1) Bombeo de Ekman

1.1

a) A partir de la ecuación de movimiento usadas en la dinámica del océano (ver ecuaciones 4.21 en la sección 4.4 del libro Cushman Roisin & Beckers, 2011) y mediante argumentos de escala (es decir usando órdenes de magnitud típicos de los distintos términos de la ecuación y el número de Ekman) justifique el modelo de Ekman para la capa superficial del océano, dado por:

$$-fv = A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$fu = A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Donde (u, v) son las componentes horizontales de la velocidad, f es el parámetro de Coriolis, z es la coordenada vertical y A_v es el coeficiente de viscosidad turbulenta (considerado constante) n.1) Consideraremos que el problema es lineal y que podemos separar el vector velocidad y la presión en:

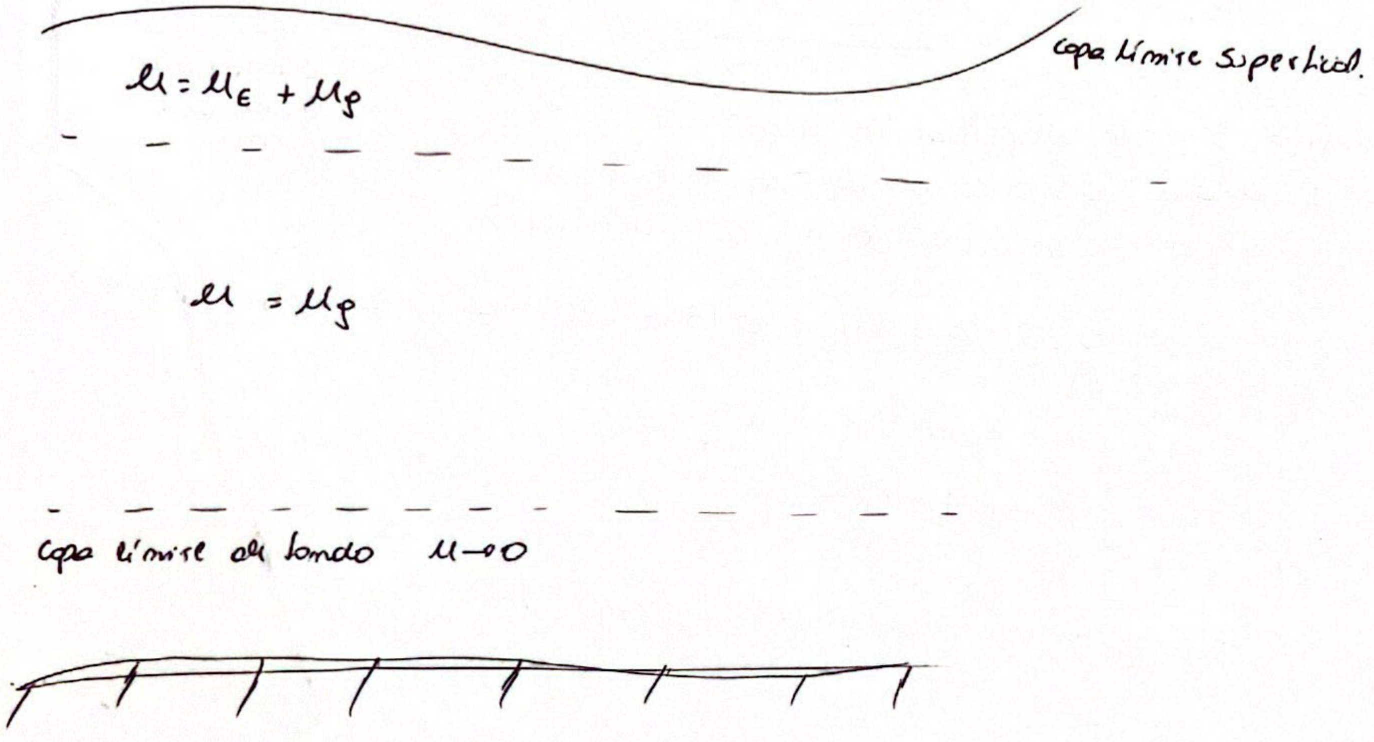
$$u = u_g + u_E \qquad y \qquad p = p'_{interior} + 0$$ no existe un modificador de p en la capa límite

donde

u_g : componente de la velocidad en el interior del océano donde la fricción no es importante (geostrófico)

u_E : componente de la velocidad asociada a la fricción del viento en superficie (velocidad de Ekman)

esquema:



• en el interior del océano la fricción no es relevante y el flujo está en balance geostrófico

$$-fv = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$fu = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}$$

cuando analizamos los ordenes de magnitud de los diferentes términos en la ecuación de movimiento

ejemplo: componente x de la ecuación de momentum.

$\boxed{w = f U = \frac{H}{L} \cdot U}$; $\partial p = \rho g h$; $\partial p = 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{A_H\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{fricción}}$$

si hacemos un análisis de escala S.I

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U \cdot U}{L} \quad \frac{U \cdot U}{L} \quad \cancel{\frac{H}{L}} \cdot U \cdot \frac{U}{\cancel{H}} \quad \Omega U = \frac{1}{\rho_0}\frac{\rho g h}{L} \quad \frac{A_H \cdot U}{L^2} \quad \frac{A_H U}{L^2} \quad \frac{A_V \cdot U}{H^2}$$

$$\frac{10^{-1}}{10^5} \quad \frac{10^{-1} \cdot 10^{-1}}{10^5} \quad \frac{10^{-1} \cdot 10^{-1}}{10^5} \quad \frac{10^{-1} \cdot 10^{-1}}{10^5} \quad 10^{-4} 10^{-1} = \frac{1}{10^3}\frac{10^3}{10^5} \quad \frac{10^2 10^{-1}}{10^{10}} \quad \frac{10^2 10^{-1}}{10^{10}} \quad \frac{10^{-2} 10^{-2}}{10^3}$$

$$10^{-6} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad \underline{10^{-5} = 10^{-5}} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-7}$$

este término domina en la fricción.

∴ normalmente se puede despreciar la fricción y obtenemos el balance geostrófico donde la fuerza de coriolis "se balancea" con la fuerza del gradiente de presión.

- Pero en las capas límites (en la superficie o fondo del mar) debemos reconsiderar la escala vertical (H)

tomamos H con un nuevo orden (el de la capa)

$$z \rightarrow H = O(10m)$$

∴ este término

$A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ cambiará su orden de magnitud $\Rightarrow A_V \cdot \frac{U}{H^2} = 10^{-2} \cdot \frac{10^{-1}}{(10^1)^2} = 10^{-5}$

∴ el balance queda como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + A_H\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_H\frac{\partial u}{\partial y^2} + A_V\frac{\partial u}{\partial z^2}$$

$$10^{-6} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad \underline{10^{-5} = 10^{-5}} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad \underline{10^{-5}}$$

- Si consideramos la capa donde la fricción es importante, el balance estará dado por la fuerza de coriolis, la fuerza del gradiente de presión y la fricción (capa límite), esto corresponde al modelo de Ekman.

A_H: coeficiente de difusividad

• Si consideramos el análisis de escala. El modelo de Ekman nos queda como:

$$-fv = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Para la componente y nos queda de forma similar.

$$fu = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

• esto se conoce como modelo de Ekman

• Suposiciones para la capa superficial del océano

• A_v cte
• lejos de los bordes (mov en balance geostrófico)
• $f = f_0$ cte

• $\frac{\partial p'}{\partial x}$ y $\frac{\partial p'}{\partial y}$ son constantes (independiente de z).

$\nabla_H p' = 0$. Luego podemos sumar un $\nabla_H p'$ que corresponde sumar un flujo geostrófico constante, que se superpone a la solución de Ekman

∴ para la capa superficial

$$-fv = \frac{-1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial p'}{\partial x}}^{\,0} + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$fu = \frac{-1}{\rho_0}\cancel{\frac{\partial p'}{\partial y}}^{\,0} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

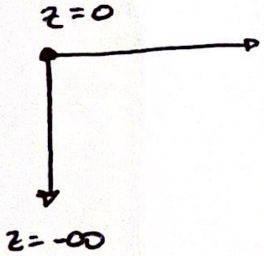
nos queda como.

$$\boxed{\begin{aligned} -fv &= A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned}}$$

con esto queda justificado el modelo de Ekman para la capa superficial.

b) Plantee las condiciones de borde adecuadas que considera la Solución de Ekman

• las condiciones de borde para la capa de Ekman superficial



en la sup del mar $z=0$

$$A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau^x}{\rho_0} \quad \wedge \quad A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau^y}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{A_v \rho_0} \cdot \tau^x \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{A_v \rho_0} \tau^y$$

• en otras palabras. la aceleración es proporcional al esfuerzo que impone el viento sobre la superficie

• Condiciones de borde para la capa de Ekman de fondo

cuando $z \to -\infty$ (es decir en el fondo)

$$u \to u_g \Rightarrow u_E = 0$$

$$v \to v_g \Rightarrow v_E = 0$$

c) obtenga la solución del transporte de Ekman integrando directamente las ecuaciones de mov. dadas y considere

$$M^x = \int_{-\infty}^{0} u\,dz \quad , \quad M^y = \int_{-\infty}^{0} v\,dz$$

Transporte de Ekman, integramos.

$$-fv = A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \Big/ \int_{-\infty}^{0} dz$$

$$-f \underbrace{\int_{-\infty}^{0} v\,dz}_{\text{transporte en dirección } y} = A_v \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz$$

$$-f M^y = A_v \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$-f M^y = \underbrace{A_v \frac{\partial u}{\partial z}(0)}_{\text{c.B superficial}} - \cancel{A_v \frac{\partial u}{\partial z}(-\infty)}$$

$$-f M^y = \frac{\tau^x}{\rho_0}$$

$$\boxed{M^y = -\frac{\tau^x}{\rho_0 f}}$$

Repetimos para la otra componente

$$f u = A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \Big/ \int_{-\infty}^{0} dz$$

$$\Rightarrow \quad f \int_{-\infty}^{0} u \, dz = A_v \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \, dz$$

$$f M^x = A_v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$f M^x = \underbrace{A_v \frac{\partial v}{\partial z}(0)}_{\text{c.B sup.}} - \cancel{A_v \frac{\partial v}{\partial z}(\infty)}$$

$$\boxed{M^x = \frac{\tau^y}{\rho_0 f}}$$

Finalmente el transporte queda como

$$\boxed{M^x = \frac{\tau^y}{\rho_0 f} \quad ; \quad M^y = \frac{-\tau^x}{\rho_0 f}}$$

d) Usando la ecuación de continuidad obtenga una expresión para el bombeo de Ekman, es decir, la expresión que relaciona w (en la base de la capa de Ekman) y el rotor del esfuerzo del viento en superficie

usamos la ecuación de mov. y continuidad

- $\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$ (1)

- $\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$ (2)

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (3)

$f = f_0 + \beta y$

· Sacamos la ec. de vorticidad.

derivamos (1) c/r a y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{\partial f v}{\partial y} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \overset{\beta v}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial y} v}} - f\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \beta v - f\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

derivamos (2) c/r a x

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial f u}{\partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \overset{0}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x} u}} + f\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + f\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

ahora (2) − (1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{vorticidad relativa}} + f\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\text{reemplazamos la ec. de continuidad}} + \beta v = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t}\xi - f\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \beta v = 0$, consideramos caso estacionario $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \beta v = f\frac{\partial w}{\partial z}$ → balance de Sverdrup

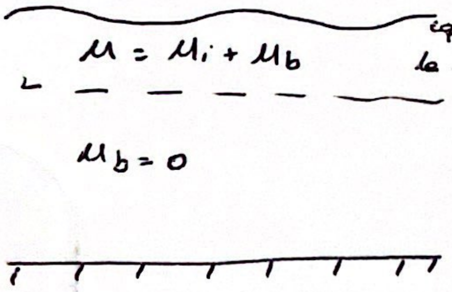
$$\beta v = f \frac{\partial w}{\partial z}$$ → vamos a relacionar esto con el rotor del esfuerzo del viento

$$u = \overset{\text{interior}}{u_i} + \overset{\text{borde}}{u_b}$$
$$v = v_i + v_b$$
$$w = w_i + w_b$$

donde

b: asociada a la capa de Ekman (borde)

i: interior (donde no hay fricción)



$$u_b = \frac{1}{\delta} \frac{\tau^y}{\rho_0 f}$$
$$v_b = -\frac{1}{\delta} \frac{\tau^x}{\rho_0 f}$$
velocidad promedio en la capa de Ekman

δ: grosor capa

• en $z = 0$

$$w = w_i + w_b = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot u = \nabla \cdot u_i + \nabla u_b = 0$$

$$\Rightarrow \nabla u_i = 0 \quad \wedge \quad \nabla u_b = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{u}_b = \frac{\partial u_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} + \frac{\partial w_b}{\partial z} = 0 \Big/ \int^{0} dz$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\delta}^{0} u_b \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\delta}^{0} v \, dz}_{\text{transporte}} + \int_{-\delta}^{0} \frac{\partial w}{\partial z} \, dz = 0$$

δ: prof.

$$\int_{-\delta} w_b = w_b(-\delta) - \cancel{w_b(0)}^{\,0} = w_b(-\delta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} M^x + \frac{\partial}{\partial y} M^y + w_b(-\delta) = 0$$

$$\Rightarrow w_b(\delta) = -\left(\frac{\partial M^x}{\partial x} + \frac{\partial M^y}{\partial y} \right)$$

↳ div transporte de Ekman

$$\omega_b\,(-f) = -\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right)$$

Sabemos que

$$\omega = \omega_i + \omega_b = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\omega_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \omega_b$$

$$\Rightarrow \omega_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\omega_i = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_H \cdot \vec{M}}$$

relaciona el transporte de ekman con las velocidades en la capa de Ekman.

· Como dijimos estado estacionario $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\omega_i = \nabla_H \cdot \vec{M}}$$

$$M_x = \frac{\tau^y}{\rho f} \quad ; \quad M_y = -\frac{\tau^x}{\rho f}$$

$$\omega_i = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau^y}{\rho f} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\tau^x}{\rho f}$$

$$\omega_i = \frac{1}{\rho f}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\tau^y - \frac{\partial}{\partial y}\tau^x}_{\text{rotor}}\right)$$

$$\boxed{\omega_i = \frac{1}{\rho f}\left(\nabla \times \vec{\tau}\right)\cdot \hat{k}}$$