8.2 磁场的高斯定理

一、磁感应线和磁通量

1、规定： **a.** 方向：曲线上每一点的切线方向表示该点磁感应强度的方向；

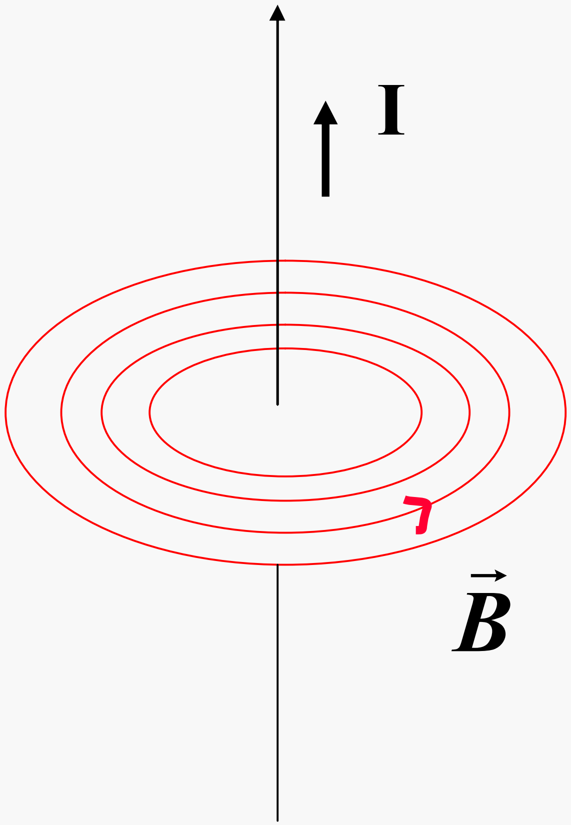
b. 大小：该点附近磁力线的疏密表示该点磁感应强度的大小。

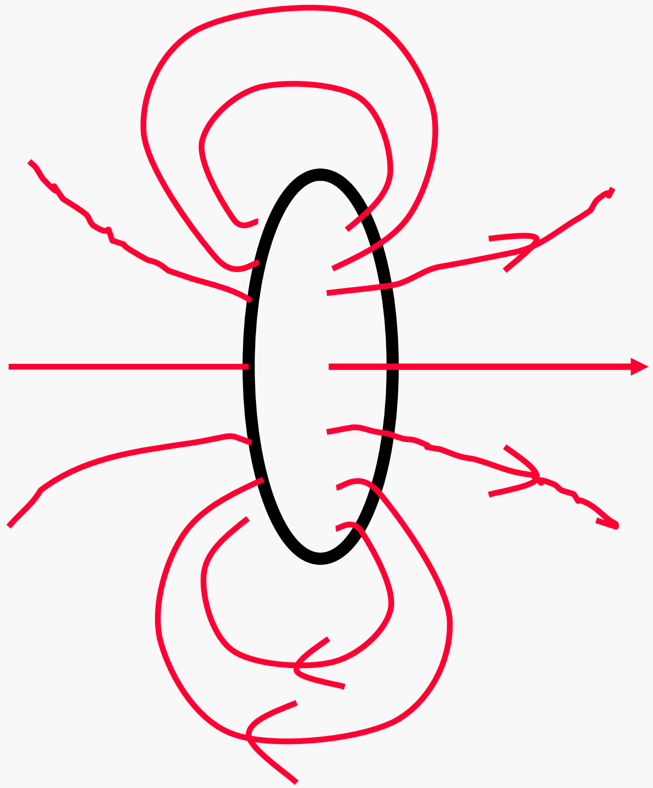
2、特性

a. 无头无尾闭合曲线

b. 与电流相套连

c. 与电流成右手螺旋关系


I
$\vec{B}$

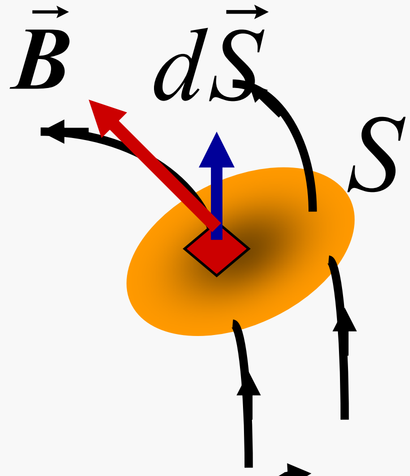


3、磁通量

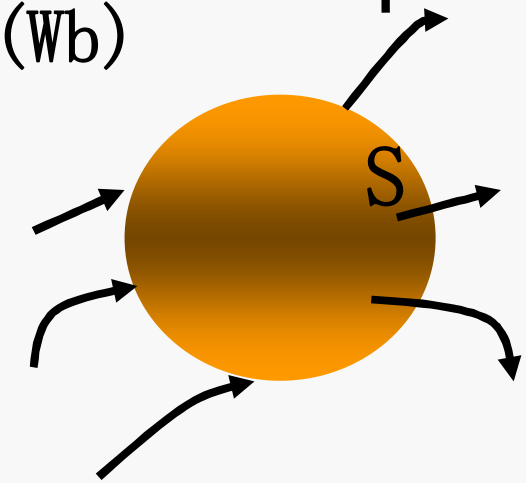
$$d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

单位：韦伯(Wb)



二、磁场的高斯定理



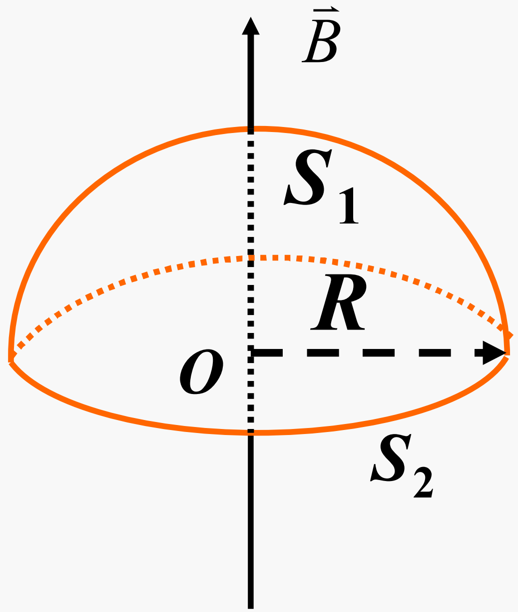
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

磁场的高斯定理

微分形式 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

无源场

1. 求均匀磁场中半球面的磁通量

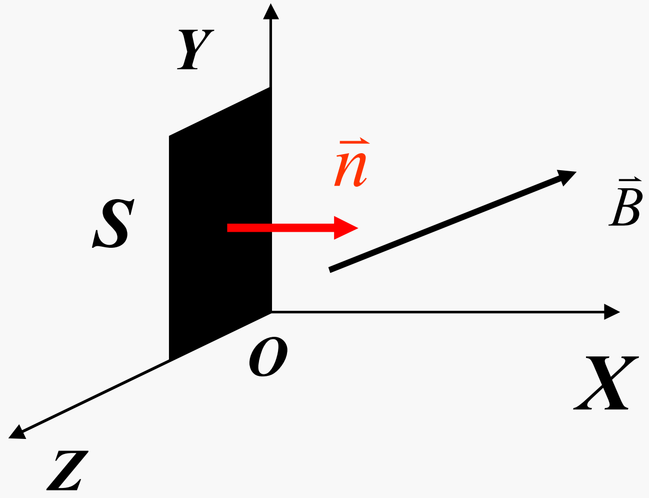


$$\Phi_{S_1}+\Phi_{S_2}=0$$

$$\Phi_{S_1}+(-B\pi R^2)=0$$

$$\Phi_{S_1}=B\pi R^2$$

2. 在均匀磁场 $\vec{B}=3\vec{i}+2\vec{j}$ 中，过*YOZ*平面内面积为*S*的磁通量。



$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{s}=\vec{B}\cdot\vec{S}$$

$$=(3\vec{i}+2\vec{j})\cdot S\vec{i}$$

$$=3S$$

8.3 安培环路定理

一、安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内}} \Rightarrow$$

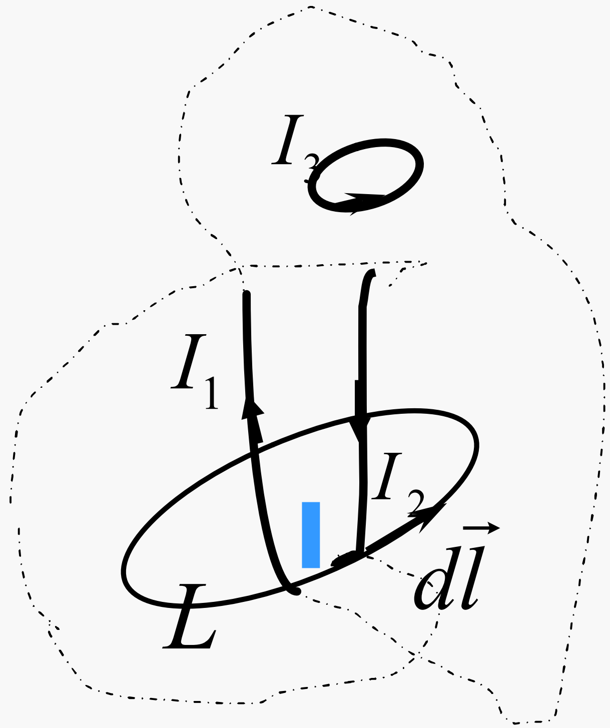
安培环路定理

在恒定磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿任一闭合环路的线积分，等于穿过该环路的所有电流的代数和的 μ_0 倍。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内}$$

$\vec{B}\cdots$ 空间所有电流共同产生的

$L\cdots$ 在场中任取的一闭合线
任意规定一个绕行方向



电流分布

$d\vec{l}\cdots$ L上的任一线元

$I_{内}\cdots$ 与L套连的电流

如图示的 I_1 I_2

$\sum_i I_{i内}\cdots$ 代数和

与L绕行方向成右螺电流取正

如图示的电流 I_1 取正 I_2 取负

二、安培环路定理的证明(略）

三．安培环路定理在求解磁场方面的应用

步骤： 1) 由电流的分布来分析磁场分布的对称性；

2) 选择合适的闭合路径 L ，使得沿路径的矢量积分可化为标量积分(具体实施，类似于电场强度的高斯定理的解题)。

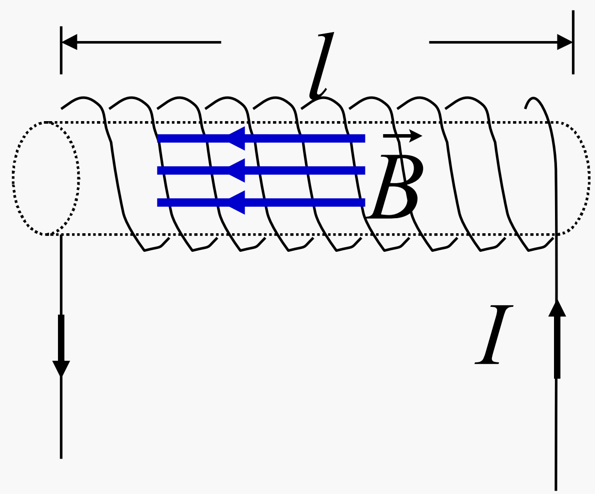
例1 求密绕长直螺线管内部的磁感强度

总匝数为N　总长为 l

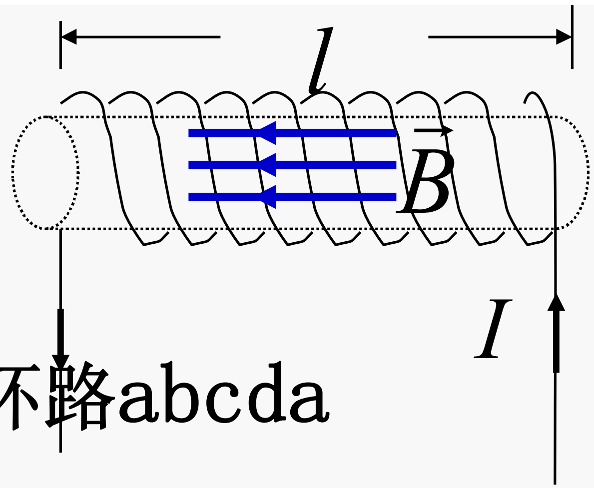
通过稳恒电流　电流强度为 I

分析对称性 知内部场沿轴向

方向与电流成右手螺旋关系



由磁场的高斯定理可得 $B_{内} >> B_{外}$



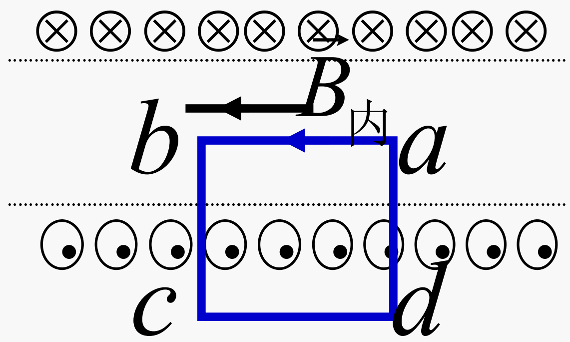
取过场点的每个边都相当小的矩形环路abcda

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B}_{内}\cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B}_{外}\cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= B_{内}\overline{ab}$$

由安培环路定理

$$= \mu_0 \frac{N}{l}\overline{ab} I \qquad n = \frac{N}{l}$$



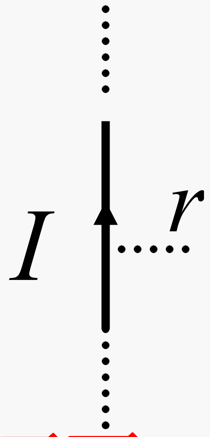
$$\Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n I}$$

均匀场

由安培环路定理可解一些典型的场

无限长载流直导线

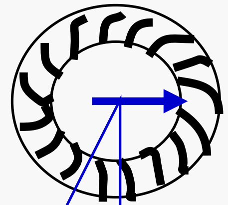
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



密绕螺绕环

匝数

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

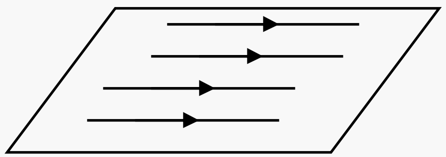


场点距中心的距离 r

无限大均匀载流平面

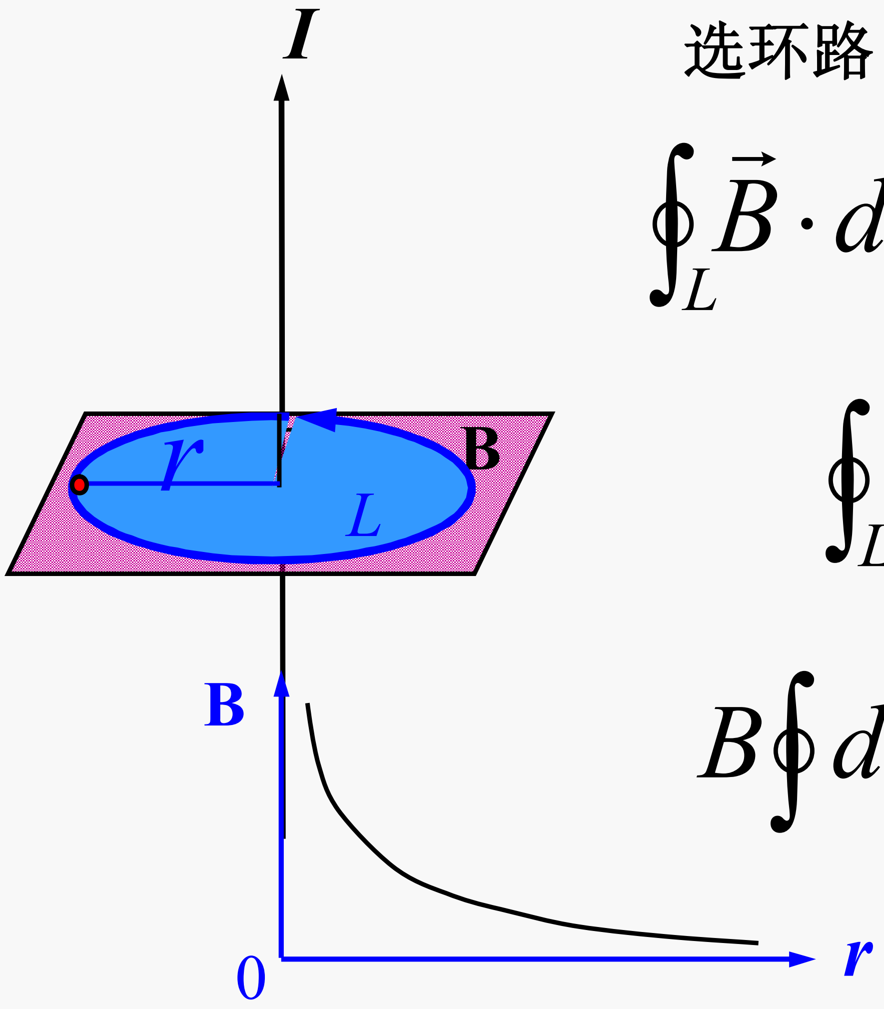
$$B=\frac{\mu_0 j}{2}$$

(面)电流的(线)密度



例　求：无限长直线电流的磁场　☆

解：对称性分析——磁感应线是在垂直平面上的同心圆。



选环路

$$d\vec{l}\ //\ \vec{B}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\oint_L B dl = \mu_0 I$$

$$B\oint dl = 2\pi\, rB$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

方向：切线

例. 环形载流螺线管

已知：I 、N、R_1、R_2

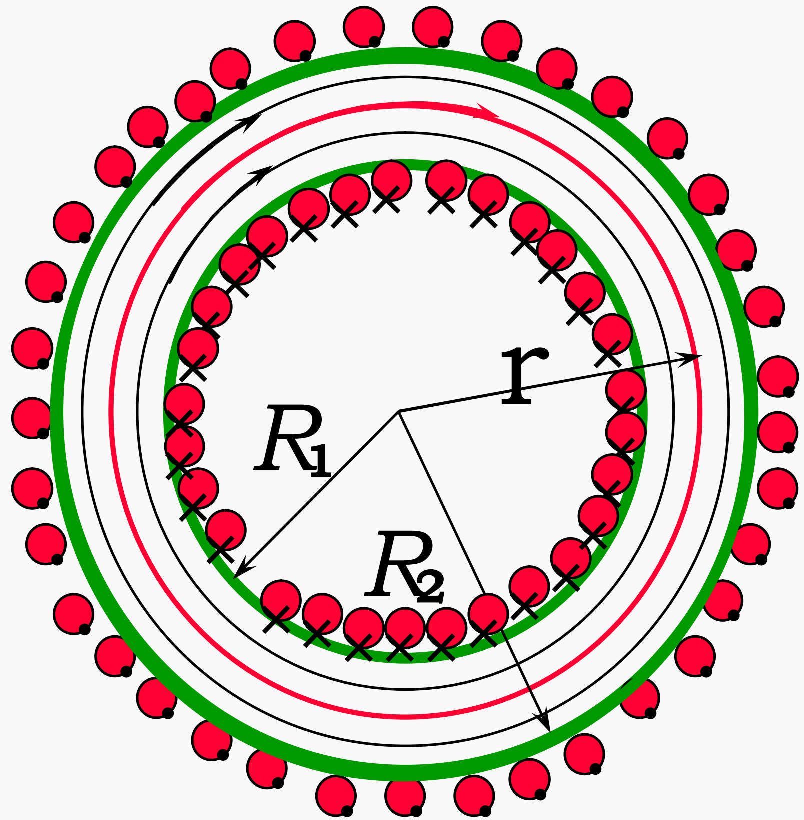
N——导线总匝数

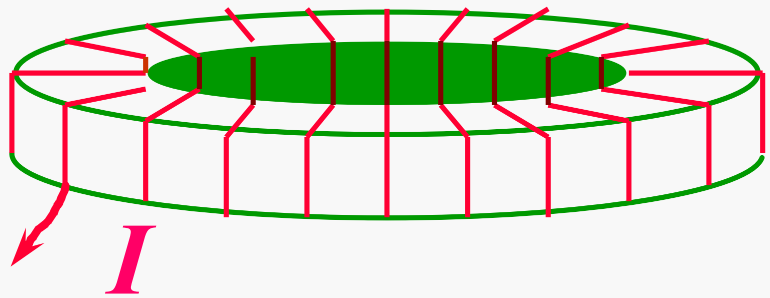
分析对称性

磁感应线分布如图

作积分回路如图

方向 右手螺旋



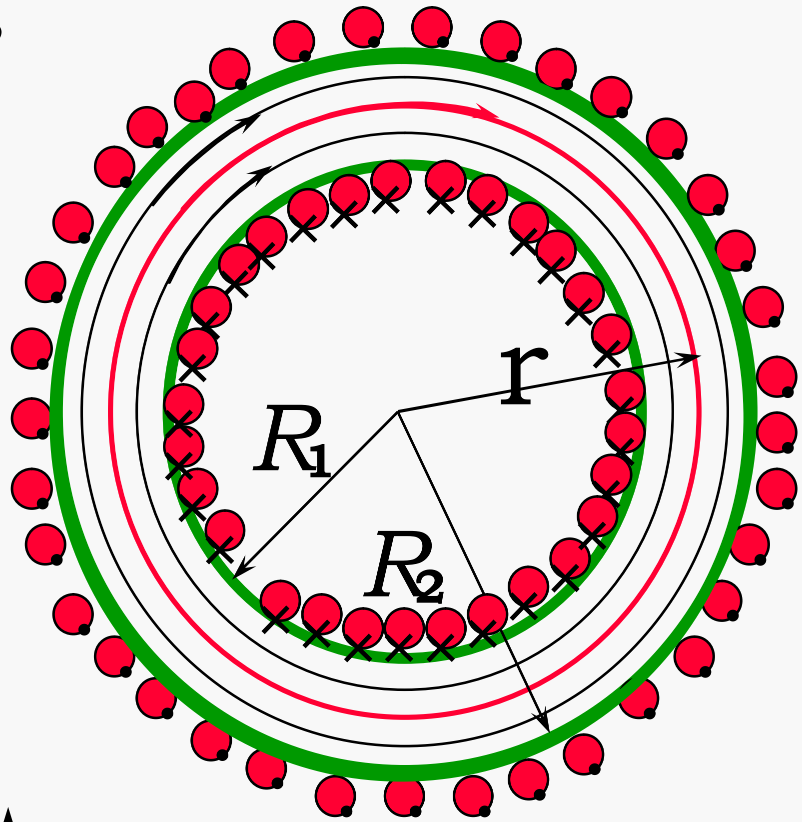


计算环流 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B dl = 2\pi r B$

利用安培环路定理求 $\vec{B}$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

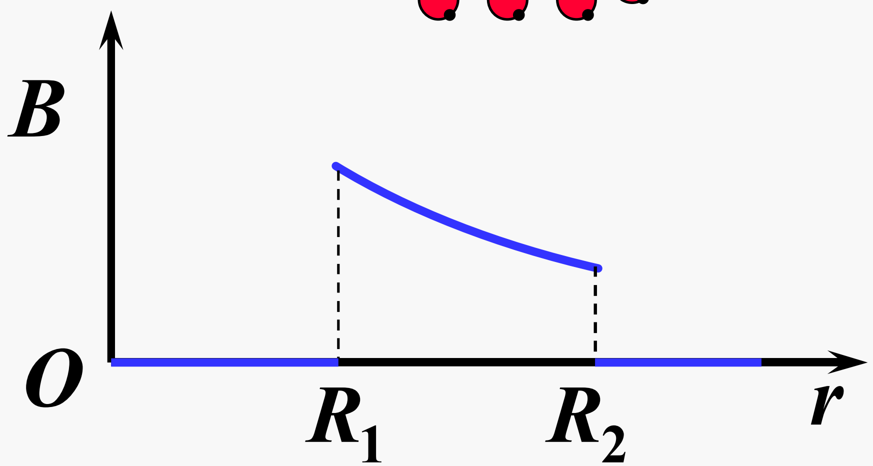
$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} & \text{内} \\ 0 & \text{外} \end{cases}$$



R_1、$R_2 >> R_1 - R_2$

$$n = \frac{N}{2\pi R_1}$$

$$B \approx \mu_0 nI$$



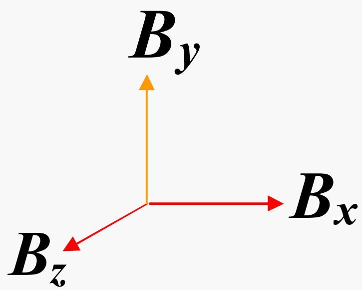
例无限大平面电流的磁场分布

$\vec{j}$ 一面电流密度矢量

解

$B_x = B_y = 0$

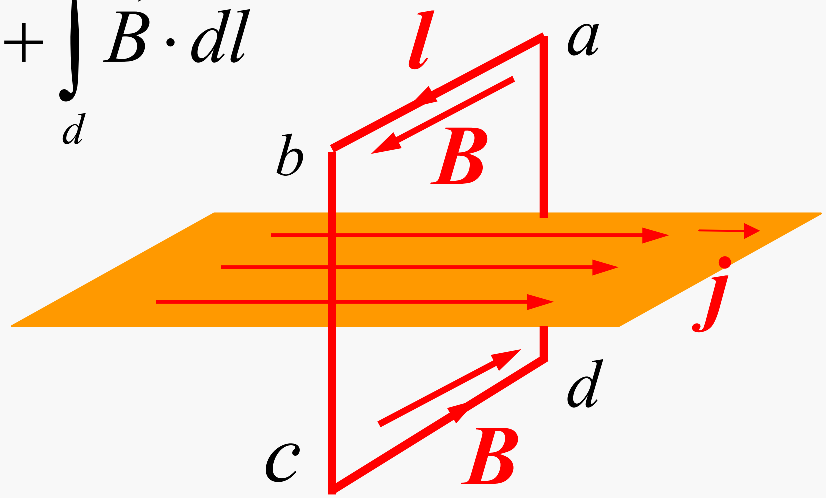
积分环路 l $\quad B_{ab} = -B_{cd} = B$



$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b Bdl + \int_c^d Bdl = 2B\overline{ab}$$

$$\mu_0 \sum I_i = \mu_0 j \overline{ab}$$



无限大均匀平面电流两侧的磁场是均匀磁场，大小相等，方向相反。

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

例 求均匀载流无限长圆柱导体内外的磁场分布 ☆

解

对称性分析 $(d\vec{B}+d\vec{B}^{/})$

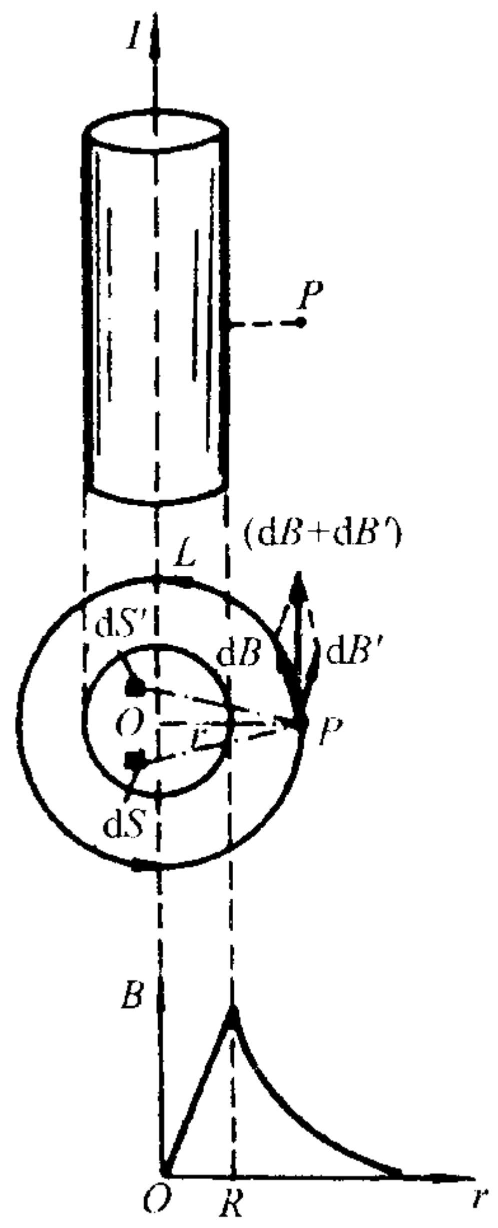
选取积分环路 L

计算环路积分

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L Bdl = B\oint_L dl = B2\pi r$$

计算电流 $r>R \quad \sum I_i = I$

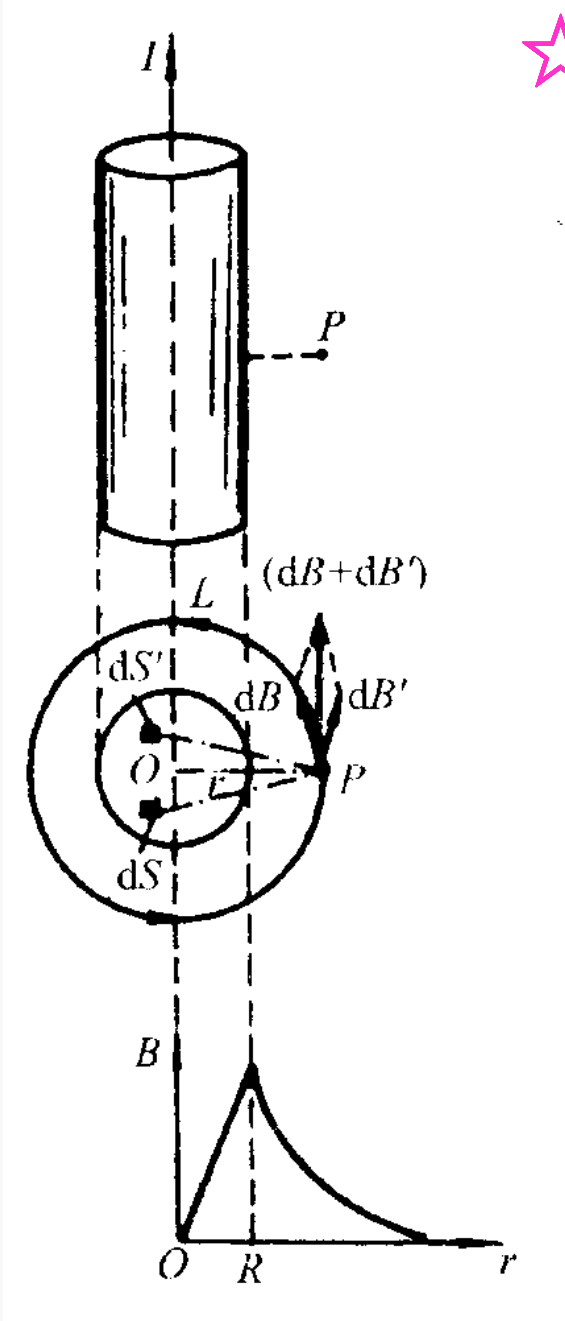
$r<R \quad \sum I_i = \dfrac{I}{R^2}r^2$



应用环路定理计算磁场

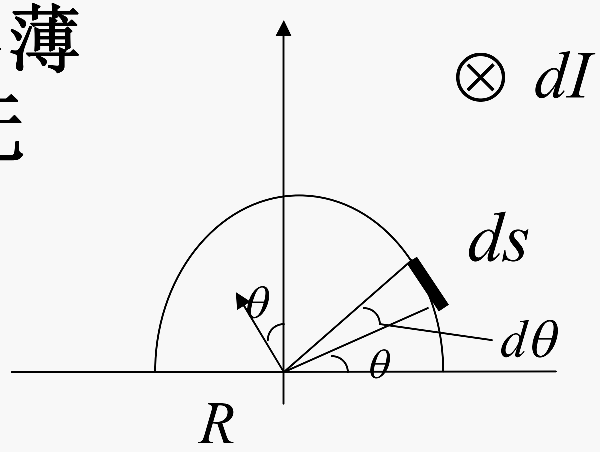
$r > R$ $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r < R$ $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$



例题：无限长半圆筒形金属薄片轴线上任一点的 磁感应强度。I 均匀分布。

分析：可将无限长半圆形金属薄片分割为无限个 ds 宽，长为无限长的小条,电流强度为dI



求出这些无限长小条在圆心的磁感应强度，叠加。

安培环路定理：$dB = \dfrac{\mu_0 dI}{2\pi R}$ 其中 $dI = \dfrac{I}{\pi R} ds = \dfrac{I}{\pi R} R d\theta = \dfrac{I}{\pi} d\theta$

方向如图

对称分析，垂直分量互相抵消，只有水平分量(x)

$$B_x = \int dB_x = \int dB \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi R} .. \frac{I}{\pi} \sin\theta . d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

8.4 带电粒子在磁场中的运动

本节主要讨论带电粒子在洛仑兹力的作用下的轨迹问题。

带电粒子的电量为 q ，速度为 $\vec{v}$，在磁场中受的洛仑兹力：

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB\sin\theta$$

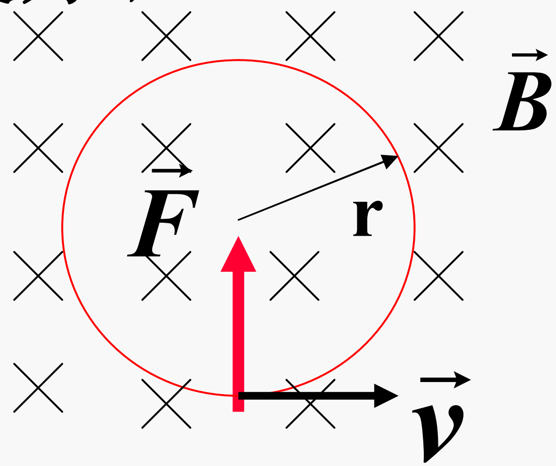
磁力始终与粒子的运动速度垂直，所以磁力对运动电荷不做功，动能也不会改变。

磁力(洛仑兹力)只改变粒子的速度方向，而不改变速度的大小。

一、带电粒子在均匀场中的运动

带电粒子，质量 m，电量为 q，速度为 $\vec{v}$。

1) $\vec{v} \perp \vec{B}$



$\boxed{F = qvB}$ ⇨ 粒子受到的洛仑兹力最大

此力做为粒子的向心力，粒子做匀速圆周运动

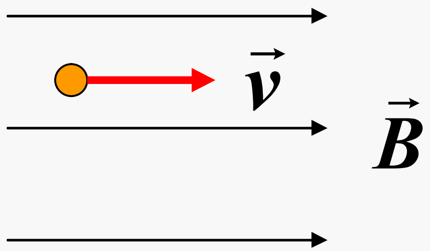
$$qvB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{mv}{qB}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\, m}{qB}}$$

$$T, \omega \begin{cases} \text{与}\vec{v}\text{无关；} \\ T \propto m, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{B} \end{cases}$$

2) $\vec{v} \mathbin{/\!/} \vec{B}$

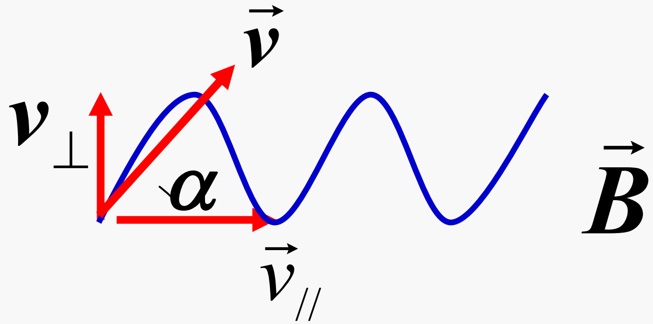
粒子受的洛仑兹力为零，粒子还按原来的速度做匀速运动。



3) $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 成夹角 $(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \alpha$

$\boxed{v_{/\!/} = v\cos\alpha}$ 匀速直线运动

$\boxed{v_{\perp} = v\sin\alpha}$ 匀速圆周运动



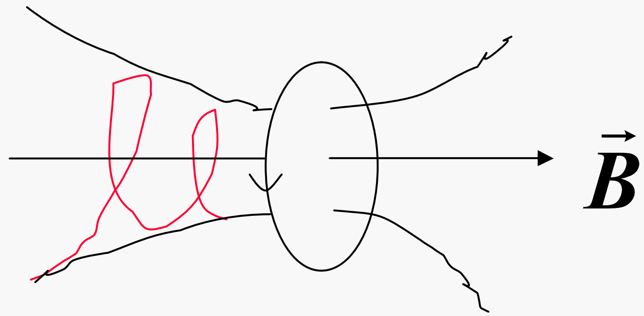
合成的结果是带电粒子将做等螺距的螺线轨道运动。

$$\boxed{R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}} \qquad \boxed{h = \frac{2\pi mv}{qB}\cos\alpha}$$

二、带电粒子在非均匀磁场中的运动　不讲

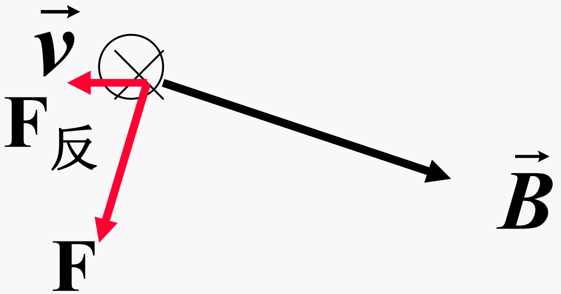
研究带电粒子在载流圆线圈产生的磁场中运动

$$\boxed{R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}}\qquad \boxed{h = \frac{2\pi\, mv}{qB}\cos\alpha}$$



带电粒子其速度方向和磁场不同时，它就要做半径和螺距都将不断发生变化的螺线运动。

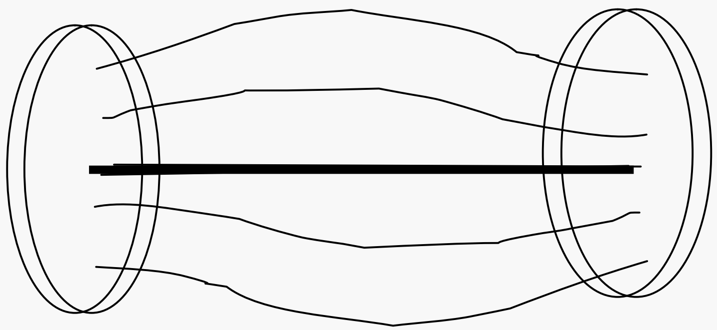
考虑粒子向磁场较强方向旋进时的情况：



粒子受到一个和前进方向相反的分量，这一分量能最终使粒子的速度减小到零，并继而沿相反方向前进。

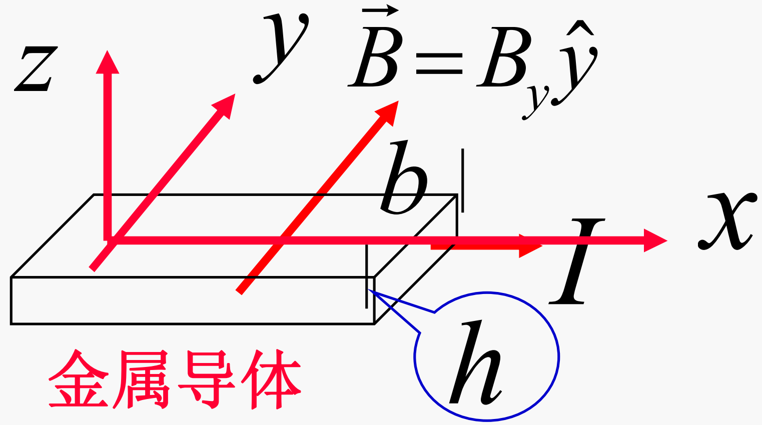
强度逐渐增加的磁场能使粒子发生“反射”，因而把这种磁场分布叫**磁镜**。

两个电流方向相同的线圈产生一个中间弱两端强的磁场，使速度不太大的带电粒子将被约束在两个磁镜之间的磁场内来回运动(反射)而不能逃逸，这种约束带电粒子的磁场分布叫**磁瓶**。



三、霍耳效应

1897年美国物理学家霍耳发现：对应图中沿 ***Z*** 方向有电势差。这种现象称为霍耳效应，这电势差称为霍耳电势差。



实验测定霍耳电势差：

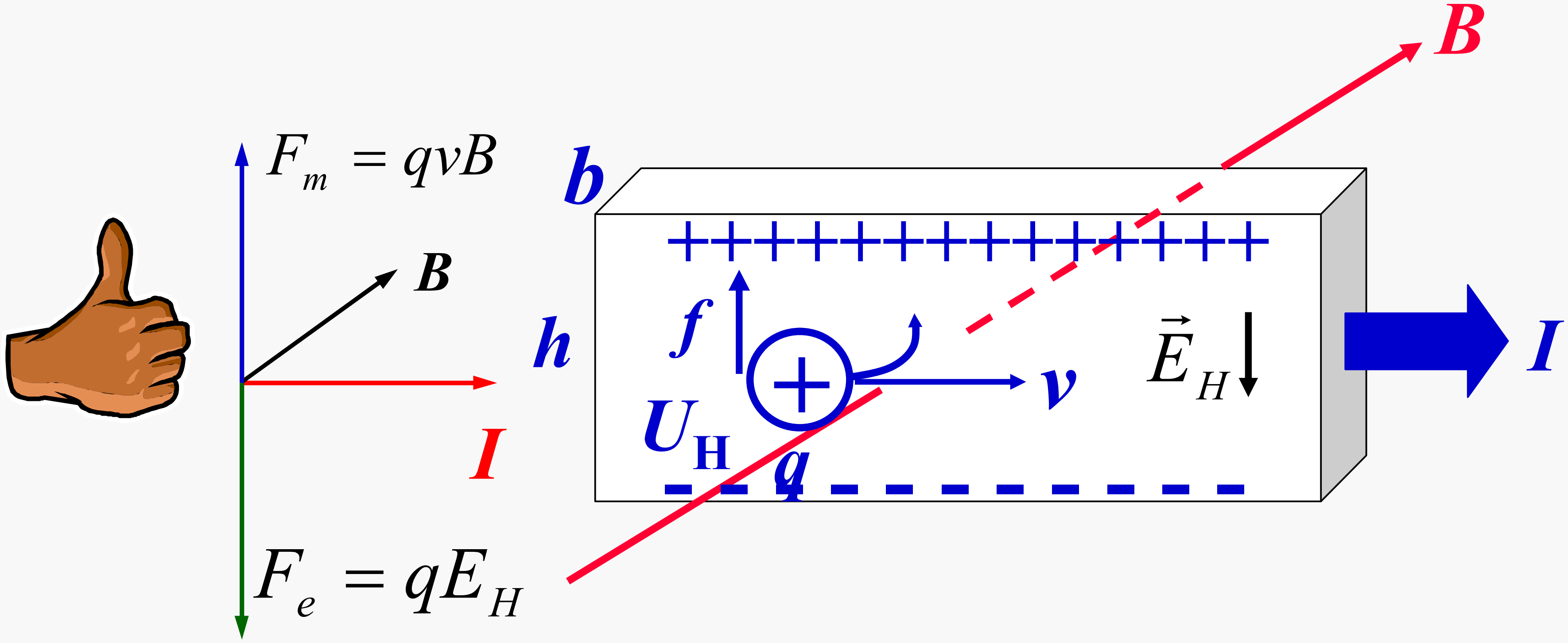
$$\boxed{U_H = R_H \frac{IB}{b}}$$

霍耳系数 R_H

可以用带电粒子在磁场中受力解释，

精确的解释只能用电子的量子理论。

霍尔（Hall）效应的解释 ☆

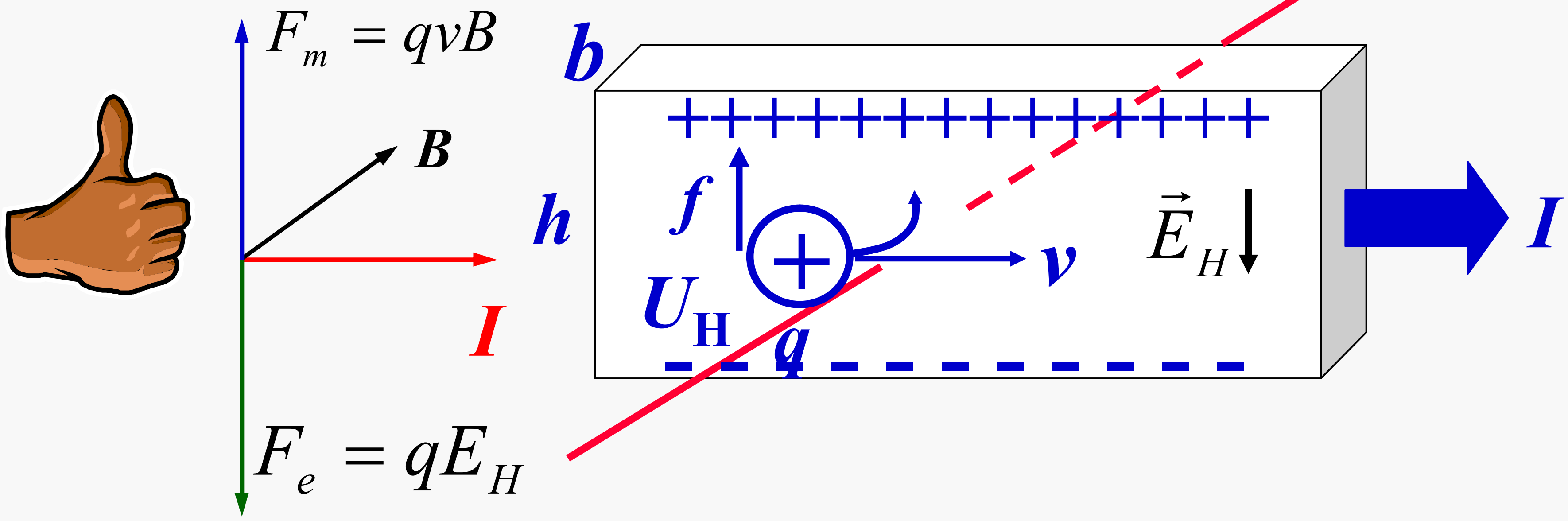


平衡：$$f = F_e - F_m = qE_H - qvB = 0$$

$$\boxed{E_H = vB}$$

$$E_H = vB$$

☆



$$U_H = E_H h = vBh$$

$$I = n \cdot q \cdot bh \cdot v$$

横向电势差

$$U_H = \frac{IB}{nqb}$$

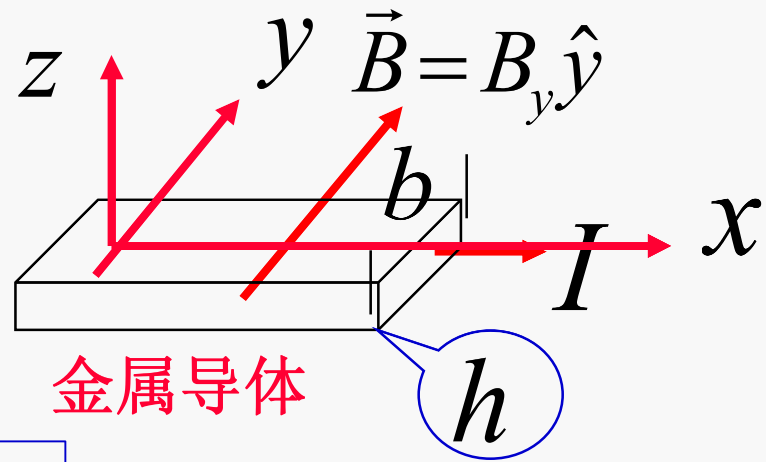
霍尔系数

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

霍耳效应的应用：

1.判定导电机制

2.测量未知磁感强度



因为：

$$\boxed{R_H=\frac{1}{nq}}$$

此系数决定于载流子的正负，因此实验测定霍耳电势差，就可判断载流子的正、负。

对半导体，用这个方法判定它是空穴型还是电子型导电，还可确定载流子的浓度。