§6 不确定关系

根据牛顿力学理论，
质点的运动都沿着一定的轨道，
在轨道上，
任意时刻质点都有确定的位置和动量。
在牛顿力学中也正是用位置和动量来
描述一个质点在任一时刻的运动状态的。

波动性使得实际粒子与牛顿力学所
设想的“经典粒子”根本不同。

☆

对于实际的粒子，由于其粒子性，
可以谈论它的位置和动量，
但由于其波动性，
它的空间位置需要用概率波来描述，
而概率波只能给出粒子在各处出现的概率，
所以在任一时刻粒子不具有确定的位置，
与此相联系，
粒子在各时刻也不具有确定的动量。
这也可以说，由于波粒二象性，
在任意时刻粒子的位置和动量
都有一个不确定量。

☆

1927年，海森伯分析了一些理想实验
并考虑到德布罗意关系，
得出不确定度关系（测不准关系）：
粒子在同一方向上的坐标和动量不能同时确定。

如果用Δx代表位置的测量不确定度（不确定范围），用Δp_x代表沿x方向的动量的测量不确定度，那么它们的乘积有一个下限，即

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} = 6.58\times10^{-16}\,\mathrm{eV\cdot s}$$

☆

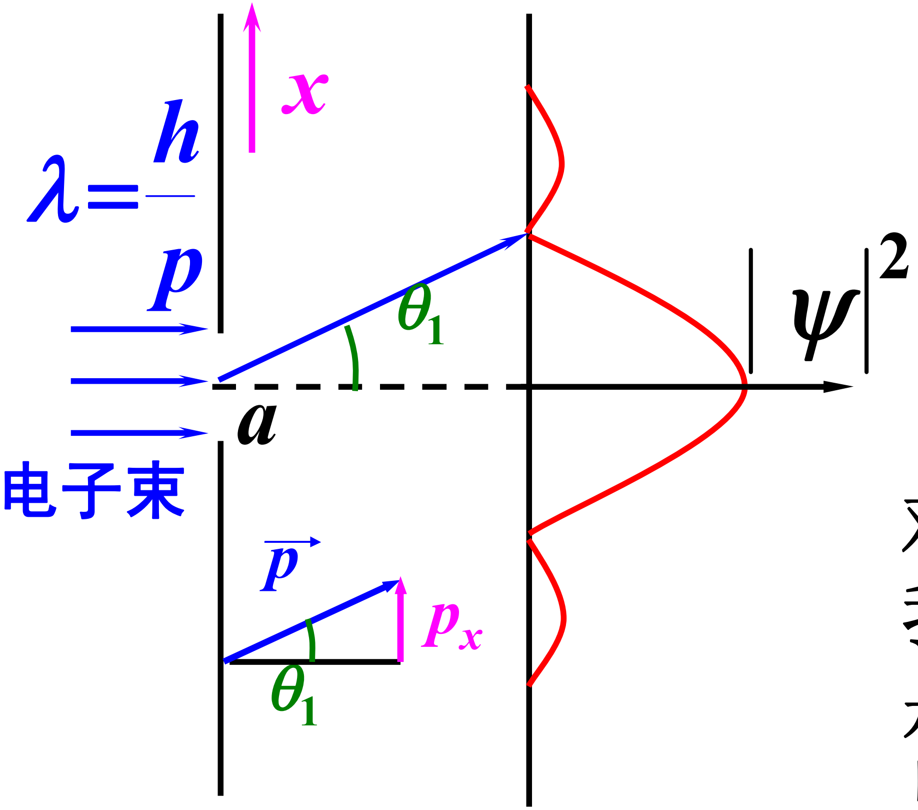
1932年诺贝尔物理学奖获得者

—— 海森伯

- 德国人
- **Werner Karl Heisenberg**
- **1901-1976**
- 量子力学的创立

☆

以电子单缝衍射为例来分析。



一束动量为 p 的电子通过宽为 Δx 的单缝后发生衍射，在屏上形成衍射条纹。

对一个电子来说，我们不能确定地说它是从缝中哪一点通过的，只能说它是从宽为 Δx 的缝中通过的，

因此它在 x 方向上的位置不确定量就是 Δx 。☆

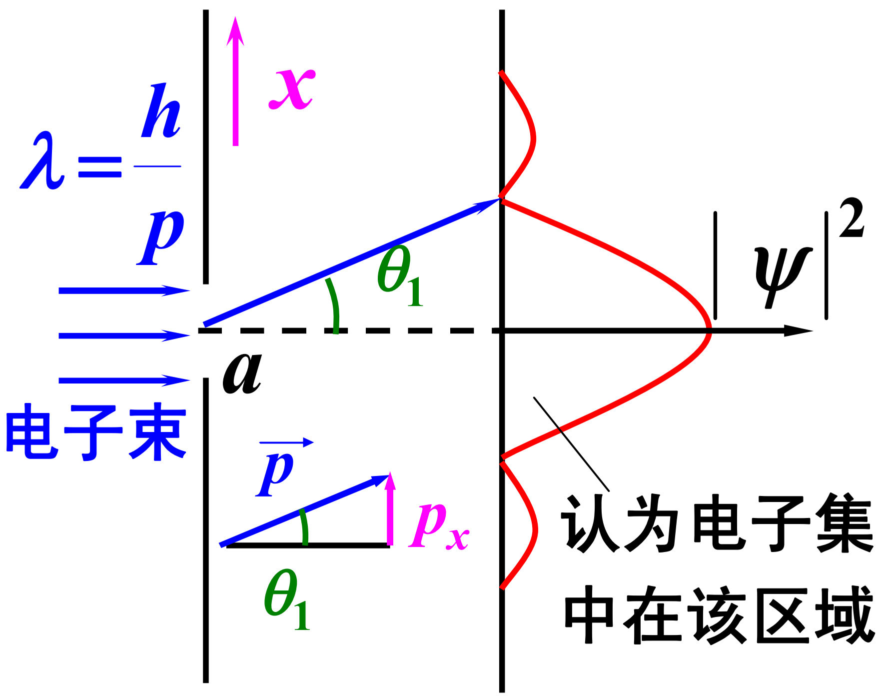
假定电子通过单缝前沿 x 方向的动量为零 $p_{x0}=0$

由于发生衍射，屏上电子落点沿 x 方向展开，

说明电子通过缝时已有了不为零的 p_x 值。 ☆

忽略次级极大，认为电子都落在中央亮纹内，

电子在通过缝时，运动方向可以有大到 θ_1 角的偏转。



可知一个电子在通过缝时在 x 方向动量的分量的大小为下列不等式所限

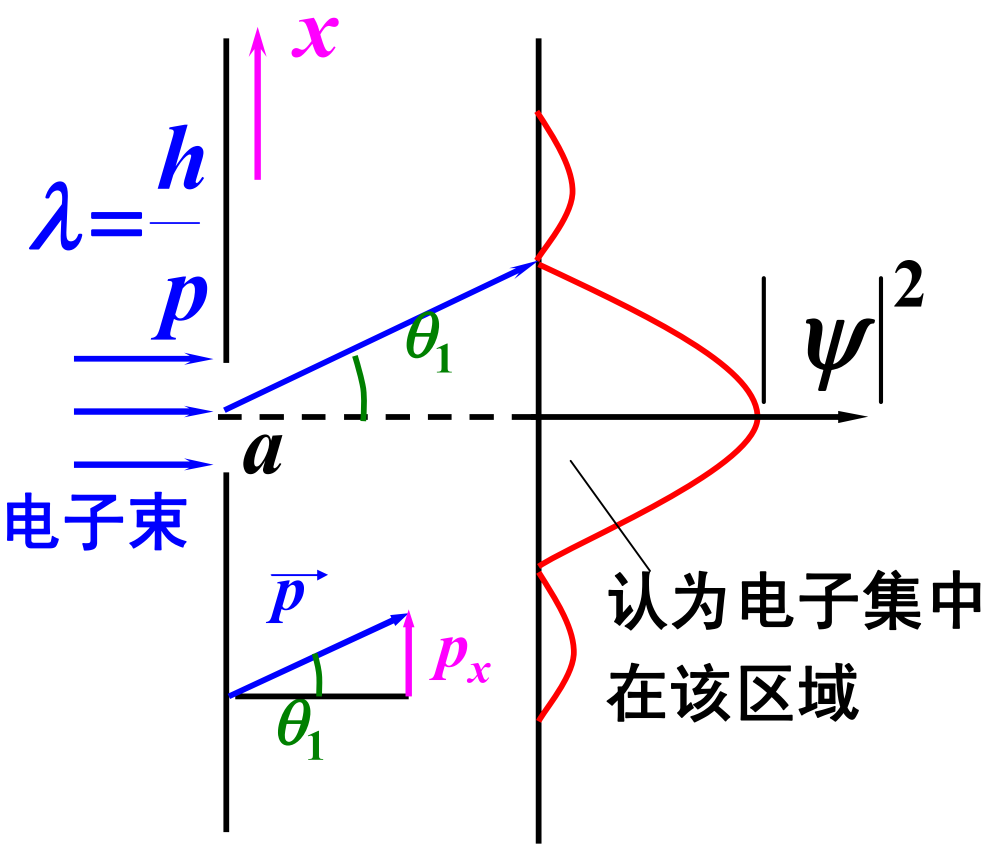
$$0 \le p_x \le p\sin\theta_1$$

一个电子通过缝时在 x 方向上的动量不确定量

$$\Delta p_x = p\sin\theta_1$$

考虑到衍射条纹的次级极大 $\Delta p_x \geq p\sin\theta_1$

由单缝衍射公式，
第一级暗纹中心的角位置 θ_1 $\quad \Delta x\sin\theta_1 = \lambda$



根据德布罗意公式
$$\lambda = h/p$$

$$\Delta x\sin\theta_1 = h/p$$

$$\boxed{\Delta x\Delta p_x \geq h}$$

☆

更一般的理论给出

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

这三个公式就是位置坐标和动量的不确定关系。

它们说明粒子的位置坐标不确定量越小，
则同方向上的动量不确定量越大。
同样，某方向上动量不确定量越小，
则此方向上粒子位置的不确定量越大。
总之，在表明或测量粒子的位置和动量时，
它们的精度存在着一个终极的不可逾越的限制。

☆

考虑一个粒子在一段时间 Δt 内的动量 $\vec{p}$ 为沿 x 方向，而能量为 E 。

相对论关系 $p^2c^2 = E^2 - m_0{}^2c^4$

则其动量的不确定量为 $\Delta p = \dfrac{E}{pc^2}\Delta E$

在时间Δt内，粒子可能发生的位移为：

$$\Delta x = V\Delta t = \frac{p}{m}\Delta t$$

这位移也就是在这段时间内粒子的位置坐标不确定度。

☆

$$\Delta x \Delta p = \frac{E}{mc^2} \Delta E \Delta t$$

$$\Delta x = \frac{p}{m} \Delta t$$

$$\Delta p = \frac{E}{pc^2} \Delta E$$

$$E = mc^2$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

关于能量和时间的不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

☆

能量和时间之间的不确定关系：

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Δt：测量能量经历的时间范围，ΔE：测量误差。

$$\boxed{\tau \Gamma \sim \hbar}$$

τ：寿命，Γ：能级宽度。

不确定关系是微观体系具有波粒二象性的必然结果
本质上不是由测量仪器对体系干扰造成。

☆

例19－5

（1）设子弹的质量为 $0.01kg$，枪口的直径为 $0.5cm$，试用不确定性关系计算子弹射出枪口时的横向速度。

（2）原子的线度为 $10^{-10}m$，求原子中电子速度的不确定量。

解：（1）枪口直径可以当作子弹射出枪口时的位置不确定量 Δx。由于$\Delta p_x = m\Delta V_x$，所以

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1.05\times 10^{-34}}{2\times 0.01\times 0.5\times 10^{-2}} = 1.1\times 10^{-30}\,(m/s)$$

这也就是子弹的横向速度。与子弹飞行速度每秒几百米相比，这一速度引起的运动方向的偏转是微不足道的。因此对于子弹这种宏观粒子，它的波动性不会对它的“经典式”运动以及射击时的瞄准带来任何实际的影响。☆

（2）“电子在原子中”，就意味着电子的位置不确定量为 $\Delta x = 10^{-10} m$ ，由不确定关系可得

$$\Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{1.05\times10^{-34}}{2\times9.11\times10^{-31}\times10^{-10}} = 0.6\times10^{6}(m/s)$$

按照牛顿力学计算，氢原子中电子的轨道运动速度约为 $10^{6}\,m/s$ ，它与上面的速度不确定量有相同的数量级。可见，对原子范围内的电子，谈论其速度是没有什么实际意义的。这时电子的波动性十分显善，描述它的运动时必须抛弃轨道概念，
代之以说明电子在空间的概率分布的电子云图像。

☆

例19－6

(1) J/ψ 粒子的静能为 $3100MeV$ ，

寿命为 $5.2\times10^{-21}s$ 。

它的能量不确定度是多大?占静能的几分之几?

(2) ρ 介子的静能是 $765MeV$ ，

寿命是$2.2\times10^{-24}s$ 。

它的能量不确定度多大?又占其静能的几分之几?

解: $\Delta E=\hbar/2\Delta t$

此处 Δt 即为粒子的寿命。

☆

（1）J/ψ 对于粒子

$$\Delta E=\hbar/2\Delta t=\frac{1.05\times10^{-34}}{2\times5.2\times10^{-21}\times1.6\times10^{-13}}=0.063(MeV)$$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{0.063}{3100}=2.0\times10^{-5}=0.002\%$$

（2） ρ对于介子

$$\Delta E=\hbar/2\Delta t=\frac{1.05\times10^{-34}}{2\times2.2\times10^{-24}\times1.6\times10^{-13}}=150(MeV)$$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{150}{765}=0.20=20\%$$

☆