Chapitre 1

Homologie des graphes et des surfaces

1.1 Homologie des graphes

Définition 1.1.1 *Un* graphe *est un quadruplet $G = (S, A, o, \iota)$, où S et A sont des ensembles (respectivement de sommets et d'arcs (= arêtes orientées)), $o : A \mapsto S$ une application qui associe à tout arc son* origine *et $\iota : A \mapsto A$ une involution sans point fixe qui associe à tout arc son arc opposé (ou inverse).*

Dans la pratique on note $e^{-1} = \iota(e)$ l'arc inverse de l'arc e. Le sommet $o(e^{-1})$ est la *destination* de l'arc e et une *extrémité* de e est soit son origine soit sa destination. Une *boucle* est un arc dont les extrémités sont confondues. Une *arête* (non-orientée) est une paire de la forme $\{e, e^{-1}\}$. Puisque ι est une involution sans point fixe on peut écrire $A = A^+ \cup (A \setminus A^+)$ où ι réalise une bijection entre A^+ et son complémentaire. Une arête s'identifie donc à un élément de A^+. Ceci permet de considérer les arêtes comme des arcs, c'est à dire que **les arêtes ont une orientation par défaut**. Nous utiliserons cette convention dans toute la suite de ce document.

La *subdivision élémentaire* d'une arête d'un graphe consiste à couper cette arête en deux en ajoutant un sommet au milieu de l'arête. Une *subdivision* d'un graphe est le résultat d'une séquence de subdivisions élémentaires.

Deux graphes sont dits *combinatoirement équivalents* s'ils ont des subdivisions isomorphes.

La *caractéristique (d'Euler)* d'un graphe G est la quantité $\chi(G) = |S| - |A^+|$.

Lemme 1.1.2 *Deux graphes combinatoirement équivalents ont même caractéristique.*

Preuve : Vérifier qu'une subdivision d'arête ne modifie pas la caractéristique. $\square$

Une *contraction d'arête* dans un graphe consiste à supprimer l'arête puis à identifier ses extrémités dans le graphe.

On dit que deux graphes ont le même *type d'homotopie* si on peut passer de l'un à l'autre par une succession de contraction d'arêtes non-boucles (d'extrémités distinctes) et d'opérations inverses. On vérifie que la contraction d'arêtes non-boucles préserve la caractéristique. Deux graphes ayant le même type d'homotopie ont donc la même caractéristique.

La notion d'homologie pour les graphes apparaît dans un article de Kirchhoff de 1847 [1, p. 133] traitant des circuits électriques.

La Loi des tensions exprime que dans tout cycle (chemin fermé) d'un circuit, on a la relation

$$\sum_j r_j I_j = \sum_j E_j$$

la somme portant sur les arcs du cycle orienté considéré ; les r_j désignent les résistances, les I_j les intensités des courants et les E_j les forces électromotrices. Connaissant les résistances et les forces électromotrices, le problème de Kirchhoff est de trouver le nombre minimal d'équations, et donc de cycles, permettant de déterminer les courants. La réponse est donnée par le nombre *cyclomatique* du graphe sous-jacent au circuit électrique. C'est encore la dimension de l'*espace des cycles* ou *premier groupe d'homologie* de ce graphe.

1.1.1 H_1

On considère un graphe $G = (S, A, o, \iota)$.

Définition 1.1.3 *L'*espace des 0-chaînes *(resp. des 1-chaînes) du graphe G est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles à coefficients réelles de sommets (resp. d'arêtes) de G. Il possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel*[1] *de dimension $|S|$ (resp. $|A^+|$). On note C_0 (resp. C_1) l'espace des 0(resp.1)-chaînes. Le* support *d'une chaîne c est l'ensemble des sommets (arêtes) de coefficients non-nuls. On définit un* opérateur bord $\partial : C_1 \to C_0$ *par extension linéaire de sa restriction aux arêtes :*

$$\begin{array}{rcl} \partial : A^+ & \to & C_0 \\ a & \mapsto & o(a^{-1}) - o(a) \end{array}$$

Définition 1.1.4 *L'*espace des cycles *de G est par définition le noyau de l'opérateur bord ∂. On le note $H_1(G, \mathbb{R})$ ou plus simplement $H_1(G)$. On s'intéresse en général uniquement à la structure de groupe (additif) de $H_1(G)$ et on l'appelle le* premier groupe d'homologie *de G.*

[1] Plus généralement on peut prendre les coefficients des combinaisons linéaires dans un groupe, un anneau, ou un autre corps. Les espaces de chaînes se trouvent alors respectivement munis d'une structure de groupe, de module ou d'espace vectoriel.

Lemme 1.1.5 *Tout cycle est une combinaison de cycles simples.*

Preuve : Soit un cycle $c = \sum_i \alpha_i a_i$. On raisonne par récurrence sur $|support(c)|$. Ou bien $support(c)$ contient une arête boucle a_k. Alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $c - \alpha_k a_k$. Sinon, soit $\alpha_k \neq 0$ et $\partial a_k = s - s'$. Puisque c est un cycle, il existe $i \neq k$ tel que $a_i \in support(c)$ et $\partial a_i = \epsilon(s' - s'')$ où $\epsilon = \pm 1$. Si $s'' = s$ on a un cycle simple $c' = a_k + \epsilon a_i$ dont le support est inclus dans $support(c)$. Sinon on continue jusqu'à retomber sur un sommet $s, s', s'', \ldots$ déjà rencontré. On en déduit un cycle simple c' de support inclus dans celui de c. Finalement, considérant une arête $e_j \in support(c')$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $c - \alpha_j c'$. □

Lemme 1.1.6 *Un arbre est acyclique, i.e. son espace des cycles est trivial.*

Preuve : D'après le lemme précédent il suffit de remarquer qu'un arbre n'a pas de cycle simple (par définition). □

On suppose G connexe. Soit T un arbre couvrant de G. Rappelons qu'une *corde* de T est une arête de G qui n'est pas dans T. On associe à chaque corde e (avec son orientation par défaut) de T le cycle c_e obtenu en complétant e avec l'unique chemin simple dans T joignant la destination à l'origine de e. Si e est un arc de G tel que e^{-1} est une corde de T, alors par convention c_e désigne le cycle $-c_{e^{-1}}$.

Proposition 1.1.7 *Les cycles c_e, lorsque e parcours l'ensemble des cordes de T, forment une base de $H_1(G)$.*

Preuve : Ces cycles sont indépendants car chaque corde est dans le support d'un unique c_e. D'après le lemme 1.1.5, il suffit de vérifier que les c_e engendrent les cycles simples. Soit c un cycle simple. On écrit $c = c_1.e_1.c_2.e_2...$ où $e_1, e_2, \ldots$ sont les cordes de T (ou leurs inverses) apparaissant dans c et où $c_1, c_2, \ldots$ sont des chemins dans T. Le cycle $c - \sum_i c_{e_i}$ a son support inclus dans T, et est donc nul par le lemme 1.1.6. D'où $c = \sum_i c_{e_i}$. □

Définition 1.1.8 *La dimension de $H_1(G)$ est appelée* nombre de cycles *ou* nombre cyclomatique *ou encore* premier nombre de Betti. *On la note $\beta_1(G)$.*

Par la proposition 1.1.7, si G est connexe, le nombre cyclomatique est le nombre de cordes d'un arbre couvrant. Comme ce dernier a $|S| - 1$ arêtes, on a $\beta_1(G) = |A^+| - |S| + 1 = 1 - \chi(G)$. Notons que $\beta_1(G)$ est aussi le nombre maximal d'arêtes qu'on peut ôter à G sans le déconnecter.

Si G n'est pas connexe, il suffit de travailler indépendamment sur chacune de ses composantes connexes car l'homologie de G est la somme directe des homologies de chacune de ses composantes. On peut d'ailleurs affiner ce découpage pour travailler sur chaque “composante” 2-connexe (un bloc au sens de la théorie des graphes).

1.1.2 H_0

On définit également le groupe d'homologie de dimension 0.

$$H_0(G) = C_0/Im\partial$$

Proposition 1.1.9
$$H_0(G) \simeq \mathbb{R}^{\beta_0(G)}$$
où $\beta_0(G)$ est le nombre de composantes connexes de G.

Preuve : Soit $S' \subset S$ un sous-ensemble de sommets de G comportant exactement un sommet par composante de G. Tout sommet x de S est homologue à un tel sommet ; il suffit de considérer le bord d'un chemin reliant x au sommet de S' dans le composante de x. Par ailleurs, on vérifie que la somme des coefficients des sommets dans le bord d'une 1-chaîne est nulle sur chaque composante du graphe. Par conséquent, les sommets de S' engendrent un sous-espace de C_0 en somme directe avec $Im\partial$. Ainsi, les classes d'homologie des sommets de S' forment une base de $H_0(G)$. □

1.2 Classification des surfaces

1.2.1 Triangulation et caractéristique

Définition 1.2.1 *Un* 2-complexe simplicial affine *de $\mathbb{R}^n$ est une collection $\mathcal{C}$ de sommets, arêtes, triangles de $\mathbb{R}^n$ telle que*
- *toute extrémité d'une arête de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$ et toute arête d'un triangle de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$,*
- *l'intersection de deux éléments distincts de $\mathcal{C}$ est soit vide soit une face (sommet ou arête) commune de ces éléments.*

La réunion de tous les éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$ est appelée espace total.

Définition 1.2.2 *Une* surface triangulée *est un 2-complexe simplicial affine pur (tout sommet ou arête est incident à un triangle) tel que*
- *toute arête est incidente à un ou deux triangles,*
- *le graphe d'adjacence des triangles incidents à un sommet est soit un cycle soit une chaîne.*

Les arêtes incidentes à deux triangles sont dites internes. *Les autres constituent (avec leurs sommets) le* bord *de la surface.*

Le *1-squelette* ou *graphe* d'un surface triangulée $\mathcal{M}$ est le graphe constitué des sommets et des arêtes de $\mathcal{M}$.

Lemme 1.2.3 *Les arêtes du bord d'une surface forment une union disjointe de cycles dans son 1-squelette.*

Preuve : Il suffit de vérifier que chaque sommet du sous-graphe formé par les arêtes du bord est de degré deux. Mais ceci résulte de la définition d'une surface triangulée. □

Définition 1.2.4 *Le* nombre de bords *d'une surface triangulée est le nombre de composantes connexes, donc de cycles, de son bord.*

Une triangulation d'une variété de dimension 2 est un homéomorphisme entre une surface triangulée et cette variété. Radò a montré en 1925 que toute variété compacte de dimension 2 admet une triangulation. On confondra une triangulation et la surface triangulée sous-jacente.

Définition 1.2.5 *La caractéristique (d'Euler) d'une surface $\mathcal{M}$ est la somme alternée de son nombre de sommets $S(\mathcal{M})$, d'arêtes $A(\mathcal{M})$, et de triangles $F(\mathcal{M})$:*

$$\chi(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + F(\mathcal{M})$$

Lemme 1.2.6 *La caractéristique d'une triangulation d'un disque vaut 1.*

Preuve : Voir la formule d'Euler dans l'étude des graphes planaires. □

Définition 1.2.7 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée. Une* subdivision *de $\mathcal{M}$ est une surface triangulée $\mathcal{M}'$ ayant même espace total que $\mathcal{M}$ et telle que tout simplexe (un sommet, une arête ou une face) de $\mathcal{M}'$ est contenu dans un simplexe de $\mathcal{M}$.*

En particulier, les simplexes de $\mathcal{M}'$ contenus dans un simplexe σ de $\mathcal{M}$ forment une triangulation de σ.

Définition 1.2.8 *Deux surfaces triangulées sont dites* combinatoirement équivalentes *si elles admettent des subdivisions isomorphes.*

Clairement, deux surfaces combinatoirement équivalentes sont homéomorphes. Le problème inverse, savoir si deux surfaces triangulées homéomorphes sont combinatoirement équivalentes, porte le nom de *Hauptvermutung*. Le Hauptvermutung est vrai pour les surfaces triangulées. Il est également vrai pour les variétés de dimension 3 comme démontré par Moise [19] dans les années 1950.

Proposition 1.2.9 *Deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même caractéristique.*

Preuve : Une première preuve consiste à montrer que toute subdivision s'obtient comme une succession de subdivisions élémentaires, puis à vérifier que les subdivisions élémentaires préservent la caractéristique. On s'en tient ici à la définition générale de subdivision.

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée sans bord et $\mathcal{M}'$ une subdivision de $\mathcal{M}$. D'après le lemme 1.2.6, la caractéristique χ_t de la restriction de $\mathcal{M}'$ à tout triangle t de $\mathcal{M}$ vaut 1. En sommant χ_t sur tous les triangles de $\mathcal{M}$ on compte deux fois chaque arête ou sommet de $\mathcal{M}'$ inclus dans l'intérieur d'une arête de $\mathcal{M}$ et on compte un nombre de fois égale à son degré chaque sommet de $\mathcal{M}'$ qui est un sommet de $\mathcal{M}$. On a ainsi :

$$\chi(\mathcal{M}') = \sum_{t\in\mathcal{M}} \chi_t - \chi(G') - \sum_{s\in\mathcal{M}} (d(s) - 2).$$

où G' est la restriction de $\mathcal{M}'$ au graphe G de $\mathcal{M}$. Comme G' est une subdivision de G on a $\chi(G') = \chi(G)$. On a de plus par double énumération des incidences sommet/arête d'un graphe : $\sum_{s\in\mathcal{M}} d(s) = 2A(\mathcal{M})$. Et finalement

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{M}') &= \sum_{t\in\mathcal{M}} 1 - (S(G) - A(G)) - (2A(\mathcal{M}) - 2S(\mathcal{M})) \\ &= F(\mathcal{M}) - A(\mathcal{M}) + S(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M})\end{aligned}$$

□

1.2.2 Orientabilité et classification

Une *orientation* d'un triangle de $\mathcal{M}$ de sommets u, v, w est le choix d'une des deux permutations cycliques (u, v, w) ou (u, w, v) (ce sont les seules !) sur ses sommets. Une orientation d'un triangle induit une orientation de ses arêtes allant d'un sommet vers son itéré dans la permutation choisie. Deux triangles adjacents ont des orientations *compatibles* s'ils induisent des orientations opposées sur leur arête commune.

Une surface triangulée est *orientable* si on peut orienter chacun de ses triangles de sorte que deux triangles adjacents quelconques aient des orientations compatibles. Il n'y a que deux manières possibles d'orienter les triangles d'une surface orientable connexe pour que cette propriété soit vérifiée. On dit qu'une surface connexe (orientable) est *orientée* si on a choisi une de ces deux orientations possibles.

Proposition 1.2.10 *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont même orientabilité.*

Preuve : Il suffit de le vérifier pour une surface $\mathcal{M}'$ subdivision d'une surface $\mathcal{M}$. Supposons $\mathcal{M}'$ orientable et orientée. On oriente chaque triangle τ de $\mathcal{M}$ de la manière suivante : On considère les triangles orientés de $\mathcal{M}'$ contenus dans τ. Ceux-ci (avec leurs arêtes et sommets) forment une triangulation orientée $calT$ de τ. Chaque arête de $calT$ située sur le bord de τ possède une orientation induite par l'unique triangle orienté de $calT$ le contenant. Il est clair que ces orientations sont cohérentes sur tout le bord de τ (le vérifier !). On en déduit une orientation de τ. La compatibilité de ces orientation sur les triangles de $\mathcal{M}$ résulte immédiatement de celle sur $\mathcal{M}'$.

Supposons maintenant $\mathcal{M}$ orientable et orientée. Soit σ un triangle de $\mathcal{M}'$. Ce triangle est contenu dans un unique triangle τ de $\mathcal{M}$. Soit P le plan affine engendré par τ. L'orientation de τ induit un orientation de P qui induit à nouveau une orientation de σ. Reste à voir que les orientations des triangles de $\mathcal{M}'$ ainsi construites sont compatibles. Pour cela il suffit de vérifier que pour toute arête a de $\mathcal{M}'$ incidente à deux triangles, les orientations des triangles incidents sont compatibles. Si a est intérieure à un triangle τ de $\mathcal{M}$, il en est de même des deux triangles de $\mathcal{M}'$ incidents à a. Il est facile de vérifier que ces deux triangles se situent de part et d'autre de la droite support de a dans le plan de τ. On en déduit la compatibilité des orientations de ces triangles. Si a est intérieure à une arête b de $\mathcal{M}$, on peut raisonner de la même manière après avoir 'déplié' les deux triangles de $\mathcal{M}$ incidents à b. □

Lemme 1.2.11 *Toute triangulation d'un disque est orientable.*

Preuve : Ceci résulte du lemme précédent et du Hauptvermutung puisqu'un triangle est évidemment orientable et constitue une triangulation d'un disque. Une preuve directe sans le Hauptvermutung est laissée à titre d'exercice. □

Exercice 1.2.12 *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation d'un disque. Montrer par récurrence sur son nombre de sommets que $\mathcal{T}$ est une subdivision de la triangulation formée d'un seul triangle. On pourra distinguer le cas où $\mathcal{T}$ contient des sommets intérieurs au disque ou non.*

Cette preuve montre en particulier que $\mathcal{T}$ peut être obtenue à partir du triangle par une succession de subdivisions 'élémentaires'. En déduire que $\mathcal{T}$ est orientable.

On a vu que deux surfaces triangulées combinatoirement équivalentes ont même orientabilité (lemme 1.2.10) et caractéristique (lemme 1.2.9). Clairement elles ont également même nombre de bords. Inversement on montre (Brahana, 1922) que

Théorème 1.2.13 (de classification des surfaces) *Deux surfaces triangulées ayant mêmes caractéristique, orientabilité et nombre de bords sont combinatoirement équivalentes.*

Si $\mathcal{M}$ est une surface orientable dont le bord a b composantes on appelle genre de $\mathcal{M}$ la quantité $g = (2 - b - \chi(\mathcal{M}))/2$. Si $\mathcal{M}$ est une surface non-orientable le genre est défini par $g = 2 - b - \chi(\mathcal{M})$. D'après le théorème de classification et le Hauptvermutung, il existe à homéomorphisme près une unique surface orientable de genre g sans bord. On note $\mathcal{M}_g$ une triangulation de cette surface.

1.3 Homologie des surfaces

1.3.1 H_0

Comme pour les graphes, on pose $H_0(\mathcal{M}) = C_0/Im\partial$. On a de la même façon

Proposition 1.3.1 *Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée connexe, alors $H_0(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$.*

1.3.2 H_1

Soit $\mathcal{M}$ une surface triangulée. On considère les espaces vectorielles suivants :
– l'espace C_0 des combinaisons linéaires formelles de sommets de $\mathcal{M}$,
– l'espace C_1 des combinaisons linéaires formelles d'arêtes de $\mathcal{M}$,
– l'espace C_2 des combinaisons linéaires formelles de triangles de $\mathcal{M}$.
Les éléments de C_i sont appelés des i-chaînes.

Comme pour les graphes, les arêtes sont supposées orientées. Ceci permet de définir un opérateur bord (par extension linéaire)

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 : C_1 & \to & C_0 \\ a & \mapsto & o(a^{-1}) - o(a) \end{array}$$

Une arête a se note également $[o(a), o(a^{-1})]$. On pose par convention d'écriture que $[o(a^{-1}), o(a)] = -[o(a), o(a^{-1})]$ On suppose également que chaque triangle est orienté. On note $[s, t, u]$ un triangle orienté par la permutation (s, t, u). Avec cette notation on a $[s, t, u] = [t, u, s] = [u, s, t]$. On définit alors un opérateur bord ∂_2 (par extension linéaire) :

$$\begin{array}{rcl} \partial_2 : C_2 & \to & C_1 \\ [s, t, u] & \mapsto & [t, u] - [s, u] + [s, t] = [s, t] + [t, u] + [u, s] \end{array}$$

L'espace des 1-cycles est défini comme pour les graphes par $Z_1(\mathcal{M}) = \ker \partial_1$. L'espace des 1-bords est défini par $B_1(\mathcal{M}) = Im\partial_2$. Deux 1-cycles sont dit *homologues* si leur différence est un bord (i.e. borde une 2-chaîne). L'espace des classes d'homologie $H_1(\mathcal{M}) = Z_1(\mathcal{M})/B_1(\mathcal{M})$ est appelé le *premier groupe d'homologie* de $\mathcal{M}$. On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas des orientations choisies pour les arêtes et triangles de $\mathcal{M}$.

Intuitivement deux cycles sont homologues si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue autorisant les fusions et scissions de cycles, ainsi que l'ajout/suppression de cycles séparateurs.

Lemme 1.3.2 *Le premier groupe d'homologie d'une triangulation d'un disque est nul.*

Preuve : Par le lemme 1.1.5, il suffit de montrer que tout cycle simple d'un disque triangulé orienté borde une 2-chaîne. Mais ceci résulte directement du théorème de Jordan qui permet de considérer la 2-chaîne constituée des triangles (orientés suivant l'orientation du disque) intérieurs à un cycle simple. Il est clair que le bord de cette 2-chaîne est, à un signe près, le cycle simple en question. □

Proposition 1.3.3 $H_1(\mathcal{M}_g) \simeq \mathbb{R}^{2g}$

Soit T^* un arbre couvrant du graphe d'adjacence des triangles de $\mathcal{M}_g$. L'ensemble des triangles de $\mathcal{M}_g$ recollés suivant les adjacences de T^* forme donc un disque triangulé D. Chaque arête du bord de D s'identifie à une arête de $\mathcal{M}_g$. Inversement, chaque arête de $\mathcal{M}_g$ apparaît soit une fois comme arête interne à D soit deux fois sur le bord de D. Soit G le sous-graphe de $\mathcal{M}_g$ induit par les arêtes apparaissant sur le bord de D.

Lemme 1.3.4 *Tout cycle de $Z_1(\mathcal{M}_g)$ est homologue à un cycle dont le support est dans G, autrement dit à un cycle de $Z_1(G)$.*

Preuve : Soit $c \in Z_1(\mathcal{M}_g)$ et a une arête du support de c. Si a est interne à D on considère un chemin p_a sur le bord de D joignant $o(a^{-1})$ à $o(a)$. Par le lemme 1.3.2, le cycle $a + p_a$ borde dans D donc dans $\mathcal{M}_g$. On en déduit que c est homologue à

$$c' = c - \sum_{\substack{a \in support(c),\\ a \notin G}} \alpha_a(a + p_a),$$

où α_a est le coefficient de a dans c. On conclut en remarquant que $support(c') \subset G$. $\square$

Preuve de la proposition 1.3.3 : Soit K un arbre couvrant de G. Considérons les classes d'homologie $[c_e]$ des cycles c_e de G associés aux cordes de K. On sait par la proposition 1.1.7 que ces cycles génèrent $Z_1(G)$. Le lemme précédent montre que leurs classes d'homologie génèrent $H_1(\mathcal{M}_g)$. Montrons de plus que les $[c_e]$ constituent une famille libre de $H_1(\mathcal{M}_g)$ et donc une base. Pour cela considérons une combinaison $\sum_e \alpha_e c_e$ homologue à 0, i.e. telle que

$$\sum_e \alpha_e c_e = \partial_2 \sum_i \beta_i t_i$$

Soit a une arête interne à D. Comme aucune arête interne à D n'apparaît dans le membre de gauche de cette égalité on en déduit que, dans le membre de droite, les coefficients β_i et β_j des deux triangles incidents à a sont égaux. Par connexité de T^*, on conclut que tous les coefficients β_i du membre de droite sont égaux à un même coefficient β, d'où

$$\sum_e \alpha_e c_e = \beta \partial_2 \sum_i t_i$$

Or $\partial_2 \sum_i t_i = 0$ car $\mathcal{M}_g$ est orientée et fermée. Il suit que $\sum_e \alpha_e c_e = 0$ dans $Z_1(G)$ et donc que tous les α_e sont nuls par la proposition 1.1.7.

La dimension de $H_1(\mathcal{M}_g)$ est donc égale au nombre de cordes de K dans G. Je note β_1 ce nombre, aussi appelé premier nombre de Betti de $\mathcal{M}_g$. On a

$$\begin{aligned} \beta_1 &= A(G) - A(K) = (A - A(T^*)) - (S - 1) \\ &= A - (F - 1) - (S - 1) = A - F - S + 2 = 2 - \chi(\mathcal{M}_g) = 2g \end{aligned}$$

où S, A et F sont respectivement le nombre de sommets, arêtes et triangles de $\mathcal{M}$. $\square$

Remarque 1.3.5 *Si on découpe $\mathcal{M}_g$ suivant le graphe G introduit ci-dessus on obtient un disque triangulé (et même une arborescence de triangles). Plus généralement on appelle* graphe de coupe *tout sous-graphe du 1-squelette de $\mathcal{M}_g$ qui découpe $\mathcal{M}_g$ en un disque triangulé. Clairement, on peut remplacer le graphe G dans tout ce qui suit la proposition 1.3.3 par n'importe quel graphe de coupe.*

Exercice 1.3.6 *En vous inspirant de la preuve de la proposition 1.3.3, montrer que si $\mathcal{M}_{g,b}$ est une surface orientable de genre g à b bords, alors $H_1(\mathcal{M}_{g,b}) \simeq \mathbb{R}^{2g+b-1}$. On remarquera que le bord de la 2-chaîne définie par la somme de tous les triangles (orientés) de $\mathcal{M}_{g,b}$ est non-nul et égal à la somme des b composantes (orientées) du bord de $\mathcal{M}_{g,b}$. En déduire que les classes d'homologie des g cycles formés par ces composantes sont linéairement liés.*

1.3.3 H_2

On définit $H_2(\mathcal{M})$ comme le sous-espace $\ker \partial_2$ des cycles de C_2.

Proposition 1.3.7 *Si $\mathcal{M}$ est connexe et orientable alors, $H_2(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}$*

Preuve : Supposons $\mathcal{M}$ orientée. Soit c un 2-cycle de $\mathcal{M}$. Les coefficients dans c de deux triangles adjacents dans $\mathcal{M}$ sont nécessairement égaux puisque l'arête commune apparaît avec une orientation opposée dans leur bord respectif. Par connexité du graphe d'adjacence des faces on a que c est de la forme $\alpha \sum_{t \in \mathcal{M}} t$. Comme $\sum_{t \in \mathcal{M}} t$ est effectivement un 2-cycle, on en déduit que $H_2(\mathcal{M})$ est engendré par ce 2-cycle. □

Théorème 1.3.8 *Deux surfaces combinatoirement équivalentes ont des groupes d'homologie isomorphes.*

Preuve pour les surfaces orientables sans bord : D'après ce qui précède les groupes d'homologie ne dépendent que du genre de la surface et deux surfaces de genres différents ont des groupes distincts. On conclut par le théorème de classification. □