

# Chapitre 10

## Graphe des contours d'un polyèdre valué

Soit  $\mathcal{P}$  un polyèdre, c'est à dire l'espace total d'un complexe simplicial fini dans un certain  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction affine par morceaux (i.e. affine par restriction à chaque simplexe de  $\mathcal{P}$ ). On identifie deux points de  $\mathcal{P}$  si on peut les joindre par un chemin dans  $\mathcal{P}$  le long duquel  $f$  est constante. Le *graphe des contours* de  $f$  est par définition l'espace quotient de  $\mathcal{P}$  par cette identification. Chaque point du graphe des contours correspond ainsi à une composante connexe d'un ensemble iso-valeur de  $f$  sur  $\mathcal{P}$ . On appelle *contour* une telle composante.

On cherche à calculer le graphe des contours de manière efficace pour un polyèdre et une fonction donnée. Tarasov et Vyalıi [TV98], puis Carr et al. [CSA03], ont obtenu un algorithme optimal lorsque  $\mathcal{P}$  est simplement connexe. Leur méthode repose en partie sur des liens simples entre graphes et ordres exposés ci-dessous.

### 10.1 Arbres des jonctions et des scissions

Soit  $X$  un ensemble totalement ordonné par une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  injective :  $\forall x, y \in X : x <_f y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ . On appelle les éléments de  $X$  des *sommets*. Soit  $R$  une relation sur  $X$ , subordonnée à  $<_f$ , i.e.

$$x R y \implies x <_f y$$

On note  $G_R$  le graphe orienté de  $R$  que l'on supposera connexe ( $(x, y) \in G_R \Leftrightarrow x R y$ ). J'appelle *R-successeur* (resp. *R-prédécesseur*) de  $x$  tout  $y \in X$  tel que  $x R y$  (resp.  $y R x$ ).

Par la suite on dira qu'un chemin  $p$  de  $G_R$  est *dessous* (resp. *dessus*) un sommet  $y$  si les sommets de  $p$  sont inférieurs (resp. supérieurs) à  $y$  pour l'ordre  $\leq_f$ .

**Remarque 10.1.1** Si  $G$  est un graphe connexe non orienté simple (sans boucle ni arête multiple) sur  $X$ , alors la relation  $R$  définie par  $x R y \Leftrightarrow (\{x, y\} \in G \text{ et } x <_f y)$  est subordonnée à  $<_f$  et  $G_R$  est une orientation de  $G$ .

Soit  $J$  (pour Jonction) la relation, notée aussi  $\leq_J$ , définie par  $x <_J y$  si

$$x <_f y \text{ et } (\exists z_1, \dots, z_p : z_1 = x, z_p = y, \forall i \in [1, p-1] : z_i <_f y \text{ et } z_i R z_{i+1} \text{ ou } z_{i+1} R z_i).$$

Dit autrement,  $x <_J y$  si et seulement s'il existe un chemin  $x \rightsquigarrow y$  dans  $G_R$  au dessous de  $y$ . On vérifie aisément que  $\leq_J$  est un ordre partiel et je note  $\triangleleft_J$  (resp.  $G_J$ ) la relation (resp. le diagramme) de Hasse associée à  $\leq_J$ .

Je définis de même une relation d'ordre  $S$  (pour Scission), notée aussi  $\leq_S$ , par

$$x <_S y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x <_f y \text{ et } (\exists z_1, \dots, z_p : z_1 = x, z_p = y, \forall i \in [2, p] : x <_f z_i \text{ et } z_i R z_{i+1} \text{ ou } z_{i+1} R z_i).$$

Dit autrement,  $x <_S y$  si et seulement s'il existe un chemin  $x \rightsquigarrow y$  dans  $G_R$  au dessus de  $x$ .  $S$  est un ordre et je note  $\triangleleft_S$  (resp.  $G_S$ ) la relation (resp. le diagramme) de Hasse associée à  $\leq_S$ .

**Remarque 10.1.2**  $J$  et  $S$  ne dépendent que de la clôture transitive de  $R$ .

**Définition 10.1.3** On appelle respectivement arbre des jonctions et arbre des scissions de  $G_R$  (relativement à  $f$ ) les diagrammes de Hasse  $G_J$  et  $G_S$ .

**Lemme 10.1.4** Un élément de  $X$  a au plus un  $J$ -successeur et au plus un  $S$ -prédécesseur.

**Preuve (pour  $J$ ) :** Un sommet de  $G_J$  ne peut avoir deux successeurs car  $x \triangleleft_J y$  et  $x \triangleleft_J z$  avec  $f(y) < f(z)$  entraîne  $y <_J z$ , une contradiction.  $\square$

**Corollaire 10.1.5** Si  $G_R$  est connexe, alors  $G_J$  et  $G_S$  sont des arbres.

**Preuve (pour  $J$ ) :** Le sommet  $f$ -minimal de tout cycle simple a au moins deux successeurs, en contradiction avec le lemme précédent. Donc  $G_J$  est acyclique. Par ailleurs  $G_J$  est connexe puisque tout élément est  $J$ -inférieur au sommet de  $f$ -valeur maximale.  $\square$

Pour tout sommet  $x \in X$ , on note  $G_R^-(x)$  (resp.  $G_R^+(x)$ ) le sous-graphe de  $G_R$  induit par les sommets strictement en dessous (resp. strictement au dessus) de  $x$ .

**Proposition 10.1.6** Les  $J$ -prédécesseurs d'un sommet  $x \in X$  sont en bijection avec les composantes connexes de  $G_R^-(x)$  contenant au moins un  $R$ -prédécesseur de  $x$  ; dans chaque telle composante, le sommet maximal est un  $J$ -prédécesseur de  $x$ .

**Preuve :** Soit  $C$  une composantes connexe de  $G_R^-(x)$  contenant au moins un  $R$ -prédécesseur de  $x$ . Soit  $y$  le sommet le plus haut de  $C$ . Clairement,  $y <_J x$ . De plus, tout sommet  $t$  tel que  $y \leq_J t <_J x$  est dans  $C$ . Donc  $y \triangleleft_J x$ .

Inversement, soit  $y$  un  $J$ -prédécesseur de  $x$ . Il existe donc un chemin  $y \rightsquigarrow x$  dans  $G_R$  en dessous de  $x$ , ce qui montre que  $y$  est dans la composante de  $G_R^-(x)$  contenant le  $R$ -prédécesseur de  $x$  dans ce chemin. On considère  $t$ , le sommet le plus haut de cette composante. On a  $y \leq_J t <_J x$ , et donc  $y = t$ .  $\square$

De manière analogue :

**Proposition 10.1.7** *Les  $S$ -successeurs d'un sommet  $x \in X$  sont en bijection avec les composantes connexes de  $G_R^+(x)$  contenant au moins un  $R$ -successeur de  $x$  ; dans chaque telle composante, le sommet minimal est un  $S$ -successeur de  $x$ .*

Les deux propositions précédentes fournissent un algorithme pour construire les arbres des jonctions et des scissions.

**Théorème 10.1.8** *Si  $G_R$  a  $n = |X|$  sommets et  $m$  arêtes, et si les sommets de  $X$  sont triés par ordre  $f$ -monotone, alors les arbres  $G_J$  et  $G_S$  peuvent être construits en temps  $O(m\alpha(n))$ , où  $\alpha$  est l'inverse d'une certaine restriction de la fonction d'Ackerman [CLRS02].*

**Preuve :** Pour construire  $G_J$  on balaye ses sommets dans l'ordre  $f$ -croissant. Au cours du balayage, on maintient les composantes connexes de  $G_R^-(x)$  où  $x$  est le sommet courant de balayage. Pour chaque composante  $c$  on maintient également son sommet le plus haut, noté  $c.h$ . On utilise la structure Union-Find [CLRS02] pour représenter les composantes de  $G_R^-(x)$ . La proposition 10.1.6 montre que l'algorithme suivant calcule correctement  $G_J$ .  $\text{Makeset}(x)$  crée une composante contenant le sommet  $x$ ,  $\text{Find}(x)$  renvoie la composante contenant  $x$  et  $\text{Union}(x, y)$  fusionne les composantes de  $x$  et de  $y$ .

1. **Pour**  $x \in X$
2.      $c := \text{Makeset}(x)$
3.      $c.h := x$
4. **Pour**  $x \in X$  pris dans l'ordre  $f$ -croissant
5.     **Pour**  $y$  voisin de  $x$  au dessous de  $x$
6.         **Si**  $\text{Find}(x) \neq \text{Find}(y)$
7.             Ajouter l'arête  $(\text{Find}(y).h, x)$  à  $G_J$
8.              $c := \text{Union}(x, y)$
9.              $c.h := x$

Le nombre d'opérations Union et Find est un  $O$  de la somme des degrés des sommets et donc un  $O(m)$ , d'où la complexité annoncée. Un algorithme analogue permet de construire  $G_S$ . □

### 10.1.1 Cas où $G_R$ est un arbre

On suppose désormais que la version non orientée de  $G_R$  est acyclique.

Je note respectivement  $d_R^+(x)$ ,  $d_S^+(x)$ ,  $d_R^-(x)$  et  $d_J^-(x)$  le nombre de  $R$ -successeurs, de  $S$ -successeurs, de  $R$ -prédécesseurs et de  $J$ -prédécesseurs de  $x$ .

**Proposition 10.1.9**  $\forall x \in X, d_R^-(x) = d_J^-(x)$  et  $d_R^+(x) = d_S^+(x)$ .

**Preuve :** C'est une conséquence directe des propositions 10.1.6 et 10.1.7. □

**Corollaire 10.1.10** *Un sommet  $x$  est  $R$ -minimal si et seulement s'il est  $J$ -minimal. De même,  $x$  est  $R$ -maximal si et seulement s'il est  $S$ -maximal.*

On s'intéresse à la construction de  $G_R$  à partir de  $G_J$  et  $G_S$ . Le principe est d'effeuiller  $G_R$  progressivement. Pour cela, on détermine, à l'aide de  $G_J$  et  $G_S$ , une arête de  $G_R$  qui est incidente à une feuille. On simule alors la suppression de cette arête dans  $G_R$  en mettant à jour  $G_J$  et  $G_S$  de manière cohérente. On recommence jusqu'à épuisement des sommets de  $G_J$  et  $G_S$ .

**Lemme 10.1.11** *Si  $u$  est le  $J$ -successeur (resp.  $S$ -prédécesseur) de  $x$ , alors les sommets internes du chemin  $x \rightsquigarrow u$  de  $G_R$  sont en dessous (resp. au dessus) de  $x$ .*

**Preuve (pour  $J$ ) :** Dans le cas contraire, soit  $v$  le sommet interne de  $x \rightsquigarrow u$  qui est  $f$ -maximal. Alors  $x <_J v <_J u$ , contredisant  $x \triangleleft_J u$ .  $\square$

La construction incrémentale de  $G_R$  découle de la propriété suivante :

**Proposition 10.1.12** *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le sommet  $x$  est  $R$ -minimal et possède un unique  $R$ -successeur  $u$ .*
- (ii) *Le sommet  $x$  est  $J$ -minimal,  $u$  est le  $J$ -successeur de  $x$  et  $x$  a précisément un  $S$ -successeur.*

**Preuve :** Pour (i)  $\implies$  (ii), on sait par le corollaire 10.1.10 que  $x$  est  $J$ -minimal. De plus, si  $v$  est le  $J$ -successeur de  $x$  alors, par le lemme 10.1.11, les éventuels sommets internes de  $x \rightsquigarrow v$  dans  $G_R$  sont en dessous de  $x$ . Comme  $x$  est  $R$ -minimal cela implique que  $(x, v)$  est une arête de  $G_R$ . Par unicité du  $R$ -successeur de  $x$  on en déduit  $v = u$ . Enfin, la proposition 10.1.9 montre que  $x$  a un unique  $S$ -successeur.

Pour la réciproque,  $x$  est  $R$ -minimal par le corollaire 10.1.10. De plus, le lemme 10.1.11 implique que le chemin  $x \rightsquigarrow u$  de  $G_R$  est réduit à l'arête  $(x, u)$ , donc que  $u$  est un  $R$ -successeur de  $x$ . Enfin, la proposition 10.1.9 montre que  $x$  a un unique  $R$ -successeur.  $\square$

Par symétrie on obtient une version “ $S$ ” de ce qui précède :

**Proposition 10.1.13** *Le sommet  $x$  est  $R$ -maximal et possède un unique  $R$ -prédécesseur  $u$  si et seulement si  $x$  est  $S$ -maximal,  $u$  est le  $S$ -prédécesseur de  $x$  et  $x$  a précisément un  $J$ -prédécesseur.*

On en déduit :

**Proposition 10.1.14** *Si  $G_R$  est acyclique, il peut être construit en temps  $O(|X|)$  à partir de  $G_J$  et de  $G_S$ .*

**Preuve :** Puisque  $G_R$  est un arbre, il a nécessairement une feuille tant qu'il contient au moins deux sommets. Les propositions 10.1.12 et 10.1.13 permettent de sélectionner une telle feuille, et son unique voisin dans  $G_R$ , à l'aide de  $G_J$  et  $G_S$  seulement.

Soit donc  $z$  une feuille de  $G_R$ . On note respectivement  $J'$  et  $S'$  la relation de jonction et de scission pour l'arbre  $G_R - z$ . On vérifie aisément que les ordres  $J'$  et  $S'$  sont les restrictions respectives à  $X \setminus \{z\}$  des ordres  $J$  et  $S$ . Par conséquent

$$x \triangleleft_{J'} y \Leftrightarrow (x \triangleleft_J y \vee x \triangleleft_J z \triangleleft_J y)$$

et on a une équivalence semblable en remplaçant  $J$  par  $S$ . Si la feuille  $z$  est un  $R$ -minimum, elle a un unique  $J$ -successeur et un unique  $S$ -successeur (cf. propositions 10.1.12). Donc  $G_{J'}$  et  $G_{S'}$  se déduisent respectivement de  $G_J$  et  $G_S$  par contraction de l'arête qui relie  $z$  à respectivement son  $J$ -successeur et son  $S$ -successeur. On conclut de même si  $z$  est un  $R$ -maximum.

Par récurrence sur la taille de  $G_R$ , on peut par ce procédé d'effeuillage, reconstruire toutes les arêtes de  $G_R$ .

Sur le plan algorithmique on maintient l'ensemble  $F$  des feuilles de  $G_R$ . C'est, d'après les propositions 10.1.12 et 10.1.13, l'ensemble  $F^- \cup F^+$  où

$$F^- = \{x \in X \mid (d_J^-(x) = 0 \wedge d_S^+(x) = 1)\} \text{ et } F^+ = \{x \in X \mid (d_S^+(x) = 0 \wedge d_J^-(x) = 1)\}$$

Soit  $z \in F$ . Si  $z \in F^-$  (resp.  $z \in F^+$ ) on ajoute l'arête  $(z, u)$  à la partie reconstruite de  $G_R$  où  $u$  est le  $J$ -successeur (resp.  $S$ -prédécesseur) de  $z$ . En supposant que  $G_J$  et  $G_S$  sont représentés par des classiques listes d'adjacences, on obtient en temps constant les arbres  $G_{J'}$  et  $G_{S'}$  sur  $X \setminus \{z\}$  obtenus par contraction d'arête (voir plus haut). Il est également facile de maintenir l'ensemble  $F$  correspondant à  $G_R - z$  en temps constant, puisque seul  $u$  est potentiellement une nouvelle feuille.  $\square$

**Remarque 10.1.15** Soient deux arbres  $G_J$  et  $G_S$  sur un ensemble  $X$  de sommets. La seule hypothèse que les degrés entrants dans  $G_J$  et sortants dans  $G_S$  sont au plus un n'implique pas nécessairement que  $G_J$  et  $G_S$  sont les arbres des jonctions et des scissions associés à un arbre  $G_R$ . Un contre-exemple est fourni par les arbres en forme de  $\vee$  et  $\wedge$  sur 3 sommets.

### 10.1.2 Cas où $G_R$ n'est pas un arbre

On abandonne momentanément l'hypothèse d'acyclicité de  $G_R$  et on regarde le lien avec  $G_J$  et  $G_S$ . Notons, à la suite de la remarque 10.1.15, que  $G_J$  et  $G_S$  ne permettent plus de reconstruire  $G_R$ .

**Proposition 10.1.16** Soit  $c_R = |A(G_R)| - |S(G_R)| + 1$  le nombre cyclomatique de  $G_R$ . On a

$$\forall x \in X, \quad d_J^-(x) \leq d_R^-(x) \quad \text{et} \quad d_S^+(x) \leq d_R^+(x),$$

de plus,

$$\sum_{x \in X} d_J^-(x) = \sum_{x \in X} d_S^+(x) = \sum_{x \in X} d_R^-(x) - c_R = \sum_{x \in X} d_R^+(x) - c_R = |A(G_R)| - c_R.$$

**Preuve :** Les inégalités découlent directement des propositions 10.1.6 et 10.1.7. Les égalités se déduisent du fait que la somme des degrés entrants (resp. sortants) dans un graphe orienté est égal à son nombre d'arêtes et que pour un arbre (comme  $G_J$  ou  $G_S$ ) ce nombre est encore le nombre de sommets moins un.  $\square$

Si  $x$  a un défaut de degré dans  $G_J$ , i.e.  $d_J^-(x) < d_R^-(x)$ , alors au moins deux des  $R$ -prédécesseurs de  $x$  sont reliés par un chemin dans  $G_R$  au dessous de  $x$ . On a bien sûr un résultat analogue pour  $d_S^+(x)$ . On en déduit

**Lemme 10.1.17** *Pour tout  $x \in X$ ,  $d_J^-(x) + d_S^+(x) \leq d_R(x)$  et l'inégalité est stricte pour au plus  $2c_R$  éléments de  $X$  (cf. proposition 10.1.16). De plus chaque sommet pour lequel cette inégalité est stricte est incident à un cycle de  $G_R$  dont ce sommet est maximum ou minimum. Réciproquement, chaque cycle admet au moins deux sommets (le plus haut et le plus bas) pour lesquelles cette inégalité est stricte.*

## 10.2 Application

### 10.2.1 Graphe des contours d'un polyèdre valué

On suppose que  $X$  est l'ensemble des sommets d'un polyèdre  $\mathcal{P}$ . Soit une fonction injective  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . On étend  $f$  sur  $\mathcal{P}$  par linéarité. Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$  est un chemin de  $\mathcal{P}$ , on dira qu'il est (strictement)  $f$ -croissant (resp.  $f$ -décroissant, resp.  $f$ -constant) si  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est (strictement) croissante (resp. décroissante, resp. constante). Dans ce qui suit, tous les chemins considérés sur  $\mathcal{P}$  sont linéaires par morceaux.

On définit la relation  $R$  sur  $X$  par  $x R y$  si

1. il existe un chemin  $f$ -croissant  $\gamma : x \rightsquigarrow y$ ,
2. il n'existe pas de sommet  $z$  avec deux chemins  $f$ -croissants  $\delta : x \rightsquigarrow z$  et  $\delta' : z \rightsquigarrow y$ , de sorte que  $\gamma$  soit homotope à  $\delta.\delta'$  dans  $\mathcal{P}$ .

Le graphe  $G_R$  de  $R$  est appelé le *graphe des contours* de  $f$ . La dénomination est justifiée par le fait suivant. On peut montrer (cf. proposition 10.2.8) que le graphe  $G_R$ , considéré comme un graphe topologique, est homéomorphe à l'espace quotient  $\mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$  où, pour tout  $u, v \in \mathcal{P}$ ,  $u \overset{f}{\sim} v$  si et seulement si  $u$  et  $v$  peuvent être reliés par un chemin  $f$ -constant dans  $\mathcal{P}$ .

Notons que la clôture transitive  $\leq_R$  de  $R$  est donnée par  $x \leq_R y$  si et seulement s'il existe un chemin  $f$ -croissant reliant  $x$  et  $y$ . Soient respectivement  $J$  et  $S$  les relations de jonction et scission relatives à  $R$  et  $f$ .

**Lemme 10.2.1** *Pour tous sommets  $x, y$  de  $\mathcal{P}$ , on a  $x <_J y$  si et seulement s'il existe un chemin formé d'arêtes de  $\mathcal{P}$  reliant  $x$  à  $y$  et au dessous de  $y$ .*

**Preuve :** Supposons  $x <_J y$ . Par définition, il existe un chemin  $c$  de  $G_R$  reliant  $x$  à  $y$  au dessous de  $y$ . La note précédente permet de construire à partir de  $c$  un chemin dans

$\mathcal{P}$  au dessous de  $y$ . Il est facile de montrer (exercice!) que l'on peut repousser ce chemin vers le bas sur les arêtes de  $\mathcal{P}$  pour en déduire un chemin d'arêtes au dessous de  $y$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un chemin d'arêtes de  $\mathcal{P}$  reliant  $x$  à  $y$  et au dessous de  $y$ . La note précédente montre que les extrémités de chacune de ces arêtes sont  $R$ -comparables et on en déduit  $x <_J y$ .  $\square$

On en déduit la propriété remarquable suivante.

**Corollaire 10.2.2** *Les arbres des jonctions et des scissions de  $G_R$  sont les arbres des jonctions et des scissions du 1-squelette  $\mathcal{P}^1$  de  $\mathcal{P}$  (relativement à  $f$ ).*

**Lemme 10.2.3** *Si  $x <_R y$ , alors il existe un chemin  $x \rightsquigarrow y$  strictement  $f$ -croissant. Plus précisément si  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  est un chemin  $f$ -croissant, avec  $f(x) < f(y)$ , alors il existe un chemin  $x \rightsquigarrow y$  strictement  $f$ -croissant et homotope à  $\gamma$ .*

**Preuve :** Plus généralement on suppose que  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathcal{P}$  avec  $f(x) < f(y)$  et que leurs  $f$ -valeurs sont distinctes de celles des sommets à moins qu'eux-mêmes ne soient des sommets. Soit un chemin  $f$ -croissant  $\gamma : x \rightsquigarrow y$ . Soit  $\ell = \tau_1, \dots, \tau_k$  la liste<sup>1</sup> des simplexes (relativement ouverts) traversés par  $\gamma$ . Notons que nécessairement  $\tau_i \prec \tau_{i+1}$  ou  $\tau_i \succ \tau_{i+1}$  ( $\prec$  est la relation "être face de"). On obtient le résultat par récurrence sur  $k$  : si  $k = 1, 2$  c'est évident, le segment  $[x, y]$  convient. Sinon, soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\tau_i \cap \gamma$  contient un point  $z$  avec  $f(z) > f(x)$ . On peut choisir  $z$  tel que  $f(z) < f(y)$ . Si  $i \neq 1, k$  alors on peut appliquer la récurrence sur les deux morceaux  $x \rightsquigarrow z$  et  $z \rightsquigarrow y$ . Sinon, si  $i = 1$  deux cas se présentent.

- Ou bien  $\tau_1 \prec \tau_2$ . Soit  $z' \in \tau_2 \cap \gamma$ . On remplace le morceau  $z \rightsquigarrow z'$  de  $\gamma$  par le segment  $[z, z']$  et on coupe le nouveau chemin au milieu de ce segment pour appliquer la récurrence.
- Ou bien  $\tau_1 \succ \tau_2$ . Soit  $z' \in \tau_2 \cap \gamma$ . Alors  $\tau_2$  contient nécessairement un point  $z''$  tel que  $f(z) \leq f(z'') \leq f(z')$  et  $f(z'') < f(y)$ . On remplace le morceau  $z \rightsquigarrow z'$  de  $\gamma$  par les segments  $[z, z'']$  et  $[z'', z']$  et on coupe le nouveau chemin en  $z''$  pour appliquer la récurrence sur chacun des morceaux.

Le cas où  $i = k$  se traite de manière analogue.  $\square$

**Définition 10.2.4** *Un simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{P}$  est traversé par un niveau  $a \in \mathbb{R}$  si  $\sigma$  contient au moins un sommet de  $f$ -valeur supérieure à  $a$  et au moins un sommet de  $f$ -valeur inférieure à  $a$ . On note  $L(a)$  l'ensemble des simplexes traversés par  $a$ .*

Remarquons que si  $\sigma$  est traversé par un niveau  $a$  alors toute coface de  $\sigma$  (i.e les simplexes dont  $\sigma$  est une face) est également traversée par le niveau  $a$ .

On considère le complexe cellulaire  $K(a)$ , d'espace total  $f^{-1}(a)$ , dont les  $k$ -cellules pour  $k = 0, \dots, d-1$  sont les sous-ensembles de niveau  $a$  dans les  $(k+1)$ -simplexes de  $L(a)$ .

---

1. Rappelons que les chemins sont supposés affines par morceaux. Par convexité, un segment de  $\gamma$  intersecte chaque simplexe (relativement ouvert) selon un segment possiblement vide. Ceci permet d'ordonner les simplexes croisant un segment de  $\gamma$ . Par concaténation de ces ordres, et en supprimant les doublons on en déduit la liste des simplexes traversés.

Une  $k$ -cellule est donc l'intersection d'un  $(k+1)$ -simplexe avec un hyperplan. Une cellule  $\sigma$  est une face de  $\tau$  dans  $K(a)$  si c'est le cas pour les simplexes correspondants dans  $L(a)$ .

Dans ce qui suit  $\epsilon$  est un réel positif inférieur à l'écart entre les  $f$ -valeurs de deux sommets distincts quelconques. On dira qu'un sommet de  $\mathcal{P}$  est *incident* à  $K(a)$  s'il est incident à un simplexe de  $L(a)$ .

**Remarque 10.2.5** *Si  $x$  est incident à un simplexe  $\sigma$  de  $L(a)$ , avec  $f(x) \neq a$ , alors  $x$  est incident à une arête de  $L(a)$ , i.e.  $x$  est incident à un sommet de  $K(a)$ .*

**Proposition 10.2.6** *Les  $R$ -successeurs d'un sommet  $x$  de  $\mathcal{P}$  sont en bijection avec les composantes connexes de  $K(f(x) + \epsilon)$  incidentes à  $x$  ; pour chaque telle composante, le sommet de  $f$ -valeur minimale parmi les sommets au dessus de  $x$  et incidents à cette même composante est un  $R$ -successeur de  $x$ .*

**Preuve :** Soit  $K_j$  une composante connexe de  $K(f(x) + \epsilon)$ , soit  $L_j$  l'ensemble de simplexes correspondants dans  $L(f(x) + \epsilon)$  et soit  $y_j$  le sommet de  $f$ -valeur minimale parmi les sommets au dessus de  $x$  et incidents à  $K_j$ . Montrons que  $y_j$  est bien un  $R$ -successeur de  $x$ . Considérons pour cela un chemin de  $K_j$  reliant des sommets de  $K_j$  incidents respectivement à  $x$  et  $y_j$  (cf. remarque précédente). Les arêtes de ce chemin correspondent à une suite  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  de triangles de  $L_j$  telle que  $\sigma_i$  est adjacent à  $\sigma_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . Quitte à raccourcir ce chemin, on peut supposer que  $x$  appartient à  $\sigma_i$  pour la seule valeur  $i = 1$  et que  $y_j$  appartient à  $\sigma_i$  pour la seule valeur  $i = n$ . On choisit dans chaque arête  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  un point  $z_i$  tel que  $f(z_i) = f(x) + i \frac{f(y_j) - f(x)}{n}$ , ce qui est possible car les  $f$ -valeurs des sommets de cette arête encadrent l'intervalle  $[f(x), f(y)]$ . La chaîne polygonale  $x, z_1, \dots, z_{n-1}, y_j$  constitue un chemin  $\gamma$  strictement  $f$ -croissant. Par conséquent  $x <_R y_j$ . Supposons qu'il existe un sommet  $z$  et deux chemins strictement  $f$ -croissants (cf. lemme 10.2.3),  $\delta : x \rightsquigarrow z$  et  $\delta' : z \rightsquigarrow y_j$  avec  $\gamma$  homotope à  $\delta \cdot \delta'$ . Soit alors  $t$  le point de  $\gamma$  tel que  $f(t) = f(z)$ .

Le lemme 10.2.7 suivant établit l'existence d'un chemin  $f$ -constant  $t \rightsquigarrow z$ . Soit  $\tau_1, \dots, \tau_k = z$  la liste des simplexes traversés par ce chemin. Par construction de  $\gamma$ , le simplexe  $\tau_1$  est dans  $L_j$ . On en déduit  $\tau_2 \in L_j$  (regarder les deux cas  $\tau_1 \prec \tau_2$  ou  $\tau_1 \succ \tau_2$  et utiliser le fait que les sommets de  $\tau_1$  ont une  $f$ -valeur hors de l'intervalle  $]f(x), f(y_j)[$ ). De proche en proche on en déduit que  $z$  est incident à  $K_j$ , ce qui contredit la définition de  $y_j$ . Finalement, on conclut  $x <_R y_j$ .

Réciproquement, soit  $y$  un  $R$ -successeur de  $x$  et  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  un chemin strictement  $f$ -croissant. Soit  $u$  le point de  $\gamma$  tel que  $f(u) = f(x) + \epsilon$ . Par définition de  $\epsilon$ , le point  $u$  n'est pas un sommet de  $\mathcal{P}$ . Je considère le simplexe  $\sigma$  contenant  $u$  en son intérieur. Le simplexe  $\sigma$  est donc traversé par le niveau  $f(x) + \epsilon$  et on considère la composante  $K_j$  de  $K(f(x) + \epsilon)$  contenant  $\sigma$ . Soit alors  $y_j$  le sommet incident à  $K_j$  et de  $f$ -valeur minimale parmi les sommets incidents à cette même composante et au dessus de  $x$ . On va montrer que  $y = y_j$ , ce qui terminera la preuve de la proposition.

Tout d'abord,  $y$  ne peut être en dessous de  $y_j$ , car de proche en proche on montrerait comme ci-dessus que  $y$  est incident à  $K_j$ , contredisant la définition de  $y_j$ . Supposons alors



que  $y$  est au dessus de  $y_j$  et soit  $t$  le point de  $\gamma$  tel que  $f(t) = f(y_j)$ . Le point  $t$  est contenu dans un simplexe de  $L_j$  (toujours par le même raisonnement) et distinct de  $y_j$  (sinon on aurait  $x <_R y_j <_R y$ ). Par connexité de  $K_j$ , on peut construire un chemin  $f$ -constant  $\zeta : t \rightsquigarrow y_j$ . On note  $\delta$  la concaténation du sous chemin de  $\gamma$  de  $x$  à  $t$  et de  $\zeta$  et on note  $\delta'$  la concaténation de  $\zeta^{-1}$  avec le sous-chemin de  $\gamma$  de  $t$  à  $y$ . Alors, quitte à utiliser le lemme 10.2.3 pour se ramener à des chemins strictement croissants, on contredit la définition de  $R$ -successeur puisque  $\gamma \sim \delta.\delta'$ . Finalement, on conclut que  $f(y) = f(y_j)$ , d'où  $y = y_j$ .  $\square$

Cette dernière proposition admet évidemment une version similaire pour les  $R$ -prédécesseurs d'un sommet.

**Lemme 10.2.7** *Soient  $x, y \in \mathcal{P}$ . Soient  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  et  $\delta : x \rightsquigarrow y$ , deux chemins homotopes (avec extrémités fixes) et strictement  $f$ -croissants. Alors pour tout  $u = \gamma(t_u)$  et tout  $v = \delta(t_v)$  tels que  $f(u) = f(v)$ , il existe un chemin  $f$ -constant  $u \rightsquigarrow v$ .*

**Preuve :** Soit  $h : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathcal{P}$  l'homotopie en question ( $h(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$ ,  $h(\cdot, 1) = \delta$ ,  $h(0, \cdot) = x$ ,  $h(1, \cdot) = y$ ). On peut supposer que  $h$  est affine par morceaux.<sup>2</sup> Montrons que  $(t_u, 0)$  et  $(t_v, 1)$  sont reliés par un chemin polygonal  $\phi$  dans  $(f \circ h)^{-1}(f(u))$ . Par un argument de compacité il existe  $\eta$  positif tel que  $f \circ h(w) < f(u)$  pour  $w \in ]0, \eta[ \times ]0, 1[$ . Soit  $V$  la composante connexe de  $\{w \in ]0, 1[ \times ]0, 1[ \mid f \circ h(w) < f(u)\}$  contenant  $]0, \eta[ \times ]0, 1[$ . L'adhérence de  $V$  est polygonale (car  $f \circ h$  est affine par morceaux) et le bord externe de  $V$  est donc une ligne polygonale fermée. Ce bord est constitué des segments joignant dans l'ordre  $(t_u, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , et  $(t_v, 1)$  et d'une ligne polygonale joignant  $(t_u, 0)$  à  $(t_v, 1)$ . Cette ligne est contenue dans  $(f \circ h)^{-1}(f(u))$  et fournit le  $\phi$  cherché. Finalement le chemin  $h \circ \phi$  convient.  $\square$

Le graphe  $G_R$  peut être vu comme un graphe topologique. Formellement, il s'agit du quotient de l'espace produit  $[0, 1] \times R$ , où  $R$  est vu comme un espace discret de couples  $(x, y)$ , par les relations d'identifications des extrémités de segments :

- $\forall x, y, z \in X :$
- $xRy$  et  $xRz \implies (0, (x, y)) \sim (0, (x, z))$
  - $xRy$  et  $zRx \implies (0, (x, y)) \sim (1, (z, x))$
  - $xRy$  et  $zRy \implies (1, (x, y)) \sim (1, (z, y))$

Comme affirmé au début de cette section, le graphe  $G_R$  correspond bien à la notion usuelle de graphe des contours.

**Proposition 10.2.8**  *$G_R$  est homéomorphe à l'espace quotient  $\mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$  où, pour tout  $u, v \in \mathcal{P}$ ,  $u \overset{f}{\sim} v$  si et seulement si  $u$  et  $v$  peuvent être reliés par un chemin  $f$ -constant dans  $\mathcal{P}$ .*

2. Par compacité, on peut considérer  $\eta > 0$  tel que tout carré de côté  $\eta$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  est envoyé par  $h$  dans l'étoile d'un sommet. Dans la grille de maille  $\eta$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$ , deux sommets adjacents sont envoyés dans les étoiles de sommets adjacents. Partant d'une telle grille, il est possible de construire une homotopie affine par morceaux.

**Preuve :** On va construire un homéomorphisme  $\phi : \mathcal{P} / \overset{f}{\sim} \rightarrow G_R$ .

Si  $u \in \mathcal{P}$ , on note  $\bar{u}$  sa classe dans  $\mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$ , i.e. la composante connexe de  $f^{-1}(f(u))$  contenant  $u$ .

- Si  $\bar{u}$  contient un sommet  $x$  de  $\mathcal{P}$ , on pose  $\phi(\bar{u}) = x$ ,
- sinon, on considère la composante  $K_u$  de  $K(f(u))$  qui contient  $u$  (donc  $|K_u| = \bar{u}$ ). Soit  $x$  le sommet de  $\mathcal{P}$  incident à  $K_u$  le plus haut au dessous de  $u$ , i.e. :

$$x = \arg \max \{f(z) \mid z \text{ incident à } K_u \text{ et } f(z) < f(u)\}$$

De même, soit  $y$  le sommet de  $\mathcal{P}$  incident à  $K_u$  le plus bas au dessus de  $u$ . On pose alors

$$\phi(\bar{u}) = (t, (x, y)) \text{ où } t = \frac{f(u) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

Notons que  $\phi$  est bien définie puisque  $\bar{u} = \bar{v}$  implique  $K_u = K_v$ .

On définit maintenant  $\psi : G_R \rightarrow \mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$ . Soit  $(t, (x, y)) \in [0, 1] \times R$ . Par abus de notation on note  $(t, (x, y))$  sa propre classe dans  $G_R$  vu comme espace quotient. On choisit un sommet de la composante de  $K(f(x) + \epsilon)$  incidente à  $x$  et à  $y$  (cf. proposition 10.2.6). Ce sommet correspond à une arête  $(w, z)$  de  $\mathcal{P}$  traversée par  $f(x) + \epsilon$ . On pose alors

$$\psi((t, (x, y))) = \bar{u}$$

où  $u = (1 - \alpha)w + \alpha z$  et  $\alpha$  vérifie  $f(u) = (1 - \alpha)f(w) + \alpha f(z) = (1 - t)f(x) + tf(y)$ .

On vérifie aisément que  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$  sont égales à l'identité sur leurs espaces respectifs. Il reste à montrer que  $\phi$  est continue. Par compacité on en déduit que  $\phi$  est un homéomorphisme. Par définition de  $\mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$ , la continuité de  $\phi$  équivaut à la continuité de  $\phi \circ \pi$  où  $\pi$  est le quotient  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} / \overset{f}{\sim}$ . Il suffit donc de vérifier que  $(\phi \circ \pi)^{-1}(U)$  est ouvert dans  $\mathcal{P}$  pour  $U$  un segment ouvert d'une arête de  $G_R$  ou  $U$  un homothétique de l'étoile d'un sommet de  $G_R$ . Ces ouverts forment en effet une base d'ouverts de  $G_R$ . Nous laissons cette vérification au lecteur.  $\square$

**Remarque 10.2.9** La proposition 10.2.6 fournit un algorithme de complexité  $O(n_0 n_2)$  pour la construction de l'arbre des contours de  $\mathcal{P}$  où  $n_i$  est la taille (nombre total de simplices) du  $i$ -squelette de  $\mathcal{P}$ . En effet, pour chaque sommet  $x$  de  $\mathcal{P}$  on détermine ses  $R$ -successeurs en parcourant les composantes connexes du contour de niveau  $f(x) + \epsilon$  et en sélectionnant le sommet de  $f$ -valeur minimale et supérieure à  $f(x)$  dans chaque composante. Notons que la détermination des composantes de  $K(f(x) + \epsilon)$  ne nécessite que la connaissance de son 1-squelette, i.e. du 2-squelette de  $\mathcal{P}$ . Ceci est d'ailleurs cohérent avec le fait que l'homotopie de courbes est déterminée par le 2-squelette.

On peut cependant obtenir des algorithmes plus efficaces pour des familles particulières de polyèdres.

### 10.2.2 Cas d'un polyèdre simplement connexe

**Lemme 10.2.10** *Si  $\mathcal{P}$  est simplement connexe, alors  $G_R$  est un arbre.*

**Preuve :** Supposons par l'absurde que  $G_R$  possède un cycle  $C$ . Soient  $x$  le sommet de  $C$  de  $f$ -valeur minimale et  $y$  et  $z$  ces deux voisins dans  $C$ . Soient  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  et  $\delta : x \rightsquigarrow y$ , deux chemins correspondant aux deux chemins  $x \xrightarrow{*} y$  dans  $C$  (l'un se réduit à l'arête  $(x, y)$  et l'autre passe par  $z$ ) et obtenus par concaténation de chemins strictement  $f$ -monotones associés à chaque arête de  $C$ . Soient  $u = \gamma(t_u)$  et  $v = \delta(t_v)$  tels que  $f(u) = f(v)$  et  $f(u)$  est inférieur à la  $f$ -valeur de tout sommet de  $C - x$ . Par hypothèse  $\gamma \simeq \delta$  et en adaptant le lemme 10.2.7 on en déduit une isoligne  $u \rightsquigarrow v$ . On aboutit à une contradiction comme dans la preuve de la proposition 10.2.6 en montrant que les composantes de  $K(f(x) + \epsilon)$  incidentes à  $y$  et  $z$  sont identiques.  $\square$

Par le corollaire 10.2.2 et le théorème 10.1.8, on peut calculer en temps  $O(m\alpha(n))$  les arbres des jonctions et des scissions du graphe des contours de  $f$ . Puis, le lemme 10.2.10 et la proposition 10.1.14 montrent que l'on peut en déduire en temps linéaire le graphe des contours. En ajoutant le temps nécessaire au tri initial des sommets dans un ordre  $f$ -monotone, on en déduit :

**Théorème 10.2.11 (Carr et al.)** *L'arbre des contours d'un polyèdre simplement connexe à  $n$  sommets et  $m$  arêtes peut être construit en temps  $O(n \log n + m\alpha(n))$ .*

### 10.2.3 Cas d'une surface orientable de genre $g$

On note  $\mathcal{M}_g$ , plutôt que  $\mathcal{P}$ , une surface triangulée orientable de genre  $g$ . On garde la notation  $X$  pour les sommets de  $\mathcal{M}_g$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  pour désigner une fonction injective que l'on étend par linéarité sur  $\mathcal{M}_g$ .

**Définition 10.2.12** *Pour tout sommet  $x \in X$ , la valuation de  $x$  (relativement à  $f$ ), notée  $V(x)$ , est le nombre de changements de signes dans la liste circulaire des  $f(y) - f(x)$  où  $y$  parcourt les voisins de  $x$  dans  $\mathcal{M}_g$ .*

L'indice de  $x$  (relativement à  $f$ ), noté  $I(x)$ , est la quantité  $I(x) = 1 - V(x)/2$ .

**Lemme 10.2.13 (Banchoff [Ban70])**

$$\sum_{x \in X} I(x) = \chi(\mathcal{M}_g)$$

où  $\chi(\mathcal{M}_g) = 2 - 2g$  est la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}_g$ .

**Preuve :**  $V(x)$  est aussi le nombre de triangles incidents à  $x$  pour lesquels  $f(x)$  est la valeur médiane des  $f$ -valeurs de leurs trois sommets. Chaque triangle contribue donc à

une unité dans la somme des valuation, i.e.  $\sum_{x \in X} V(x) = F$ , où  $F$  est le nombre de triangles de  $\mathcal{M}_g$ . On en déduit

$$\sum_{x \in X} I(x) = \sum_{x \in X} (1 - V(x)/2) = |X| - F/2.$$

Or, par la relation d'incidence arêtes-triangles sur  $\mathcal{M}_g$ , on a  $3F = 2A$ , où  $A$  est le nombre d'arêtes de  $\mathcal{M}_g$ . Finalement

$$\sum_{x \in X} I(x) = |X| - A + F = \chi(\mathcal{M}_g).$$

□

Dans ce qui suit,  $\epsilon$  désigne à nouveau un réel positif inférieur à l'écart entre les  $f$ -valeurs de deux sommets distincts quelconques.

**Définition 10.2.14** Pour tout réel  $r$ , je note  $\mathcal{M}_g^-(r) = f^{-1}(]-\infty, r])$  la partie de  $\mathcal{M}_g$  au dessous de  $r$ . Je note de même  $\mathcal{M}_g^+(r) = f^{-1}([r, +\infty[)$  la partie de  $\mathcal{M}_g$  au dessus de  $r$ . L'atome d'un sommet  $x$ , noté  $\mathcal{A}(x)$ , est la composante connexe de  $\mathcal{M}_g^-(f(x) + \epsilon) \cap \mathcal{M}_g^+(f(x) - \epsilon)$  contenant  $x$ .

Dit autrement l'atome de  $x$  est une petite tranche de  $\mathcal{M}_g$  autour de  $x$ . Il n'est pas très difficile de voir que  $\mathcal{A}(x)$  est une surface à bord homéomorphe à un disque (centré en  $x$ ) auquel on a recollé  $V(x)/2$  bandes comme sur la figure 10.1. On note  $b(x)$  le nombre de bords de  $\mathcal{A}(x)$  et  $g(x)$  son genre. Les  $b(x)$  bords de  $\mathcal{A}(x)$  se répartissent en bords inférieurs

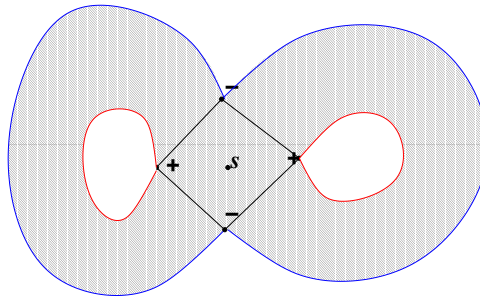


FIGURE 10.1 – Un sommet d'indice -1 et son atome.

de niveau  $f(x) - \epsilon$  et bords supérieurs de niveau  $f(x) + \epsilon$ . D'après la proposition 10.2.6, ces bords sont en bijection avec les  $R$ -prédécesseurs et  $R$ -successeurs de  $x$  dans le graphe des contours  $G_R$ . Donc  $b(x) = d_R(x)$ .

**Proposition 10.2.15**

$$c_R = g - \sum_{x \in X} g(x)$$

où  $c_R$  est le nombre cyclomatique de  $G_R$ .

**Preuve :** En décomposant  $\mathcal{A}(x)$  en  $V(x)/2$  bandes recollées à un disque, on calcule

$$\chi(\mathcal{A}(x)) = 1 + V(x)/2 - 2V(x) + V(x) = I(x).$$

D'où, puisque  $\chi(\mathcal{A}(x)) = 2 - 2g(x) - b(x)$ ,

$$I(x) = 2 - 2g(x) - d_R(x). \quad (10.1)$$

Par le lemme de Banchoff, on en déduit

$$\chi(\mathcal{M}_g) = 2|X| - 2 \sum_{x \in X} g(x) - \sum_{x \in X} d_R(x) = 2|X| - 2 \sum_{x \in X} g(x) - 2A(G_R)$$

où  $A(G_R)$  est le nombre d'arêtes de  $G_R$ . On conclut avec les relations  $\chi(\mathcal{M}_g) = 2 - 2g$  et  $c_R = A(G_R) - |X| + 1$ .  $\square$

Cette proposition montre en particulier que le nombre cyclomatique du graphe des contours est majoré par  $g$ . On peut voir de manière directe que  $c_R$  est majoré par  $2g$ . Pour cela on considère l'application quotient  $\mathcal{M}_g \rightarrow G_R$ . Il est facile de voir que cette application induit un morphisme surjectif entre les groupes fondamentaux respectifs (tout cycle de  $G_R$  est la projection d'un cycle de  $\mathcal{M}_g$ ). L'application quotient induit donc également un morphisme surjectif entre les homologies de dimension 1. D'où la comparaison entre les nombres de Betti. Pour arriver à la borne  $g$  il faut remplir  $\mathcal{M}_g$  en une variété de dimension 3 ayant  $\mathcal{M}_g$  pour bord et étendre  $f$  à cette variété.

Un algorithme de balayage relativement simple, décrit par Cole-McLaughlin et al. [CMEH<sup>+</sup>03], permet de construire  $G_R$  en temps  $O(n \log n)$  où  $n$  est le nombre total de simplexes de la surface. Ceci est optimal comme montré par van Kreveld et al. [vKvOB<sup>+</sup>97] par réduction du problème du tri au calcul de graphe des contours.

On détaille ci-dessous un autre algorithme, non-optimal, utilisant les techniques développées pour les variété simplement connexes.

**Théorème 10.2.16** *Le graphe des contours d'une surface de genre  $g$  peut être construit en temps  $O(gn + n \log n)$  où  $n$  est le nombre total de simplexes de la surface.*

**Preuve :** Si  $\mathcal{M}_g$  a un genre  $g$  positif, alors son graphe des contours peut contenir des cycles. Le principe est de couper  $\mathcal{M}_g$  par des contours, ajoutant un maximum et un minimum local pour chaque coupe, de sorte que le graphe des contours de la surface découpée (et rebouchée par les extrema locaux) soit un arbre. On pourra alors appliquer les résultats du cas où  $G_R$  est un arbre. Il suffira pour terminer d'identifier les paires de maxima et minima introduits lors des coupes pour retrouver le graphe des contours de  $\mathcal{M}_g$ . On sait qu'il suffit de couper par  $c_R$  contours correspondant à  $c_R$  arêtes de  $G_R$ . On peut, suivant le lemme 10.1.17, choisir ces arêtes incidentes à des sommets ayant un défaut de degré, c'est à dire pour lesquels  $d_J^-(x) + d_S^+(x) < d_R(x)$ .

Pour repérer de tels sommets sans avoir à calculer  $d_R$ , on remarque d'après l'équation 10.1 que  $d_R(x) = b(x) = 2 - 2g(x) - I(x)$ . Par conséquent  $d_J^-(x) + d_S^+(x) < d_R(x)$  implique  $d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x)$ . Cette dernière inégalité est vrai soit lorsque  $d_J^-(x) + d_S^+(x) <$

$d_R(x)$ , ce qui peut arriver pour au plus  $2c_R$  sommets (lemme 10.1.17), soit lorsque  $d_R(x) < 2 - I(x)$ . Or, par la proposition 10.2.15, on a  $c_R = g - \sum_{x \in X} g(x)$ . Comme  $c_R \geq 0$  on en déduit que  $g(x)$  est non nul en au plus  $g$  sommets, ou encore que  $d_R(x) < 2 - I(x)$  en au plus  $g$  sommets. Par conséquent l'inégalité  $d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x)$  sera stricte pour au plus  $3g$  sommets.

Connaissant  $G_J$  et  $G_S$  on obtient  $d_J^-(x) + d_S^+(x)$  pour tous les sommets en temps total linéaire. Le calcul de l'indice nécessite également un temps total linéaire. Notons qu'il suffit en fait de couper par des contours inférieurs incidents à des sommets pour lesquels  $d_J^-(x) < d_R^-(x)$ . On procède aux coupes par balayage des sommets de bas en haut. Pour chaque sommet  $x$  ayant un défaut de degré ( $d_J^-(x) + d_S^+(x) < 2 - I(x)$ ), on regarde les composantes connexes de  $\mathcal{M}_g^-(f(x) + \epsilon)$ , et pour chaque composante connexe on coupe par tous les contours incidents à  $x$ , sauf un (en particulier si la composante a un seul bord, on ne coupe pas). Dans la pratique on peut maintenir les composantes à l'aide de la structure Union-Find, exactement comme pour le calcul de  $G_J$ .

Le traitement de chaque sommet avec un défaut de degré prend un temps linéaire (fonction du nombre total de simplexes de  $\mathcal{M}_g$ ), soit en temps  $O(gn)$  au total. On obtient ainsi une surface découpée  $\mathcal{M}'$  de taille  $O(n)$  - elle a  $O(n+g) = O(n)$  sommets - dont le graphe des contours est un arbre. (mais  $\mathcal{M}'$  n'est pas nécessairement une sphère, cf. section suivante). Le calcul de cet arbre peut se faire en temps  $O(n \log n)$  d'après le théorème 10.2.11. On ajoute finalement  $O(g)$  arêtes à cet arbre, correspondant aux cycles que l'on a coupé.  $\square$

### Sur le nombre de cycles du graphe des contours

La proposition 10.2.15 montre que  $c_R$  est majoré par  $g$ . On décrit un exemple de fonction  $f$  pour laquelle la majoration est stricte, c'est à dire pour laquelle l'atome d'au moins un sommet est de genre non nul. Cet exemple se retrouve chez Banchoff et Takens [BT75] pour le calcul de fonctions ayant précisément 3 singularités sur une surface.

La figure 10.2 montre l'atome d'un sommet dont le genre est 1. On remarque que cet atome a un unique bord inférieur et un unique bord supérieur.

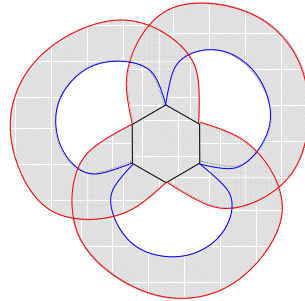


FIGURE 10.2 – Un sommet d'indice -2 et son atome.

Une telle configuration apparaît dans un tore dont les sommets sont valués comme sur la figure 10.3. Sur cette figure on a représenté une portion du revêtement universel du tore composée de quatre copies d'un domaine fondamental.

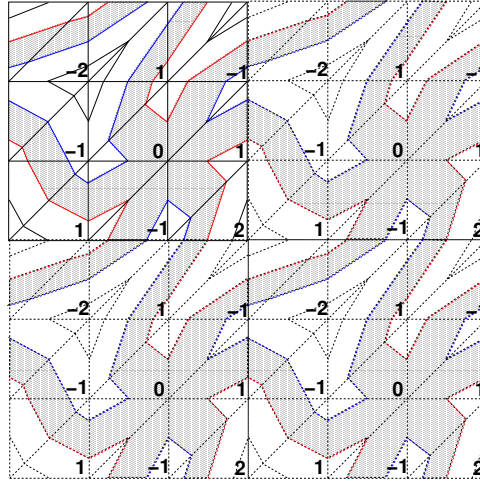


FIGURE 10.3 – Les lignes de niveaux tracées dans le revêtement universel du tore. Le sommet valué à 0 est dans la configuration de la figure 10.2.

La figure 10.4 montre l'atome du sommet de valeur nulle sur une réalisation géométrique de ce tore. Le graphe des contours correspondant à ce tore valué est donc un arbre (dans

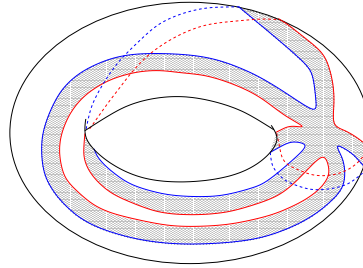


FIGURE 10.4 – Ce tore est revêtu par le plan de la figure 10.3 ci-dessus.

ce cas précis on peut même vérifier que c'est une chaîne). De manière générale, on peut construire à partir de cet exemple une surface valuée de genre quelconque dont le graphe des contours est une chaîne.

#### 10.2.4 Cas d'une 3-variété orientable

**Lemme 10.2.17** Soit  $\mathcal{M}$  une 3-variété à bord,  $b$  le nombre de composantes de son bord et  $g_1, g_2, \dots, g_b$  le genre de chacune de ces composantes, alors  $\chi(\mathcal{M}) = b - \sum_i g_i$ .

**Preuve :** Soit  $\mathcal{S}_g$  la surface orientable de genre  $g$  et soit  $\mathcal{M}_g$  la 3-variété de bord  $\mathcal{S}_g$ . En "bouchant" les trous de  $\mathcal{M}$  par des  $\mathcal{M}_g$ , on obtient une variété sans bord dont la caractéristique est nulle (dualité de Poincaré). D'où

$$0 = \chi(\mathcal{M} \# \mathcal{M}_{g_1} \# \mathcal{M}_{g_2} \# \dots \# \mathcal{M}_{g_b}) = \chi(\mathcal{M}) + \sum_i \chi(\mathcal{M}_{g_i}) - \sum_i \chi(\mathcal{S}_{g_i}).$$

Or,  $\chi(\mathcal{M}_g) = 1 - g$  car  $\chi(\mathcal{M}_g)$  se rétracte par déformation sur un bouquet de  $g$  cycles et  $\chi(\mathcal{S}_g) = 2 - 2g$ . D'où le résultat annoncé.  $\square$

Je pose  $\mathcal{M}^-(a) = f^{-1}(]-\infty, a])$  et  $\mathcal{M}^+(a) = f^{-1}([a, \infty[)$ . Je note  $\mathcal{A}(x)$  l'atome de  $x$ , i.e. la composante connexe de  $\mathcal{M}^-(f(x) + \epsilon) \cap \mathcal{M}^+(f(x) - \epsilon)$  contenant  $x$ .

**Lemme 10.2.18** *Si les bords de  $\mathcal{A}(x)$  sont des surfaces de genre  $g_1, g_2, \dots, g_b$ , alors*

$$\chi(\mathcal{A}(x)) = d_R(x) - \sum_i g_i.$$

**Preuve :** Appliquer le lemme précédent en remarquant que le nombre de bords de  $\mathcal{A}(x)$  est précisément le degré de  $x$  dans le graphe des contours.  $\square$

On s'intéresse à la variation  $\Delta\chi(x)$  de la caractéristique d'un contour lorsque celui-ci balaye un sommet  $x$ .

**Lemme 10.2.19** *On associe un signe  $+(-)$  aux sommets de la sphère  $Link(x)$  si leur  $f$ -valeur est supérieure (inférieure) à  $f(x)$ . Soit  $c^+(x)$  (resp.  $c^-(x)$ ) le nombre de composantes de  $+$  (resp.  $-$ ) de  $Link(x)$ , alors*

$$\Delta\chi(x) = 2(c^+(x) - c^-(x)).$$

**Preuve :** Par définition de  $K(a)$ , on a  $\chi(K(a)) = -\chi(L(a))$  (notons que  $L(a)$  n'est pas un complexe complet mais on considère la caractéristique comme la somme alternée du nombre de  $k$ -cellules). On a donc,

$$\Delta\chi(x) = \chi(L(f(x) - \epsilon) - \chi(L(f(x) + \epsilon)).$$

Par ailleurs, en notant  $Star^+(x)$  (resp.  $Star^-(x)$ ) l'ensemble des simplexes de  $Star(x)$  dont tous les sommets ont une valeur plus grande (resp. plus petite) que  $f(x)$  on a l'égalité ensembliste entre les deux unions disjointes suivantes :

$$L(f(x) - \epsilon) \cup Star^+(x) = L(f(x) + \epsilon) \cup Star^-(x).$$

On note encore  $L^+(x)$  (resp.  $L^-(x)$ ) les simplexes de  $Link(x)$  dont tous les sommets ont une valeur plus grande (resp. plus petite) que  $f(x)$  de sorte que les  $k$ -simplexes de  $L^+(x)$  (resp.  $L^-(x)$ ) sont en bijection avec les  $k+1$ -simplexes de  $Star^+(x)$  (resp.  $Star^-(x)$ ). On a donc

$$\Delta\chi(x) = \chi(L^+(x)) - \chi(L^-(x)).$$

Or si  $b_i^+$  est le nombre de bords d'une composante de  $L^+(x)$ , on a  $\chi(L^+(x)) = \sum_i (2 - b_i^+) = 2c^+(x) - \sum_i b_i^+$  car chaque région est planaire (éventuellement sphérique) et a le type d'homotopie d'une sphère perforée. De même  $\chi(L^-(x)) = 2c^-(x) - \sum_j b_j^-$ . Or  $\sum_i b_i^+ = \sum_j b_j^-$  compte le nombre de régions  $+$  et  $-$  adjacentes. On en conclut le résultat cherché.  $\square$

Notons par ailleurs que la formule ci-dessus reste vrai si on s'intéresse à la variation de caractéristique des contours dont les composantes sont incidentes à  $x$ . En notant  $g_j^+$  (resp.  $g_k^-$ ) les genres des composantes des contours supérieurs (inférieurs) de  $\mathcal{A}(x)$  on



obtient encore  $\sum_i g_i = \sum_j g_j^+ + \sum_k g_k^-$  et  $\Delta\chi(x) = \sum_j (2 - 2g_j^+) - \sum_k (2 - 2g_k^-) = 2(d_R^+(x) - d_R^-(x)) - 2(\sum_j g_j^+ - \sum_k g_k^-)$ . Ce qui s'écrit encore

$$c^+(x) - d_R^+(x) + \sum_j g_j^+ = c^-(x) - d_R^-(x) + \sum_k g_k^-.$$

Ne pas oublier que le morphisme induit en homologie par la projection de  $\mathcal{M}$  sur son graphe des contours est surjectif. D'où  $c_r \leq \beta_1 = \beta_2$  où  $\beta_i$  est le  $i$ -ème nombre de Betti de  $\mathcal{M}$ .