Séance du jeudi 07/11/13 (salle C219, Viallet, 16h)

Persyval Galois

December 2, 2013

Yves poursuit sur son invariant.

On considère l'espace vectoriel S^n des matrices symétriques réelles $n \times n$. On a $\dim S^n = \frac{n(n+1)}{2}$. Si $A \in S^n$, on note q_A la forme quadratique associée et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ la suite ordonnée des valeurs propres de A.

On pose

$$W_{2,p} = \{A \in S^n \mid \dim \ker A = p, \lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0\}$$

Donc $W_{2,p}$ est le sous-ensemble des matrices symétriques de co-rang p dont la première valeur propre est la seule négative. De manière équivalente, c'est l'ensemble des formes quadratiques de signature $(-1)^1 0^p 1^{n-p-1}$.

Lemme 1 *$W_{2,p}$ est sous-variété lisse de S^n de co-dimension $\frac{p(p+1)}{2}$.*

Preuve (cf. notes Yves sur sa page). On a une action C^∞ des matrices orthogonales $O(n)$ sur $W_{2,p}$ donnée par $(R, A) \mapsto R^t AR$. Les orbites de cette action sont les éléments de $W_{2,p}$ possédant le même spectre (avec multiplicité) et chaque orbite contient un élément de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{1}$$

où C est symétrique inversible de dimension $(n-p) \times (n-p)$ avec une unique valeur propre négative. Il suffit donc de montrer que $W_{2,p}$ est une sous-variété lisse au voisinage d'une telle matrice pour en déduire que $W_{2,p}$ est globalement une sous-variété lisse. Pour cela on considère l'application $\Phi : S^p \times S^{n-p} \times \mathbb{R}^{p\times(n-p)} \to S^n$ telle que

$$\Phi(B, C, D) = \exp(-\tilde{D}) \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \exp(\tilde{D})$$

ou $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & -D^t \\ D & 0 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{d}\Phi(B, C, D).(\beta, \gamma, \delta) = \frac{\partial \Phi}{\partial B}.\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial C}.\gamma + \frac{\partial \Phi}{\partial D}.\delta$. Puisque la différentielle de l'exponentielle de matrices est l'identité en 0, on calcule

$$\mathrm{d}\Phi(0, C, 0).(\beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \tilde{\delta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \tilde{\delta} = \begin{pmatrix} \beta & \delta^t C \\ C\delta & \gamma \end{pmatrix}$$

Il suit que $\mathrm{d}\Phi(0, C, 0)$ est une bijection et Φ est donc un difféomorphisme dans un voisinage V de $(0, C, 0)$, c'est-à-dire une paramétrisation locale de S^n. Mais $\Phi^{-1}(\Phi(V) \cap W_{2,p}) = V \cap (\{0\} \times S^{n-p} \times \mathbb{R}^{p \times (n-p)})$ (car C reste inversible localement et B doit donc être nulle pour obtenir un co-rang p). Il suit que $W_{2,p}$ est localement une sous-variété de co-dimension $\dim S^p$. $\square$

Lemme 2 *L'espace tangent en $A \in W_{2,p}$ est donné par*

$$T_A W_{2,p} = \{AU + U^t A \mid U \in \mathbb{R}^{n \times n}\} = \{B \in S^n \mid q_{B|_{\ker A}} = 0\}$$

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que A est sous la forme (1). D'après ce qui précède, $T_A W_{2,p}$ est l'ensemble des $\mathrm{d}\Phi(0, C, 0).(0, \gamma, \delta)$ avec $(\gamma, \delta) \in S^{n-p} \times \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$. Donc

$$T_A W_{2,p} = \{\begin{pmatrix} 0 & \delta^t C \\ C\delta & \gamma \end{pmatrix} \mid (\gamma, \delta) \in S^{n-p} \times \mathbb{R}^{p \times (n-p)}\}$$

$T_A W_{2,p}$ est donc le sous-espace des matrices symétriques de la forme $\begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^t & W \end{pmatrix}$ qui s'écrivent aussi $AU + U^t A$ pour $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. C'est encore l'ensemble des matrices des formes quadratiques dont le cône isotrope contient $\ker A = \mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$. $\square$

On considère un graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. On note O_G l'espace des opérateurs laplaciens généralisés de G. Rappelons que c'est le sous-ensemble de $S^V := S^n$ dont les coefficients correspondant aux arêtes $ij \in E$ sont strictement négatifs et les autres coefficients non-diagonaux sont nuls. O_G est donc isomorphe à $\mathbb{R}^V \times (\mathbb{R}_+^*)^E$ et est une sous-variété de dimension $|V| + |E|$ dans S^V.

Définition 3 *Soient Y, Z deux sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^N$ et $x \in Y \cap Z$. On dira que Y et Z se coupent* ***transversalement*** *en x, et on écrira $Y \pitchfork_x Z$, si*

$$T_x Y + T_x Z = \mathbb{R}^N$$

c'est-à-dire que les espaces tangents à Y et Z en x engendrent $\mathbb{R}^n$. De manière équivalente cela signifie que les espaces orthogonaux sont d'intersection nulle. On écrit $Y \pitchfork Z$ si Y et Z se coupent transversalement en tout point de $Y \cap Z$. Notons que nécessairement $\dim Y + \dim Z \geq N$.

Théorème 4 (Stabilité structurelle de la transversalité) *Si $Y \pitchfork Z$ alors $Y \pitchfork Z_\epsilon$ pour toute déformation C^1 de Z suffisamment petite.*

Pour X compact c'est clair. Pour X non compact, j'imagine que "suffisamment petit" est fonction du point où l'on se trouve.

Si $A \in O_G$ le théorème de Perron-Frobenius assure que la première valeur propre de A est simple, i.e., $\lambda_1 < \lambda_2$. Par le décalage $A \mapsto A - \lambda_2 I$ on peut supposer que $\lambda_2 = 0$ et la multiplicité de λ_2 devient donc le co-rang de A.

Définition 5 *Soit $A \in O_G$ telle que $\lambda_2 = 0$ est de multiplicité p, c'est-à-dire que $A \in O_G \cap W_{2,p}$. On dira que A est **stable** si $O_G \pitchfork_A W_{2,p}$.*

Traduction algébrique. On a vu que O_G est un ouvert dans le sous-espace des matrices symétriques dont les coefficients $ij \notin E$ $(i \neq j)$ sont nuls. Il suit que l'espace tangent $T_A O_G$ en tout $A \in O_G$ s'identifie à ce sous-espace. Les formes quadratiques correspondantes sont engendrées par les $q_{ij}(x) = x_i x_j$, pour $ij \in E$ et les $q_i(x) = x_i^2$, pour $i \in V$. Dire que $O_G \pitchfork_A W_{2,p}$ c'est dire que $S^V = T_A O_G + T_A W_{2,p}$. Or le lemme 2 indique que $T_A W_{2,p}$ correspond aux formes quadratiques qui s'annulent sur $\ker A$. La condition de transversalité se traduit ainsi par le fait que la restriction à $\ker A$ de $\{q_{ij}\}_{ij \in E} \cup \{q_i\}_{i \in V}$ engendre les formes quadratiques sur $\ker A$ (donc un espace isomorphe à S^p). Dans ce dernier cas notons en effet que $T_A O_G$ contient un supplémentaire de $T_A W_{2,p}$ de dimension $\dim S^p$, tandis que $T_A W_{2,p}$ est de co-dimension $\dim S^p$. D'où $S^V = T_A O_G + T_A W_{2,p}$.

Définition 6 *Si G est un graphe connexe, on définit $\mu(G)$ comme le plus grand p tel que $O_G \cap W_{2,p}$ contient un élément stable. C'est donc le co-rang de tout laplacien de G stable.*

Exemple 7 *$\mu(K_n) = n - 1$ où K_n est le graphe complet à n sommets. En effet, O_{K_n} est un ouvert de S^n de sorte que $T_A O_{K_n} = S^n$ et tout laplacien est donc stable. Le co-rang maximal est obtenu pour $-I \in O_{K_n}$.*

Exemple 8 *$\mu(K_{3,3}) = 4$. On considère $K_{3,3}$ comme le graphe bipartie sur $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\}$. Remarquons que tout laplacien de $K_{3,3}$ est de rang au moins 2 : les colonnes 1 et 4 par exemple sont indépendantes. Le laplacien $-adj(K_{3,3}) = \begin{pmatrix} 0 & -I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang exactement 2 et on peut montrer qu'il est stable. On en déduit que le max du co-rang des laplaciens stables est 4.*

Si on omet la condition de stabilité, on obtient

Définition 9 *On définit $m(G)$ comme le plus grand p tel que $O_G \cap W_{2,p}$ est non vide.*

Remarque 10 *Évidemment, $\mu(g) \leq m(G)$.*

Remarque 11 *La condition de transversalité ci-dessus implique* $|E|+|V| = \dim T_A O_G \geq \dim S^p$. *Pour* $p = \mu(G)$ *on obtient ainsi*

$$\frac{\mu(G)(\mu(G)+1)}{2} \leq |E| + |V|$$

Exemple 12 *Pour le graphe* $Star_n$ *avec* $n+1$ *sommets et* n *arêtes connectant un sommet central aux* n *sommets périphériques on obtient* $\frac{\mu(\mu+1)}{2} \leq 2n+1$. *Par exemple* $n = 3$ *donne* $\mu(\mu+1) \leq 14$ *d'où* $\mu \leq 3$ *(en fait* $\mu = 2$*) tandis que* $n = 4$ *donne* $\mu \leq 4$.

Exemple 13 *Le graphe du Sudoku, Su, a pour sommets les* 81 *cases d'une grille* 9×9. *Deux sommets sont reliés par une arête si leurs cases ne peuvent contenir le même nombre. Chaque ligne, chaque colonne et chacune des* 9 *sous-grilles* 3×3, *constitue une clique d'ordre* 9. *Donc Su a* $9 * \binom{9}{2} + 9 * 9 * 2 = 18 * 45 = 810$ *arêtes. La remarque précédente nous donne* $\mu(\mu+1) \leq 2 * 891 = 1982$ *soit* $\mu \leq 44$. *D'un autre côté Su contient une clique d'ordre* 21 *comme mineur. La monotonie de* μ *pour la relation de mineur et le fait que* $\mu(K_n) = n-1$ *montre que*

$$20 \leq \mu(Su) \leq 44$$

Pour la grille de Sudoku 4×4, *les mêmes arguments donnent* $7 \leq \mu \leq 11$

Cas des graphes planaires. On utilise la monotonie de μ pour la relation de mineur. Tout graphe planaire connexe G est le mineur d'une triangulation T, d'où

$$\mu(G) \leq \mu(T) \leq m(T)$$

On peut montrer que pour les triangulations $m(T) \leq 3$. Ce qui implique $\mu(G) \leq 3$. D'un autre côté si un graphe H n'est pas planaire il contient $K_{3,3}$ ou K_5 comme mineur. Ce qui implique $\mu(H) \geq \min(\mu(K_{3,3}), \mu(K_5)) = 4$ (cf. exemples plus haut). On en déduit que G est planaire si et seulement si $\mu(G) = 3$.

Une autre manière de se passer de la transversalité est de définir $\tilde{\mu}(G)$ comme le plus petit des $m(H)$ où G est un mineur de H :

$$\tilde{\mu}(G) = \inf\{m(H) \mid G \preceq H\}$$

Conjecture : $\tilde{\mu} = \mu$

Théorème 14 (Lovasz-Schreijver) $\mu(G) \leq 4$ *si et seulement si* G *admet un plongement non noué dans* $\mathbb{R}^3$.