§7.4　静电场中的电介质

一般来说，在电场中能与电场发生相互作用的物质，除导体外，统称为电介质。

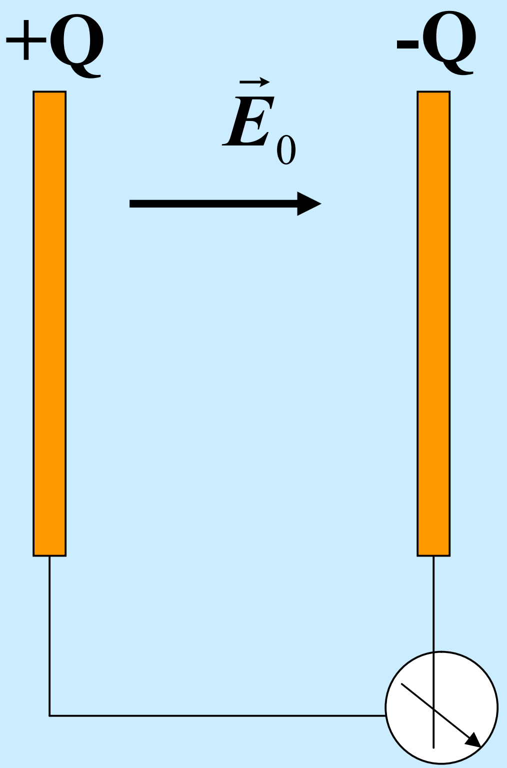
电介质是以极化方式而不是以传导方式传递电的作用的。理想的电介质是绝缘体。

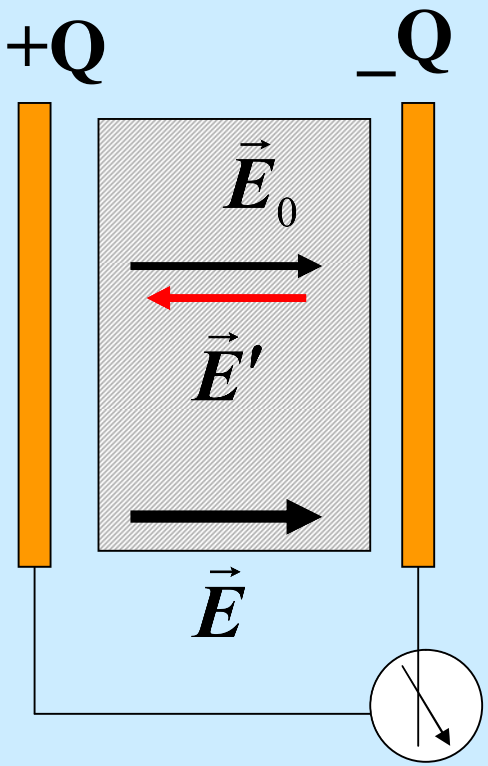
内部没有可以自由移动的电荷，因而不能导电。

我们主要研究各向同性的电介质。

一、 电介质对电场的影响

电介质对电场的影响





结论：场充满了电介质后场强减弱了，原因是电介质极化附加一反向电场。

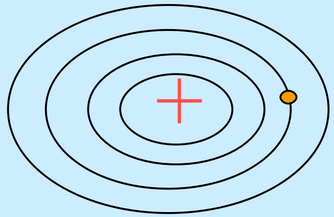
真空中 V_0

电介质中 V

$\Rightarrow V < V_0$ $\xrightarrow{E = V/d}$ $E < E_0$

二、 电介质的极化

1.电介质极化的微观机制



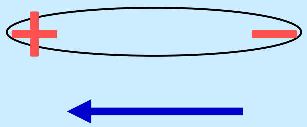
$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

分子固有极矩

电介质是由大量中性分子组成

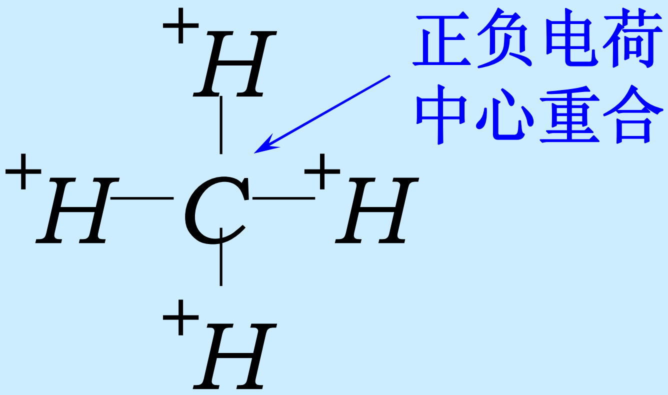
无极分子: 分子正负电荷中心重合 分子固有极矩 $\vec{p}_e = 0$

有极分子: 分子正负电荷中心不重合

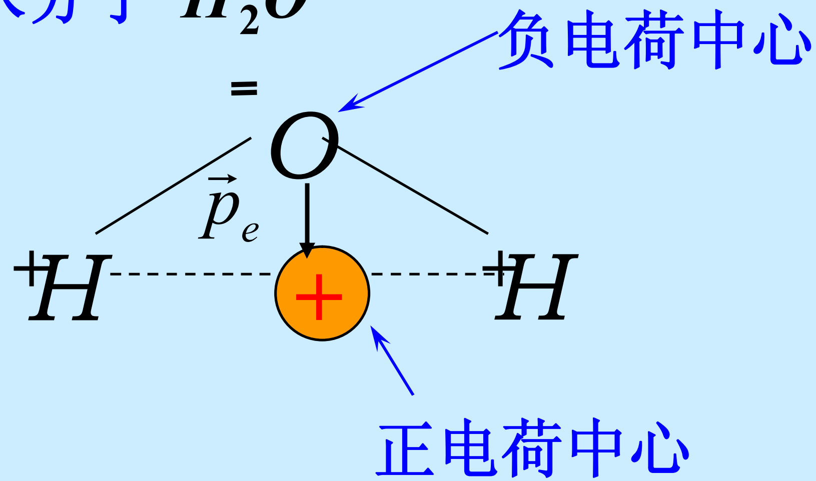


分子固有极矩 $\vec{p}_e \neq 0$

甲烷分子 CH_4

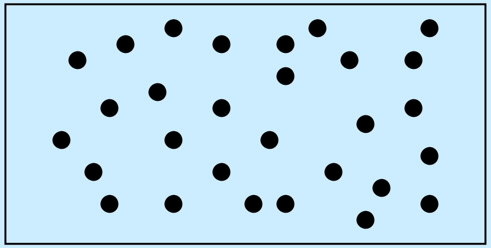


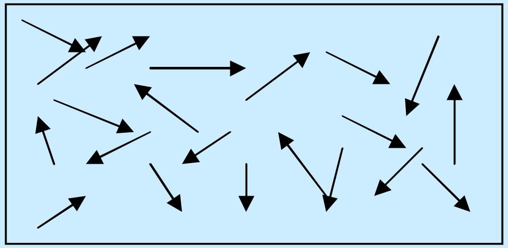
水分子 H_2O



无外电场时：

无极分子 有极分子



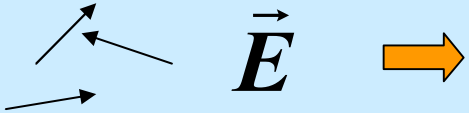


热运动---紊乱

电中性

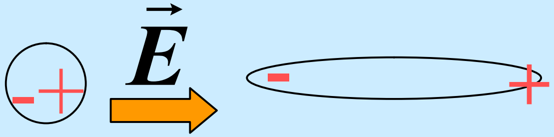
有电场时

有极分子介质

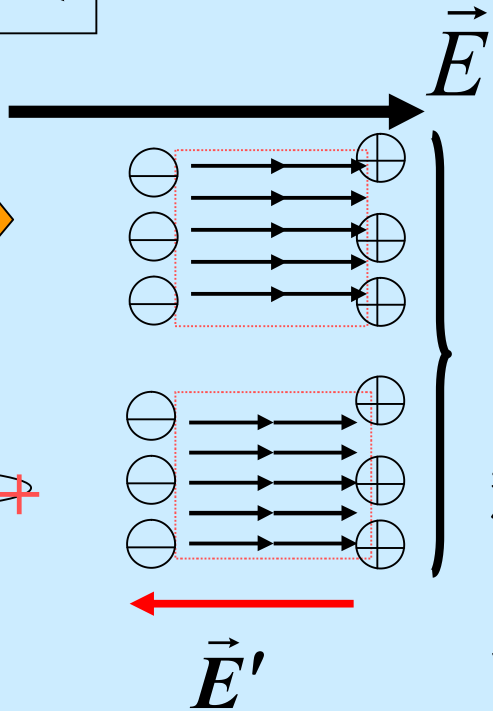


取向极化（转向极化）

无极分子介质



位移极化



共同效果

边缘出现

电荷分布

称极化电荷

或束缚电荷

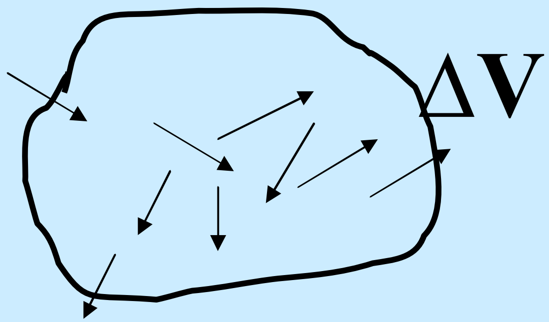
电介质被极化，产生极化电荷，和自由电荷一样，极化电荷产生一附加场，与原场方向相反，使原来的电场减弱.

结论：有电介质存在时，空间静电场由所有电荷（自由电荷与极化电荷）产生

$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'}$$

2. 描述极化强弱的物理量--极化强度矢量 $\vec{P}$

电偶极子排列的有序程度反映了介质被极化的程度，排列愈有序说明极化愈烈



$$\boxed{\vec{P}=\lim\frac{\sum\limits_i \vec{p}_{ei}}{\Delta V}}$$

$\vec{p}_{ei}$ 每个分子的电偶极矩

宏观上无限小微观上无限大的体积元 ΔV

定义为该点的电极化强度。表示单位体积中的分子的极矩的矢量和。

$$\vec{P}=n\vec{p}_i=nq\vec{l}$$

n 分子数密度 SI 单位 c/m^2

各向同性线性电介质

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}}$$

χ_e 介质的电极化率

ε_r 介质的相对介电常数

（介质的相对电容率）

$$\boxed{\chi_e = \varepsilon_r - 1}$$

χ_e 无量纲的纯数 与 $\vec{E}$ 无关

空气，真空 $\varepsilon_r = 1$ $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 介质的介电常数

各向异性线性电介质

χ_e 与 $\vec{E}$ 及晶轴的方位有关

用张量描述

三、极化强度$\vec{P}$与极化电荷的关系

结论：

1、在有电介质的电场中，穿过任意闭合曲面的电极化强度通量等于该闭合曲面内包围的极化电荷代数和的负值。

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum q_i'$$

2、均匀介质极化时，其表面上某点的极化电荷面密度，等于该处电极化强度沿外法线方向的分量。

$$\sigma' = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_n$$

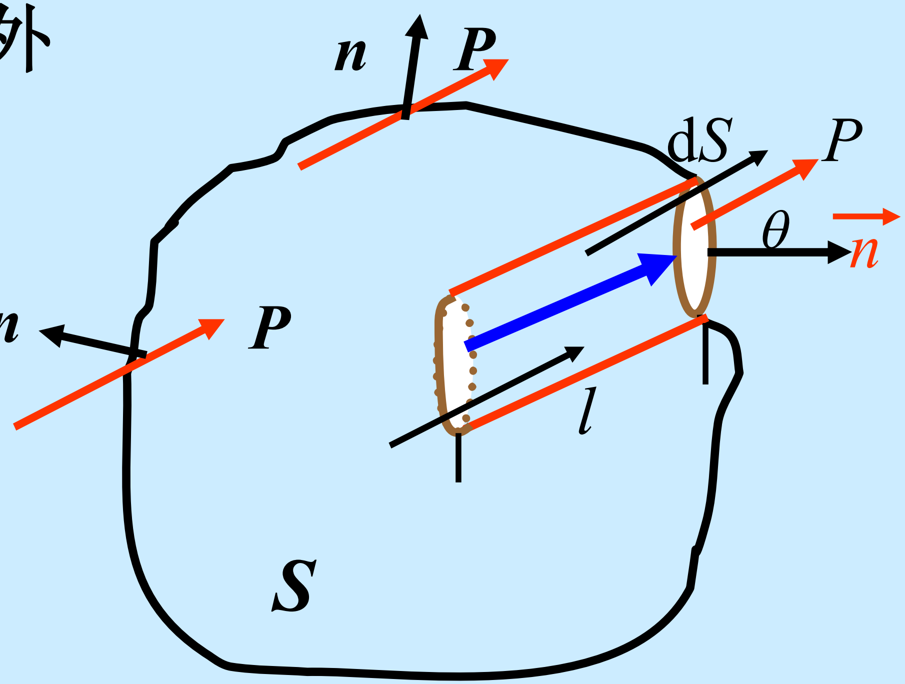
$\hat{n}$ 表示介质表面的外法线的单位矢量

3、极化强度$\vec{P}$与极化电荷的关系（证明）

在已极化的介质内任意作一闭合面S

S 将把位于S 附近的电介质分子分为两部分一部分在 S 内　一部分在 S 外

电偶极矩穿过S 的分子对S内的极化电荷有贡献



（1）小面元dS对面S内极化电荷的贡献

以 ds 为底，l 为斜高的柱体中的偶极子对 S 内的极化电荷有贡献

$$|dq'| = |qnl\,dS\cos\theta|$$

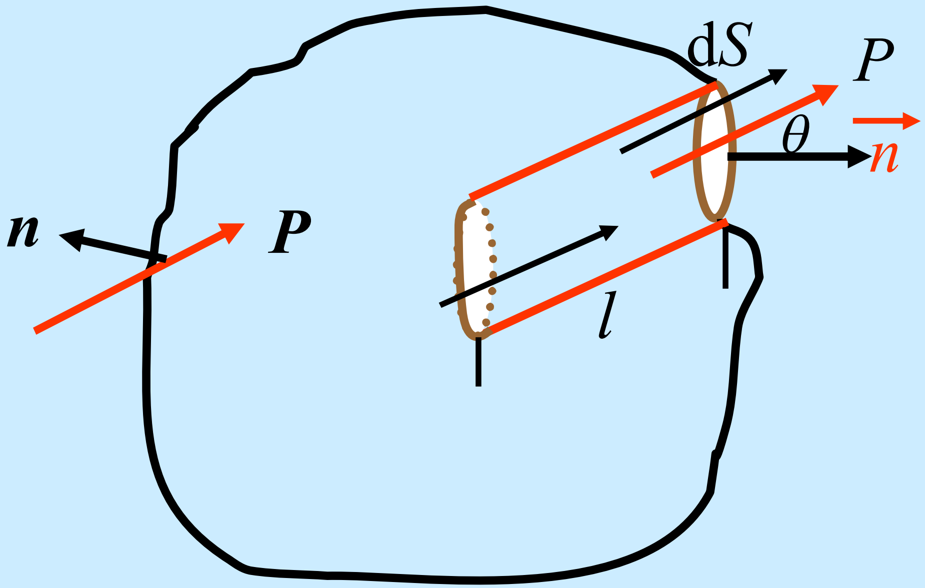
分子数密度 n

$$= |PdS\cos\theta| = |\vec{P}\cdot d\vec{S}|$$

$$(P = np_e = nql)$$

如果θ < π/2 落在面内的是负电荷

如果θ > π/2 落在面内的是正电荷



小面元*ds*对面内极化电荷的贡献

$$dq' = -P_n ds = -\vec{P} \cdot d\vec{s}$$

（2）在*S*所围的体积内的极化电荷 q' 与 $\vec{P}$ 的关系

$$q' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

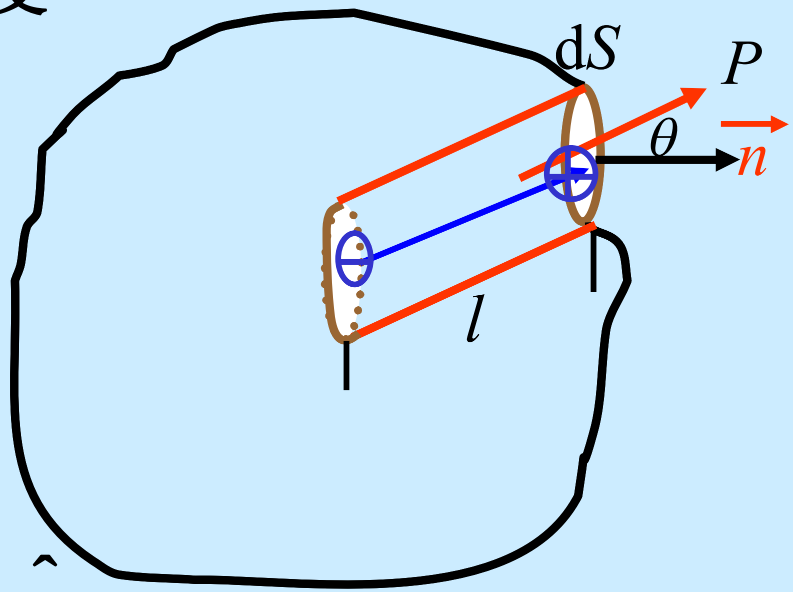
此式表明：**包围在闭合曲面的净的极化电荷等于电极化强度对该闭合曲面的通量的负值。**

（3）电介质表面极化电荷面密度

$$|dq'| = |\vec{P} \cdot d\vec{S}|$$

$$= \vec{P} \cdot d\vec{S} = P_n dS$$

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P_n = \vec{P} \cdot \hat{n}$$



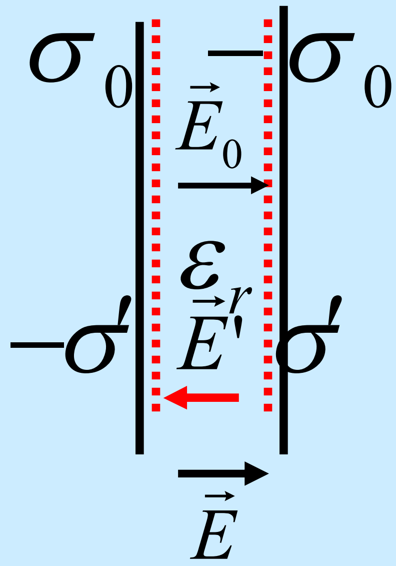
$$\boxed{\sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n} = p_n}$$

$\hat{n}$ 介质外法线方向

电介质表面电荷面密度σ'，在数值上等于该处电介质极化强度的外法向方向分量。

例1 平行板电容器 自由电荷面密度为 σ_0

充满相对介电常数为 ε_r 的均匀各向同性线性电介质



求:板内的场

解:均匀极化 表面出现束缚电荷

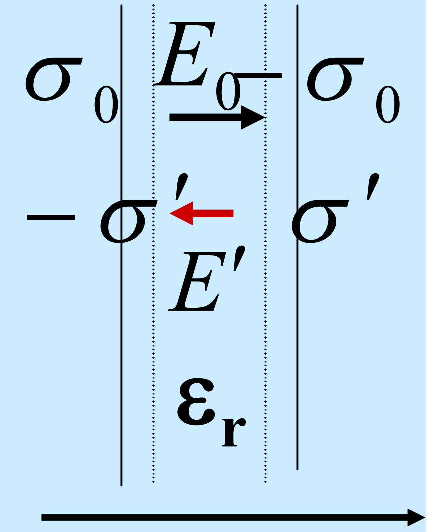
内部的场由自由电荷和束缚电荷共同产生

$\pm\sigma_0 \xrightarrow{\quad\quad} E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

单独

$\pm\sigma' \xrightarrow{\quad\quad} E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

共同产生



$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_o} \cdots \qquad (1)$$

$$\sigma' = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \cdots \qquad (2)$$

联立 $\longrightarrow$ $\boxed{E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$

$$\boxed{\boldsymbol{E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}}$$

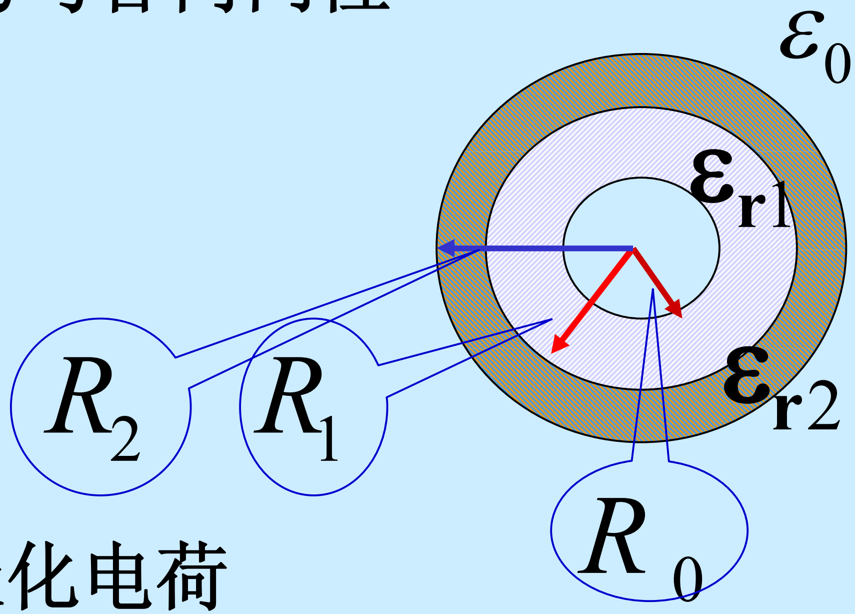
普遍?

两个等势面之间充满
各向同性均匀电介质

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

例2　导体球带电Q，置于均匀各向同性

介质中如图示



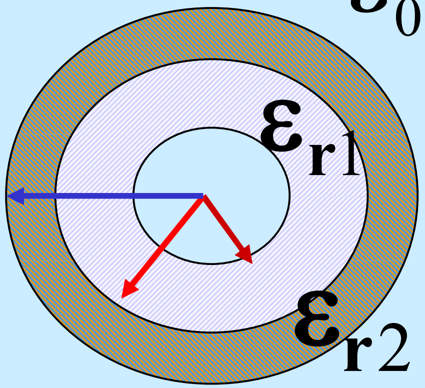
求:

1 . 场的分布

2 . 紧贴导体球表面处的极化电荷

3. 两介质交界处的极化电荷

解：1) 场的分布 $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}$



$r<R_0$
导体内部

$$\boxed{\vec{E}_1=0}\qquad \boxed{\vec{P}=0}$$

$R_0<r<R_1$
ε_{r1} 内

$$\boxed{\vec{E}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}\hat{r}}\qquad \boxed{\vec{P}_2=\varepsilon_0\left(\varepsilon_{r1}-1\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}\hat{r}}$$

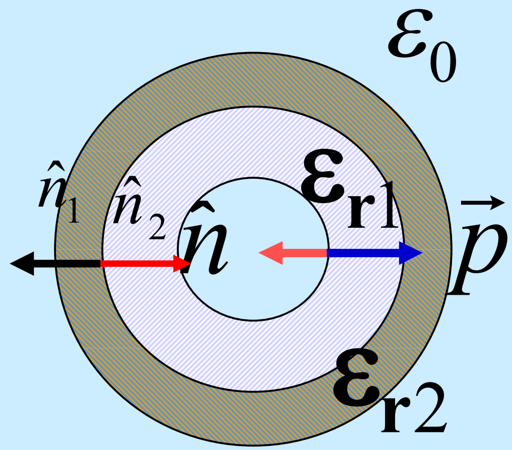
$R_1<r<R_2$
ε_{r2} 内

$$\boxed{\vec{E}_3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}\hat{r}}\qquad \boxed{\vec{P}_3=\varepsilon_0\left(\varepsilon_{r2}-1\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2}\hat{r}}$$

$r>R_2$

$$\boxed{\vec{E}_4=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}\qquad \boxed{\vec{P}=0}\qquad \varepsilon_r=1$$

2) 求紧贴导体球表面处的极化电荷



$$\sigma' = P_n = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=R_0} = -P$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R_0^2}\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)$$

$$q' = \sigma'\cdot 4\pi R_0^2 = -\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}Q$$

3) 两介质交界处极化电荷

$$\sigma'' = \sigma_{\varepsilon r1} + \sigma_{\varepsilon r2} = p_2 - p_3$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R_1^2} - \varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}R_1^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}\right)$$

两个等势面间充满各向同性的均匀电介质**思路：**

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} \rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\rightarrow \sigma' = \vec{P} \cdot \hat{n} \rightarrow q' = \int_S \sigma' dS$$

这样，以前我们在真空中所求的电场公式都可以直接引用，只要是把 ε_0 换成 $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ 即可。

三、 电位移矢量 $\vec{D}$ ，有电介质时的高斯定理

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{0i} + \sum q_i'}{\varepsilon_0} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{0i} + \sum q_i'}{\varepsilon_0} \quad \oint \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\sum q_i'$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \sum_i q_{oi}$$

定义：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

自由电荷

电位移矢量

$$\Longrightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

有**电介质时的高斯定理**或***D*的高斯定理**；***D***的通量只与自由电荷有关，与极化电荷无关。

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ 单位 c/m^2

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

各向同性
线性介质

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

介质方程

电介质中的高斯定理是静电场重要的定理，

当已知自由电荷分布具有一定的对称性时，

常可利用高斯定理求得电位移矢量 $\vec{D}$ ，

再由 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ 求得电介质中的电场强度，

它的优点是摆脱了求解极化电荷 q' 。

即 $\vec{D} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \vec{P} \Rightarrow \sigma' \Rightarrow q'$

注意：$\vec{D}$与自由电荷、束缚电荷有关，但通量仅与自由电荷有关

用高斯定理计算电介质中的场强时要注意哪些问题

同真空中的要求一样，仅在电场具有高度对称性时，从高斯定理才能算出场强 $\vec{E}$ 来。

有电介质时，高斯定理的数学式为 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_{0i}$ 求出式中的 $\vec{D}$ 就可得到 $\vec{E}$

要计算 $\vec{D}$ ，则要求 $\vec{D}$ 的分布高度对称。我们切不可以认为电位移矢量只和自由电荷 q_0 有关而与束缚电荷 q' 无关。但无论如何自由电荷 q_0 的分布应该是高度对称的，这是前提。

但是 $\vec{D}$ 的对称分布并不等于 $\vec{E}$ 一定对称分布（例如在各向异性的电介质中)。只是在各向同性的均匀电介质中，$\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 之间才有 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$ 且方向一致。因此，在各向同性的均匀电介质中，才有可能使 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 同时具有对称性。

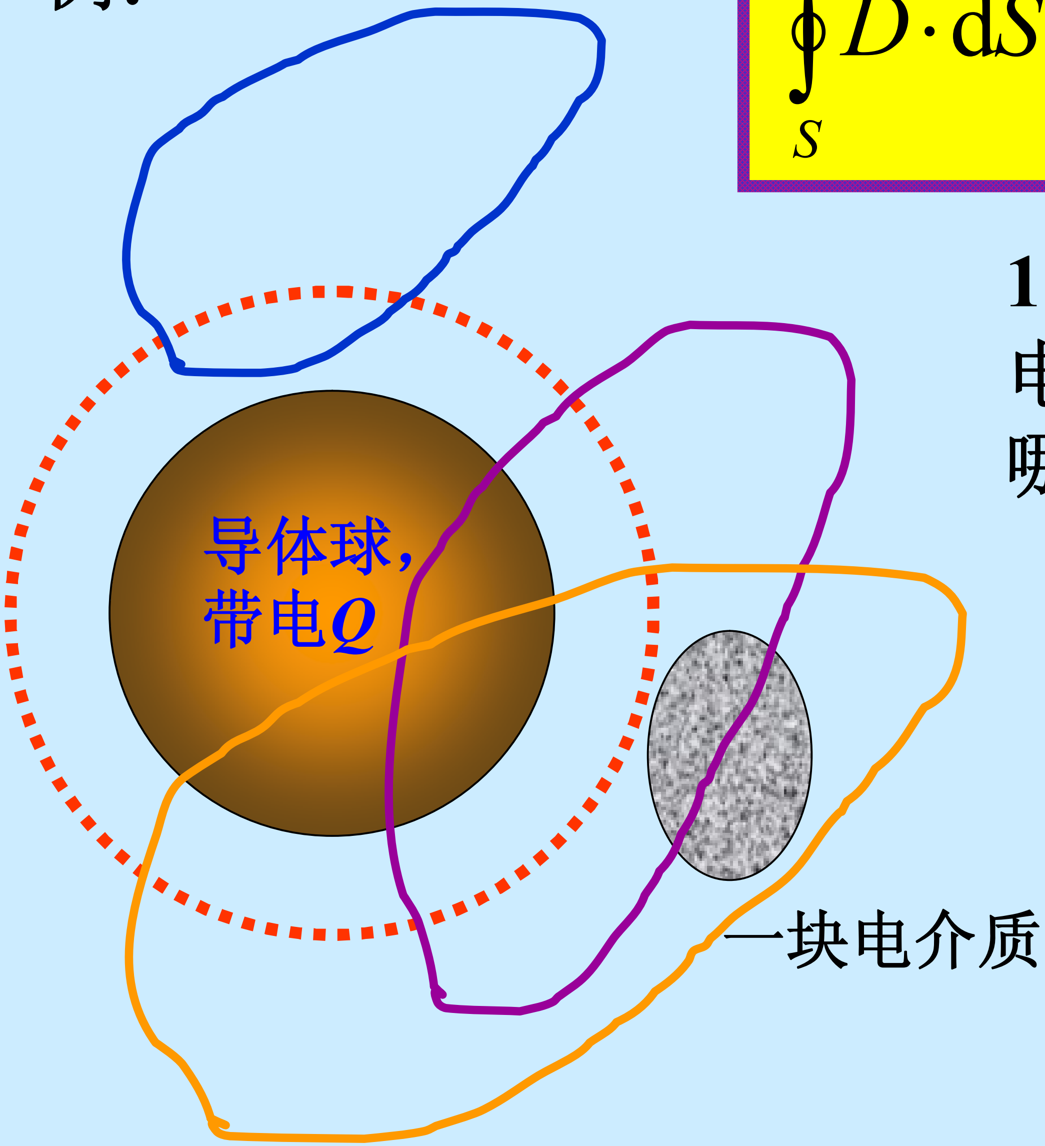
可能性还不等于是现实。因为总场强 $\vec{E}$ 由两部分叠加而成，即 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}^{/}$

除了自由电荷的电场 $\vec{E}_0$ 必须对称外，还要求束缚电荷的电场 $\vec{E}^{/}$ 也是对称的，而 $\vec{E}^{/}$ 的对称性应由介质的对称性也就是束缚电荷的对称分布来保证。所以只有在各向同性的均匀电介质的形状对称或充满整个电场空间时，才能保证 $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的对称性，才能用高斯定理来求场强。

例：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



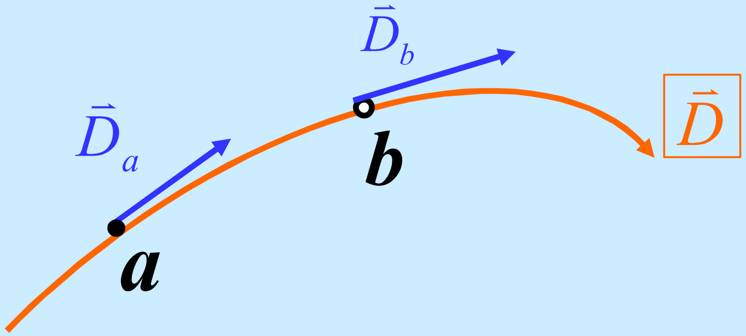
1. 通过各个闭合曲面的电通量和电位移通量与哪些电荷有关？

2. 能否用介质中高斯定理求出导体球周围的场分布？

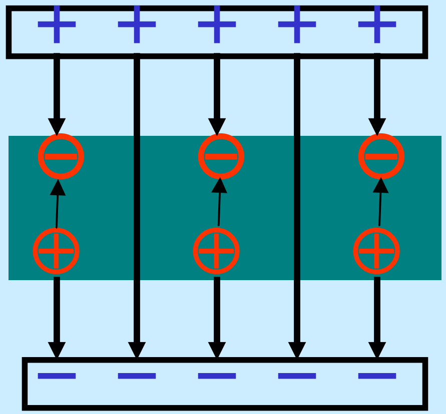
$$\vec{D} = \begin{cases} \varepsilon_0 \vec{E} & \text{真空中} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} & \text{各项同性介质中} \end{cases}$$

电位移线

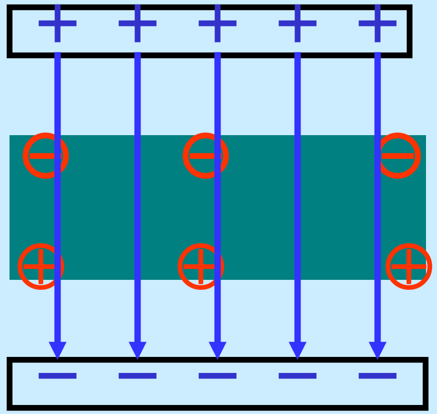
$$\vec{D} \begin{cases} \text{方向:切线} \\ \text{大小:} \dfrac{\text{电位移线条数}}{S_{\perp}} \end{cases}$$



起始于正自由电荷，
终止于负的自由电荷

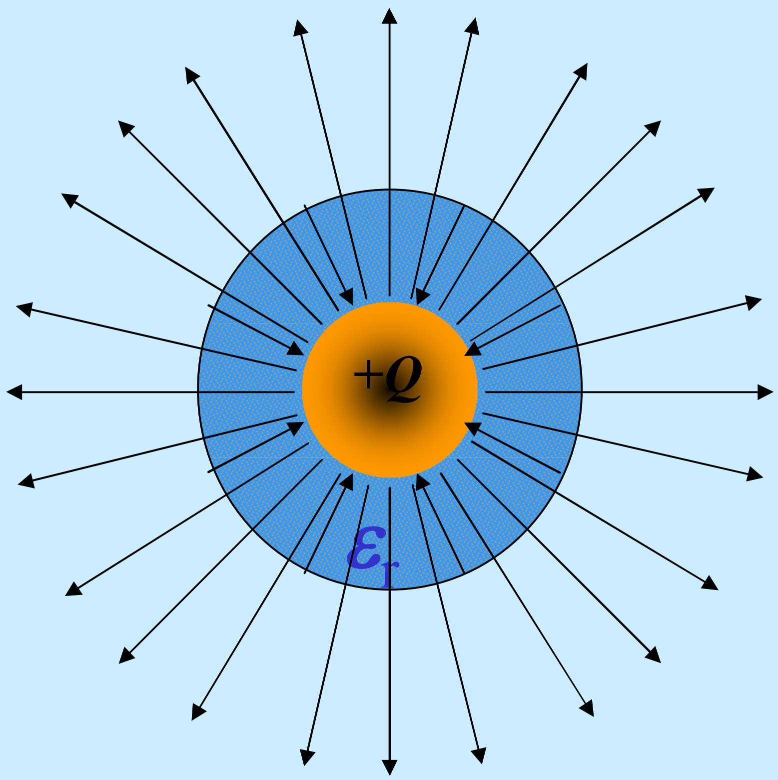


$\vec{E}$ 线

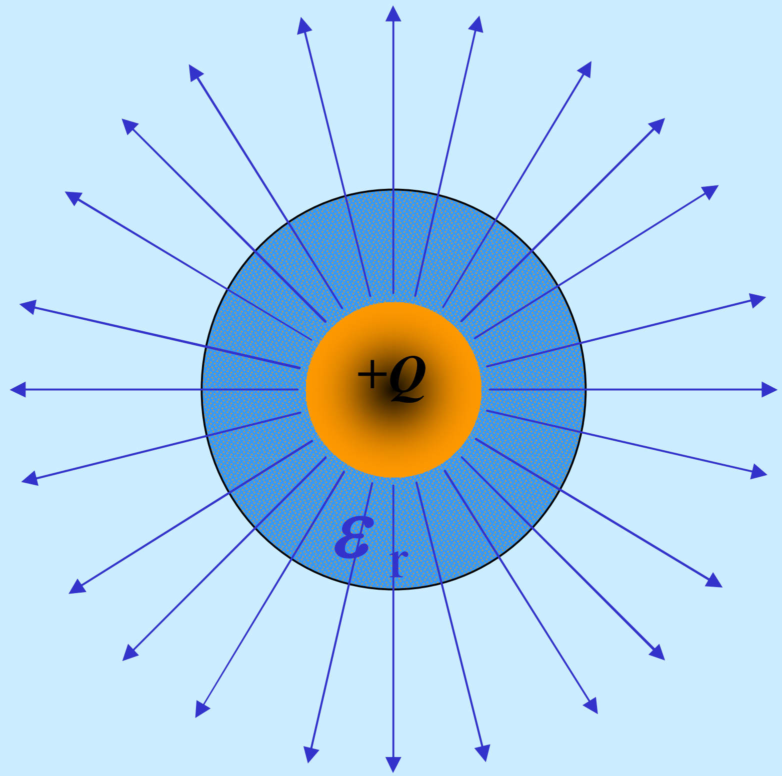


$\vec{D}$ 线

电场线与电位移线



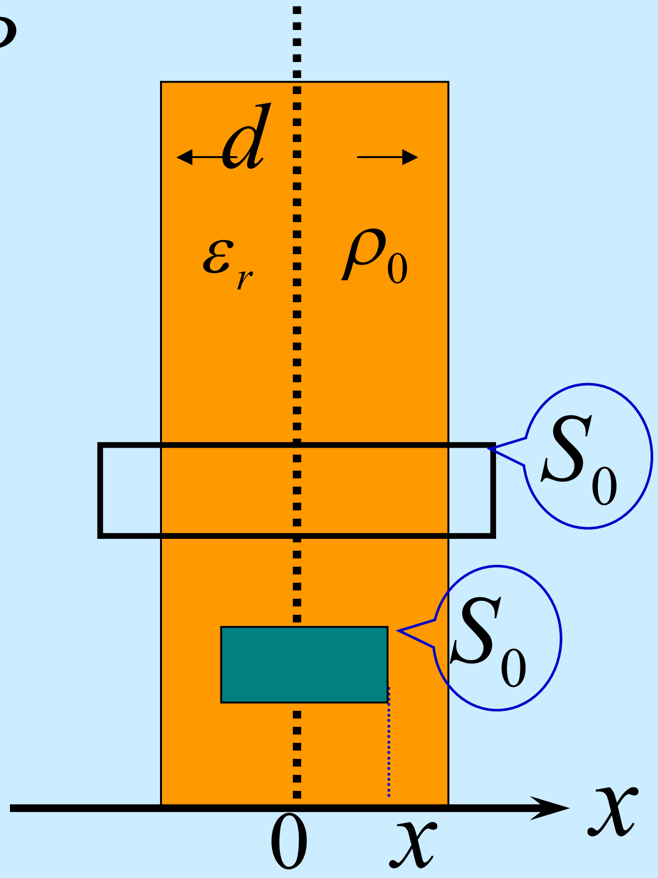
E 线



D 线

例3 一无限大各向同性均匀介质平板，厚度为 d，相对介电常数为ε_r ，内部均匀分布体电荷密度为ρ_0 的自由电荷

求：介质板内、外的 $D \quad E \quad P$



解：面对称 $\vec{D} \quad \vec{E} \quad \vec{P} \perp$平板

取坐标系如图

以 $x=0$处的面为对称面

过场点作正柱形高斯面 S

底面积设 S_0

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_S q_{0i}$$

$$2DS_0 = \rho_0 2|x|S_0 \qquad |x| \le \frac{d}{2}$$

$$D = \rho_0 |x| \qquad E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\rho_0|x|}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\frac{\rho_0|x|}{\varepsilon_r}$$

$$|x| \ge \frac{d}{2} \qquad 2DS_0 = \rho_0 S_0 d$$

$$D = \frac{\rho_0}{2} d$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$$ 均匀场 $$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = 0$$