Séance du jeudi 16/10/14 (Viallet, salle C319, 15h30)

Persyval Galois

November 25, 2014

Vincent Jost nous présente un problème d'empilement de rectangles. Étant donné 4 entiers positifs ℓ, w, L, W il s'agit de placer le maximum de *petits* rectangles, ou *briques*, $\ell \times w$ dans le *grand* rectangle $L \times W$ en supposant que

1. les intérieurs des petits rectangles ne se chevauchent pas,
2. les côtés des petits rectangles sont parallèles aux axes du grand.

On note $\text{Pack}(\ell, w, L, W)$ ce maximum de petits rectangles.

En poussant les briques en bas à gauche du grand rectangle on peut supposer que les coordonnées (du coin inférieur gauche) des briques sont entières. Ceci permet de formuler le problème d'optimisation du nombre de briques comme un programme linéaire en nombres entiers. Attention que le codage d'une instance du problème est de taille $O(\log(\ell + w + L + W))$. Il est donc a priori difficile de définir un certificat de taille polynomial pour le problème de décision associé : $\text{Pack}(\ell, w, L, W) < k$. Par exemple, la taille de la simple liste des coordonnées des briques d'un empilement, un $O(\log(L+W)\frac{LW}{\ell w})$, n'a aucune raison d'être polynomiale. On ne sait d'ailleurs pas si ce problème est dans NP.

Pour attaquer ce problème on peut se restreindre à des formes particulières d'empilements. Par exemple on peut supposer qu'il existe une coupe horizontale ou verticale qui décompose un empilement en deux, chaque brique étant entièrement d'un côté ou de l'autre de la coupe. Une décomposition *guillotine* s'obtient en supposant que chaque empilement est récursivement décomposable par une coupe horizontale ou verticale jusqu'à obtenir des briques. À l'aide de la programmation dynamique il est possible de trouver en temps pseudo-polynomial une décomposition guillotine optimale. En fait, il est possible d'optimiser en temps polynomial parmis les décompositions guillotines.

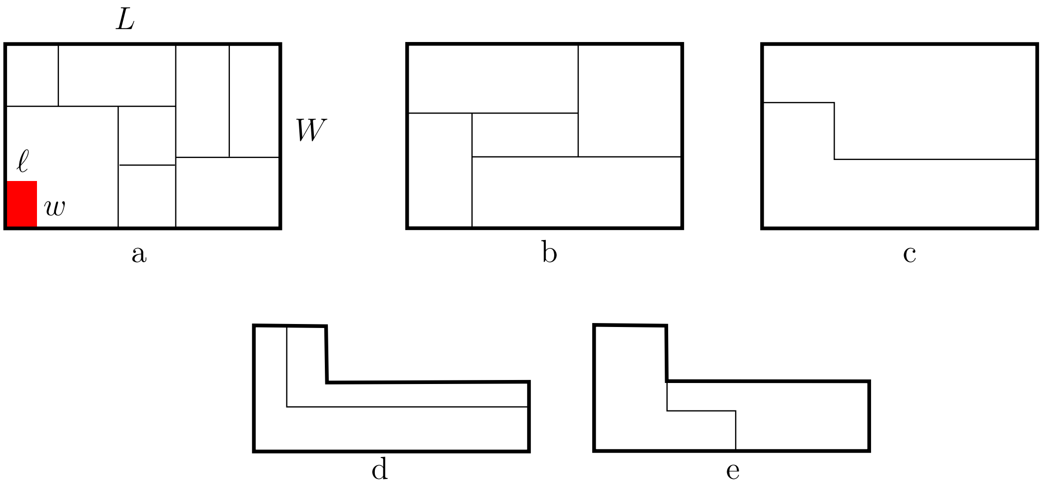

Figure 1: (a): Une décomposition guillotine. (b): Une décomposition en cinq blocs. (c): Une décomposition en L. (d,e): Deux décompositions en L d'un L.

D'autres structures récursives par blocs sont possibles. Voir figure 1.

Bien qu'un empilement optimal ne résulte a priori pas nécessairement d'une décomposition récursive particulière, on peut chercher à calculer une solution optimale parmi les décompositions récursives d'un certain type. À nouveau, la programmation dynamique permet d'optimiser en temps pseudo-polynomial parmis les structures 5-blocs récursifs et L-décomposition récursives.

On ne sait pas si on peut optimiser sur ces types en solution en temps polynomial.

Il n'y a pas de contre-exemple connu à l'optimalité des solutions L-décomposables.

On peut modéliser le problème conne un programme linéaire en nombres entiers de type packing, en posant une variable binaire pour chaque position possible d'un brique. On pose une contrainte de somme ≤ 1 sur chaque position du grand rectangle. On ne connait pas d'instance pour laquelle la relaxation linéaire s'écarte d'au plus d'un de l'empilement maximal entier. Cependant, on ne sait pas optimiser ce programme linéaire en temps polynomial, mais seulement en temps pseudo-polynomial (car sa formulation contient déjà $L \times W$ variables et autant de contraintes).

On peut noter que les solutions entières du dual du problème relaxé correspondent aux choix d'un nombre minimum de positions sur le grand carré telles que toute brique intersecte au moins une de ces positions. Autrement dit, un ensemble de positions, qu'une fois interdites, on ne peut pas placer de briques dans le grand rectangle. L'écart entre l'optimum relaxé et l'optimum de ce dual entier est cependant nettement plus grand en pratique que l'écart primal.

Finalement, on peut montrer que pour tout (ℓ, w), il existe un nombre fini de situations qui peuvent arriver, (mais on ne sait pas encore grand chose sur ce point). Par exemple, si $(\ell, w) = (1, 2)$, il existe un empilement parfait si et seulement si L ou W est pair (et sinon il reste juste un petit carré non rempli).

Dans une deuxième partie, Louis nous expose la solution de l'exercice suivant : Si un rectangle $L \times W$ admet un pavage par un nombre fini de carrés d'intérieurs disjoints comme sur la figure 2 à gauche, alors L et W sont commensurables (L/W est rationnel). Pour le voir, supposons par l'absurde

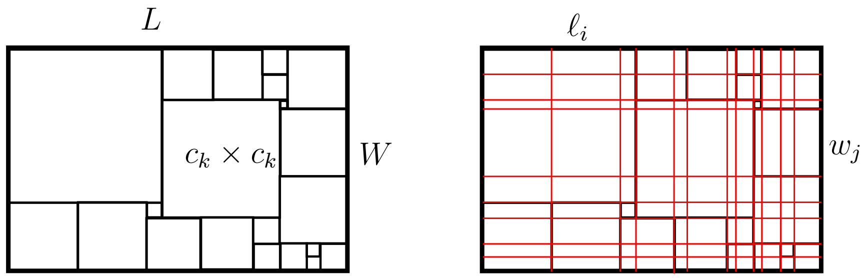

Figure 2: Gauche : Un pavage d'un rectangle par des carrés. Droite : Le quadrillage correspondant.

que L/W est irrationnel. On considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, de sorte que (L, W) est libre. Soit f une forme linéaire telle que $f(L) = -f(W) = 1$. On considère la forme bilinéaire produit $\varphi(x, y) = f(x)f(y)$. En prolongeant les côtés des carrés à l'intérieur du rectangle (cf. figure 2, droite) on obtient un quadrillage correspondant aux décompositions $L = \sum_i \ell_i$ et $W = \sum_j w_j$. Par bilinéarité de φ et en utilisant le fait que chaque carré du pavage est une union de rectangles du quadrillage, on obtient :

$$\varphi(L, W) = \sum_{i,j} \varphi(\ell_i, w_j) = \sum_k \varphi(c_k, c_k)$$

Cette dernière somme est positive puisque $\varphi(c_k, c_k) = (f(c_k))^2$, ce qui contredit $\varphi(L, W) = -1$.

Ce résultat apparaît dans le livre de Bollobàs *Modern Graph Theory* au th. II.4 et semble être lié à des casses-têtes plus anciens. Il existe de multiples extensions telles que le calcul du nombre minimal de carrés pour paver un rectangle.