第10章 麦克斯韦方程组　　电磁场

1865年 麦克斯韦 电场和磁场的规律归纳为一方程组

这组方程可以 解决宏观电磁场的各类问题，特别是关于电磁波（包括光波）的问题。

10.1 位移电流

一. 关于 $\boxed{\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i\text{内传导电流}}}$

1. 从稳恒电路中推出 $\oint_L \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0(\sum \boldsymbol{I} + \sum \boldsymbol{I}')$

最初目的：避开磁化电流的计算

2. 传导电流

（电荷定向移动） 热效应 产生磁场

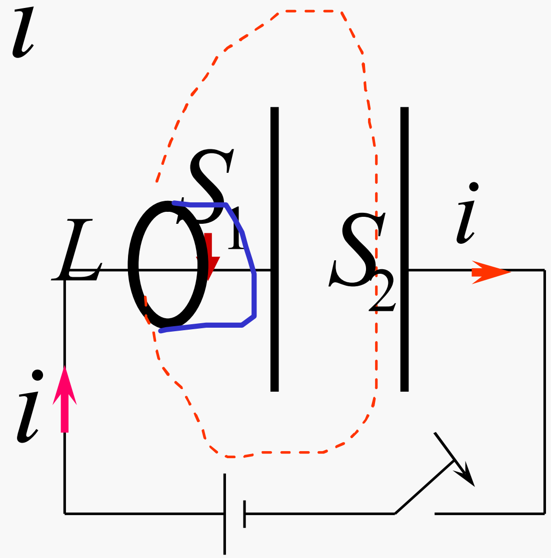
3. $\sum_i I_{i\text{内}}$ 内： 与回路套连的电流

取值:通过以L为边界的任一曲面的电流

在非稳恒时（电容器充电过程中）出现了矛盾

在某时刻　回路中传导电流强度为 i

取L　如图



计算H　的环流$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} =$

取 S_1　$\sum_i I_{i内} = i$

取 S_2　$\sum_i I_{i内} = 0$

思考一：场客观存在 环流值必须唯一

思考二：定理应该普适，应加以完善

假设：电容器内存在一种类似电流的物理量

应是电流的量纲　可以产生磁场

在充放电过程中，平行板电容器内有哪些物理量？

t 时刻有

$$\vec{E} \quad \phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \frac{d\vec{E}}{dt} \quad \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\vec{D} \quad \phi_D = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \quad \frac{d\vec{D}}{dt} \quad \frac{d\phi_D}{dt} \Rightarrow \begin{cases} 库仑\cdot米^{-2} \\ 库仑 \\ 库仑\cdot米^{-2}\cdot秒^{-1} \\ 库仑\cdot秒^{-1} = 安培 \end{cases}$$

定义：

位移电流 $I_d = \dfrac{d\Phi_D}{dt}$ 通过某个面积的位移电流就是通过该面积的电位移通量对时间的变化率

位移电流的面密度

$$\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt} \qquad I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

二. 全电流 全电流定理

1、全电流 $\boldsymbol{I}_{全}=\boldsymbol{I}_{0}+\boldsymbol{I}_{d}$

传导电流 载流子定向运动 I_o 位移电流 I_d

电流概念的推广 能产生磁场的物理量

2. 全电流定理

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_i I_{全}}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0+I_d=\int_S\left(\vec{J}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}}$$

安培环路定理推广到非恒定情况下也适用，

即安培环路定理的普遍形式。

注意：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

a. 电流概念的推广 仅从产生磁场的能力上定义

b. 其它方面均表现出不同

如在真空中，位移电流存在，无传导电流

位移电流不伴有电荷的任何运动

所以谈不上产生焦耳热

3. 位移电流的本质 变化的电场

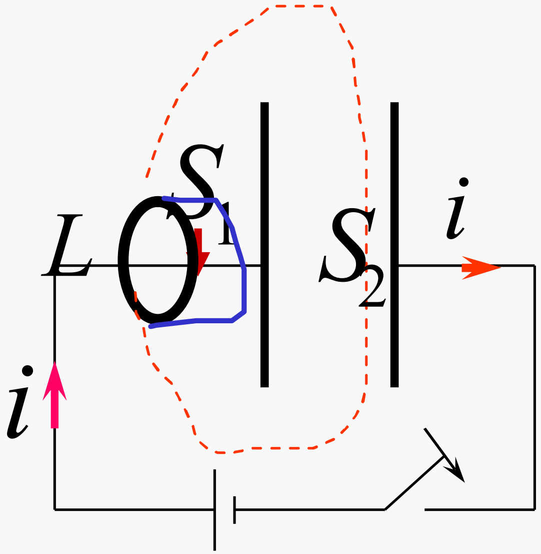
$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \qquad \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon\frac{d\vec{E}}{dt}$$

完善麦克斯韦的假设：变化的电场也会产生磁场。

三、用全电流定理就可以解决前面的充电电路中矛盾

S_1 只有传导电流 $\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = i}$

S_2 只有位移电流 $\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_d}$

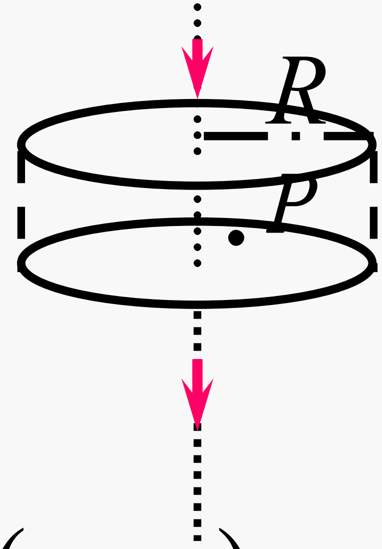


平行板电容器板面积为S

$$\Phi_D = DS = \sigma S = q$$

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

例 平板电容器 均匀充电



$$\frac{dE}{dt} = c$$ 板半径为 R

内部充满介质 ε μ

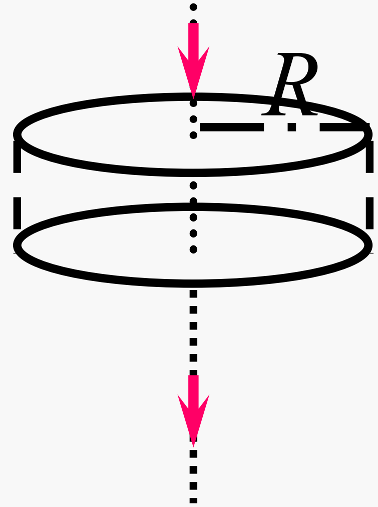
求：1）I_d（忽略边缘效应） 2）$\vec{B}_P\left(r \ll R\right)$

解： $$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\left(D\pi R^2\right)$$

$$= \varepsilon \frac{dE}{dt}\underbrace{\pi R^2}_{S}$$

$$\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$I_d = \varepsilon \frac{dE}{dt} \pi R^2$$



$\frac{dE}{dt} > 0$ $\quad I_d$ 方向 $\downarrow$ 充电

$\frac{dE}{dt} < 0$ $\quad I_d$ 方向 $\uparrow$ 放电

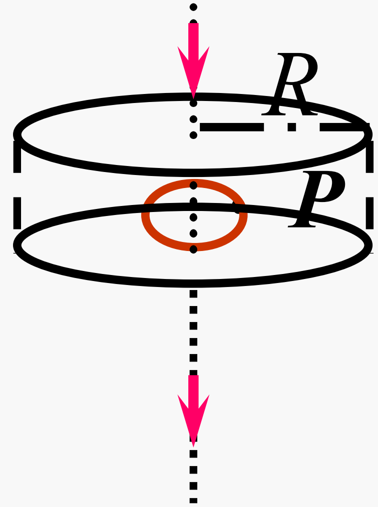
作一数量级估算

$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \mu = \mu_0 \qquad R = 0.1m \qquad \frac{dE}{dt} = 10^{13} \, V/ms$

得 $\longrightarrow$ $\quad I_d = 2.78A \qquad B = 5.56 \times 10^{-6}\, T$

2）过 P 点垂直轴线作一圆环

等效的位移电流均匀通过圆柱体



$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H2\pi r = \sum_{内} I_d$$

$$\sum_{内} I_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = J_d \cdot S = \pi r^2 \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$$\vec{J}_d = \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$H = \frac{\varepsilon r}{2}\frac{dE}{dt} \qquad B = \mu H = \frac{\mu\varepsilon r}{2}\frac{dE}{dt}$$

总结：

麦克斯韦全电流

定律说明：变化的电场会激发涡旋磁场。

*位移的电流的引入，它给出了电场和磁场的内在联系，反映了自然现象的对称性。变化的电场和磁场互相联系形成统一的电磁场。

*位移电流存在于有电场变化的地方。不仅在电介质中，就是在导体中，甚至在真空中，也存在位移电流。

10.2 麦克斯韦方程组

一. 积分形式

$$\vec{E}=\vec{E}_{静电}+\vec{E}_{感生} \qquad \vec{D}=\vec{D}_{静电}+\vec{D}_{感生}$$

$\vec{E}_{静电}$ $\vec{D}_{静电}$ 静止电荷产生的场

$\vec{E}_{感生}$、$\vec{D}_{感生}$ 变化磁场产生的场

$$\vec{B}=\vec{B}_{稳恒}+\vec{B}_{位移} \qquad \vec{H}=\vec{H}_{稳恒}+\vec{H}_{位移}$$

$\vec{B}_{稳恒}$ $\vec{H}_{稳恒}$ 传导电流产生的场

$\vec{B}_{位移}$、$\vec{H}_{位移}$ 变化电场产生的场

通量

$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}_{静电} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV \\ \oint_S \vec{D}_{感生} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

环流

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}_{静电} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_L \vec{E}_{感生} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dS$$

麦克斯韦方程

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 \, dV$$ → 电场的高斯定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$ → 法拉第电磁感应定律

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$ → 磁场的高斯定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dS$$ → 磁场的安培环路定理

二. 微分形式

1. 数学上的定理

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right) dV$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

∇ 梯度

$\nabla\cdot$ 散度 算符

$\nabla\times$ 旋度

直角坐标系

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

2. 微分形式

积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dV = \int_V \rho_0\, dV$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dV = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

麦克斯韦的贡献

一. 完善了宏观的电磁场理论

四个微分方程

$+$

介质方程

$$\left\{\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon\vec{E}\\ \vec{B} &= \mu\vec{H}\\ \vec{J}_0 &= \sigma\vec{E}\end{aligned}\right\}$$

确定的边界条件下

解方程组

还有 $\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$

可以 解决宏观电磁场的各类问题，

特别是关于电磁波（包括光波）的问题。

方程组在任何惯性系中形式相同;洛仑兹不变式

二．爱因斯坦相对论的重要实验基础

三．预言电磁波的存在（1865年预言，1888年赫兹实验证明了电磁波的存在）

由微分方程出发　　在各向同性介质中

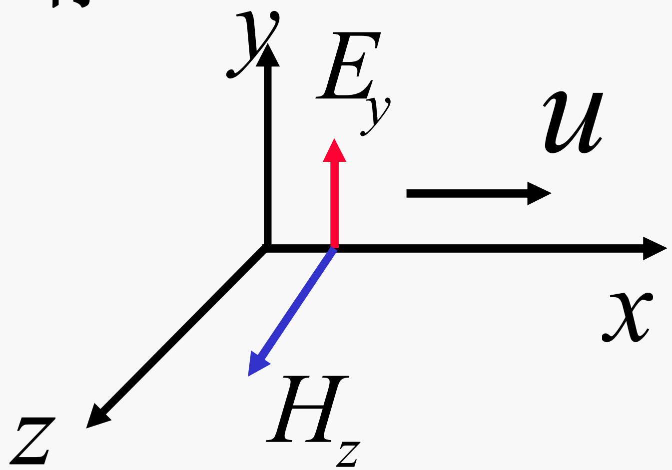
且在　$J_0 = 0$　$\rho_0 = 0$　情况下

$$\Downarrow$$

$\vec{E}$　$\vec{H}$

满足的微分方程形式是:

对沿 x方向传播的电磁场(波)　　有



$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

物理量　　E　　H

波速是　$u = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$

经典波动方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ξ　任一物理量

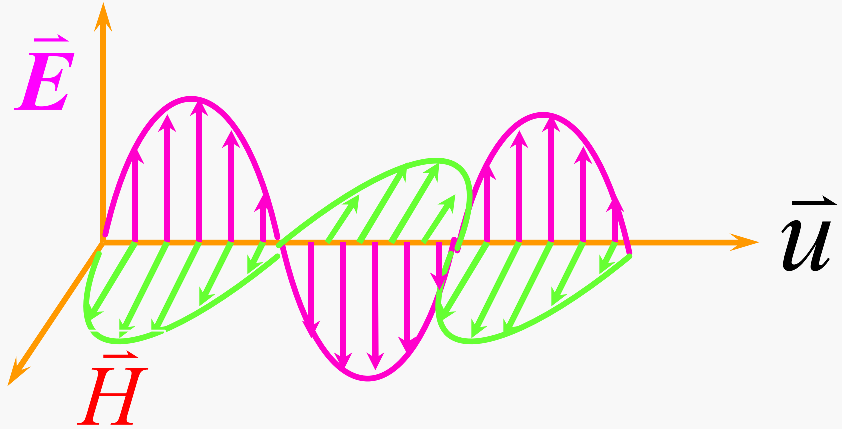
x　传播方向

u　波速

a.平面电磁波：

$$E_y = E_{y0}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

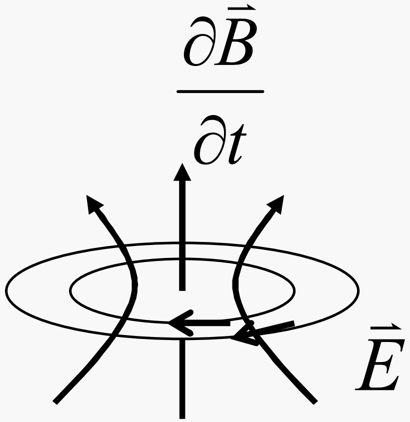
$$H_z = H_{z0}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]$$

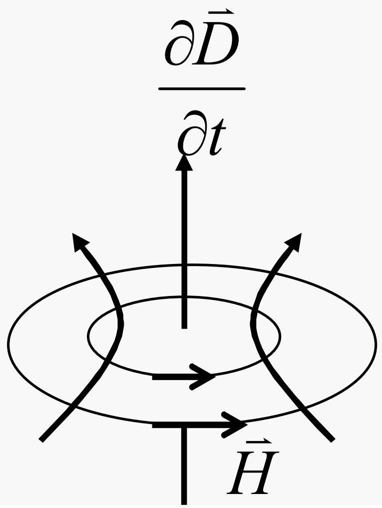


其中：　$\sqrt{\mu}H_{z0} = \sqrt{\varepsilon}E_{y0}$

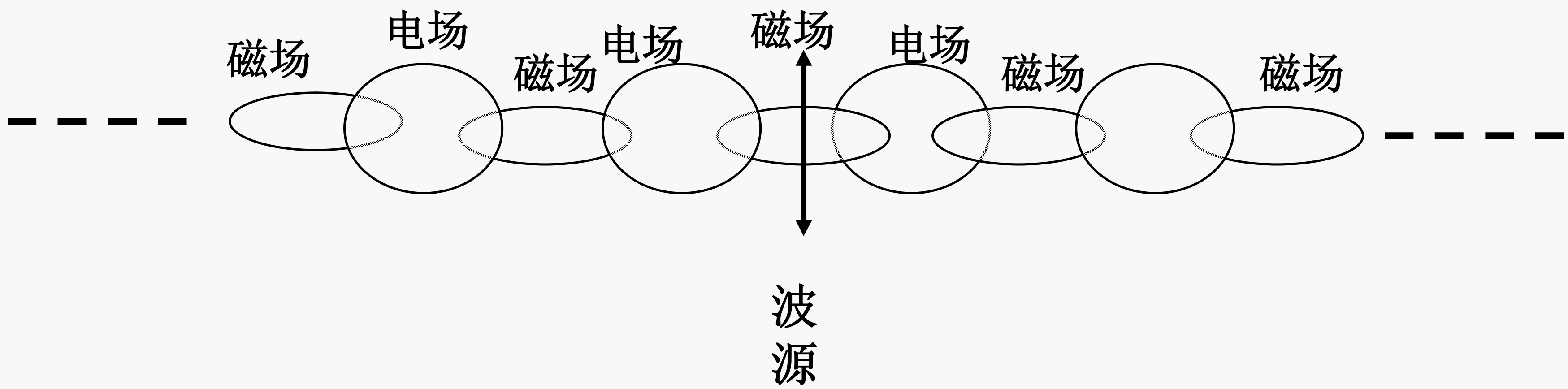
b.电磁波传播的依据：变化的磁场激发涡旋电场；

变化的电场激发涡旋磁场。





c.电磁波在某一直线上传播过程



实际电磁波是沿各个不同方向传播的，上图并非真实的电力线和磁力线分布图

d.电磁波的性质：

1 、电磁波是横波　$\hat{x}$　是传播方向，则振动的电矢量和磁矢量都与其垂直

即：　$\vec{E} \perp \hat{x}, \vec{H} \perp \hat{x}$

2、电矢量与磁矢量垂直 即：$\vec{E} \perp \vec{H}$

$\hat{x}, \vec{E}, \vec{H}$ 三者构成右手螺旋关系，$\vec{E} \times \vec{H}$ 决定传播方向

3、电矢量和磁矢量同相位（可以由方程得到）

4、$\vec{E}$与$\vec{H}$ 幅值成比例 即：$\sqrt{\varepsilon}\,E_0 = \sqrt{\mu}\,H_0$

5、电磁波的传播速度 $u = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 真空中：$\varepsilon = \varepsilon_{0,}\ \mu = \mu_0$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8\, m/s$$

e.电磁波的能流密度：任何波动的过程都是能量传播的过程，电磁波是传递电磁能的过程。单位时间内通过与传播方向垂直的单位面积的能量叫做能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

也称玻印廷矢量

f.光波也是电磁波 $n=\dfrac{c}{u}=\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ 一般 $\mu_r=1$

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}$$

与物质作用的主要是 $\vec{E}$ 矢量 $\vec{E}$ 通常被称为光矢量

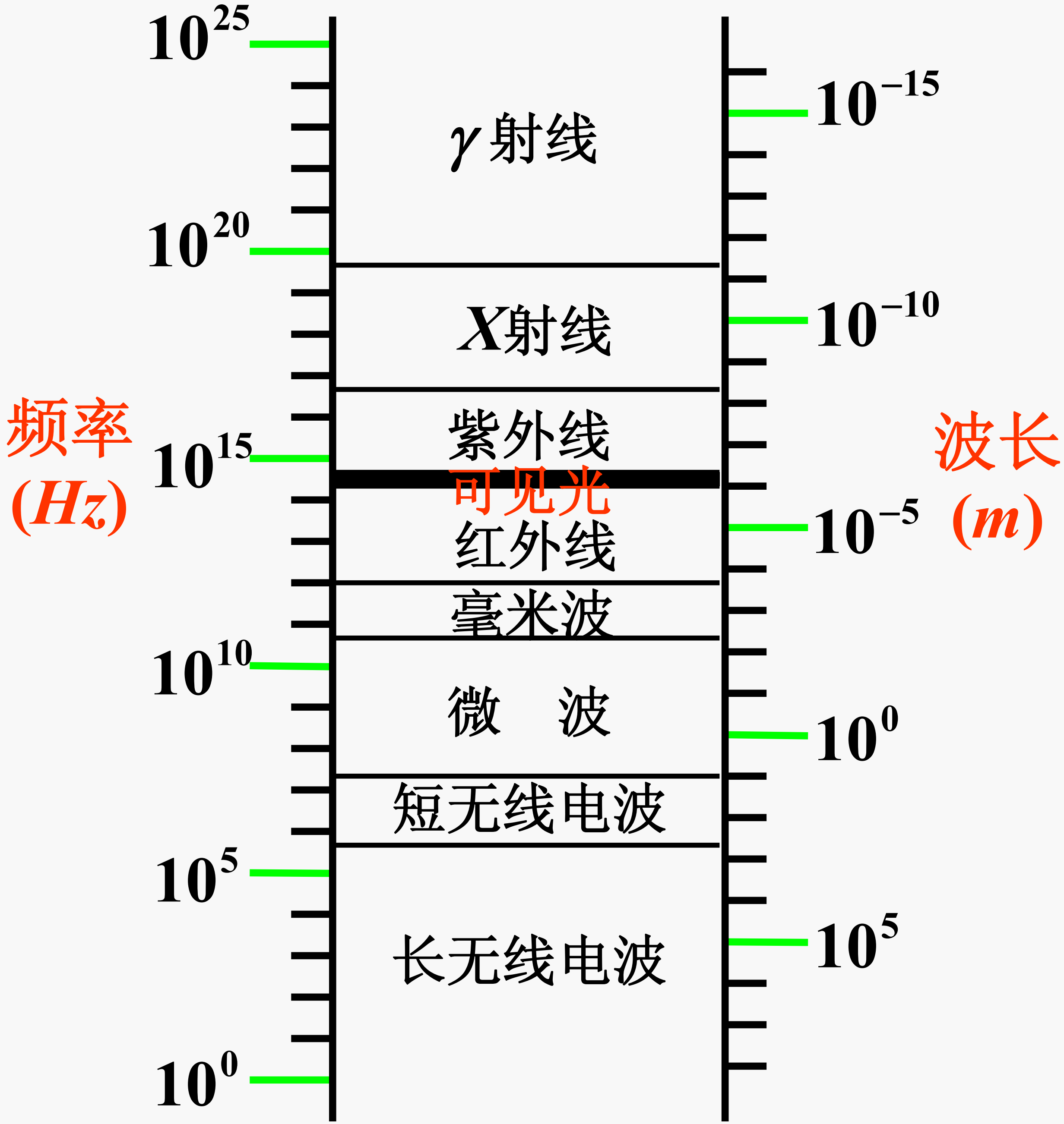
g.电磁波谱 按波长或频率的顺序把电磁波排列起来，就是电磁波谱。见书：224页。

γ **射线， X射线，紫外线，可见光，无线电波….**

电磁波谱

将电磁波按[波长]或[频率]的顺序排列成谱

不同频率或波长的电磁波具有不同的特征和不同的用途



例题：真空中，一平面电磁波的电场由下式给出：

$$E_x = 0 \quad E_z = 0 \quad E_y = 60\times10^{-2}\cos[2\pi\times10^{8}(t-\frac{x}{c})] \text{ V/m},$$

求：该波的（1）波长和频率；(2) 传播方向；（3）磁场的大小和方向。

解：（1）由题意可知该波的电场方向沿y轴正向

与 $E = E_0\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})] = E_0\cos[2\pi(\nu t-\frac{x}{\lambda})]$ 对比

波的频率为 $\nu = 10^{8}$ Hz 波长 λ =3m；

（2）该波沿x轴正向传播；

（3）由于 $\vec{E},\vec{H},\vec{u}$ 三者构成正交右手螺旋关系， 且$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$

$$H_x = 0 \quad H_y = 0 \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_y$$

$$B_z = \mu_0 H_z = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_y = \frac{E_y}{c} = 2\times10^{-9}\cos[2\pi\times10^{8}(t-\frac{x}{c})] \text{（T）}$$

真空中沿 z 轴负向传播的平面电磁波，其磁场强度的表达式为

$\bar{H} = \bar{i} H_0 \cos\left(t + \frac{z}{c}\right) \lceil SI \rceil$ ，求电场强度的波的表达式。

$$\vec{u} = -u\vec{k} \propto \vec{E} \times \vec{H}, \vec{H} = H\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{j}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H = \vec{j}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_0 \cos\omega(t + \frac{z}{C}) \quad [SI]$$