Séance du 24/10/13 (salle 4, IF, 15h30) Discussions sur le Laplacien et la boxité d'un graphe

Persyval Galois

February 7, 2014

1 Laplacien

Yves présente une introduction au Laplacien de graphes.

C'est un opérateur linéaire sur les fonctions $V \to \mathbb{R}$ où V sont les sommets d'un graphe $G = (V, E)$. En voyant ces fonctions comme des cochaînes (à valeur dans $\mathbb{R}$), c'est donc un morphisme de cochaînes.

On demande à cet opérateur d'être symétrique, local et positif. Si $A = (a_{ij})_{i,j \in V}$ est la matrice de l'opérateur dans la base canonique des sommets, cela signifie

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad a_{ij} = 0 \text{ si } ij \notin E \text{ et } i \neq j, \qquad a_{ij} < 0 \text{ si } ij \in E$$

Comme exemple on peut prendre $-adg(G)$ ou $deg(G) - adg(G)$ avec $adg(G)$ la matrice d'adjacence de G et $deg(G)$ la matrice diagonale dont le $k$ième coefficient diagonal est le degré du sommet d'indice k. Un autre exemple classique est l'opérateur A tel que Af envoie chaque sommet sur l'écart entre la f-valeur de ce sommet et la f-valeur moyenne de ses voisins.

L'étude des laplaciens de graphes peut être vue comme une discrétisation des laplaciens sur les variétés Riemanniennes. On étudie alors les fonctions propres des laplaciens. Les domaines nodaux d'une fonction propre sont les composantes connexes de son support (là où elle ne s'annule pas). Un th. de Courant dit qu'une fonction propre associée à la $j$ième valeur propre d'un laplacien a au plus j domaines nodaux et précisément 2 domaines nodaux pour $j = 2$.

L'analogue pour les graphes est le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Pour chaque vecteur propre φ d'un laplacien, on note $n(\varphi)$ le nombre de composantes du graphe G restreint aux sommets de φ-valeurs non nulles et aux arêtes dont les φ-valeurs des extrémités ont même signe. Si φ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ alors*

$$n(\varphi) \leq j$$

où j est le rang maximal de λ dans la liste ordonnée du multi-ensemble des valeurs propres (en commençant avec le rang 1). De plus, si φ est de support minimal dans son sous-espace propre alors on peut prendre pour j le rang minimal de λ dans cette liste.

On pourra consulter à ce sujet [2].

Autre résultat : Si G est le graphe d'une triangulation de la sphère alors la multiplicité de la seconde valeur propre de tout laplacien est au plus 3.

Louis poursuit la séance.

On commence par se familiariser avec le paramètre μ d'Yves. Les résultats suivant sont connus [1], [2], même s'ils ne sont pas évidents :

- $\mu(G) \leq 1$ si et seulement si G est une forêt de chemins
- $\mu(G) \leq 2$ si et seulement si G est planaire-extérieur (admet un plongement plan pour lequel tous les sommets sont sur le bord de la face externe = le cône sur le graphe est planaire)
- $\mu(G) \leq 3$ si et seulement si G est planaire
- $\mu(G) \leq 4$ si et seulement si G est linklessly embeddable (a un plongement dans $\mathbb{R}^3$ sans entrelacs de cycles disjoints).
- μ est monotone pour la relation de mineur : si H est un mineur de G alors $\mu(H) \leq \mu(G)$.
- $\mu(G) \leq \mu(G - v) + 1$ pour tout $v \in V(G)$ et si v voit tous les autres sommets du graphe, alors il y a égalité, sauf si $G = K_i$ ($i = 1, 2, 3$). !
- Sous-division: Si $\mu(G) \geq 3$, la sous-division d'arêtes ne change pas μ. (Si $\mu(G) < 3$ la sous-division peut augmenter μ: $\mu(K_4 - e) = 2$, $\mu(K_{2,3}) = 3$.) !
- transformation triangle-étoile: pour un triangle sur les sommets a, b, c ($ab, bc, ca \in E(G)$) ajoutons un sommet x joint aux trois sommets a, b, c, de plus supprimons les arêtes ab, bc, ca. !

  Résultat de Roland et Yves : Une transformation triangle-étoile (et son inverse, la transformation étoile-triangle) ne changent pas $\mu(G)$ si $\mu(G) \geq 4$. (Si $\mu(G) < 3$ triangle-étoile peut augmenter μ.)

Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ d'un graphe G est le plus petit nombre c de couleurs tel que G admette une coloration propre de ces sommets (deux sommets adjacents ont des couleurs distinctes) à c couleurs.

Une conjecture d'Yves: $\mu(G) \geq \chi(G) - 1$.

Cette conjecture contient le théorème des 4-couleurs, et est impliquée par la conjecture d'Hadwiger (qui dit qu'un graphe qui n'est pas coloriable en k couleurs a un mineur K_{k+1}) en utilisant $\mu(K_n) = n - 1$ [1], qu'Yves nous a expliquée à la première séance. !

2 Boxicité

Louis présente ensuite la notion de boxicité.

La **boxicité** a été introduite à la fin des années 60. Une boîte de $\mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles. La *boxicité* $box(G)$ est le plus petit d tel que G est le graphe d'intersection de boîtes de $\mathbb{R}^d$. Ce n'est pas un paramètre facile à calculer : décider si un graphe est de boxicité 2, i.e. représentable par intersections de rectangles // aux axes, est NP-complet.

On sait que

Théorème 2.1
- *Une forêt de chemins a boxicité au plus 1*
- *un graphe planaire extérieur a boxicité au plus 2*
- *un graphe planaire a boxicité au plus 3 (mieux, on peut même montrer qu'il existe une représentation de tout graphe planaire avec des boîtes de $\mathbb{R}^3$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints).*

On peut remarquer que tout graphe d'intersection de boîtes de R^d est l'intersection de d graphes d'intersection de segments (interval graphs) qui sont les projections des boîtes sur chaque coordonnée. Ici, l'intersection de graphes (V, E_i) sur un ensemble commun de sommets V est $(V, \bigcap_i E_i)$.

Théorème 2.2 *Pour un graphe G a n sommets, $box(G) \leq n/2$.*

PREUVE. On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 2$. Si G est un graphe complet, $box(G) \leq 1 \leq n/2$. Sinon G contient deux sommets, disons u et v, qui ne sont pas adjacents. Par récurrence, le graphe $H = G \setminus \{u, v\}$ est l'intersection de $n/2 - 1$ graphes d'intervalles $I_1, \ldots, I_{n/2-1}$. Pour rajouter u et v, on commence par rajouter dans chaque graphe I_j, $1 \leq j \leq n/2 - 1$, deux intervalles correspondant à u et v et qui intersectent tous les autres intervalles. On ajoute ensuite un nouveau graphe d'intervalle $I_{n/2}$ définit comme suit. Les sommets u et v sont envoyés vers les points $\{0\}$ et $\{2\}$, respectivement, et les sommets de G qui ne sont voisins ni de u ni de v sont envoyés vers le point $\{1\}$. Les voisins de u qui ne sont pas adjacents à v sont envoyés vers l'intervalle $[0,1]$, et les voisins de v qui ne sont pas adjacents à u sont envoyés vers l'intervalle $[1,2]$. Finalement, les voisins communs de u et v sont envoyés vers l'intervalle $[0,2]$. On peut vérifier que G est précisément l'intersection des graphes I_j, $1 \leq j \leq n/2$, et on a donc bien $box(G) \leq n/2$. $\square$

La borne dans le théorème est atteinte par le complémentaire G d'un couplage parfait (pour $n = 2k$ sommets) – un exemple de Roberts. En effet, chacun des $n/2$ non-arêtes de ce graphe doivent être non-arêtes dans au moins un des graphes d'intervalle dont G est l'intersection, mais il ne peut pas y avoir deux non-arêtes, ab et cd qui sont non-arêtes dans le même graphe d'intervalle, car alors $\{a,b,c,d\}$ induirait un cycle de longueur 4, qu'un graphe d'intervalle ne peut pas avoir. !

Lemme 2.1 *Si G et H sont deux graphes construit sur un ensemble commun de sommets alors*

$$box(G \cap H) \leq box(G) + box(H)$$

Preuve. Choisir une représentation de G et de H en dimension $box(G)$ et $box(H)$ respectivement. On en déduit une représentation de $G \cap H$ en dimension $box(G)+box(H)$ en représentant chaque sommet de boîtes associées b_G pour G et b_H pour H par la boîte $b_G \times b_H$. $\square$

Une **coloration acyclique** de G est une coloration propre des sommets de G telle que tout cycle de G utilise au moins trois couleurs (c'est trivialement vérifié par les cycles de longueur impaire). Le nombre minimal de couleurs d'une coloration acyclique se note $\chi_a(G)$. Le théorème suivant est une remarque dans [3, page 3] avec la preuve suivante:

Théorème 2.3 *Pour tout graphe G qui ne contient pas de mineur K_t on a $box(G) = O(t^4(G) \log^2 t)$.*

Preuve. On montre d'abord que $box(G)$ est bornée par $\chi_a(G)$:

Claim 1: [3, Lemma 1] If $\chi_a(G) \geq 2$, $box(G) \leq \chi_a(G)(\chi_a(G) - 1)$.

En effet, soit c une coloration acyclique de G à $k = \chi_a(G)$ couleurs prises dans $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Pour chaque paire de couleurs $i \neq j$, on considère le graphe G_{ij} obtenu en ajoutant des arêtes à G de sorte que chaque sommet de couleur distincte de i et j soit relié à tous les sommets de G. Puisque deux sommets de couleurs i et j sont reliés dans G_{ij} si et seulement s'ils le sont dans G, on a $G = \cap_{i<j} G_{ij}$. Affirmation : $box(G_{ij}) \leq 2$. En effet,

le sous graphe H de G_{ij} induit par les sommets de couleur i et j est sans cycle par hypothèse sur c. C'est donc une forêt d'arbres. Chaque arbre étant planaire extérieur a une boxicité au plus deux par le théorème 2.1. Puisque les autres sommets sont tous reliés entre-eux et aux sommets de H, il suffit de représenter chacun de ces sommets par un même rectangle entourant une représentation 2D de H pour obtenir une représentation 2D de G_{ij}. On observe finalement que $box(\cap_{i\neq j} G_{ij}) \leq \sum_{i\neq j} box(G_{ij})$, d'où $box(G) \leq 2\binom{k}{2} = k(k-1)$.

Claim 2: Si G ne contient pas K_t comme mineur alors $\chi_a(G) = O(t^2 \log t)$!

En effet, par un théorème de Kostochka et Thomason si G ne contient pas K_t comme mineur, il contient un sommet de degré $O(t\sqrt{\log t})$); par un résultat de Ossona de Mendez et Nešetril, si tous les mineurs de G contiennent un sommet de degré au plus k, $\chi_a(G) = O(k^2)$. En juxtaposant les deux résultats le claim est prouvé.

En substituant Claim 2 dans Claim 1 on a le théorème. □

Corollaire 2.1 *Pour tout graphe G on a $box(G) = O(\mu^4(G)\log^2 \mu(G))$.*

Preuve. Louis : Comme par Yves $\mu(K_n) = n-1$ et μ est mineur-monotone: G ne contient pas $K_{\mu(G)+2}$ comme mineur, et donc le théorème peut être appliqué pour $t = \mu + 2$. □

3 Inégalités ?

Conjecture 3.1 *(Louis) Pour tout graphe G, on a $box(G) \leq \mu(G)$.*

Je n'ai pas de contre-exemple, mais j'ai des signes que ça sera peut-être plutôt $box(G) \leq \mu(G)+1$. Ce changement n'est pas grand, mais peut porter un message pour la preuve:

Au début de notre dernière rencontre nous avons un peu regardé $\nu(G)$ (voir Gram labelings in [2, Section 3.2]), 'l'autre nombre de Colin de Verdière' , une représentation géométrique plus proche de l'esprit de 'box'. On aurait eu envie de déduire à partir d'un Gram-labelling une représentation par boîtes dans le même espace; en y arrivant, on montrerait l'inégalité $box(G) \leq \nu(G)$.

Le mail d'Yves sur les représentations sphériques et son document attaché [?] montre que les Gram-labelling sont strictement liés à ces représentations sphériques !

Note: $\nu(G) = 4$ est possible pour les graphes planaires. Une première question:

Question : Peut-on prouver que $box(G) \leq 4$ pour les graphes planaires à partir d'une représentation sphérique ou de Gram ? (On sait par Thomassen que même 3 est vrai, mais une connexion entre les deux représentaions par une définition naturelle des boîtes pourrait être généralisable.)

Il y a eu des idées pour prouver $box(G) \leq \nu(G)$, et il faudrait y retourner, mais si on regarde le théorème suivant on ne voit pas la relation à la Conjecture 3.1. D'où mon acharnement à des relations entre $\mu(G)$ et $\mu(\bar{G})$. On va voir qu'il y a une relation en forme d'inégalité conjecturée.

Théorème 3.1 *[2]* $\nu(\bar{G}) = n - \mu(G) - 1$.

Et si malgré tout on pouvait mettre aussi bien $\mu(\bar{G})$ sur le côté gauche ? En ce cas là $\mu = \nu$ et on peut passer à notre ν plus proche de la boxité ! Louis m'a répondu en trouvant un argument décourageant dans [4]: *tout graphe admet une sous-division avec* $\mu(\bar{G}) \geq n-5$. En effet, comme μ n'augmente pas par la sous-division (une des propriétés ci-dessus), ceci montre que $\mu(G) + \mu(\bar{G})$ ne peut pas être borné de dessus. Mais:

En fait l'inégalité qui pourrait encore exister entre $\mu(\bar{G})$ et $\mu(G)$ est dans le bon sens pour nous! Et c'est dans [2, Section 8] en forme de 'possibilité', entre les lignes:

Conjecture 3.2 *Pour tout graphe G, on a $\nu(G) \leq \mu(G) + 1$ (cad $\mu(G) + \mu(\bar{G}) \geq n - 2$, une troisième forme équivalente est $\nu(G) + \nu(\bar{G}) \leq n$).*

La borne ne peut pas être amélioré: il y a des graphes planaires pour lesquels $\nu(H) = 4$.

Conjecture 3.3 *Pour tout graphe G, on a $box(G) \leq \nu(G)$.*

Cette borne ne peut pas être améliorée, non plus : par exemple pour un cycle sur au moins 4 sommets, $box = \nu = 2$ à voir si on peut avoir ça pour *box* arbitrairement grand.

Il est possible que la difficulté de Conjecture 3.1 soit due à ce que ca doit peut-être passer par Conjecture 3.2, qui est peut-être difficile. En ce cas là Conjecture 3.1 devient une conjecture plus abordable. Cette hypothèse est soutenu par le fait que *box* et *nu* sont tous les deux des minima et il y a une ressemblance au moins de forme entre leurs définitions.

Remarques:

1. La *sous-division* d'arêtes stimule une tentation pour un contre-exemple à cette dernière conjecture : en effet, ça ne change pas μ (voir au début, et

donc par le théorème ça ne change pas ν non plus), mais ça peut augmenter $box(G)$, par exemple $box(K_n) = 1$, mais en sous-divisant ça augmente. De plus, par [4][Corollary 8.9] tout graphe admet une sous-division avec $\nu \leq 4$!

(Mal)Heureusement ceci n'est pas un contre-exemple : par Théorème [3] on voit vite que la boxité reste (ou devient) une petite constante avec la sous-division (on voit immédiatement que ça ne dépasse pas 6 si on divise assez) et par [3][Theorem 13] on peut, en effet, descendre jusqu'à 4. Mais *ceci confirme la ressemblance* entre box et μ !

2. Les deux dernières conjectures donneraient l'inégalité un tout petit peu plus faible que la conjecture de Louis: $box(G) \leq \mu(G) + 1$.

3. Comme par hasard les bornes sup connues pour μ ou ν sont toujours vraies pour box. Voir par exemple le tree width (thèse de Goldberg Thm 2.3.5 et article de Chandran et Sivadasan côté boxité), ou les degrés ...

On ne peut pas nécessairement 'séparer' $box(G)$ et $\mu(G)$ ou $\nu(G)$ comme par exemple la preuve de Corollaire 2.1 entre $box(G)$ et $O(\mu^4(G)\log^2\mu(G))$. En effet, pour ce dernier la séparation c'est $t^4(G)\log^2 t$ où t est tel que le graphe G contient un mineur K_t. La preuve montre que $box(G)$ est toujours inférieur ou égale à cette quantité et on sait que c'est toujours inférieure ou égale à $\mu^4(G)\log^2\mu(G)$.

Mais on pourrait essayer *pour une borne commune pour tous les trois invariants* trouver des exemples exactes pour la boxicité qui ne sont peut-être pas exacte pour les autres ... Ceci conduit à la question des problèmes extrémaux:

Maximiser μ sur les surfaces de genre donné a été résolu par [1] par les méthodes qu'Yves nous explique. Pour la même question sur la boxicité il y a des réponse dans [3]. Comment se comportent le μ des exemples extrémaux pour box ?

D'autres questions similaires :

Questions: Nombre d'arêtes m, borne de Pendavingh: $\mu \leq \sqrt{2m}$. Borne sur la boxicité max en termes de m ? Exemples extrémaux et leur μ ? Max boxicité pour les graphes sans K_t [3] ? Le μ des exemples extrémaux ?

...

Quelqu'un pourrait avoir envie de s'investir plus en profondeur dans les inégalités concernant box, μ, ν, les calculer ou borner pour des preuves ou un contre-exemples potentiels. On peut certainement trouver des connexions intéressantes avec un peu d'investissement ...

References

[1] Y. Colin de Verdière Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, (1990), 11–21,

[2] H. van der Holst, L. Lovász, A. Schrijver, The Colin de Verdière Graph Parameter.

[3] L. Esperet, G. Joret, Boxity in Graphs on Surfaces !

[4] A. Kotlov, L. Lovász, S. Vempala, The Colin de Verdière Number and Sphere Representations of a Graph, Combinatorica **17** (4) (1997) 483-521