§7.3 静电场中的导体

静电场　　场量　　$\vec{E}$　　U

基本性质方程

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

本节讨论：导体带电和它周围的电场的关系，即介绍静电场的一般规律在有导体存在时的具体应用。本节只限于讨论各向同性的均匀的金属导体在电场中的情况。

一、 导体的静电平衡

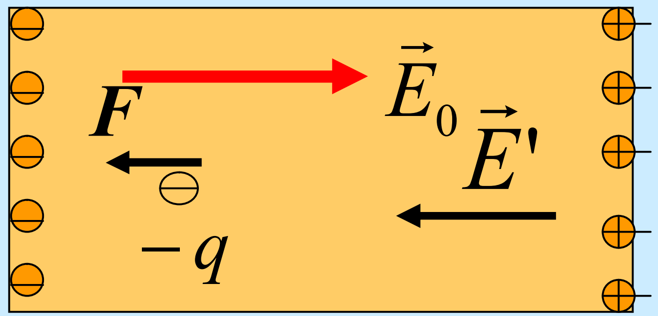
（一）. 导体的静电平衡条件

1、电场对导体内带电粒子的影响

导体内部有两种带电粒子：
- 正离子：组成晶格点阵
- 自由电子：可自由移动

无外场时：正负电荷分布均匀，导体不显电性；

有外场时：



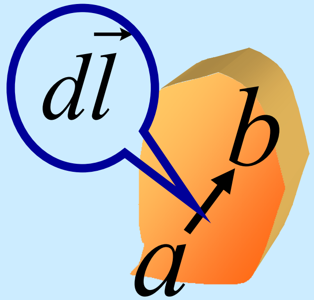
$$\vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

此时电子的定向运动消失称为静电平衡

2、静电平衡条件

静电平衡状态：当导体内部的电场 $\vec{E}=0$ 时，此时导体达到静平衡状态.也就是导体内部和表面都无自由电荷的定向移动的状态。

导体处于静电平衡的条件：



$$\vec{E}_{内}=0 \qquad \vec{E}_{表面}\perp 表面$$

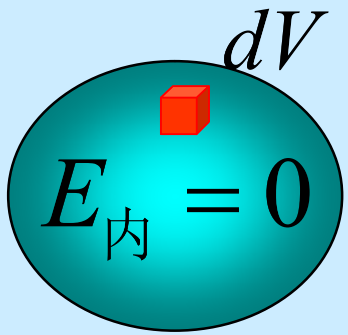
导体静电平衡时，导体各点电势相等，即导体是**等势体**，表面是**等势面**。这是静电平衡条件的另一种说法。

证：在导体上任取两点 a 和 b

$$U_a-U_b=\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \qquad \boxed{U_a=U_b}$$

导体达到静电平衡时，导体内部和导体表面都没有自由电荷的定向移动，那么电荷在导体内和导体表面是怎样分布的?

（二）.静电平衡时导体上电荷的分布



1、电荷分布

导体可分为实心导体和空腔导体

1）实心导体

在导体内任取体积元 dV

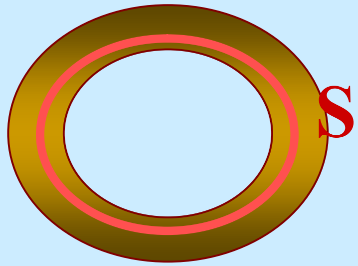
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i = \int_V \rho\, dV = 0$$

$$\because \text{体积元任取} \longrightarrow \rho = 0$$

结论：导体内的净电荷处处为零(即导体内没有净电荷)，电荷只分布在导体的外表面

2）空腔导体

由高斯定理可证明空腔内表面的**净电荷**为零

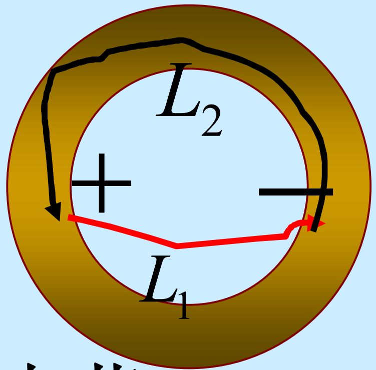


证明： 在导体壳内紧贴内表面作高斯面S

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0} \xrightarrow{\text{高斯定理}} \boxed{\sum_i q_i = 0} \longrightarrow \boxed{Q_{\text{内表面}} = 0}$$

两种可能　　1、空腔内表面不带电荷

　　　　　　2、空腔内表面带等量异号电荷



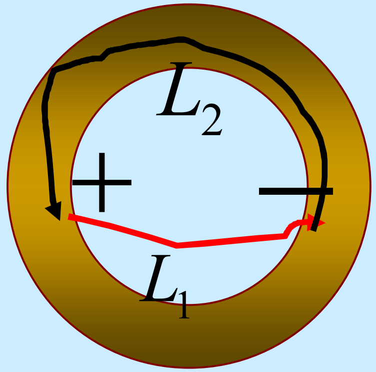
对第二种：则必有电力线从正电荷通向负电荷。

做一闭合路径L，使L_1沿电力线，L_2沿导体内部，则：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2}\vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

等于零



只能：$\int_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$　　等势，无电力线

所以空腔内表面没有电荷分布，电荷只能分布在外表面

结论：导体静电平衡时，导体内无电荷，内表面无电荷，

从而只能分布在导体外表面。

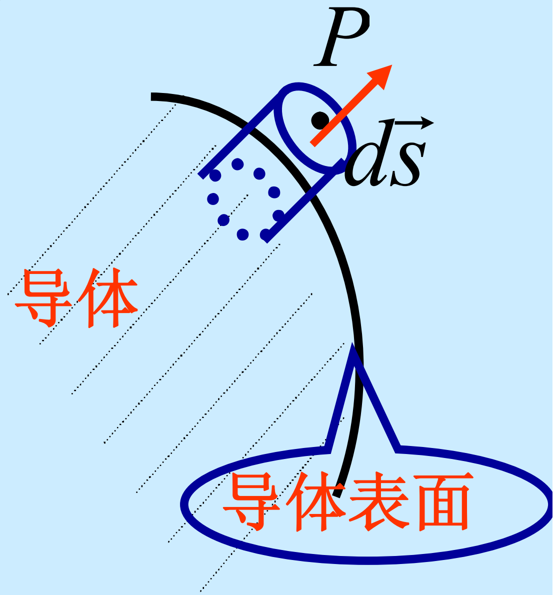
既然导体静电平衡时电荷只能分布在导体的外表面，那么，在导体外表面电荷时怎样分布的？

2. 导体表面电荷

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x, y, z)$

相应的电场强度为 $\vec{E}_{表}(x, y, z)$

设P是导体外紧靠导体表面的一点，取一柱形高斯面，一底面过P点



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{底面} \vec{E}_{表}\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E_{表}\, dS = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

$\hat{n}$ ：外法线方向

3. 孤立带电导体表面电荷分布

一般情况较为复杂:

孤立的带电导体，电荷分布由实验测定。

分布有简单的规律:

（1）在表面凸出的尖锐部分(曲率是正值且较大)电荷面密度较大，

（2）在比较平坦部分(曲率较小)电荷面密度较小，

（3）在表面凹进部分带电面密度最小。

尖端放电

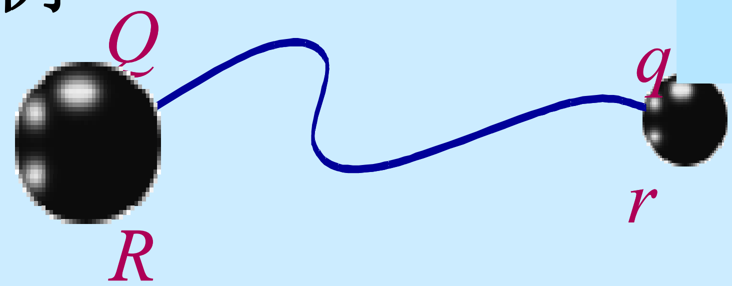
孤立导体

导体 球表面的电荷面密度与该处的表面曲率成正比

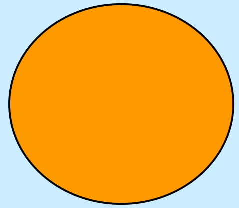
孤立带电导体球

例

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$



$$\frac{Q}{R}=\frac{q}{r}$$ 或 $$\frac{\sigma_R}{\sigma_r}=\frac{r}{R}$$



$$\boxed{\sigma=C}$$

总结：导体处于静电平衡时：

1、导体是等势体；导体表面为等势面

2、导体内部场强处处为0

3、电荷只分布在导体表面

4、导体球表面的电荷面密度与该处的表面曲率成正比

5、导体表面附近的场强 $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

6、有导体时，高斯定理与环路定理仍然成立

6、电荷守恒

二、有导体存在时静电场场量的计算

三个原则:

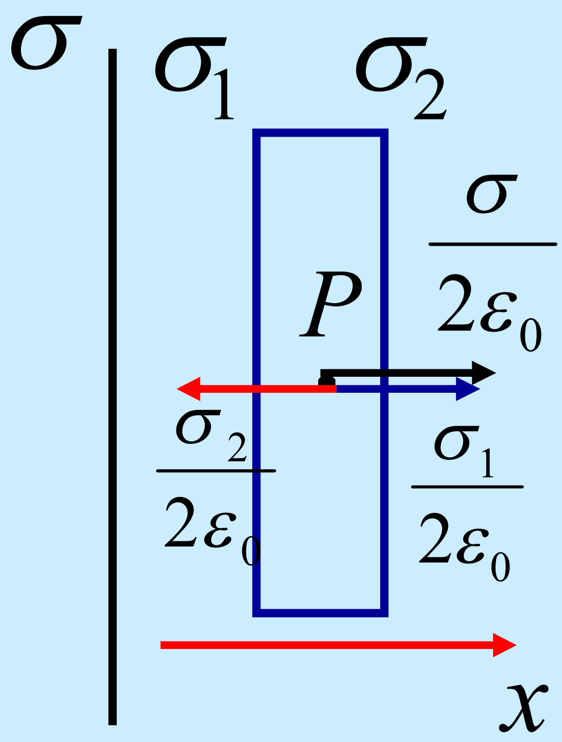
1. 静电平衡的条件 $\boxed{E_{内} = 0}$ $\boxed{or\ \ U = c}$

2. 基本性质方程 $\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$ $\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$

3. 电荷守恒定律 $\boxed{\sum_i Q_i = const.}$

例1 无限大的带电平面σ的场中平行放置一无限大金属平板

求：金属板两面电荷面密度



解：设金属板面电荷密度 σ_1，σ_2

由对称性和电量守恒

$$\sigma_1=-\sigma_2$$

导体体内任一点P场强为零

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0$$

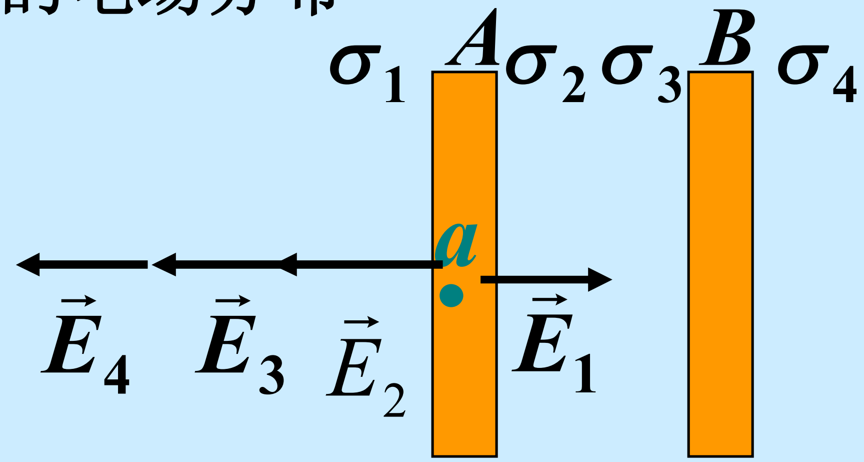
$$\boxed{\sigma_1=-\frac{1}{2}\sigma}$$

$$\boxed{\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma}$$

**例2. 已知：导体板A，面积为S、带电量Q，在其旁边相距很近的地方平行地放入面积也为S的导体B

求：1、A、B上的电荷分布及空间的电场分布

2、将B板接地，求电荷分布

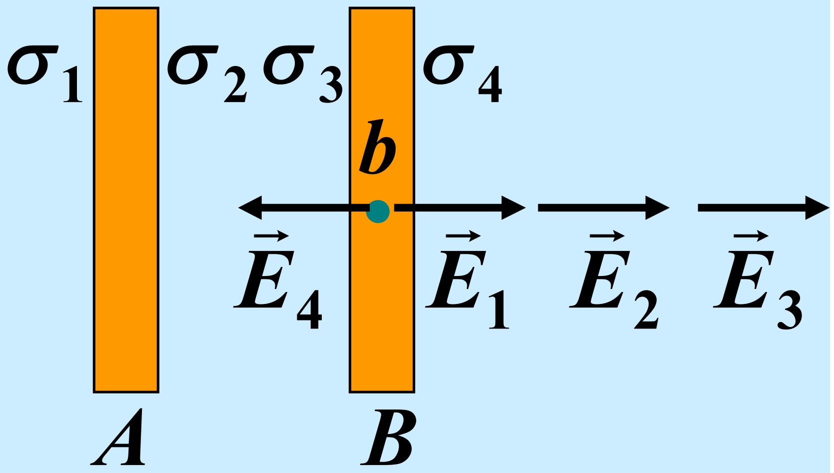


A板 $$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q$$

B板 $$\sigma_3 S + \sigma_4 S = 0$$

a点 $$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

b点 $$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

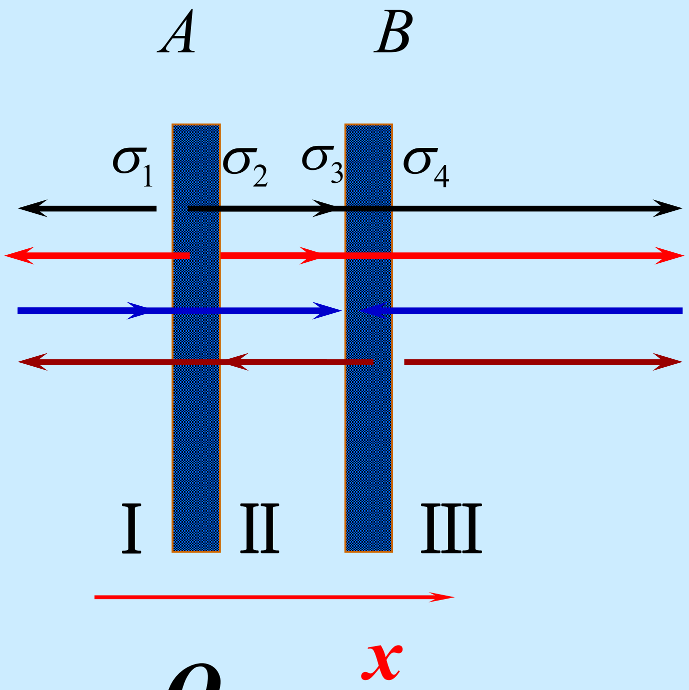


解方程得:

电荷分布

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{2S}$$



场强分布

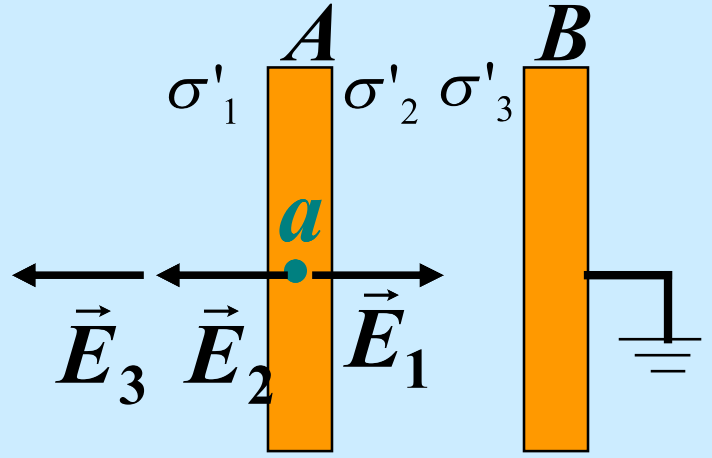
A 板左侧 $$E_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

两板之间 $$E_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

B 板右侧 $$E_{\mathrm{III}} = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

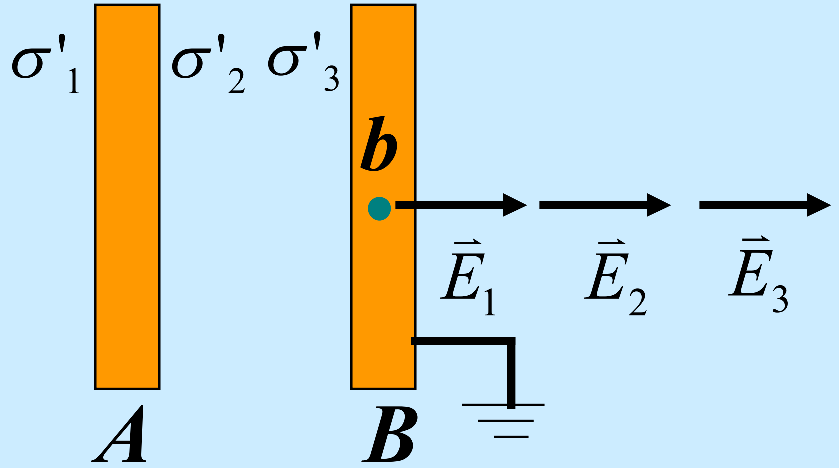
2、将B板接地，求电荷及场强分布

##接地时 $\sigma'_4 = 0$



a点 $$\frac{\sigma'_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma'_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma'_3}{2\varepsilon_0} = 0$$

b点 $$\frac{\sigma'_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma'_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma'_3}{2\varepsilon_0} = 0$$



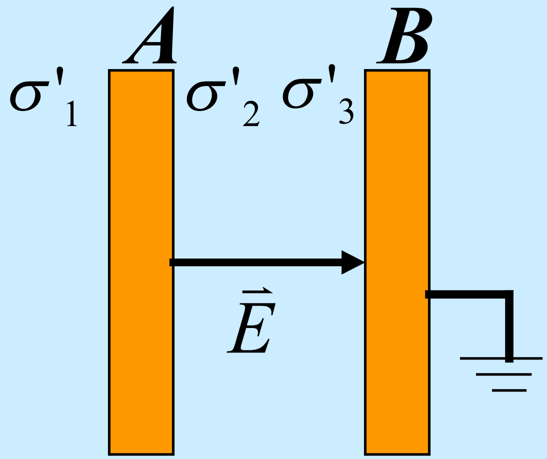
A 板 $\sigma'_1 S + \sigma'_2 S = Q$

电荷分布

$\sigma'_1 = 0$ $$\sigma'_2 = -\sigma'_3 = \frac{Q}{S}$$

电荷分布 $\sigma'_1 = 0 \quad \sigma'_2 = -\sigma'_3 = \dfrac{Q}{S}$

场强分布

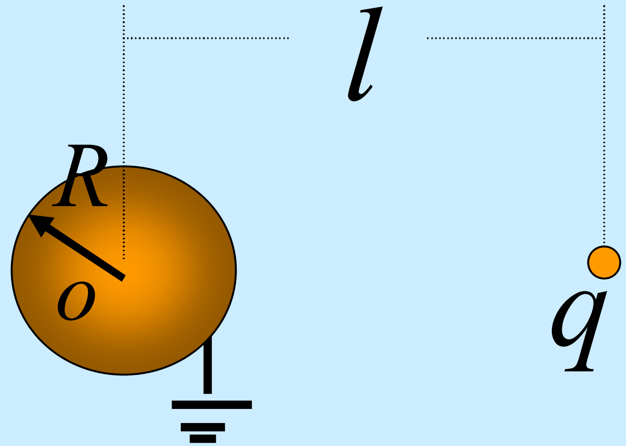


两板之间 $\boldsymbol{E} = \dfrac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 S}}$

两板之外 $\boldsymbol{E = 0}$

例3 接地导体球附近有一点电荷，如图所示。

求：导体上感应电荷的电量



解： 接地 即 $U = 0$

设：感应电量为 Q

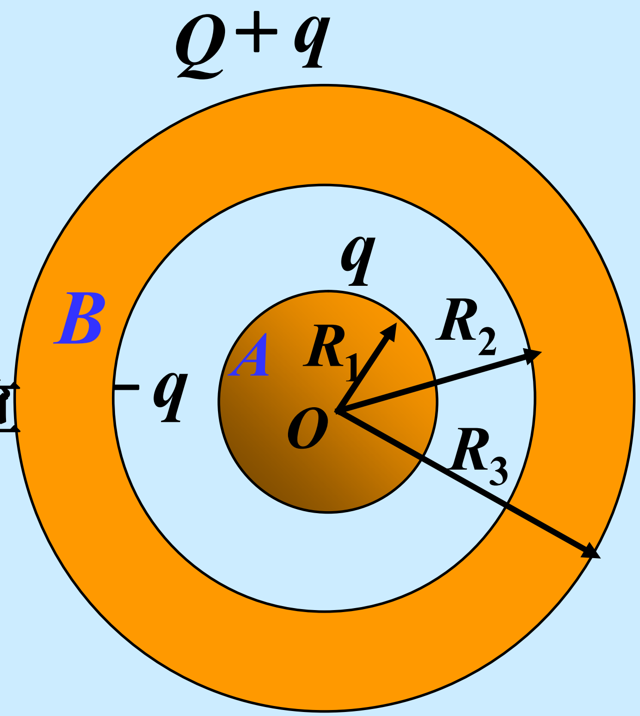
由导体是个等势体

O点的电势为**0** 则

$$\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0}$$

$$\boxed{Q = -\frac{R}{l}q}$$

**例4、已知R_1 R_2 R_3 q Q



求:1、电荷及场强分布；球心的电势

2、如用导线连接A、B，再作计算

解: 电荷分布: 球A表面 q

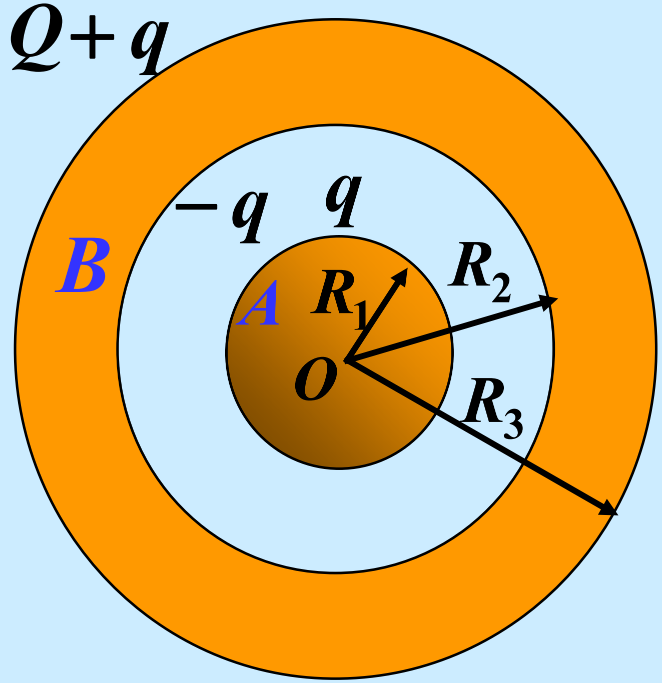
球壳B内表面 $-q$;高斯定理求得

球壳B外表面 $Q+q$;电荷守恒得

电场分布
由高斯定理得

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \quad R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_3 \end{cases}$$

$$E=\begin{cases}0 & r<R_1 \quad R_2<r<R_3\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2\\[2ex] \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3\end{cases}$$



球心的电势

$$U_o=\int_0^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_0^{R_1}Edr+\int_{R_1}^{R_2}Edr+\int_{R_2}^{R_3}Edr+\int_{R_3}^{\infty}Edr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R_3}$$

相当于三个带电球面在球心处电势的叠加

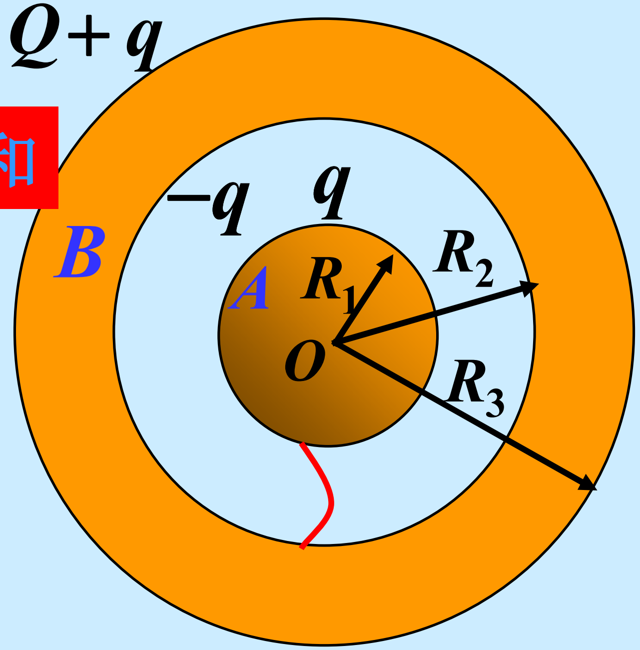
2、用导线连接*A*、*B*，再作计算

连接*A*、*B*， $q + (-q)$ 中和

球壳外表面带电 $Q+q$

$r < R_3 \qquad E = 0$

$$r > R_3 \qquad E = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

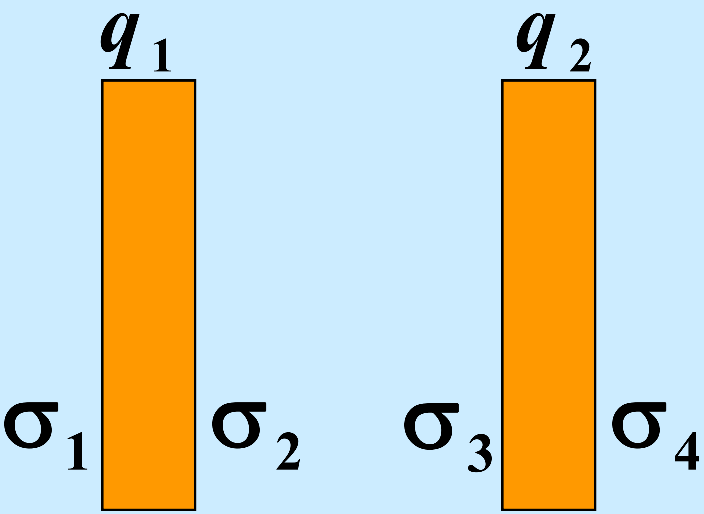


$$U_o = \int_0^{R_3} E dr + \int_{R_3}^{\infty} E dr = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U = \int_r^{\infty} E dr = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**练习　　已知: 两金属板带电分别为q_1、q_2

求：σ_1、σ_2、σ_3、σ_4



$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_1 + q_2}{2S}$$

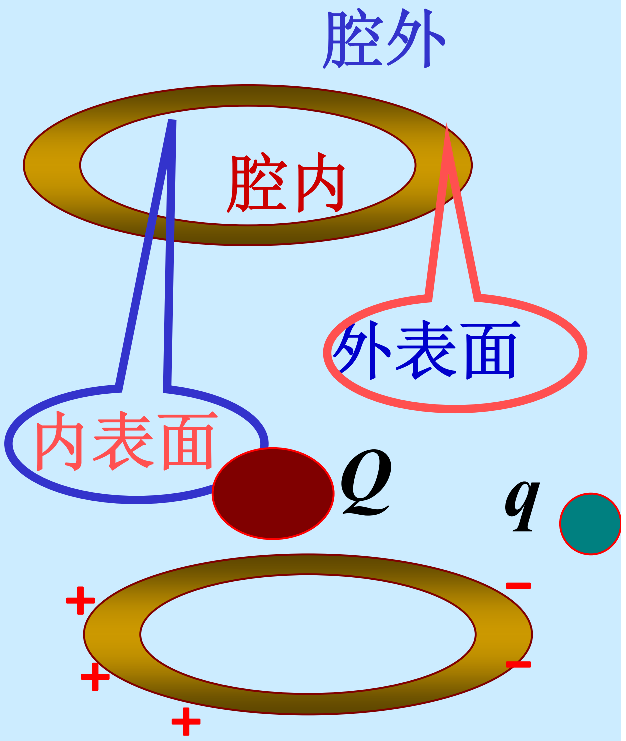
$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_1 - q_2}{2S}$$

三、导体壳与静电屏蔽

静电平衡时导体内总的场强为零这一规律在技术上用来作静电屏蔽。

导体壳的几何结构

腔内、腔外、内表面、外表面



1、腔内无带电体

内表面没有电荷 腔内无电场

即 $\boxed{E_{腔内} = 0}$

腔内的场与腔外及壳的外表面的电量及分布无关

注意：未提及的问题

1)导体壳外表面是否带电?

2)腔外是否有带电体?

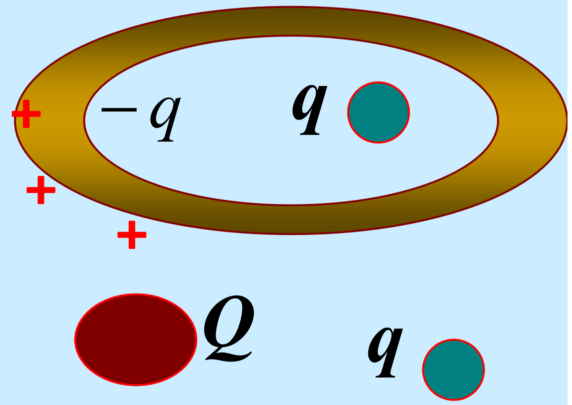
在腔内

$$\boxed{\vec{E}_{\substack{壳外表面\\电量}} + \vec{E}_{\substack{壳外\\带电体}} = 0}$$

空心的金属导体会使其腔内的物体不受其任何外场的影响

（二）.腔内有带电体

电量分布 $\boxed{Q_{\substack{\text{腔内}\\\text{表面}}} = -q}$ 用高斯定理可证



腔内的电场 1) 与电量 q 有关；

2) 与腔内带电体、几何因素、介质有关。

未提及的问题 **1)壳外表面是否带电?** **2)腔外是否有带电体?**

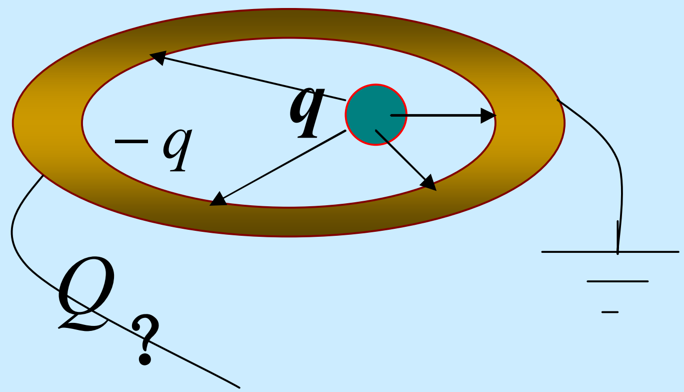
结论: 腔内的场只与腔内带电体及腔内的几何因素、介质有关

或说 在腔内 $\boxed{\vec{E}_{\substack{\text{壳外表面}\\\text{电量}}} + \vec{E}_{\substack{\text{壳外}\\\text{带电体}}} = 0}$

结论： 在腔内 $\boxed{\vec{E}_{\substack{\text{壳外表面}\\\text{电量}}}+\vec{E}_{\substack{\text{壳外}\\\text{带电体}}}=0}$ 屏蔽作用

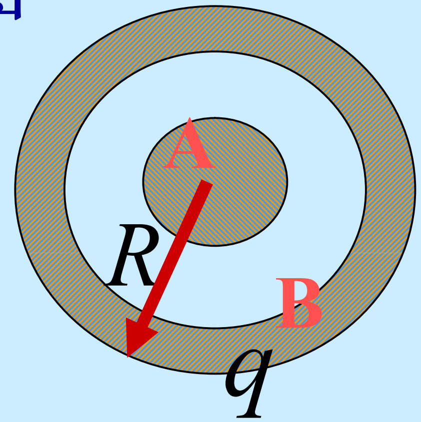
思考： 腔外电荷发生变化，如：改变了位置；改变了大小等，腔内电场将会怎样？

（三）. 静电屏蔽的装置---接地导体壳



$U=0$

例：如图　导体 A和B 同心放置　如图



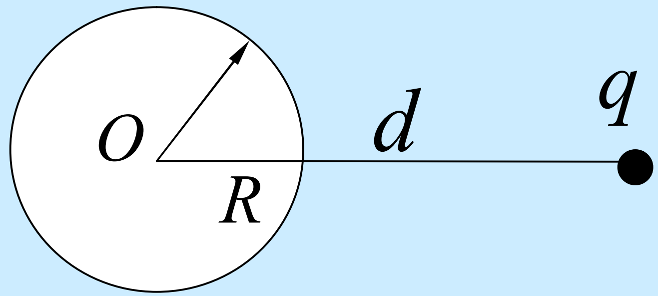
欲求壳**B**的电势

只需知壳外表面的带电量

和球壳**B**的外半径

则 $$U_B = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例题、如图所示，将一个电量为q的点电荷放在一个半径为R的不带电的导体球附近，点电荷距导体球心为d。设无穷远处为零电势，则在导体球心O点有[　　]



A、 $E = 0, V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

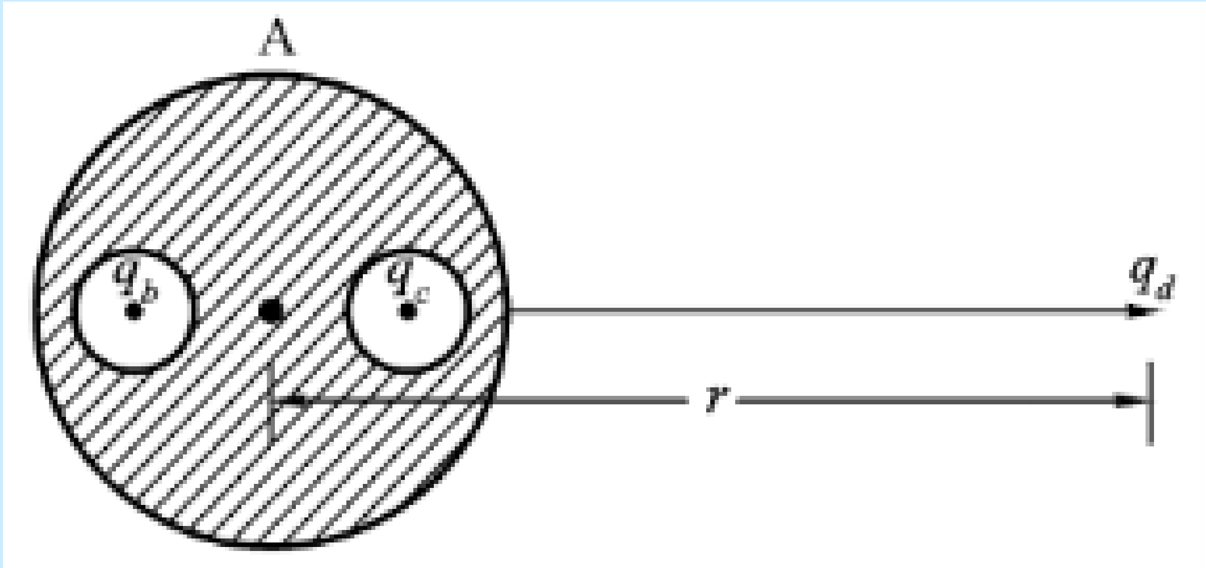
B、 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$

C、 $E = 0, V = 0$

D、 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

A

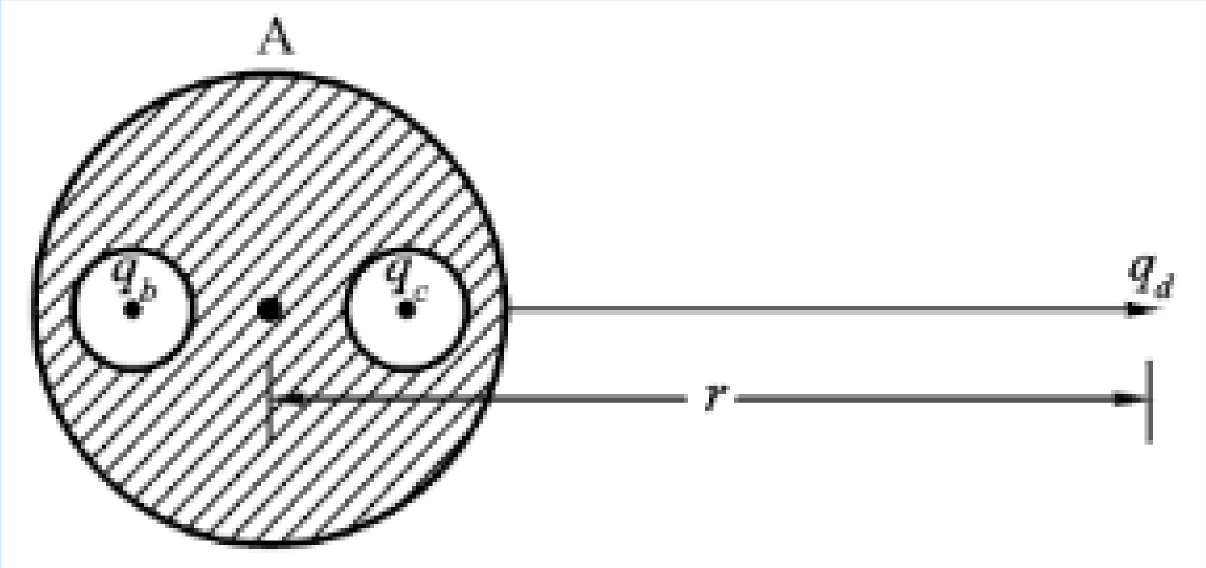
例题、 不带电的导体球A内含有两个球形空腔，两空腔中心分别有一点电荷 q_b、 q_c 。导体球外距导体球较远的 r 处还有一个点电荷 q_d ，如图所示。
试求点电荷 q_d, q_b, q_c 各受多大的电场力。



解：根据导体静电平衡时电荷分布的规律可知，空腔内点电荷的电场线终止于空腔内表面的感应电荷，而它们在导体A外表面的感应电荷可以近似看作均匀分布，因而可以近似看作均匀带电球面对点电荷 q_d 施加作用力，

所以

$$F_d = q_d \frac{(q_b + q_c)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



点电荷 q_d 与导体**A**外表面感应电荷在球形空腔内激发的电场为零，点电荷 q_b 、q_c 处于球形空腔的中心，空腔内表面感应电荷均匀分布，所以点电荷 q_b 、q_c 受到的作用力均为零。