

Séance du jeudi 15/05/14 (Viallet, salle C219, 15h45)

Persyval Galois

May 14, 2014

On appelle **k -système** de courbes sur une surface toute famille de courbes simples deux à deux non-homotopes et s'intersectant au plus k fois deux à deux. Il s'agit de compter sur une surface orientable de genre g le cardinal maximal $N_g(k)$ de tout k -système. La question a été posée pour $k = 1$ par Farb et Leininger qui montrent que $N_1(1) = 3$ et $N_2(1) = 12$. Cette question avait été considérée auparavant pour k quelconque d'un point de vue plus combinatoire par Juvan, Malnič et Mohar [JMM96]. Ces derniers obtiennent que $N_g(k)$ est fini et que

$$N_1(k) \leq 2k + 3 \quad \text{et} \quad N_g(k) \geq (k/g)^g$$

Dans un papier récent Malen Stein, Rivin et Theran [MRT14] montrent que $N_3(1) \geq 6g$ et que pour $g \geq 3$

$$g^2 + \frac{5}{2}g \leq N_g(1) \leq (g-1)(2^{2g} - 1)$$

et précisent qu'il s'agit des meilleurs bornes connues. Leur borne inférieure est donnée par une construction explicite : on considère un schéma polygonal non réduit à $4g' + 2$ côtés sous la forme $a_1 a_2 \dots a_{2g'+1} a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g'+1}^{-1}$ sur une surface sans bord de genre g' . On forme un 1-système de $2g' + 1$ lacets joignant chacun deux côtés opposés du schéma polygonal. Les lacets se coupent deux à deux une fois en un même point "base" et sont donc non-contractibles et non-homotopes deux à deux¹. Cf. Fig. 1. On place b perforations en ligne à côté du point base et on ajoute b copies parallèles à chaque lacet et séparant chaque perforations. On obtient ainsi un 1-système de cardinal $(2g' + 1)(b + 1)$. On pose ensuite $g' = \lfloor g/2 \rfloor$ et on coupe $g - g'$ poignées sur une surface de genre g pour obtenir une surface de genre g' avec $b =$

¹Malen Stein et al. [MRT14] montrent qu'un 1-système dont tous les lacets s'intersectent, i.e. tel que le graphe d'intersection des lacets est complet, contient au plus $2g + 1$ lacets sur une surface de genre g . La preuve repose sur un argument simple de dépendance linéaire appliqué à la forme symplectique correspondant à la forme d'intersection sur le premier groupe d'homologie.

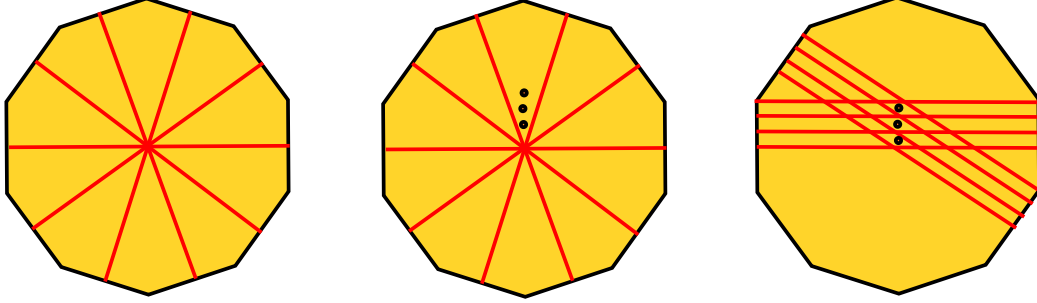


Figure 1: Construction d'un 1-système de taille quadratique à partir d'un schéma polygonal non réduit ayant deux sommets $2g' + 1$ arêtes et une face.

$2(g - g')$ perforations. Le précédent système auquel on ajoute les $g - g'$ lacets de coupe des poignées fournit un 1-système de taille $(2g' + 1)(b + 1) + g - g' \geq g^2 + \frac{5}{2}g$. La borne supérieure est quant à elle obtenue en remarquant que chaque classe d'homologie $\mod 2$ contient au plus $g - 1$ courbes (qui sont forcément disjointes). Des bornes similaires sont proposées pour les surfaces à bord. L'écart semble cependant gigantesque entre les bornes inférieure et supérieure. En février dernier, Piotr Przytycki a en gros comblé cet écart [Prz14] fournissant une borne supérieure cubique pour $N_g(1)$ et plus généralement une borne polynomiale de degré $k^2 + k + 1$ en $|\chi|$ pour $N_g(k)$ (pour des surfaces avec ou sans bord). Przytycki s'intéresse en premier lieu à des familles d'arcs sur des surfaces à bord plutôt qu'à des familles de courbes fermées.

1 Quelques faits connus sur les surfaces

On ne considère ici que des surfaces orientables. Une courbe **simple** dans une surface \mathcal{S} est un plongement de S^1 ou d'un segment de \mathbb{R} . Un **lacet** est une courbe fermée. On dira qu'un lacet homotope² au lacet constant est **contractible**. Un lacet **essentiel**³ est un lacet simple qui ne borde ni un disque ni un cylindre. En vertu du théorème suivant, c'est un lacet simple non-contractible et non-homotope à un bord.

Théorème 1 (Lemmes 2.1 et 2.4 in [Eps66]) *Un lacet simple contractible*

²on ne s'intéresse qu'à l'homotopie libre pour ce qui concerne les lacets.

³La terminologie n'est pas totalement fixée dans la littérature. Essentiel signifie parfois non-contractible ou bien simple et non-contractible, ou encore simple, non-contractible et non-homotope à un bord.

sur \mathcal{S} borde un disque dans \mathcal{S} . Deux lacets simples disjoints, homotopes et non-contractibles sur \mathcal{S} bordent un cylindre dans \mathcal{S} .

Un **arc** est une courbe qui intersecte le bord de \mathcal{S} en ses extrémités exactement. Un arc est vu comme une application $(I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{S}, \partial \mathcal{S})$ et une homotopie entre arcs autorise donc les extrémités à se déplacer sur leur bord. Un arc **essentiel** est un arc simple non-homotope à une courbe du bord de \mathcal{S} .

Une famille de courbes a un **excès d'intersections** s'il existe une famille de courbes (individuellement) homotopes ayant un plus petit nombre total d'intersections (y compris les auto-intersections). Il résulte de [HS85] ou de [dGS97] que dans une famille sans excès d'intersections chaque courbe est individuellement sans excès d'intersections et chaque paire de courbes est sans excès d'intersections. Supposons \mathcal{S} munie d'une métrique riemannienne (avec bords convexes). On dira qu'une courbe compacte est **minimale** si elle minimise la longueur parmi toutes les courbes homotopes. Un arc non-compact est **minimal** si tout segment compact est minimal. Dans le cas de courbes simples on a :

Théorème 2 ([FHS82]) *Si c est minimale et homotope à une courbe simple sur \mathcal{S} alors c est simple. De plus, si c, c' sont deux courbes minimales simples non-homotopes alors $\{c, c'\}$ est sans excès d'intersections.*

C'est en particulier vrai pour les métriques hyperboliques, et dans ce cas il y a une unique géodésique, et donc une unique courbe minimale, dans chaque classe d'homotopie.

Un **pantalon** est une sphère à trois bords. Lorsque \mathcal{S} est *orientable*, une **décomposition en pantalons** est un 0-système maximal, i.e., une famille maximale de lacets simples deux à deux non-homotopes. Le complémentaire d'une décomposition en pantalons est une union disjointe de pantalons. La caractéristique d'Euler d'un pantalon valant -1 , il suit qu'une décomposition en pantalons comporte $-\chi(\mathcal{S})$ pantalons. Par conséquent,

Lemme 3 *Toute décomposition en pantalons d'une surface \mathcal{S} orientable à b composantes de bord contient $(b - 3\chi(\mathcal{S}))/2 = 3g(\mathcal{S}) - 3 + 2b$ lacets, y compris les b composantes de bord.*

PREUVE. Par double comptage de la relation d'incidence pantalons-lacets on obtient $3p = 2\ell + b$ pour p pantalons et ℓ lacets autres que les bords. D'où $\ell + b = (3p + b)/2$. \square

Que \mathcal{S} soit orientable ou non :

Lemme 4 *Toute famille d'arcs essentiels deux à deux disjoints et non-homotopes sur \mathcal{S} contient au plus $3|\chi(\mathcal{S})|$ arcs.*

PREUVE. Supposons le cardinal a de la famille maximal. En contractant chacun des b bords en un point on obtient une surface triangulée sans bord $\overline{\mathcal{S}}$ à b sommets. Par double comptage des incidences triangles-arcs on a $3t = 2a$ pour t triangles. Par Euler $t - a + b = \chi(\overline{\mathcal{S}}) = \chi(\mathcal{S}) + b$. On en déduit $-a/3 = \chi(\mathcal{S})$. \square

Dans le même esprit on a par exemple le lemme suivant.

Lemme 5 *Supposons que \mathcal{S} est une surface perforée et soit $P_1 \cup P_2$ une partition des perforations. Le nombre maximal d'arcs simples joignant P_1 à P_2 et deux à deux disjoints et non-homotopes est $2|\chi(\mathcal{S})|$.*

PREUVE. Soit \mathcal{L} une famille maximale d'arcs comme dans le lemme. Alors chaque face sur la surface $\overline{\mathcal{S}}$ — obtenue par contraction des bords de \mathcal{S} — de l'arrangement des arcs est un quadrilatère (le nombre de côtés d'une face est paire par hypothèse). D'où, avec des notations évidentes : $4f = 2a$ et $\chi(\overline{\mathcal{S}}) = f - a + |P_1 \cup P_2| = \chi(\mathcal{S}) + |P_1 \cup P_2|$. On en déduit $a/2 = -\chi(\mathcal{S})$. \square

2 Nombre maximal d'arcs s'intersectant au plus une fois

On suppose \mathcal{S} une surface perforée de caractéristique négative orientée et munie d'une métrique hyperbolique complète. En particulier, chaque perforation correspond à un cusp.

Théorème 6 *Le cardinal maximal d'un 1-système d'arcs sur \mathcal{S} est*

$$2|\chi(\mathcal{S})|(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$$

La borne est atteinte. En effet, considérons un schéma polygonal construit à partir d'une triangulation de la surface compacte $\overline{\mathcal{S}}$ à p sommets obtenu en bouchant chacune des p perforations de \mathcal{S} . Le nombre $2c$ de côtés du schéma

polygone satisfait la relation d'Euler $p - c + 1 = \chi(\overline{\mathcal{S}}) = \chi(\mathcal{S}) + p$. D'où $c = 1 - \chi(\mathcal{S})$. On considère ensuite la famille d'arcs composée des $c(2c - 3)$ arcs "diagonaux" et des c arcs correspondant aux identifications des côtés du polygone (cf. Fig. 2). La famille contient donc

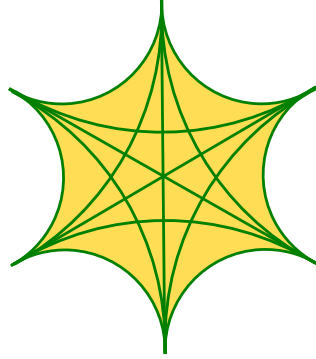


Figure 2: Un schéma polygonal idéal de la surface perforée. Les 6 côtés sont identifiés deux à deux pour donner 3 arcs auxquels on ajoute $3(6 - 3) = 9$ diagonales pour former une 1-famille.

$$c(2c - 3) + c = 2|\chi(\mathcal{S})|(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$$

arcs essentiels deux à deux non-homotopes et s'intersectant au plus une fois.

PREUVE DE LA BORNE SUP DANS LE TH. 6. Soit \mathcal{A} une famille maximale d'arcs comme dans le théorème. Par le théorème 2 on peut supposer que les arcs sont géodésiques. Notons qu'au voisinage de chaque perforation de \mathcal{S} les arcs peuvent être ordonnés circulairement (Les arcs géodésiques forment un faisceau de cercles passant par un point à l'infini dans le modèle du disque de Poincaré). Soit $T = [tab]$ un triangle hyperbolique idéal fixé une fois pour toute. Une paire d'arcs orientés (α, β) issus d'une même perforation et tels que $\beta \notin \{\alpha, \alpha^{-1}\}$ et β suit α dans l'ordre circulaire direct autour de cette perforation est appelée un **coin**. On associe à chaque coin $\kappa = (\alpha, \beta)$ l'isométrie (locale) $\tau_\kappa : T \rightarrow \mathcal{S}$ qui envoie $[ta]$ sur α et $[tb]$ sur β . Intuitivement, le troisième côté est envoyé sur la géodésique homotope à l'arc obtenu à partir de $\alpha^{-1} \cdot \beta$ en lissant la jonction au niveau de la perforation. L'image $\tau_\kappa(T)$ est appelée un **triangle singulier**. La proposition 7 suivante indique que chaque point de \mathcal{S} est couvert par au plus $2(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$ triangles singuliers. Il est facile de voir que le suivant d'un arc dans l'ordre circulaire autour de la perforation origine ne peut être le même arc ni son opposé⁴. Cela contredirait en effet la maximalité de \mathcal{A} . cf. Fig. 4. Il suit que chaque orientation d'un

⁴Cet argument me semble manquer dans [Prz14].

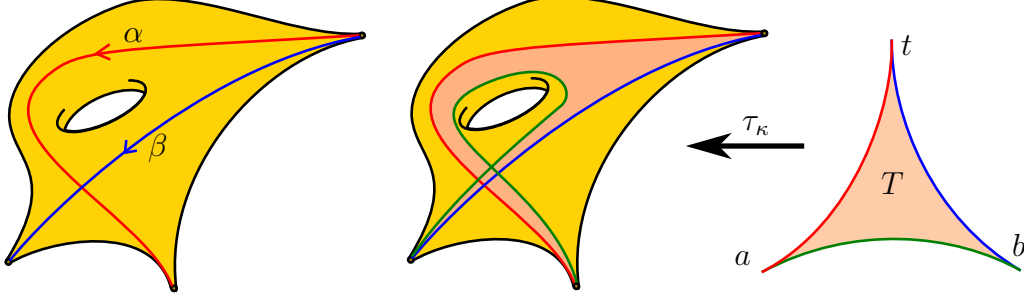


Figure 3: Le triangle singulier associé au coin $\kappa = (\alpha, \beta)$.

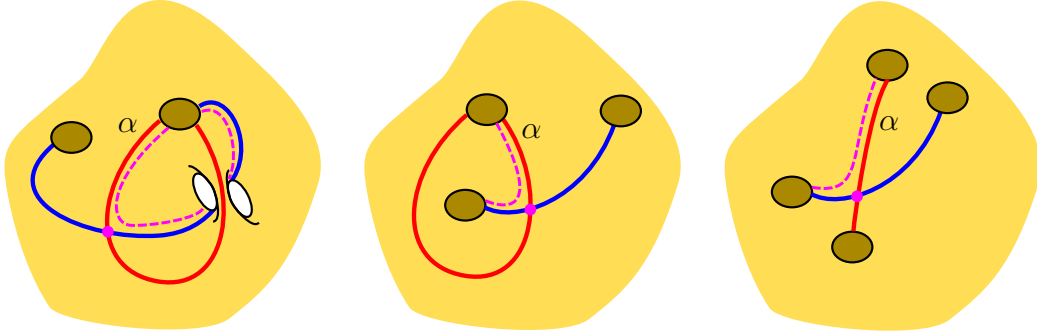


Figure 4: Il est clair que chaque arc d'un 1-système maximal coupe au moins un autre arc. Si le suivant d'un arc α (rouge sur la figure) autour de son origine est le même arc ou l'arc opposé alors on peut ajouter un autre arc (en pointillé) pour agrandir le 1-système, une contradiction. Pour cela on commence par suivre l'arc α (on choisit de suivre à gauche ou à droite) depuis son origine jusqu'à rencontrer un autre arc qui le coupe que l'on suit alors sans couper α jusqu'à son extrémité.

arc est le premier arc orienté d'exactly un coin et le nombre de triangles singuliers est donc égal à $2|\mathcal{A}|$. On en déduit que $2|\mathcal{A}|$ triangles singuliers recouvrent au plus $2(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$ fois \mathcal{S} . Comme chaque triangle singulier est l'image localement isométrique du triangle idéal T d'aire π , cela implique en termes d'aires

$$2|\mathcal{A}|\pi \leq 2\pi|\chi(\mathcal{S})|2(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$$

Ce qui permet de conclure. \square

La preuve précédente repose sur la propriété essentielle suivante.

Proposition 7 *On considère l'application $\tau : \bigsqcup_{\kappa} T \rightarrow \mathcal{S}$, "union disjointe" des τ_{κ} . Pour tout $s \in \mathcal{S}$, on a $|\tau^{-1}(s)| \leq 2(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$.*

PREUVE. On associe à chaque point x du triangle idéal T le **rayon** géodésique ouvert $r_x =]xt[$. Les lemmes 8 et 9 suivants indiquent que pour toute paire de coins κ, ξ et toute paire de points x, y de T tels que $\tau_\xi(y) = \tau_\kappa(x)$ et $(\kappa, x) \neq (\xi, y)$ alors $\tau_\kappa(r_x)$ et $\tau_\xi(r_y)$ sont des arcs (ouverts) simples et disjoints sur \mathcal{S} . Un exemple où $\kappa = \xi$ est illustré Fig. 5. Pour tout

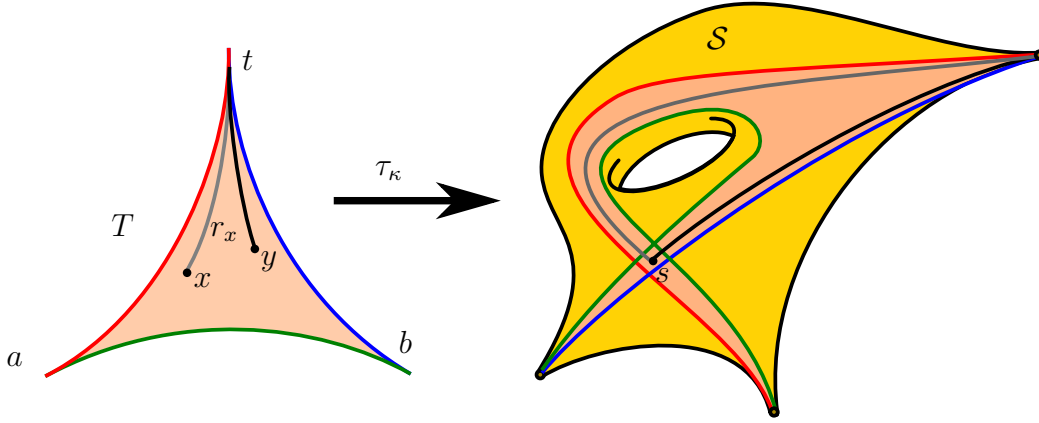


Figure 5: Les images des rayons géodésiques r_x et r_y ont la même origine $s = \tau_\kappa(y) = \tau_\kappa(x)$ et sont d'intérieurs disjoints.

$s \in \mathcal{S}$, l'ensemble des arcs $\mathcal{A}_s = \{\tau_\kappa(r_x) \mid \tau_\kappa(x) = s\}$ forme donc une famille d'arcs disjoints non-homotopes (étant géodésiques les arcs sont soit égaux soit non-homotopes). En appliquant le lemme 5 à cette famille considérée comme tracée sur $\mathcal{S} - s$, on en déduit que $|\tau^{-1}(s)| = |\mathcal{A}_s| \leq 2|\chi(\mathcal{S} - s)| = 2(|\chi(\mathcal{S})| + 1)$. \square

Lemme 8 *La restriction d'un τ_κ à tout rayon géodésique r_x est un plongement.*

PREUVE. Soit $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{S}$ le revêtement universel de \mathcal{S} par le disque de Poincaré \mathbb{D} . Le triangle singulier $\tau_\kappa(T)$ se relève en un triangle idéal de \mathbb{D} (cf. Fig 6.A) que l'on identifie avec T . Supposons par l'absurde que $\tau_\kappa(r_x)$ s'auto-intersecte. Puisque r_x est simple, il intersecte $g(r_x)$ pour un certain automorphisme g de π . Quitte à échanger le rôle de r_x et de $g(r_x)$ on peut supposer que x sépare $g(x)$ de $g(t)$ le long de la géodésique $g(t)q$ prolongation de $g(r_x)$. L'isométrie g est soit hyperbolique soit parabolique. Dans le premier cas ses deux points fixes attractif $+$ et répulsif $-$ ne séparent pas les extrémités $g(t), q$ et ses points apparaissent dans l'ordre $g(t), q, +, -$ que l'on considère comme direct. (cf. Fig 6.B). Il suit que t est entre le point répulsif et $g(t)$ dans l'ordre direct. Par ailleurs un côté $[tc]$ de T coupe

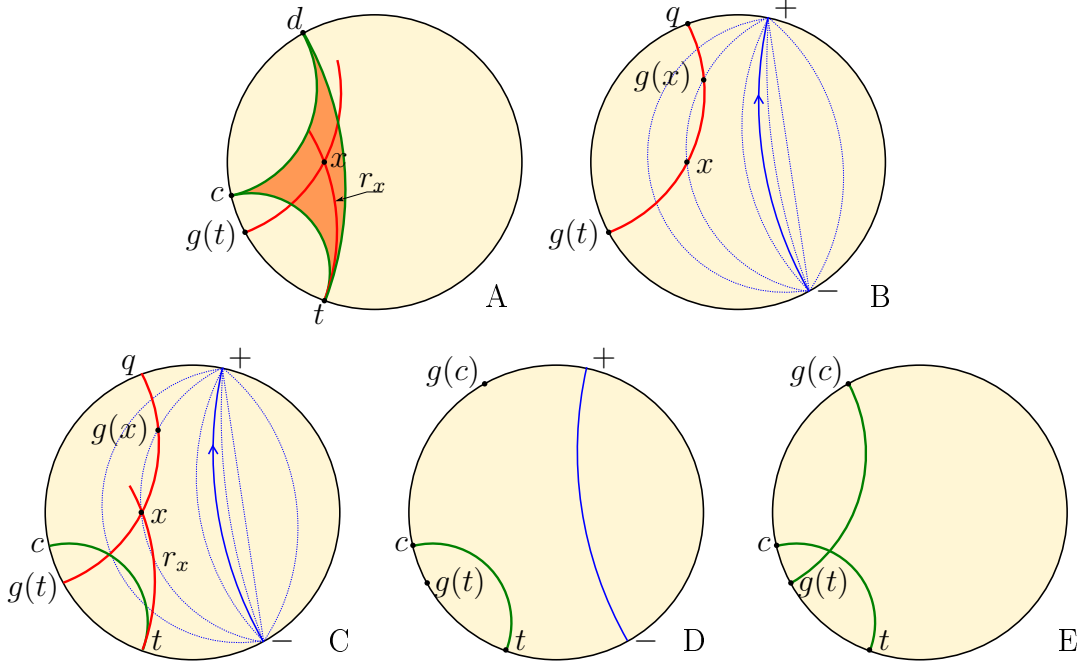


Figure 6: A, Le relèvement de $\tau_\kappa(T)$ identifié à $T = [tab]$ avec $\{c, d\} = \{a, b\}$. B, Cas où g est hyperbolique avec les points répulsif $(-)$. et attractif $(+)$ de g .

nécessairement $g(t)q$ (cf. Fig 6.C). Dans le cas contraire par convexité des géodésiques T serait entièrement du même côté de $g(t)q$ contredisant le fait qu'elle coupe r_x . L'image $g(c)$ étant entre c et le point attractif dans le sens direct (cf. Fig 6.D) on conclut que $t, g(t), c, g(c)$ apparaissent dans cet ordre le long de $\partial\mathbb{D}$. On en conclut que tc intersecte $g(tc)$ ce qui contredit la simplicité de l'arc $\tau_\kappa(tc)$. Si g est parabolique un raisonnement analogue (où les points attractifs et répulsifs sont remplacés par l'unique point fixe de g) permet de conclure. Voir Fig. 7 \square

Lemme 9 Soient κ, ξ, x, y comme dans la preuve de la proposition 7. Les arcs images $\tau_\kappa(r_x)$ et $\tau_\xi(r_y)$ sont simples d'intérieurs disjoints sur \mathcal{S} .

PREUVE. Soit p un relèvement de $\tau_\kappa(x) = \tau_\xi(y)$ pour π (cf. lemme précédent) et soient r, r' les relèvements issus de p de respectivement $\tau_\kappa(r_x)$ et $\tau_\xi(r_y)$. Sur la Fig. 8.A sont représentés dans le modèle de Klein les relevés r, r' et les triangles idéaux correspondants. Il y a deux configurations possibles : ou bien (i) chaque triangle idéal a un sommet, respectivement c, c' , tel que t', c, c', t apparaissent dans cet ordre (direct ou indirect) le long du cercle à

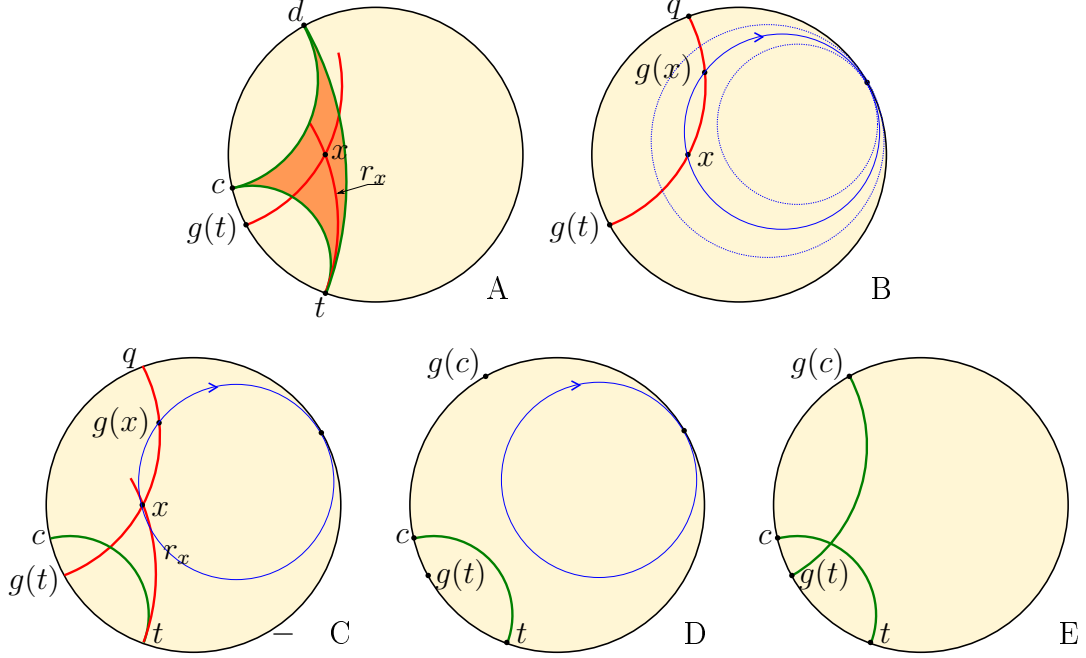


Figure 7: A, Le relèvement de $\tau_\kappa(T)$ identifié à $T = [tab]$ avec $\{c, d\} = \{a, b\}$. B, Cas où g est parabolique avec le point fixe de g .

l'infini (cf. Fig. 8.A), ou bien (ii) le sommet t' d'un triangle idéal se confond avec une extrémité c de l'autre triangle idéal (cf. Fig. 8.B). Dans le cas (i) les géodésiques tc et $t'c'$ s'intersectent en un point q et on pose $\gamma = tq \cdot qt'$. Dans le cas (ii) on pose $\gamma = tc$. Supposons par l'absurde que les intérieurs des arcs $\tau_\kappa(r_x)$ et $\tau_\xi(r_y)$ s'intersectent. Alors il existe un automorphisme g de π tel que $g(r)$ intersecte r' . Que g soit hyperbolique ou parabolique, une simple analyse montre que $g(t'), t', g(t), t$ apparaissent dans cet ordre le long du cercle à l'infini (il peut être avantageux de travailler dans le demi-plan de Poincaré en notant qu'une transformation hyperbolique ou parabolique est conjuguée respectivement d'une homothétie ou d'une translation horizontale). Il suit que γ intersecte $g(\gamma)$ et donc $d \cap g(d') \neq \emptyset$ pour certains $d, d' \in \{tc, t'c'\}$. Par conséquent, dans le cas (i) ou bien $\pi(tc)$ et $\pi(t'c')$ s'intersectent au moins deux fois (cf. Fig. 8.C) ce qui contredit que les arcs de \mathcal{A} s'intersectent au plus une fois, ou bien $\pi(tc)$ ou $\pi(t'c')$ s'autointersecte (cf. Fig. 8.D), ce qui contredit la simplicité des arcs de \mathcal{A} . Dans le cas (ii) on conclut que $\pi(tc)$ s'autointersecte (cf. Fig. 8.E), aboutissant à nouveau à une contradiction. \square

Une preuve en tout point analogue montre que

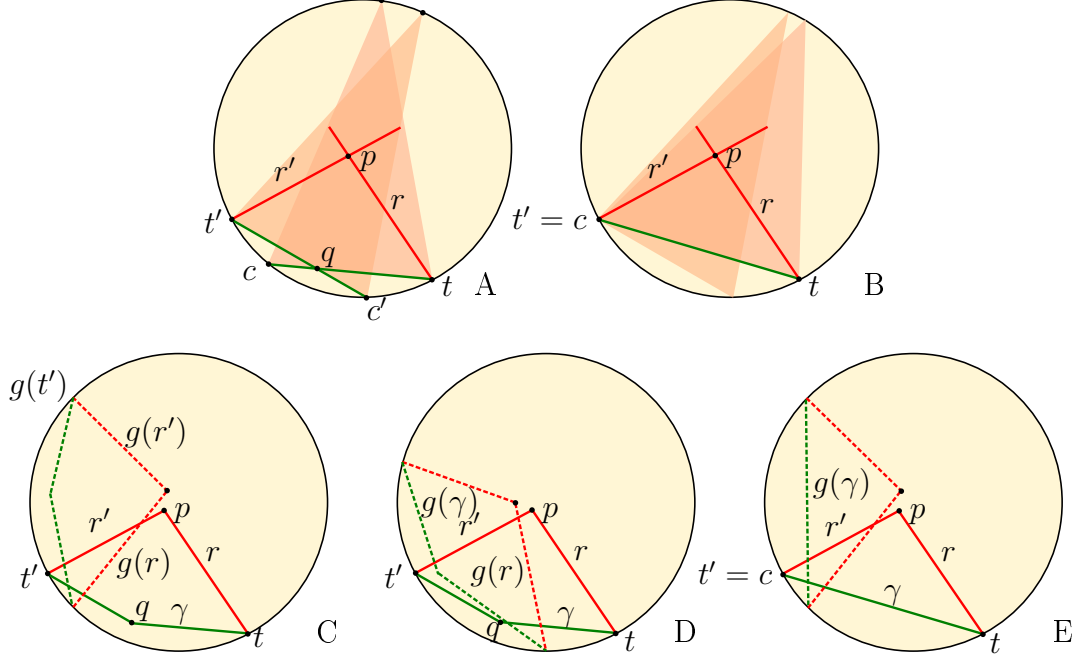


Figure 8: A, Le relèvement de $\tau_\kappa(T)$ et de $\tau_\xi(T)$ dans le modèle de Klein.

Lemme 10 *Si les arcs de \mathcal{A} s'intersectent au plus $k \geq 1$ fois et si κ, ξ, x, y comme dans la proposition 7 alors les arcs images $\tau_\kappa(r_x)$ et $\tau_\xi(r_y)$ sont simples et leurs intérieurs se coupent au plus $k - 1$ fois.*

3 Nombre maximal de lacets s'intersectant au plus une fois

Théorème 11 *Le cardinal maximal d'un 1-système de lacets sur \mathcal{S} est*

$$g(4c(c+1) + 1) + c - 1$$

où $c = |\chi(\mathcal{S})|$ et $g = g(\mathcal{S})$.

PREUVE. Soit \mathcal{L} un 1-système maximal de lacets sur \mathcal{S} . On raisonne par récurrence sur le genre g de \mathcal{S} . Si $g = 0$ alors tous les lacets sont séparateurs. Ils sont donc deux à deux disjoints. Chaque composante du complémentaire est de caractéristique strictement négative (ce n'est ni une sphère ni un disque ni un anneau). Il suit que le graphe d'adjacence des composantes du complémentaire a au plus $|\chi(\mathcal{S})|$ sommets et donc au plus

$|\chi(\mathcal{S})| - 1$ arêtes, i.e. $|\mathcal{L}| \leq |\chi(\mathcal{S})| - 1$. Si $g > 0$ et que tous les lacets de \mathcal{L} sont séparateurs le raisonnement précédent montre que $|\mathcal{L}| \leq |\chi(\mathcal{S})| - 1$. Sinon, on considère un lacet ℓ non séparateur. Soit $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$ le sous-ensemble des lacets qui intersectent ℓ et \mathcal{L}_d son complémentaire dans $\mathcal{L} \setminus \{\ell\}$. En coupant \mathcal{S} par ℓ on obtient une surface de même caractéristique et de genre $g - 1$ et les lacets de \mathcal{L}_i deviennent des arcs essentiels s'intersectant au plus une fois deux à deux. Deux tels arcs sont homotopes (relativement au bord) si les lacets correspondants diffèrent d'un twist de Dehn relatif à ℓ . Chaque arc est donc homotope à au plus un autre arc (un twist de deux tours ou plus implique deux intersections ou plus entre les lacets). Par le théorème 6 on a donc

$$|\mathcal{L}_i| \leq 4c(c + 1)$$

Par ailleurs, par récurrence sur g :

$$|\mathcal{L}_d| \leq (g - 1)(4c(c + 1) + 1) + c - 1$$

D'où

$$|\mathcal{L}| = |\mathcal{L}_i| + |\mathcal{L}_d| + 1 \leq 4c(c + 1) + (g - 1)(4c(c + 1) + 1) + c - 1 + 1 = g(4c(c + 1) + 1) + c - 1$$

□

4 Nombre maximal de courbes s'intersectant au plus k fois

Théorème 12 *Le cardinal maximal d'un k -système d'arcs sur \mathcal{S} est un $\Theta(|\chi(\mathcal{S})|^{k+1})$.*

PREUVE. La borne est atteinte. Pour le voir on part d'un anneau et on effectue $\frac{|\chi|}{k+1}$ perforations sur $k + 1$ cercles concentriques. Voir Fig. 9. On obtient une sphère perforée $|\chi| + 2$ fois de caractéristique χ . En coupant cette surface \mathcal{S} par un rayon α on a une bande et on considère $(\frac{|\chi|}{k+1} + 1)^{k+1}$ arcs joignant le haut au bas de la bande et passant sur chaque ligne de perforations dans l'un des $\frac{|\chi|}{k+1} + 1$ intervalles déterminés par les perforations et par α . Ces arcs correspondent à des arcs essentiels sur le \mathcal{S} qui se coupent au plus k fois deux à deux. Ils sont deux à deux non-homotopes sauf pour les deux arcs extrêmes qui sont homotopes à α . On a ainsi une famille sur \mathcal{S} de cardinal $(\frac{|\chi|}{k+1} + 1)^{k+1} - 1$.

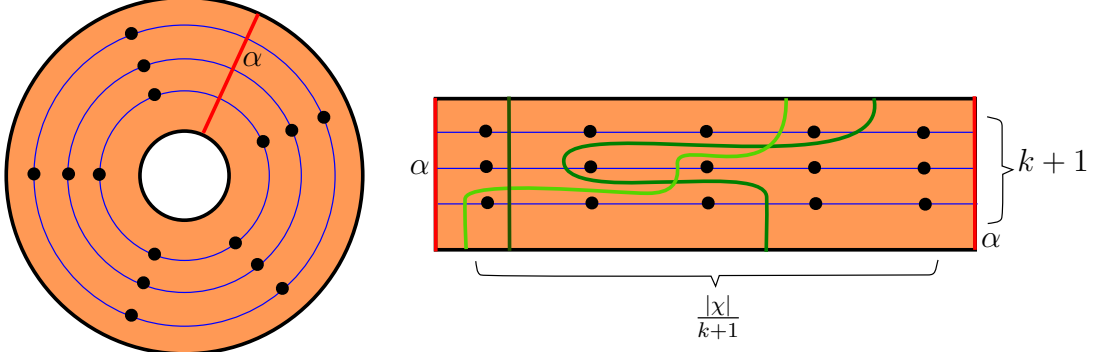


Figure 9: Construction d'une famille de $\Omega(|\chi|^{k+1})$ arcs essentiels s'intersectant deux à deux au plus k fois et non-homotopes deux à deux.

Pour la borne sup on raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 0$ c'est le lemme 4. Pour $k = 1$ c'est le Théorème 6. On suppose que pour un certain $k \geq 1$ tout k -système d'arcs sur toute surface \mathcal{M} contient au plus $C_k |\chi(\mathcal{M})|^{k+1}$ arcs. On considère un $(k+1)$ -système maximale d'arcs, \mathcal{A} , sur \mathcal{S} . Ces arcs déterminent $2\mathcal{A}$ coins. J'affirme que les triangles singuliers correspondants recouvrent chaque point $s \in \mathcal{S}$ au plus $C_k(|\chi| + 1)^{k+1}$ fois. En effet, en considérant les rayons associés à $\tau^{-1}(s)$ (cf. Proposition 7) on obtient par le lemme 10 un k -système d'arcs sur $\mathcal{S} - s$. Par hypothèse de récurrence ce système contient au plus $C_k |\chi(\mathcal{S} - s)|^{k+1}$ arcs comme affirmé. L'aire $2\mathcal{A}\pi$ du domaine de τ est donc majorée par

$$2\pi |\chi| C_k (|\chi| + 1)^{k+1} = 2\pi C_{k+1} |\chi|^{k+2}$$

ce qui permet de conclure. \square

Corollaire 13 *Le cardinal maximal de tout k -système de lacets sur une surface croît au plus comme un polynôme de degré $k^2 + k + 1$ en la caractéristique de la surface.*

PREUVE. Soit \mathcal{L} un k -système maximal sur \mathcal{S} . Soit $\ell \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$ le sous-ensemble des lacets qui intersectent ℓ et \mathcal{L}_d son complémentaire dans $\mathcal{L} \setminus \{\ell\}$. En coupant \mathcal{S} par ℓ on obtient une surface de même caractéristique possiblement déconnectée en deux composantes de caractéristiques $\chi_1 + \chi_2 = \chi$. Chaque lacet de \mathcal{L}_i est coupé en au plus k arcs essentiels. Ces arcs se coupant au plus k fois deux à deux, le nombre de leurs classes d'homotopie est majoré par $C_k |\chi|^{k+1}$ d'après le théorème précédent. Chaque lacet de \mathcal{L}_i correspond à une liste d'au plus k classes d'arcs modulo $k' \leq k$ twists de

Dehn relativement à ℓ pour chaque jonction d'arcs. On a donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_i| &\leq k(C_k |\chi_1|^{k+1})^k f(k) + k(C_k |\chi_2|^{k+1})^k f(k) \\ &\leq C'_k (|\chi_1|^{k(k+1)} + |\chi_2|^{k(k+1)}) \leq C'_k |\chi|^{k(k+1)} \end{aligned}$$

Pour majorer \mathcal{L}_d on coupe par un lacet de \mathcal{L}_d et on itère le procédé. Les lacets de coupes forment un 0-système d'au plus $3|\chi|/2$ lacets d'après le lemme 3. On a donc finalement

$$|\mathcal{L}| \leq (C'_k |\chi|^{k(k+1)} + 1) 3|\chi|/2 \leq C''_k |\chi|^{k(k+1)+1}$$

□

References

- [dGS97] Maurits de Graaf and Alexander Schrijver. Making curves minimally crossing by Reidemeister moves. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1):134–156, 1997.
- [Eps66] David B. A. Epstein. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Mathematica*, 115:83–107, 1966.
- [FHS82] M. Freedman, J. Hass, and P. Scott. Closed geodesics on surfaces. *Bull. London Math. Soc.*, 14:385–391, 1982.
- [HS85] Joel Hass and Peter Scott. Intersections of curves on surfaces. *Israel Journal of Mathematics*, 51(1-2):90–120, 1985.
- [JMM96] Martin Juvan, Aleksander Malnič, and Bojan Mohar. Systems of curves on surfaces. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 68:7–22, 1996.
- [MRT14] Justin Malestein, Igor Rivin, and Louis Theran. Topological designs. *Geometriae Dedicata*, 168(1):221–233, 2014.
- [Prz14] Piotr Przytycki. Arcs intersecting at most once. arXiv preprint <http://arxiv.org/abs/1402.1570>, 2014.