

爱因斯坦：Einstein

现代时空的创始人

二十世纪的哥白尼

# 第6章 相对论基础

## § 1 经典时空观



经典物理：力学、振动波动、电磁学、热力学统计物理等  
建立在绝对时空观基础上的科学。

力学是经典物理的基础，

力学概念以及力学规律都是对一定的参照系才有意义。

### 1. 经典力学的时空观

时间间隔和空间间隔的量度是绝对不变的。而且时间和空间是互相独立的。

绝对空间

$$\Delta x = \Delta x'$$

绝对时间

$$\Delta t = \Delta t'$$

## 2. 牛顿定律、惯性系、力学相对性原理



牛顿运动定律  $\vec{F} = m\vec{a}$

它是经典力学的基础，其他运动规律都可以看成是由它推导出来。

牛顿定律只对惯性系成立

相对于一个惯性系作匀速直线运动的参考系也是惯性系。

牛顿认为有一个“绝对静止”的参考系。

牛顿 (伽利略) 相对性原理：

在一切惯性系中力学定律形式相同。

在惯性系中牛顿定律成立，  
作力学实验表现出来的规律性也是一样的。

相对不同的参照系，  
长度和时间的测量结果都一样吗？

牛顿的绝对时空观认为一样。

$$\Delta x = \Delta x', \Delta t = \Delta t'$$

那么：如何区别“普通时间”与“绝对时间”？

如何从诸多的惯性系中找到“绝对参照系”？

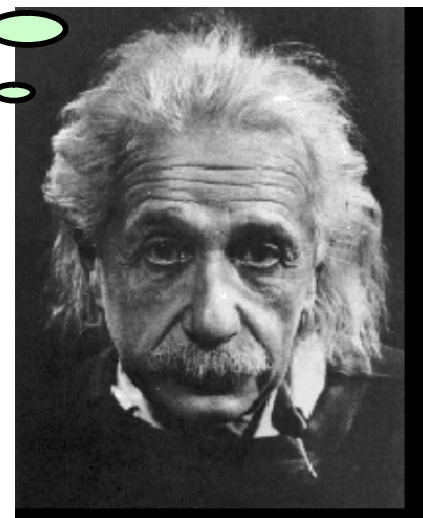
牛顿说：“人类无能为力，只有上帝知道！”

绝对时空不能观测，也不能用任何力学实验证明。

但是，它在理解牛顿定律中所起的巨大作用，

迫使牛顿引进这一概念。

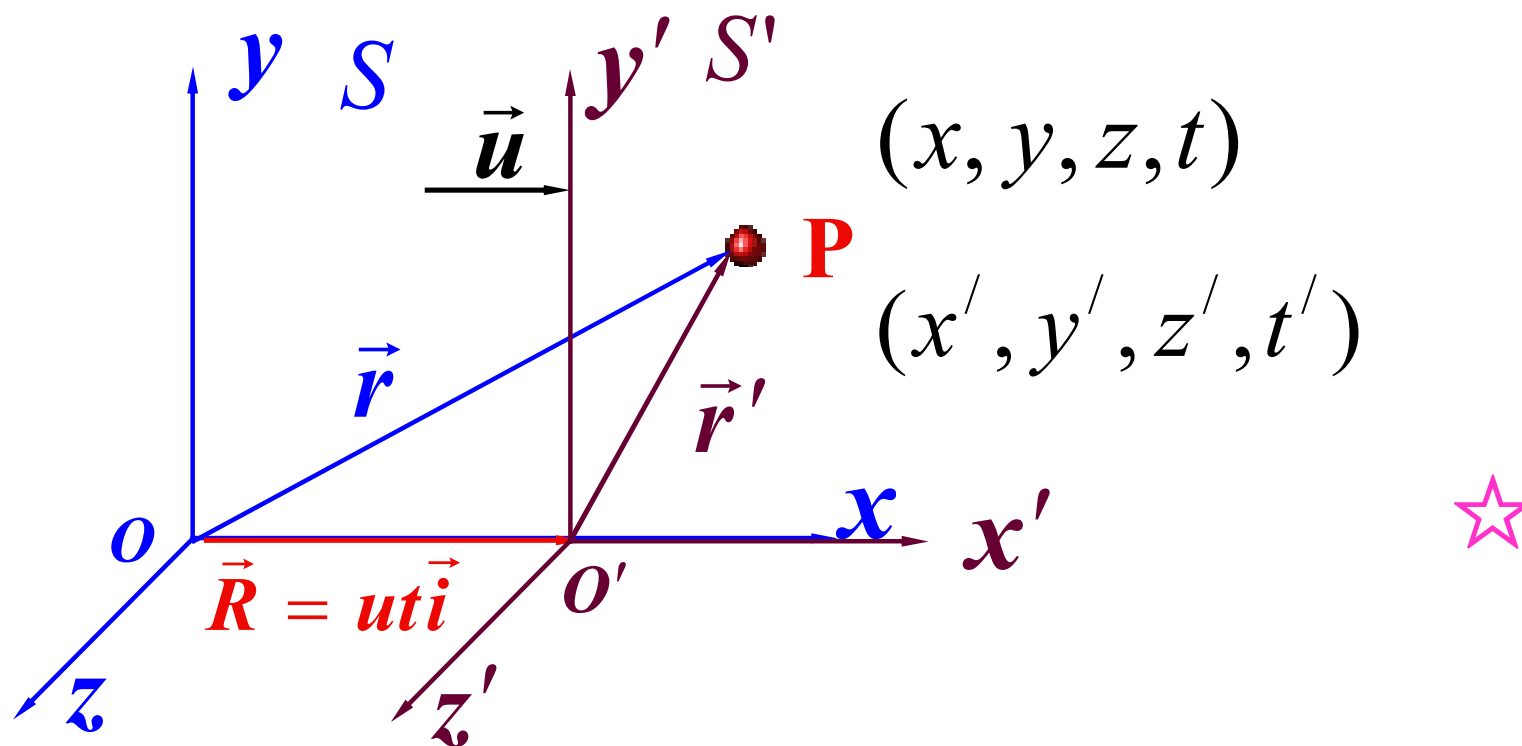
这是牛顿天才  
的一个标志！



### 3. 伽利略变换

在两个惯性系中  
考察同一物理事件

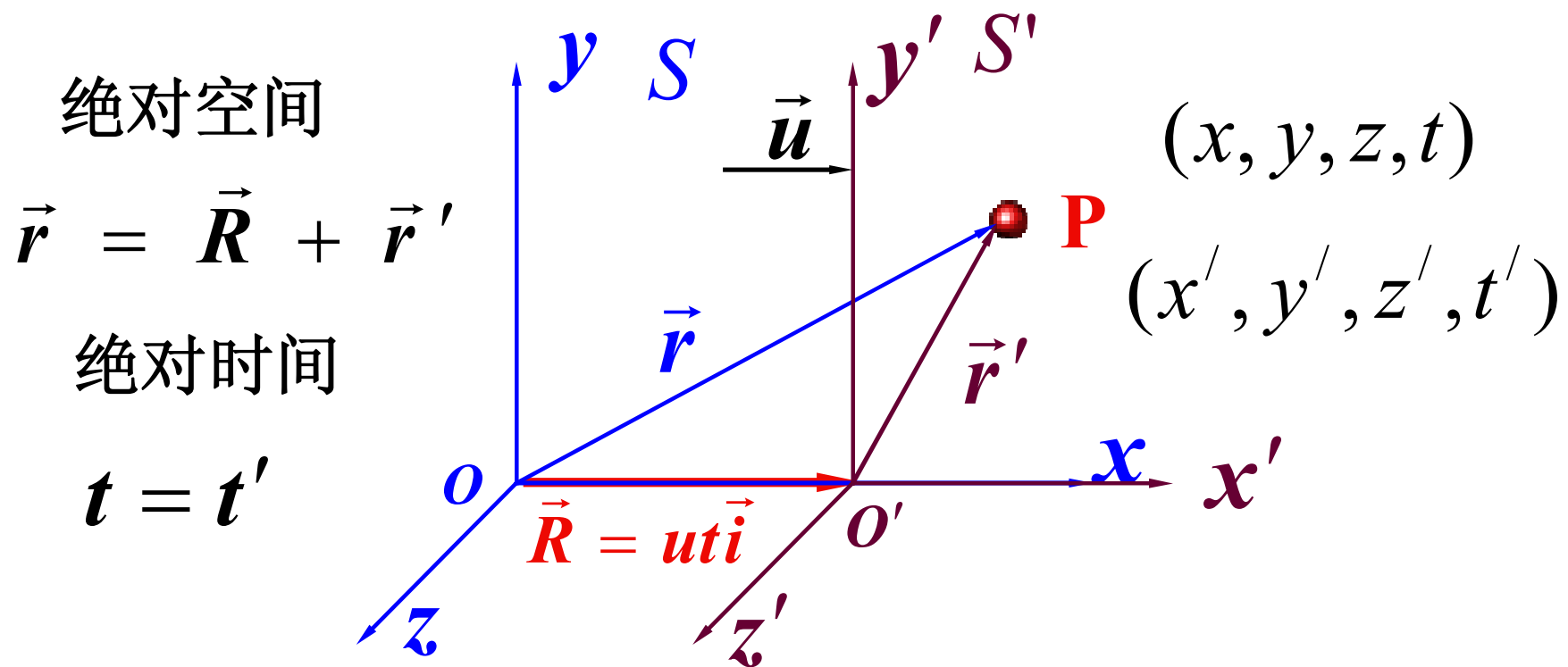
$$\text{约定} \begin{cases} \vec{u} = u\vec{i} \Rightarrow \text{常量} \\ OO' \text{重合时 } t = t' = 0 \end{cases}$$



$$S : \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$S' : \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\text{约定} \begin{cases} \vec{u} = u\vec{i} \Rightarrow \text{常量} \\ OO' \text{重合时 } t = t' = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} S : \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ S' : \vec{r}' &= x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \end{aligned}$$



$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x' + ut)\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x' + ut)\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$


---

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \quad \text{逆变换} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right.$$



这就是伽利略坐标变换公式。

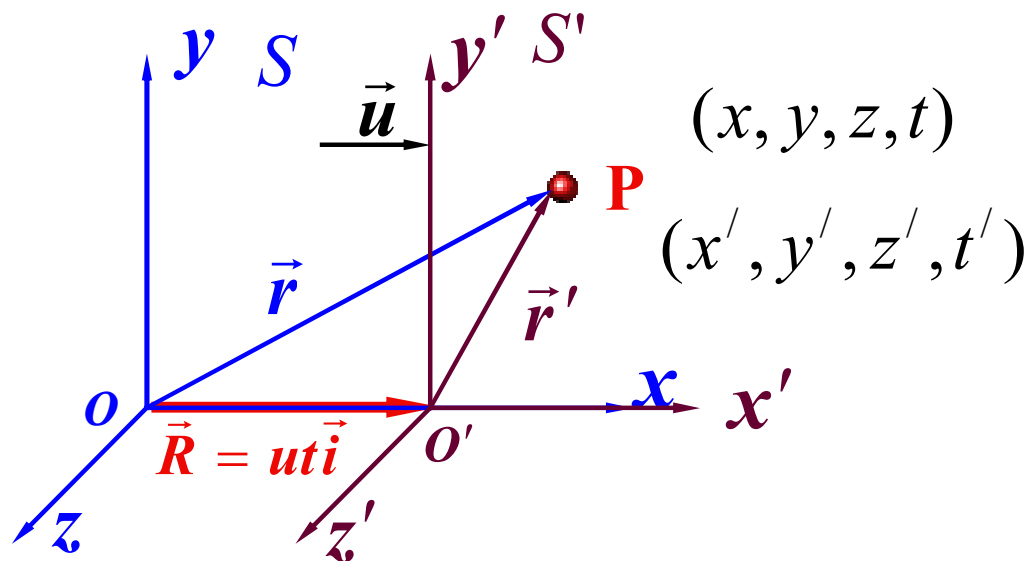
它完全体现了绝对时空观，是绝对时空观的数学表述。

## 4. 绝对时空与牛顿力学的相对性原理



伽利略变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

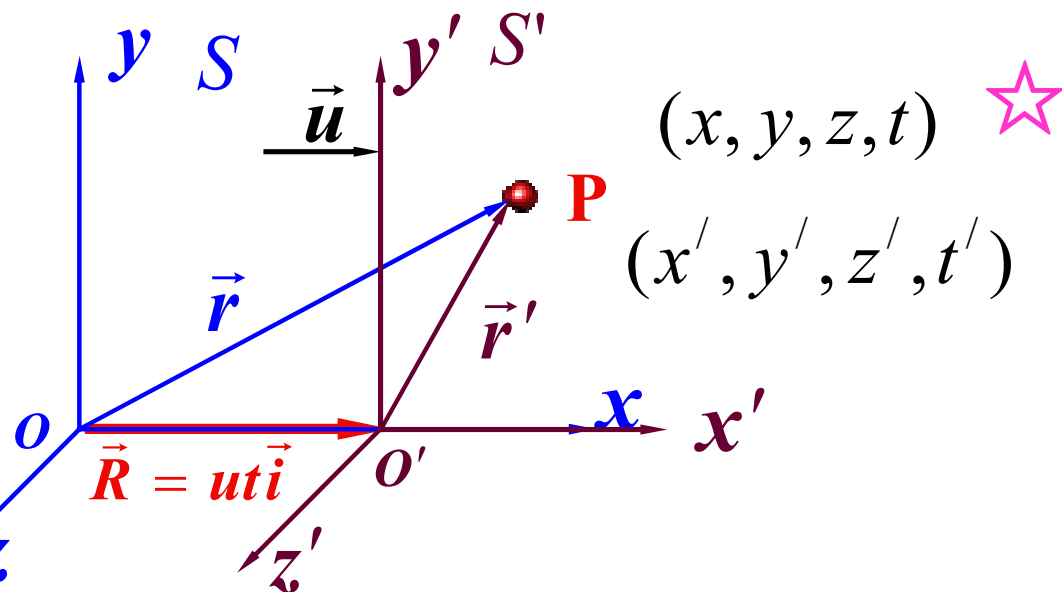


$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$



$$\vec{a}' = \vec{a} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$



力和质量  
与参照系无关

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

$$m' = m$$

$$\begin{aligned} S \quad \vec{F} &= m \vec{a} \\ S' \quad \vec{F}' &= m' \vec{a}' \end{aligned}$$

牛顿定律在伽利略变换下形式不变

牛顿力学规律（包括动量守恒定律、机械能守恒定律）  
在伽利略变换下形式不变（协变、对称）。

## § 2 爱因斯坦相对性原理和光速不变原理



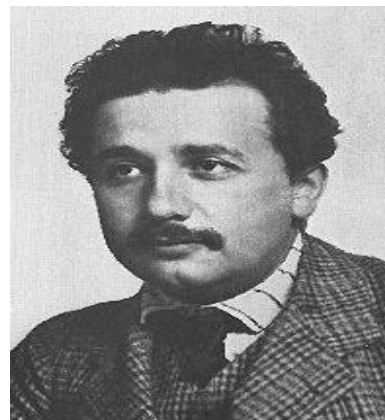
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array} \right.} \left\{ \begin{array}{l} \nabla' \cdot \vec{D}' = \rho' \\ \nabla' \cdot \vec{B}' = 0 \\ \nabla' \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \nabla' \times \vec{H}' = \vec{J}_0' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \end{array} \right.$$

伽利略变换与电磁现象的矛盾，促使人们思考这样的问题：是“伽利略变换是正确的、而电磁现象的基本规律本身不符合牛顿相对性原理？”还是“已经发现的电磁现象的基本规律是符合相对性原理的，而伽利略变换需要修改呢？”

# 一、爱因斯坦相对性原理

爱因斯坦

《论动体的电动力学》1905



物理规律（包括力学规律）在一切惯性参考系中都具有相同的形式，即对物理规律来说，一切惯性系都是平等的。不存在任何一个特殊的惯性系，例如绝对静止的惯性系。

在一切惯性系中物理定律形式相同。

爱因斯坦相对性原理是牛顿相对性原理的推广。  
在促使爱因斯坦提出这一原理的过程中，  
当时有关“光速”的测量起到了特别重要的作用。



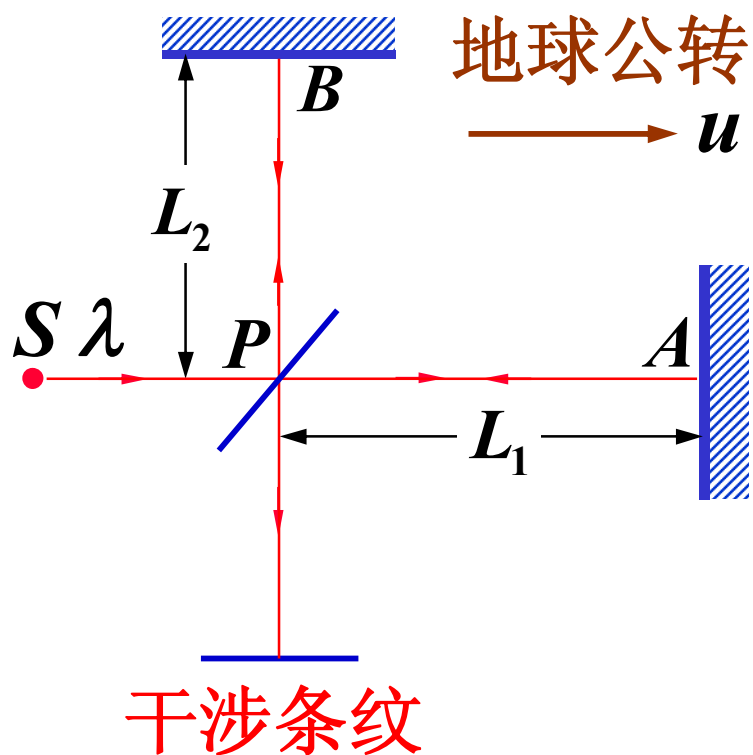
## 二、光速不变原理



### 1 Michelson-Morley 实验 (1881–1887)

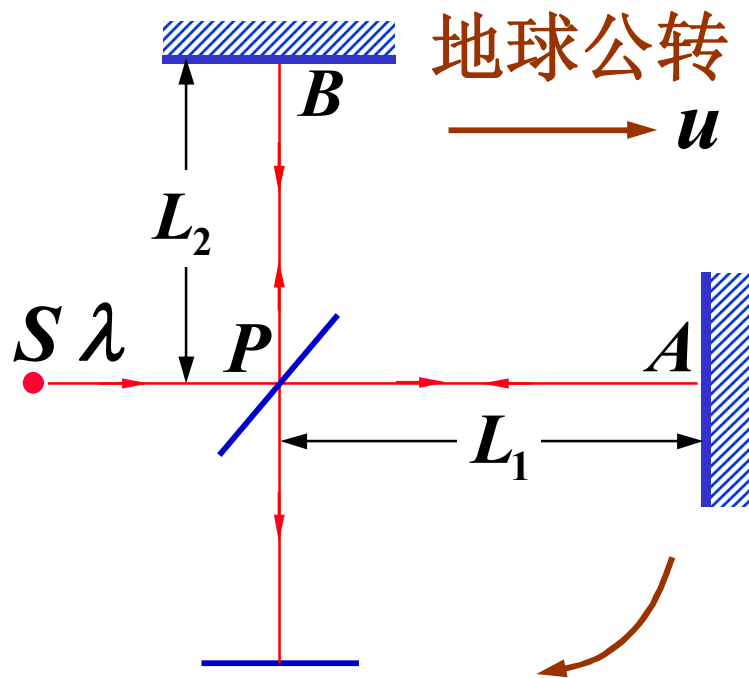
当时认为光在“以太”中以速度  $c$  传播。

设“以太”相对太阳静止。



实验目的：  
干涉仪转 $90^\circ$ ，  
观测干涉条纹是否移动

实验结果：  
条纹无移动（零结果）。  
以太不存在，  
光速与参考系无关。



按照伽利略速度变换



$$t_{PAP} = \frac{L_1}{c-u} + \frac{L_1}{c+u} = \frac{2L_1}{c(1-u^2/c^2)}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$t_{PBP} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L_2}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t = t_{PBP} - t_{PAP} = \frac{2}{c} \left( \frac{L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{L_1}{1-u^2/c^2} \right)$$

干涉仪转 $90^\circ$ 后，时间间隔变成

$$\Delta t' = t'_{PBP} - t'_{PAP} = \frac{2}{c} \left( \frac{L_2}{1-u^2/c^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$



干涉仪转 $90^\circ$ 引起时间差的变化为

$$\Delta t - \Delta t' \approx \frac{L_1 + L_2}{c} \frac{u^2}{c^2}$$

由干涉理论，时间差的变化引起的条纹移动数

$$\Delta N = \frac{c(\Delta t - \Delta t')}{\lambda} = \frac{L_1 + L_2}{\lambda} \frac{u^2}{c^2}$$

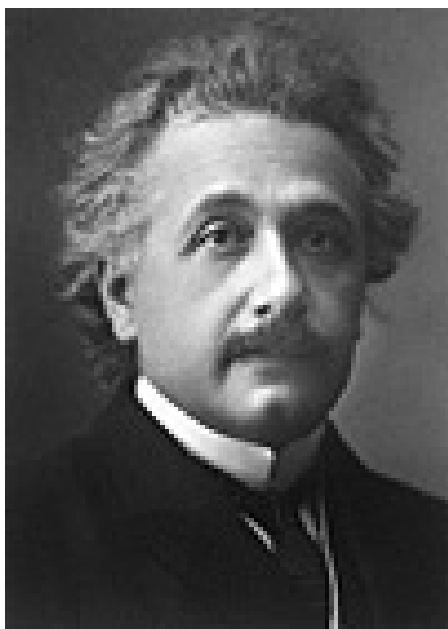
对于  $L_1 + L_2 = 22\text{m}$ ,  $u = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 589\text{nm}$

$$\Delta N = 0.40$$

但实验值为  $\Delta N = 0$

这表明：

光速与参考系无关。

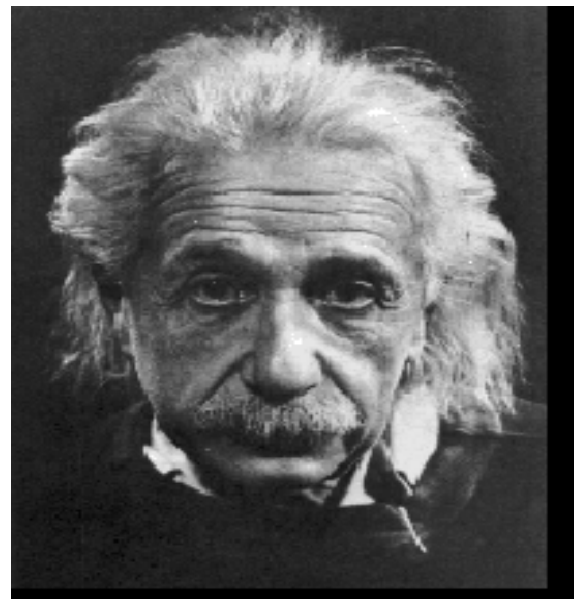


## 爱因斯坦对 迈克尔逊—莫雷实验 的评价：

“还在学生时代，我就在想这个问题了。我知道迈克尔逊实验的奇怪结果。我很快得出结论：如果我们承认迈克尔逊的零结果是事实，那么地球相对以太运动的想法就是错误的。这是引导我走向狭义相对论的最早的想法。”

## 2 光速不变原理

爱因斯坦抓住了这一物理事实，  
在他的那篇著名的论文中，  
《论动体的电动力学》  
同时提出：



在任何惯性系中，光在真空中的速率都相等。

或者表述为：

真空中的光速率与光源的运动状态无关。

这就是光速不变原理

显然，真空中的光速率，不服从伽利略变换。





事实上，爱因斯坦提出“光速不变原理”时，并不是完全根据“迈克耳孙—莫雷”的实验结果。



电磁场理论给出真空中电磁波的传播速度为

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

其中  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  都是与参考系无关的常数。

真空中光速率与参考系无关

（即与光源的运动和观察者的运动无关）。

光速与参考系无关这一点是与人们的预计相反的，日常经验总是使人们确信伽利略变换是正确的。

一般宏观物体运动的速率比起光速来是非常小的

炮弹飞出炮口的速率不过  $10^3 \text{ m/s}$

人造卫星的发射速率也不过  $10^4 \text{ m/s}$

不及光速的万分之一

### 三、狭义相对论基础



#### 狭义相对论的两条基本假设

- 1 爱因斯坦相对性原理：  
在一切惯性系中物理定律形式相同。
- 2 光速不变原理：  
真空中的光速  $c$  与光源的运动状态无关。

在这两条基本假设的基础上，  
可以建立一套完整的理论—狭义相对论。

这里涉及的只是无加速运动的惯性系，所以叫狭义相对论，以区别于后来爱因斯坦发展的广义相对论。

既然选择了相对性原理，那必须修改伽利略变换。

### § 3 洛仑兹变换



光速不变原理和爱因斯坦相对性原理所蕴含的时空观，应该由一个时空变换来表达。

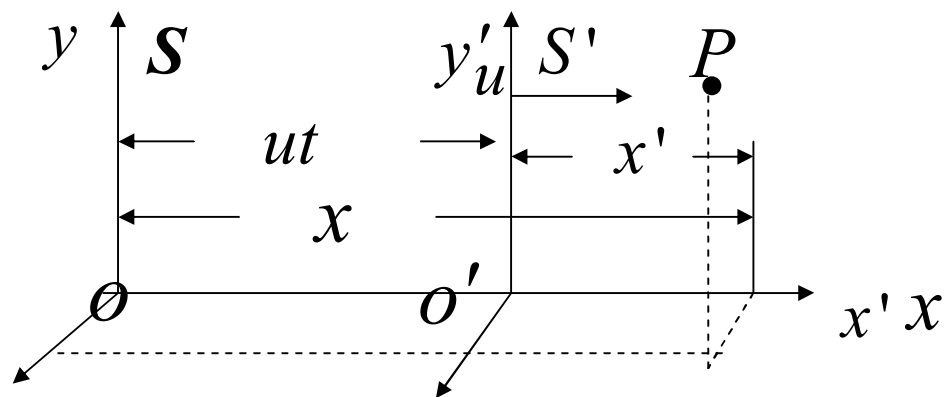
实际早在1899年，洛仑兹就给出了惯性系间的时空变换式，即洛仑兹变换。

但洛仑兹导出他的时空变换时却以“以太”存在为前提，并认为只有 $t$ 才代表真正的时间，而 $t'$ 只是一个辅助的数学量。

1905年，爱因斯坦则在全新的物理基础上得到这一变换关系。

# 洛伦兹变换

坐标变换式:



正变换

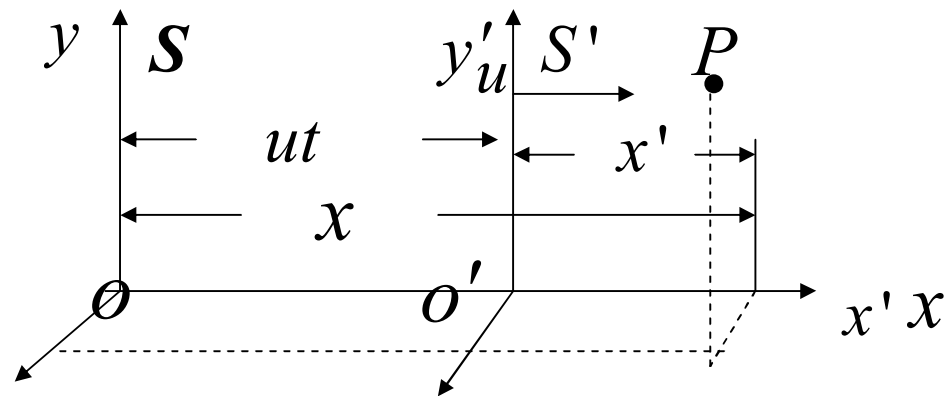
$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

逆变换

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

在洛伦兹变换中，时间坐标和空间坐标是相互关联的，这是与伽利略变换根本不同的。

证明（两个假设为基础）



### 1、测量O点

S系 任何时间  $x=0$

S'系 任何时间  $x'_0 = -ut'$  对O点  $\rightarrow x'_0 + ut' = 0$  成立

空间均匀，任意时刻，任何一点有  $x = k(x' + ut')$

2、测量O'点  $S': x'_0 = 0; S: x_{0'} = ut \rightarrow x' = k'(x - ut)$

相对性原理  $k=k' \quad k=?$

O与O'重合时，O (O')点发出光信号  $x = ct; x' = ct'$  光速不变

代入并相乘得:  $c^2 tt' = k^2 tt' (c - u)(c + u)$

$$\rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

说明:

$$1) \text{ 令 } \beta \equiv \frac{u}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

当  $\beta \ll 1$  即  $u \ll c$  时

洛仑兹变换就还原为伽利略变换。

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$
$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

2) **伽利略变换**: 时间、空间是相互分离的,  
时空是绝对的, 是**绝对时空观**。

**洛仑兹变换**: 时间、空间是相互联系的, 时间  
间隔、空间间是相对的, 是**相对时空观**。

3) 如果  $u \geq c$ , 这时时间、空间或无穷大  
( $u = c$ ), 或是虚数 ( $u > c$ ), 此时没  
有物理意义; **即真空中的光速是一切实际物  
体运动的极限。**



洛伦兹变换实际上是  
爱因斯坦狭义相对论在具体坐标系中的数学表述。

洛伦兹变换可以由  
爱因斯坦相对性原理和光速不变原理推导出来。

同样，在洛伦兹变换下，可以导出“光速不变原理”  
以及“电磁规律在任何惯性系下形式不变”

狭义相对论的两条基本假设=洛伦兹变换