Chapitre 12

Cuttings et partitions simpliciales

12.1 Cuttings

Soit L un ensemble de n droites du plan en position générale et soit $r \in [1, n]$. On rappelle qu'un *$(1/r)$-cutting* pour L est un découpage du plan en triangles généralisés (i.e. des vrais triangles du plan projectif si on y plonge canoniquement le plan euclidien ; ils sont possiblement non bornés dans le plan euclidien) tel que l'intérieur de chaque triangle rencontre au plus n/r droites [1] de L. On entend par découpage que les intérieurs des triangles sont deux à deux disjoints et que l'union des triangles recouvre le plan. La *taille* de ce cutting est son nombre de triangles.

L'objectif est de construire un $(1/r)$-cutting de la plus petite taille possible. L'argument suivant montre que cette taille est minorée par un $\Omega(r^2)$. Par l'hypothèse de position générale, l'arrangement des n droites de L possède $\binom{n}{2} = \Omega(n^2)$ sommets. Un triangle d'un $(1/r)$-cutting étant coupé par au plus n/r droites, il contient au plus $\binom{n/r}{2} = O((n/r)^2)$ de ces sommets. Le plan doit donc être couvert par au moins $\Omega(r^2)$ triangles. Le théorème suivant montre que l'on peut construire des $(1/r)$-cuttings dont la taille est optimale à un facteur constant près. La preuve repose sur une analyse d'échantillonnages aléatoires *à la* Clarkson [CS89, CMS93]. Une approche non randomisée due à B. Chazelle et J. Friedman [CF90] est exposée par J. Matoušek dans [Mat91]. Voir aussi [PA95, p. 173-175].

Théorème 12.1 *Pour tout ensemble L de n droites du plan et tout $r \leq n$ il existe un $(1/r)$-cutting de taille $O(r^2)$ qui peut être construit en temps $O(nr)$ en collectant de plus pour chaque triangle les droites qui le coupent.*

La construction repose sur une triangulation de l'arrangement d'un sous-ensemble des droites de L. Cette triangulation peut être obtenue de manière canonique en triangulant chaque cellule (polygone) de l'arrangement à partir de son sommet le plus bas (minimal pour l'ordre lexicographique sur les coordonnées), c'est à dire en remplaçant chaque cellule

1. Pour étendre le résultat à des arrangements non-simples on voit bien qu'il est nécessaire de restreindre la condition à l'intérieur des triangles puisque tout sommet de degré $2n/r$ ou plus de l'arrangement de L est incident à au moins n/r droites.

par le cône issu du sommet le plus bas sur les arêtes du polygone ne contenant pas ce sommet. Ce sommet peut être à l'infini si la cellule est non-bornée. Un triangle peut donc être soit un triangle fini au sens usuel, soit un secteur bordé par deux demi-droites non-parallèles, soit un demi-cylindre bordé par deux demi-droites parallèles et un segment. De manière générale on obtient la *triangulation canonique* d'un arrangement d'hyperplans de $\mathbb{R}^d$ en triangulant récursivement le i-squelette de l'arrangement par "étoilement" de chaque i-cellule à partir de son sommet le plus bas. [2]

Montrons tout d'abord comment collecter les droites coupant chaque triangle d'un $(1/r)$-cutting de taille $k = O(r^2)$. Remarquons tout d'abord que l'on peut déterminer pour chaque droite $\ell \in L$ un triangle la coupant en temps $O(\log k)$. Il suffit par exemple de pré-calculer pour une droite donnée la liste ordonnée de ses intersections avec les triangles du cutting, puis de situer en temps $O(\log k)$ dans cette liste l'intersection de ℓ avec cette droite. Une fois connu un triangle intersectant ℓ il suffit de longer ℓ dans le cutting (donné sous forme de liste d'adjacence entre triangles [3]) pour déterminer tous les triangles du cutting coupés par ℓ. Ceci prend un temps proportionnel au nombre n_ℓ de triangles coupés. Le temps total requis pour collecter toutes les intersections est alors $\sum O(\log k + n_d)$, la somme portant sur les n droites de L. Or $\sum n_d \leq k(n/r)$ par définition d'un $(1/r)$-cutting. Pour $k = O(r^2)$ comme dans le théorème, on obtient un temps $O(nr)$.

On montre d'abord une version sous-optimale du théorème.

Lemme 12.2 *Pour tout ensemble L de n droites du plan et tout $r \leq n$ il existe un $(1/r)$-cutting de taille $O(r^2 \log^2 r)$ qui peut être construit en temps $O(r^2 \log^2 r + nr \log r)$ en collectant de plus pour chaque triangle les droites qui le coupent.*

Preuve I : Considérons l'ensemble des droites coupant l'intérieur d'un triangle quelconque. Lorsque le triangle décrit tous les triangles (généralisés) possibles du plan, les ensembles de droites correspondant forment un système de parties (cf. Chapitre 14). On montre que ce système a une dimension de Vapnik-Chervonenkis finie (cf. [PA95, p.256-257]). Par le corollaire 14.8, ce système admet un $\frac{1}{r}$-net R de taille $O(r \log r)$. La triangulation canonique $\mathcal{T}(R)$ de l'arrangement des droites de R comporte donc $O(r^2 \log^2 r)$ triangles. De plus, par définition d'un $\frac{1}{r}$-net, un triangle dont l'intérieur est disjoint de R – c'est en particulier le cas des triangles de $\mathcal{T}(R)$ – est coupé par au plus n/r droites de L. Les triangles de $\mathcal{T}(R)$ forment donc un $(1/r)$-cutting de taille $O(r^2 \log^2 r)$. $\square$

La construction d'un ϵ-net de petite taille peut s'obtenir par échantillonnage aléatoire. La preuve suivante s'appuie directement sur un échantillonnage aléatoire de L sans passer par la théorie de Vapnik-Chervonenkis. Elle utilise en contrepartie quelques résultats sur les échantillonnages aléatoires explicités plus loin.

2. De manière équivalente on peut trianguler récursivement le $(d-1)$-arrangement induit dans chaque hyperplan par les autres hyperplans de l'arrangement puis étoiler les d-cellules à partir de leur sommet le plus bas. Cette méthode fournit bien la même triangulation si on prend garde de déduire correctement le système de coordonnées de chaque hyperplan par "projection" du système de coordonnées canonique.

3. On suppose implicitement ici que le cutting est formé à partir de la triangulation canonique d'un arrangement, de sorte que chaque triangle a au plus trois triangles adjacents.

Preuve II : Soit R un échantillon aléatoire de taille $t = cr\log r$ pour la loi uniforme sur $\binom{L}{t}$ (cf. section 1.8.5) où c est une constante déterminée plus loin. Le théorème 12.4 ci-après indique qu'avec une forte probabilité tout triangle de la triangulation canonique $\mathcal{T}(R)$ de l'arrangement de R intersecte au plus $b\frac{n}{t}\log t$ droites de L pour une certaine constante b. En particulier, $\mathcal{T}(R)$ est un $b\log t/t$-cutting de taille $O(t^2) = O(r^2\log^2 r)$. Or

$$b\log t/t = b\frac{\log(cr\log r)}{cr\log r} = \frac{b}{rc}(1+\frac{\log\log r}{\log r}+\frac{\log c}{\log r})$$

cette dernière quantité étant majoré par $1/r$ dès que $r \geq c \geq 3b$. Pour $r < c$ il suffit de choisir $t = c^2\log c < Kr\log r$ pour une certaine constante K puisqu'un $\frac{1}{c}$-cutting est alors un $\frac{1}{r}$-cutting. □

Preuve du théorème 12.1 : On considère un r-échantillon aléatoire R pour la loi uniforme sur $\binom{L}{r}$. Certains triangles de la triangulation canonique $\mathcal{T}(R)$ de l'arrangement de R sont possiblement coupés par plus de n/r droites de L. L'idée est de subdiviser chaque triangle Δ de $\mathcal{T}(R)$ par un cutting restreint au sous-ensemble de droites $L_\Delta \subset L$ coupant ce triangle. On peut en effet s'arranger pour que les triangles de la subdivision soient coupés par au plus n/r droites tout en utilisant $O(r^2)$ triangles au total dans les subdivisions. Pour cela on construit à l'aide du lemme 12.2 pour chaque triangle Δ un $1/r_\Delta$-cutting $\mathcal{C}_\Delta$ de L_Δ composé de $O(r_\Delta^2\log r_\Delta^2)$ triangles en choisissant $r_\Delta = \ell_\Delta r/n$ où $\ell_\Delta = |L_\Delta|$ (bien sûr, on ne fait rien si $\ell_\Delta \leq n/r$). Chaque triangle de ce cutting est coupé par au plus $\ell_\Delta/r_\Delta = n/r$ droites. Ceci est encore vrai pour les $O(r_\Delta^2\log r_\Delta^2)$ triangles obtenus en intersectant $\mathcal{C}_\Delta$ avec Δ et en retriangulant les éventuels k-gones ($k \leq 6$) résultant. La réunion de ces subdivisions est donc un $1/r$-cutting $\mathcal{C}$ de L de taille $O(r^2) + \sum_{\Delta\in\mathcal{T}(R)} r_\Delta^2\log r_\Delta^2$. Évaluons l'espérance de cette dernière somme relativement à R.

$$E(\sum_\Delta r_\Delta^2\log r_\Delta^2) \leq E(\sum_\Delta r_\Delta^4) = (r/n)^4 E(\sum_\Delta \ell_\Delta^4)$$

Par le lemme 12.7, $E(\sum_\Delta \ell_\Delta^4) = O((n/r)^4 r^2)$. On en déduit que $\mathcal{C}$ a en moyenne $O(r^2)$ triangles. □

On pourra consulter [HP00] pour des constructions effectives de cuttings avec des bornes effectives sur la complexité de l'algorithme.

Le théorème 12.1 admet une version pondérée. Cette fois on se donne une famille pondérée (L, w) de n droites avec des poids $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ non-négatifs, de poids total $|w| = \sum_i w_i$. Un $1/r$-cutting est alors tel que le poids total des droites de L coupant l'intérieur d'un triangle du cutting est majoré par $|w|/r$.

Corollaire 12.3 *Pour toute famille pondérée (L, w) de n droites du plan et tout $r \leq n$ on peut construire en temps $O(nr)$ un $(1/r)$-cutting de taille $O(r^2)$ en collectant de plus pour chaque triangle les droites qui le coupent.*

Preuve : Quitte à renormaliser les poids en temps linéaire, on peut supposer que $|w| = n$. On considère le multi-ensemble L' de droites obtenu en incluant chaque droite de L de poids w_i avec multiplicité $\lceil w_i \rceil$. Notons que $|L'| \leq \sum_i (w_i + 1) \leq 2n$. Suivant le théorème 12.1, on calcule en temps $O(nr)$ un $\frac{1}{2r}$-cutting de taille $O(r^2)$ pour la collection non-pondérée de droites L'. Pour cela on peut considérer que toutes les droites de L' sont distinctes à l'aide de perturbations symboliques. Puisque chaque triangle est coupé par au plus $|L'|/(2r) \leq n/r$ droites de L', ce cutting est un $(1/r)$-cutting pour la famille pondérée (L, w). □

12.2 Échantillonnage aléatoire

On effectue ici quelques calculs en moyenne portant sur des arrangements de droites et utiles pour le calcul de cuttings. On s'en tient au cadre des arrangements de droites et de leur triangulation canonique (cf. section 12.1) mais les résultats peuvent être établis dans un cadre plus abstrait comme au chapitre 13. Le terme d'échantillon aléatoire se réfère toujours à la loi uniforme (cf. section 1.8.5) mais les résultats ci-dessous peuvent être établis avec d'autres lois. On pourra consulter [Mul00] à ce sujet.

Soit L un ensemble de n droites du plan en position générale. On note $\mathcal{T}^0(L)$ l'ensemble des triangles de la triangulation canonique de L. On note ensuite $\mathcal{T}(L)$ l'ensemble des triangles *réalisables sur* L c.-à-.d apparaissant dans la triangulation canonique d'au moins une partie de L, i.e. $\mathcal{T}(L) = \bigcup_{R \subset L} \mathcal{T}^0(R)$. Pour tout triangle $\sigma \in \mathcal{T}(L)$ on note L_σ l'ensemble des droites de L qui rencontrent l'intérieur de σ et on pose $\ell_\sigma := |L_\sigma|$. On note également D_σ l'ensemble des droites de $L \setminus L_\sigma$ qui rencontrent le bord de σ. On dit que D_σ *détermine* σ. Notons que par l'hypothèse de position générale le *degré* $d_\sigma := |D_\sigma|$ de σ est majoré par 5. De plus σ est dans la triangulation canonique d'un échantillon $R \subset L$ si et seulement si $D_\sigma \subset R \subset L \setminus L_\sigma$. En particulier, le nombre de triangles possédant le même ensemble déterminant est majoré par une constante (la taille maximale de la triangulation canonique de 5 droites). On en déduit

$$|\mathcal{T}(L)| = O(n^5)$$

On note enfin $\mathcal{T}^i(R)$ l'ensemble des triangles σ réalisables sur l'échantillon R tels que $|L_\sigma \cap R| = i$.

Théorème 12.4 *Soit R un r-échantillon aléatoire pour la loi uniforme sur $\binom{L}{r}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante c_ϵ indépendante de r et n telle que :*

$$P\big(\max_{\sigma \in \mathcal{T}^0(R)} \ell_\sigma \leq c_\epsilon \frac{n}{r} \log r\big) > 1 - \epsilon$$

Dit autrement, avec une forte probabilité chacun des triangles de la triangulation canonique de R est coupé (en son intérieur) par $O(\frac{n}{r}\log r)$ droites de L.

Preuve : On note $q(c)$ la probabilité pour qu'il existe un triangle de la triangulation canonique de R qui soit coupé par plus de $c\frac{n}{r}\log r$ droites de L. Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir c de sorte que $q(c) \leq \epsilon$. On a

$$q(c) = P\Big(\bigvee_{\substack{\sigma \in \mathcal{T}(L) \\ \ell_\sigma > c\frac{n}{r}\log r}} \sigma \in \mathcal{T}^0(R)\Big) \leq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{T}(L) \\ \ell_\sigma > c\frac{n}{r}\log r}} P\big(\sigma \in \mathcal{T}^0(R)\big)$$

Puisque $\mathcal{T}^0(R) \subset \mathcal{T}(R)$ on peut écrire

$$P\big(\sigma \in \mathcal{T}^0(R)\big) = P\big(\sigma \in \mathcal{T}^0(R) \mid \sigma \in \mathcal{T}(R)\big) \cdot P\big(\sigma \in \mathcal{T}(R)\big)$$

Or

$$\begin{aligned} P\big(\sigma \in \mathcal{T}^0(R) \mid \sigma \in \mathcal{T}(R)\big) &= \binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma} \Big/ \binom{n-d_\sigma}{r-d_\sigma} = \prod_{i=0}^{r-d_\sigma-1} \frac{n-d_\sigma-\ell_\sigma-i}{n-d_\sigma-i} \\ &\leq (1-\frac{\ell_\sigma}{n-d_\sigma})^{r-d_\sigma} \leq e^{-\frac{\ell_\sigma}{n-d_\sigma}(r-d_\sigma)} \end{aligned}$$

Avec les hypothèses $\ell_\sigma > c\frac{n}{r}\log r$ et $d_\sigma \leq 5$ on en déduit $P(\sigma \in \mathcal{T}^0(R) \mid \sigma \in \mathcal{T}(R)) < r^{-\frac{c}{\ln 2}(1-\frac{5}{r})}$. D'où

$$q(c) \leq r^{-\frac{c}{\ln 2}(1-\frac{5}{r})} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{T}(L) \\ \ell_\sigma > c\frac{n}{r}\log r}} P(\sigma \in \mathcal{T}(R)) \leq r^{-\frac{c}{\ln 2}(1-\frac{5}{r})} E(|\mathcal{T}(R)|)$$

Mais comme noté plus haut le nombre $|\mathcal{T}(R)|$ de triangles réalisables sur R est un $O(r^5)$. D'où

$$q(c) \leq r^{5-\frac{c}{\ln 2}(1-\frac{5}{r})}$$

On peut donc choisir c (indépendamment de r et de n) pour rendre cette quantité aussi petite que désirée (notons que pour r petit, disons $r \leq 10$, le théorème est trivialement vrai). □

Lemme 12.5 *Soit R un r-échantillon de L et soit Q un $r/2$-échantillon aléatoire de R. Alors pour tout i*

$$|\mathcal{T}^i(R)| \leq c_i E(|\mathcal{T}^0(Q)|) = O(r^2)$$

pour une certaine constante $c_i > 0$.

Preuve : C'est évident si $\mathcal{T}^i(R)$ est vide. On pose pour tout $\sigma \in \mathcal{T}^i(R)$,

$$p(\sigma) := P(\sigma \in \mathcal{T}^0(Q)) = P(D_\sigma \subset Q \subset R \setminus L_\sigma)$$

les probabilités étant relatives à la loi uniforme sur $\binom{R}{r/2}$. Puisque $|R \cap L_\sigma| = i$, on a

$$p(\sigma) = \binom{r-d_\sigma-i}{r/2-d_\sigma} \Big/ \binom{r}{r/2}$$

On montre (cf. exercice ci-dessous) que cette dernière quantité est minorée par une constante $k_i > 0$ dès que r est supérieur à une constate K_i ne dépendant que de i. On a alors

$$E(|\mathcal{T}^0(Q)|) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}(R)} p(\sigma) \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{T}^i(R)} p(\sigma) \geq k_i |\mathcal{T}^i(R)|$$

Ce qui permet de conclure puisque $|\mathcal{T}^0(Q)| = O(r^2)$ d'après le théorème 9.3 sur la complexité des arrangements. Notons que quitte à augmenter c_i, l'inégalité du lemme est inconditionnellement vraie puisque pour $i < r < K_i$, $E(|\mathcal{T}^0(Q)|)$ est uniformément minorée par une constante positive tandis que $|\mathcal{T}^i(R)|$ est uniformément majorée. □

Exercice 12.6 *Montrer que pour tout* $1/2 > \epsilon > 0$ *et tout* $r \geq \frac{1}{\epsilon}\max(d-1, i-1)$ *:*

$$\binom{r-d-i}{r/2-d}/\binom{r}{r/2} \geq (\frac{1}{2}-\epsilon)^{i+d}$$

Lemme 12.7 *Pour tout* i *on a la majoration suivante pour l'espérance du moment d'ordre* i *du nombre de droites coupant un triangle de la triangulation canonique d'un* r*-échantillon aléatoire* R *(pour la loi uniforme) :*

$$E(\sum_{\sigma\in\mathcal{T}^0(R)}\binom{\ell_\sigma}{i}) = O\big((\frac{n}{r})^i r^2\big)$$

Preuve : Pour tout triangle σ réalisable sur L et pour $j = 0$ ou $j = i$ on pose $p_j(\sigma) := P(\sigma \in \mathcal{T}^j(R))$. On a ainsi

$$p_0(\sigma) = P(D_\sigma \subset R \subset L \setminus L_\sigma) = \binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma}/\binom{n}{r}$$

et

$$p_i(\sigma) = P(D_\sigma \subset R \text{ et } |L_\sigma \cap R| = i) = \binom{\ell_\sigma}{i}\binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma-i}/\binom{n}{r}$$

D'où $\binom{\ell_\sigma}{i}p_0(\sigma) = p_i(\sigma)\binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma}/\binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma-i}$.

Or dès que $r > 2(i+4)$ on a (cf. exercice ci-dessous) $\binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma}/\binom{n-d_\sigma-\ell_\sigma}{r-d_\sigma-i} < c_i(n/r)^i$ pour une certaine constante c_i. On en déduit

$$E(\sum_{\sigma\in\mathcal{T}^0(R)}\binom{\ell_\sigma}{i}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{T}(L)}\binom{\ell_\sigma}{i}p_0(\sigma) \leq c_i(n/r)^i\sum_{\sigma\in\mathcal{T}(L)}p_i(\sigma) \leq c_i(n/r)^i E(|\mathcal{T}^i(R)|)$$

Et on conclut avec le lemme précédent. □

Exercice 12.8 *Montrer que pour* $r > 2(i+d-1)$ *on a*

$$\binom{n-d-\ell}{r-d}/\binom{n-d-\ell}{r-d-i} < 2^i(n/r)^i$$

Note : Une preuve alternative du théorème 12.4 utilise la notion d'ϵ-net (cf. définition 14.7). En voici une esquisse. On se référera au chapitre 14 pour les définitions et résultats appropriés. On considère le système de parties $(\mathcal{D}, \{\Delta_t\}_t)$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites du plan et où $\{\Delta_t\}_t$ est l'ensemble des parties de $\mathcal{D}$ indexé par les triangles du plan avec Δ_t défini comme le sous-ensemble des droites rencontrant l'intérieur du triangle t. On montre (cf. proposition 14.5) que ce système a une dimension de Vapnik-Chervonenkis finie. On en déduit par le corollaire 14.8 que tout ensemble L de n droites possède un $\frac{\log r}{r}$-net E de taille $O(r)$ relativement à $(\mathcal{D}, \{\Delta_t\}_t)$. Dit autrement, tout triangle du plan coupé par au moins $\frac{n}{r}\log r$ droites de L contient une droite de E. Par conséquent, les triangles de la triangulation canonique de E sont coupés par au plus $\frac{n}{r}\log r$ droites de L. Le théorème 14.6 montre finalement que E peut être obtenu par tirage aléatoire avec une bonne probabilité.

12.3 Partitions Simpliciales

On rappelle qu'une r-partition (simpliciale) d'un ensemble S de n points du plan est une famille de couples $\{(S_i, \Delta_i)\}_{i \in I}$ où les S_i forment une partition de S et ont chacun une taille comprise entre n/r et $2n/r$ et où Δ_i est un triangle du plan contenant S_i. Le triangle Δ_i peut éventuellement être dégénéré en un segment, ce qui est utile lorsque S n'est pas en position générale. Notons que la *taille* $|I|$ de la partition est majorée par r. Son *nombre de croisements* relativement à un ensemble de droites et le nombre maximal de triangles intersectés (transversalement pour les triangles dégénérés) par l'une de ces droites. On sous-entendra l'ensemble de toutes les droites du plan lorsque cet ensemble n'est pas spécifié. Je suis la présentation de Matoušek [Mat92].

Théorème 12.9 (de la partition simpliciale, Matoušek 1992) *Pour tout ensemble S de n points et pour tout r $(2 \leq r \leq n/2)$, il existe une r-partition de S de nombre de croisements $O(\sqrt{r})$ qui peut être construite en temps $O(n)$ si r est majoré par une constante.*

La preuve procède en deux étapes. Dans un premier temps on montre que pour tout ensemble de droites fini L, on peut construire une r-partition de S de nombre de croisements $O(\sqrt{r} + \log |L|)$ relativement à L. On montre ensuite qu'on peut construire un ensemble test L_0 composé de $O(r)$ droites tel que le nombre de croisements de *toute* r-partition de S est en gros égal à son nombre de croisements relativement à L_0.

Lemme 12.10 *Soit S, n, r comme dans le théorème et soit L un ensemble fini de droites. On peut construire en temps $O(nr \log r + |L| r^{3/2})$ une r-partition de S de nombre de croisements $O(\sqrt{r} + \log |L|)$ relativement à L.*

Preuve : On considère la famille de droites pondérées (L, w_1) avec des poids unitaires ; on note $|w_1| = |L|$ son poids total. On pose $\Sigma_1 = S$ et $r_1 = r$. Par le corollaire 12.3 on peut construire un $\frac{1}{c\sqrt{r_1}}$-cutting de (L, w_1), pour une constante c appropriée, possédant au plus r_1 faces (triangles et arêtes) au total. En particulier, le poids total des droites de L coupant un triangle de ce cutting est majoré par $O(|w_1|/\sqrt{r_1})$. Il en est de même pour les arêtes, puisque toute droite qui coupe une arête coupe ses triangles incidents. L'une des faces Δ_1 du cutting contient au moins $|\Sigma_1|/r_1 = n/r$ sommets de Σ_1. On choisit arbitrairement un sous-ensemble S_1 de $\lceil n/r \rceil$ sommets dans Δ_1, ce qui fournit la première paire (S_1, Δ_1) de la r-partition. On pose ensuite $\Sigma_2 = \Sigma_1 \setminus S_1$, $r_2 = |\Sigma_2| r/n$ et on définit des poids w_2 pour L en doublant les poids des droites de L coupant Δ_1 et en laissant inchangé les autres poids. Si $|\Sigma_2| \leq 2n/r$, on pose $S_2 = \Sigma_2$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^2$. Sinon on itère le procédé avec Σ_2, r_2 et (L, w_2). Au bout de $m \leq r$ étapes, on obtient une r-partition simpliciale de S :

$$(S_1, \Delta_1), (S_2, \Delta_2), \ldots, (S_m, \Delta_m)$$

On considère une droite $\ell \in L$. Soit k le nombre de triangles de la r-partition coupés par ℓ. On a ainsi $w_{m+1}(\ell) = 2^k$. Par ailleurs, si p est le poids total des droites de L coupant Δ_i à l'étape i on a d'une part $p = O(|w_i|/\sqrt{r_i})$, par les propriétés du cutting utilisé, et d'autre part $|w_{i+1}| = (|w_i| - p) + 2p$, par la règle de doublement des poids. D'où $|w_{i+1}| = |w_i|(1 + O(\frac{1}{\sqrt{r_i}}))$, et partant de $|w_1| = |L|$:

$$|w_{m+1}| = |w_1| \prod_{i=1}^{m} (1 + O(\frac{1}{\sqrt{r_i}})) \leq |L| e^{O(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{r_i}})}$$

Cette dernière relation provenant de l'inégalité $1 + x \leq e^x$. Or,

$$r_i = |\Sigma_i| r/n = (n - (i-1)\lceil n/r \rceil) r/n \geq r - i + 1$$

Il suit que $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{r_i}} \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{r}$ en majorant la somme par une intégrale. On déduit finalement de $w_{m+1}(\ell) \leq |w_{m+1}|$ la majoration cherchée : $k = O(\log |L| + \sqrt{r})$.

Le temps requis à chaque étape est $O(|L|\sqrt{r_i})$ pour la construction du cutting plus $O(n_i \log r_i)$ pour sélectionner les points de S_i en utilisant par exemple une structure de recherche pour le cutting telle que décrite section 10.2. Le temps total de construction de la r-partition est donc $O(|L| r^{3/2} + nr \log r)$. □

Lemme 12.11 (de l'ensemble test) *Soient S, n, r comme dans le théorème. Il existe un ensemble L de $O(r)$ droites tel que le nombre de croisements de toute r-partition $\mathcal{P}$ de S est majoré par*

$$3c_L + \sqrt{r}$$

où c_L est le nombre de croisements de $\mathcal{P}$ relativement à L. De plus, un tel ensemble L peut être construit en temps $O(n\sqrt{r})$.

Preuve : On note $*$ la dualité point/droite comme à la section 11.2.2. Soit S^* l'ensemble des droites duales des points de S. Par le théorème 12.1, on peut construire en temps $O(n\sqrt{r})$ un $\frac{1}{\sqrt{r}}$-cutting de S^* constitué de $O(r)$ triangles, arêtes et sommets. On définit L comme les droites duales des $O(r)$ sommets de ce cutting. Reste à vérifier que L a la propriété désirée. Soient $\mathcal{P}$ et c_L comme dans le lemme et soit ℓ une droite du plan. On considère le triangle Δ du cutting contenant le point dual ℓ^* et on note D l'ensemble des 3 droites duales des sommets de Δ.[4] Soit c le nombre de triangles de $\mathcal{P}$ coupés par ℓ et par au moins l'une des droites de D. Par définition de c_L, on a $c \leq 3c_L$. On note c' le nombre de triangles de $\mathcal{P}$ coupés par ℓ mais par aucune des droites de D. Ces triangles contiennent au moins $c'n/r$ sommets de S et sont contenus dans la zone de ℓ dans l'arrangement des droites de D. Il suit aisément (exercice !) que les droites duales de ces sommets coupent l'intérieur de Δ. Par le choix du cutting, leur nombre est majoré par $n/\sqrt{r}$. D'où $c' \leq \sqrt{r}$.
□

Exercice 12.12 *Soit Δ un triangle généralisé du plan et p un point intérieur à Δ. Soit D l'ensemble des 3 droites duales des sommets de Δ. Ces droites peuvent être verticales si Δ est non borné (cf. note de la preuve ci-dessus). Montrer que tout point de la zone de p^* dans l'arrangement de D se dualise en une droite coupant Δ.*

4. On étend la dualité aux points à l'infini (= les directions de plan) en associant la droite verticale $\{x = a\}$ à la direction de pente a. Si Δ est non-borné ses points à l'infini sont les directions des côtés non-bornés.

Supposons que $\Delta = [d_1^*, d_2^*, d_3^*]$ est un triangle borné. Un point d^* est dans $\Delta = [d_1^*, d_2^*, d_3^*]$ si et seulement s'il est disons au dessus des droites $\ell_{12} = d_1^* d_2^*$ et $\ell_{31} = d_3^* d_1^*$ et au dessous de la droite $\ell_{23} = d_2^* d_3^*$. Ce qui équivaut à ℓ_{12}^* et ℓ_{31}^* sont au dessus de la droite d et ℓ_{23}^* est au dessous de d. Par tout point p de la zone de ℓ dans D, il passe une droite une telle droite d. Donc p^*, qui contient d^*, coupe Δ. Les cas où Δ est non borné sont similaires.

Preuve du théorème 12.9 : Par le lemme 12.11, on construit en temps $O(n\sqrt{r})$ un ensemble L de $O(r)$ droites tests pour les r-partitions de S. Par le lemme 12.10, on construit en temps $O(nr \log r + r^{5/2})$ une r-partition de S de nombre de croisements $O(\sqrt{r})$ relativement à L et qui a donc un nombre de croisements du même ordre relativement à toutes les droites du plan d'après le lemme 12.11. □

Remarquons que pour r non constant, la preuve du théorème fournit une construction d'une r-partition en temps $O(nr \log r + r^{5/2})$. Il est possible, quitte à augmenter légèrement le nombre de croisements (en $O(r^{1/2+\varepsilon})$), de réduire ce temps à $O(n \log r)$ (cf. [Mat92]). L'idée est de fixer une constante r_0, puis de calculer une r_0-partition $\{(S_i, \Delta_i)\}_i$ pour S, puis une r_0^2-partition pour chaque S_i, et de continuer récursivement $\log_{r_0} r$ fois.