9.3 自感、互感现象

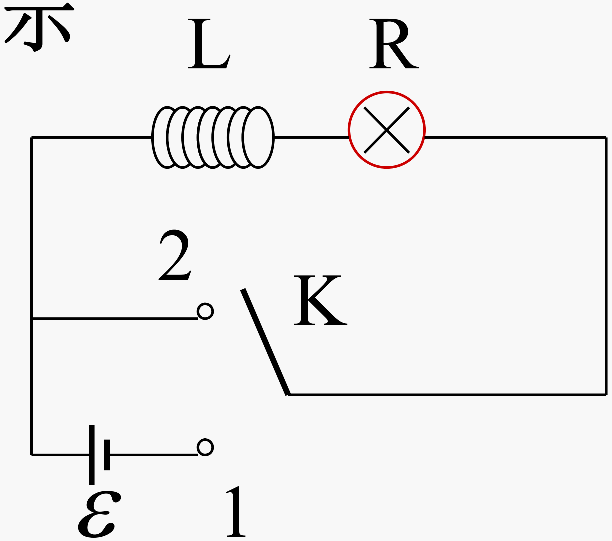
实际线路中的感生电动势问题

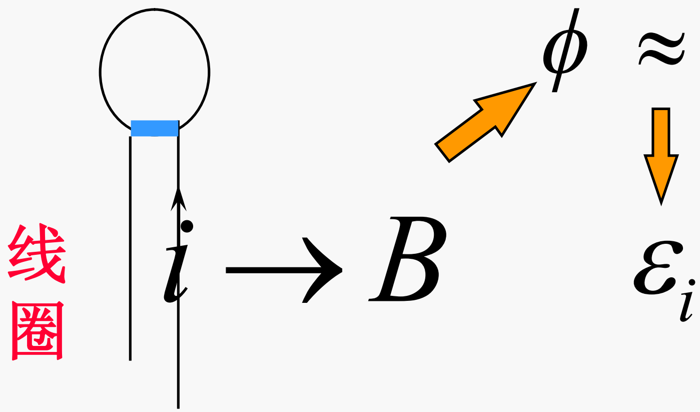
一. 自感现象　自感系数

反抗电流变化的能力

(电惯性)

演示





K连接1，R慢慢亮；
在拨向2，R慢慢熄

由于自己线路中的电流的变化　而在自己的

线路中产生感应电流的现象——自感现象

自感系数的定义

非铁磁质　$I \rightarrow \vec{B} \rightarrow \psi \propto I \rightarrow \psi = LI$

由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{L = \frac{\psi}{I}}$$

单位：H亨利

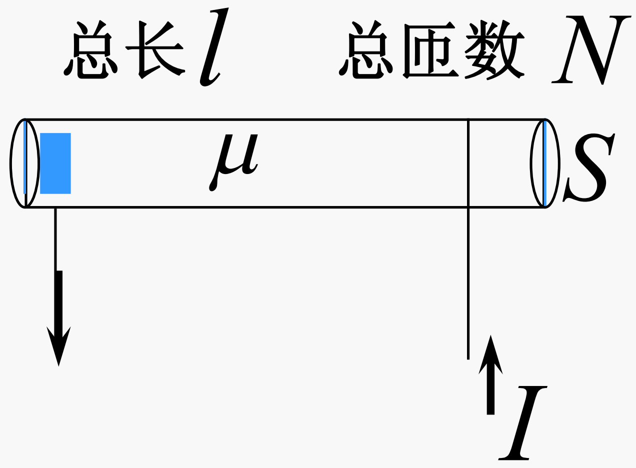
$$\boxed{L = -\frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}}$$

单位电流的变化对应的感应电动势

普通定义

例：求长直螺线管的自感系数

几何条件如图



解：设通电流 I

$$\boxed{B=\mu n I=\mu\frac{N}{l}I}$$

$$\psi=N\phi=NBS$$

$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}=\frac{\mu N^{2}S}{l}}$$

几何条件

介质

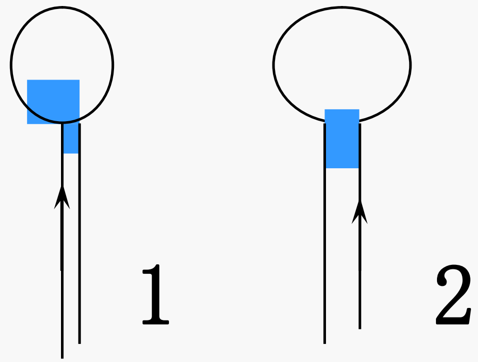
固有的性质

电惯性

二. 互感现象　互感系数

第一个线圈内电流的变化，引起线圈2内的电动势

$$i_1 \rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \psi_{21} \Rightarrow \varepsilon_{21}$$



非铁磁质 $\longrightarrow \psi = MI$

$$\boxed{M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1}}$$

同样有

$$\boxed{M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2}}$$

单位：H 亨利

可以证明 $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$ 互感系数

由法拉第电磁感应定律有

$$\boxed{\varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}}$$

$$\boxed{M = -\frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt}}$$

普遍

例 一横截面为 S 的圆柱形非铁磁性材料，磁导率为 μ，其上绕有长度都为 l 的两组线圈。原线圈C_1为N_1匝，副线圈C_2为N_2匝；

求：1) 两共轴螺线管的互感系数；

2) 两个螺线管的自感与互感的关系。

解：1) 设原线圈C_1中通电流 I_1

其在 原、副线圈中产生的磁感应强度为：

$$B=\mu n_1 I_1=\mu \frac{N_1}{l} I_1$$

穿过C_2线圈中的全磁通：$\psi_{21}=N_2 BS=\mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$

互感系数为：$\boxed{M=\frac{\psi_{21}}{I_1}=\mu \frac{N_1 N_2}{l} S}$

2) C_1中有 I_1 时，穿过自己的全磁通：

$$\psi_{11} = N_1 B_1 S = N_1 \mu \frac{N_1}{l} I_1 S$$

自感系数为：$$\boxed{L_1 = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \mu \frac{N_1^2}{l} S}$$

同理：$$\boxed{L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} S}$$ $$\boxed{\therefore \quad L_1 L_2 = M^2}$$

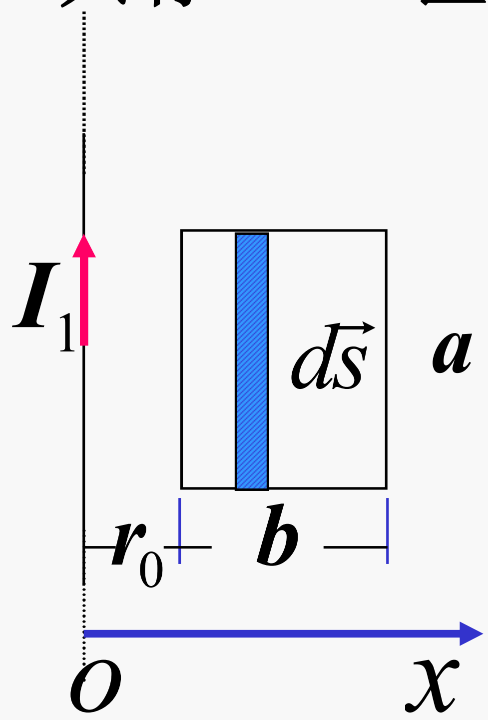
$$\boxed{M = \sqrt{L_1 L_2}}$$ ➡ 理想耦合。是某线圈的磁场全部通过另一线圈。

一般情况：$$\boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

k 称为耦合系数

通常为 $0 < k < 1$

例 一无限长直导线附近有一矩形线圈，共有N=100匝，且 $a = 0.1$m， b=0.06m， r_0=0.12m ；求：互感系数M



解：设长直导线中通有电流为 I_1

建坐标系如图

在任意坐标处取一面元 $d\vec{s}$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\psi_{21} = N\phi = N\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\int_S B ds = N\int_{r_0}^{r_0+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} a dx$$

$$= \frac{\mu_0 N I_1 a}{2\pi} \ln \frac{r_0 + b}{r_0}$$

$$M=\frac{\psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0 Na}{2\pi}\ln\frac{r_0+b}{r_0}$$

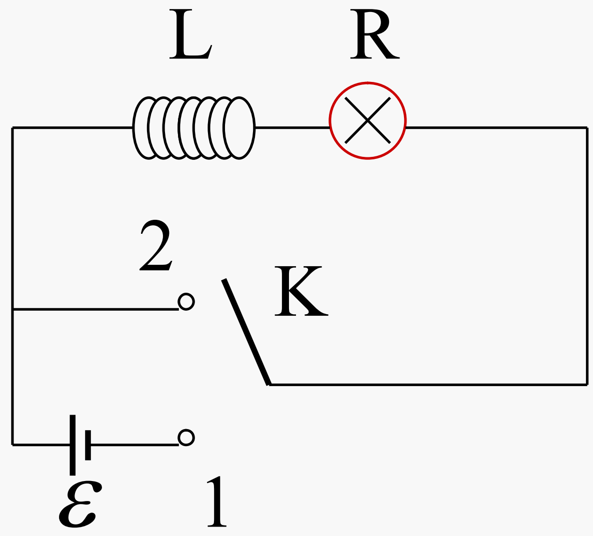
$$=\frac{100\times 4\pi\times 10^{-7}\times 0.1}{2\pi}\,ln\,\frac{0.18}{0.12}$$

$$=2\times 10^{-6}\,ln\,\frac{3}{2}=0.81\times 10^{-6}(H)$$

总结：在计算互感系数(包括自感系数)时，先假定某路中通以电流 I_1，计算它所产生的 B，然后计算它穿过另一回路（自身回路）的磁通，利用 $\psi_{21}=MI_1$（$\psi_{11}=LI_1$） 计算互感系数和自感系数。

例题：***L-R*电路**

求K与1接通电流的变化情况；电流稳定后K在拨向2电流的变化



1. K与1连接；

有： $$\varepsilon+\varepsilon_L=\varepsilon-L\frac{di}{dt}=Ri$$

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}i(t)=\frac{\varepsilon}{L}$$

初始： $t=0;i=0$

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=I_m(1-e^{-t/\tau})$$

$\tau=L/R$ 时间常数

2. K与2连接；

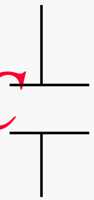
$$\varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}=Ri$$

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=I_m e^{-t/\tau}$$

结论：**K**合上与断开，电流不是突变过程，是一滞后过程，有时间常数决定

9.4 磁场能量

静电场　　能量存在器件中

C 

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

通过平板电容器得出下述结论

存在场中

$$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

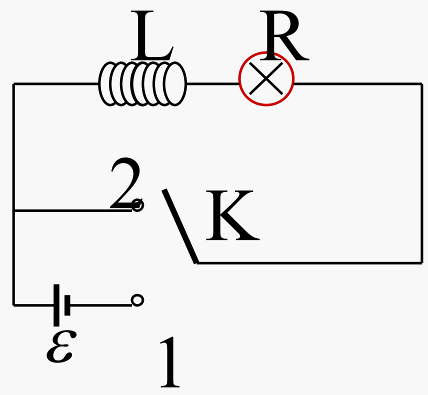
同样，一载流线圈在其磁场中也储存着一定的能量。

一、载流线圈的磁能

载流线圈周围无铁磁质，且 μ 无变化。

1）当开关 1 时，电路中的电流从 0 增加到 I 时，线圈的自感为 L，线圈中会产生感应电动势

$$\varepsilon_L = -L\frac{di(t)}{dt}$$



在建立电流的过程中，电源克服自感电动势作功，dt 时间内作功为：

$$dA = -\varepsilon_L dQ = -\varepsilon_L idt = Lidi$$

在电流从 0---I 这段时间内，电源所做的总功：

$$A = \int dA = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

电源克服自感电动势所做的功就等于磁场的能量

当线圈中电流为 I 时，其磁场能量为

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

2) 当开关 2 时，线圈中的电流从 I 变为 0，

自感电动势要做正功：

$$A' = \int dA' = \int_I^0 -Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

自感电动势做功是以自己的磁能损失为代价的

对一个线圈，其自感系数为 L，电流为 I，则磁能为：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

二．$W_m \sim B$、H 的关系？

长直螺线管为例

$$\left.\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} L I^2 \\ L &= \mu n^2 V \end{aligned}\right\} W_m = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2 V$$

$$\left.\begin{aligned} B &= \mu n I \\ H &= n I \end{aligned}\right\} BH = \mu n^2 I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} BHV$$

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

磁场的能量密度

一般对于非均匀磁场，可将空间分割为dV小区，dV范围内B、H均匀

$$\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2} BH\mathrm{d}V$$

$$W_m = \int_0^{W_m} \mathrm{d}W_m = \frac{1}{2}\int_V BH\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\int \mu H^2 dV$$

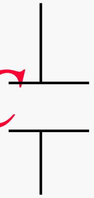
三. 比较

$\vec{E},\vec{D}$ $\quad\quad$ $\vec{B},\vec{H}$

类比

静电场	稳恒磁场

能量存在器件中

C 

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2$$

 L

通过平板电容器得出下述结论

通过长直螺线管得出下述结论

存在场中

$$\boxed{w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

$$\boxed{w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

在电磁场中 $\quad w=w_e+w_m$

总能量

$$\boxed{w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

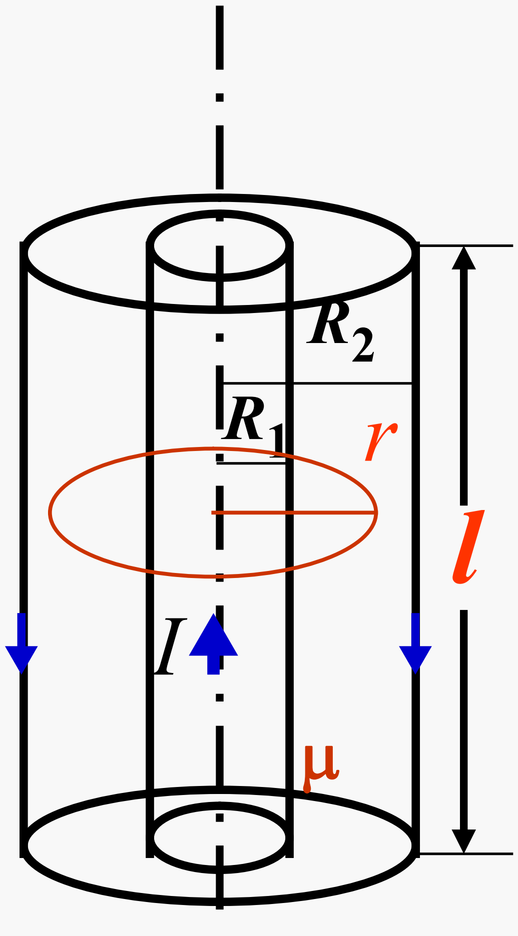
普遍适用

$$W=\int_V w\,dV$$

各种电场 磁场

例题 长直同轴电缆。已知R_1、R_2，填充介质均匀各向同性，电流在两柱面上均匀分布。

求：（1）l 长段电缆W_m；（2.）电缆的自感系数L



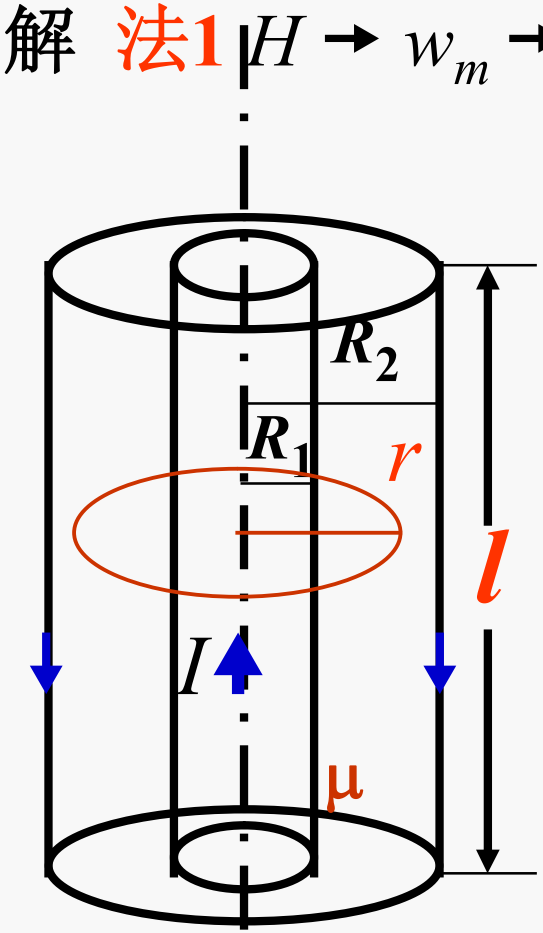
解：法1 $H \rightarrow w_m \rightarrow W_m \rightarrow L$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I \begin{cases} = I & (R_1 \geq r \geq R_2) \\ = 0 & (\text{其 他}) \end{cases}$$

$$2\pi r H$$

$$H = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r} & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

解 法1 $H \to w_m \to W_m \to L$



$$H = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r} & (R_1 \le r \le R_2) \\ 0 & （其\quad 他\quad） \end{cases}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r\mathrm{d}r l$$

$$W_m = \int w_m \mathrm{d}V$$

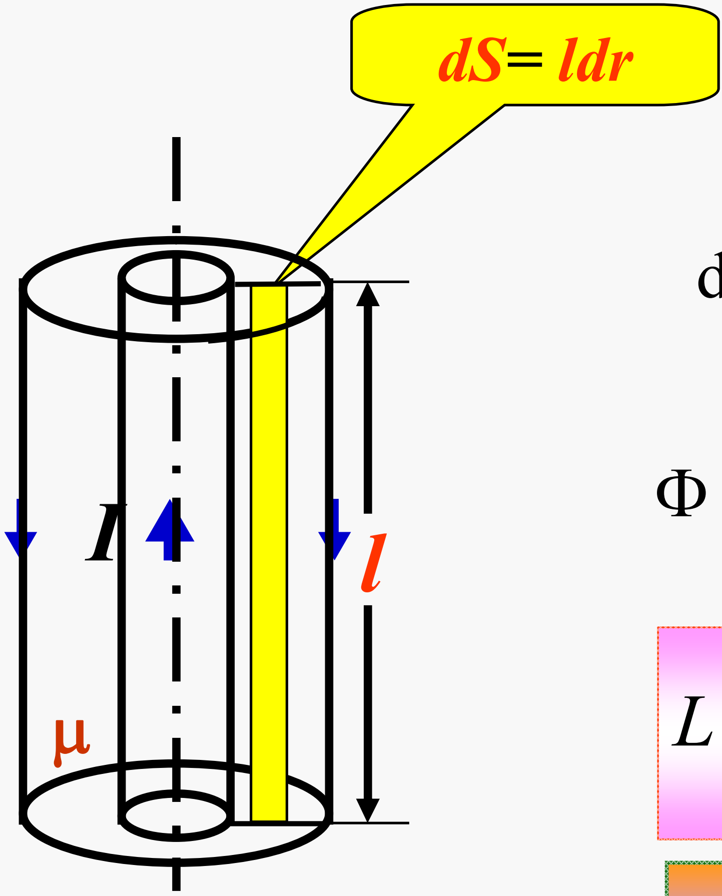
$$= \frac{\mu I^2 l}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

解：法2 $H-B-\Phi-L-W_m$



$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu I}{2\pi r} & (R_1\le r\le R_2)\\ 0 & （其他）\end{cases}$$

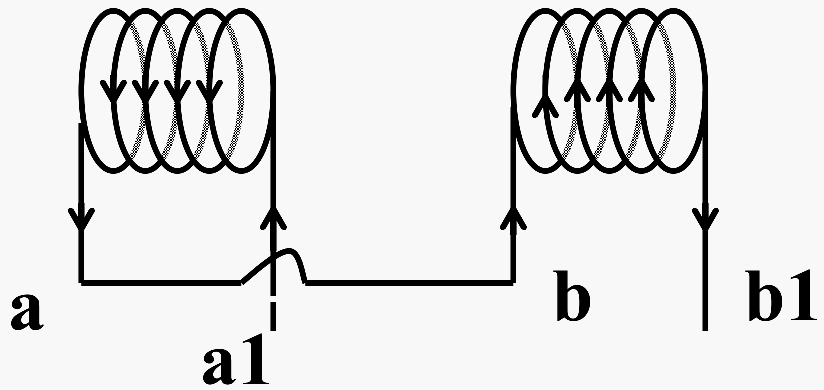
$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例题：两个一样的线圈（L相等）串联，如图的连接方式，求：自感系数(两个线圈密绕，无漏磁）



分析：可设电流如图方向，（电流相等）两个线圈中电流相反；**a**线圈中的自感电动势 ε_a 应与**b**线圈对于**a**线圈的互感电动势 ε_{ba} 方向相反。

即：$$\varepsilon_a - \varepsilon_{ba} = -\left(L_a \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}\right)$$

同理，线圈**b**中有：

$$\varepsilon_{ab} - \varepsilon_b = -\left(M \frac{dI}{dt} - L_b \frac{dI}{dt}\right)$$

注意：ε_a与 ε_b 方向相反

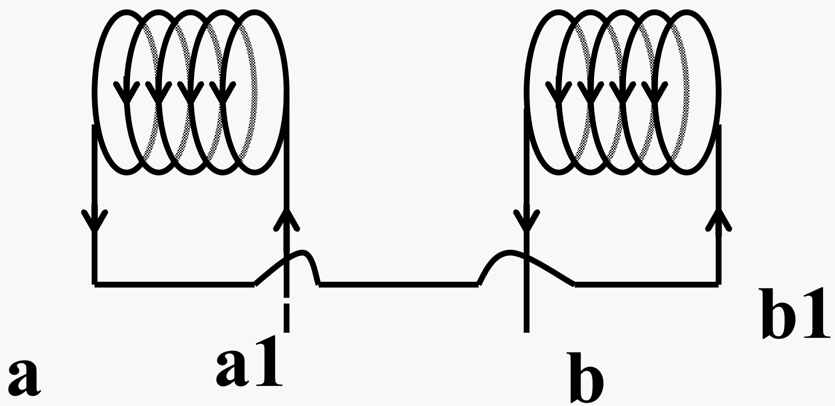
另外：线圈密绕，无漏磁，有：$M = \sqrt{L_a L_b}$

组成新的线圈总的电动势：

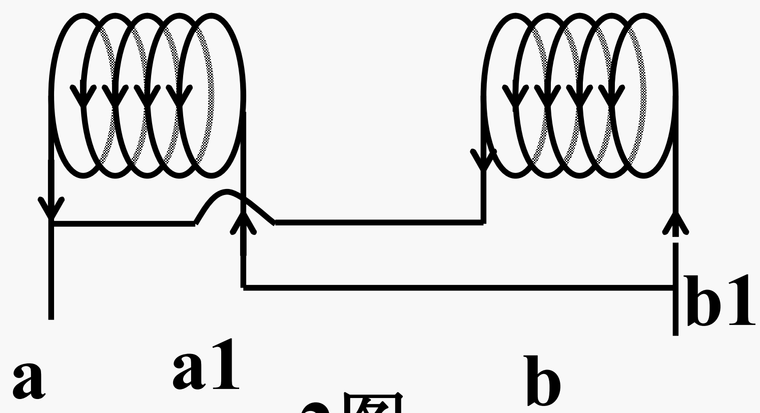
$$\varepsilon=\varepsilon_a-\varepsilon_{ba}+\varepsilon_{ab}-\varepsilon_b=-L\frac{dI}{dt}$$

$$=-(L_a-M+M-L_b)\frac{dI}{dt} \qquad \therefore L=\ldots\ldots=0$$

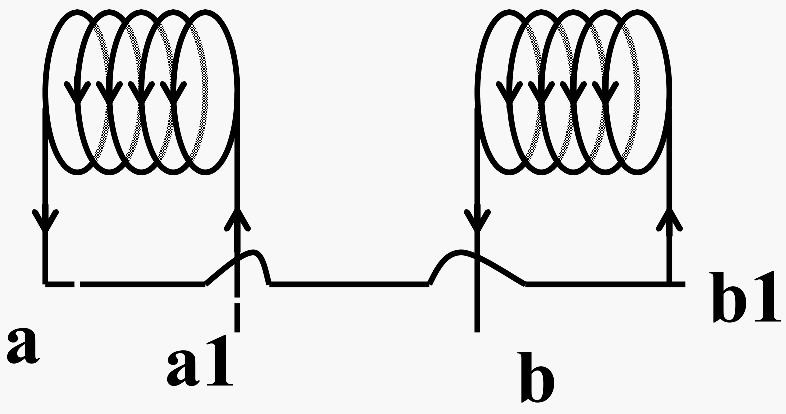
讨论：若如下图连接，又如何？



1图



2图



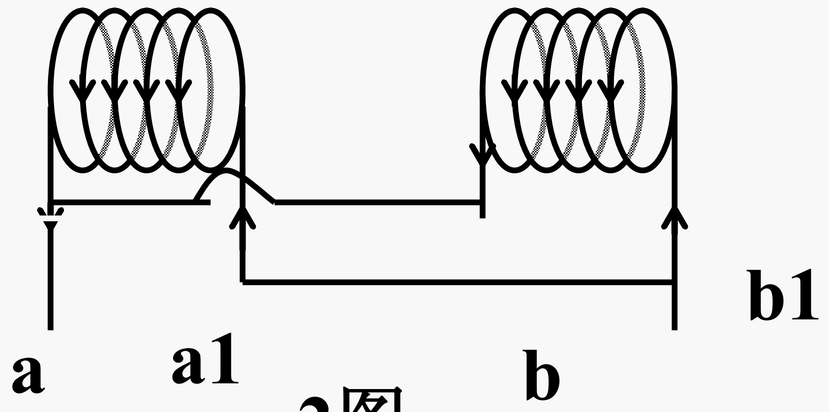
1图

如图1连接：在线圈中电流方向一致，仍是串联，有：

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_a + \varepsilon_{ba} + \varepsilon_b + \varepsilon_{ab}\right) = -L\frac{dI}{dt}$$

$$= -\left(L_a + M + L_b + M\right)\frac{dI}{dt}$$

$$L = 4L_a (L_a = L_b = M)$$



2图

图 2时并联情况

电流在两个线圈中方向一致

$$\varepsilon_a + \varepsilon_{ba} = -\left(L_a \frac{dI_a}{dt} + M \frac{dI_b}{dt}\right)$$

有： $I = I_a + I_b$

$$\varepsilon_b + \varepsilon_{ab} = -\left(L_b \frac{dI_b}{dt} + M \frac{dI_a}{dt}\right)$$

得： $L = L_a = L_b$

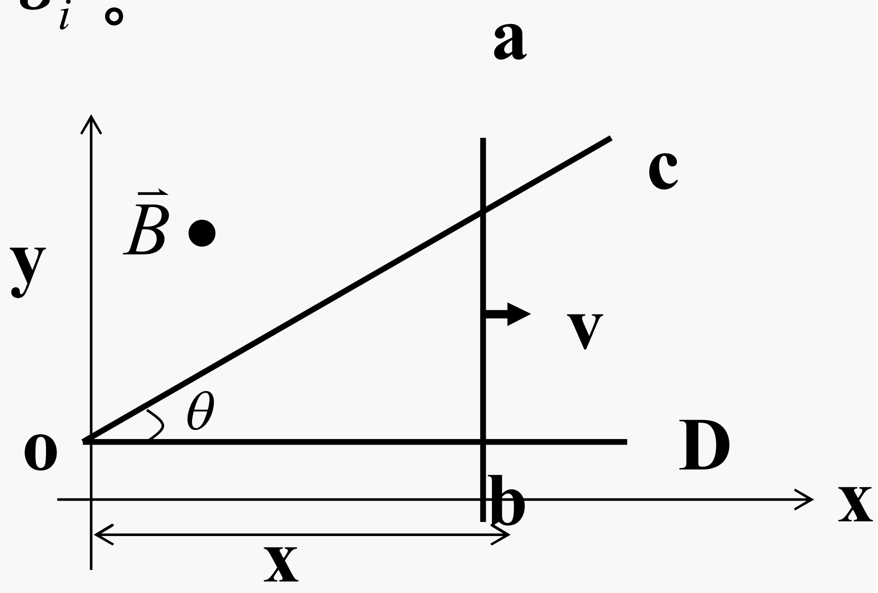
$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_{ba} = \varepsilon_b + \varepsilon_{ab}$$

注意：此类问题搞清串、并联的关系，电压，电流
…

简化计算： $L_a = L_b = M$

$I_a + I_b = I$

例题2：如图，有一弯成 θ 角的金属框架OCD,一导线ab (ab垂直与OD)以恒定速度v在金属框架上滑动，设v垂直于ab向右，已知磁场的方向垂直扳面向外，求下列情况框架内感应电动势 ε_i 。



设：t=0 时，x=0

1.磁场均匀分布，B不随时间改变

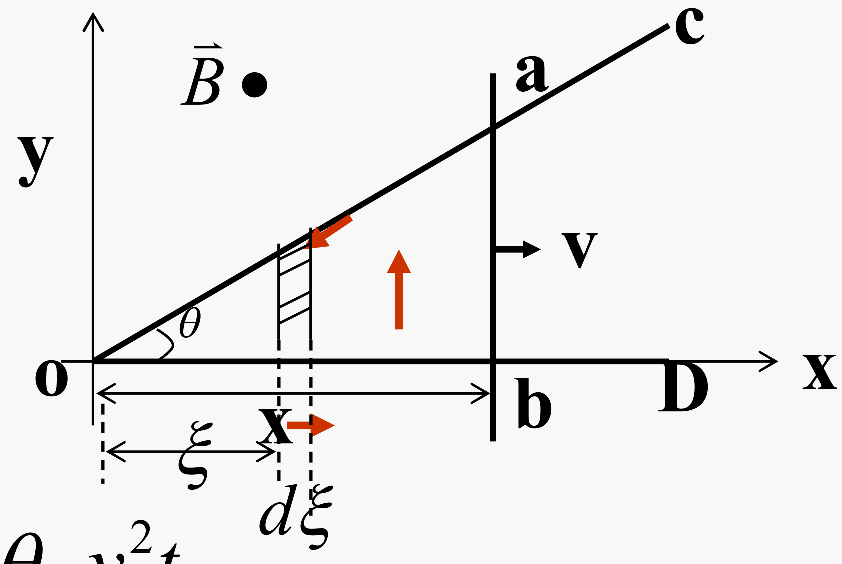
2.非均匀变化的磁场

$$B = kx\cos\omega t$$

解：取坐标系如图

1.导线ab 在均匀磁场中运动，动生电动势就是框架中的感应电动势

t： **ab在x位置**



$$\overline{ab} = l = xtg\theta$$

相应的动生电动是:

$$\varepsilon_i = -Bvl = -Bvxtg\theta = -Btg\theta \cdot v^2 t$$

$(x = vt)$ 方向有a到b

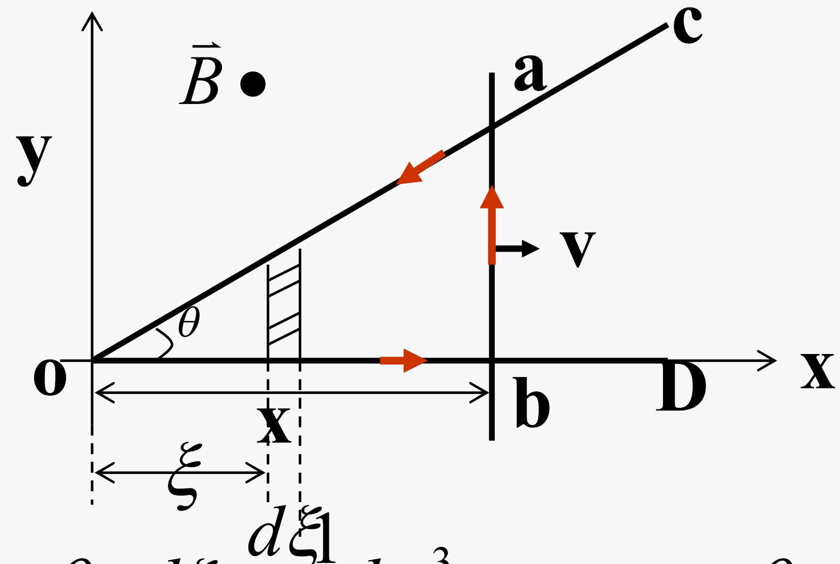
2.当B作非均匀变化时，此时框架中既产生动生电动势，又产生感生电动势，可用法拉第定律计算

取回路,aoba 并在x轴ξ 处取小面元ds

有: $ds = yd\xi = \xi \cdot tg\theta \cdot d\xi$

t时刻穿过ds的磁通量为: $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s}$

$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{s} = Bds$$
$$= k\xi\cos\omega t\cdot\xi\cdot tg\theta\cdot d\xi$$
$$= k\xi^{2}\cos\omega t\cdot tg\theta\cdot d\xi$$



则： $$\Phi = \int d\Phi = \int_0^x k\xi^{2}\cos\omega t\cdot tg\theta\cdot d\xi = \frac{1}{3}kx^{3}\cos\omega t\cdot tg\theta$$

法拉第定律：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(\frac{1}{3}kx^{3}\cos\omega t\cdot tg\theta\right)}{dt}$$

$$= \frac{1}{3}kx^{3}\omega\sin\omega t\cdot tg\theta - kx^{2}\cdot v\cdot\cos\omega t\cdot tg\theta$$

$$= kv^{3}tg\theta\cdot\left(\frac{1}{3}\omega t^{3}\sin\omega t - t^{2}\cos\omega t\right)$$

讨论：$\varepsilon_i \rangle 0$

与绕行方向一致，反之

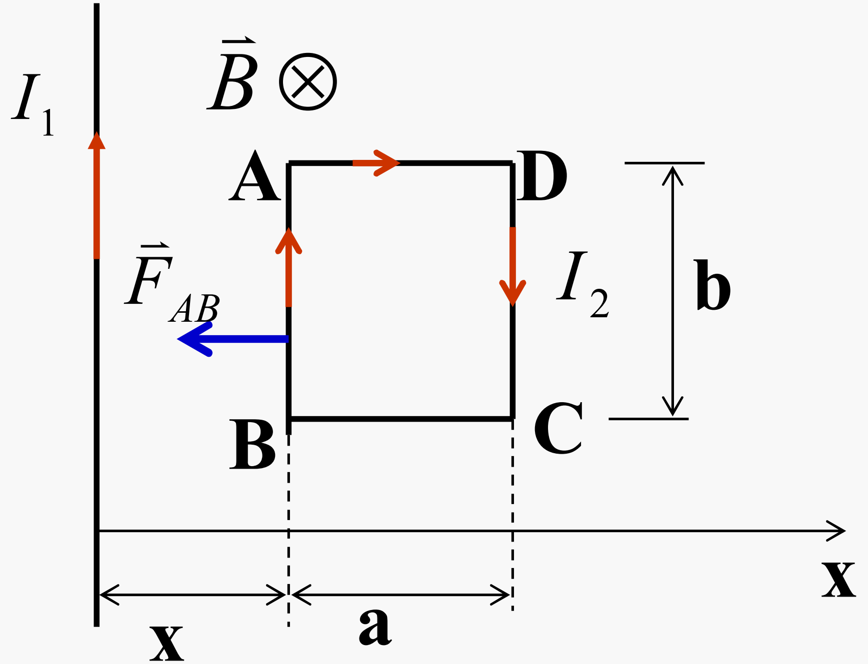
....

例题3：一通有电流I_1的长直导线旁有一与之共面的通有电流I_2的长方形线圈ABCD，AB边与直线平行，距离导线x 。求1）长直导线的磁场对AB和AD边的作用力；2）若保持I_1, I_2不变，将AB与导线间距从a变到2a，磁场对线圈所做的功。

解：1）长直导线的磁场：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

方向向里，如图



此磁场对AB边的作用力

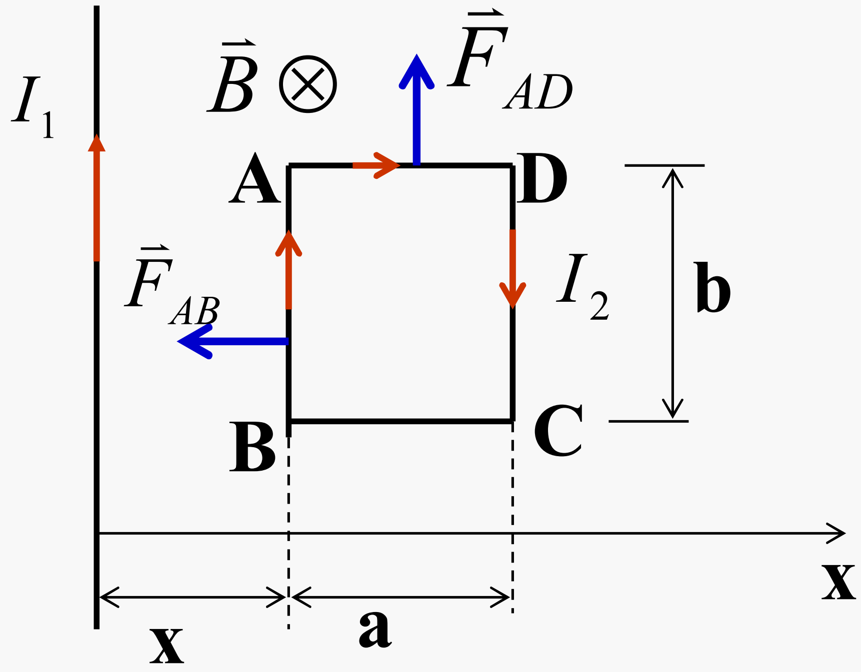
$$F_{AB} = \left| \int_{AB} I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1 \right| = \int_{AB} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} I_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot b$$ 方向如图

此磁场对AD边的作用力

$$F_{AD} = \left| \int_{AD} I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1 \right|$$

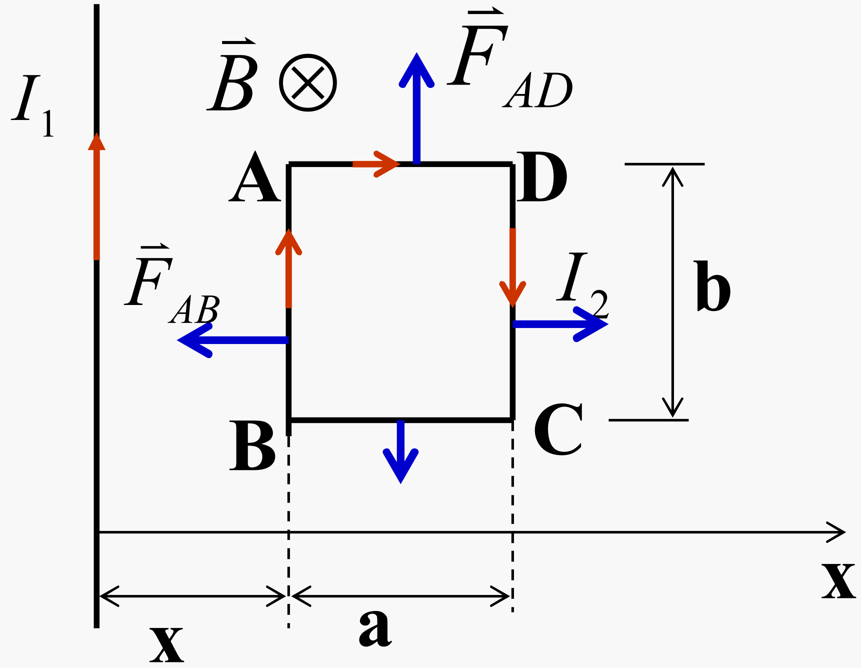
$$= \int_{x}^{x+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} I_2 dr$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$



方向如图

2）线圈ABCD所受的安培力的合力：



$$\vec{F}=\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{CD}+\vec{F}_{AD}$$

$$=\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{CD}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)(-\hat{x})$$

从x=a到x=2a,磁场做功：

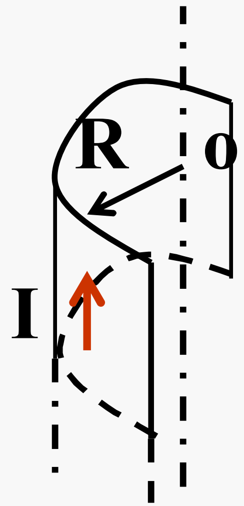
$$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{x}=-\int_a^{2a}\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

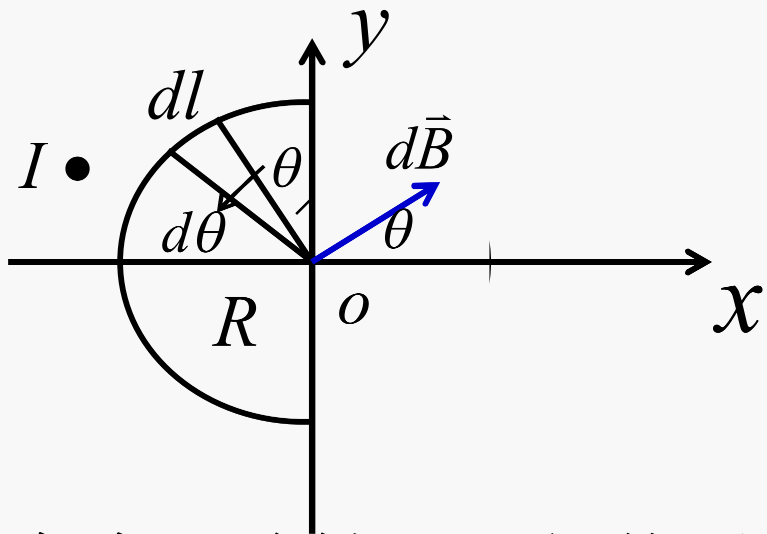
$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\ln\frac{4}{3}$$

磁力作负功

也可用 $A=I\Delta\Phi$ 作。

例题4：一半径为R的无限长半圆柱面导体，其中通有轴向电流I,电流I在半圆柱面上均匀分布。求：1)轴线处的 $\vec{B}$ 2）若轴线上有一无限长细直导线通有等值反向电流，则单位长度所受的磁力大小和方向。3）若用另一无限长直导线（通有与柱面相同的电流），来代替半圆柱面，要在轴线单位长度导线上产生同样的力，该导线应放在何处？





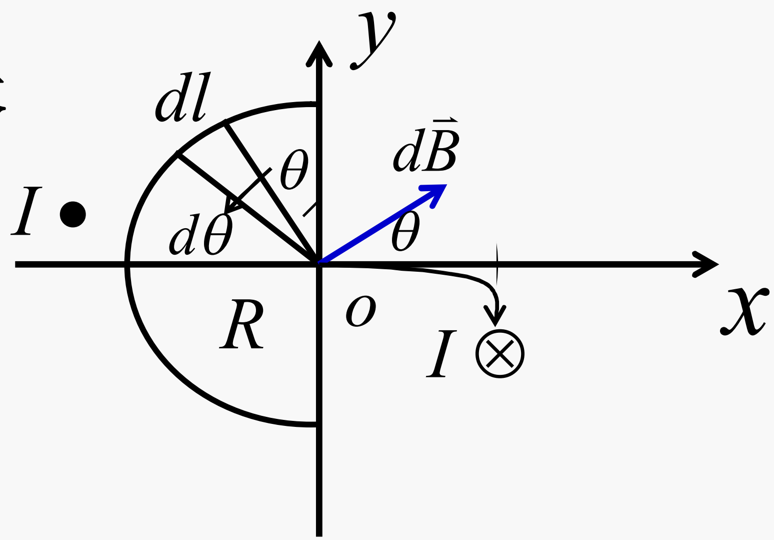
解：1）此题不具有高度对称性，不能使用安培环路定理，用场强叠加原理

面电流密度为： $j = \dfrac{I}{\pi R}$ 坐标如图

在半圆上取平行与轴线的一窄长条，宽为 dl，载有电流，

$dI = j \cdot dl = jRd\theta$

则它在轴线上的磁感应强度为：



$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 j d\theta}{2\pi}$$ 方向如图

对称性： $B_x = 0$

$$B = B_y = \int dB_y = \int dB \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 j \sin\theta}{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 j}{\pi} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

2) 轴线上放一反向载流导线，电流为 I

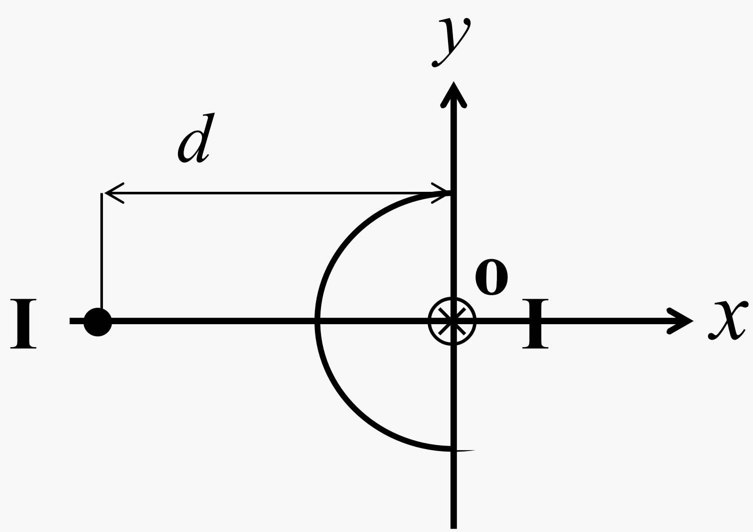
由安培定律，在轴线上载流导线上取一导线元 dl

它受的安培力 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ （$d\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 垂直）

单位长度导线受力大小：$\dfrac{dF}{dl} = BI = \dfrac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$

方向沿x轴正向，$\vec{B}$沿y轴，$d\vec{l}$沿$-Z$轴

3)替代电流在轴线上产生的 $\vec{B}$ 应等于半圆柱面电流在轴线上产生的 $\vec{B}$，所以，替代电流应在 x 轴负半轴上，电流方向沿 Z 轴正向，设与原点距离为d,



则：$\dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$

$$d = \frac{\pi R}{2}$$

坐标为：$x = -\dfrac{\pi R}{2}$