§7.2 静电场的环路定理　　电势

前面介绍了电场,电场对电荷有作用力，电场对电荷既然有作用力，那么，当电荷在电场中移动时，电场力就要做功。根据力和能量的关系，则能量和电场有关。

从静电力作功研究静电场的重要性质：保守性

一. 静电场力的功

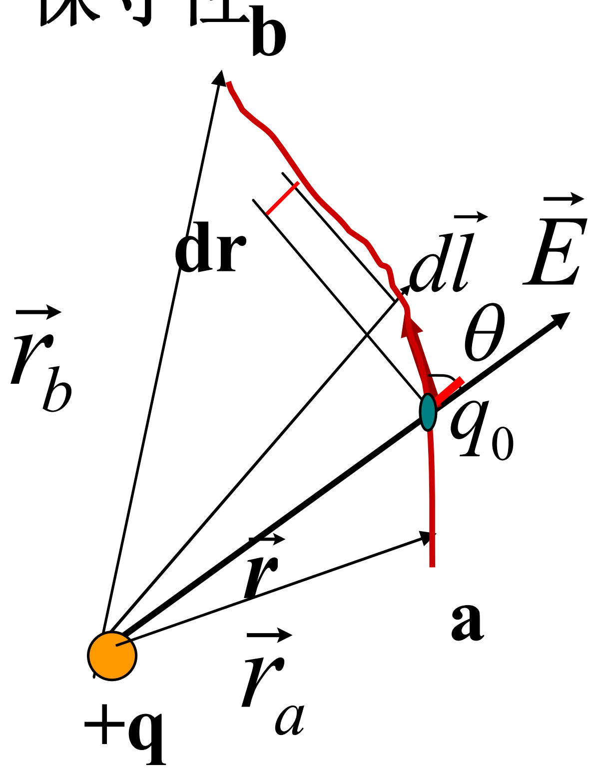
一点电荷q 在其周围产生电场，

另有一试验电荷q_0 在场中运动：

电场力作元功：

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\cdot dl=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$



q_0 从a点移到b点电场力做的功为：

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

在点电荷q形成的静电场中，对移动电荷所做的功仅和移动电荷的始、末位置有关，与具体路径无关。即：点电荷形成的静电场是保守力场。

可以证明，任何静电场 (无论是由点电荷、点电荷系、带电体等)，静电场对移动电荷作功与路径无关，仅与移动电荷的初、末位置有关。这样**静电场力就是保守力**(做功与路径无关)。故 **静电场是保守力场。**

二. 电势能

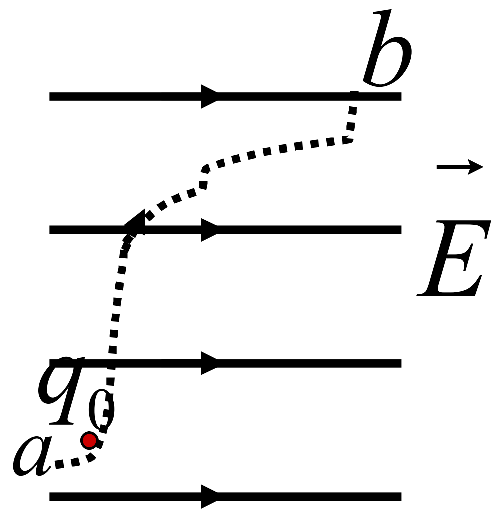
静电场是保守力场，可以引进一势能：即在静电场中的电荷具有**静电势能（简称电势能）**。

定义：静电场力作功等于相应电势能的减少量

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{l}=W_a-W_b$$

a 点电势能

b 点电势能



任意点： $\therefore W_a = \int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{l} + W_b = q_0 \int_{(a)}^{(b)} \vec{E}\cdot d\vec{l} + W_b$

规定电势能的零点：

1)当电荷分布在有限区域时，无穷远处的电势能为零；

则： $W_a = q_0 \int_a^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

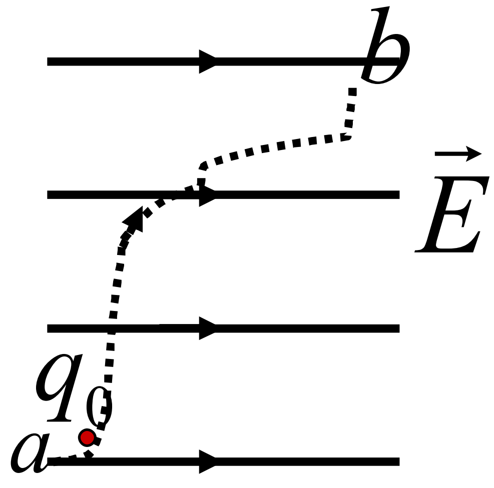
2）场中某一点 b 的电势能为零，W_b=0 (如地球的地面)

则： $W_a = q_0 \int_a^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

试验电荷 q_0 在静电场中某点的电势能在数值上等于 q_0 从该点移到电势能零点处静电场力所做的功。

三. 电势

如图：点电荷在场中受力 $\vec{f} = q_0\vec{E}$



$$\int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{l} = q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = W_a - W_b$$

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0}$$

$\boxed{\frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0}}$ $\Rightarrow$ 与试验电荷无关反映了电场在***a b***两点的性质

定义： $$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = U_a - U_b$$

为 a, b 两点电势差

若选 b 点的电势为参考零点

则 $\boldsymbol{a}$ 点的电势由下式得到：

$$U_a = \int_a^{\text{电势零点}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

讨论

- 电势零点的选择(参考点)

电势零点选择是任意的　视分析问题方便而定

参考点（ 零点）不同电势不同

通常理论计算有限带电体电势时选无限远为参考点

实际应用中或研究电路问题时取大地、仪器外壳等

· 电势的单位: ***SI*** 制： 单位 **V (伏特)**

· 在静电场中，任意两点间的电势差：

$$U_{ab}=U_a-U_b=\int_{(a)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_{(b)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

即：任意两点***a***、***b***的电势差在数值上等于单位正电荷从 ***a*** 点经任意路径到 ***b*** 点电场力做的功。

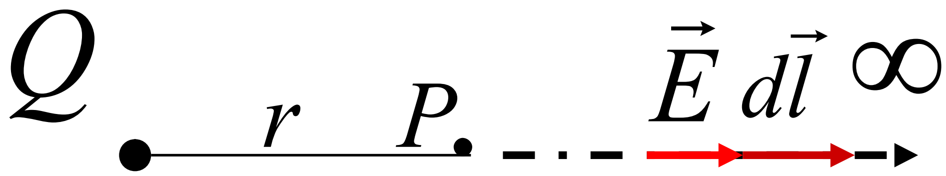
· 如果电场的电势分布已知，则电荷 q_0在电场中从***a*** 到 ***b*** (经任意路径)，电场力作的功为：

$$A_{ab}=\int\vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0U_{ab}$$

四. 电势的计算

1. 点电荷Q的电场中的电势分布

$$U_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$d\vec{l} = d\vec{r}$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

球对称

标量

正负

2 电势叠加原理

点电荷系所产生的电场：　$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

空间某点的电势：

$$U_p=\int_P^{P(0)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{P(0)}\sum_i \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_i\int_P^{P(0)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}_i$$

$$\therefore U_p=\sum_i U_i=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

电荷连续分布的带电体：

$$U=\int_{(Q)}dU=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)}\frac{dq}{r}$$

计算电势的方法：

1) 已知电场强度 $\vec{E}$ 的分布，利用电势的定义：

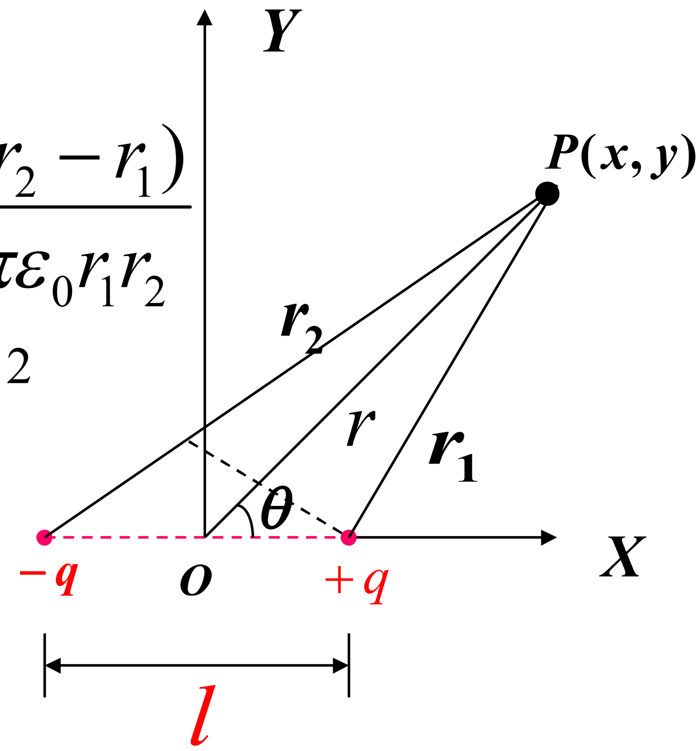
$$U_a = \int_a^{\text{电势零点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ → 可计算电势的分布

2) 已知 q_I 或 $\rho(\sigma,\lambda)$ 分布，利用点电荷的电势和电势叠加原理，可求得带电体在周围产生的电势

$$U_p = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} \qquad U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(Q)}\frac{dq}{r}$$

例(书例7.8) 求电偶极子电场中任一点*P*的电势

解：由叠加原理



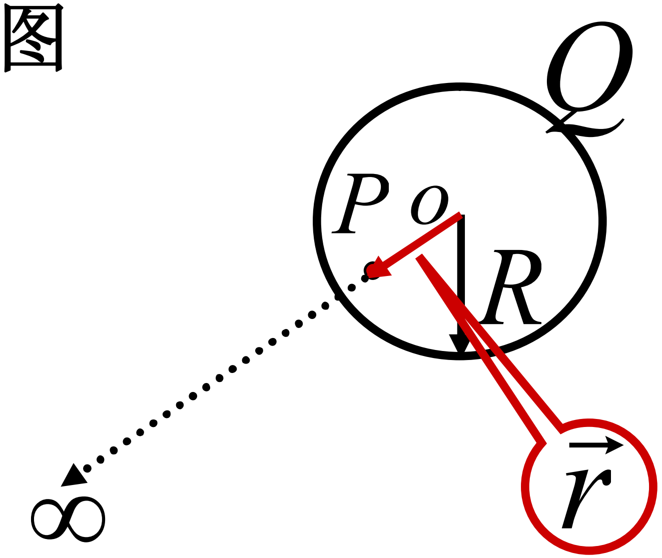
$$U_p = U_1 + U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}$$

$$\because r >> l \quad r_2 - r_1 \approx l\cos\theta; r_1 r_2 \approx r^2$$

$$U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

例 计算均匀带电球面的电势 如图



解:

均匀带电球面电场的分布为

$$r<R \qquad E=0$$

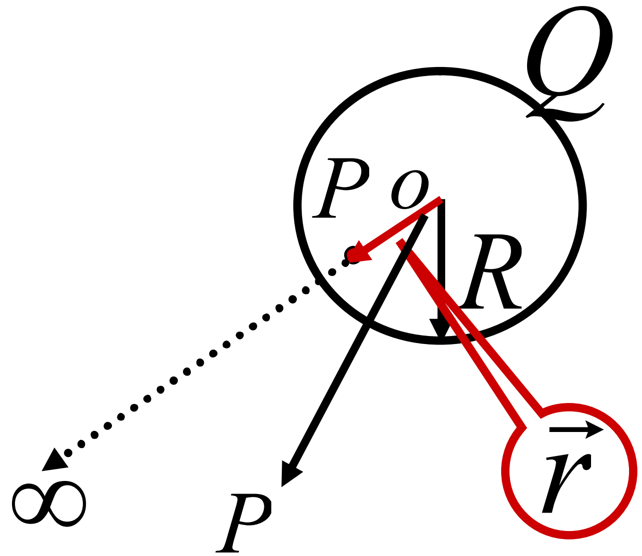
$$r>R \qquad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

若场点在球内 即 $r<R$ 如图

$$\boldsymbol{U}=\int_{\boldsymbol{P}}^{\infty}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}=\int_{r}^{R}o\,dl+\int_{R}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$U=\int_r^R o\,dl+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



场点在球面外　即　$r>R$

$$U=\int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电势分布

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad r < R$$

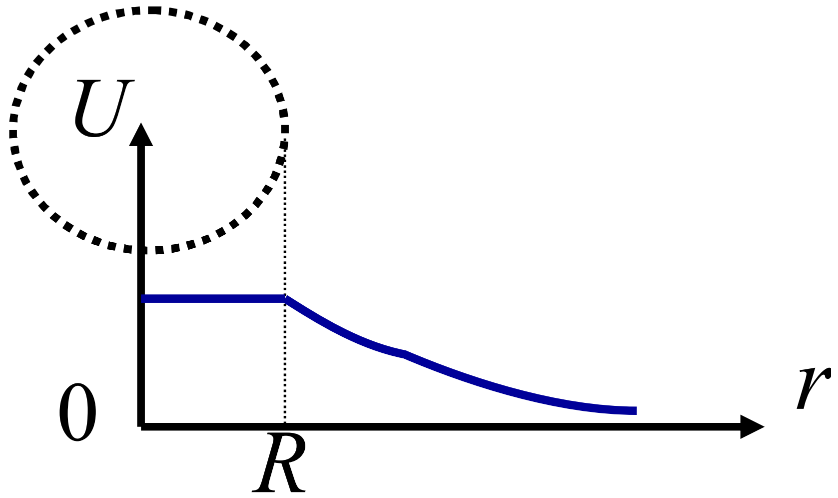
等势体

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad r > R$$

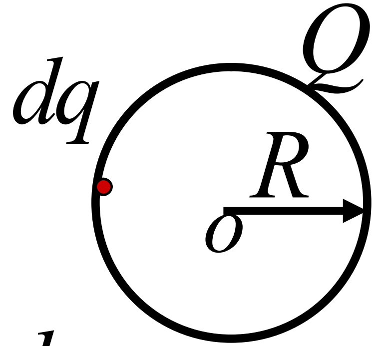
与电量集中在球心的

点电荷的电势分布相同

- 图示



例　计算电量为 Q 的带电球面球心的电势



解：

在球面上任取一电荷元 dq

则电荷元在球心的电势为 $$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由电势叠加原理

球面上电荷在球心的总电势

$$U = \int_{(Q)} dU = \int_{(Q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

思考：

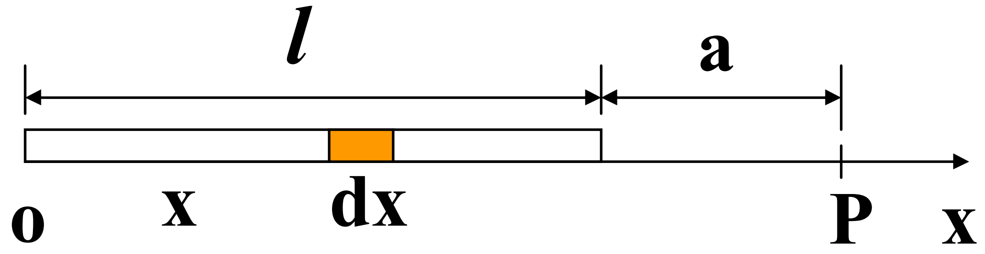
电量分布均匀？

圆环、圆弧？

** 例　长为 l 均匀带电细杆，电荷线密度为λ ，如图。计算P点的电势。

解：

取一电荷元**dq**

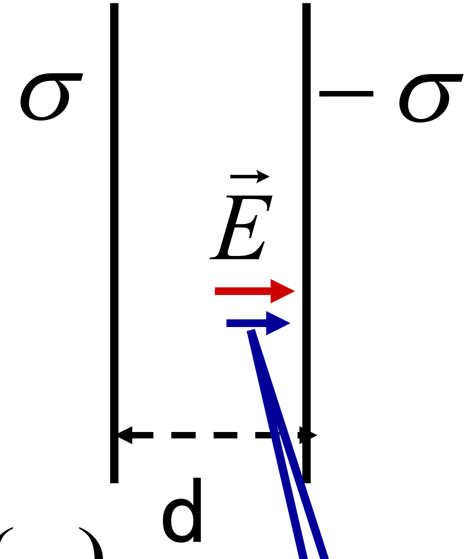


$$dq = \lambda dx$$

$$\therefore dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(l+a-x)} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+a-x)}$$

$$\therefore U = \int dU = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{(l+a-x)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l+a}{a}$$

**例. 平行板电容器两板间的电势差



解：

平行板电容器内部的场强为 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

两板间的电势差

$$\Delta U=\int_{(+)}^{(-)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{(+)}^{(-)}Edl=E\int_{(+)}^{(-)}dl$$

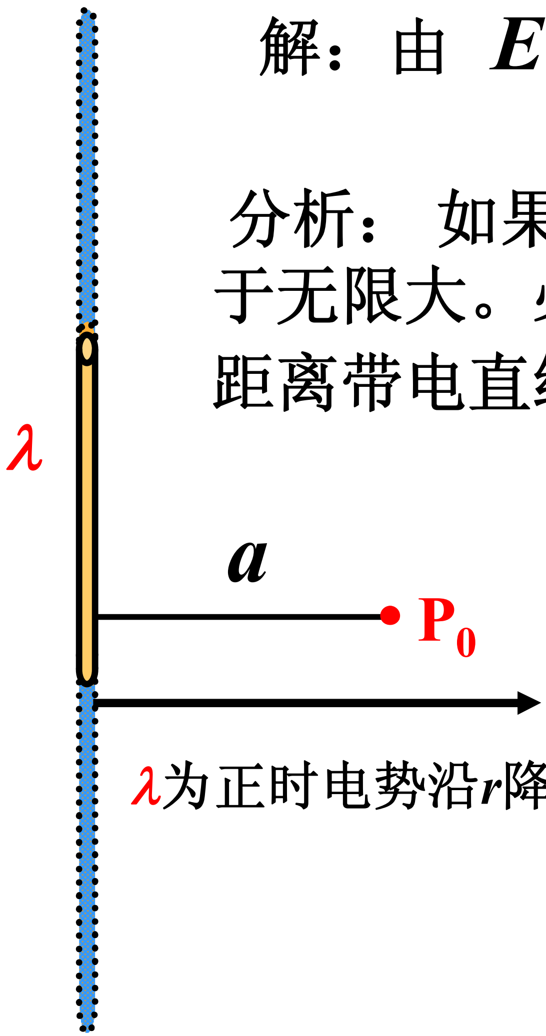
$d\vec{l}$

$\vec{E},d\vec{l}$ 方向一致

均匀场

$$\boxed{\Delta U=Ed}$$

例 求电荷线密度为λ的无限长带电直线的电势分布。



解：由 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ $\qquad U=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

分析： 如果仍选择无限远为电势0点，积分将趋于无限大。必须选择某一定点为电势0点，现在选距离带电直线为 a 的P_0点为电势0点。

$$U=\int_r^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

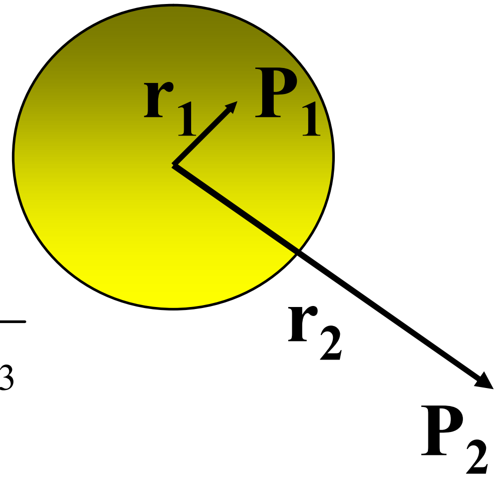
$$U=\int_r^{a}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

λ为正时电势沿r降落

**例 均匀带电球体，带电荷为Q，半径为R
计算其球内、外的电势分布

解：先计算 $\vec{E}$ 的分布



$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r \le R) \\ \vec{E}_2 = \dfrac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{3}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Q'\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

球外一点 $\mathbf{P_2}$ 的电势：

$$U_{P_2} = \int_{P_2}^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

球内一点 $\mathbf{P_1}$ 的电势：

$$U_{P_1} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{R} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R}^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int_{r_1}^{R} r dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \frac{1}{2}(R^2 - r_1^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3 - \frac{r_1^2}{R^2})$$

$$\boxed{U_{P_2(外)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}}$$

$$\boxed{U_{P_1(内)} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3 - \frac{r_1^2}{R^2})}$$

五、 静电场的环路定理

表述 静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零

即 $\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$ → 场强环路定理

有源
无旋

讨论

- 静电场的基本方程
- 保守场
- 微分形式 $\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$

Stokes 公式 $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$ *S*是以*L*为边界的曲面

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}}$$

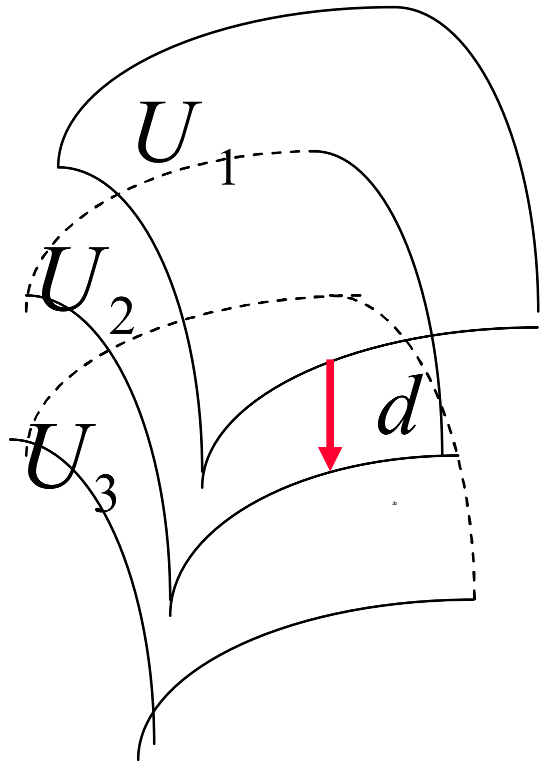
对任意*S*曲面成立 只能有 $\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$ 旋度

六、 等势面 电势梯度

(一) 等势面

由电势相等的点组成的面叫等势面

满足方程 $U(x,y,z)=C$



当常量 C 取等间隔数值时

可以得到一系列的等势面

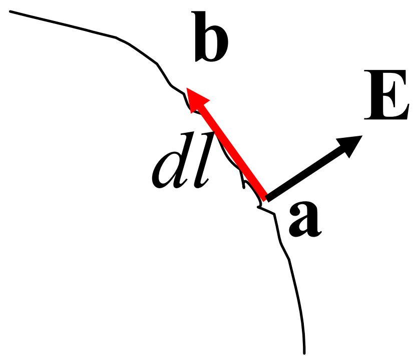
$$\Delta U_{12}=\Delta U_{23}$$

$$\Delta U \approx Ed$$

等势面的疏密程度反映了电场的强弱

(二) 电力线与等势面的关系

1. 电力线处处垂直等势面



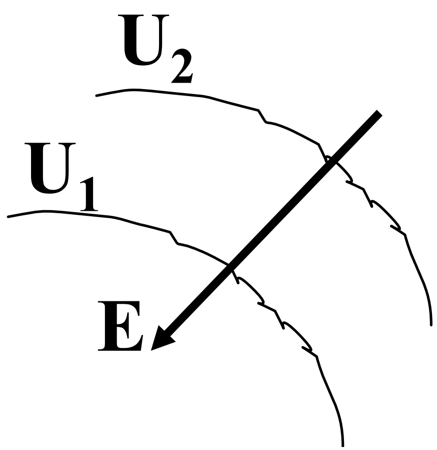
在等势面上任取两点 a、b，则

$$\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = U_a - U_b \xrightarrow{\text{等势}} = 0$$

∵ a、b 任取

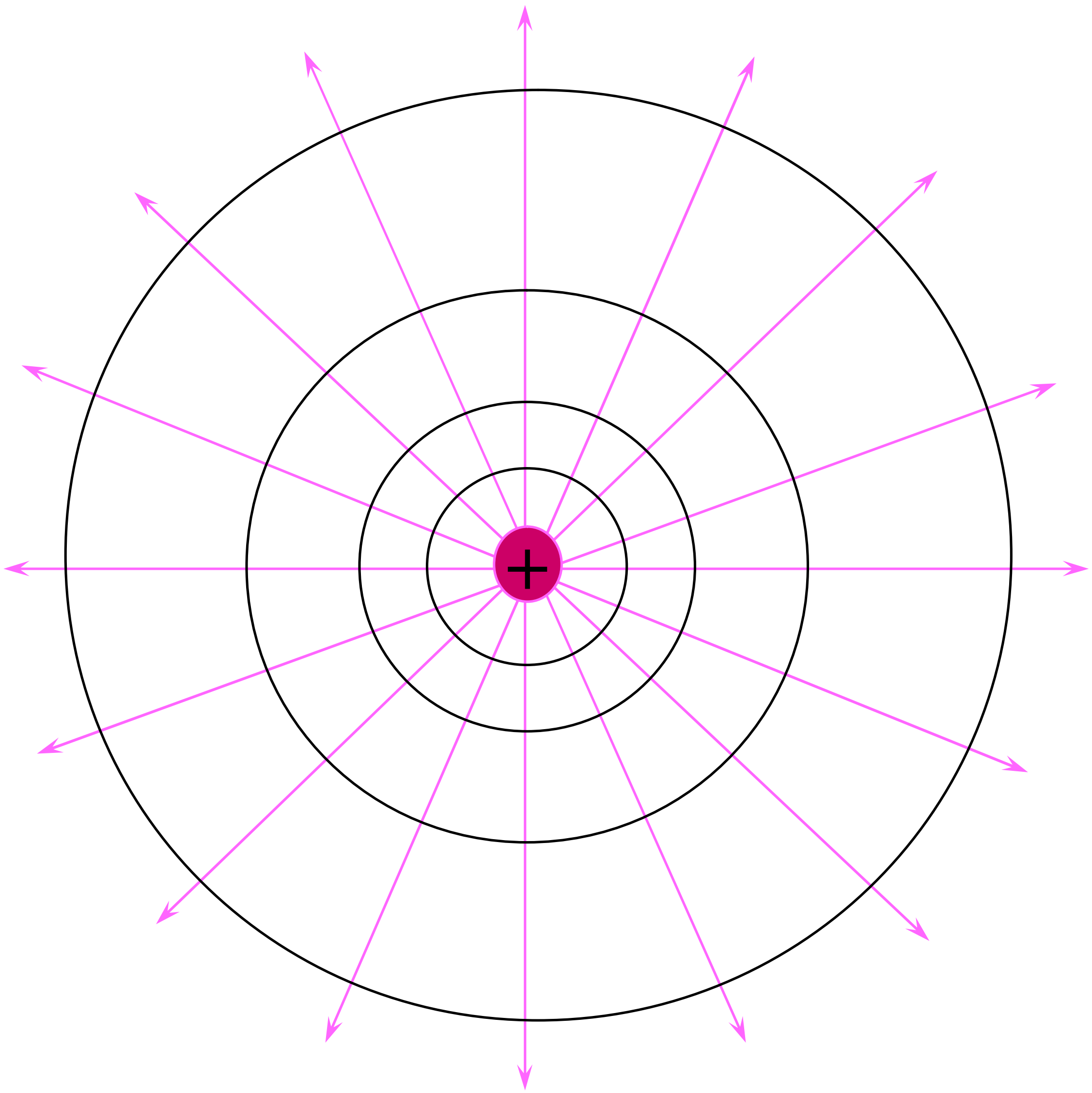
∴ 处处有 $\vec{E}\perp d\vec{l}$

2. 电力线指向电势降的方向

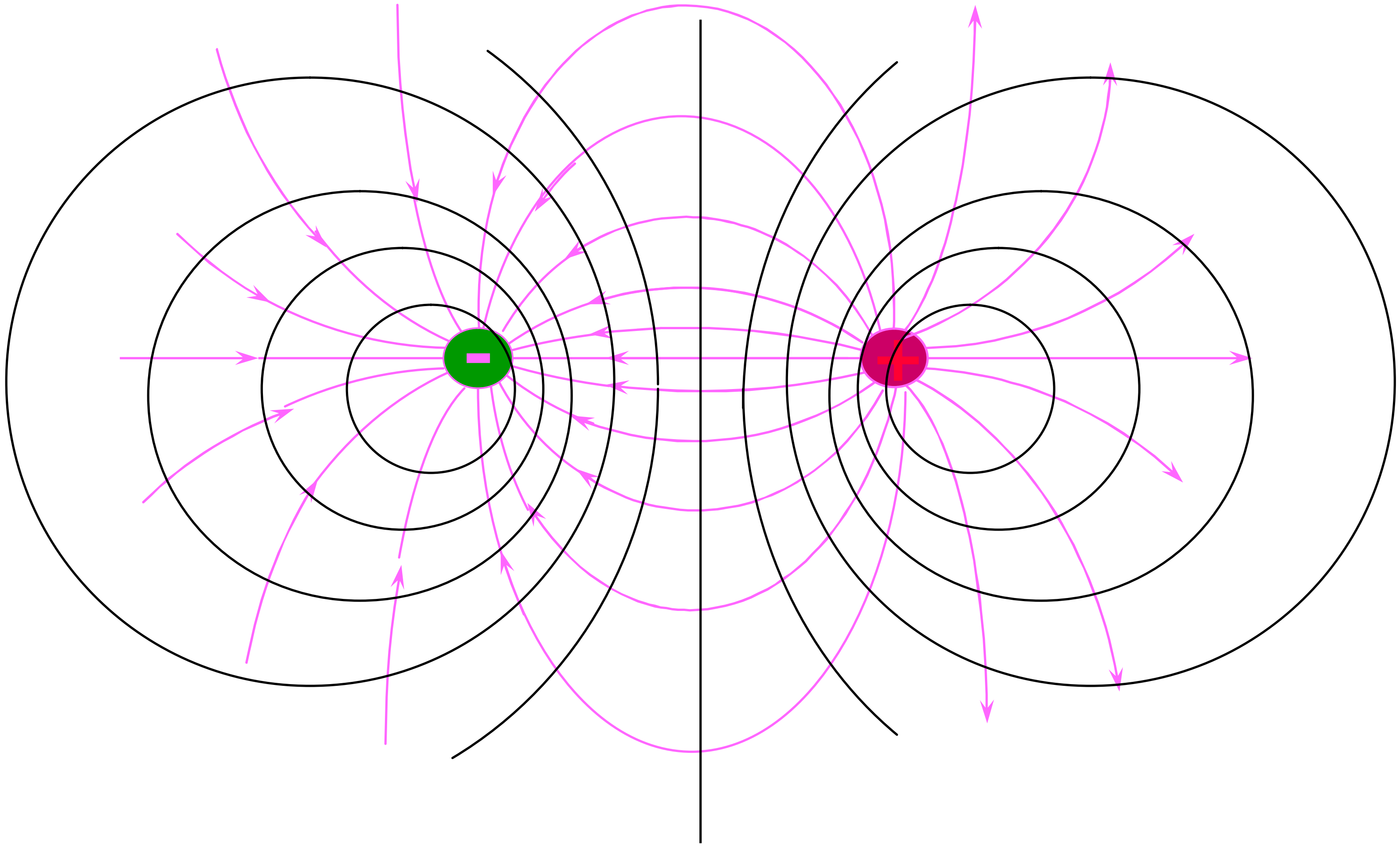


$U_2 > U_1$ （电场力作正功可得）

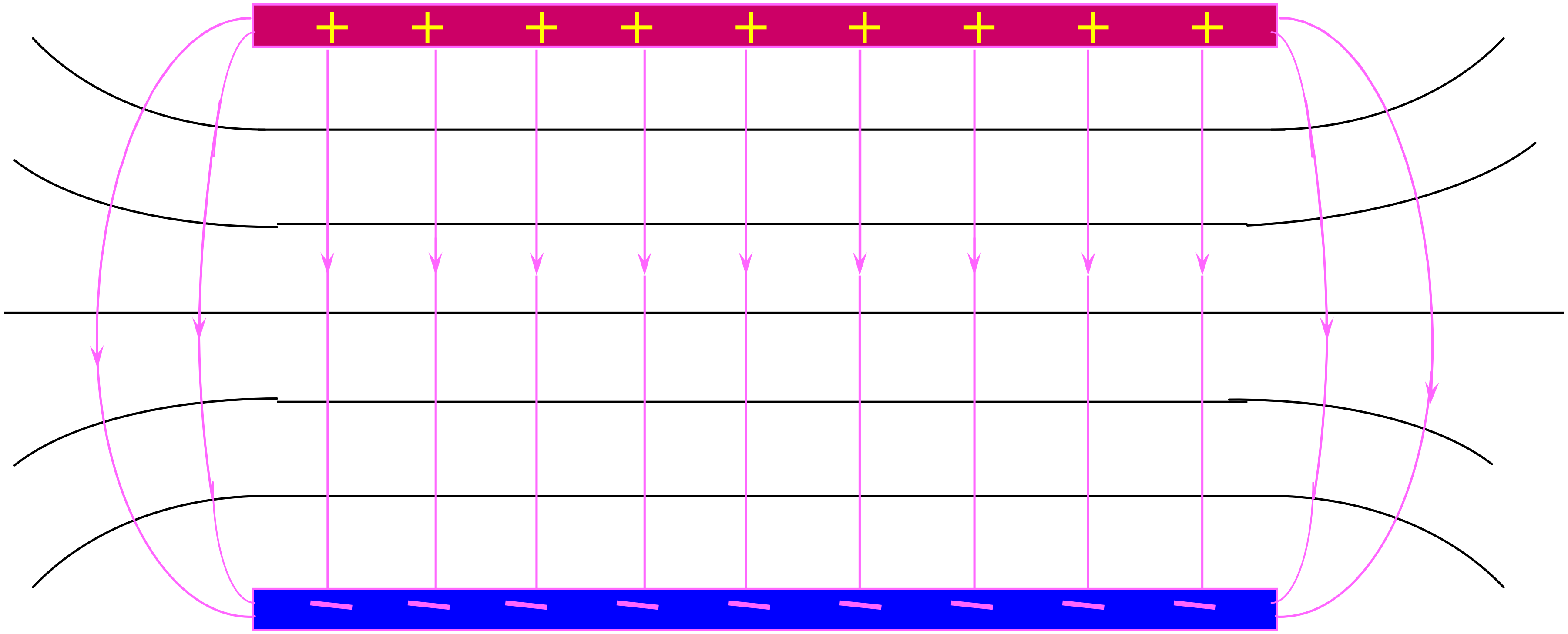
点电荷的电场线与等势面



电偶极子的电场线与等势面

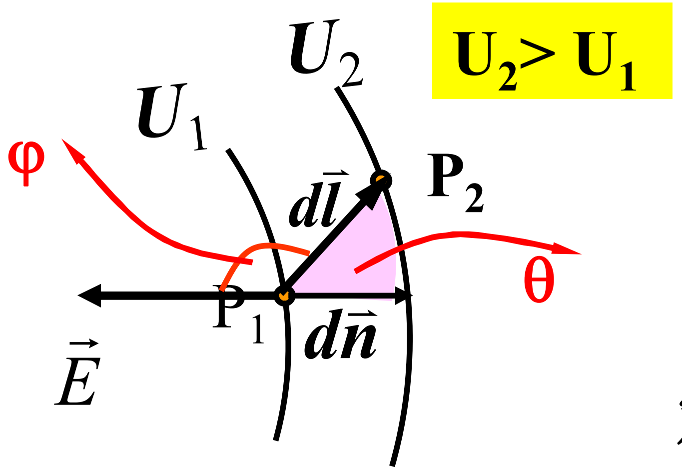


平行板电容器的电场线与等势面



(三）电势梯度

P_1、P_2是距离很近的两等势面上两点



$$dn = dl\cos\theta$$

$$\frac{dU}{dn} = \frac{dU}{dl\cos\theta}$$

$$\frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dn}\cos\theta$$

说明电势沿法线方向变化率最大

定义电势梯度

$$gradU = \frac{dU}{dn}\vec{n}$$

电势沿*l*方向的变化率等于电势梯度在*l*方向的投影

P_1和P_2两点间的电势差为

$$U_1 - U_2 = \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$dU = U_2 - U_1 = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -Edl\ \cos\varphi$$

$$\frac{dU}{dl} = -E\ \cos\ \varphi = -E_l$$

场强沿*l*方向的分量等于电势沿*l*方向变化率 的负值

取 $\varphi = 0$

即电场强度等于电势梯度的负值

$$E = -\frac{dU}{dn}$$

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dn}$$

$$E_l = -\frac{dU}{dl}$$

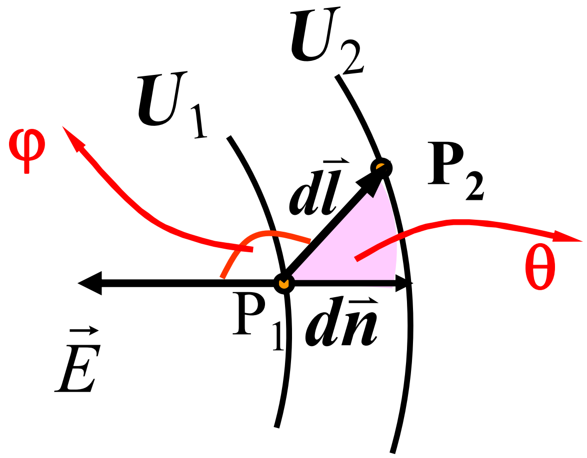
如：直角坐标系：取l为 x, y, z

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \vec{E}$$



$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)U = -\nabla U$$

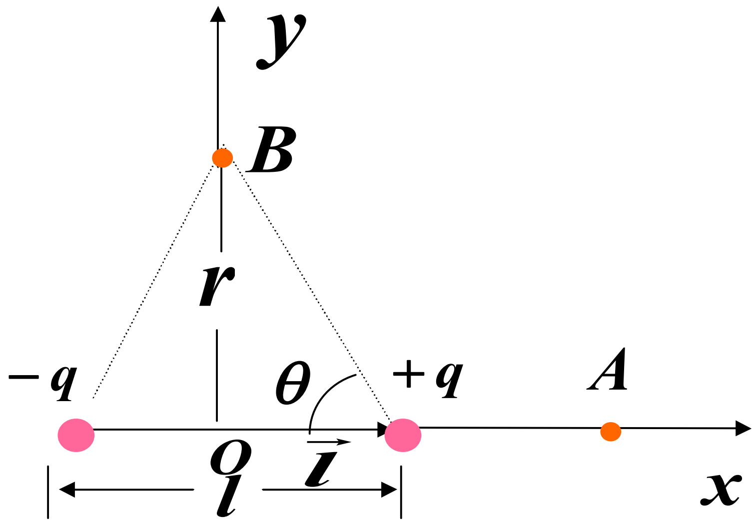
$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -gradU \longleftrightarrow \vec{E} = -\nabla U$$

电势梯度

例．(书例7.9)计算电偶极子电场中任一点的场强

解：$U = U(x,y) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}$



$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

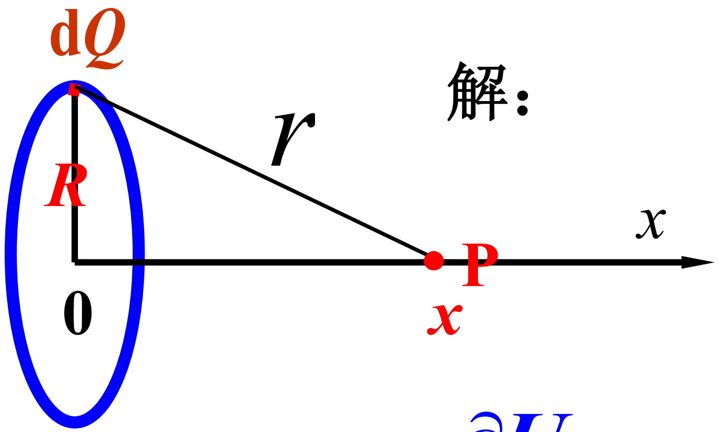
***B*点(*x*=0)**
$$\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}\vec{i}$$

***A*点(*y*=0)**
$$\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\vec{i}$$

例

已知：总电量Q；半径R。

求：均匀带电圆环轴线上的电势与场强。



解：

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_Q dQ=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}}$$

$$E_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

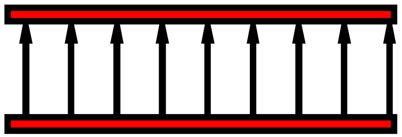
$$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

思考题下例说法对否？举例说明。

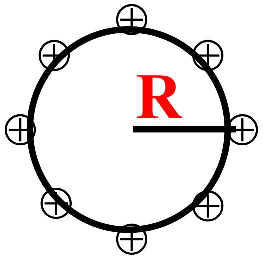
（1）场强相等的区域，电势处处相等？

$-Q$



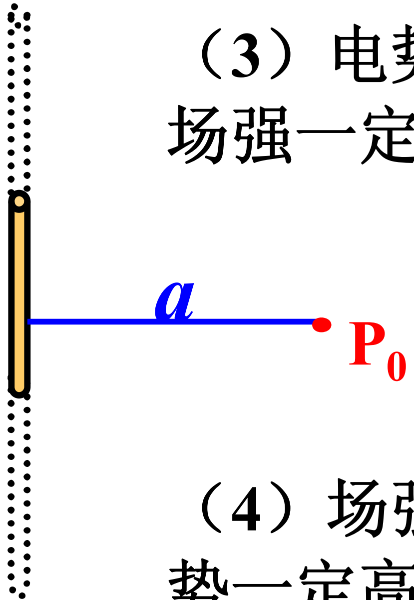
Q

（2）场强为零处，电势一定为零？



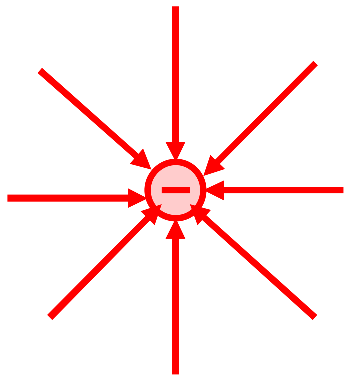
$$\boxed{U=\int_r^0 \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

$$\boxed{-\nabla U=\vec{E}}$$



（3）电势为零处，场强一定为零？

（4）场强大处，电势一定高？



小结

1. 两个物理量 $\vec{E}$ U

2. 两个基本方程 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

3. 两种计算思路 $\vec{E}=\int_{(Q)} d\vec{E}$ $U=\int_{(Q)} dU$

（**1**）电荷分布对称

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$

$$U=\int_{(P)}^{P(0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（**2**）电荷分布已知，不对称

$$U=\sum U_i$$

$$E=-\nabla U$$