[Deber 02] Errores Numéricos - Métodos Numéricos-Ejercicios Unidad 01-A

Francis Bravo

May 5, 2025

Introducción

El presente documento constituye una exposición meticulosa, ordenada y rigurosamente elaborada de la resolución de un conjunto de ejercicios vinculados, de manera directa, con el análisis de errores numéricos —tanto absolutos como relativos, inherentes o de redondeo— y con la aplicación sistemática de métodos numéricos clásicos. En cada uno de los casos planteados, se introduce, en primer término, una descripción precisa del problema en cuestión; a continuación, se desarrolla, paso a paso y sin omitir detalle alguno, el procedimiento lógico-matemático conducente a su resolución; y, finalmente, se destaca —con la debida claridad y énfasis— el resultado obtenido, el cual se presenta de forma explícita, justificada y, cuando fuere necesario, acompañado de observaciones complementarias, advertencias sobre la estabilidad del método empleado, o consideraciones relativas al error asociado.

Ejercicio 1

Calcular los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p y p^*

Variable	**Valor Exacto**	**Valor Truncado (4 dígitos)**
π	3.1415926	3.141
e	2.7182818	2.718
$\sqrt{2}$	1.4142135	1.414
$\frac{22}{7}$	1.414213562	1.414

Table 1: Tabla comparativa entre los valores exacto y truncado

a) $p = \pi$, $p^* = \frac{22}{7}$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \approx 1.727592647$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{\pi} \approx 0.549909819$$

b) $p = \pi$, $p^* = 3.1416$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |\pi - 3.1416| \approx 7.352 * 10^{-6}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416|}{\pi} \approx 2.3395 * 10^{-6}$$

c) $p = e$, $p^* = 2.718$

Solución:

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |e - 2.718| \approx 2.8181 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 2.718|}{e} \approx 1.03675 * 10^{-4}$$

d) $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1.414$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = \left|\sqrt{2} - 1.414\right| \approx 2.135 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{\left|\sqrt{2} - 1.414\right|}{\sqrt{2}} \approx 1.510065 * 10^{-4}$$

Ejercicio 2

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Variable	Valor
8!	40320
e	2.71828182
9!	362880
$\sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}$	24.89
10^{π}	1385.45573

Table 2: Valores que se usaran en el Ejercicio 2

a) $p = e$, $p^* = 22000$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |e - 22000| \approx 21997.281719$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 22000|}{e} \approx 8092.347732$$

b) $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1400$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400| = 14.54426$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|10^{\pi} - 1400|}{10^{\pi}} = 0.010496$$

c) $p = 8!$, $p^* = 39900$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |40320 - 39900| = 420$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|40320 - 39900|}{40320} \approx 0.0104167$$

d) $p = 9!$, $p^* = \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}| \approx 362855.1101$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}|}{362880} \approx 0.999932$$

Ejercicio 3

Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p

a) $p = \pi$ **Solución:**

Error relativo máximo: $E_r = 10^{-4}$**Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \pi \approx 3.1416 \times 10^{-4}$$

Intervalo para p^*:

$$p^* \in \left[\pi - 3.1416 \times 10^{-4}, \pi + 3.1416 \times 10^{-4}\right]$$

b) $p = e$ **Solución:**

Error relativo máximo: $E_r = 10^{-4}$ **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot e \approx 2.7184 \times 10^{-4}$$

Intervalo para p^*:

$$p^* \in \left[e - 2.7184 \times 10^{-4}, e + 2.7184 \times 10^{-4}\right]$$

c) $p = \sqrt{2}$ **Solución:**

Error relativo máximo: $E_r = 10^{-4}$ **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \approx 1.4141 \times 10^{-4}$$

Intervalo para p^*:

$$p^* \in \left[\sqrt{2} - 1.4141 \times 10^{-4}, \sqrt{2} + 1.4141 \times 10^{-4}\right]$$

d) $p = \sqrt{7}$ **Solución:**

Error relativo máximo: $E_r = 10^{-4}$ **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{7} \approx 2.6457 \times 10^{-4}$$

Intervalo para p^*:

$$p^* \in \left[\sqrt{7} - 2.6457 \times 10^{-4}, \sqrt{7} + 2.6457 \times 10^{-4}\right]$$

Ejercicio 4

Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para al menos cinco dígitos

Variable	Valor Exacto	Valor Redondeado (3 dígitos)
e	2.71827	2.718
-10π	-31.41593	-31.416
$6e$	16.3097	16.310
$10\pi + 6e$	-15.10624	-15.106
$10\pi + 6e - 1$	-16.10624	-16.106
$2\frac{5}{3}$	3.33334	3.333
$\sqrt{2}\sqrt{3}$	2.44946	2.449

Table 3: Comparación entre los valores exacto y truncados

a) e **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |-2.71827 + 2.718| \approx 2.8 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.8 * 10^{-4}}{-2.71828} \approx 1.03006 * 10^{-4}$$

b) $-10\pi + 6e - 1$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |-16.1062 + 16.106| \approx 2.3 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.3 * 10^{-4}}{-16.10623} \approx 1.42801 * 10^{-5}$$

c) $\frac{5}{3} \cdot 2$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |3.33333 - 3.333| \approx 3.3 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{3.3 * 10^{-4}}{3.33333} \approx 9.9000 * 10^{-5}$$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ **Solución:**

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |2.4494 - 2.449| \approx 4.5 * 10^{-4}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{4.5 * 10^{-4}}{2.44945} \approx 1.8371 * 10^{-4}$$

Ejercicio 5

Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a) $4\arctan(1)+\arctan(1/2)$ **Solución:**

Usando el polinomio de McLaurin, aproximamos:

$$\arctan(1)\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}\approx 0.9333$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\approx 0.4635$$

Por lo tanto,

$$4\arctan(1)+\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx 4\times 0.933+0.463=4.196$$

Comparado con el valor real de $\pi\approx 3.1416$.

Error absoluto:

$$E_a=|p-p^*|=|3.1416-4.1967|\approx 1.0551$$

Error relativo:

$$E_r=\frac{|p-p^*|}{|p|}=\frac{|3.1416-4.1967|}{3.1416}\approx 0.3359$$

b) $16\arctan(1/5)-4\arctan(1/239)$ **Solución:**

Usando el polinomio de Maclaurin, aproximamos:

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\approx \frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{125}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3125}\approx 0.1974$$

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\approx \frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5}\approx 0.0042$$

Por lo tanto,

$$16\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\approx 16\times 0.1974-4\times 0.0042=3.1511$$

Comparado con el valor real de $\pi\approx 3.1416$.

Error absoluto:

$$E_a=|p-p^*|=|3.1416-3.1511|\approx 0.0096$$

Error relativo:

$$E_r=\frac{|p-p^*|}{|p|}=\frac{|3.1416-3.1512|}{3.1416}\approx 0.0031$$

Ejercicio 6

El número e se puede definir por medio de:

$$e = \sum \frac{1}{n!}, \text{ donde } n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \text{ para } n \neq 0 \text{ y } 0! = 1$$

Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 5$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 5$:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$e \approx 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 = 2.7183$$

Comparado con el valor real de $e \approx 2.71828182$.

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |2.71828182 - 2.7183| \approx 1.8172 \times 10^{-5}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.71828182 - 2.7183|}{2.718281828} \approx 6.6846 \times 10^{-6}$$

b) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 10$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 10$:s

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$

$$e \approx 1+1+0.5+0.1667+0.0417+0.0083+0.0014+0.0002+0.000025+0.000003+0.0000003 = 2.71828$$

Comparacion con el valor real de $e \approx 2.718281828$.

Error absoluto:

$$E_a = |p - p^*| = |2.71828182 - 2.718281| \approx 2.8 \times 10^{-8}$$

Error relativo:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.71828182 - 2.71828|}{2.71828182} \approx 1.03 \times 10^{-8}$$

Ejercicio 7

Intersección de dos puntos en una línea recta

Suponga que dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_2$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Use los datos $(x_1, y_1) = (1.31, 3.24)$ y $(x_2, y_2) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

Solución:

Datos:

$$(x_1, y_1) = (1.31, 3.24), \quad (x_2, y_2) = (1.93, 5.76)$$

Primer método: $x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Calculemos cada término aplicando redondeo a tres dígitos:

$$y_2 - y_1 = 5.76 - 3.24 = 2.52$$

Redondeado a tres cifras: $y_2 - y_1 \approx 2.52$.

$$x_2 - x_1 = 1.93 - 1.31 = 0.62$$

Redondeado a tres cifras: $x_2 - x_1 \approx 0.62$. Por lo tanto,

$$x = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$

Segundo método: $x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ Calculamos cada término aplicando redondeo a tres cifras:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$

Entonces,

$$x = x_1 - 4.06 = 1.31 - 4.06 = -2.75$$

Análisis de resultados

Los dos métodos considerados —aunque basados en principios numéricos válidos— arrojan resultados distintos, principalmente debido a la acumulación progresiva de errores de redondeo en cada operación intermedia afecta con particular intensidad a métodos iterativos o secuenciales. El primer método —tras aplicar las operaciones correspondientes— proporciona un valor positivo para la incógnita x: este resultado no solo es matemáticamente aceptable, sino también coherente con la disposición geométrica de los puntos (esto es, con la dirección y el sentido de la pendiente implicada). Por tal motivo, puede asumirse —con base en la consistencia de los datos y del modelo aplicado— que dicho valor representa con mayor fidelidad la posición de intersección. Por el contrario, el segundo procedimiento produce un valor negativo que, en este contexto específico, se infiere que dicho valor ha sido afectado por un mayor grado de error acumulado, lo cual compromete su validez como solución representativa.

Conclusión

El primer método se considera más adecuado, en tanto que minimiza —de manera significativa— los errores de redondeo acumulados durante los cálculos intermedios; adicionalmente, genera un resultado que guarda una correspondencia más coherente con la configuración geométrica de los puntos analizados, lo cual refuerza su validez dentro del contexto del problema planteado.