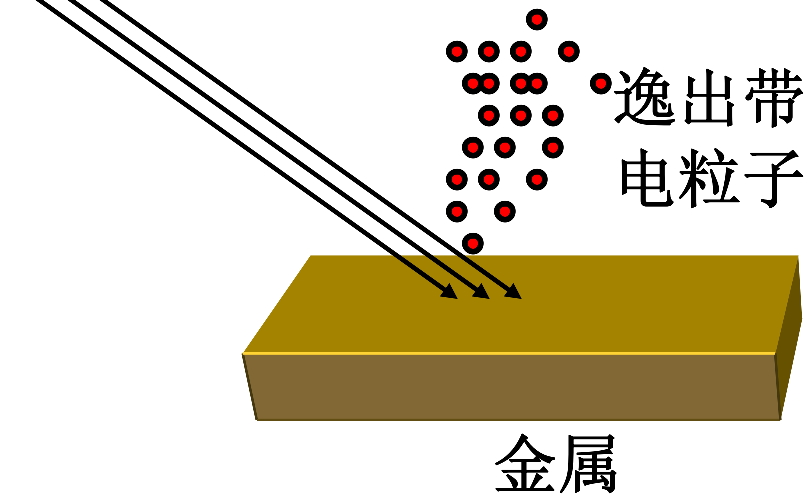
§2光电效应（photoelectric effect） ☆

光照射某些金属时，

能从表面释放出电子的效应。

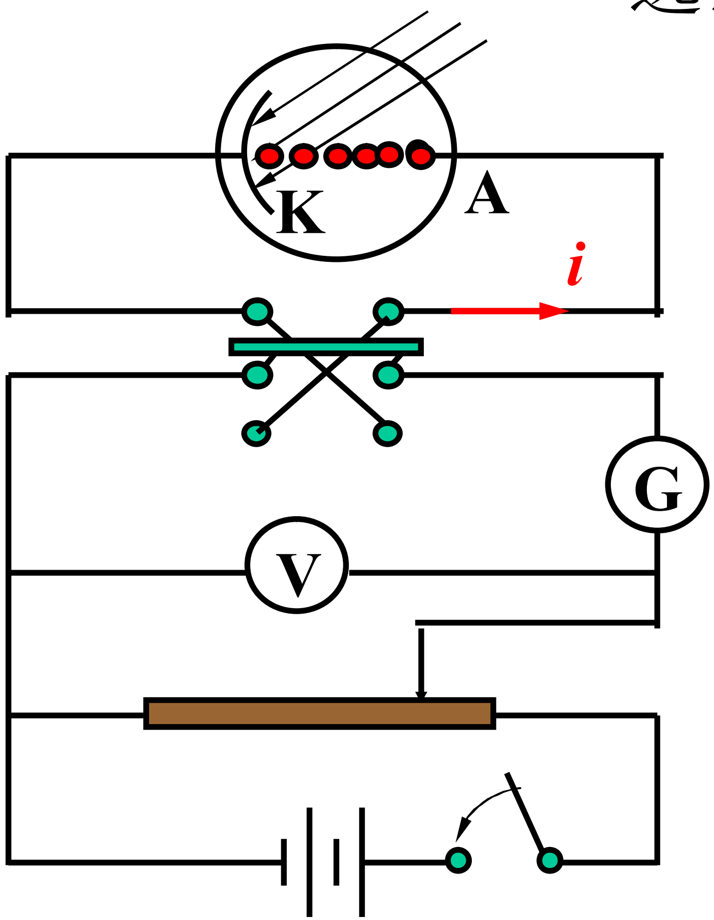
光电效应现象是赫兹在1887年发现的，当1896年J.J.汤姆孙发现了电子之后，勒纳德才证明所发出的带电粒子是电子。



光电效应中产生的电子称为“光电子”。

一 光电效应的实验规律 ☆

逸出的光电子具有一定初动能



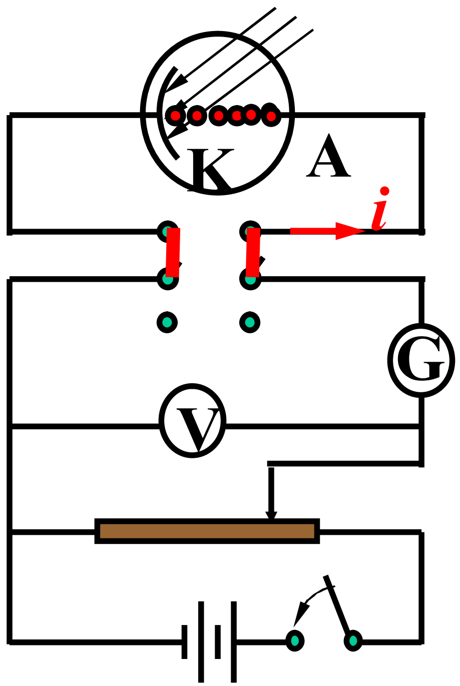
AK加正向电压时，
具有一定初速度的光电子
在电场加速下向阳极A运动，
就形成光电流。

AK加反向电压，
光电子在电场减速下向阳极**A**运动
如果反向电压小，
光电子仍能到达阳极，形成光电流；
当反向电压达到某值时，
具有最大初动能的光电子也不能
到达阳极**A**，就不能形成光电流。

注意：不能以光电流的有无来判断光电效应是否发生，
而应以是否有光电子逸出为判断光电效应是否发生的标准。

1 红限频率的存在

☆



实验表明，只有当入射光的频率大于某一值 ν_0 时，

才能从金属表面释放电子。

当入射光的频率 $\nu < \nu_0$ 时，

无论光强多强、照射时间多长、

加的正向电压多大，

都不会有光电流产生，

即不能发生光电效应。

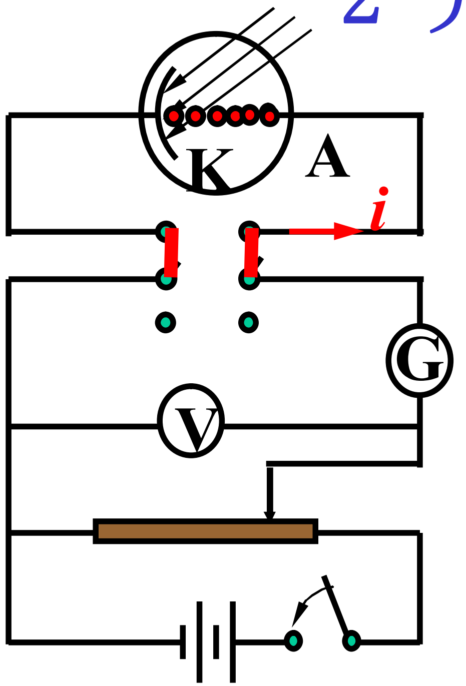
而 $\nu > \nu_0$ 的光都能产生光电效应。

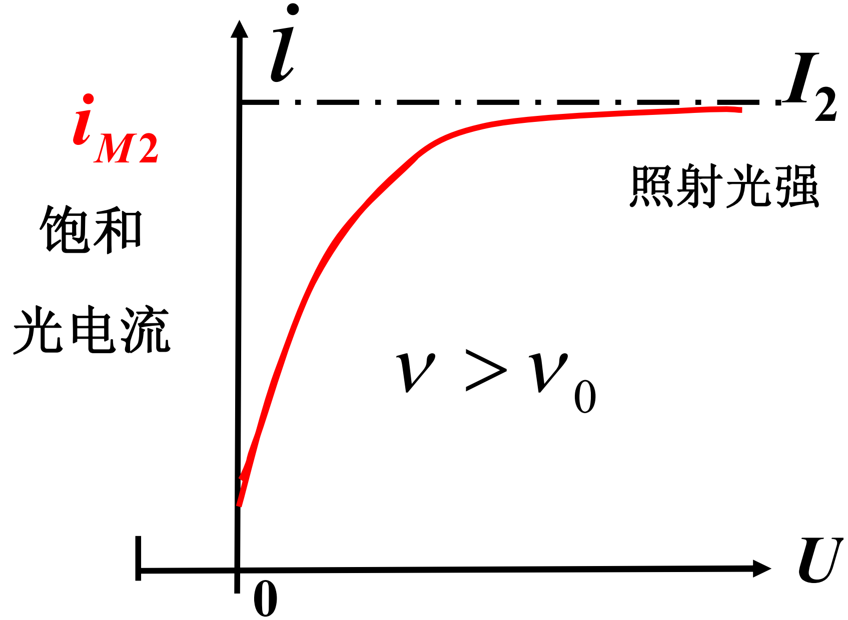
这一频率 ν_0 称为红限频率，

相应的光波长 λ_0 称为红限波长。

实验还表明，不同金属的红限频率不同。

2 光电流与正向电压的关系 ☆





当用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，

光强一定时，光电流随加速电压的增加而增加；

当加速电压增加到一定值时，光电流不再增加，

而是达到一饱和值 i_m 。

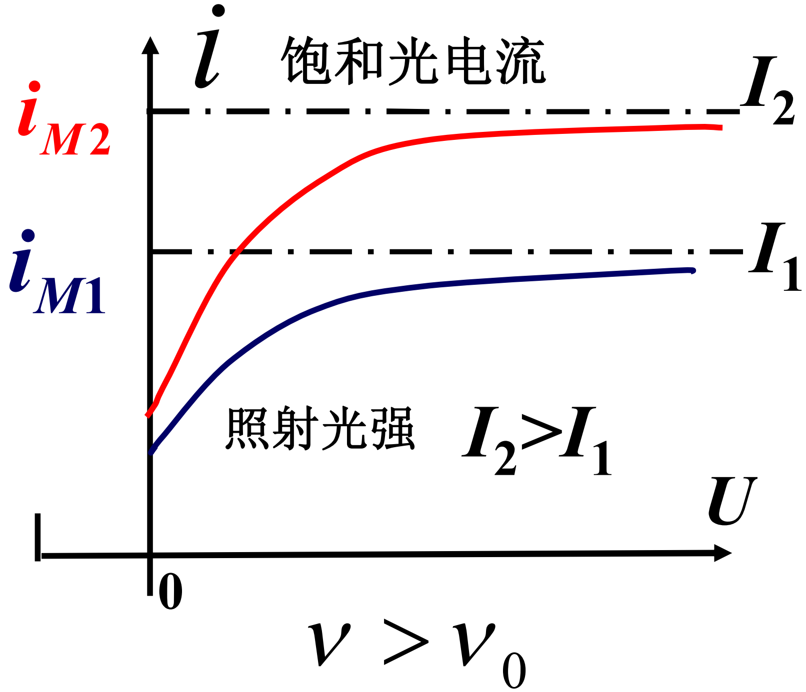
饱和现象说明，此时，

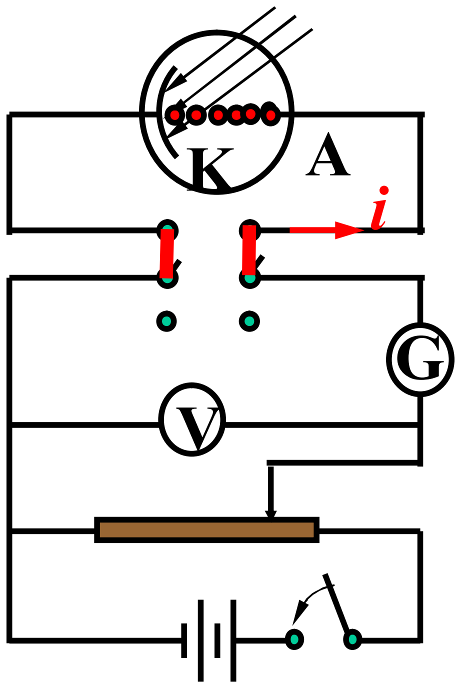
单位时间内从阴极逸出的光电子已经全部阳极接收。

3 饱和电流与入射光强的关系

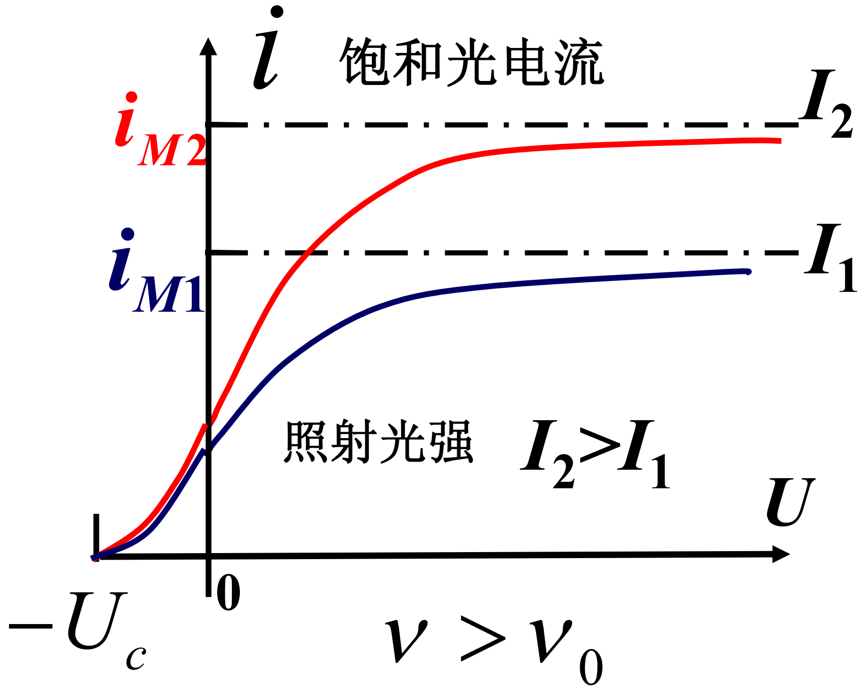
当用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，

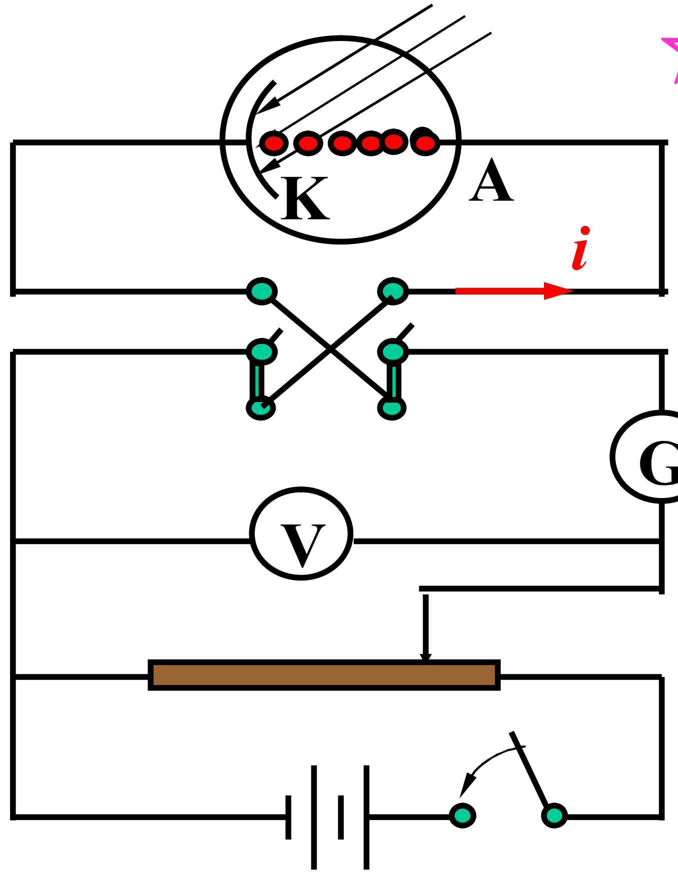
实验表明，饱和电流 i_m 与光强 I 成正比。





4 截止电压 ☆





当反向（减速电压）增加时，电流并不为零。
仅当反向电压等于某值 U_c 时，电流为零；
再增加反向电压，电流一直为零。
这一电压值 U_c 称为截止电压。

☆

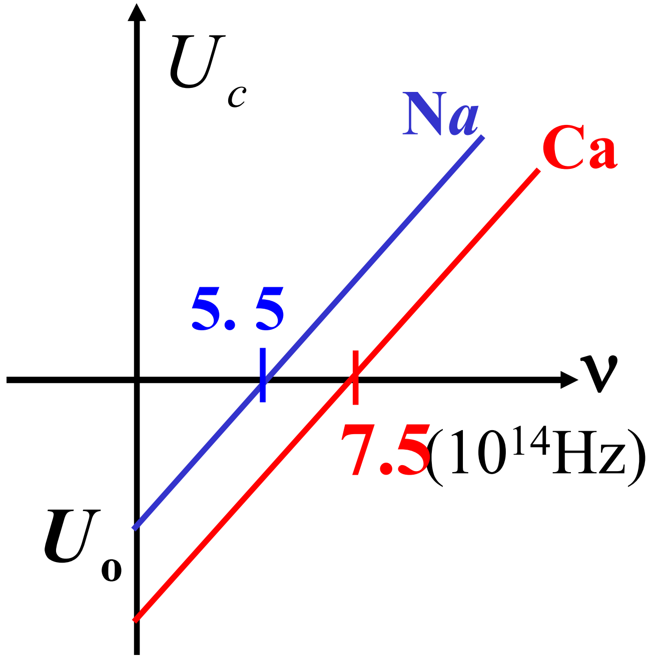
截止电压的存在说明，此时，
从阴极**K**逸出的具有最大初动能的光电子，
由于受到外加电场的阻碍，
也不能到达阳极**A**了。

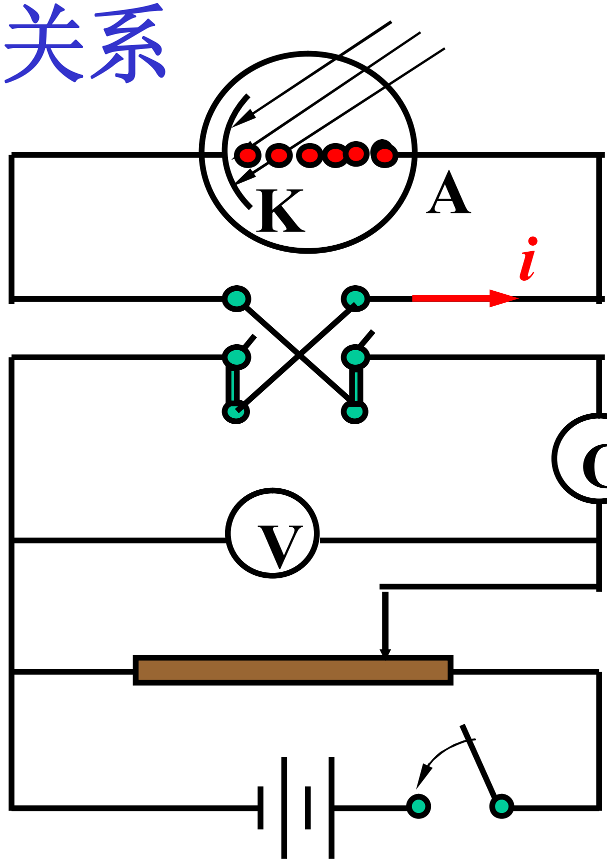
根据能量分析，得到
光电子从阴极K逸出时的最大初动能
与截止电压的关系

$$\frac{1}{2}mV_m{}^2 = eU_c$$

5 截止电压与入射光频率的关系

☆





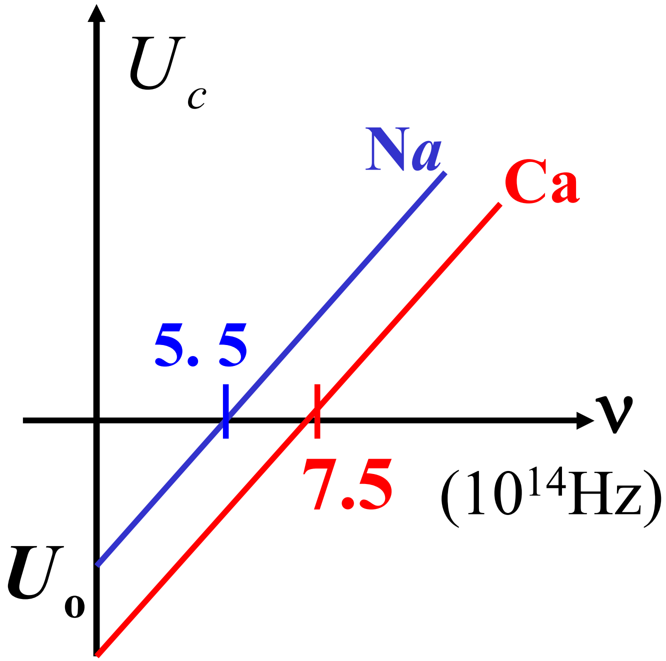
截止电压与入射光频率成线性关系。
而且，对于不同的金属材料，其直线平行。

$$U_c = k\nu - U_0$$

k 是普适常数与材料无关
不同材料 U_0 值不同

$$U_c = k\nu - U_0$$

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = eU_c$$



$$\boxed{\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = ek\nu - eU_0}$$

可见，入射光的频率必须大于某一值，

才能使 $\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} \geq 0$，

电子才能逸出金属表面成为光电子，

才能发生光电效应。

$$\boxed{\nu_0 = \frac{U_0}{k}}$$

这一极限值就是红限频率

6 光电效应与光照时间的关系

☆

光电子的逸出，

几乎是在光照射到金属表面的那一刻发生的，

其延时在 $10^{-9}s$ 以下。

即使用极弱的光，只要光频率大于红限频率，

光电效应的发生几乎与光照时间无关。

二 光电效应经典理论解释的困难 ☆

经典理论认为：光是一种电磁波。

经典理论无法解释：

1光电子能否逸出的问题，
即无法解释"红限"问题。

2光电子的初动能与入射光的频率成线性关系，
而与入射光强无关。

3光电子的逸出几乎与光照时间无关

经典理论无法对光电效应的本质问题给出解释

光的波动理论在光电效应的实验结果上遇到了"灾难"。

关键时刻，又是伟大的爱因斯坦挺身而出！

三　爱因斯坦的光子理论

☆

当普朗克还在寻找他的能量子的经典理论的根源时，爱因斯坦却大大发展了能量子的概念。

爱因斯坦光量子假设（1905）：

1 电磁辐射由以光速 c 运动的局限于空间某一小范围的光的能量子单元 — 光子所组成，

光子能量 $\varepsilon = h\nu$

2 光量子具有“整体性”

光的发射、传播、吸收都是量子化的。

3 一束光就是以速率 c 运动的一束光子流。

光强　$I = N \cdot h\nu$　　N：光子数通量

四 光子理论对光电效应的解释

☆

一个光子将全部能量交给一个电子，
电子克服金属对它的束缚，
从金属中逸出。

由能量守恒可得
一个电子逸出金属表面后的最大初动能应为

$$\boxed{\frac{1}{2}m\mathrm{v}_m^2 = h\nu - A}$$

A：**逸出功**

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_m^2 = h\nu - A$$ ☆

●$h\nu > A$ 时，电子一次从光子处获得能量，克服金属的逸出功，从金属表面逸出，**能产生光电效应**；

当 $\nu < A/h$ 时，电子一次从光子处获得能量不足以克服金属的逸出功，电子通过热运动很快释放吸收的能量，不能从金属表面逸出，不发生光电效应。

所以存在：红限频率

$$\boxed{\nu_0 = \frac{A}{h}}$$

☆

$$\boxed{I = N\varepsilon = Nh\nu}$$

如果光强一定，单位时间内到达阴极K的光子数一定，单位时间内从阴极K上打落的光电子数一定。

当加速电压较小时，由于其他的阻碍作用，从阴极K上打落的光电子并没有全部到达阳极A，因此，光电流较弱。

当加速电压逐渐增加时，能够到达阳极A的光电子数随之增加，因此，光电流随加速电压的增加而增加。

当单位时间内从阴极K上打落的光电子全部被加速电压运送到阳极A时，再增大加速电压，能够到达阳极A的光电子数不会增加了，

因此，存在饱和电流 i_m 。

☆

$$\boxed{I = N\varepsilon = Nh\nu}$$

如果入射光强增大，
单位时间内到达阴极K的
光子数随之成正比增加，
单位时间内从阴极K上打落的
光电子数随之成正比增加。

因此，饱和电流 i_m 与光强 I 成正比。

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = h\nu - A$$

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = eU_c$$

☆

用大于红限频率的某固定频率的光照射某金属时，
从阴极K上打落的光电子还具有一定的初动能。

尽管光电子的运动方向各异，
但总还是有一部分光电子在没有加速电压的作用下，
也会到达阳极A，从而形成光电流。

如果加一个反向减速电压，
阻止光电子向阳极A运动，则光电流就会减小。

当反向减速电压达到某一数值 U_c 时，
连具有最大初动能（沿电场方向的最大初动量）
的光电子都不能到达阳极A时，光电流才为零。

☆

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = h\nu - A$$

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = eU_c$$

$$\Rightarrow \quad U_c = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}$$

由于e 和 h都是与金属材料无关的常数，

A是与金属材料有关的常数，

因此，截止电压与入射光频率成线性关系。

而且，直线的斜率 $k = h/e$ 与金属材料无关，

对于所有金属材料，直线是平行的；

但由于金属的逸出功 A 与金属材料有关，

对于不同的金属材料，直线的截距不同。

☆

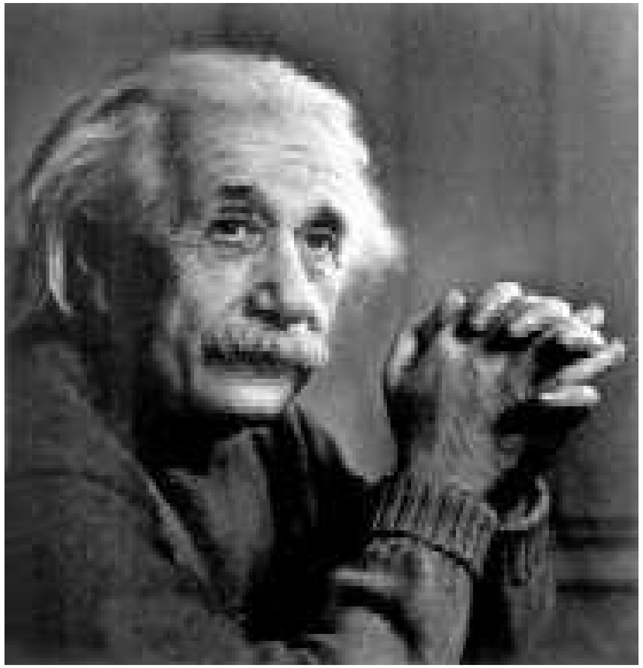
一个电子一次吸收一个

具有足够能量的光子

而逸出金属表面

是不需要多长时间的，

因此，光电效应的延迟时间极短。



☆

爱因斯坦的"光子"假说，完全解释了光电效应。

光子概念被证明是正确的。

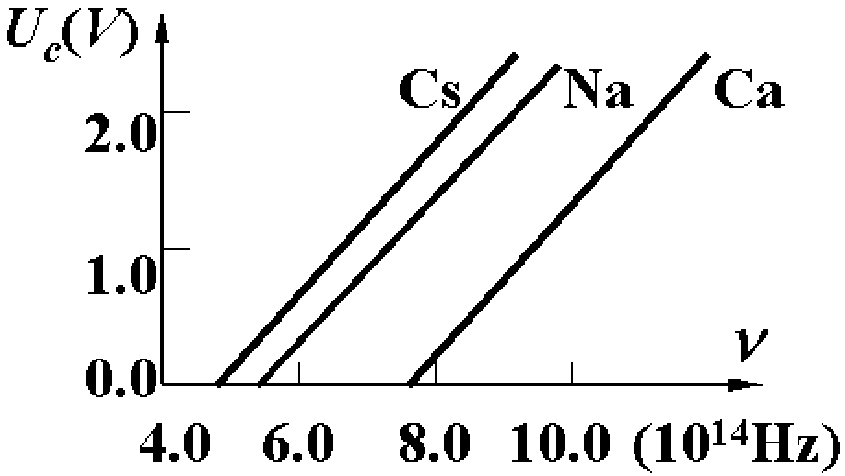
一束光波就是一束光子流，

光子能量$\varepsilon = h\nu$

光波在辐射、传播、吸收过程中

都是量子化的

1916年密立根（R.A.Milikan）做了精确的光电效应实验，利用U_c—ν的直线斜率K，定出$h = 6.56\times10^{-34}$J.s。



$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}m\upsilon_m^2 &= \underline{h\nu} - A\\ eU_c &= \underline{eK\nu} - eU_0\end{aligned}\right\}\longrightarrow h = eK$$

这和当时用其他方法定出的h符合得很好。从而进一步证实了爱因斯坦的光子理论。尽管如此，密立根还是认为光子理论是完全站不住脚的。可见，一个新思想要被人们接受是相当困难的。

☆

爱因斯坦由于对光电效应的理论解释和对理论物理学的贡献， 获得1921年诺贝尔物理学奖

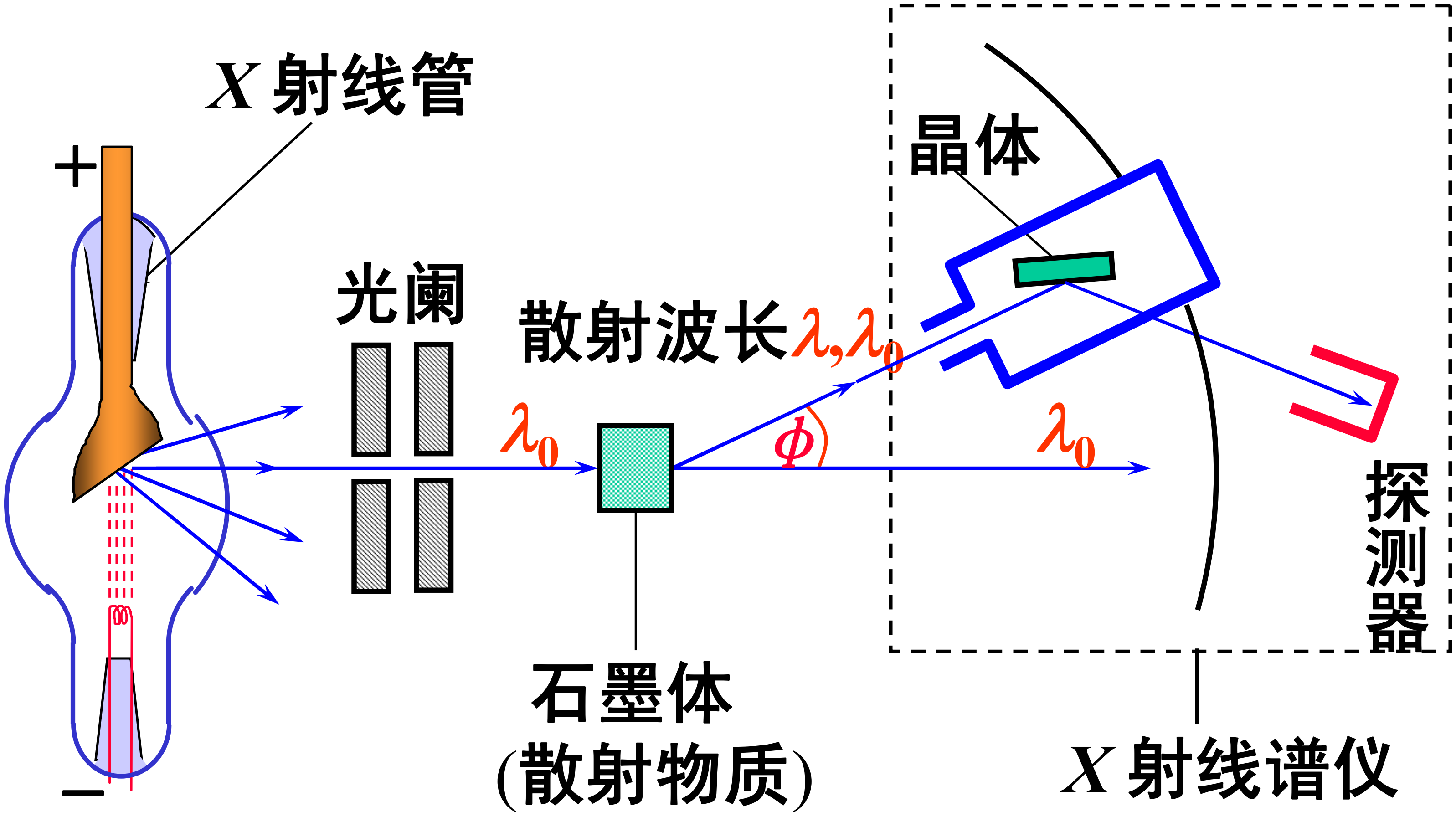
密立根由于研究基本电荷和光电效应，特别是通过著名的油滴实验，证明电荷有最小单位，获得1923年诺贝尔物理学奖

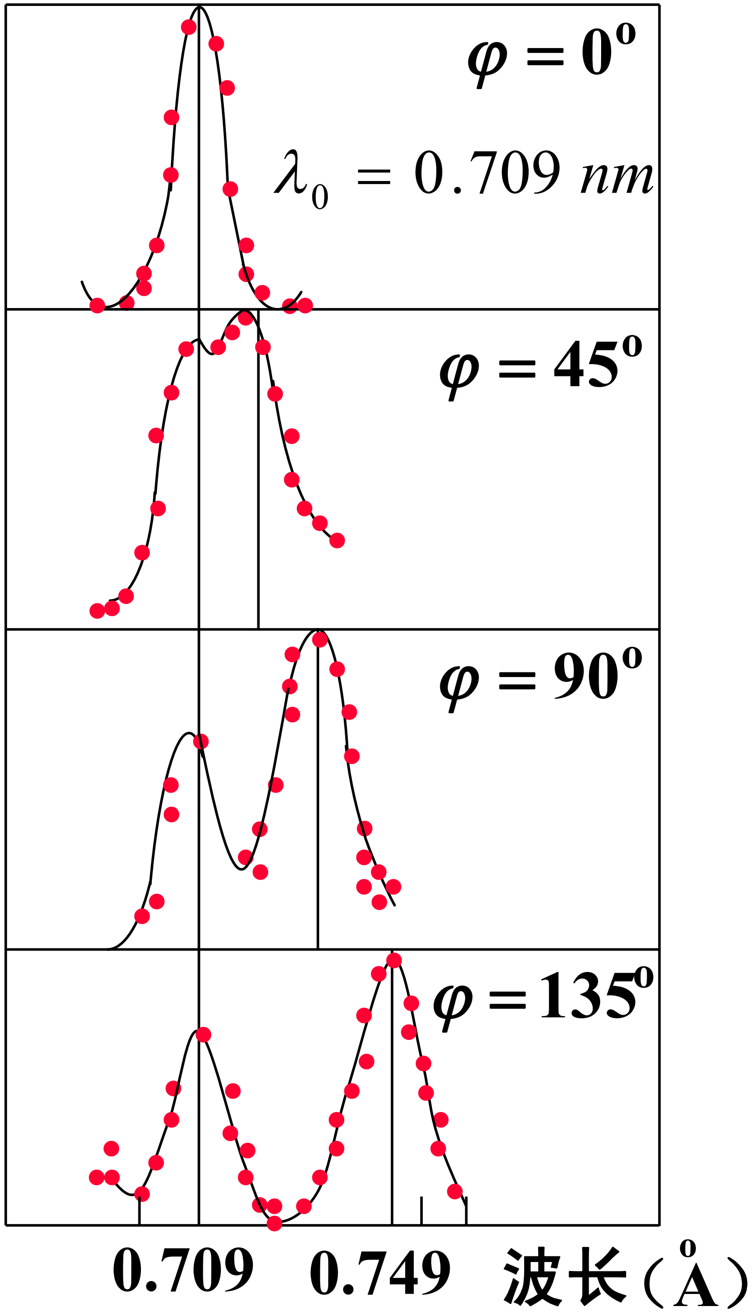
五 康普顿效应

☆

1922–23年康普顿研究了*X*射线在石墨上的散射

1、实验规律





散射出现了$\lambda \neq \lambda_0$的现象，☆

称为**康普顿散射**。

散射曲线的三个特点：

1、除原波长λ_0外，出现了移向长波方面的新的散射波长λ.

2、新波长λ随散射角φ的增大而增大。

3、当散射角增大时，原波长的谱线强度降低，而新波长的谱线强度升高。

☆

实验表明：新散射波长λ>入射波长λ_0，波长的偏移$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$只与散射角$\varphi$有关，与散射物质无关。实验规律是：

$$\boxed{\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\lambda_c(1-\cos\varphi)=2\lambda_c\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$\lambda_c=0.0241\text{Å}=2.41\times10^{-3}\text{nm}$（实验值）

称为电子的康普顿波长

只有当入射波长λ_0与λ_c可比拟时，康普顿效应才显著，因此要用X射线才能观察到。

☆

经典理论认为：

入射光

要么被晶体吸收

要么被晶体衍射

要么安全通过晶体

无论是被晶体衍射

还是安全通过晶体

光的频率、或者说光的波长不变。

2、康普顿效应的理论解释 ☆

经典电磁理论难解释

为什么有$\lambda \neq \lambda_0$的散射，

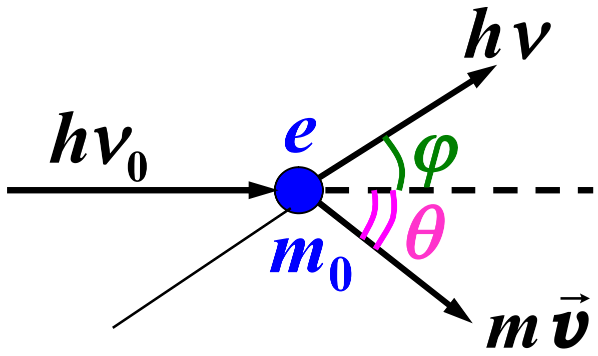
康普顿用光子理论做了成功的解释：

●X射线光子与“静止”的“自由电子”弹性碰撞

（ 波长1Å的X射线，其光子能量$\varepsilon \sim 10^4$ eV，
外层电子束缚能~ eV，室温下 kT~10^{-2}eV）

☆

● 碰撞过程中能量与动量守恒



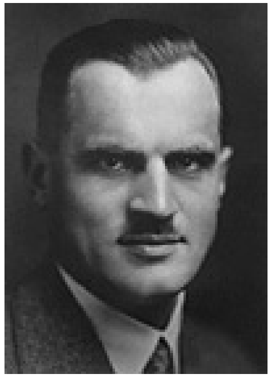
自由电子（静止）

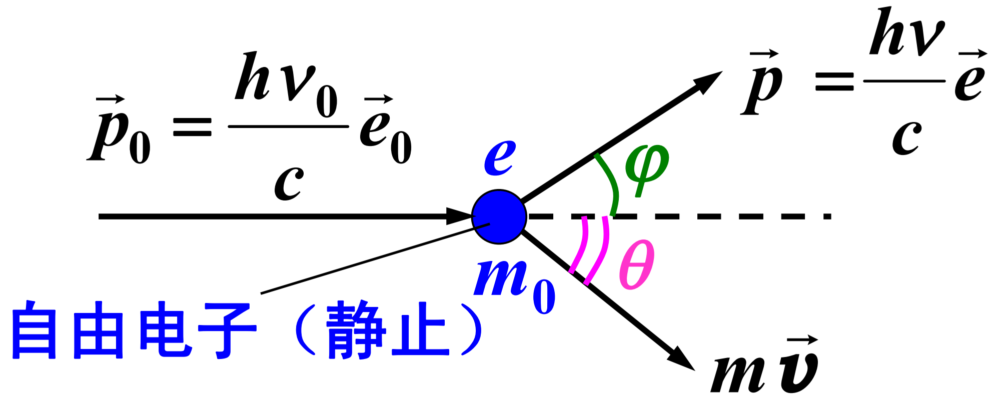
碰撞→光子把部分能量传给电子

→ 光子的能量减少↓

→ 散射X射线频率减小↓

→ 散射X射线波长增大↑





☆

$$\begin{cases} \text{能量守恒} & h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \\ \text{动量守恒} & \dfrac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 = \dfrac{h\nu}{c}\vec{e} + m\vec{v} \\ \text{反冲电子质量} & m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{cases}$$

解得: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \dfrac{c}{\nu} - \dfrac{c}{\nu_0} = \dfrac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi) = \lambda_c(1-\cos\varphi)$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c} = \frac{6.63\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}}\text{m} = 2.43\times10^{-3}\text{nm}$$

等于实验值

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi)}$$ ☆

从上述分析可知，入射光子与电子碰撞时，把一部分能量传给了电子。

因而光子能量减少，频率降低，波长变长。

波长偏移 $\Delta\lambda$ 与散射角 φ 的关系式也与实验结果定量地符合。

上式还表明，波长的偏移 $\Delta\lambda$ 与散射物质以及入射X射线的波长 λ_0 无关，

而只与散射角 φ 有关。

这一规律也已为实验证实。

3、康普顿散射实验的意义 ☆

●支持了“光量子”概念，进一步证实了

$$\varepsilon = h\nu$$

●首次实验证实了爱因斯坦提出的“光量子具有动量”的假设

$$p = \varepsilon / c = h\nu / c = h / \lambda$$

●证实了在微观领域的单个碰撞事件中，动量和能量守恒定律仍然是成立的。

康普顿获得1927年诺贝尔物理学奖。

4、讨论几个问题（阅读）

（1）为什么康普顿效应中的电子不能像光电效应那样吸收光子，而是散射光子？

假设自由电子能吸收光子，则有

$$\left.\begin{aligned} h\nu_0 + m_0c^2 &= mc^2 \\ \frac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 &= m\boldsymbol{v}\vec{e}_0 \\ m = m_0/\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2} \end{aligned}\right\} 1-\frac{\boldsymbol{v}}{c} = \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \rightarrow \mathrm{v}=c$$

违反相对论！

上述过程不能同时满足能量、动量守恒。

因此：自由电子不能吸收光子，只能散射光子。

（2）为什么在光电效应中不考虑动量守恒？

在光电效应中，
入射的是可见光和紫外线，光子能量低，
电子与整个原子的联系不能忽略，

原子也要参与动量交换，　　　　（阅读）
光子－电子系统动量不守恒。

但原子质量较大，能量交换可忽略，

∴光子－电子系统仍可认为能量是守恒的。

（3）为什么可见光观察不到康普顿效应？

可见光光子能量不够大， （阅读）

原子内的电子不能视为自由，

所以可见光不能产生康普顿效应。

只有用X射线，

才能观察到显著的康普顿效应。

在光电效应中，

入射光是可见光或紫外线，

康普顿效应不显著。

（4）为什么康普顿散射中还有原波长λ_0呢？

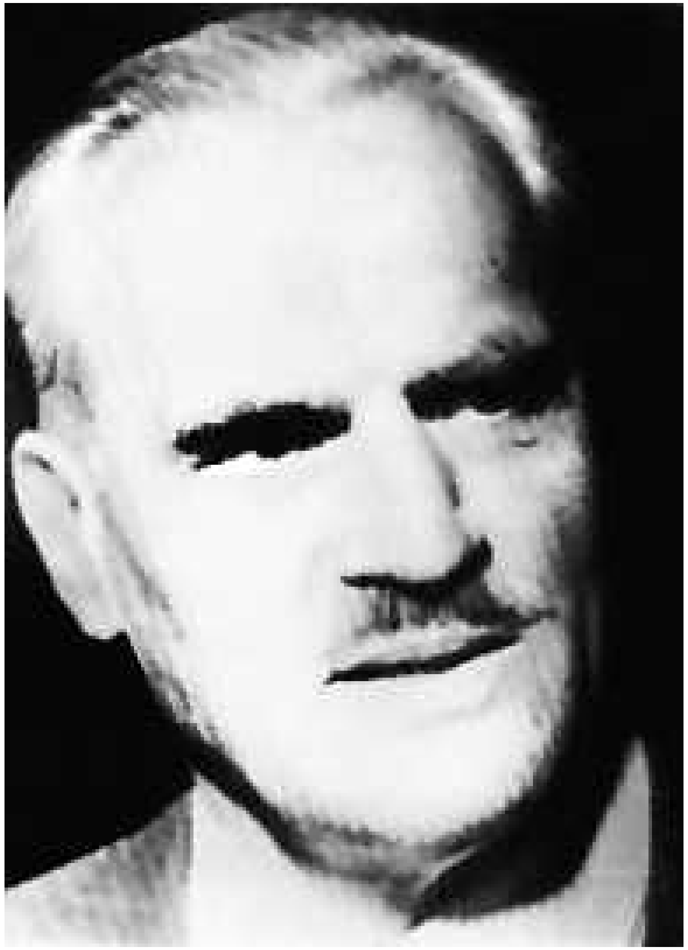
这是因为光子还可与石墨中被原子核束缚得很紧的电子发生碰撞。

内层电子束缚能10^3~10^4eV，不能视为自由，而应视为与原子是一个整体。所以这相当于光子和整个原子碰撞。$\because m_{原子} >> m_{光子}$

$\therefore$ 在弹性碰撞中，入射光子几乎不损失能量，即 散射光子波长不变，散射线中还有与原波长相同的射线。

（阅读）

☆



康普顿

（A. H.Compton)

美国人(1892-1962）

六 光电效应的应用

☆

由于光电效应中的光电流与入射光强成正比，可用来实现光信号与电信号之间的相互转换，应用于电影、电视及其它现代通信技术。
光电效应的瞬时性，在自动控制和自动计数等方面也有极为广泛的用途。

(1)光电管和固态光电探测器
(2)光电陪增管
(3)光电成象器件
(4)光敏电阻

例19－1　用单色光照射某一金属，产生光电效应。☆

如果入射光的波长从 $\lambda_1 = 400nm$ 减到 $\lambda_2 = 360nm$ 。

截止电压变化多少？数值是加大还是减少？

解：截止电压的含义是：

在发生光电效应的前题下，即照射光的频率大于红限频率的条件下（根据爱因斯坦方程，逸出金属表面的光电子具有一定的初动能），加上一个反向电压，使光电子在这一反向电场中减速，连具有最大初动能的光电子也刚好不能到达阳极。

或者说，光电子的最大初动能等于光电子到达阳极这一过程中，电场力对光电子所作的功。

$$\frac{1}{2}mV_m^{\ 2} = e|U_c| \qquad h\nu = \frac{1}{2}mV_m^{\ 2} + A$$

$$\Rightarrow \quad e|U_c| = h\nu - A = \frac{hc}{\lambda} - A$$

$$e|U_{c1}| = \frac{hc}{\lambda_1} - A \qquad e|U_{c2}| = \frac{hc}{\lambda_2} - A$$

$$\Delta|U_c| = |U_{c2}| - |U_{c1}| = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = 0.345(V)$$

反向电压在数值上是加大的。波长变短，
则光频率增大，因此，光子的能量增加，
光电子的最大初动能增加，
反向电压需要增大，
才能使最大初动能的光电子不能到达阳极。

例19—2 求下述几种辐射的光子的能量、动量和质量，并与经过的电压$U=100V$加速后的电子的动能、动量和质量相比较。 ☆

(1) $\lambda_1 = 700nm$ 的红光；

(2) $\lambda_2 = 0.071nm$ 的X射线；

(3) $\lambda_3 = 0.00124nm$ 的γ 射线。

解：由于经过电压加速后，

电子的速度不是很大，可以不考虑相对论效应

电子的动能为： $E_e = eU = 100eV$

电子的质量： $m_e \approx m_0 = 9.11\times10^{-31}kg$

电子的动量为：$p_e = m_e V = \sqrt{2m_e E_e} \approx 5.40\times10^{-24}kg\cdot m\cdot s^{-1}$

（1）对于$\lambda_1 = 700nm$的光子（红光），计算得到 ☆

$$\varepsilon_1 = h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{700\times10^{-9}} = 1.78(eV)$$

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = \frac{6.63\times10^{-34}}{700\times10^{-9}} = 9.47\times10^{-28}\,kg\cdot m\cdot s^{-1}$$

$$m_1 = \frac{h}{c\lambda_1} = \frac{6.63\times10^{-34}}{3\times10^{8}\times700\times10^{-9}} = 3.16\times10^{-36}\,kg$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\underline{E_e}} = \frac{1.78(eV)}{100\,eV} \approx \underline{2\%}$$

$$\frac{m_1}{\underline{m_e}} = \frac{3.16\times10^{-36}}{9.11\times10^{-31}}$$

$$\approx \underline{3\times10^{-6}}$$

$$\frac{p_1}{\underline{p_e}} = \frac{9.47\times10^{-28}}{5.40\times10^{-24}} \approx \underline{2\times10^{-4}}$$

(2)对于$\lambda_2 = 0.071nm$的光子（X射线），计算得到 ☆

$$\varepsilon_2 = h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = 1.75\times10^4(eV)$$

$$p_2 = \frac{h}{\lambda_2} = 9.34\times10^{-24}\,kg\cdot m\cdot s^{-1}$$

$$m_2 = \frac{h}{c\lambda_2} = 3.11\times10^{-32}\,kg$$

$$\frac{\varepsilon_2}{E_e} \approx 175 \qquad \frac{p_2}{p_e} \approx 2 \qquad \frac{m_2}{m_e} \approx 3\%$$

(3)对于$\lambda_3 = 0.00124nm$的光子（ γ 射线） ☆

$$\varepsilon_3 = h\nu_3 = \frac{hc}{\lambda_3} = 1.00\times 10^6 (eV)$$

$$p_3 = \frac{h}{\lambda_3} = 5.35\times 10^{-22} kg\cdot m\cdot s^{-1}$$

$$m_3 = \frac{h}{c\lambda_3} = 1.78\times 10^{-30} kg$$

$$\frac{\varepsilon_3}{E_e} \approx 10^4 \qquad \frac{p_3}{p_e} \approx 99 \qquad \frac{m_2}{m_e} \approx 2$$

例19—3 设康普顿散射效应中，☆

入射的X射线的波长为 $\lambda_0 = 0.0700nm$，

在与入射的X射线垂直方向观察。求：

（1）反冲电子的动能；

（2）反冲电子的运动方向与入射的X射线的方向之间的夹角。

$$\boxed{\varphi = 90^0}$$

解：散射的X射线的波长

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\varphi) = \lambda_0 + \lambda_c(1-\cos\varphi)$$

$$= \lambda_0 + \lambda_c = 0.0700 + 0.0024 = \underline{0.0724nm}$$

☆

（1）根据能量守恒：

$$m_{e0}c^2 + h\nu_0 = m_e c^2 + h\nu$$

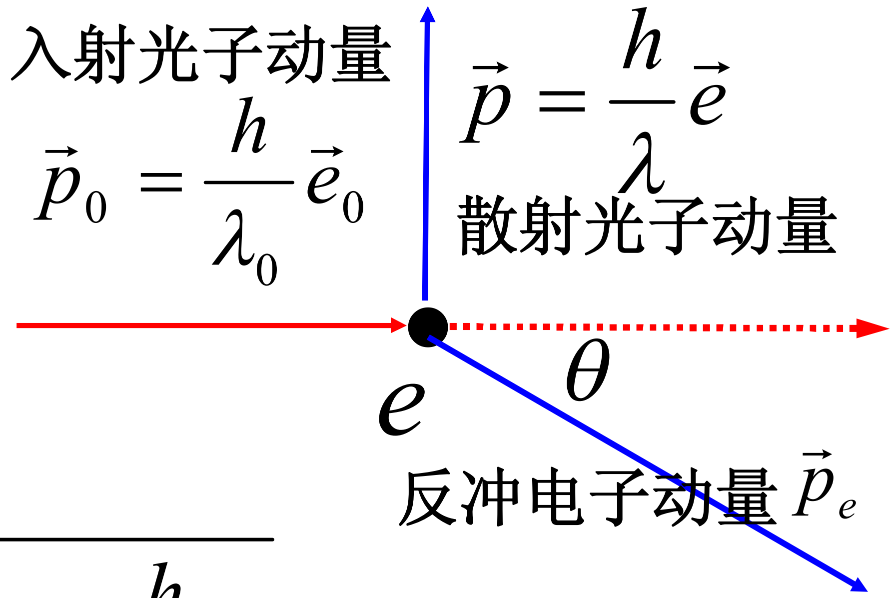
反冲电子的动能为

$$E_k = m_e c^2 - m_{e0}c^2 = h\nu_0 - h\nu$$

$$= hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = \underline{9.42\times10^{-17}(J)}$$

（2）根据动量守恒：$\vec{p}_0 + 0 = \vec{p} + \vec{p}_e$ ☆

$$\begin{cases} p_0 = p_e \cos\theta \\ p = p_e \sin\theta \end{cases}$$



反冲电子的动量为

$$p_e = \sqrt{p_0^{\ 2} + p^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{p_0}{p_e} = \frac{h}{\lambda_0} \Big/ \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}}$$

$$\theta = 44.2^0$$

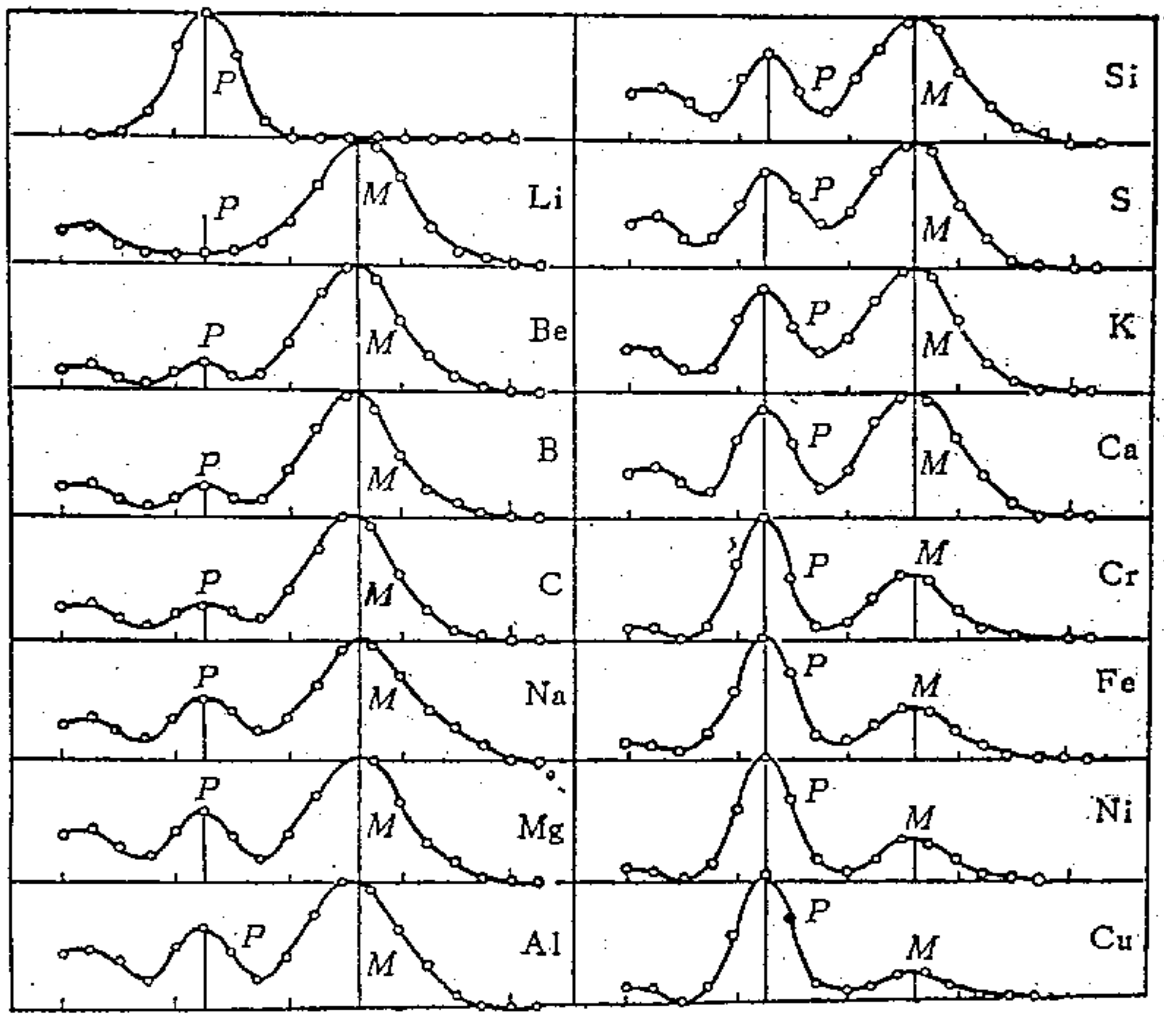
*吴有训对康普顿效应研究的贡献

吴有训1923年参加了发现康普顿效应的研究工作，1925–26年他用银的X射线（$\lambda_0 = 5.62\text{nm}$）为入射线，以15种轻重不同的元素为散射物质，在同一散射角（$\varphi = 120°$）测量各种波长的散射光强度，作了大量X射线散射实验。这对证实康普顿效应作出了重要贡献。

吴有训的康普顿效应散射实验曲线：

散射角

$\varphi = 120^0$



曲线表明：1、$\Delta\lambda$与散射物质无关，仅与散射角有关。

2、轻元素 $I_{\lambda} > I_{\lambda_0}$，重元素 $I_{\lambda} < I_{\lambda_0}$。

吴有训工作的意义：

- 证实了康普顿效应的普遍性
- 证实了两种散射线的产生机制：

λ — 外层电子（自由电子）散射

λ_0 —内层电子（整个原子）散射

在康普顿的一本著作 **“ X – Rays in theory and experiment ”**（1935）中，有19处引用了吴有训的工作。书中两图并列作为康普顿效应的证据。

20世纪50年代的吴有训

吴有训（1897—1977）

物理学家、教育家、中国科学院副院长，1928年被叶企孙聘为清华大学物理系教授，曾任清华大学物理系主任、理学院院长。

对证实康普顿效应作出了重要贡献

* 康普顿散射公式的推导：

$$\frac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 = \frac{h\nu}{c}\vec{e} + m\vec{V} \Rightarrow m\vec{V} = \frac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 - \frac{h\nu}{c}\vec{e}$$

$$m^2V^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu_0}{c^2}\vec{e}_0\cdot\vec{e}$$

$$= \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu_0}{c^2}\cos\varphi$$

$$\boxed{m^2V^2c^2 = h^2{\nu_0}^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu_0\cos\varphi}$$

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + mc^2$$

$$mc^2 = -h\nu + h\nu_0 + m_0 c^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} m^2c^4 &= h^2\nu^2 + h^2\nu_0{}^2 + m_0{}^2c^4 \\ &- 2h^2\nu\nu_0 - 2h\nu\, m_0c^2 + 2h\nu_0 m_0 c^2 \end{aligned}}$$

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2{\nu_0}^2 + {m_0}^2c^4$$
$$-2h^2\nu\nu_0 - 2h\nu\, m_0c^2 + 2h\nu_0 m_0c^2$$

$$m^2V^2c^2 = h^2{\nu_0}^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu_0\cos\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$m^2c^4(1 - V^2/c^2) = {m_0}^2c^4 - 2h^2\nu\nu_0$$
$$-2h\nu\, m_0c^2 + 2h\nu_0 m_0c^2 + 2h^2\nu\nu_0\cos\varphi$$

$$m^2c^4(1-V^2/c^2) = {m_0}^2c^4 - 2h^2\nu\nu_0$$

$$-2h\nu\, m_0c^2 + 2h\nu_0 m_0c^2 + 2h^2\nu\nu_0\cos\varphi$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\nu_0 m_0c^2 - \nu\, m_0c^2 = h\nu\nu_0 - h\nu\nu_0\cos\varphi$$

$$\nu_0 m_0 c^2 - \nu\, m_0 c^2 = h\nu\nu_0 - h\nu\nu_0 \cos\varphi$$

$$\boxed{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi)}$$

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\varphi)}$$