

Introduction

L'objectif de ce quatrième devoir était de simuler l'optique géométrique. Spécifiquement, nous simulons l'image perçue par un observateur immergé dans un fluide regardant un bloc cylindrique transparent contenant un bloc rectangulaire de métal opaque coloré.

Théorie et équations

Équations utilisées pour choisir la direction des rayons lumineux

Pour générer l'image finale, nous allons émettre $M \times N$ rayons à partir du point \vec{r}_0 de direction initiale

$$\hat{u}_0 = (\sin(\theta_n) \cos(\phi_m), \sin(\theta_n) \sin(\phi_m), \cos(\theta_n))^T$$

Où

$$\theta_n = \theta_- + \frac{\theta_+ - \theta_-}{N - 1} (n - 1)$$

$$\phi_m = \phi_- + \frac{\phi_+ - \phi_-}{M - 1} (m - 1)$$

$$n \in [1, N]$$

$$m \in [1, M]$$

Dans ce cas-ci, nous utilisons un système de coordonnées sphériques où θ et ϕ sont définis comme suit :

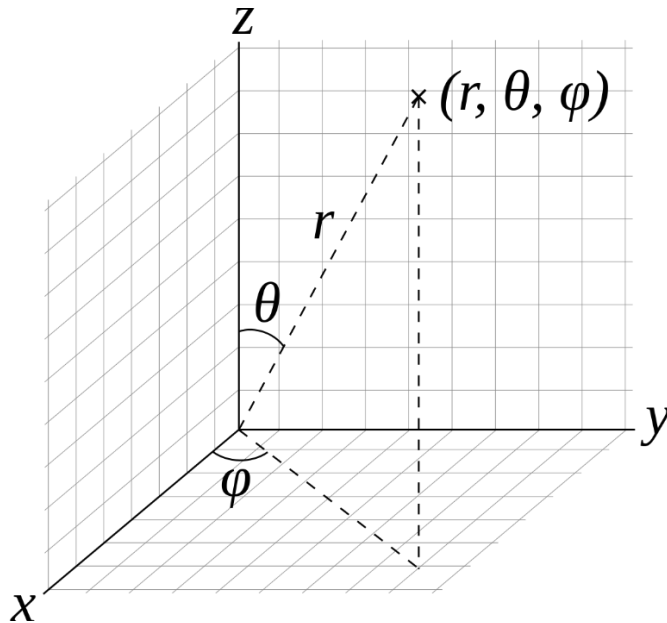


Figure 1: Définition des angles θ et ϕ . Source : https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4f/3D_Spherical.svg/1107px-3D_Spherical.svg.png

Donc

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{\sqrt{(r_{b(x)} - r_{0(x)})^2 + (r_{b(y)} - r_{0(y)})^2} - R_b}{\left(r_{b(z)} + \frac{h}{2} - r_{0(z)}\right)} \right)$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{\sqrt{(r_{b(x)} - r_{0(x)})^2 + (r_{b(y)} - r_{0(y)})^2} - R_b}{\left(r_{b(z)} - \frac{h}{2} - r_{0(z)}\right)} \right)$$

$$\theta_- = \min(\theta_1, \theta_2)$$

$$\theta_+ = \max(\theta_1, \theta_2)$$

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{r_{b(y)} - r_{0(y)} - R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|} - R_b * \frac{r_{b(x)} - r_{0(x)}}{|r_{b(x)} - r_{0(x)}|}}{r_{b(y)} - r_{0(y)} - R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|} + R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|}} \right)$$

$$\phi_2 = \arctan \left(\frac{r_{b(y)} - r_{0(y)} - R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|} + R_b * \frac{r_{b(x)} - r_{0(x)}}{|r_{b(x)} - r_{0(x)}|}}{r_{b(y)} - r_{0(y)} - R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|} - R_b * \frac{r_{b(y)} - r_{0(y)}}{|r_{b(y)} - r_{0(y)}|}} \right)$$

$$\phi_- = \min(\phi_1, \phi_2)$$

$$\phi_+ = \max(\phi_1, \phi_2)$$

sont respectivement les angles minimums et maximums pour qu'un rayon partant de l'observateur atteigne le cylindre, où \vec{r}_0 est la position de l'observateur, \vec{r}_b est la position du cylindre, R_b est le rayon du cylindre et h est la hauteur du cylindre.

Équations utilisées pour déterminer si les rayons lumineux touchent le bloc cylindrique transparent ou le bloc rectangulaire

Intersection entre un rayon et le bloc cylindrique :

Puisque le bloc cylindrique est aligné avec l'axe des z, nous pouvons modéliser sa surface latérale par l'équation

$$(x - r_{b(x)})^2 + (y - r_{b(y)})^2 = R_b^2$$

Où R_b est le rayon du cylindre et \vec{r}_b est la position du centre du cylindre et avec

$$r_{b(z)} - \frac{h}{2} \leq z \leq r_{b(z)} + \frac{h}{2}$$

Où h est la hauteur du cylindre.

Les deux extrémités du cylindre peuvent être modélisées par des plans situés à $z = r_{b(z)} - \frac{h}{2}$ et $z = r_{b(z)} + \frac{h}{2}$ pour lesquels x et y respectent l'inéquation

$$(x - r_{b(x)})^2 + (y - r_{b(y)})^2 \leq R_b^2$$

Pour déterminer si un rayon touche le bloc cylindrique, il faut trouver l'intersection entre les trois surfaces du cylindre (surface latérale et extrémités) et sélectionner celle pour laquelle la distance parcourue est la plus faible. Pour cela, il suffit de remplacer x , y et z dans les équations ci-haut par $\vec{r}_0 + d\hat{u}_i$ où \vec{r}_0 est la position initiale du rayon, d est une variable représentant la distance parcourue et \hat{u}_i est la direction du rayon. S'il existe une solution pour une ou plus de ces équations respectant les inéquations qui leur sont associées, le rayon touche alors le cylindre. Pour trouver le point exact de l'intersection, il suffit de comparer les valeurs de d obtenues afin de trouver la plus petite.

Intersection entre un rayon et le bloc rectangulaire :

Le bloc rectangulaire peut être modélisé par ses 6 plans dont on associe à chacun un domaine. Pour déterminer le point d'intersection, nous pouvons procéder de la même manière que pour le cylindre, soit résoudre chaque équation en remplaçant x , y et z par $\vec{r}_0 + d\hat{u}_i$ et vérifier si la solution fait partie du domaine. Si tel est le cas pour au moins une surface, il y a intersection et l'intersection correspond à la surface pour laquelle d est inférieur.

Équations pour déterminer la direction du rayon lumineux qui atteint une des surfaces du bloc cylindrique transparent

Premièrement, il faut définir les vecteurs \hat{i} , \hat{j} et \hat{k} pour le rayon de direction \hat{u}_1 au contact du cylindre où \hat{i} est la normale unitaire à la surface du cylindre, $\hat{j} = \frac{\hat{u}_1 \times \hat{i}}{|\hat{u}_1 \times \hat{i}|}$ et $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$.

Ensuite, on calcule

$\sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1) = \frac{n_1}{n_2} \hat{u}_1 \cdot \hat{k}$ où n_1 est l'indice de réfraction du milieu où se situe le rayon et n_2 est l'indice de réfraction du second milieu.

Si $|\sin(\theta_2)| > 1$, il s'agit d'une réflexion totale interne. La direction du rayon réfléchi \hat{u}_2 est donc

$$\hat{u}_2 = \hat{u}_1 - 2\hat{i}(\hat{u}_1 \cdot \hat{i})$$

Si $|\sin(\theta_2)| < 1$, il s'agit d'une réfraction. La direction du rayon réfléchi \hat{u}_2 est donc

$$\hat{u}_2 = -\hat{i}\cos(\theta_2) + \hat{k}(\sin(\theta_2))$$

Équations pour déterminer les positions des images des points du bloc rectangulaire atteints par des rayons

Pour chaque rayon, il faut déterminer la distance d totale parcourue par la lumière depuis la source :

$$d = \sum_{i=1} |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$$

où les \vec{r}_i pour $i > 0$ sont les positions des rayons lorsqu'ils touchent au bloc cylindrique ou au bloc rectangulaire et \vec{r}_0 est la position de l'observateur.

La position de l'image du point est ainsi

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + d\hat{u}_0$$

où \hat{u}_0 est la direction initiale du rayon partant de l'observateur.

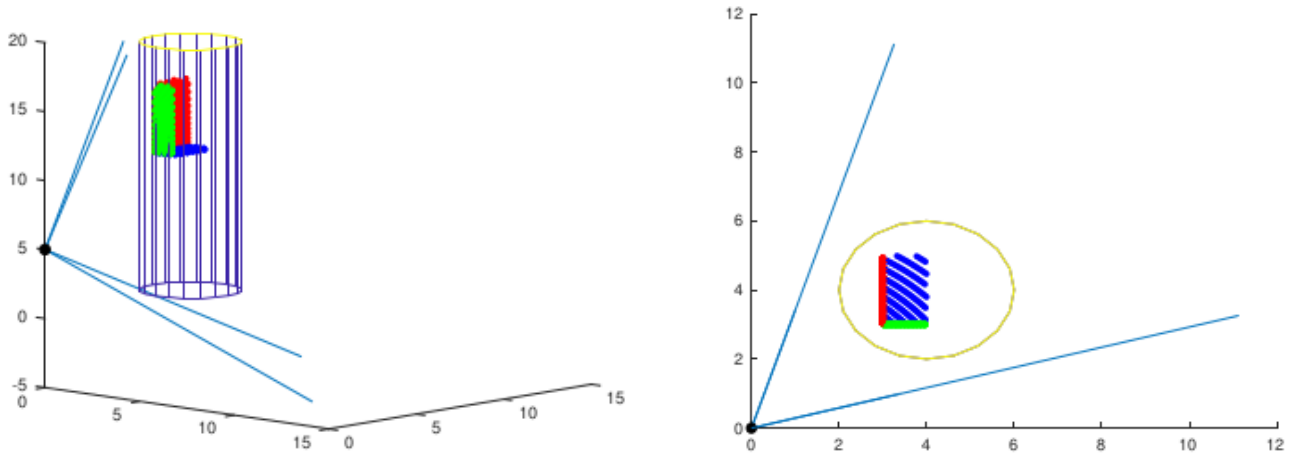
Détermination du nombre de directions utilisées

Afin de déterminer le nombre de directions utilisées dans notre simulation, nous avons procédé en testant pour différentes valeurs de N et M jusqu'à atteindre un équilibre satisfaisant entre le temps d'exécution et la précision des résultats. Nous nous sommes finalement arrêtés à 100 pour ces deux valeurs, pour un total de 10000 rayons.

Présentation et analyse des résultats

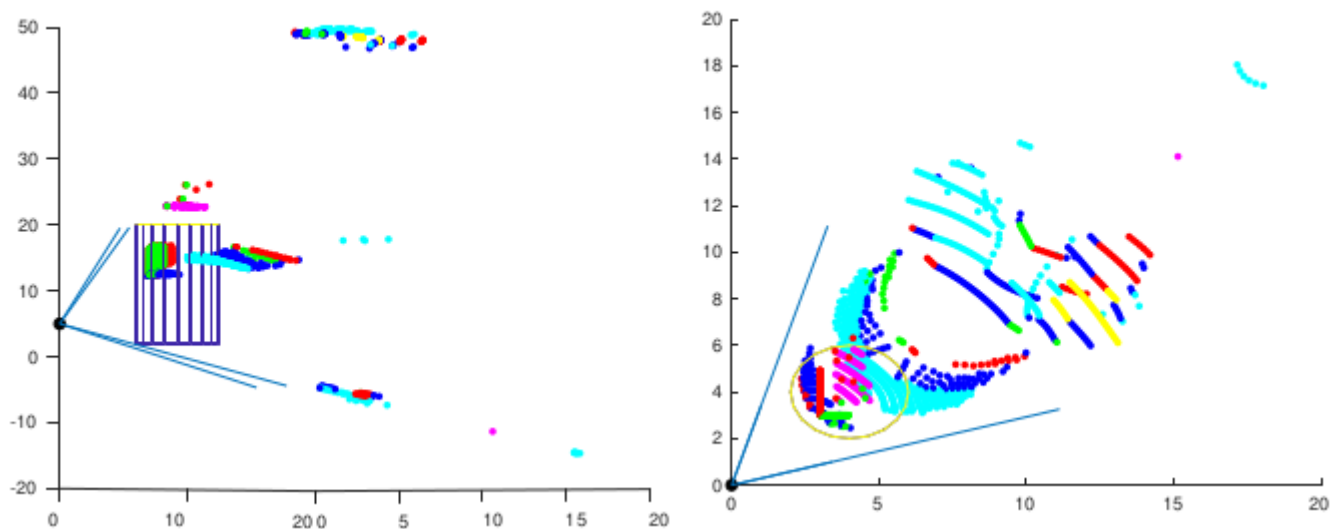
Ainsi, après avoir écrit le code, il était temps de générer des diagrammes pour chacune des quatre simulations. Nous avons effectué 4 simulations au total. Dans ces dernières, ce qui changeait était la position de l'observateur et les indices de réfraction. Pour la première simulation, l'observateur est localisé au point $\vec{r}_0 = (0,0,5)$ et les deux indices de réfraction sont de 1. Par rapport à la première, la seconde simulation ne change que l'indice de réfraction du milieu du bloc cylindrique pour 1,5. La troisième garde les indices de réfraction de la seconde, mais déplace l'observateur à l'origine. La quatrième et dernière simulation positionne l'observateur au même point que les deux premières, mais utilise les indices de réfractions $n_0 = 1,2$ et $n_b = 1$ pour le milieu de l'observateur et du bloc cylindrique, respectivement.

Pour la première simulation, comme il n'y a aucune différence entre l'indice de réfraction du milieu où se trouve l'observateur et celui du cylindre transparent, la position observée du bloc est identique à sa position réelle.



Figures 1 et 2: Vue du bloc par l'observateur pendant la première simulation

Pour la deuxième simulation, comme l'indice de réfraction du bloc cylindrique est plus élevé que celui du milieu où se trouve l'observateur ($1.5 > 1.0$), il y a une grande disparité entre l'objet réel et l'objet observé. La lumière frappe plusieurs plans du bloc rectangulaire qu'elle ne pouvait pas auparavant puisque l'indice de réfraction plus élevé du cylindre cause des réflexions totales internes.



Figures 3 et 4: Vue du bloc par l'observateur pendant la deuxième simulation

Pour la troisième simulation, comme les paramètres pour les indices de réfraction sont identiques à ceux de la deuxième simulation et que seulement la position de l'observateur est modifiée, l'objet observé est similaire à celui de la simulation précédente, mais vu de plus bas, causant une distorsion au niveau de l'axe des z.

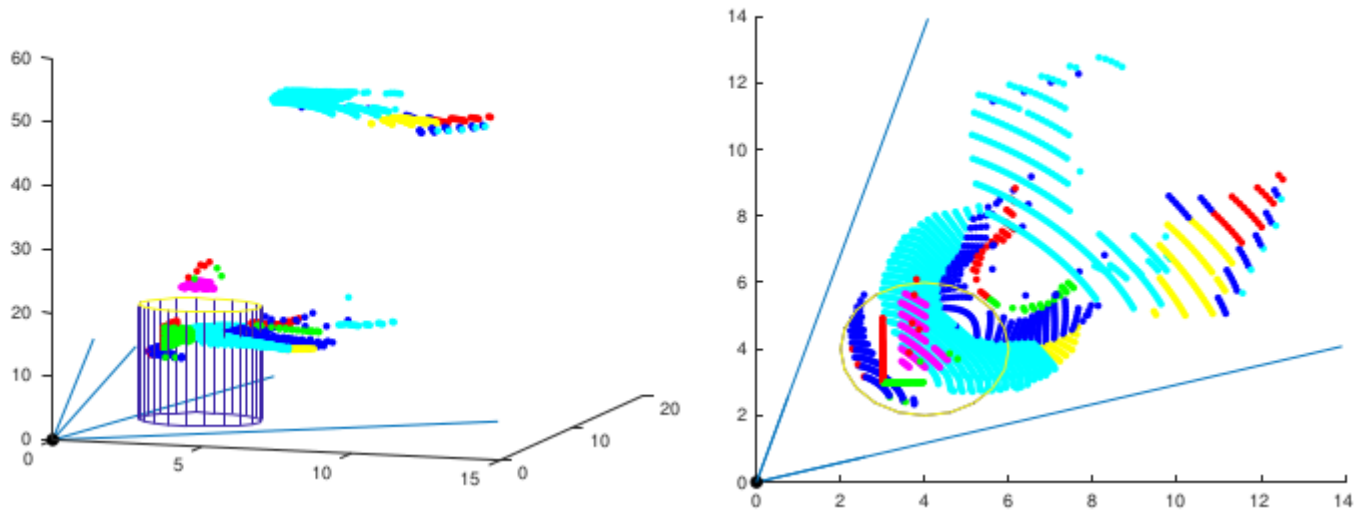


Figure 5 et 6: Vue du cylindre par l'observateur pendant la troisième simulation

Pendant la dernière simulation, comme l'indice de réfraction du milieu de l'observateur est plus élevé que celui du bloc cylindrique ($1.2 > 1.0$), l'objet observé paraît plus rapproché que dans les deux simulations précédentes.

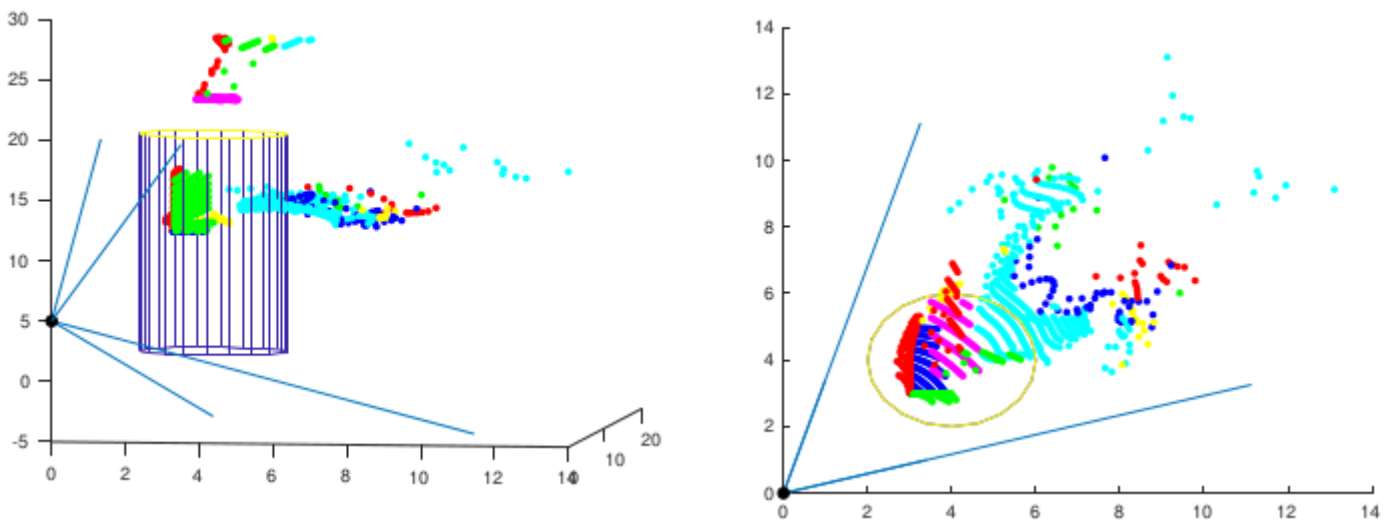


Figure 7 et 8: Vue du cylindre par l'observateur pendant la quatrième simulation

Pour vérifier notre code, nous avons comparé les résultats obtenus lors des simulations avec les résultats théoriques. En fait, nous avons créé des modèles théoriques vraisemblables avec les indices de réfraction et les positions donnés pour chaque simulation afin de les comparer au résultat obtenu. Dans tous les cas, les modèles théoriques concordaient de manière remarquable avec le résultat des simulations. Ainsi, nous avons eu une preuve de la véracité de nos simulations.

Conclusion

Lors de la programmation et de nos simulations, l'un de nos principaux problèmes était dans le choix des angles θ_- , θ_+ , ϕ_- et ϕ_+ . Au début, nous avons utilisé des équations assez compliquées afin que tous les rayons envoyés soient limités directement par le cylindre (et donc qu'aucun ne soit envoyé à côté), ce qui a été assez difficile à calculer. Cependant, nous avons commis une erreur et nos angles ϕ n'incluaient pas tous les angles nécessaires pour atteindre les côtés du cylindre. Nous avons donc changé leurs équations en visant un peu plus large. Maintenant, certains rayons sont envoyés à côté, mais au moins tout le cylindre est atteint.