§ 6.4 狭义相对论质点动力学

高速运动时动力学概念如何？

基本出发点：

- 基本规律在洛仑兹变换下形式不变；
- 低速时回到牛顿力学。

力学基本量：时间、长度、质量

爱因斯坦说："狭义相对论导致的具有普遍性的、最重要的结果是关于质量的概念。"

实物物体极限速率 c 的存在，直接与牛顿力学相冲突，冲突的根源就在质量这一基本概念上。

一. 相对论质量

牛顿力学认为：一个物体的质量不管它运动与否，不管从哪个参照系看，都是恒定不变的；即无论如何，作用在物体上的力与物体的加速度比值为一常量。

力与动量　$\vec{P} = m\vec{v}$　状态量　合理

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$　过程量　合理

质量的表达

猜想形式？

$\vec{F}$ 持续作用　　$\vec{P}$ 持续 ↗

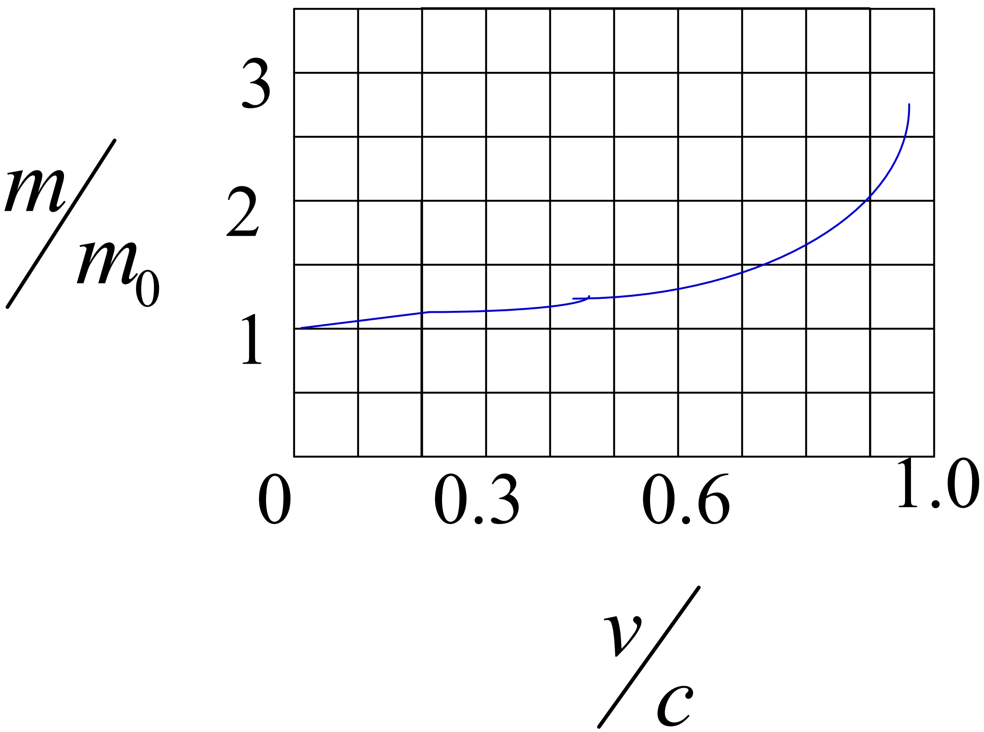
但　v 的上限是 c　　m 随速率增大而增大　$\boxed{m = m(v)}$

在狭义相对论中，根据动量定理和相对论的速度变换关系，可以证明：物体的质量是随着运动的速度而变化的。

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

式中：m_0是物体静止时的质量；
m是质点以速度v运动时的质量称为运动质量或质量（相对论质量）。

考夫曼实验



$$v = 0.98c$$

$$m = 5m_0$$

$$v = 0.99c$$

$$m = 7.09m_0$$

当 $v = 11.2\ km/s$

m变化不到十亿分之一，这时完全可以用经典力学讨论问题

二、相对论动量

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

相对论动量

三．相对论力学的基本方程

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{P}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

相对论力学的基本方程；是牛顿第二定律在狭义相对论中的推广。

四. 相对论能量

1. 相对论动能

经典力学 $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$

相对论 $\boxed{E_k = ?}$

外力做功 $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

经典力学动能定理

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)$$

相对论 外力对质点所作的功： $E_k = \int_0^t \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt}\vec{v} \cdot \vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = v^2\frac{dm}{dt} + m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \left(mv\frac{dv}{dt}\right)$$

又： $$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0 v}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m_0}{(c^2-v^2)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{c^2-v^2} mv \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad mv\frac{dv}{dt} = (c^2-v^2)\frac{dm}{dt}$$

$$\boxed{\therefore \vec{F} \cdot \vec{v} = c^2\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2)}$$

动能: $E_k = \int_0^t \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_0^v d(mc^2) = mc^2 - m_0c^2$

相对论动能 $\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$

$$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

式中 m_0c^2表示粒子静止时具有的能量，称静止能量；

$$\boxed{mc^2 = E_k + m_0c^2}$$

质点的总能量，粒子的静止能量加上动能，也称为粒子运动时的能量。

讨论

- 合理否？ 当 v<<c 时，

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad ? \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

回到了牛顿力学的动能公式。

例：若电子速度为 $v=\dfrac{4}{5}c$

经典 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2 \quad =\dfrac{8}{25}m_0c^2$

相对论 $E_K=m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right) \quad =\dfrac{2}{3}m_0c^2$

2．质能关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

质量—能量关系，
简称质能关系

相对论统一了质量和能量

即：一定的质量相应于一定的能量，
二者的数值只相差一个恒定的因子。

在科学史上，能量守恒和质量守恒是分别发现的
两条相互独立的自然规律。
相对论中二者完全统一起来了。
在科学史上，质量守恒只涉及粒子的静质量，
它只是相对论质量守恒在粒子能量变化很小时的近似。
一般情况下，当涉及的能量变化比较大时，
粒子的静质量也是可以改变的。

3、 相对论能量守恒

按相对论观点，几个粒子在碰撞过程中，
能量、质量守恒应表示为：

$$\boxed{\sum m_i c^2 = con.}$$

$$\sum_i m_i = 常量$$

核反应前后，总的静止
质量减少（称为**质量亏损**）：

$$\boxed{\Delta m_0 = m_{01} - m_{02}}$$

一定转化为能量

反应前后总能量相等

$$E_{k1} + m_{01}c^2 = E_{k2} + m_{02}c^2 \qquad E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

$$\boxed{\Delta E_k = \Delta m_0 c^2}$$

质量亏损必伴随着 9×10^{16} 倍的能量
释放，这是关于原子能的一个基本方程。

例题：###

核电站年发电量100亿度（=3.6×10^{16}J），如果可用核材料全部静止能量转化得到，计算每年要消耗多少核材料？

解：

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^{2}}=0.4kg$$

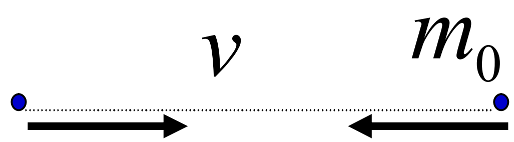
烧煤需要4000吨

资料

秦山核电站 —— 我国自行设计建造的第一座核电站第一台装机容量30万千瓦，1991年2月15日并网发电成功。

例　两全同粒子以相同的速率相向运动，碰后复合

求：复合粒子的速度和质量。（粒子相互作用，动量守恒）



解：设复合粒子质量为M 速度为$\vec{V}$

碰撞过程，动量守恒　$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V}$

$\because \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \quad m_1 = m_2 = m$　　$\therefore V = 0$

能量守恒　$2mc^2 = M_0c^2$

$$\boxed{M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \quad > \quad 2m_0$$

损失的能量转换成静能

例：两个质子和两个中子组成一个氦核，求形成一个氦核时放出的能量。

已知：质子的静止质量 $m_p = 1.00728u$

中子的静止质量 $m_n = 1.00866u$

$1\,u = 1.0660 \times 10^{-27}\,kg$

两个质子．两个中子组成氦核之前，总静止质量为

$$m_{01} = 2m_p + 2m_n = 4.03188\,u$$

形成原子核后的静止质量为 $m_{02} = m_{He} = 4.00150\,u$

（实验室测得的静止质量）

质量亏损 $\Delta m_0 = m_{01} - m_{02} = 0.03038\,u = 0.03038 \times 1.66 \times 10^{-27}\,kg$

放出的能量为 $\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 0.4539 \times 10^{-11}\,(J)$

结合成 $1\,mol$(即 $4.002 \times 10^{-3}\,kg$) 氦核时所放出的能量

$$\Delta E = 0.4539 \times 10^{-11} \times 6.022 \times 10^{23}$$

$$= 2.733 \times 10^{12}\,(J)$$

相当于燃烧100吨煤所发出的热量。

五. 洛仑兹变换下的能量和动量#####

•相对于惯性系S，质点运动速度为v ：

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad \vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

S' 是另一惯性系，相对 S 以 u 作匀速直线运动

那么质点相对S' 的速度为v' ：

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \quad ; \vec{P}' = m'\vec{v}' = \frac{m_0 \vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

问题：

$$\begin{array}{ccc} S & & S' \\ \boxed{E \quad P} & \overset{?}{\longleftrightarrow} & \boxed{E' \quad P'} \end{array}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

由洛仑兹速度变换式：

$$v'^2 = v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = \frac{1}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}\left\{(v_x - u)^2 + (1-\frac{u^2}{c^2})(v_y^2 + v_z^2)\right\}$$

$$(1-\frac{v'^2}{c^2}) = \frac{1}{(1-\frac{uv_x}{c^2})^2}(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{uv_x}{c^2})$$

$$\boxed{\frac{E'}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\frac{E}{c^2} - \frac{u}{c^2}p_x)}$$

（1）

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2 (1-\frac{uv_x}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E - up_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\vec{P}' = m'\vec{v}' = \frac{m_0\vec{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m_0\vec{v}'(1-\frac{uv_x}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x(1-\frac{uv_x}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0(v_x-u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(p_x-um) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(p_x-u\frac{E}{c^2})$$

$$P'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(P_x-u\frac{E}{c^2})$$

$$P'_y = P_y$$

$$P'_z = P_z$$

（2）

$$\frac{E'}{c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{E}{c^2}-\frac{u}{c^2}p_x\right)$$

（1）

$$P_x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(P_x-u\frac{E}{c^2}\right)$$

$$P_y'=P_y$$

$$P_z'=P_z$$

（2）

确定的一质点运动，在不同的惯性参考系中，其能量一动量的表述（数值）是不同的，上式（1）．（2）就是各种表述之间的关系。

做代换： $\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{c}^2} \to \boldsymbol{t}$， $\vec{\boldsymbol{P}} \to \vec{\boldsymbol{r}}$

则（1）．（2）变换就和洛仑兹变换完全一样。

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}(x-ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$P'_{x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left(P_x - u\frac{E}{c^2}\right)$$

$$P'_{y'} = P_y$$

$$P'_{z'} = P_z$$

$$\frac{E'}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left(\frac{E}{c^2}-\frac{u}{c^2}P_x\right)$$

由（1）．（2）两式

$$P'^2 - \left(\frac{E'}{c}\right)^2 = P^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2$$

$$P'^2-(\frac{E'}{c})^2=P^2-(\frac{E}{c})^2$$

$$p_x'^2-\frac{E'^2}{c^2}=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}[(p_x^2+u^2\frac{E^2}{c^4}-2p_xu\frac{E}{c^2})-(\frac{E^2}{c^2}+\frac{p_x^2u^2}{c^2}-2\frac{p_xuE}{c^2})]$$

$$=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}[(p_x^2-\frac{p_x^2u^2}{c^2})-(\frac{E^2}{c^2}-\frac{u^2E^2}{c^4})]$$

$$P'_{x'}=\gamma(P_x-u\frac{E}{c^2})$$

$$=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}[p_x^2(1-\frac{u^2}{c^2})-\frac{E^2}{c^2}(1-\frac{u^2}{c^2})]$$

$$\frac{E'}{c^2}=\gamma(\frac{E}{c^2}-\frac{u}{c^2}P_x)$$

$$=p_x^2-\frac{E^2}{c^2}$$

相对于不同的惯性参考系，$P^2-(\frac{E}{c})^2$的值与参考系的选择无关，是个不变量。

六、能量—动量关系式

由相对论能量 $E = mc^2$ 和相对论动量 $P = mv$

$$E^2 = m^2c^4 = \frac{m_0^{\ 2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}c^4 \qquad \therefore \quad E^2 - \frac{v^2}{c^2}E^2(mc^2)^2 = m_0^2c^4$$

$$\boxed{E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4}$$

能量—动量关系式

某个粒子，静止质量为零（$m_0 = 0$），则：

$$E = Pc \to \quad P = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc = mv$$

$$\boxed{\therefore \quad v = c}$$

一个静止质量为零的粒子其运动速度一定是真空中的光速 c

光子

七、光的认识

光 $\begin{cases} \text{波动性} \\ \text{粒子性} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 波粒二象性

光做为一种粒子，其光子的动量为 $P = \dfrac{E}{c}$

当光和波动联系起来时，光子的能量为 $E = h\nu$

则动量 $P = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$

$\begin{cases} P = \dfrac{h}{\lambda} \\ E = h\nu \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 爱因斯坦关系

光子的质量：

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

例：一匀质矩形薄板，在它静止时，测得其长为 a 宽为 b、质量为 m_0，质量面密为$\sigma_0 = m_0 / ab$ 。假定该薄板沿长度方向以接近光速的速度作匀速直线运动;

求:此时薄板的质量面密度。

解：在相对于板运动的参照系中，长度收缩，同时质量增大。

质量为 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$

长度为 $a' = a\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ $\quad b' = b$

质量面密度

$$\sigma = \frac{m}{a'b'} = \frac{m_0}{ab(1 - v^2 / c^2)} = \frac{\sigma_0}{1 - v^2 / c^2}$$

例　　设某微观粒子的静止质量为 m_0 ，

其总能量是它的静止能量的 K 倍。

求粒子的运动速度的大小和动能。

解： $E = mc^2 \quad E_0 = m_0 c^2$

$$E = mc^2 = KE_0 = Km_0 c^2 \quad m = Km_0$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Km_0 \qquad v = \frac{c}{K}\sqrt{K^2 - 1}$$

$$E_k = E - E_0 = Km_0 c^2 - m_0 c^2 = (K-1) m_0 c^2$$

例 一种热核反应：$_{1}^{2}H+_{1}^{3}H\to_{2}^{4}He+_{0}^{1}n$ 中，

各种粒子的静止质量分别是

氘核（$_{1}^{2}H$）： $m_D = 3.3437\times10^{-27}kg$

氚核（$_{1}^{3}H$）： $m_T = 5.0049\times10^{-27}kg$

氦核（$_{2}^{4}He$）： $m_{He} = 6.6425\times10^{-27}kg$

中子（$_{0}^{1}n$）： $m_n = 1.6750\times10^{-27}kg$

求这一热核反应释放的能量。

解：题目求的是：☆

一个 ${}_{1}^{2}H$ 与一个 ${}_{1}^{3}H$ 反应，生成一个 ${}_{2}^{4}He$ 和一个 ${}_{0}^{1}n$

所释放的能量。

一个反应的质量亏损

$$\Delta m_0 = (m_D + m_T) - (m_{He} + m_n) = 0.0311 \times 10^{-27} kg$$

相应地，释放的能量为

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 0.0311 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.799 \times 10^{-12} (J)$$

$1kg$ 燃料释放的热量 $T_1 = \dfrac{\Delta E}{m_D + m_T} = 3.35 \times 10^{14} (J/kg)$

$1kg$ 优质煤释放的热量 $T_2 = 2.93 \times 10^7 (J/kg)$

$\dfrac{T_1}{T_2} = 1.15 \times 10^7$ 是优质煤的一千万倍