§4 一维谐振子

谐振子不仅是经典物理的重要模型，而且也是量子物理的重要模型。

如：黑体辐射、

分子振动，

晶格点阵振动。

$$\vec{F} = -kx \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

一 势能

若选线性谐振子平衡位置为坐标原点和势能零点，则一维线性谐振子的势能可以表示为：

$$\boxed{U(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2}$$

$\boldsymbol{m}$ — 粒子的质量

$\boldsymbol{k}$ — 谐振子劲度系数

谐振子的角频率 $\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

二 谐振子的定态薛定谔方程

由 $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+U\psi=E\psi$$

和 $$U(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= m\omega/\hbar \\ \lambda &= 2mE/\hbar^2 \end{aligned}}$$

有 $$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2]\psi=0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+(\lambda-a^2x^2)\psi=0}$$

三 谐振子的能量

$$a = m\omega/\hbar$$
$$\lambda = 2mE/\hbar^2$$

可以证明，只有下式成立时

$$\frac{\lambda}{a} = 2n+1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2mE/\hbar^2}{m\omega/\hbar} = \frac{2E}{\omega\hbar}$$

波函数才能满足单值、有限、连续的条件

谐振子量子化能量

$$\boxed{E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega = (n+\frac{1}{2})h\nu\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}h\nu\,,}$$

是谐振子的零点能

能量特点：

(1)量子化，等间距：$\Delta E = h\nu$

(2)有零点能：$E_0 = \frac{1}{2}h\nu$，

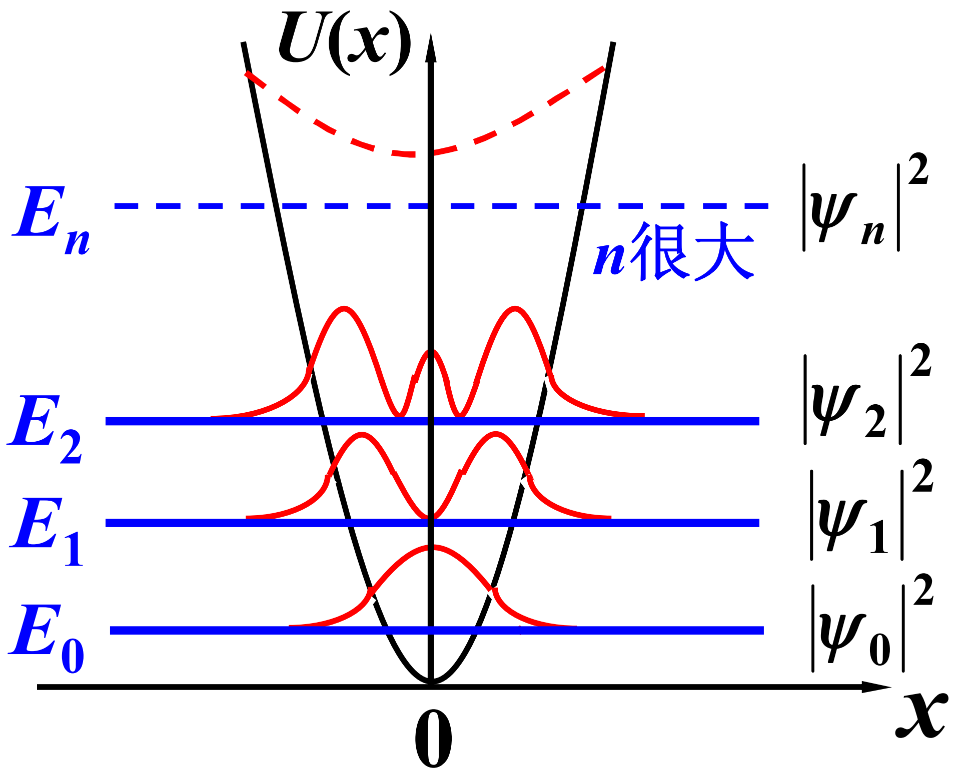
符合不确定关系

(3) 当$n \to \infty$时，

$$\frac{\Delta E}{E_n} \to 0,$$

能量量子化

→能量连续



（宏观振子能量相应$n \sim 10^{25}$，$\Delta E \sim 10^{-33}$J）

四 谐振子的波函数

$$\psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{2n\sqrt{\pi}n!}\right)^{1/2}\underline{\underline{H_n(\alpha x)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right),\quad \boldsymbol{\alpha}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{m\omega}}{\hbar}}$$

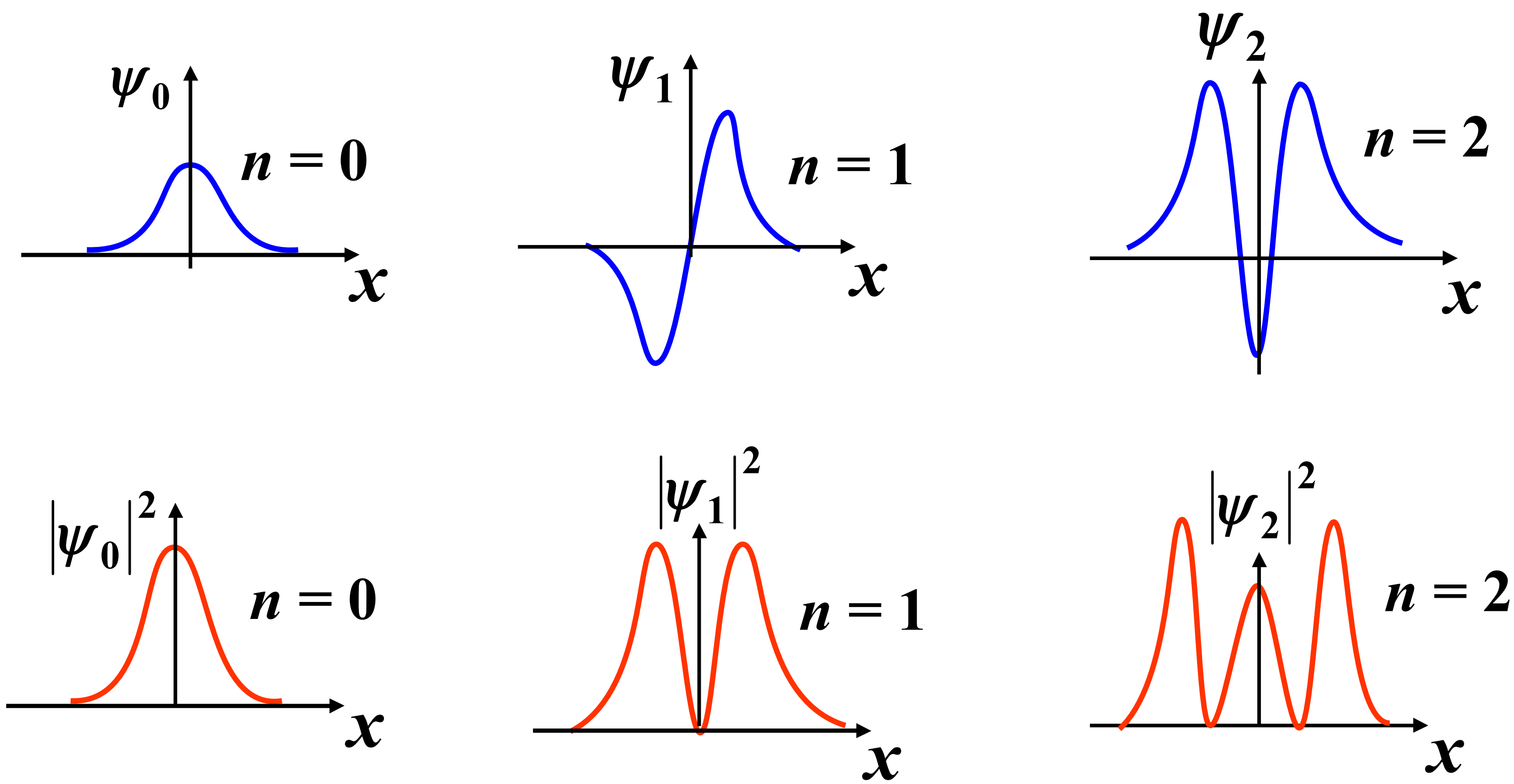
H_n是厄密（**Hermite**）多项式，

$$\psi_0(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)$$

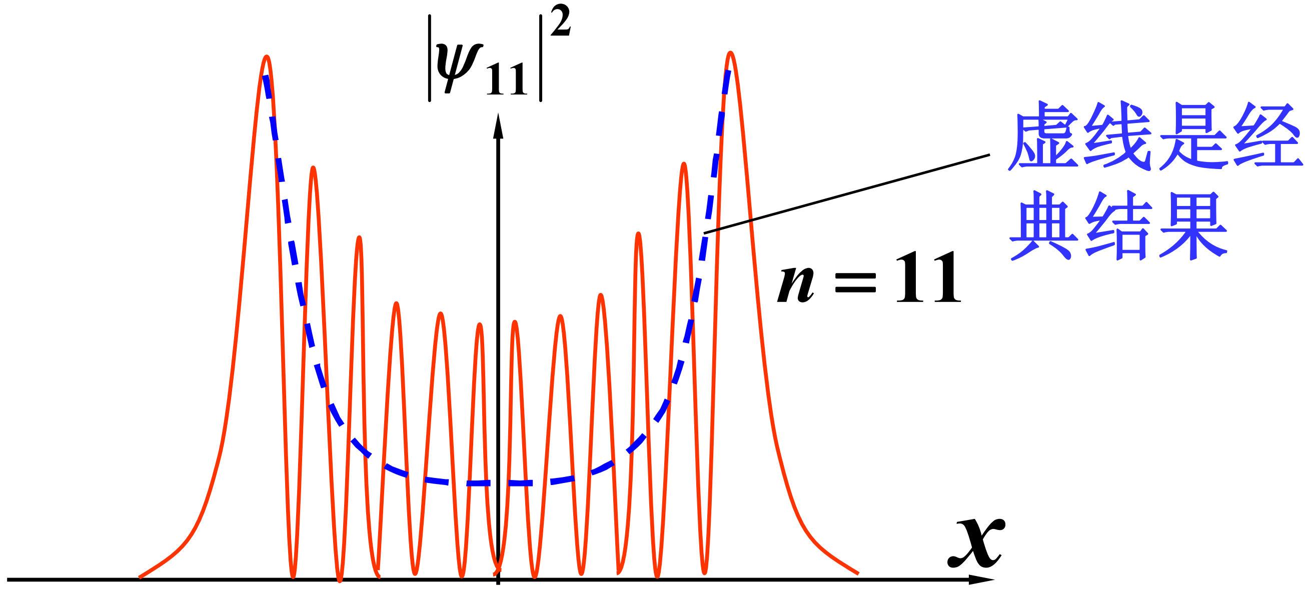
$$\psi_1(x)=\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\cdot 2(\alpha x)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)$$

$$\psi_2(x)=\left(\frac{\alpha}{8\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}[2-4(\alpha x)^2]\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)$$

五 概率密度



线性谐振子 $n = 11$ 时的概率密度分布：

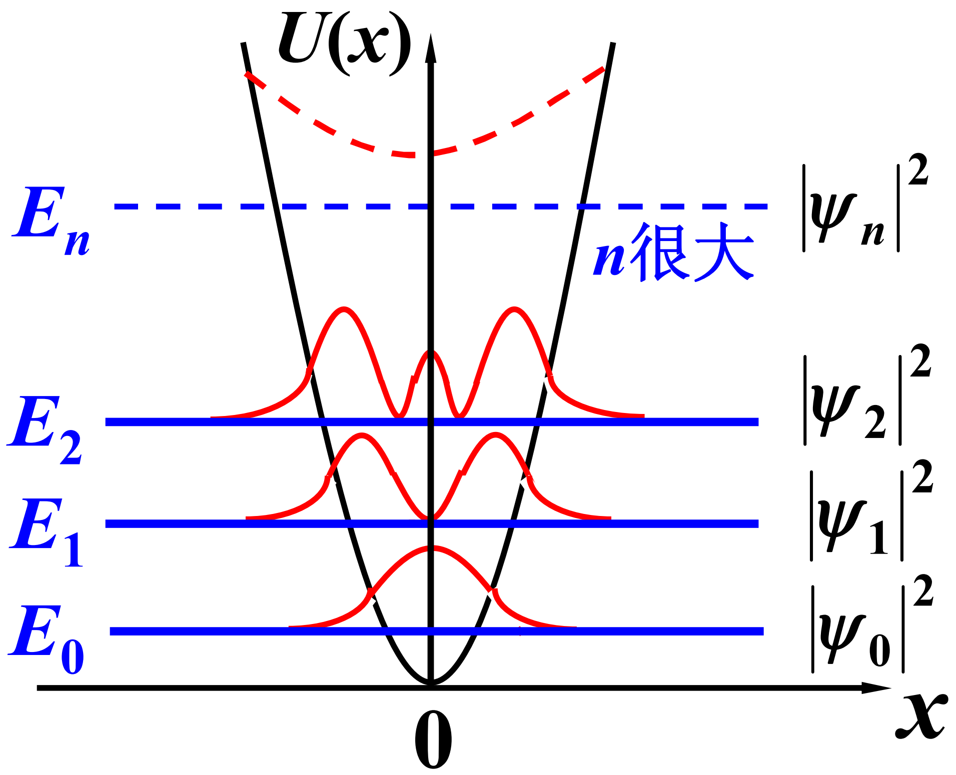


经典谐振子在原点速度最大，停留时间短，

粒子出现的概率小；　　振子在两端速度为零，

出现的概率最大。

概率密度的特点：

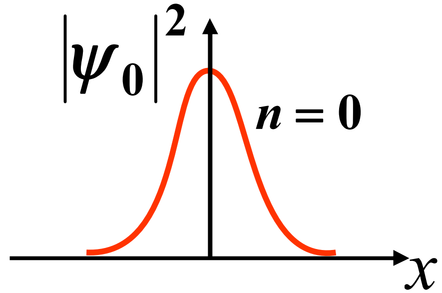


(1) 概率在$E < U$区仍有分布 —— 隧道效应

(2) n小时，概率分布与经典谐振子完全不同

例如基态位置概率分布在 $x = 0$ 处最大，

$$W_0(x) = \left|\psi_0(x)\right|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\exp(-\alpha^2 x^2)$$

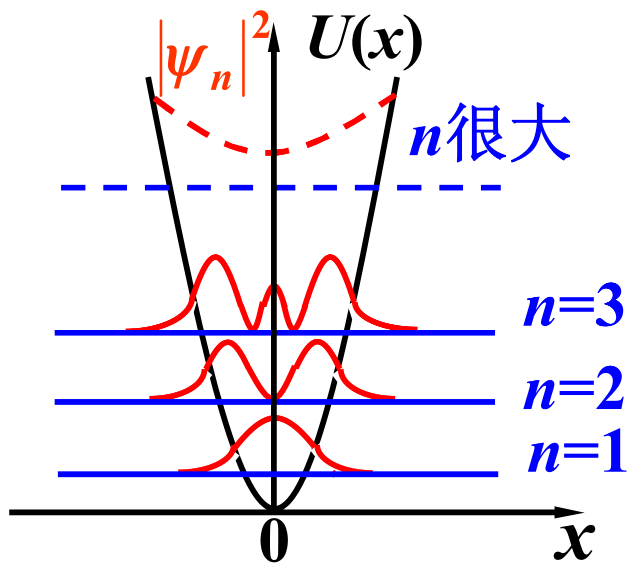


经典振子在$x = 0$处概率最小。

(3) 当$n \to \infty$ 时，

量子概率分布

$\to$ 经典概率分布，



【例】设体系的初始状态为

$$\Psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{3}}\Phi_0(x)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_2(x)$$

其中Φ_0和Φ_2分别是频率为 ν 的n=0和2的简谐振子能量本征态。

（1） $\Psi(x,0)$是定态吗？在 $\Psi(x,0)$上测量体系的能量，能测到哪些值？测到这些值的概率是多大？测量值的平均值是多少？

（2）求t 时刻体系的状态 $\Psi(x,t)$。不作

（1）$\Psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{3}}\Phi_0(x)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_2(x)$ 不是定态。

在状态 $\Psi(x,0)$上测量体系的能量，能测到的值为

$$E_0=\frac{1}{2}h\nu\,,\; E_2=\left(2+\frac{1}{2}\right)h\nu=\frac{5}{2}h\nu$$

测到E_0的概率：1/3；测到E_2的概率：2/3；它们分别等于展开式中相应展开系数的模方。

测量值的平均值： $\overline{E}=\frac{1}{3}E_0+\frac{2}{3}E_2=\frac{11}{6}h\nu$

（2）求 $\Psi(x,t)=\sum_{n} C_n \Phi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

$$C_n=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^*(x)\Psi(x,0)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^*(x)\Phi_0(x)\mathrm{d}x+\sqrt{\frac{2}{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_n^*(x)\Phi_2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{n,0}+\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{n,2}$$

$$C_0=\frac{1}{\sqrt{3}},\ C_1=0,\ C_2=\sqrt{\frac{2}{3}},\ C_3=0,\cdots$$

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Phi_0(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}+\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$$