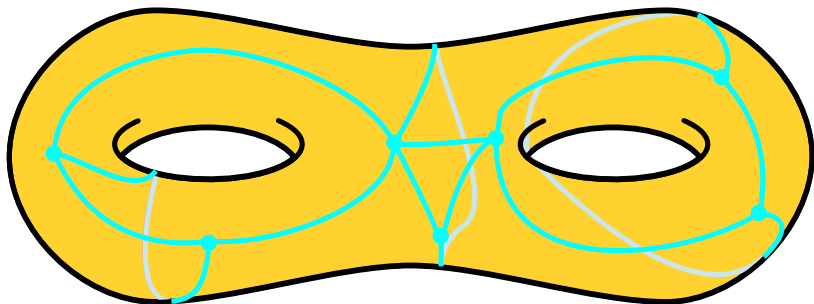


Homotopie et optimisation de courbes sur les surfaces combinatoires

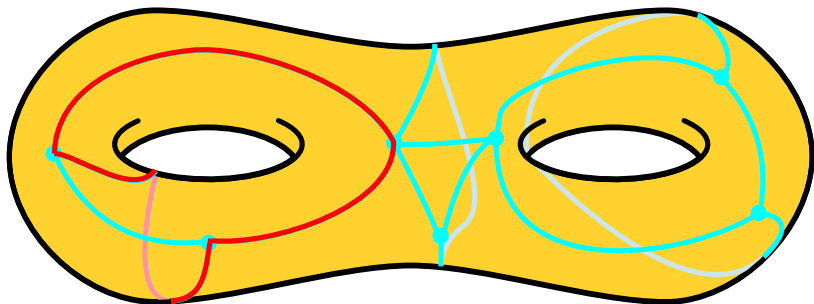
Francis Lazarus

GIPSA-Lab, CNRS, INPG

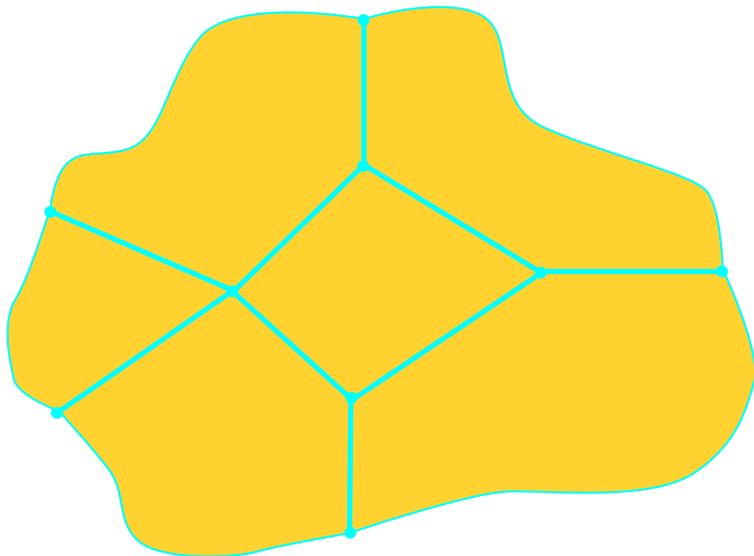
Surface combinatoire



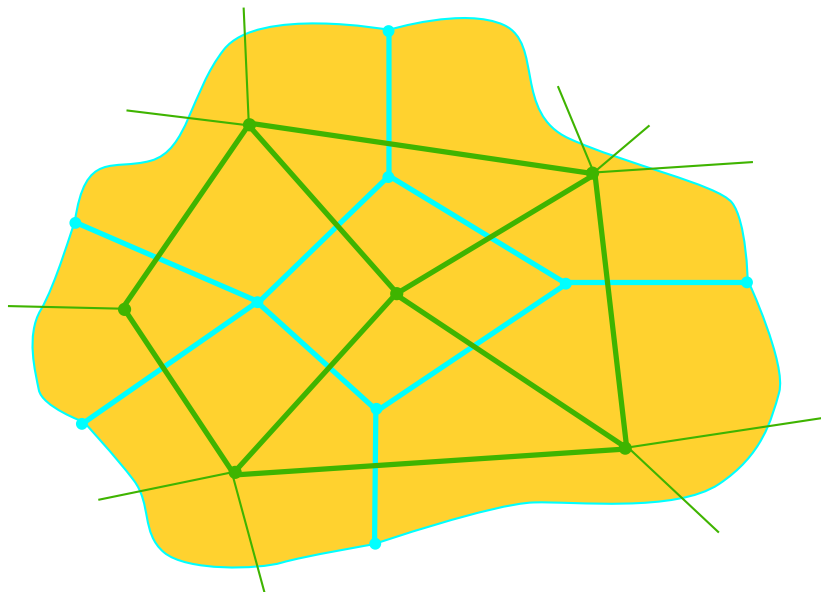
Surface combinatoire



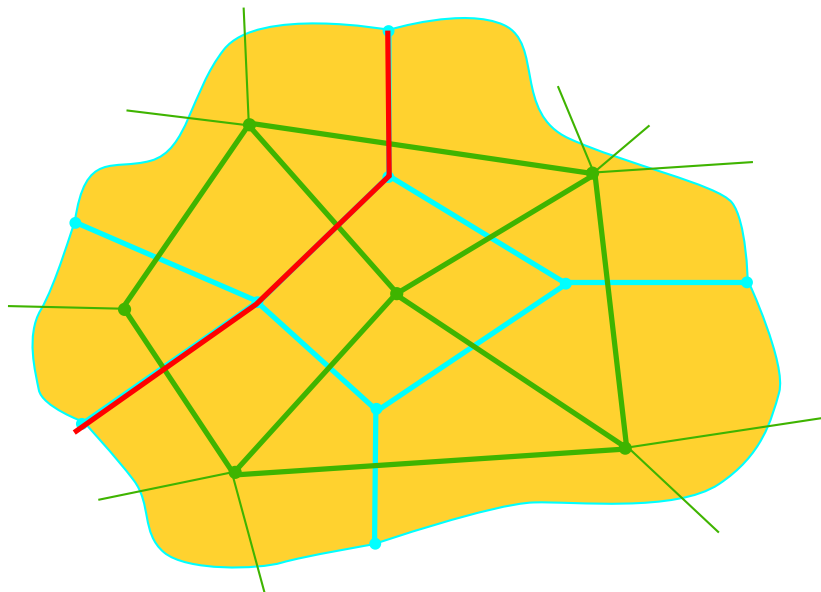
Modèle dual



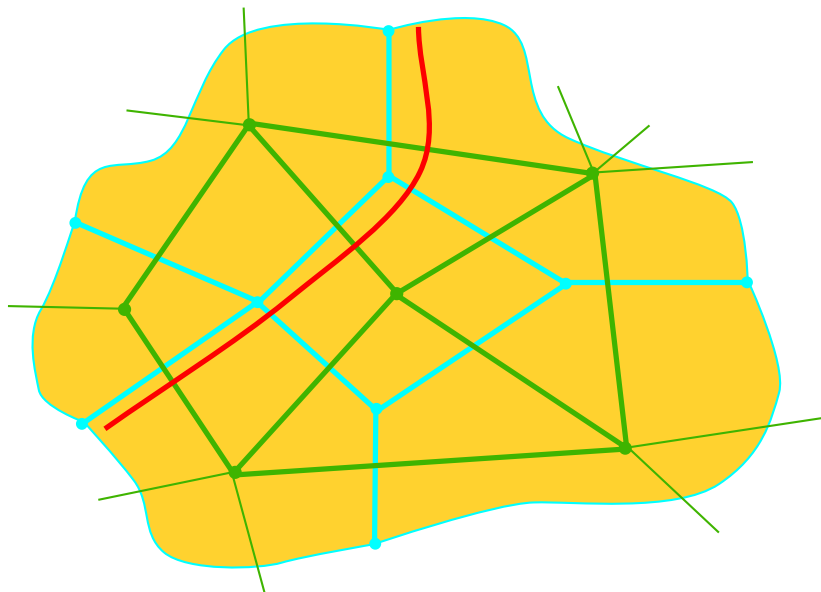
Modèle dual



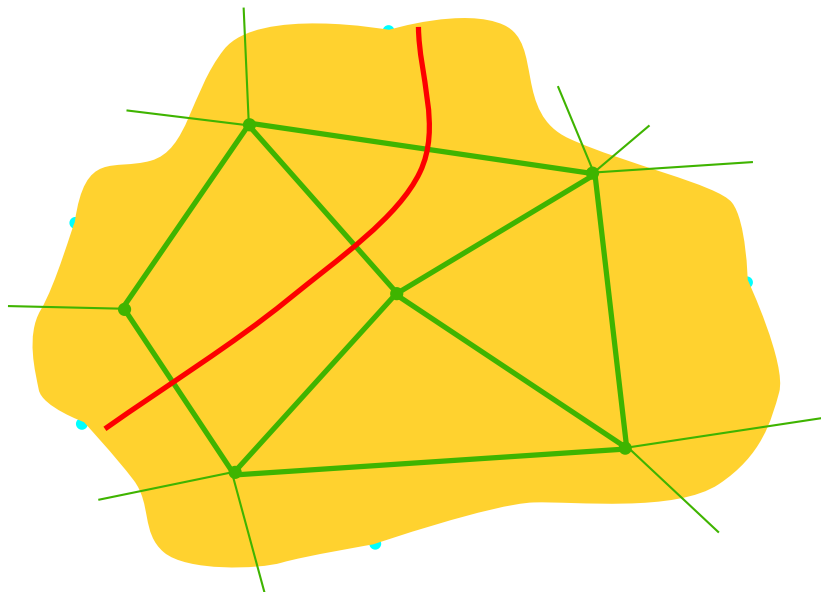
Modèle dual



Modèle dual



Modèle dual



Chemins, cycles, lacets, homotopie, π_1

$p, q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ avec $p(0) = p(1) = q(0) = q(1)$

$p \simeq q$ si $\exists F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} :$

$$\begin{cases} \forall t \in [0, 1] & F(0, t) = F(1, t) = p(0) \\ \forall s \in [0, 1] & F(s, 0) = p(s) \\ \forall s \in [0, 1] & F(s, 1) = q(s) \end{cases}$$

Définition

$\pi_1(\mathcal{M}, x) = \text{ens. lacets de base } x \text{ modulo } \simeq \text{ avec loi de concaténation.}$

Homotopie libre de cycles

$$c, d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{M}$$

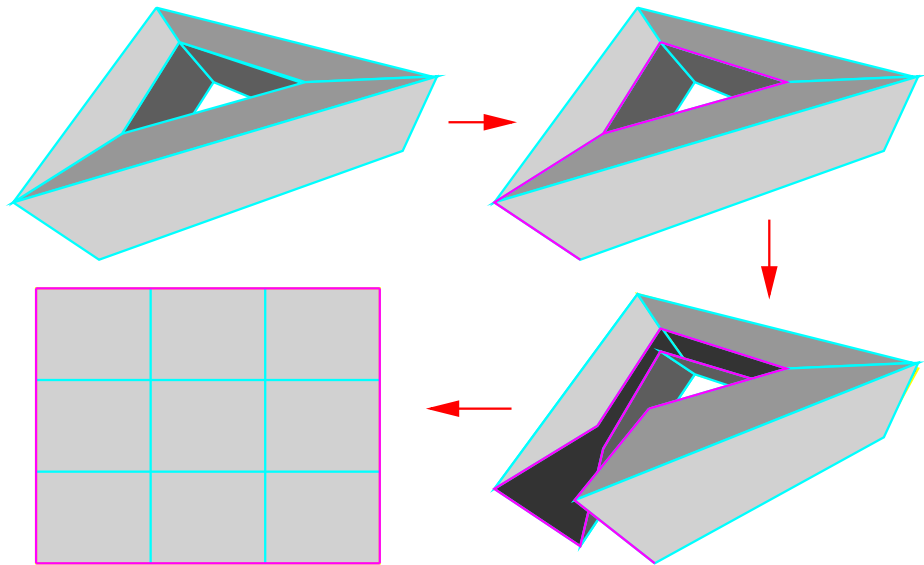
$$c \stackrel{\text{libre}}{\simeq} d \text{ si } \exists F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} :$$

$$\begin{cases} \forall s \in [0, 1] & F(s, 0) = c(s) \\ \forall s \in [0, 1] & F(s, 1) = d(s) \end{cases}$$

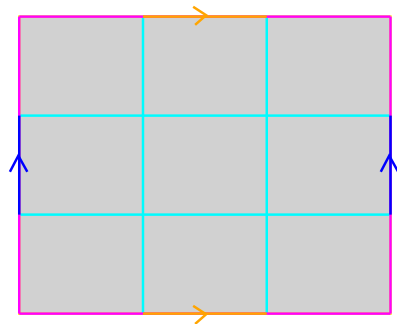
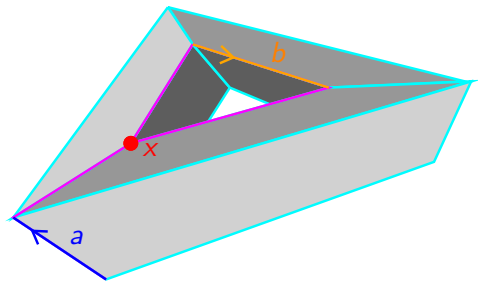
Pour tout cycle c , un chemin d'approche $c(0) \rightsquigarrow x$ définit un élément $[c]$ de $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ à conjugaison près.

Lemme

$c \stackrel{\text{libre}}{\simeq} d$ ssi $[c]$ et $[d]$ sont conjugués.

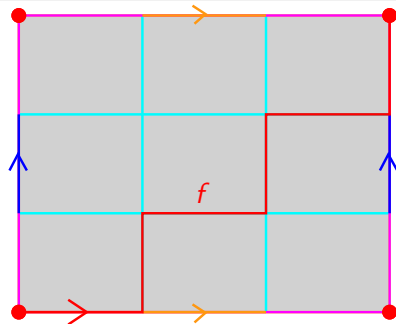
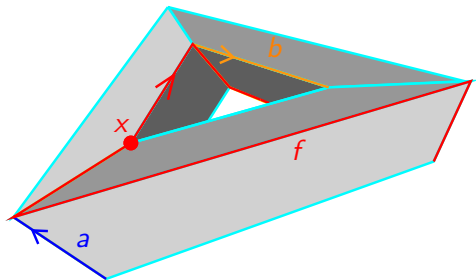
Calcul du π_1 

Calcul du π_1



$$\pi_1(T, x) \approx \langle a, b \mid ab a^{-1} b^{-1} = 1 \rangle$$

Test d'homotopie



$$W(f) = ab$$

$f \stackrel{\text{libre}}{\simeq} g \Leftrightarrow W(f) \text{ et } W(g) \text{ sont conjugués}$

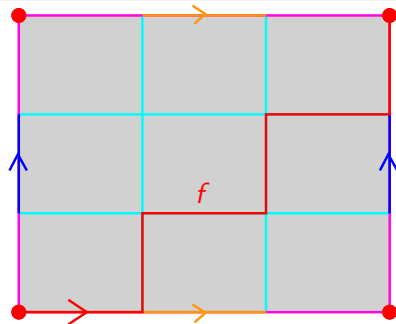
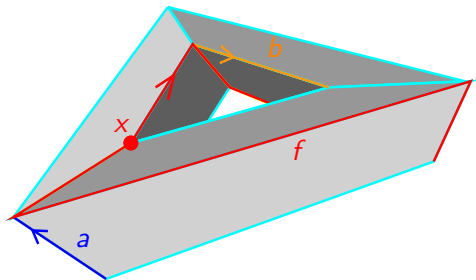
[Dey and Guha, 1999]

Décision en $O(n + k_1 + k_2)$

Cas ouverts : \mathcal{M} orientable, $g(\mathcal{M}) = 2$ ou

\mathcal{M} non-orientable, $g(\mathcal{M}) = 3, 4$

Test d'homotopie



$$W(f) = ab$$

$f \stackrel{\text{libre}}{\simeq} g \Leftrightarrow W(f) \text{ et } W(g) \text{ sont conjugués}$

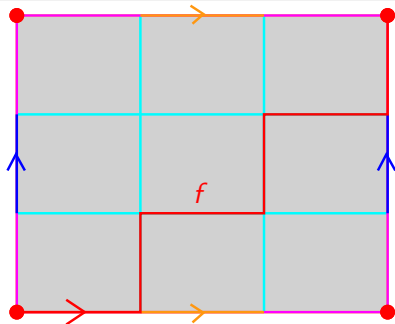
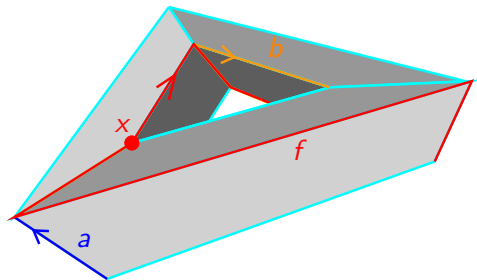
[Dey and Guha, 1999]

Décision en $O(n + k_1 + k_2)$

Cas ouverts : \mathcal{M} orientable, $g(\mathcal{M}) = 2$ ou

\mathcal{M} non-orientable, $g(\mathcal{M}) = 3, 4$

Test d'homotopie



$$W(f) = ab$$

$f \stackrel{\text{libre}}{\simeq} g \Leftrightarrow W(f) \text{ et } W(g) \text{ sont conjugués}$

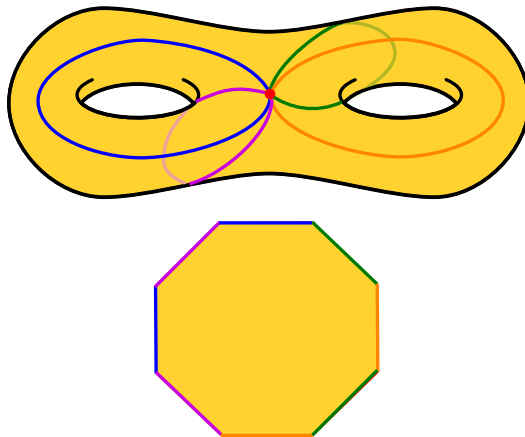
[Dey and Guha, 1999]

Décision en $O(n + k_1 + k_2)$

Cas ouverts : \mathcal{M} orientable, $g(\mathcal{M}) = 2$ ou

\mathcal{M} non-orientable, $g(\mathcal{M}) = 3, 4$

Système canonique

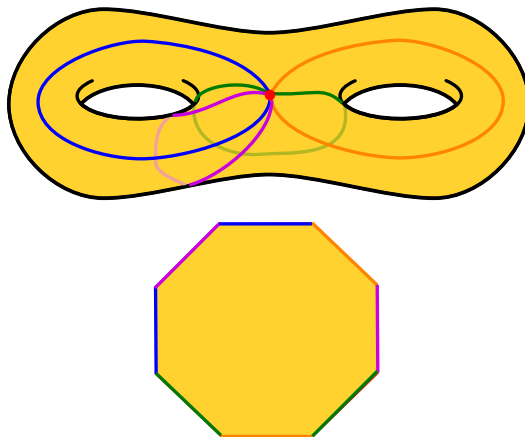


$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

[Vegter and Yap, 1990], [Lazarus et al., 2001]

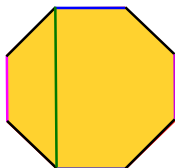
Calcul d'un système canonique en temps optimal $O(gn)$.

Système canonique

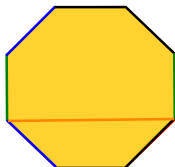


$$ad^{-1}bc \, dc^{-1}a^{-1} \, b^{-1}$$

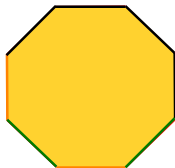
Système canonique



$$[\dots] \underbrace{a X b Y a^{-1} Z b^{-1} W}_{b \rightarrow c}$$

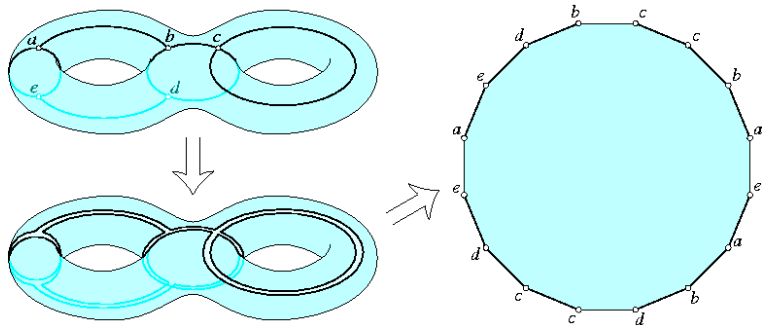


$$[\dots] \underbrace{c Z Y a^{-1} c^{-1} a X W}_{a \rightarrow d}$$



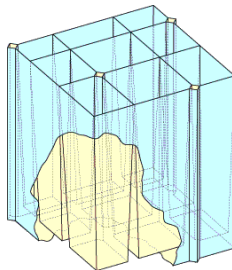
$$[\dots] [c, d] Z Y X W$$

Plus petit graphe des coupe



Pb: Calcul d'un sous-graphe de longueur minimal dont le complémentaire est un disque topologique.

Plus petit graphe de coupe



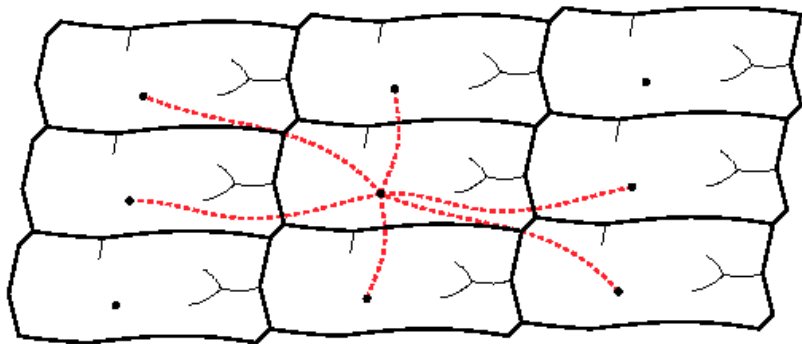
[Erickson, Har-Peled, 2002]

NP-difficile par réduction du pb du sous-arbre de Steiner.
 $O(\log^2 g)$ -approximation en $O(g^2 n \log n)$ time.

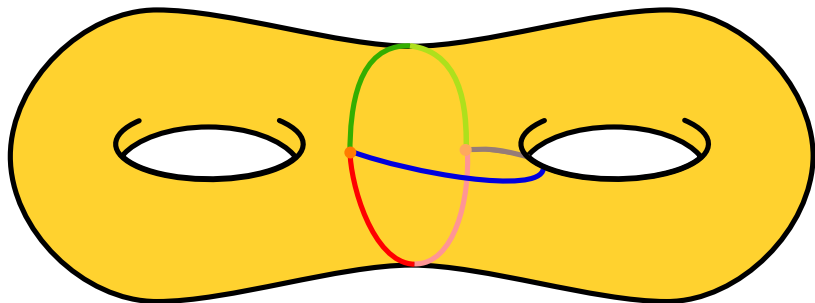
Plus petit système fondamental

[Erickson and Whittlesey, 2005]

On peut calculer un système fondamental de longueur minimale en temps $O(n \log n + gn)$



Condition des trois chemins

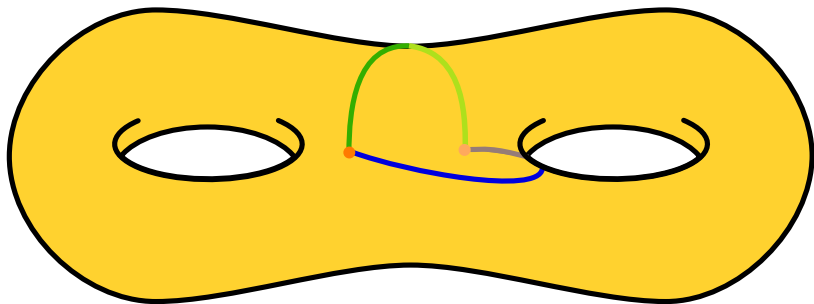


[Thomassen 90]

Exemples : Les cycles non-séparateurs, les cycles non-contractiles

Contre-exemples : Les cycles séparateurs non-contractiles, une classe d'homotopie

Condition des trois chemins

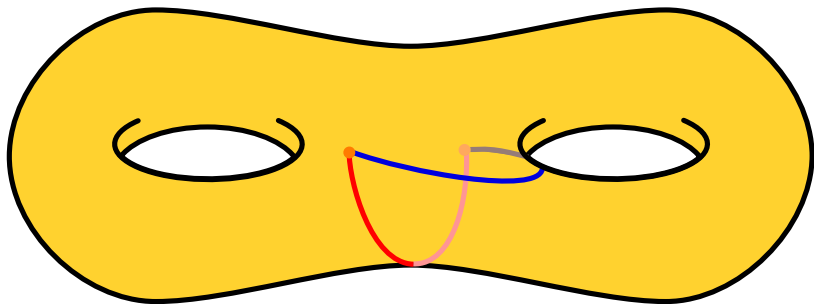


[Thomassen 90]

Exemples : Les cycles non-séparateurs, les cycles non-contractiles

Contre-exemples : Les cycles séparateurs non-contractiles, une classe d'homotopie

Condition des trois chemins

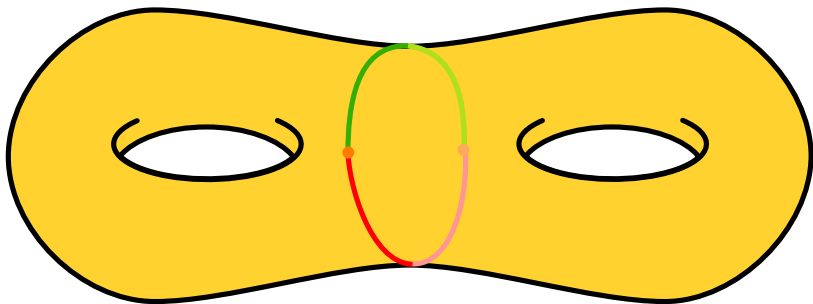


[Thomassen 90]

Exemples : Les cycles non-séparateurs, les cycles non-contractiles

Contre-exemples : Les cycles séparateurs non-contractiles, une classe d'homotopie

Condition des trois chemins

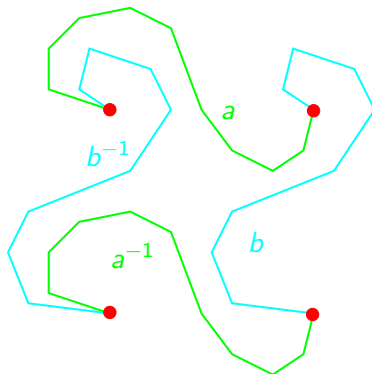


[Thomassen 90]

Exemples : Les cycles non-séparateurs, les cycles non-contractiles

Contre-exemples : Les cycles séparateurs non-contractiles, une classe d'homotopie

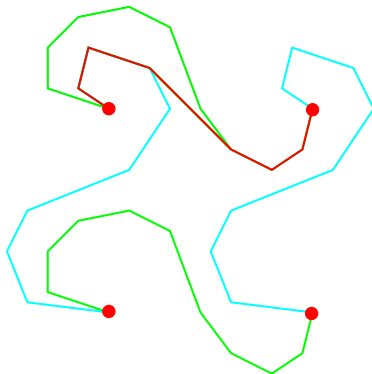
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

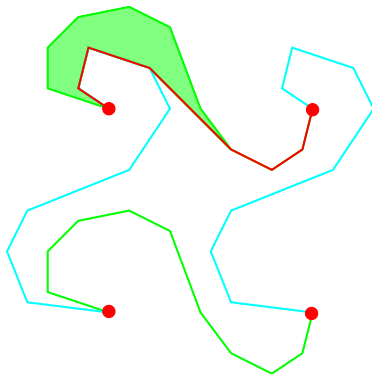
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

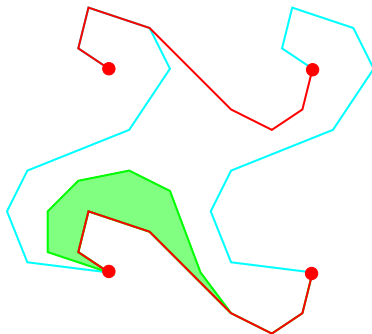
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

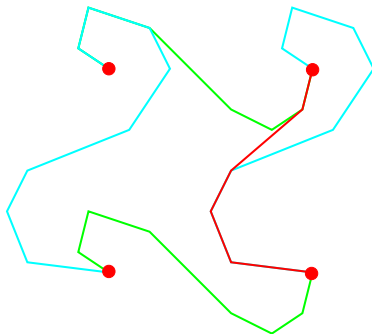
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

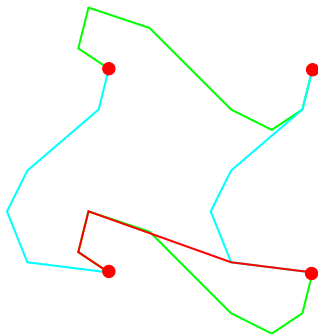
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

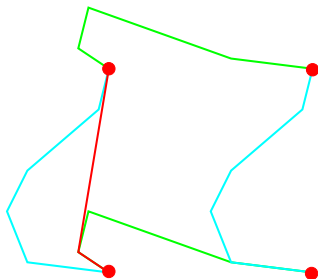
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

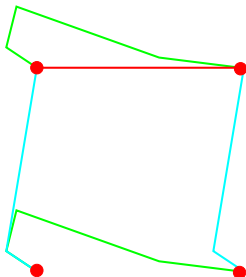
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

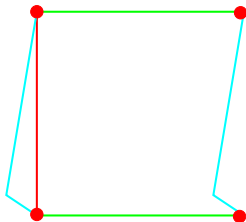
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

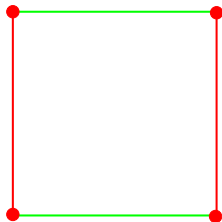
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

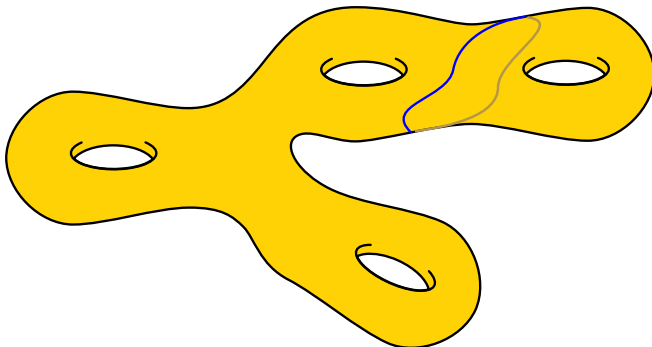
Représentant minimal dans une classe d'homotopie



[Colin de Verdière et Lazarus, 2002]

Soient S de taille n et genre g et $\alpha = \max(|e_i|)/\min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal homotope en temps $O(g^2 \alpha k^2 (g \alpha k + n) \log(g \alpha k + n))$.

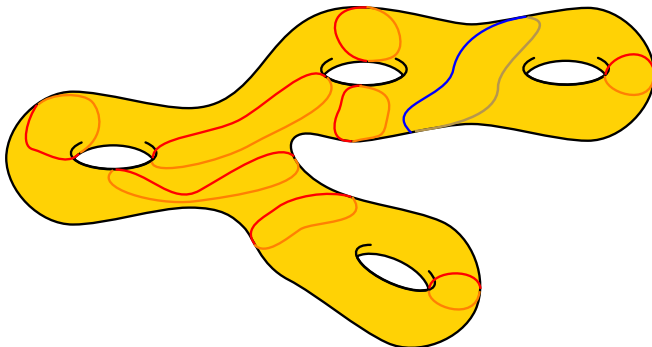
Représentant minimal dans une classe d'homotopie libre



[Colin de Verdière et Lazarus, 2003]

Soient S de taille n et genre g avec b bords et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal *librement* homotope en temps $O((g + b)^2 \alpha^2 (k + n)^3 \log(\alpha k + n))$.

Représentant minimal dans une classe d'homotopie libre



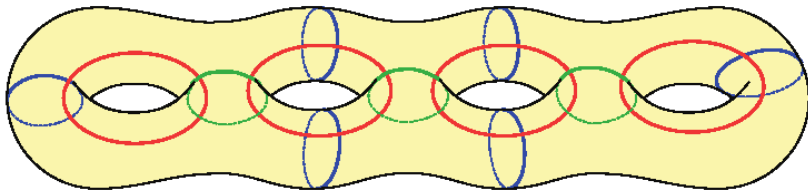
[Colin de Verdière et Lazarus, 2003]

Soient S de taille n et genre g avec b bords et $\alpha = \max(|e_i|) / \min(|e_j|)$. Soit un lacet *simple* de taille k . On peut calculer un lacet *simple* minimal *librement* homotope en temps $O((g + b)^2 \alpha^2 (k + n)^3 \log(\alpha k + n))$.

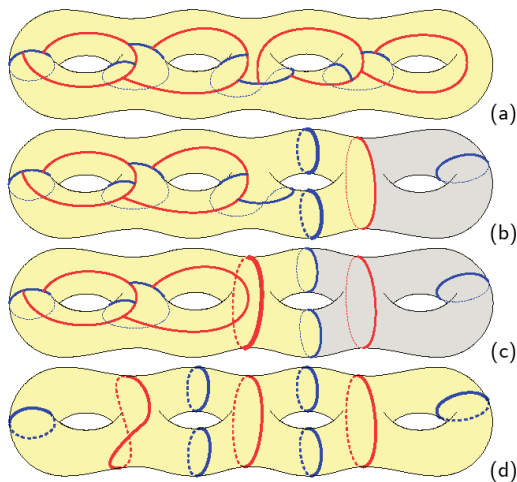
Représentant minimal dans une classe d'homotopie

Cas général [Erickson, Colin de Verdière 2006]

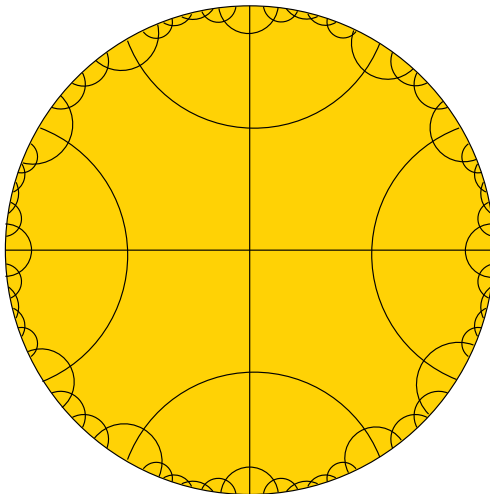
- 1 Décomposition octogonale
- 2 Construction de la zone admissible du R.U.
- 3 calcul de p.c.c. dans la zone admissible



Décomposition octogonale

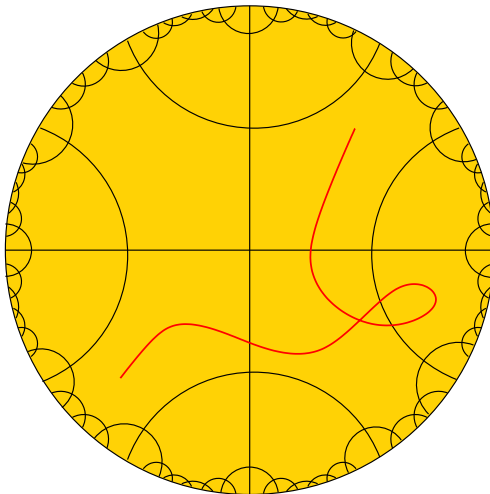


Construction de la zone admissible et calcul p.c.c



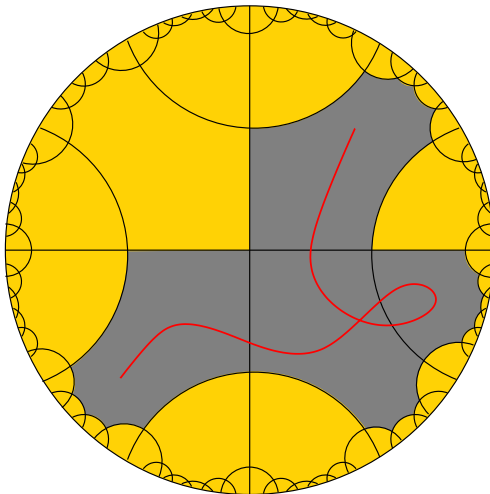
Analyse : Argument de Dehn pour la taille de la zone admissible.

Construction de la zone admissible et calcul p.c.c



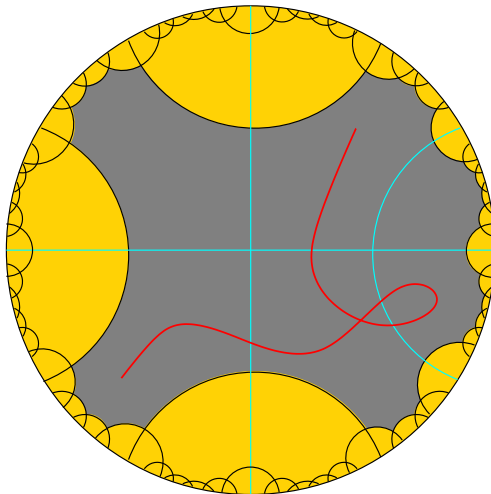
Analyse : Argument de Dehn pour la taille de la zone admissible.

Construction de la zone admissible et calcul p.c.c



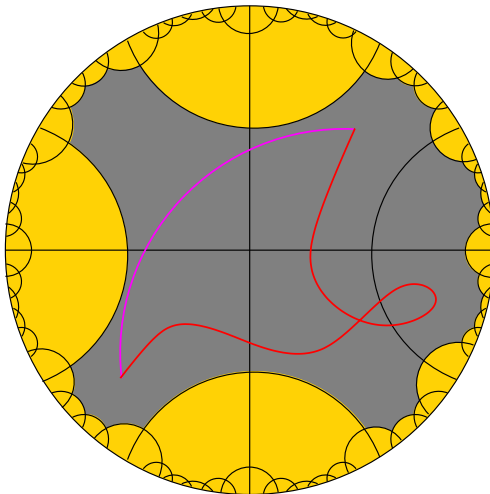
Analyse : Argument de Dehn pour la taille de la zone admissible.

Construction de la zone admissible et calcul p.c.c



Analyse : Argument de Dehn pour la taille de la zone admissible.

Construction de la zone admissible et calcul p.c.c

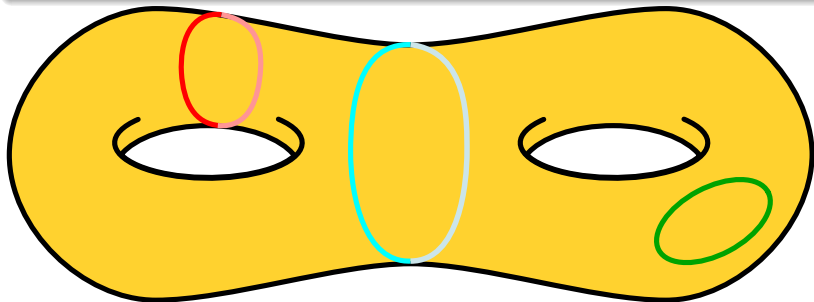


Analyse : Argument de Dehn pour la taille de la zone admissible.

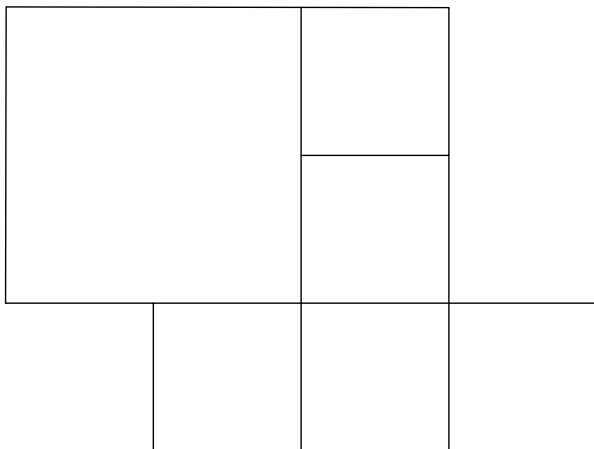
Plus court cycle de partage

[Chambers et al., 2006]

Le calcul d'un pccp est NP-difficile. Il existe un algorithme de complexité $g^{O(g)} n \log n$ (le problème est FPT).

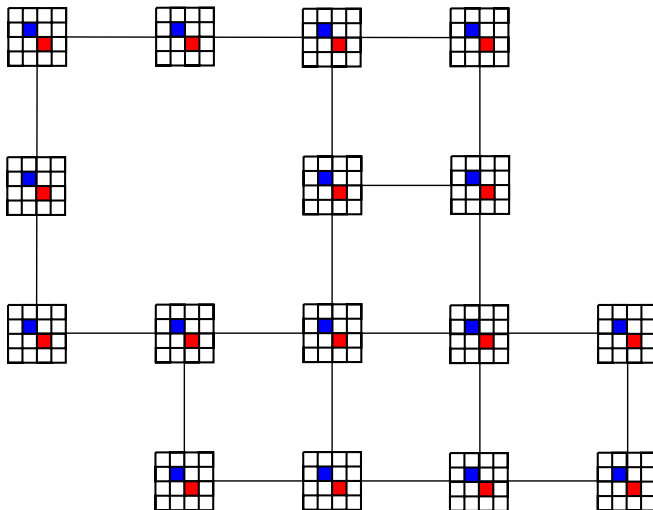


Réduction cycle Hamiltonien au cycle séparateur

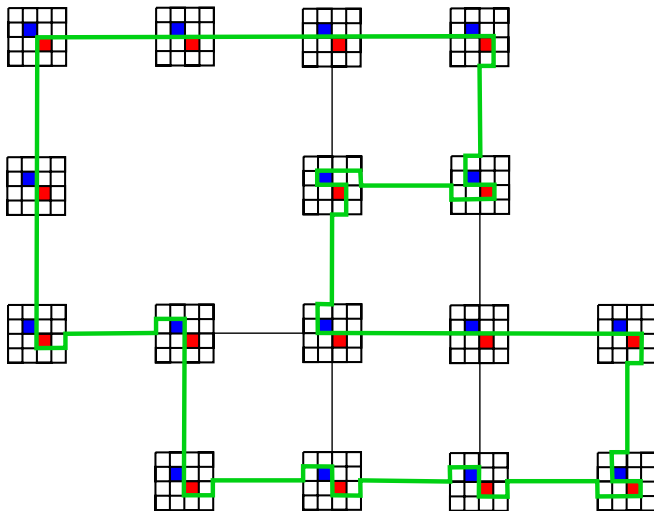


Graphe grille

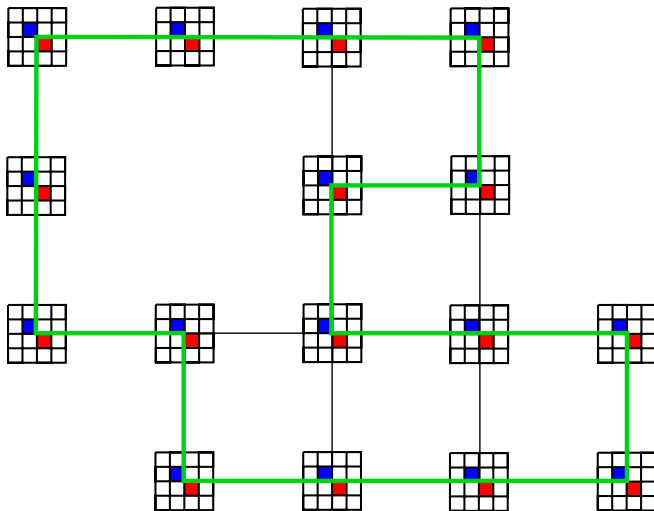
Réduction cycle Hamiltonien au cycle séparateur



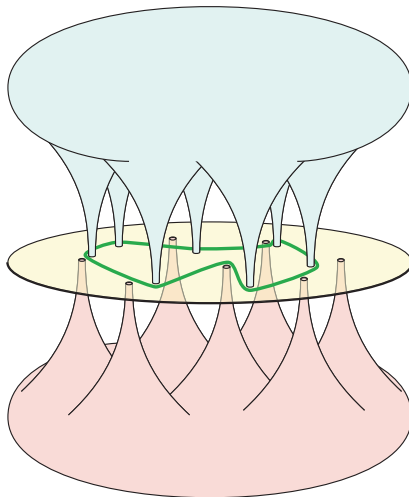
Réduction cycle Hamiltonien au cycle séparateur



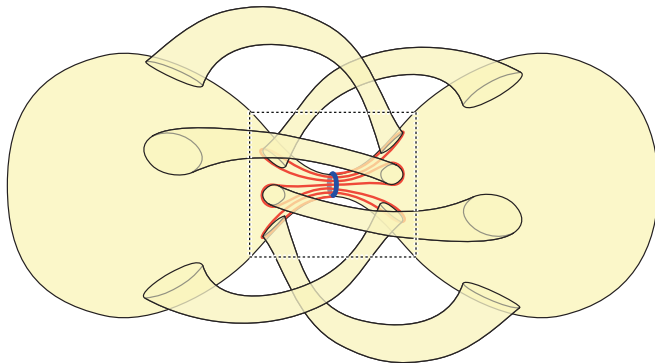
Réduction cycle Hamiltonien au cycle séparateur



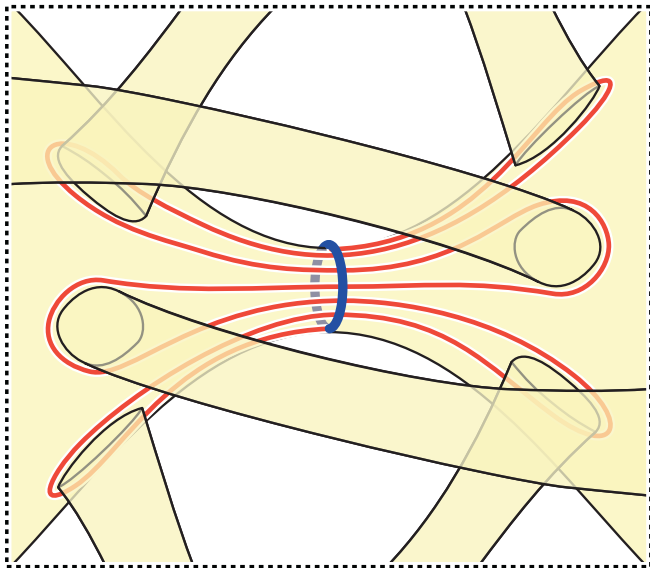
Réduction cycle séparateur à PCCP



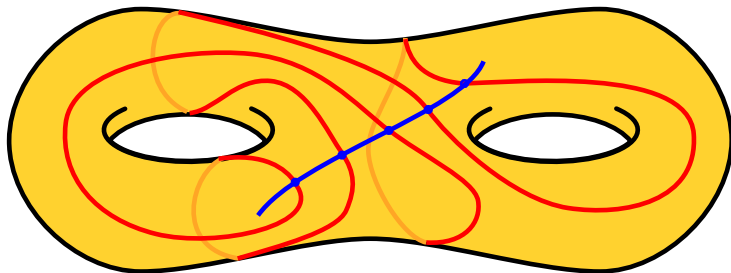
Configuration défavorable



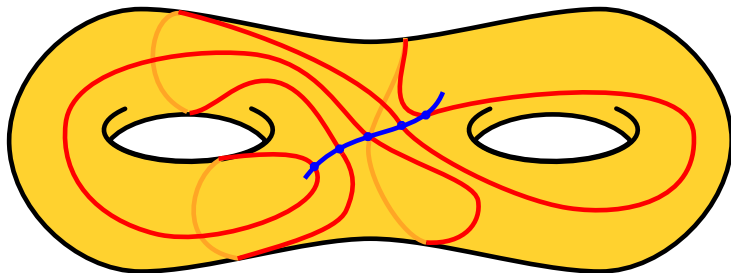
Configuration défavorable



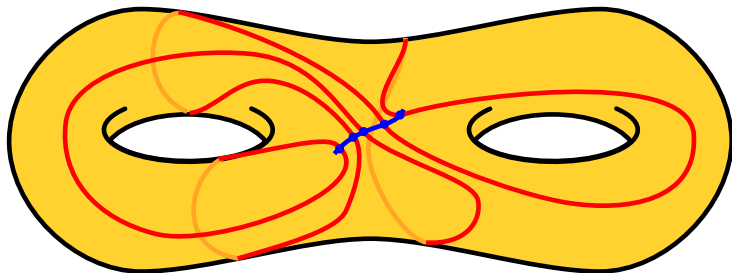
Preuve I



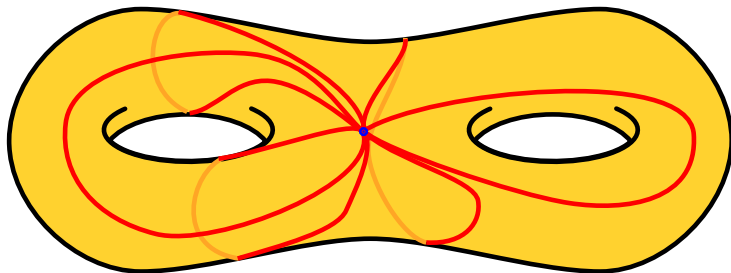
Preuve I



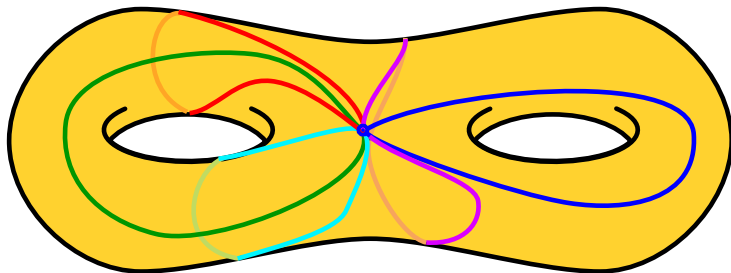
Preuve I



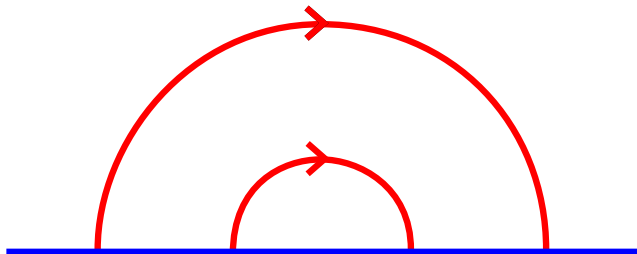
Preuve I



Preuve I

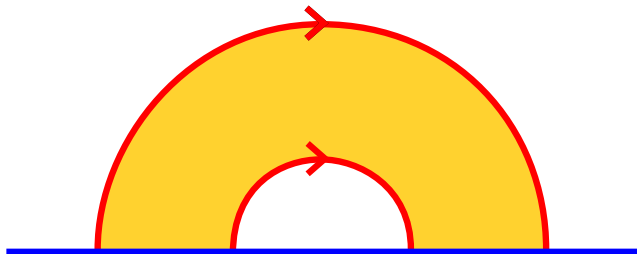


Preuve II



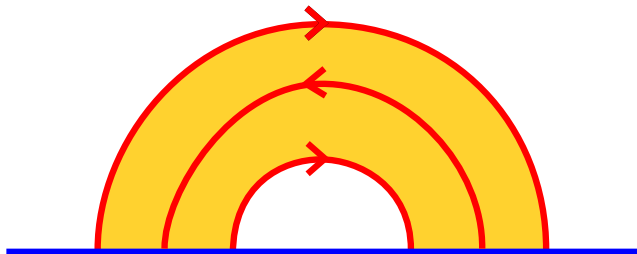
Compter le nombre maximal de lacets homotopes.

Preuve II



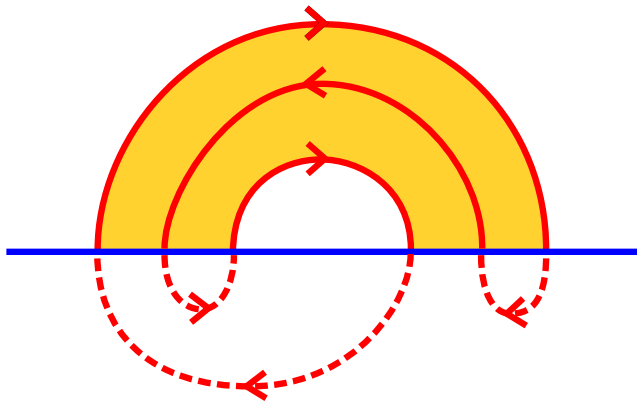
Deux arcs homotopes bordent un disque.

Preuve II

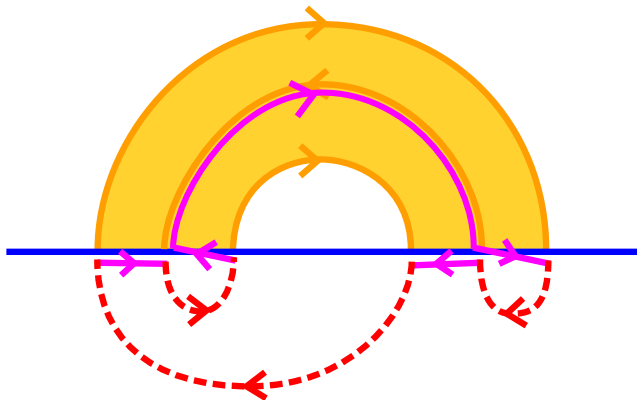


À chaque croisement avec une courbe séparatrice, l'orientation est inversée.

Preuve II



Preuve II



Le nouveau cycle est simple, 0-homologue, non contractile \implies cycle de partage plus court avec moins d'intersections = contradiction

Conclusion

Problèmes essentiels résolus : test homotopie, calcul d'un élément minimal dans une classe d'homotopie.

- Cas non traités pour le test d'homotopie
- Calcul d'un système canonique minimal
- Calcul d'une décomposition en pantalons minimale
- Calcul d'une homotopie “minimale” entre deux courbes homotopes