# 电磁学

# 第七章  静电场与恒定电场

# 早期的静电学研究

◆公元前5世纪　希腊　已有关于静电的历史记载

**Electricity(**电）起源于希腊文“琥珀”（**electron)**

◆我国西汉末年（公元20年前）　有磨擦的玳瑁吸引微小物体的记载，西晋时也有磨擦起电的记载

◆ **1660年**　盖里克发明磨擦起电机

◆ **1720年**　格雷研究电传导现象，发现导体和绝缘体的区别，随后又发现导体的静电感应现象

◆ **1733年**　杜菲实验区分出两种电：松脂电（负电）和玻璃电（正电），并总结出同性相斥、异性相吸

◆**1745年**　莱顿瓶的发明使电现象得到深入研究

◆ **1747年** 富兰克林首次使用正、负电的概念，提出电荷不能创生也不能消灭的思想

◆ **1785年** 库仑通过扭称实验得到库仑定律

## 近代的静电学研究

◆**1897年** **J.J. Thomson**研究证明阴极射线是一种粒子流，粒子有确定的荷质比，称其为电子

◆**1911年** 卢瑟福 α粒子轰击金箔的散射实验，发现了原子核，它带有正电，并集中了原子的绝大部分质量

# 第七章　静电场和稳定电场

## §7.1　静电场 高斯定理

### 一. 库仑定律

（一）、 对电荷的基本认识

1. 两种：正电荷和负电荷

2. 电荷量子化　$\boxed{Q = Ne}$　$e = 1.602\times10^{-19}C$

1906-1917年，密立根用液滴法首先从实验上证明了微小粒子带电量的变化不连续。

粒子物理学表明　夸克 $\begin{cases} q = \pm\frac{1}{3}e \\ q = \pm\frac{2}{3}e \end{cases}$

3. 电量是相对论不变量

在相对运动的参考系中测的带电体的电量相等。

4. 电荷守恒定律

在一个和外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变。$\sum Q_i = c.$

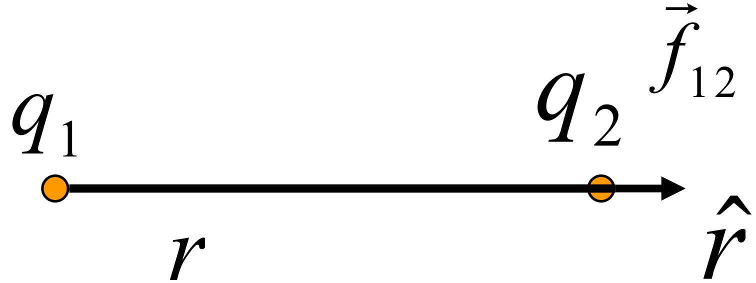
电荷守恒定律是物理学中普遍的基本定律

5. 点电荷　只讨论带电量多少，不考虑带电体的几何大小，理想模型

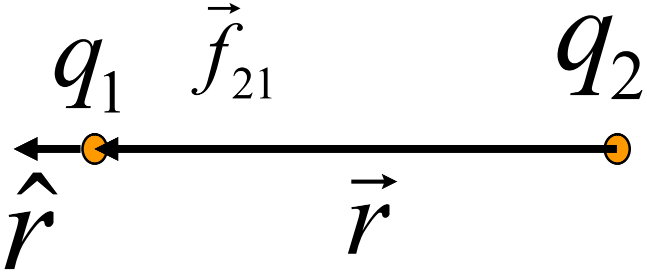
（二）、库仑定律　1785年，库仑通过扭称实验得到。

表述：在真空中，　两个静止点电荷之间的相互作用力大小，与它们的电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着它们的联线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

$$\vec{f}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$




$$\vec{f}_{21} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$




***SI*** $K = 9 \times 10^9 m^2 N / c^2$ 高斯制中 $\boldsymbol{K} = 1$

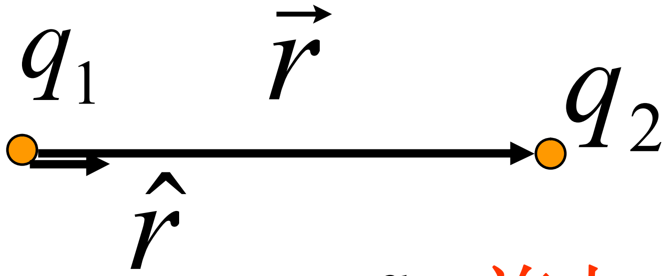
令 $K = \dfrac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}$ 有理化

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{c^2}{m^2 N}$$

$\varepsilon_0$真空中的介电常数

库仑定律在空气中与真空相差极小

$$\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$




$q_1$ 施力

$q_2$ 受力

讨论

1) 基本实验规律

宏观 微观 适用

2) 点电荷 理想模型

（三）电力叠加原理

两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力等于各个点电荷单独存在时对该电荷的作用力的矢量和

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i = \sum \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{0i}^2}\hat{r}_{0i}$$

## 二 电场 电场强度

### （一）电场

早期：电磁理论是超距作用理论　　　　电荷 ⟷ 电荷

后来：法拉第提出近距作用　　　　电荷 ⟷ 电场 ⟷ 电荷

提出力线和场的概念

电荷周围存在电场

1. 电场对放其内的任何电荷都有作用力

2. 电场力对移动电荷作功，电场具有能量、动量、质量

3. 静电场：相对于观察者静止的电荷产生的电场.

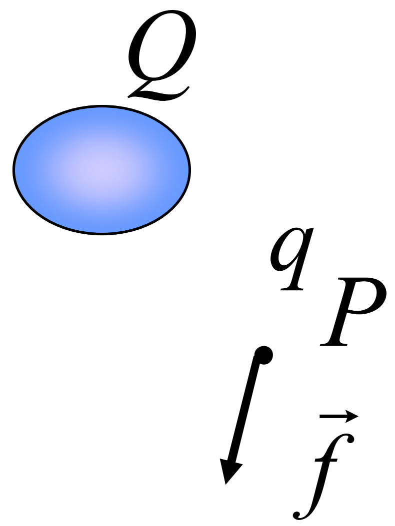
电磁场的一种特殊形式

## （二）电场强度

描述场中各点电场的强弱的物理量是**电场强度**

空间带电体电量为 $Q$

也称为场源电荷




引入**试验电荷**

条件 $\begin{cases} \text{电量充分地小} \\ \text{线度足够地小} \end{cases}$

试验电荷 $q$ 放到场点P处，受力为 $\vec{f}$

试验表明：确定场点 比值 $\dfrac{\vec{f}}{q}$ ⟹ **与试验电荷无关**

定义： $\vec{E} = \dfrac{\vec{f}}{q}$

电场强度：反映电场性质的物理量。场中某点的电场强度在数值上等于单位正电荷处于该点时电场所施的力。

讨论

1. $\vec{E} = \vec{E}(r)$

$q$ 只是使场显露出来，即使无 $q$ 也存在。

2. 矢量场 正电荷受力方向

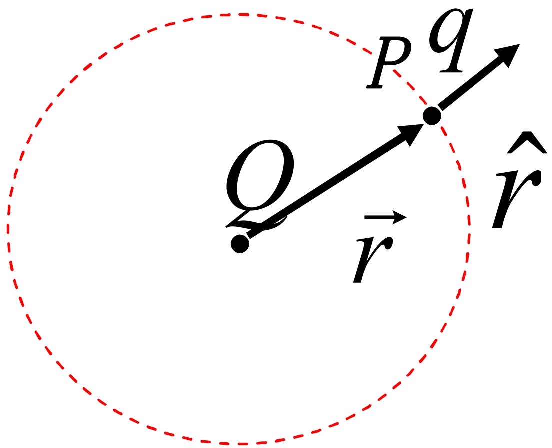
3. 单位 国际单位制

$N/C$ 或 $V/m$

4. 点电荷在外场中受的电场力

$$\vec{f} = q\vec{E}$$

## （三）电场强度的计算




### 1. 点电荷的场强公式

根据库仑定律和场强的定义

由库仑定律 $$\vec{f} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

由场强定义 $$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q}$$

由上述两式得 $$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

讨论

1. 球对称
2. $\hat{r}$

从源电荷指向场点

3. 场强方向

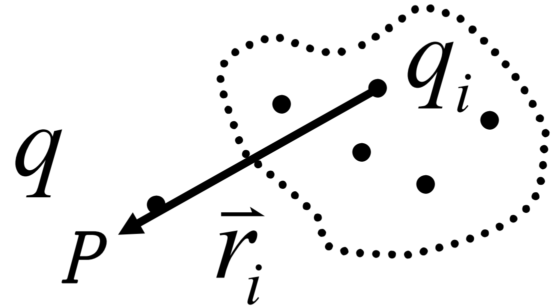
正电荷受力方向

## 2. 场强叠加原理　根据电力叠加原理和场强定义

(1) 如果带电体由 n 个点电荷组成，如图

由电力叠加原理

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{f}_i$$




由场强定义

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \vec{f}_i}{q} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\vec{f}_i}{q} = \sum \vec{E}_i$$

整理后得

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$$

或

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

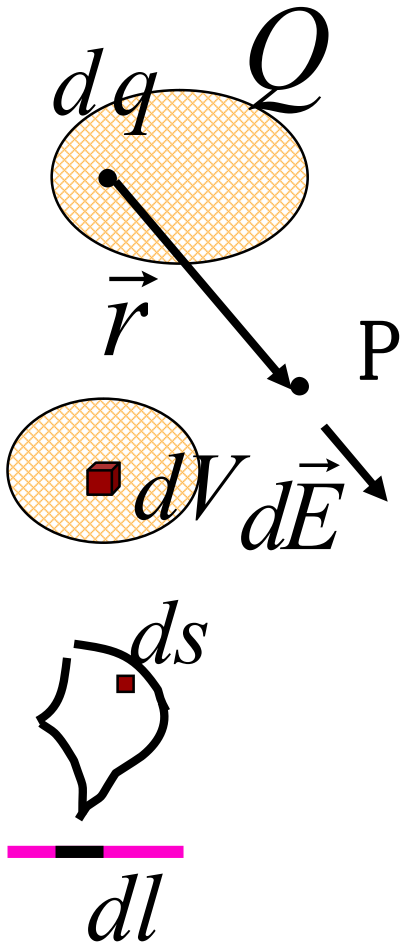
由 n 个点电荷组成的电荷系统，空间任一点的电场，等于各点电荷单独存在时，在此点产生的电场的电场强度矢量合。

(2)若带电体可看作是电荷连续分布的，如图示

把带电体看作是由许多个电荷元组成，

然后利用场强叠加原理。

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E} = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$




$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

电荷密度 $\begin{cases} \text{体电荷密度} \\ \text{面电荷密度} \\ \text{线电荷密度} \end{cases}$

电荷均匀分布时：

$$Q = \rho V$$

$$Q = \sigma S$$

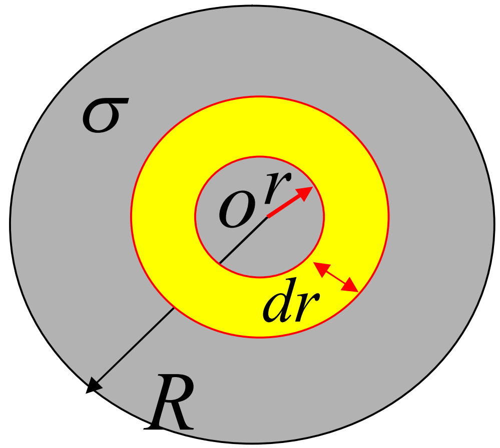
$$Q = \lambda l$$

电荷非均匀分布时：

$$\rho(x,y,z),\sigma(x,y),\lambda(x)$$

例：半径为***R***的带电圆盘，电荷面密度为 $\boldsymbol{\sigma = ar^2}$

**(*a* 常数)，**圆盘带电量多少？



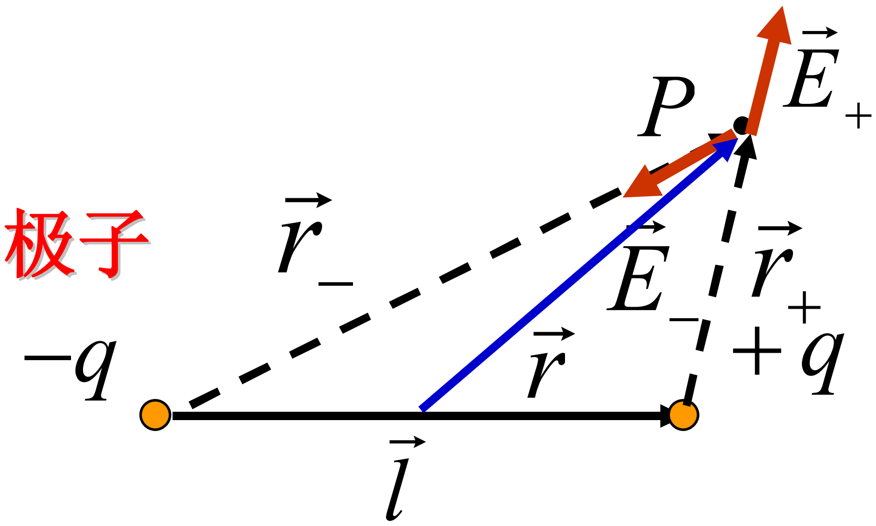

$$Q = \int dq = \int \sigma \, dS$$

$$= \int ar^2 \, dS = \int_0^R ar^2 \, 2\pi r \, dr = \frac{1}{2} \pi a R^4$$

例1　电偶极子的场

一对等量异号电荷相距 $l$

这一对等量异号电荷称为电偶极子



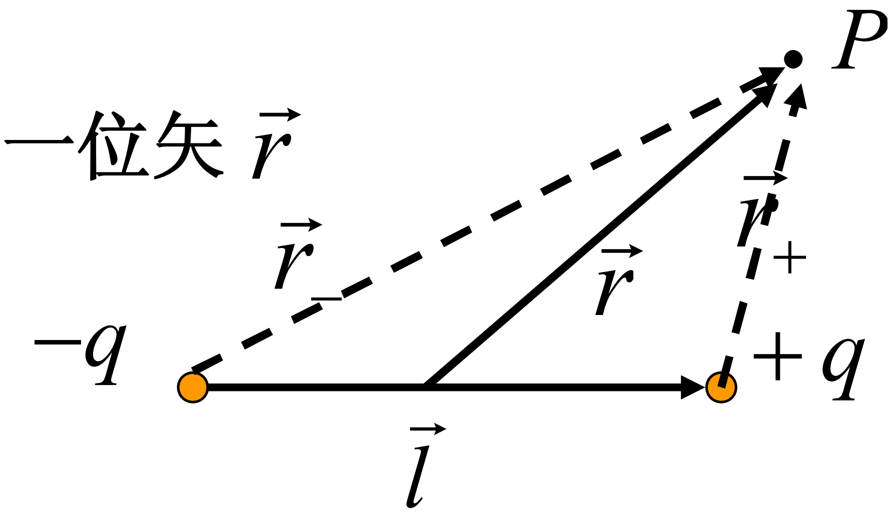

电偶极矩 $\boxed{\vec{p} = q\vec{l}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$= \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\hat{r}_+ + \frac{q_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2}\hat{r}_-$$

若从电荷连线的中点向场点P画一位矢 $\vec{r}$

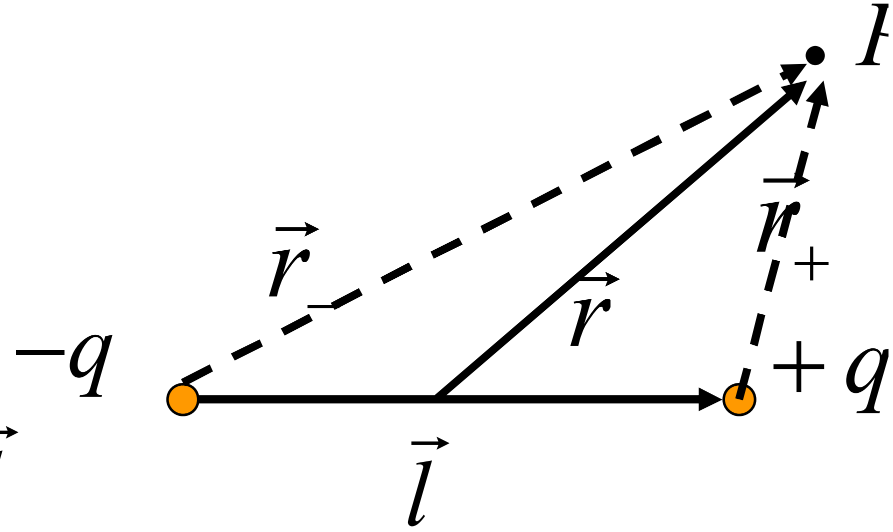
分析电偶极子远点处的场




$$r, r_+, r_- >> l$$

$$\vec{E} = \frac{q_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\hat{r}_+ + \frac{q_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2}\hat{r}_-$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}\right)$$




由图 $\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{l}}{2} \quad \vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}$

$$\Rightarrow r_+^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} - 2\vec{r}\cdot\frac{\vec{l}}{2} \qquad r_-^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} + 2\vec{r}\cdot\frac{\vec{l}}{2}$$

$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l},\ \vec{r}_+ + \vec{r}_- = 2\vec{r}$ （下页用）

$$r_+^{-3} = r^{-3}\left[1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right]^{-3/2} \qquad \frac{l^2}{4r^2} \approx 0$$

$$r_+^{-3} = r^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right) \qquad r_-^{-3} = r^{-3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\vec{r}_+ - \vec{r}_- + \left(\vec{r}_+ + \vec{r}_-\right)\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^2}\right]$$

$$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l}$$

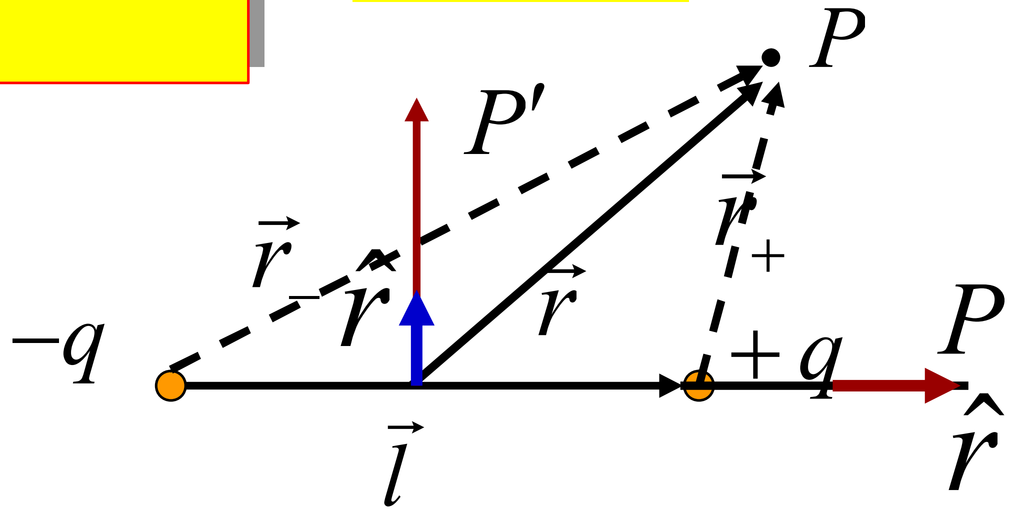
$$\vec{r}_+ + \vec{r}_- = 2\vec{r}$$

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p} + 3\left(\hat{r}\cdot\vec{p}\right)\hat{r}\right]}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\vec{p}+3\left(\hat{r}\cdot\vec{p}\right)\hat{r}\right]$$

$$\vec{p}=q\vec{l}$$




## 讨论

•特殊情况：

正电荷右侧一点 P 的场强

$$\hat{r}\cdot\vec{p}=p$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

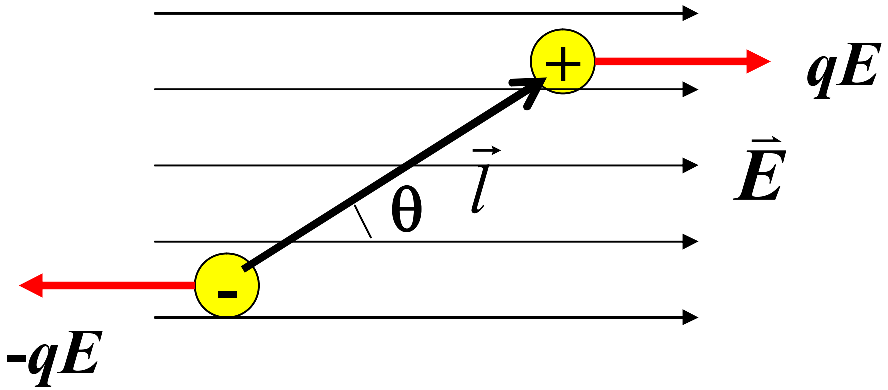
垂直中点连线上的一点 $P'$

$$\hat{r}\cdot\vec{p}=0$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

分析电偶极子在外场中的受力情况

均匀外场　　　力偶




$$\sum \vec{F} = 0$$ 偶极子无平动

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

外电场的作用使电偶极矩转向电场强度的方向

在非均匀外场中，偶极子又有平动又有转动

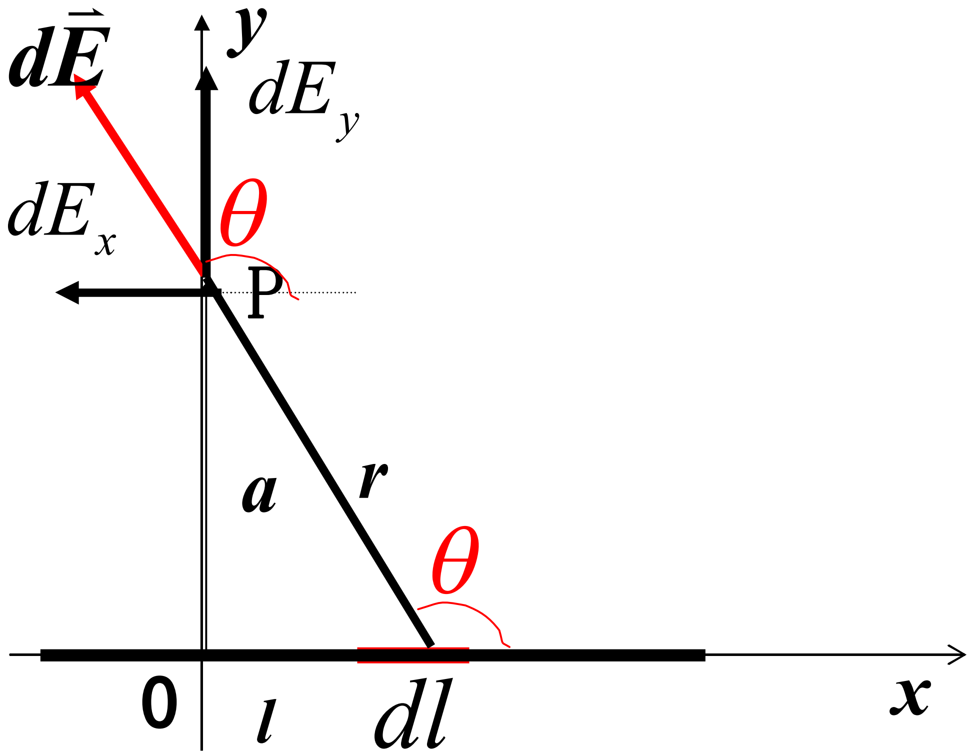
例2 长为 $L$ 均匀带电直线 电荷线密度为 $\lambda$

求：如图所示 $p$ 点的电场强度

解：在坐标 $l$ 处取一个线段元 $dl$ ，其电荷元 $dq$ $\quad$ $dq = \lambda dl$

该点电荷在 $p$ 点的场强方向如图所示，

大小为：$dE = \dfrac{dq(\lambda dl)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$



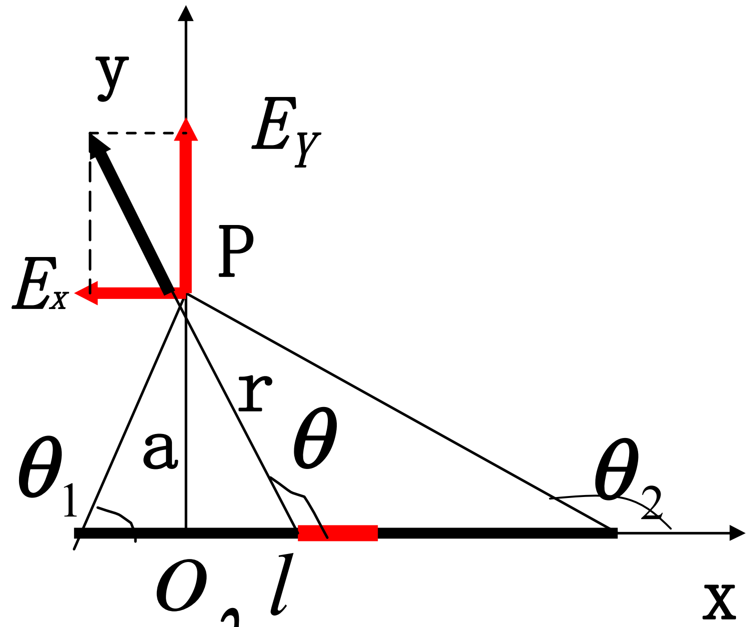

两个分量：

$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\theta \\ dE_y = dE\sin\theta \end{cases}$$

又：$l = actg(\pi - \theta) = -actg\theta$

$$dl = a\csc^2\theta\, d\theta = \frac{a}{\sin^2\theta}\cdot d\theta$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin^2\theta} = a^2\csc^2\theta$$




$$\Rightarrow \quad dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\, d\theta \qquad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\, d\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

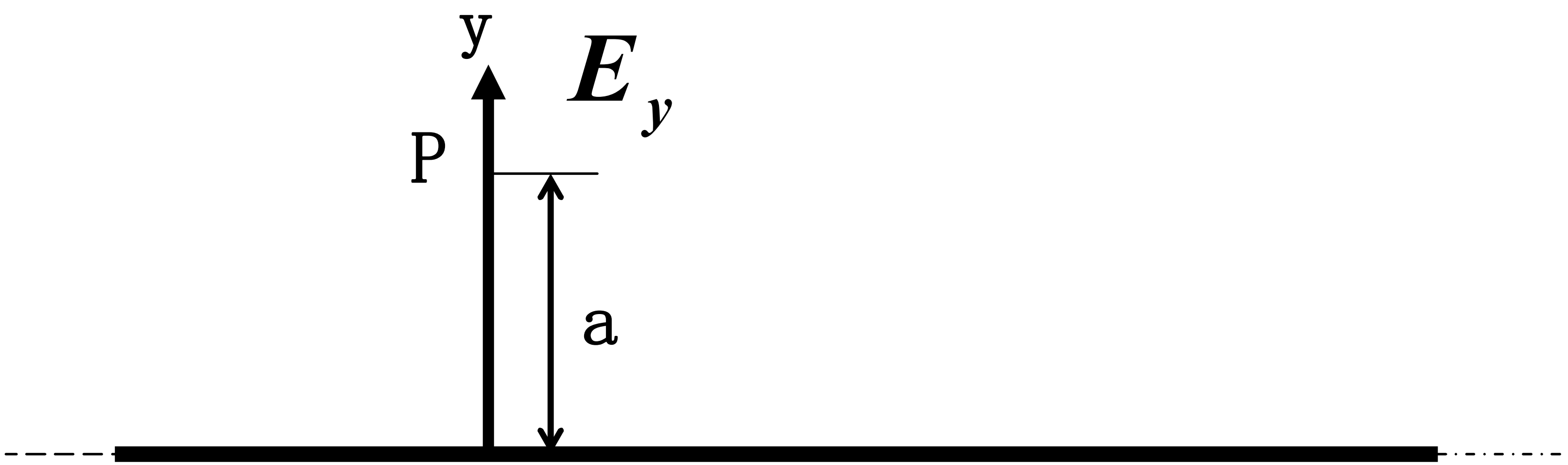
$$\therefore E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \qquad \alpha = tg^{-1}\frac{E_x}{E_y}$$

特例：　如均匀带电直线是无限长的，即：

$$\theta_1 \to 0 \qquad \theta_2 \to \pi$$

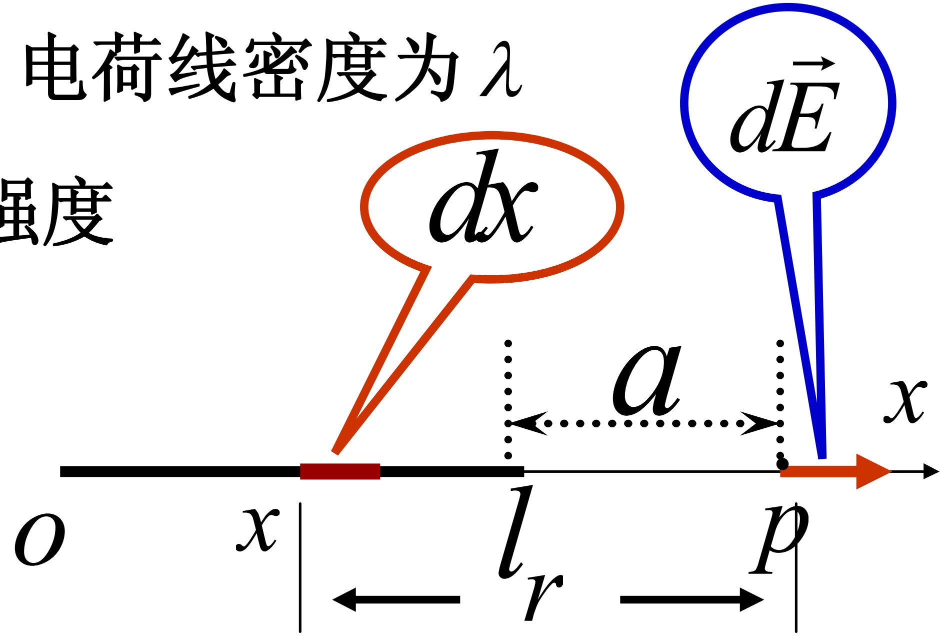
$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



例3 长为 $l$ 均匀带电直线　电荷线密度为 $\lambda$

求：如图所示 $p$ 点的电场强度




解：在坐标 $x$ 处取一个

电荷元 $dq$　$dq = \lambda dx$

该点电荷在 $p$ 点的场强方向如图所示

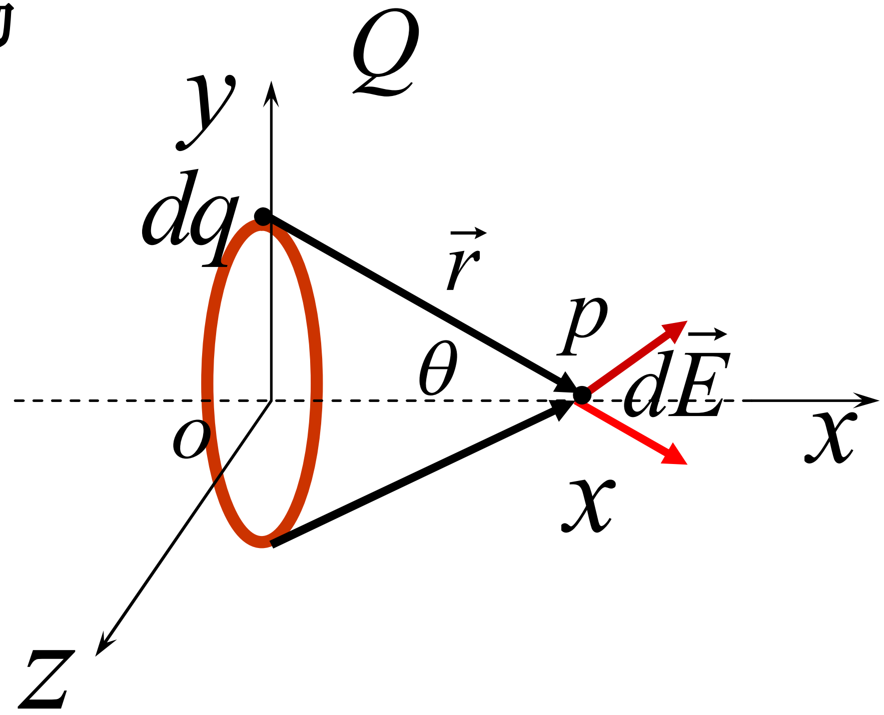
大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)^2}$$

$\because$ 各电荷元在 $p$ 点的场强方向一致

$\therefore$ 场强大小直接相加　$E = \int dE = \ldots\ldots$

## 例4 均匀带电圆环轴线上的场




解：在圆环上任取电荷元 $dq$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$dE_{\perp x} = dE\sin\theta$$

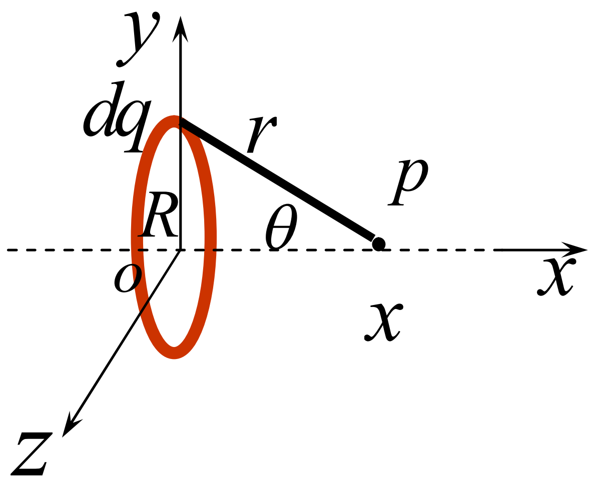
由对称性分析知

垂直 **x** 轴的场强为 **0**

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = E_x\hat{x}}$$

$$\vec{E} = E_x \hat{x}$$

$$E = E_x = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cos\theta$$




$$= \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_{(Q)} dq$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{xQ}{4\pi \varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}}$$

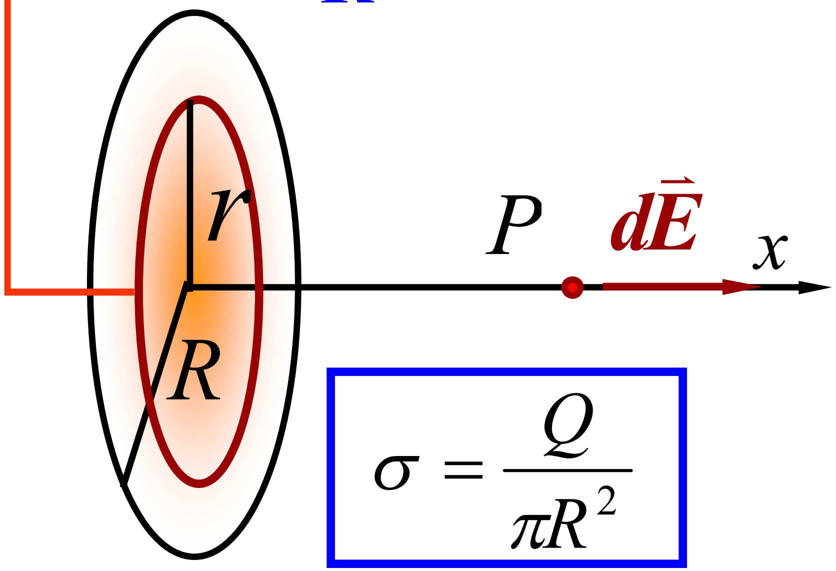
方向沿 $x$ 轴正向

若 $x >> R$

$$E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

点电荷

**例5** 已知：总电量$Q$；半径$R$。
求： 均匀带电圆盘轴线上的场强。




$$dQ = \frac{2Qr\,dr}{R^2}$$

$$\boxed{\text{圆环面积元} \qquad dS = 2\pi r\,dr}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}}$$

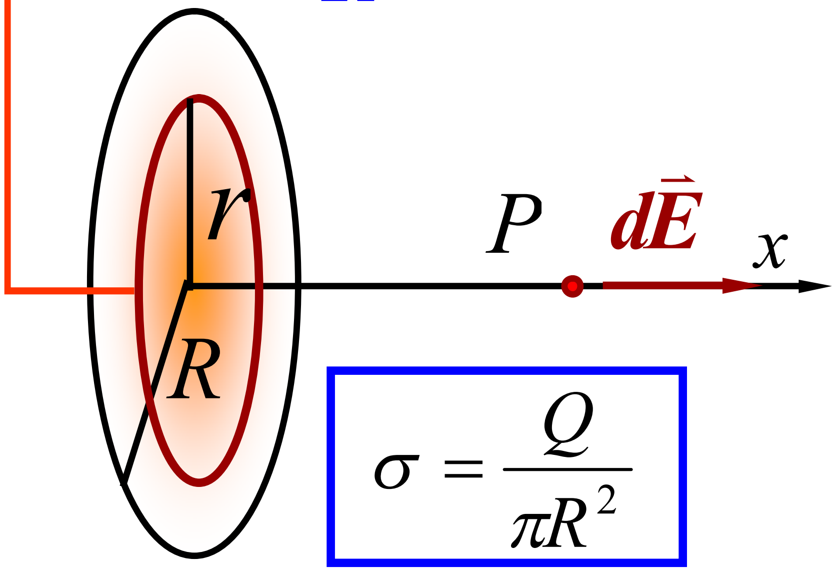
$$d\vec{E} = \frac{x \cdot dQ\,\vec{i}}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \frac{xQ}{2\pi\varepsilon_o R^2}\int_0^R \frac{r\,dr}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\vec{i}\int_0^R \frac{dr^2}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\vec{i}\int_0^R \frac{d(x^2 + r^2)}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{E}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}R^{2}}\vec{i}\int_{0}^{R}\frac{\mathrm{d}(x^{2}+r^{2})}{\left(x^{2}+r^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\vec{i}\quad Q}{2\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}R^{2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^{2}+R^{2}}}\right)$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{Q}=\frac{\mathbf{2}\,\boldsymbol{Qr}\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}}$$




$$\sigma=\frac{Q}{\pi R^{2}}$$

当 $R >> x$

$$\vec{E}=\frac{Q\quad\vec{i}}{2\pi\varepsilon_{0}R^{2}}$$

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_{0}}\vec{i}$$

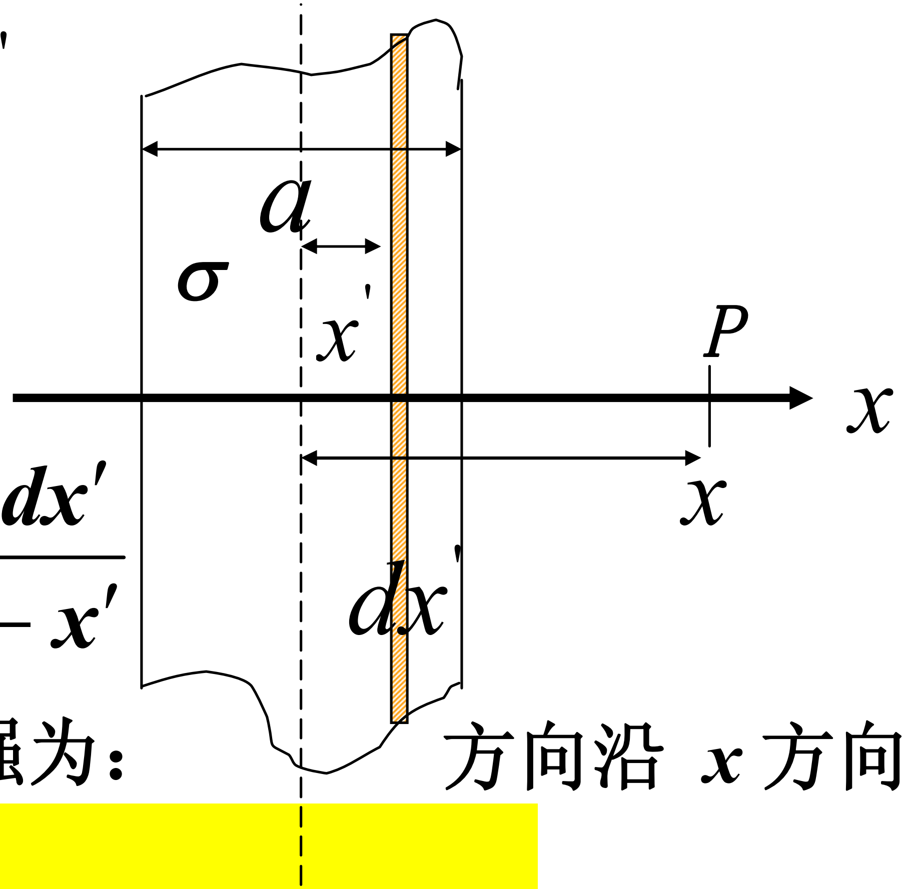
无限大带电平面

例6　一宽度为 $a$ 的无限长均匀带电平面

求：带电平面外并通过该平面的平面上的场强

解：　　取一无限长的窄条 $dx'$

$$\lambda = \sigma\, dx' \cdot 1$$




在$P$点的场强为：

$$dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x - x'} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dx'}{x - x'}$$

此带电平面在P点产生的场强为：　方向沿 $x$ 方向

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{dx'}{x - x'} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2x + a}{2x - a}$$

# 讨论

- 理想模型

点电荷 $r >> d$

电偶极子 $r >> l$

无限长带电线 $r << L$

无限大带电面 $r << \overline{d}$