

Chapitre 5

Homologie et approximation

Soit X un sous-espace fermé d'un espace métrique (M, d) (On pourra prendre $M = \mathbb{R}^n$). Connaissant une approximation Y de X on souhaite extrapoler la topologie de X . Robins [Rob99] a montré comment déduire en pratique l'homologie de X à partir de voisinages tubulaires de Y . Par définition l' ϵ -voisinage tubulaire de Y est

$$Y^\epsilon = \{x \in M : d(x, Y) \leq \epsilon\}$$

Le principe développé par Robins est le suivant. Si Y est suffisamment proche de X pour la distance de Hausdorff alors un petit voisinage tubulaire de Y se trouve emboîtés entre deux petits voisinages tubulaires de X et réciproquement. Pour peu que X soit suffisamment régulier, les petits voisinages tubulaires de X ont la même homologie et un simple calcul algébrique montre que cette homologie peut s'exprimer en fonction des homologies des voisinages tubulaires de Y . Notons que des arguments et conclusions similaires ont été obtenus par Cohen-Steiner et al. [CSEH07] et Chazal et Lieutier [CL05]. Ce dernier travail, spécifique aux sous-espaces de $M = \mathbb{R}^n$, montre également comment déduire le groupe fondamental de (petits voisinages tubulaires) de X à partir de voisinages tubulaires de Y .

Dans la suite on note $d_X : y \in M \mapsto d(y, X) = \inf_{x \in X} d(y, x)$ la fonction distance au sous-espace X et $X^\epsilon = d_X^{-1}([0, \epsilon])$ le ϵ -voisinage de X .

Définition 5.0.5 *Un réel positif a est dit valeur régulière homologique de d_X s'il existe ϵ positif tel que l'inclusion $j : X^{a-\epsilon} \hookrightarrow X^{a+\epsilon}$ induit un isomorphisme en homologie, i.e. $j_* : H_k(X^{a-\epsilon}) \rightarrow H_k(X^{a+\epsilon})$ est un isomorphisme pour tout k .*

Dans le cas contraire a est dit valeur critique homologique.

On définit $hfs(X)$ (homological feature size) comme l'infimum des valeurs critiques homologiques non-nulles de d_X .

On note d_H la distance de Hausdorff :

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} d_Y(x), \sup_{y \in Y} d_X(y)\right\}$$

Exercice 5.0.6 *Montrer que*

$$d_H(X, Y) = \inf\{\epsilon \geq 0 : Y \subset X^\epsilon \text{ et } X \subset Y^\epsilon\}$$

Lemme 5.0.7 *Pour tout $\epsilon \geq 0$, on a $X^\epsilon \subset Y^{\epsilon+d_H(X,Y)}$.*

Preuve : Soit $z \in X^\epsilon$, alors

$$\forall x \in X : d(z, Y) \leq d(z, x) + d(x, Y) \leq d(z, x) + d_H(X, Y)$$

On en déduit $d(z, Y) \leq \epsilon + d_H(X, Y)$ par passage à l'infimum du membre de droite. D'où $z \in Y^{\epsilon+d_H(X,Y)}$. \square

remarquons que les rôles de X et Y peuvent être interchangés.

On peut désormais énoncé le résultat principal (appelé théorème d'inférence homologique dans [CSEH07])

Théorème 5.0.8 *Soit X et Y deux sous-espaces d'un espace métrique (M, d) tels que $d_H(X, Y) < hfs(X)/4$.*

Alors, pour tous nombres positifs ϵ, δ tels que $d_H(X, Y) + \epsilon \leq \delta < hfs(X)/4$, l'homologie de X^ϵ (en toutes dimensions) est isomorphe à l'image du morphisme induit en homologie par l'inclusion $Y^\delta \subset Y^{3\delta}$.

La proposition mentionne le voisinage tubulaire X^ϵ et non X lui-même. Pour de nombreux espaces (sous-variétés compactes et lisses de \mathbb{R}^n , complexes affines finis plongés dans \mathbb{R}^n, \dots) X^ϵ se rétracte par déformation sur X . Par suite X^ϵ et X ont la même homologie (et même type d'homotopie). Chazal et Lieutier [CL05] donnent cependant un exemple d'un sous-espace compacte X du plan avec $hfs(X) > 0$ pour lequel X et X^ϵ n'ont pas la même homologie : l'espace X , parfois appelé la sinusoïde fermée du topologue, est obtenu en recollant le graphe de la fonction $\sin \frac{1}{x} :]0, \frac{2}{3\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ avec la courbe polygonale joignant les points $(0, 1), (0, -2), (\frac{2}{3\pi}, -2)$ et $(\frac{2}{3\pi}, -1)$. Alors X^ϵ a le type d'homotopie d'un cercle (épaissi) alors que X est contractile. Sur ce sujet on pourra également consulter la notion d'espace ANR (Absolute Neighborhood Retract) (cf. [GH81]).

La preuve du théorème repose sur un petit lemme préparatoire. La démonstration facile est laissée au lecteur.

Lemme 5.0.9 *Soit une chaîne de morphismes*

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$$

telle que $b \circ a$ et $d \circ c$ sont des isomorphismes. Alors A est isomorphe à l'image de $c \circ b$.

Preuve du théorème : Par hypothèse sur ϵ et δ et compte tenu du lemme 5.0.7, on a la suite d'inclusions

$$X^\epsilon \subset Y^\delta \subset X^{2\delta} \subset Y^{3\delta} \subset X^{4\delta}$$

Puisque $4\delta < hfs(X)$, les inclusions $X^\epsilon \subset X^{2\delta} \subset X^{4\delta}$ induisent des isomorphismes en homologie et on conclut avec le lemme précédent après passage aux morphismes induits en homologie. \square