récursivement le théorème du polygon cutting : la triangulation de  $P$  est l'union des triangulations des polygones  $P_1$  et  $P_2$  obtenus par le théorème 3.6.

Pour initialiser l'algorithme il faut construire la liste  $L$  des sommets de  $P$  triés selon l'ordre lexicographique de leurs coordonnées ; ce qui prend un temps  $O(n \log n)$  et une place linéaire suivant tout algorithme de tri standard. Il faut construire également la liste  $V$  des paires d'arêtes de  $P$  *verticalement visibles* que l'on obtient en temps linéaire en parcourant la carte des trapèzes de  $P$  (cf. section ??). Cette carte a elle-même une taille linéaire (lemme ??) et peut être construite en temps  $O(n \log n)$  par un algorithme randomisé (cf. section ??) ou non (cf. section ??).

Soit  $C(n)$  la complexité maximale de la triangulation de tout polygone de taille  $n$ . On peut écrire

$$C(n) \leq kn + \max_{\substack{n_1+n_2=n+2 \\ n_1, n_2 \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1}} \{C(n_1) + C(n_2)\}$$

pour un certain  $k > 0$ . Montrons que  $C(n) = O(n \log n)$ . Soit  $\alpha$  tel que  $2/3 < \alpha < 1$ . Choisissons  $N$  assez grand pour que  $n > N \implies \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1 < \alpha n$  et  $\frac{n}{2} \log \frac{1}{\alpha} > 2 \log n$ . Choisissons ensuite  $K$  suffisamment grand pour que  $n \leq N \implies C(n) \leq Kn \log n$  et pour que  $K \log \frac{1}{\alpha} > 2k$ .

Pour  $n \leq N$  on a donc par hypothèse  $C(n) \leq Kn \log n$ . Supposons par récurrence  $C(m) \leq Km \log m$  pour  $m$  inférieur à un certain  $n > N$ . Pour  $n_1, n_2 \leq \lceil \frac{2}{3}n \rceil + 1$  tels que  $n_1 + n_2 = n + 2$  on a

$$\begin{aligned} kn + C(n_1) + C(n_2) &\leq kn + Kn_1 \log n_1 + Kn_2 \log n_2 \leq kn + K(n+2) \log(\alpha n) \\ &\leq Kn \log n + 2K \log n + (k - K \log \frac{1}{\alpha})n \\ &\leq Kn \log n + K(2 \log n - \frac{n}{2} \log \frac{1}{\alpha}) \leq Kn \log n \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure  $C(n) \leq Kn \log n$ .

□

### 3.2.2 Algorithme par décomposition en polygones monotones

L'algorithme de triangulation de Garey et al. se compose de deux étapes. Dans un premier temps le polygone à trianguler est décomposé en polygones plus simples appelés polygones *monotones*. Cette étape prend un temps  $O(n \log n)$ . Ces polygones monotones sont ensuite triangulés en temps linéaire selon une technique appropriée. Au total on obtient donc une complexité équivalente à l'algorithme diviser pour régner de Chazelle.



## Polygones monotones

**Définition 3.9** On considère une direction du plan qu'on appelle verticale. La direction orthogonale est dite horizontale. La hauteur d'un point est sa projection horizontale sur la verticale. Une ligne polygonale  $L$  est dite (strictement) monotone si la hauteur de la séquence des sommets de  $L$  est (strictement) monotone. Dit autrement  $L$  est monotone si toute droite horizontale coupe  $L$  en au plus une composante, réduite à un point dans le cas strict.

Un polygone  $P$  est dit (strictement) monotone s'il est la réunion de deux lignes polygonales (strictement) monotones ayant seulement leurs extrémités en commun. Dit autrement un polygone  $P$  est monotone (resp. strictement monotone) si toute droite horizontale coupe  $P$  en au plus deux composantes (resp. au plus deux points).

Un sommet intérieur (i.e. qui n'est pas une extrémité) à une ligne polygonale ou à un polygone est dit maximum, (resp. minimum) (strict) si ces deux sommets voisins sont (strictement) en dessous (resp. au dessus) de la droite horizontale passant par ce sommet. On appelle extremum (strict) un sommet qui est soit maximum (strict) soit minimum (strict).

On vérifie aisément qu'un sommet n'est pas un extremum si et seulement si sa hauteur est strictement comprise entre celles de ses deux sommets voisins. Par suite :

### Lemme 3.10

- une ligne polygonale ayant au moins 3 sommets est strictement monotone si et seulement si aucun de ses sommets intérieurs n'est extremum.
- Un polygone est strictement monotone si et seulement si il a exactement deux extrema.

**Définition 3.11** Un sommet d'un polygone est dit réflexe si l'angle intérieur au polygone formé par les deux arêtes incidentes au sommet est strictement plus grand que  $\pi$ . Une sous-chaîne d'un polygone est dite concave si ses sommets intérieurs sont réflexes.

**Lemme 3.12** Un polygone sans extremum réflexe est monotone.

**Preuve :** Soit  $P$  un polygone sans extremum réflexe. Soient  $p$  et  $q$  des sommets de  $P$  de hauteur respectivement minimale et maximale. Les sommets  $p$  et  $q$  coupent  $P$  en deux lignes polygonales  $P_G$  et  $P_D$  telles que  $P_G$  est à gauche de  $P_L$ . Supposons par l'absurde que  $P$  n'est pas monotone. Alors par définition,  $P_G$  ou  $P_D$  n'est pas monotone. On suppose sans perte de généralité que  $P_G$  n'est pas monotone. Il existe donc une droite horizontale  $h$  coupant  $P_G$  en deux composantes au moins. On note  $h^+$  et  $h^-$  les demi-plans ouverts respectivement au dessus et au dessous de  $h$ . Par connexité de  $P_G$ , l'une des composantes,  $C$ , de  $h^+ \cap P_G$  ou de  $h^- \cap P_G$  a ses deux extrémités dans  $h$ . On note  $u$  et  $v$  ces deux extrémités avec  $u$  à gauche de  $v$ . Supposons à nouveau sans perte de généralité  $C \subset h^+$ . J'affirme que

(A) le long de  $C$ , l'intérieur de  $P$  est situé du même côté que l'intérieur du polygone délimité par  $C$  et le segment  $uv$  de  $h$ .

Puisque  $P_G$  est à gauche de  $P_D$ , l'intérieur de  $P$  est à droite de  $P_G$  lorsque  $P_G$  est parcourue du bas vers le haut (i.e. de  $p$  vers  $q$ ). Par conséquent  $u$  est avant  $v$  dans ce parcours. Soit  $D$  la composante de  $P_G \setminus C$  joignant  $v$  à  $q$ . J'affirme que

(B) le sommet le plus à gauche parmi les sommets de hauteur minimale de  $D$  est extremum réflexe.

Cette dernière contradiction permet de conclure la monotonie de  $P_G$  et donc de  $P$ . Il reste à montrer les affirmations (A) et (B).

Pour (A), on considère le sommet  $x$  de  $C$  le plus à droite parmi les sommets de hauteur maximale. Les directions des deux arêtes d'origine  $x$  et la direction horizontale  $\vec{h}$  vers la droite sont donc deux à deux distinctes. Soit  $a$  l'arête issue de  $x$  dont la direction suit celle de  $\vec{h}$  dans le sens indirect (le sens des aiguilles d'une montre). On note  $b$  la seconde arête issue de  $x$ . Comme  $x$  est extremum, il ne peut être réflexe, ce qui montre que l'intérieur de  $P$  est entre  $b$  et  $a$  dans le sens direct, ou encore à droite de  $a$ . Montrons que c'est également le cas pour l'intérieur de la courbe de Jordan  $uv \cup C$ . Pour cela, on note  $C_a$  et  $C_b$  les deux composantes de  $C \setminus \{x\}$  contenant respectivement  $a$  et  $b$  et on note  $w \in \{u, v\}$  l'extrémité de  $C_a$  autre que  $x$ . Il est clair qu'on ne peut avoir  $w = u$ , sinon la courbe simple  $S$  formée de  $C_a$ , de la demi-droite horizontale à droite de  $x$  et de la demi-droite horizontale à gauche de  $w$  formerait une courbe de Jordan qui ne rencontre pas  $C_b$ . Or l'intérieur de  $b$  est au dessus de  $S$  et l'extrémité  $v$  de  $C_b$  est au dessous de  $S$ , ce qui contredit la connexité de  $C_b$ . Donc  $w = v$ . Comme l'intérieur de  $uv \cup C$  est au dessus et donc à droite de  $vu$ , il en est de même pour  $C_a$ , i.e. l'intérieur de  $uv \cup C$  est à droite de  $a$ .

Un raisonnement analogue permet de montrer que le sommet spécifié dans (B) qui est évidemment extremum est également réflexe.  $\square$

## Décomposition en polygones monotones

**Théorème 3.13** *Il existe un algorithme de complexité  $O(n \log n)$  pour décomposer tout polygone à  $n$  sommets en polygones  $v$ -monotone sans ajouter aucun sommet.*

**Preuve :** Considérons la décomposition trapézoïdale d'un polygone  $P$  obtenue par cloisonnement horizontal. On suppose le polygone en position générale, i.e. deux sommets distincts ont des ordonnées distinctes. Chaque trapèze est donc incident à exactement deux sommets de  $P$ , un sommet supérieur sur le côté horizontal supérieur du trapèze et un sommet inférieur sur le côté horizontal inférieur du trapèze. On ajoute une diagonale joignant ces deux sommets si le sommet supérieur est un minimum réflexe et/ou si le sommet inférieur est un maximum réflexe. On obtient ainsi une décomposition de  $P$  en polygones. On vérifie qu'aucun sommet de  $P$  ne peut être extremum réflexe dans les polygones qui lui sont incidents. Il suit du lemme 3.12 que ces polygones sont tous monotones. Le cas non général où plusieurs sommets peuvent posséder une même ordonnée se traite en simulant une perturbation par rotation à l'aide de l'ordre lexicographique sur les paires (ordonnée, abscisse).

Notons que la décomposition trapézoïdale peut s'obtenir en temps  $O(n \log n)$  et que l'ajout de chaque diagonale s'obtient en temps constant par diagonale (en utilisant une

structure de carte planaire en demi-arêtes), ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Exercice 3.14** *Décrire un algorithme de complexité  $O(n \log n)$  pour la décomposition d'un polygone  $P$  en polygones monotones qui n'utilise pas à proprement parler la décomposition trapézoïdale de  $P$ , mais seulement un balayage des sommets de  $P$ .*

### Triangulation des polygones monotones

**Théorème 3.15** *Il existe un algorithme de complexité linéaire pour trianguler un polygone  $v$ -monotone.*

**Preuve :** Soit  $P$  un polygone strictement monotone. En temps linéaire on peut couper  $P$  en deux chaînes monotones. Les sommets sur chaque chaîne sont naturellement triés selon leur ordonnée. La fusion (en temps linéaire) de ces deux listes permet d'obtenir la liste  $V$  des sommets de  $P$  triés selon leur ordonnée. On effectue un balayage des sommets de haut en bas. Au cours du balayage une partie de l'intérieur de  $P$  est triangulée et une autre  $P_i$  forme un polygone strictement monotone que l'on doit trianguler. Soit  $\sigma_i$  le sommet maximum de  $P_i$  et soient  $G_i$  et  $D_i$  les deux chaînes monotones maximales de  $P_i$ . On stocke les sommets balayés dans une pile  $\Pi$  de manière à conserver l'invariant suivant : (i) les sommets dans  $\Pi$  forment une sous-chaîne concave de sommets réflexes de  $P_i$  issue de  $\sigma_i$  et (ii) le sommet  $\sigma_i$  est également incident dans  $P_i$  à un sommet  $\nu_i$  plus bas que les sommets de  $\Pi$ . En particulier, si les sommets de  $\Pi$  sont dans  $G_i$  (resp.  $D_i$ ) alors  $\nu_i$  est dans  $D_i$  (resp.  $G_i$ ). Au départ  $\Pi$  est initialisée avec les deux premiers sommets de  $V$  (i.e. le sommet maximal de  $P_0 = P$  et le sommet juste au dessous).

Soit  $s$  le nouveau sommet balayé dans la liste  $V$ .

1. Si  $s$  forme une chaîne concave avec  $\Pi$  (i.e. le dernier sommet de  $\Pi$  est réflexe) alors on empile  $s$ . Les invariants (i) et (ii) sont maintenus.
2. Si  $s = \nu_i$  et si  $s$  n'est pas le sommet minimal de  $P$  alors on relie  $s$  par des segments à chacun des sommets de  $\Pi$ , hormis  $\sigma_i$  (qui est déjà relié à  $s$ ). Notons que ces segments sont des diagonales de  $P_i$  (et donc de  $P$ ) car aucune arête entre deux sommets de  $\Pi$  ne peut couper une telle diagonale (par concavité de  $\Pi$ ) ni aucune autre arête de  $P_i$  par monotonie de  $\Pi$ . On a ainsi triangulé une partie supérieure de  $P_i$ . Le reste constitue le polygone  $P_{i+1}$ . On vide ensuite  $\Pi$  et on ré-insère son dernier sommet, qui devient le sommet  $\sigma_{i+1}$ , puis le sommet  $s$ ; ces deux sommets formant les deux plus hauts sommets de  $P_{i+1}$ . On définit également  $\nu_{i+1}$  comme le sommet suivant  $\Pi$  le long de  $P_i$ . Clairement les invariants (i) et (ii) sont rétablis.
3. Si  $s$  est incident au dernier sommet  $s_\ell$  de  $\Pi$  mais ne forme pas une chaîne concave avec  $\Pi$  (i.e.  $s_\ell$  est convexe dans  $P_i$ ) alors on relie  $s$  par des segments aux derniers sommets  $s_k, s_{k+1}, \dots, s_{\ell-1}$  de  $\Pi$ , hormis le tout dernier  $s_\ell$  auquel il est déjà relié, de sorte que la droite  $ss_k$  est support pour  $\Pi$  (i.e. les sommets de  $\Pi$  sont d'un même côté de cette droite) mais que la droite  $ss_{k+1}$  ne l'est pas. À nouveau ces segments sont des diagonales de  $P_i$  car aucune des deux chaînes  $G_i$  et  $D_i$  ne peut recouper le segment  $ss_k$  du fait de leur monotonie. On a ainsi triangulé une partie de  $P_i$ . Le reste constitue le polygone  $P_{i+1}$ . On dépile alors les sommets  $s_{k+1}, \dots, s_\ell$  de  $\Pi$

et insert le sommet  $s$ . Le fait que la droite  $ss_k$  soit support de  $\Pi$  montre que  $\Pi$  contient bien une chaîne concave et que les invariants (i) et (ii) sont rétablis.

Lorsqu'on balaye le sommet minimal de  $P$  on se retrouve dans la dernière des trois situations ci-dessus et la triangulation qui suit achève la triangulation de  $P$ . Pour chaque sommet balayé les opérations effectuées ci-dessus se décomposent dans chacun des trois cas en un nombre constant d'opérations élémentaires auquel s'ajoute un nombre d'opérations proportionnel au nombre de diagonales ajoutées à la triangulation. Comme il y a un nombre linéaire de diagonales et que l'on balaye un nombre linéaire de sommets, le coût total de la triangulation est linéaire.  $\square$

### 3.2.3 Application au problème de la galerie d'art

Le problème communément attribué à Victor Klee en 1973 est le suivant : étant donné une galerie d'art dont le sol a la forme d'un polygone, combien de gardiens (ou caméras) fixes suffisent à garder la galerie ? On sous-entend que chaque gardien peut regarder dans toutes les directions autour de lui.

De manière plus géométrique, soit  $P$  un polygone du plan et  $x \in \overline{IntP}$  un point intérieur (au sens large) à  $P$ . La *zone de visibilité* de  $x$  dans  $P$  est l'ensemble des points intérieurs à  $P$  et visibles depuis  $x$  dans  $P$ . C'est encore

$$V_P(x) = \{y \in \overline{IntP} \mid xy \subset \overline{IntP}\}$$

où  $xy$  dénote le segment joignant  $x$  et  $y$ . Un ensemble  $X \subset P$  *couvre*  $P$  si

$$P = \cup_{x \in X} V_P(x)$$

i.e. si l'union des zones de visibilité des points de  $X$  recouvre  $P$ . Le problème de la galerie d'art revient donc à chercher un ensemble  $X$  de taille minimale couvrant  $P$ . Le problème de Klee était plus précisément de trouver la taille minimale  $g(n)$  telle que *tout* polygone à  $n$  sommets est couvert par un ensemble de taille  $g(n)$ .

#### **Théorème 3.16 (de la galerie d'art, Chvátal 1973)**

$$g(n) = \lfloor n/3 \rfloor.$$

La preuve suivante due à Fisk en 1978 utilise la notion de coloriage. Un *coloriage* d'un ensemble  $E$  par un ensemble  $C$  est une application de  $E$  dans  $C$ . Si le cardinal de  $C$  est  $k$  on parle d'un *k-coloriage* de  $E$ .

**Preuve du théorème :**  $g(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$  : soit  $P$  un polygone à  $n$  sommets et  $\mathcal{T}$  une triangulation de  $P$ . L'algorithme suivant construit un 3-coloriage des sommets de  $P$  tel que tout triangle de  $\mathcal{T}$  est tricolore (ses trois sommets ont des couleurs 2 à 2 distinctes) :

Choisir une arête  $a$  de  $P$  et colorier ses deux sommets, l'un en bleu et l'autre en blanc. Cette arête est incidente à un unique triangle de  $\mathcal{T}$ , ce qui détermine la couleur de son troisième sommet, disons rouge. Si l'arête (rouge, blanc) de ce triangle est une diagonale,

colorier récursivement la partie de  $P$  coupée par cette diagonale et ne contenant pas  $a$ . Faire de même avec l'arête (rouge, bleu).

Remarquons alors que l'ensemble des sommets de  $P$  ayant la couleur la moins fréquente dans un tel 3-coloriage est de cardinal au plus  $\lfloor n/3 \rfloor$  et couvre  $P$ , puisque couvre tout triangle de  $\mathcal{T}$ .

$g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$  : Pour tout  $k$ , on construit un polygone en forme de peigne de taille  $3k$ , ayant  $k$  dents, qui ne peut être couvert par moins de  $k$  points. Considérons pour cela un triangle  $t$  ayant un côté horizontal de longueur 1 et  $k$  copies  $t_1, t_2, \dots, t_k$  de  $t$  successivement translatées horizontalement de 2 unités. Ces copies sont donc disjointes et forment les dents du peigne. On considère également un trapèze dont les bases sont horizontales : l'une joint un sommet du côté horizontal de  $t_1$  avec un sommet du côté horizontal de  $t_k$  et l'autre joint un point intérieur à un côté non horizontal de  $t_1$  avec un point intérieur à un côté non horizontal de  $t_k$ . Notre peigne est le bord de l'union de ce trapèze avec les  $k$  triangles  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Puisque les triangles sont disjoints, aucun point du peigne ne peut couvrir simultanément les deux pointes de deux dents du peigne. Il faut donc au minimum  $k$  points pour couvrir le peigne.  $\square$

L'algorithme de coloriage de la preuve du théorème est clairement de complexité linéaire. Compte tenu de l'existence d'un algorithme de triangulation de complexité linéaire, ceci permet de trouver en temps linéaire, pour un polygone donné, un ensemble couvrant de taille minimale dans le cas le pire. Par contraste, trouver la taille minimale de tout ensemble couvrant pour un polygone précis est un problème NP-difficile (Aggarwal, 1984).

### Références :

- [http://valis.cs.uiuc.edu/~sariel/teach/2004/b/webpage/lec/23\\_triang.pdf](http://valis.cs.uiuc.edu/~sariel/teach/2004/b/webpage/lec/23_triang.pdf)
  - [http://valis.cs.uiuc.edu/~sariel/teach/2004/b/webpage/lec/24\\_triang\\_II.pdf](http://valis.cs.uiuc.edu/~sariel/teach/2004/b/webpage/lec/24_triang_II.pdf)
  - On pourra consulter l'État de l'art
- Art Gallery and Illumination Problems. J. Urratia. Chap. 22 in "Handbook of Computational Geometry". Edited by J. R. Sack and J. Urrutia