

Chapitre 2

Graphes planaires

Les graphes planaires apparaissent sous la forme de réseaux routiers, de frontières dans les cartes géographiques, de circuits imprimés ou encore dans un cadre plus théorique, comme les graphes sommets/arêtes (1-squelettes) des 3-polytopes. La plupart des propriétés des graphes planaires font appel de manière plus ou moins explicite au fameux théorème de Jordan.

Sauf avis contraire, on considère dans ce qui suit des graphes *simples*, i.e. sans arête multiple ni boucle.

2.1 Plongements

Définition 2.1 *Un plongement d'un graphe $G = (S, A)$ dans un espace X est la donnée d'une injection $S \hookrightarrow X$ et pour chaque arête $a \in A$, d'un plongement $p_a : [0, 1] \rightarrow X$ dont les extrémités coïncident avec l'injection de celles de a , de sorte que les plongements de deux arêtes ne s'intersectent qu'en leurs extrémités communes, le cas échéant. On appelle arc le plongement d'une arête.*

Définition 2.2 *Un graphe est planaire s'il peut être plongé dans le plan. Un graphe plan est un graphe plongé dans le plan. Dit autrement un graphe plan est un plongement particulier d'un graphe planaire. Un plongement d'un graphe dont tous les arcs sont polygonaux est dit polygonal - ou PL (pour piecewise linear). Une face d'un graphe plan est une composante connexe du complémentaire du plongement du graphe dans le plan.*

Par la suite on utilisera la même notation pour un graphe plan et son plongement. Ainsi, si s est un sommet du graphe plan G , alors $G - s$ désignera soit le graphe G privé de s et des arêtes incidentes à s , soit son plongement, i.e. le plongement de G privé de s et des arcs correspondant aux arêtes incidentes à s .

Lemme 2.3 *Un ouvert de \mathbb{R}^2 connexe (par arcs) est connexe par arcs polygonaux simples.*

Preuve : Soit $\gamma : p \rightsquigarrow q$ un chemin dans un ouvert Ω connexe. Considérons le sup des $t \in [0, 1]$ tels qu'il existe un chemin polygonal simple reliant x à $\gamma(t)$ dans Ω . Montrer que ce nombre vaut nécessairement 1. \square

Lemme 2.4 *Tout graphe planaire admet un plongement polygonal.*

Preuve : Considérons un plongement d'un graphe planaire. On choisit pour chaque sommet p du plongement un disque D_p de centre p de sorte que D_p n'intersecte que les arcs incidents à p et que deux tels disques D_p et D_q soient disjoints. Pour chaque arc joignant p à q , on considère une composante $C_{p,q}$ de cet arc joignant D_p à D_q . Par le lemme précédent, $C_{p,q}$ peut être remplacé par un arc polygonal $C'_{p,q}$ dans le plan privé des autres disques et des autres arcs. On considère un sous arc $C''_{p,q}$ de $C'_{p,q}$ joignant D_p à D_q sans rencontrer l'intérieur de ces disques. Finalement, en prolongeant tous les $C''_{p,q}$ arcs ainsi obtenus par des segments de droites joignant les centres des disques D_p et D_q , on obtient un plongement polygonal. \square

2.2 Le théorème de Jordan

Le théorème de Jordan (du mathématicien français Camille Jordan. 1838 - 1922) établit qu'une courbe fermée simple du plan sépare le plan en deux composantes bordées par cette courbe. Ce résultat évident en apparence est singulièrement difficile à montrer. La preuve qui suit est tirée de

A Proof of the Jordan Curve Theorem. Helge Tverberg. Bull. London Math. Soc. 12(1980), pp. 34-38.

Elle consiste à montrer ce théorème pour les courbes polygonales et à l'attendre aux courbes continues par un processus de passage à la limite.

Une autre preuve a été donnée par Thomassen dans *The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces*. Carsten Thomassen. American Mathematical Monthly. Feb 1992. pp 116-129.

également reprise dans

Graphs on Surfaces. Bojan Mohar et Carsten Thomassen. Johns Hopkins university Press, 2001.

Comme chez Tverberg, Thomassen commence par traiter le cas des courbes polygonales. Le cas général est ramené (de manière élégante en ce qui concerne la non-connexité du complémentaire d'une courbe) à la non-planarité de $K_{3,3}$.

Ces preuves font appel à un minimum de topologie et se limitent plus ou moins aux implications classiques de la compacité pour les applications continues. Les preuves sont de ce fait relativement accessibles bien qu'assez fastidieuses. On trouvera cependant dans les livres de topologie algébriques des preuves plus courtes et plus générales (où l'on traite des injections d'une $(n-1)$ -sphère dans une n -sphère) faisant appel aux suites de Mayer-Vietoris pour le calcul de l'homologie des espaces en jeu. Voir par exemple

Elements of Algebraic Topology. James Munkres. Perseus Books, 1984.

Le cas plus restreint des courbes différentiables est traité dans

Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. Marcel Berger et Bernard Gostiaux. PUF mathématiques, 1987.

Théorème 2.5 (Jordan - version polygonale) *Soit C une courbe polygonale fermée simple. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a deux composantes, l'une bornée, l'autre non-bornée, toutes deux bordées par C .*

Preuve : Notons tout d'abord que C étant compact $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a exactement une composante non bornée. Soit une direction \vec{d} transverse aux segments de C que l'on appellera direction horizontale. On considère les segments de C semi-ouverts supérieurement (s.o.s), i.e. privés de leur sommet supérieur. On note $\pi(z)$ la parité du nombre de segments s.o.s de C coupés par la demi-droite horizontale (z, \vec{d}) . On vérifie que π est localement constante dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (regarder les arêtes qui coupent une petite bande horizontale centrée autour de z). Donc π est constante sur chaque composante de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. De plus π prend des valeurs distinctes de chaque côté d'un segment de C . Il suit que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a au moins deux composantes. Soit V_C un voisinage tubulaire de C , et soit D un petit disque intersectant C en un segment. Considérons alors p, q, r trois points de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Il existe trois chemins dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$ joignant p, q, r à V_C (exemple : des segments de droite). En prolongeant ces chemins dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$ on peut s'arranger pour qu'ils joignent D en restant dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Comme $D \cap (\mathbb{R}^2 \setminus C)$ n'a que deux composantes, deux des trois points p, q, r sont dans la même composante de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. On en déduit que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a exactement deux composantes. Par ailleurs les arguments qui précèdent montrent également que tout point de C est adhérent aux deux composantes de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. \square

Avant de passer à la version générale du théorème, voici quelques applications.

Corollaire 2.6 (Lemme du θ) *Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes polygonales simples (non fermées) ayant en commun leurs extrémités p et q . Alors le graphe $G = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ a précisément 3 faces respectivement bordées par $C_1 \cup C_2$, $C_2 \cup C_3$ et $C_3 \cup C_1$.*

Preuve : Par la version polygonale du théorème de Jordan, les trois courbes fermées simples $G_k = C_i \cup C_j$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, séparent le plan en deux composantes et bordent ces mêmes composantes. On note X_k (resp. Y_k) la face bornée (resp. non-bornée) de G_k . On note également $\overset{\circ}{C}_i = C_i \setminus \{p, q\}$ l'intérieur relatif de C_i .

Remarquons qu'une courbe polygonale simple (ici privée de ses extrémités) ne peut séparer un ouvert connexe en plus de deux composantes (cf. la preuve du théorème de Jordan polygonal). Comme $\overset{\circ}{C}_3$ est inclus dans l'une des faces de G_3 on en déduit que $G = G_3 \cup \overset{\circ}{C}_3$ a au plus trois faces.

Par ailleurs on a $\overset{\circ}{C}_i \subset X_i$ pour au moins un indice $i \in \{1, 2, 3\}$. Dans le cas contraire on a $C_i \subset \mathbb{C}X_i$ et donc $G_i \subset G \subset \mathbb{C}X_i$, d'où $X_i \subset \mathbb{C}G \subset \mathbb{C}G_i$. Dit autrement X_i est une face de G . Comme les X_i sont distincts ($C_i \subset \bar{X}_j$ mais $\overset{\circ}{C}_i \not\subset \bar{X}_i$) on en conclut que G a au moins trois faces bornées et donc au moins quatre faces ce qui contredit la remarque précédente. On supposera par la suite $\overset{\circ}{C}_3 \subset X_3$.

De $G = G_1 \cup G_2$ on tire que toute face de G est une composante de l'intersection d'une face de G_1 avec une face de G_2 . De $G_3 \subset G \subset \mathbb{C}Y_3$ on tire que Y_3 est une face de G . Comme Y_3 est non bornée on a $Y_3 \subset Y_1 \cap Y_2$.

Comme $C_1 \subset \bar{Y}_3 \subset \bar{Y}_1 = \mathbb{C}X_1$, on a en fait $G_1 \subset G \subset \mathbb{C}X_1$ et donc X_1 est une face de G . De même X_2 est une face de G . Or, Y_3 qui est non bornée est distincte des deux faces bornées X_1 et X_2 , elles mêmes distinctes (C_1 borde X_2 mais pas X_1). On conclut que Y_3 , X_1 et X_2 sont les trois faces de G . \square

Définition 2.7 *Un graphe G est 2-connexe s'il a trois sommets au moins et si pour chacun de ses sommets, s , le graphe $G - s$ est connexe.*

Proposition 2.8 *Toute face d'un graphe plan polygonal 2-connexe est bordée par un cycle de ce graphe. De plus tout arc du graphe est incident (i.e. adhérent) à exactement deux faces.*

Preuve : Soit G un tel graphe. On raisonne par récurrence sur $\sum_{s \in S(G)} (d(s) - 2)$. Si cette somme est nulle alors G est un cycle et on peut appliquer le théorème de Jordan. Sinon, on considère une chaîne maximale P dans G dont les sommets intérieurs sont de degré 2. On vérifie que $G - P$ est 2-connexe et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque la somme ci-dessus diminue. Il suit que P est contenue dans une face de $G - P$ qui est bordée par un cycle de $G - P$. On applique alors le lemme du θ à l'union de ce cycle et de P pour conclure. \square

Lemme 2.9 *Soit G un graphe plan polygonal, s un sommet de degré un de G et a l'arête incidente à s . Alors G a le même nombre de faces que $G - s$.*

Preuve : Comme $G - s$ est inclus dans G , toute face de G est incluse dans une face de $G - s$. Soient f_1 et f_2 deux faces de G incluses dans une même face de $G - s$ et soient p_1 et p_2 deux points respectivement intérieurs à f_1 et f_2 . Alors il existe un chemin polygonal P joignant p_1 et p_2 dont l'intersection avec G est incluse dans l'arc semi-ouvert $a \cup s$. En considérant un petit voisinage tubulaire de $a \cup s$, on peut modifier P en contournant a de manière à éviter G , ce qui montre que $f_1 = f_2$. \square

Théorème 2.10 (Relation d'Euler) *Les nombres F , A et S de faces, arêtes et sommets d'un graphe plan polygonal connexe vérifient la relation, dite d'Euler (1707-1783),*

$$F - A + S = 2$$

Preuve : Par récurrence sur A . Si A est nul (et donc $S = 1$) la relation est trivialement vraie. Soit G un graphe avec $A > 0$ arêtes. Si G contient un sommet s de degré un, alors par le lemme 2.9, $G - s$ a F faces et l'hypothèse de récurrence appliquée à $G - s$ permet de confirmer la relation d'Euler pour G . Sinon G contient un cycle simple C . Soit a une arête de C . Montrons que $G - a$ a une face de moins que G ce qui permettra de conclure avec l'hypothèse de récurrence. D'après la version polygonale du théorème de Jordan, C

sépare le plan en deux régions bordées par C . Comme G est la réunion de C et $G - a$, toute face de G est incluse dans l'intersection d'une face de C et d'une face de $G - a$. L'arc a est inclus dans une unique face de $G - a$, disons f . Toute face de $G - a$ distincte de f ne rencontre pas C et est donc une face de G . Comme f intersecte les deux faces de C , on en déduit que G a au moins une face de plus que $G - a$. Mais en considérant un voisinage tubulaire de a dans f , on montre par un raisonnement déjà vu que $f - a$ a au plus deux composantes. Donc G a au plus une face de plus que $G - a$. Finalement G a exactement une face de plus que $G - a$. \square

Pour une série de preuves plus ou moins formelles de cette fameuse formule on pourra consulter la page :

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

extraite du par ailleurs très intéressant site : "The Geometry Junkyard" maintenu par David Eppstein.

Théorème 2.11 *Le graphe complet K_5 et le graphe bipartite complet $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.*

Preuve : Supposons $K_{3,3}$ planaire. Par le lemme 2.4, on peut lui appliquer la relation d'Euler, ce qui fournit $F = 5$. Par ailleurs toute face d'un plongement de $K_{3,3}$ est bordée par un cycle (cf. proposition 2.8) de $K_{3,3}$ ayant au moins 4 arêtes (tout cycle d'un graphe bipartite est de longueur paire!). Par la relation d'incidence face/arête (cf. proposition 2.8) on en déduit $4F \leq 2A$. Une contradiction.

Le cas de K_5 se traite de manière similaire. \square

Passons maintenant au théorème de Jordan dans sa version générale (plane).

Théorème 2.12 (Jordan) *Soit C une courbe fermée simple, i.e. l'image injective par une application continue du cercle unité S^1 dans le plan. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a deux composantes, l'une bornée, l'autre non-bornée, toutes deux bordées par C .*

Preuve : Je donne sans entrer dans tous les détails la preuve de Tverberg (1980).

Tout d'abord C peut être approximée d'aussi près que l'on veut par une courbe polygonale. Dit autrement, pour tout ϵ positif on peut trouver un polygone de Jordan (= une courbe polygonale simple fermée) C' tel que

$$|C - C'| = \sup_{x \in S^1} |C(x) - C'(x)| < \epsilon.$$

La preuve consiste à couvrir le plan d'une grille à mailles carrées de côté δ (défini plus loin). On pose $C_0 = C$ et on considère un à un les carrés de la grille traversés par C (ils sont en nombre fini). Pour chaque tel carré M_i , on remplace l'image par C_i du plus petit arc de S^1 contenant $C_i^{-1}(M_i)$ par le segment de droite joignant ses extrémités, obtenant ainsi C_{i+1} . C_n , où n est le nombre de carrés traversés, est la courbe C' cherchée. Pour définir δ on choisit tout d'abord ϵ_1 tel que

$$|x - y| < \epsilon_1 \implies |C(x) - C(y)| < \epsilon/2,$$

puis ϵ_2 tel que

$$|C(x) - C(y)| < \epsilon_2 \implies |x - y| < \min(\epsilon_1, \sqrt{3}).$$

L'existence de ϵ_1 découle de l'uniforme continuité de C sur le compact S^1 . Celle de ϵ_2 de l'uniforme continuité de C^{-1} , inverse d'une bijection continue sur le compact $C(S^1)$. On pose alors $\delta = \min(\epsilon/2, \epsilon_2)$. Il reste à vérifier que C_n ainsi construit convient. (La solution est dans l'article de Tverberg).

Un premier lemme : Si C' est un polygone de Jordan, alors la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus C'$ contient un disque touchant C' en deux points $C'(x)$ et $C'(y)$ tels que $|x - y| > \sqrt{3}$.

Pour la preuve, on considère un disque D comme dans le lemme avec $|x - y|$ maximal. Si $|x - y| < \sqrt{3}$ alors tout point z sur le plus grand arc A de S^1 joignant x et y est à une distance de x ou de y supérieure à celle de x à y . On en déduit par l'hypothèse sur x et y que, en dehors de ses extrémités, $C'(A)$ ne touche pas le bord de D . Une construction simple, dépendant du fait que D est tangent ou non en $C'(x)$ et $C'(y)$, permet alors de remplacer D par un disque D' touchant C' en $C'(x')$ et $C'(y')$ tels que $|x' - y'| > |x - y|$, contredisant ainsi l'hypothèse sur x et y . (voir les détails dans l'article de Tverberg).

Un second lemme : Soit C' un polygone de Jordan, et deux points a et b dans la même composante de $\mathbb{R}^2 \setminus C'$. Si la distance de a et de b à C' est supérieure ou égale à 1, et si aucune corde de C' de longueur inférieure à 2, ne sépare a de b , alors il existe un chemin continu Π de a à b tel que $d(\Pi, C') \geq 1$.

On commence par remarquer que l'implication du lemme est en fait une équivalence. Il suit que si a et b sont reliés à a' et b' par des chemins distants d'au moins 1 de C' , alors les hypothèses sur a et b sont valides pour a' et b' . On peut donc supposer que a et b sont à distance exactement 1 de C' . On considère le disque de rayon 1 centré en a et l'idée est de définir Π comme le lieu du centre de ce disque roulant le long de C' jusqu'à atteindre b . Comme ce disque doit rester intérieur à C' , il devra possiblement court-circuiter des arcs de C' et il s'agit de montrer qu'on peut malgré tout atteindre b dans tous les cas. On utilisera pour cela l'hypothèse sur les cordes. (voir les détails dans l'article de Tverberg).

Terminons par la preuve du théorème.

Premièrement, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a au moins deux composantes :

Montrons qu'en plus d'une composante non bornée, il en existe une bornée. On considère pour cela un disque D_0 contenant C , et une suite $(C_n)_{n>0}$ de polygones de Jordan contenus dans D_0 et convergeant vers C . Par le premier lemme, chaque C_n contient un disque D_n touchant C_n en deux points $C_n(x_n)$ et $C_n(y_n)$ tels que $|x_n - y_n| > \sqrt{3}$. Soit z_n le centre de D_n , et soit z la limite d'une sous-suite convergente de (z_n) . On va montrer que z ne peut être dans la composante non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ en se ramenant au cas des polygones de Jordan, déjà traité. Par compacité, $|C(x_n) - C(y_n)|$ est borné inférieurement. Par convergence, il en est de même de $|C_n(x_n) - C_n(y_n)|$. Ce qui implique la même chose pour le rayon de D_n et donc pour $d(z_n, C_n)$. Comme $z_n \rightarrow z$, z est dans D_n pour n assez grand et donc intérieur à C_n . Si z était hors de D_0 , alors on pourrait trouver un chemin Π le reliant à un point hors de D_0 . Par compacité, $d(\Pi, C) > 0$, donc $d(\Pi, C_n) > 0$ pour n assez grand. Donc z est hors de C_n , une contradiction.

Deuxièmement, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ a au plus deux composantes :

Soient p, q et r trois points de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. On veut montrer que deux de ces points sont nécessairement dans une même composante. On considère à nouveau une suite $(C_n)_{n>0}$ de polygones de Jordan convergeant vers C . Pour n assez grand p, q et r sont dans $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ (i.e. à une distance non nulle de C_n). Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que p et q sont dans une même composante de $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$. Si pour une infinité de n , p peut être relié à q dans $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$ par un chemin Π_n tel que $d(\Pi_n, C_n)$ est borné inférieurement, alors il en sera de même pour $d(\Pi_n, C)$ à partir d'un certain rang, ce qui montre que p et q sont dans une même composante de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sinon, par le second lemme on peut trouver une suite de segments $[C_n(x_n), C_n(y_n)]$ séparant p et q dans $\mathbb{R}^2 \setminus C_n$, et dont la longueur tend vers 0. On en déduit que $|C(x_n) - C(y_n)|$ tend vers 0 et donc que $|x_n - y_n|$ tend vers 0, par continuité uniforme de C^{-1} . Mais alors la plus petite des deux composantes de $\mathbb{R}^2 \setminus C_n \cup [C_n(x_n), C_n(y_n)]$ converge vers un point, impliquant que p ou q est sur C_n , une contradiction. \square

On a coutume d'appeler une courbe fermée simple du plan, une *courbe de Jordan*. Notons qu'en modifiant le deuxièmeement de la preuve, on montre sans trop de difficultés que

Théorème 2.13 *Un arc simple du plan (i.e. l'image continue injective du segment $[0, 1]$) ne sépare pas le plan.*

Une version plus forte du théorème de Jordan stipule que l'intérieur d'une courbe de Jordan est un disque topologique :

Théorème 2.14 (de Jordan-Schönflies) *Tout homéomorphisme entre deux courbes de Jordan s'étend au plan tout entier.*

Une preuve est donnée dans

The Jordan-Schönflies Theorem and the classification of surfaces. Carsten Thomassen. American Mathematical Monthly. Feb 1992. pp 116-129.

Sans entrer dans les détails, Thomassen commence par considérer une famille dénombrable de points qui soit dense dans la première courbe, disons C , et qui puissent être joint à tout point de l'intérieur de C par un chemin polygonal. Il considère également une famille dénombrable de points qui soit dense dans l'intérieur de C . On peut alors en déduire une suite où chaque point de ces deux familles apparaît une infinité de fois. On construit alors récursivement un homéomorphisme entre l'union de C et des n premiers points de la suite (plus d'autres points autour) et l'union de la seconde courbe, que l'on peut supposer polygonale, et de n points (plus d'autres points autour) qui vont également remplir l'intérieur de cette courbe polygonale. On obtient à la limite une application définie sur C et la suite de points. On montre que cette application se prolonge sur l'adhérence de l'intérieur de C en un homéomorphisme. Pour définir un homéomorphisme sur le plan tout entier, on commence par entourer les deux courbes d'un grand carré, T , que l'on relie aux deux courbes, ce qui permet d'étendre l'homéomorphisme sur ces courbes, en prenant l'identité sur T . La méthode précédente permet d'étendre cet homéomorphisme sur l'intérieur de T que l'on prolonge finalement par l'identité en dehors de T .

À l'aide de ce théorème on montre un analogue général au lemme du thêta et à la relation d'Euler.

2.3 Graphes interdits

Un des résultats les plus célèbres sur la planarité est la réciproque du théorème 2.11 due au mathématicien Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980), stipulant qu'un graphe ne "contenant" ni K_5 ni $K_{3,3}$ est planaire. Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont ainsi appelés *graphes interdits* ou graphes de Kuratowski. De manière plus générale on montre que pour chaque surface de genre g il existe un nombre fini de graphes interdits empêchant un graphe quelconque d'être plongé sur cette surface.

Théorème 2.15 (de Kuratowski) *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ comme sous-graphe.*

La preuve qui suit, tirée de

Graphs on Surfaces. Bojan Mohar et Carsten Thomassen. Johns Hopkins university Press, 2001.

repose sur trois lemmes, par ailleurs intéressants en eux-mêmes.

Lemme 2.16 *Soit G un graphe 3-connexe ayant au moins 5 sommets. Alors G admet une arête e telle que $G//e$ (i.e. la suppression de e , suivie de l'identification des extrémités de e , suivie de la fusion des éventuelles arêtes multiples en arêtes simples de mêmes extrémités) est 3-connexe.*

Preuve : Supposons par l'absurde que pour toute arête $e = xy$ de G , $G//e$ n'est pas 3-connexe. Alors il existe $z, t \in S(G//e)$ (les sommets de $G//e$) qui déconnectent $G//e$, où t résulte nécessairement de l'identification de x et y . Dit autrement, pour toute arête $e = xy$, il existe $z \in S(G)$ tel que $G - \{x, y, z\}$ n'est pas connexe. On choisit e et z de sorte que la plus grande (en nombre de sommets) des composantes de $G - \{x, y, z\}$ soit maximale. Soit H cette composante et soit u adjacent à z dans une autre composante de $G - \{x, y, z\}$, H' . D'après ce qui précède, il existe $v \in S(G)$ tel que $G - \{z, u, v\}$ ne soit pas connexe. Montrons que le sous-graphe H'' de G induit par $(S(H) \cup \{x, y\}) \setminus \{v\}$ est dans une composante de $G - \{z, u, v\}$. Comme ce sous-graphe a plus de sommets que H , on aboutit à une contradiction. H'' est connexe car tout sommet t de H peut être relié à x ou y (eux même reliés par l'arête e) dans H'' : par la 3-connexité de G , on a l'existence d'un chemin $p : t \rightsquigarrow x$ dans G qui évite z et v . On écrit

$$p = (p_1, w, p_2) \text{ où } w \in \{x, y\} \text{ et } x \notin p_1, y \notin p_1.$$

Alors le chemin p_1 est dans une composante de $G - \{x, y, z\}$ donc dans H . Et comme il ne contient pas v , on en déduit que (p_1, w) est dans H'' . Par ailleurs H'' est dans $G - \{z, u, v\}$; il est donc dans l'une des composantes de $G - \{z, u, v\}$. \square

Lemme 2.17 *Soit G un graphe 3-connexe ne contenant pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ comme sous-graphe. Alors G admet un plongement rectiligne convexe (i.e. dont les arêtes sont des segments de droites et dont les faces sont des convexes) dans le plan.*

Preuve : Notons que ce lemme implique une version du théorème de Kuratowski restreinte aux graphes 3-connexes. Pour la preuve, on raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de G . Le résultat se vérifie à la main si ce nombre vaut 4 ou 5. Par le précédent lemme on peut choisir une arête $e = xy$ telle que $G' = G//e$ est 3-connexe. Clairement G' ne contient pas de subdivision d'un graphe interdit (on vérifie sinon que se serait le cas pour G). Par l'hypothèse de récurrence G' possède un plongement rectiligne convexe. Soit z le sommet de G' résultant de l'identification de x et y . $G' - z$ est 2-connexe. Par la proposition 2.8, on considère le cycle C de $G' - z$ bordant la face de $G' - z$ contenant z . Soit X (resp. Y) l'ensemble des extrémités des arêtes de G reliant x (resp. y) à ce cycle. On vérifie que X et Y ne peuvent se chevaucher (i.e. $|X \cap Y| < 3$ et il n'y a pas deux sommets de X et deux sommets de Y apparaissant de manière alternée autour de C). Dans le cas contraire on met en évidence un graphe interdit dans G . Ceci permet de construire un plongement convexe pour G en remplaçant z par x dans le plongement de G' et en insérant y dans la face bordée par x et par le segment de C où se rattache les arêtes incidentes à y . Notons que si z est sur la face externe de G' , une transformation projective permet de rendre cette face interne. \square

Le lemme suivant permet de se ramener au précédent dans tous les cas :

Lemme 2.18 *Soit G un graphe ne contenant pas de subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ comme sous-graphe et tel que l'ajout d'une arête entre deux sommets non-adjacents crée un tel sous-graphe. Alors G est 3-connexe.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de G . Le résultat se vérifie à la main si ce nombre vaut 4 ou 5.

G est 2-connexe :

sinon on peut écrire $G = G_1 \cup G_2$ où G_1 et G_2 n'ont qu'un sommet x en commun. Soit $y_i \in G_i, i = 1, 2$, adjacent à x . L'ajout d'une arête y_1y_2 à G crée par hypothèse une subdivision K d'un graphe interdit. Comme ceux-ci sont trois connexes et qu'il n'y a que les 2 passages x et y_1y_2 entre G_1 et G_2 , les sommets de degré 3 de K sont tous dans G_1 ou tous dans G_2 . Mais on peut alors remplacer le chemin de K comportant l'arête y_1y_2 et le sommet x par y_1x ou y_2x pour faire apparaître une subdivision d'un graphe interdit dans G . Une contradiction.

Si $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe alors xy est une arête de G :

sinon on peut écrire $G = G_1 \cup G_2$ où G_1 et G_2 n'ont que les sommets x et y en commun. L'ajout d'une arête xy à G crée par hypothèse une subdivision K d'un graphe interdit. Comme précédemment les sommets de degré 3 de K sont tous un même G_i , disons G_1 . Mais on peut alors remplacer l'arête xy dans K par un chemin reliant x et y dans G_2 (qui contient nécessairement un tel chemin) faisant ainsi apparaître une subdivision d'un graphe interdit dans G . Une contradiction.

Supposons que G n'est pas 3-connexe et soient x, y deux sommets qui déconnectent G . On écrit $G = G_1 \cup G_2$ où G_1 et G_2 n'ont que les sommets x et y et l'arête xy en commun. Il est facile de voir que l'ajout d'une arête à G_i ($i = 1, 2$) crée une subdivision d'un graphe interdit dans ce même G_i . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G_i et par le lemme précédent choisir un plongement convexe de G_i . Soit alors z_i un autre sommet

du cycle d'une face F_i bordée par x et y dans ce plongement. L'ajout d'une arête z_1z_2 à G crée une subdivision K d'un graphe interdit. Si tous les sommets de degré 3 sont dans un même G_i alors on peut facilement modifier K pour qu'il se trouve dans G_i . Une contradiction. Par ailleurs $S(G_1) \setminus S(G_2)$ ou $S(G_2) \setminus S(G_1)$ ne contient qu'un seul sommet de degré 3 de K . Dans le cas contraire il faudrait au moins 4 chemins disjoints entre G_1 et G_2 dans $G + z_1z_2$. Pour la même raison K ne peut être qu'une subdivision de $K_{3,3}$. Si G_i contient les sommets de degré 3 de K alors on obtient un plongement planaire de $K_{3,3}$ en reliant un point intérieur à F_i aux sommets x, y et z_i . Une contradiction. \square

Il existe une autre preuve du lemme 2.17 due à Tutte (1963) et fournissant un algorithme directe de plongement. Tutte montre pour cela que le système linéaire donné par un plongement convexe quelconque d'un cycle facial de G et exprimant les autres sommets de G comme des isobarycentres de leurs voisins admet toujours une unique solution fournissant un plongement convexe.

Notons que le lemme 2.17 et le suivant montrent en particulier que tout graphe planaire admet un plongement rectiligne. Le problème du plongement rectiligne est à l'origine de nombreuses études comme l'existence de plongements dont les sommets sont à coordonnées entières, comme la recherche de la grille entière minimale pouvant contenir un tel plongement, etc. . .

Par ailleurs il est facile de voir par la relation d'Euler que toute triangulation du plan (dont le cycle externe est également un triangle) est maximale et donc 3-connexe par le lemme précédent.

Enfin, une autre formulation du théorème de Kuratowski affirme qu'un graphe est planaire si et seulement si aucun des 2 graphes interdits n'en est un *mineur*.

On pourra consulter également pour ce qui précède (en particulier pour la preuve – dans le cas polygonal – du théorème de Jordan, de la relation d'Euler et du théorème de Kuratowski) le chapitre 4 du livre de Diestel :

Graph Theory. Reinhard Diestel. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, Volume 173 July 2005 (2000, 1997).

Une copie électronique est disponible à l'adresse :

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryIII.pdf>