三 高斯定理

（一）电力线(电场线）

用一族空间曲线来形象描述电场分布

把这些曲线称为电场线或电力线.

1. 规定

方向:

电力线上每一点的切线方向表示该点电场强度的方向

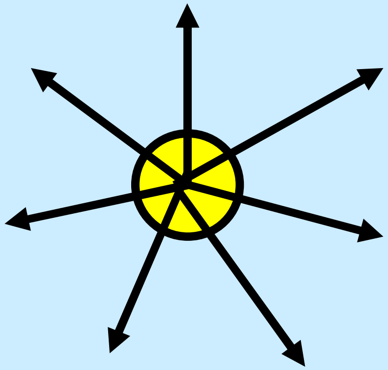
大小:

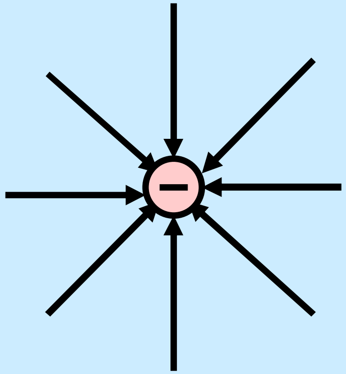
在电场中任一点，取一垂直于该点场强方向的面积元，使通过单位面积的电力线数目，等于该点场强的数值。或：该点附近电力线的疏密表示场强的大小。

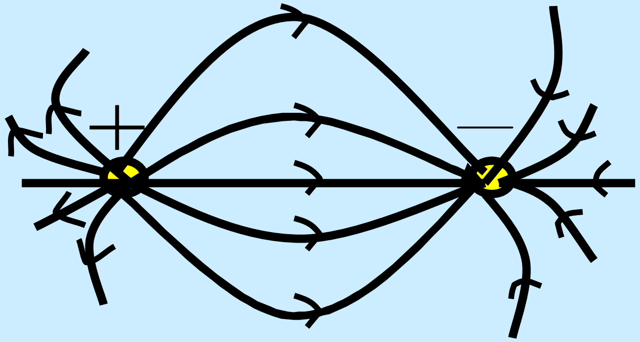
2. 电力线的性质

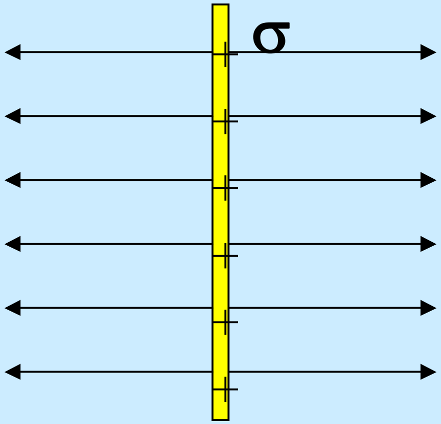
1) 电力线起始于正电荷(或无穷远处)，终止于负电荷（或无穷远处)，不会在没有电荷处中断；

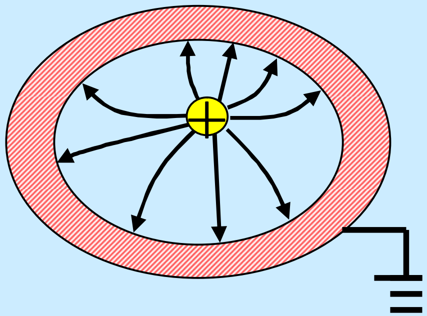
2) 两条电力线不会相交；电力线不会形成闭合曲线。





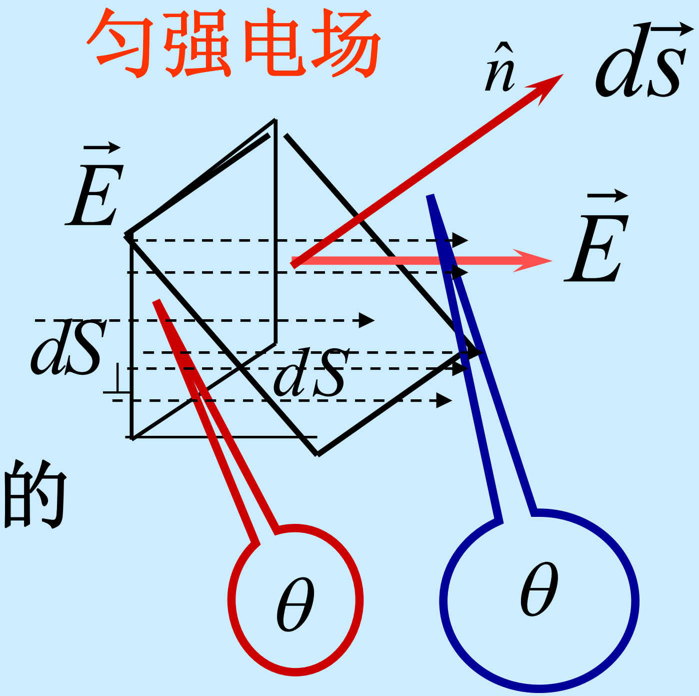






3.电力线与电场强度关系

$$E = \frac{d\phi}{dS_\perp} \qquad d\phi = Eds_\perp$$



若面积元不垂直电场强度，

电场强度与电力线条数、面积元的关系怎样？

由图可知 通过 ds 和 $ds_\perp$ 电力线条数相同

$$d\vec{s} = ds\hat{n}$$

$$d\phi = Eds_\perp = Eds\cos\theta \Rightarrow \boxed{d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

（二）电通量

藉助电力线认识电通量

通过任一面的电力线根（条）数

即为通过此面元的电通量

$$\boxed{d\phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

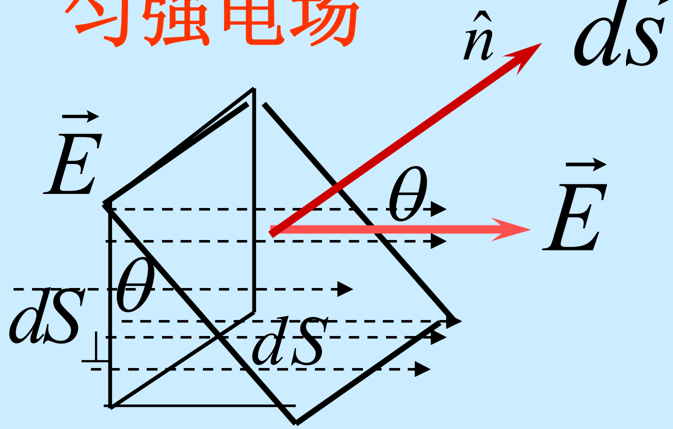
通过任意曲面的电通量:

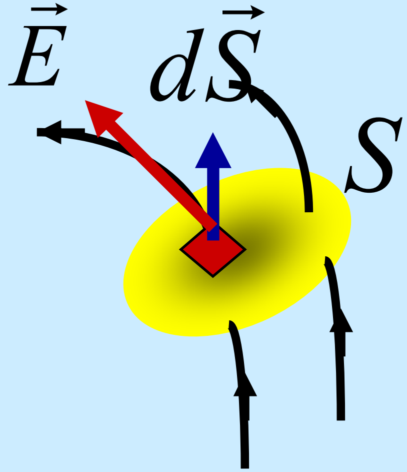
把曲面分成许多个面积元

每一面元处视为匀强电场

$$\boxed{\phi_e = \int_S d\phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

匀强电场

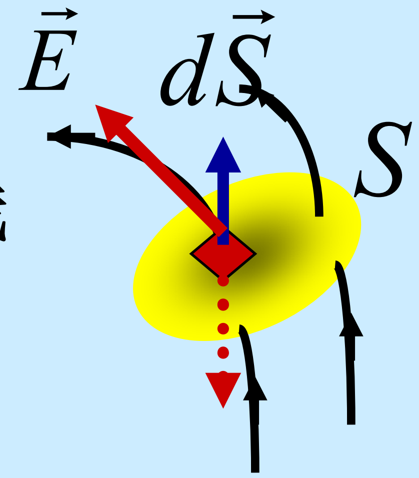




讨论

正与负

取决于面元的法线方向的选取



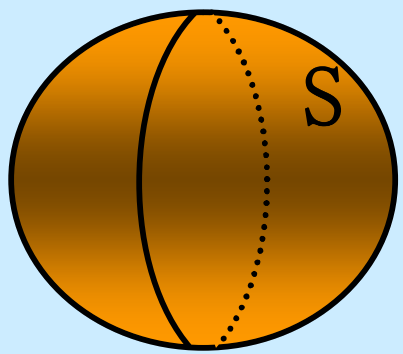
1. $d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S}$

如前图 知 $\theta < \dfrac{\pi}{2}$ $\vec{E}\cdot d\vec{s} > 0$

若如红虚箭头所示 $\theta > \dfrac{\pi}{2}$ $\vec{E}\cdot d\vec{s} < 0$

2. 通过闭合面的电通量

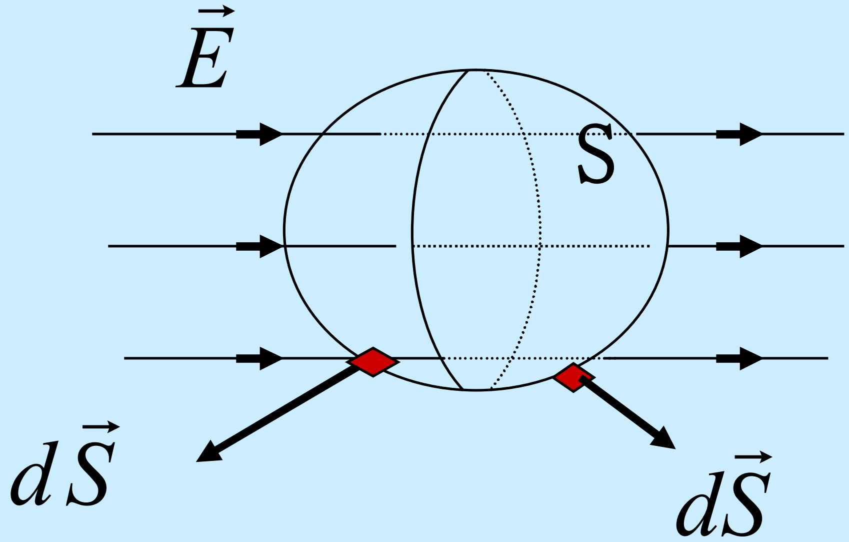
$$\phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



规定：对闭合曲面，面元正方向，由闭合面内指向面外

即外法线方向为正

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$\vec{E} \cdot d\vec{s} < 0$ 电力线穿入

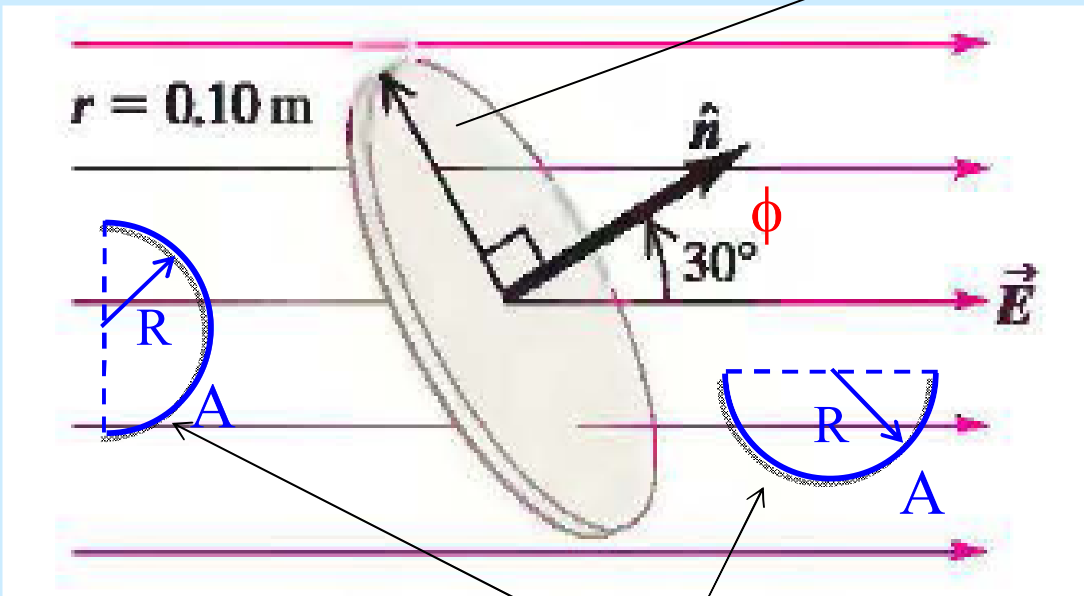
$\vec{E} \cdot d\vec{s} > 0$ 电力线穿出

$$\phi_e \begin{cases} > 0 & \text{穿出的电力线条数大于穿进的电力线条数 有多余正电荷} \\ = 0 & \text{穿出的电力线条数等于穿进的电力线条数 无多余电荷} \\ < 0 & \text{穿出的电力线条数小于穿进的电力线条数有多余负电荷} \end{cases}$$

求通过各面的电通量

均匀电场 E=3.0 × 10^3 N/C

圆平面



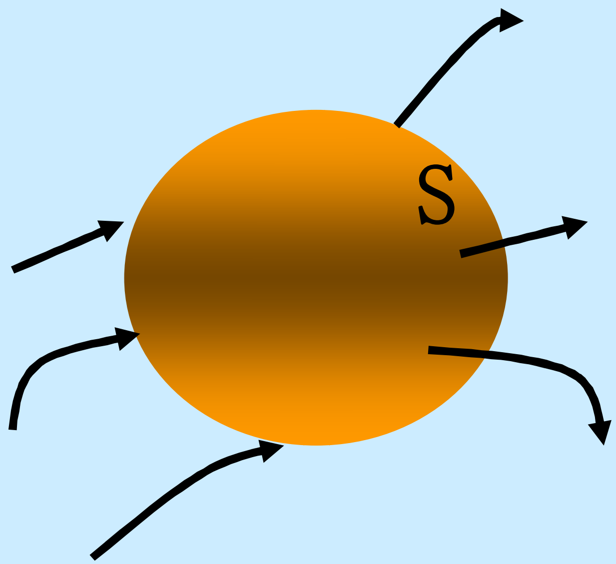
半球面 R=0.05m

（三）静电场的高斯定理

1. 表述

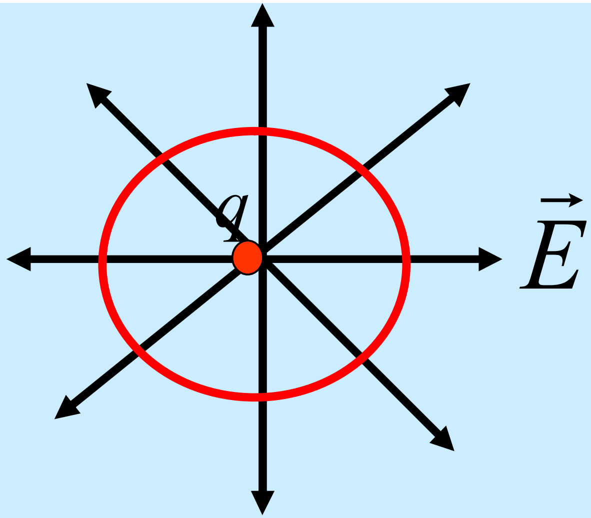
真空中的静电场内，通过任一闭合曲面的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以 ε_0

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{i内}}{\varepsilon_0}$$



可以利用电通量概念、库仑定律、场叠加原理证明

高斯定理的证明

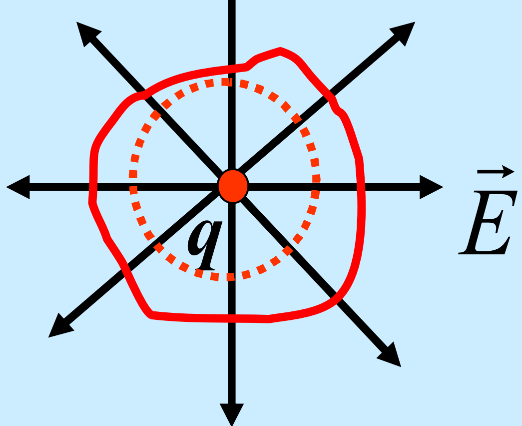


(1)电点荷的场

点电荷在闭合球面中心时

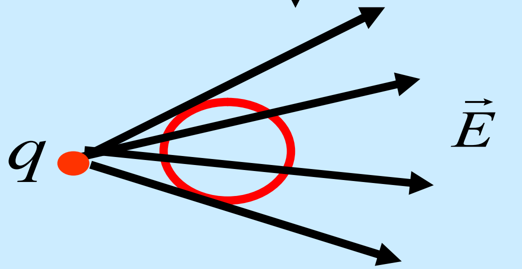
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_s \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_s ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

点电荷在任意闭合曲面内时 $\Phi_e = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

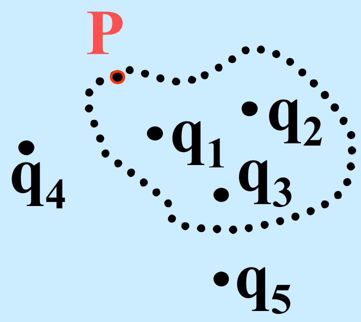


点电荷在任意闭合曲面外时

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$



(2) 点电荷系的场



任一闭合曲面

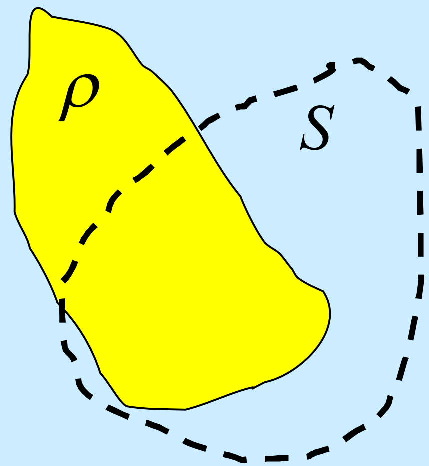
$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \oint_s \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \oint_s \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \cdots \oint_s \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{s} \cdots \oint_s \vec{E}_n \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \cdots \Phi_{e4} + \cdots \Phi_{en}$$

$$\boxed{\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{i内}}$$

(3) 任带电体的场　任一闭合曲面



$$\boxed{\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV}$$

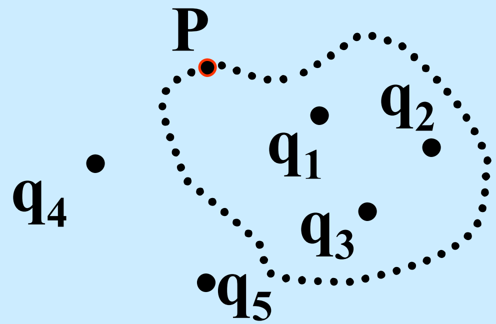
论 讨

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{i内}$$

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

1、对任意形状的闭合曲面都成立

2、电场强度 ***E*** 是由闭合曲面内、外的所有电荷共同决定的



对电通量 $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$ 来说

只有闭合面内的电荷对电通量有贡献

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon_0}$$

3、高斯定理是描述静电场性质的基本方程

静电场是有源场

4、高斯定量的微分形式

数学高斯公式

$$\oint_s \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV \qquad \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\,dV$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dq = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV \;\rightarrow\; \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

散度

（四） 高斯定理在解场方面的应用

对 Q 的分布具有某种对称性的情况下利用高斯定理解 E 较方便，一般解题步骤：

1、根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性

常见的电量分布的对称性：

球对称	柱对称	面对称
“均匀”带电	“无限长”	“无限大”
球体	柱体	平板
球面	柱面	平面
(点电荷)	带电线	

2、选择合适的封闭积分曲面(常叫高斯面)

1）使电场强度 *E* 矢量处处垂直于高斯面，且在此面上处处相等。

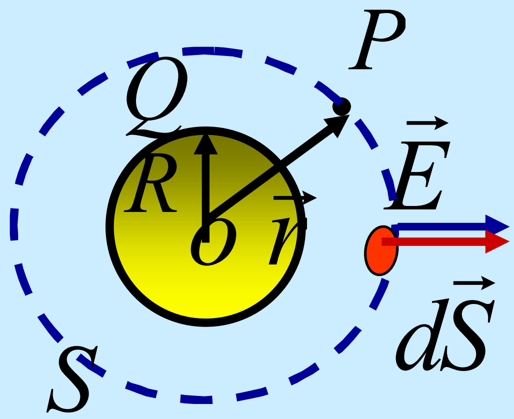
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\oint ds = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

2) 将高斯面分为两部分，一部分同(1)； 另一部分 高斯面与电场平行，则电力线不穿过此部分高斯面，这部分电通量为零。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_{s_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}}_{=0} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

例1 均匀带电球面 总电量为 Q

半径为 R 求：电场强度分布



解： 根据电荷分布的对称性，

选取合适的高斯面(闭合面)

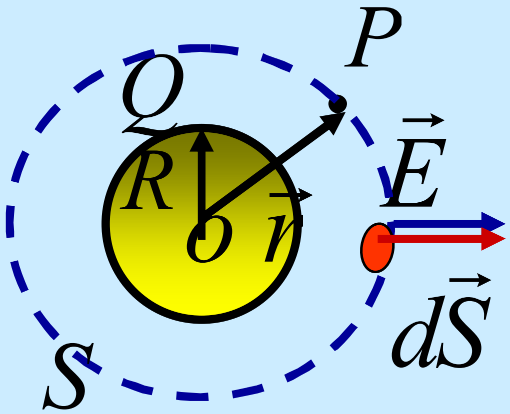
∴取过场点 P 以球心O为心的球面（高斯面）

先计算高斯面的电通量

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E\,4\pi r^2$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2$$

再根据高斯定理解方程



$$E4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

过场点的高斯面内电量代数和?

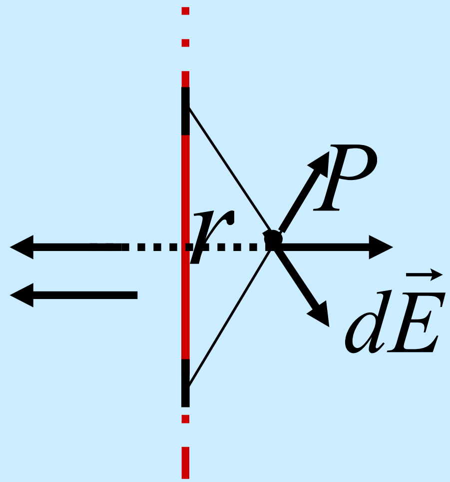
$$\left.\begin{array}{ll} r<R & \sum_i q_i = 0 \\ r>R & \sum_i q_i = Q \end{array}\right\}$$

$r<R \quad E = 0$

$r>R \quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

例2 均匀带电的无限长的直线 线密度 λ

对称性的分析

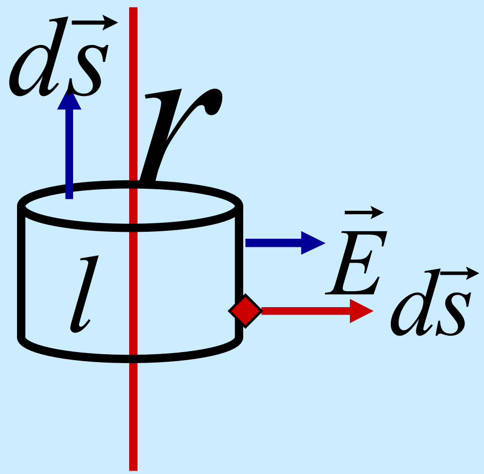


取合适的高斯面

计算电通量

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{两底面} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= E2\pi rl$$



利用高斯定理解出 E

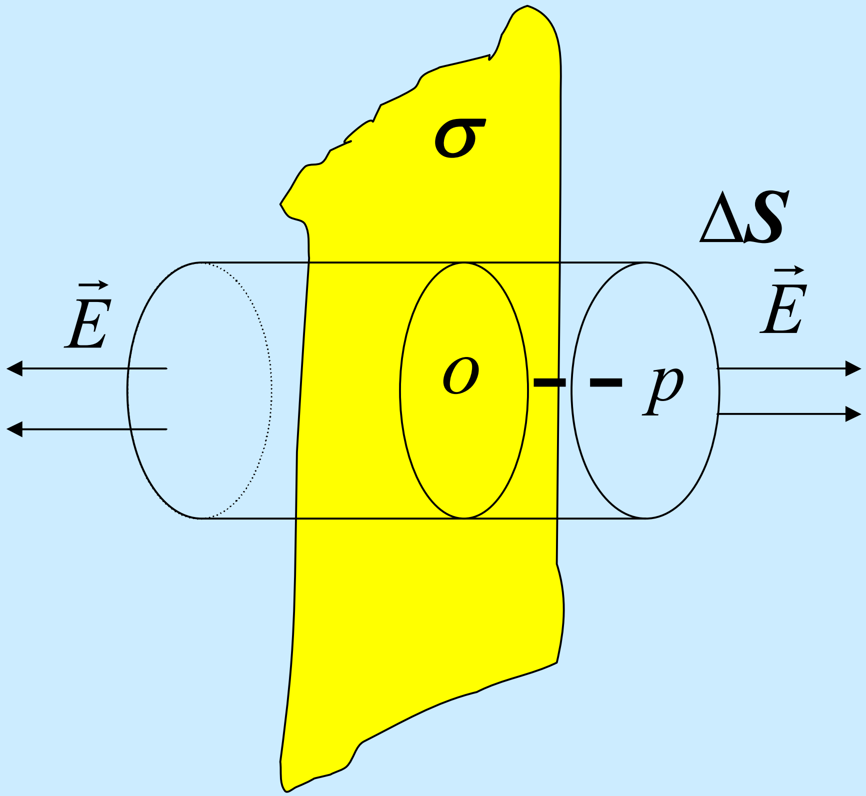
$$E\,2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

例3　求无限大均匀带电平面的电场分布。已知带电平面上面电荷密度为 σ

解：

电场分布，面对称。
离平面等远处(两侧)的场强大小相等，方向都垂直平面并指离平面
(当 $\sigma > 0$ 时)



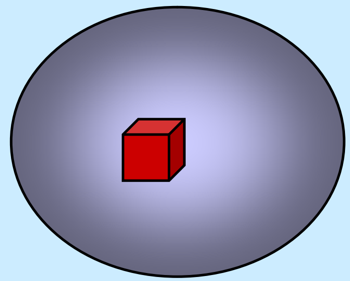
选柱面做为高斯面S

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{底面}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E \cdot \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\therefore \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$ 是均匀场

例4 金属导体静电平衡时, 体内场强处处为0

求证：体内处处不带电



证明：

在导体内任取体积元 dV

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i=\int_V \rho\, dV=0$$

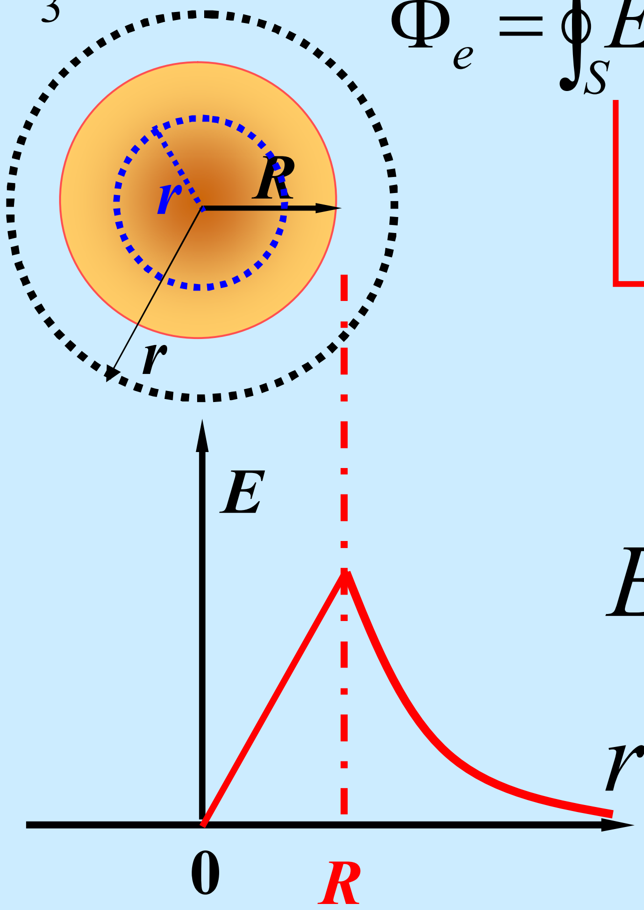
$$\because \text{体积元任取} \longrightarrow \rho=0$$

证毕

例5 求：电量为Q、半径为R 的均匀带电球体的场强分布。

解： 选择高斯面——同心球面

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi r^3 \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \dfrac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3} & (r\leqslant R) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (r > R) \end{cases}$$

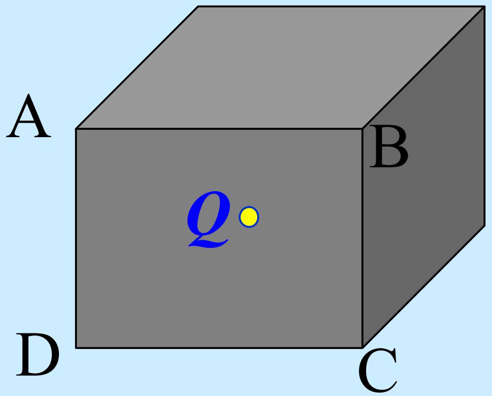
$$= E\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2$$

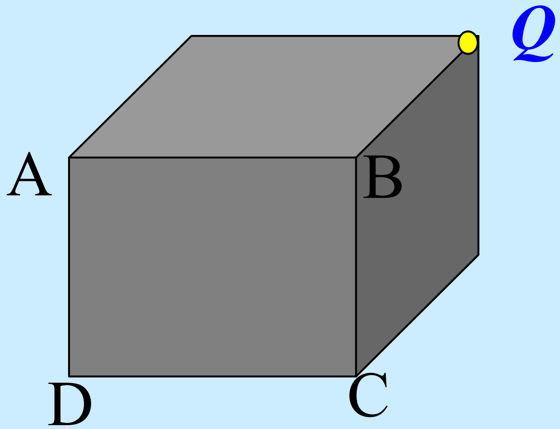
$$E = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r & (r\leqslant R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

例6

高斯定理

$$\Phi_e = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{内} q_i$$



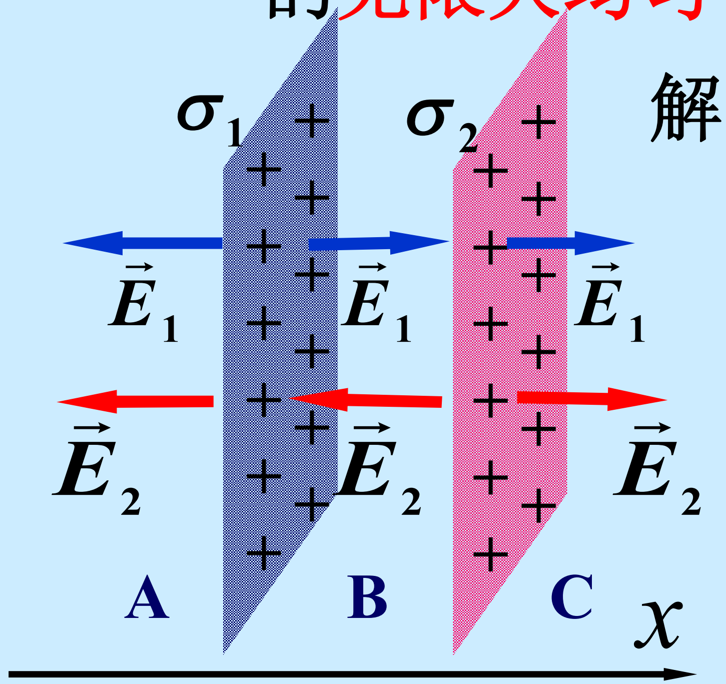


点电荷Q位于立方体中心,通过一个面的电通量为多少?

点电荷Q位于立方体的一个顶点处,通过面ABCD的电通量为多少?

当场源是几个具有对称性的带电体时，可用高斯定理分别求各带电体单独存在时的场强，再矢量叠加。

例 7 求：电荷面密度分别为σ_1 、σ_2 两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布。



解：$E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$， $E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$

$$\vec{E}_A = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

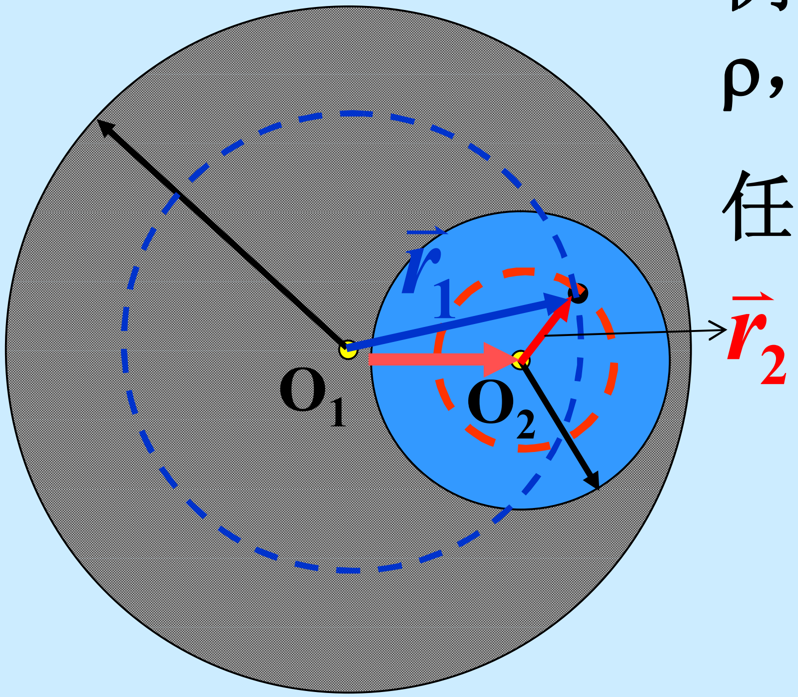
$$\vec{E}_C = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

带电平板电容器间的场强

当 $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ $\quad E_A = E_C = 0$

$$\boxed{E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

例8、均匀带电球体，体密度为ρ，挖去一小球体，求：空腔内任一点的场？



$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

腔内是均匀电场