Materiais Compósitos Laminados

Mestrado em Engenharia Aeroespacial

2021/2022

Trabalho Computacional

Docentes:
Jorge da Cruz Fernandes
José Miranda Guedes

Grupo 12:
89661 | Eduardo Cabrera
89663 | Filipe Faria

Resumo: O presente relatório foca-se no estudo e determinação das propriedades elásticas equivalentes de material compósito (fibra de carbono T800 e resina epoxídica). A sua estrutura contempla o cálculo das propriedades equivalentes a partir de diferentes metodologias, seguido da análise do laminado a partir de dois dos conjuntos de propriedades obtidos. Serão simulados, para efeitos comparativos, os ensaios realizados no âmbito do trabalho experimental, sendo que o relatório contempla também a realização de uma análise modal e de um estudo do deslocamento baseado no método de *Rayleigh-Ritz*.

fevereiro de 2022

G 12	Nº 89661	Name: Eduardo Miguel Aguieiras Cabrera
	Nº 89663	Name: Filipe Calderon de Cerqueira Rocha e Faria

Materiais Compósitos Laminados

Computational project – School year 2021/2022

Consider the composite laminated plate used in the experimental project. Assume that each lamina of the laminated plate is reinforced by long fibers, with the same volume fraction as in the experimental project, and that the material of the lamina can be modeled with the cubic RVE whose cross section is shown in the figure 1 and the location of fiber centers are shown in figure 2 (column 1 and 2) for a RVE with dimensions (a=`6.472`, b=`6.472, R=1`).

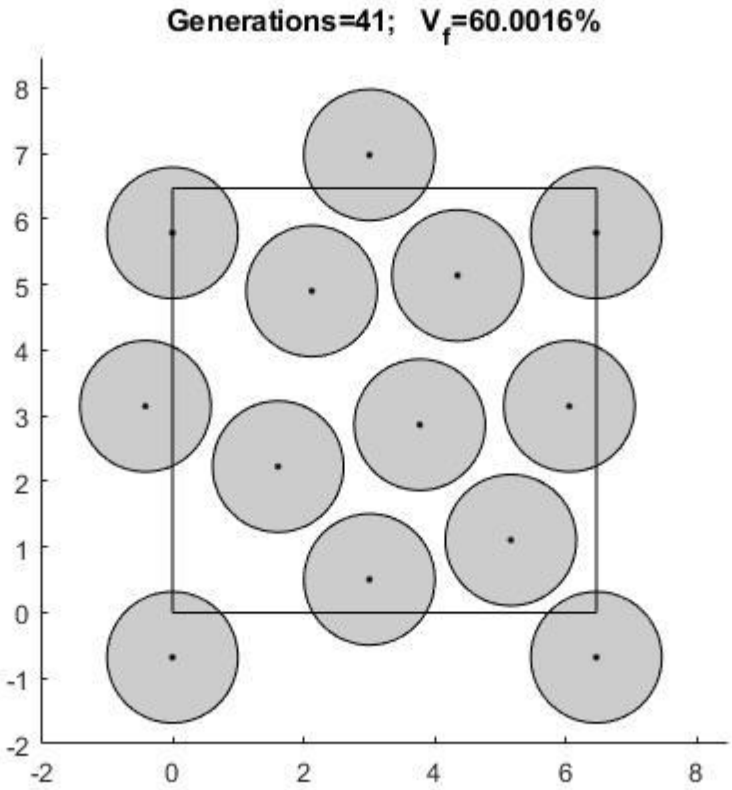


Figure 1

X	Y	Fiber R	Fiber id
6.4703	5.7914	1	1
6.0587	3.1486	1	2
4.3514	5.1420	1	3
3.0063	0.5079	1	4
3.7747	2.8653	1	5
2.1250	4.9049	1	6
1.6115	2.2282	1	7
5.1661	1.1071	1	8
-0.0017	5.7914	1	1
6.4703	-0.6806	1	1
-0.0017	-0.6806	1	1
-0.4133	3.1486	1	2
3.0063	6.9799	1	4

Figure 2

1. Compute the equivalent properties using the classical simple expressions of Micro-Mechanics.
2. Using a Finite element program, compute the equivalent material properties using the relation between average stress and average strain method and using the stored elastic energy of deformation method, assuming that the RVE is subjected to stress boundary conditions.
3. Redo 2) but compute the properties assuming that deformation boundary conditions are applied.
4. For the same material compute the equivalent properties using PREMAT software, for a periodic RVE with one fiber in square array $\left(\frac{a_1}{b_1} = 1\right)$ and rectangular array $\left(\frac{a_1}{b_1} = 0.9\right)$.
5. For the modeling of the laminated plate, consider:
    a. using a finite element code, and for two sets of the obtained equivalent properties (justify your choice), obtain a static linear solution for the same load situations as the experimental work. Compare the obtained results with the experimental ones, both in deformation, stress and strain aspects. Find the maximum loading that you can apply for any of the cases, using the same criteria as in the experimental work. Comment and discuss the obtained results.
    b. For the bending loading case, do a natural frequency analysis (first 10 frequencies) for each set of equivalent properties. Compare and discuss the results. Whenever possible, compare with analytical solutions and experimental results.
    c. For the bending loading case, using the Rayleigh-Ritz method, find an approximate solution for the CLPT considering and approximation of the transverse displacement *w* in the polynomial form up to 3rd degree. Comment and discuss the results. Whenever possible compare with experimental and analytical results.

Submit a report (2 students per group) with a maximum of 12 pages (font type Calibri 11 or bigger), where you show the formulations of the problems to solve, figures and/or tables of all issues that you think are relevant to address. Comment all results, and present some conclusions and a reference list. **The first 2 pages of the report must be these 2 pages**.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução e Fundamentos Teóricos

O objetivo do presente trabalho passa por determinar as propriedades elásticas equivalentes do material compósito em estudo (carbono T800 e resina epoxídica). Para tal, são consideradas diferentes abordagens: a primeira consiste no cálculo recorrendo às equações derivadas da micromecânica; alternativamente, é considerado um um Volume Elementar Representativo (RVE), calculando depois as propriedades com o recurso a diferentes *softwares*, dependendo do método considerado - tanto para o método das extensões e tensões médias como para o método da energia será utilizado o *software SIEMENS NX*, e para a teoria da homogeneização será utilizado o *software* PREMAT.

Após a obtenção das propriedades, são efetuadas simulações (novamente com recurso ao *software SIEMENS NX*) dos ensaios realizados no trabalho experimental 1 (tração e flexão), sendo os resultados comparados com os obtidos experimentalmente. São ainda calculadas as primeiras 10 frequências naturais do material compósito para as condições fronteira de flexão.

1.1 *Representative Volume Element* - RVE

Importa ainda, primeiro, introduzir o conceito de *Representative Volume Element* (RVE). Este método assume que um material heterogéneo a nível microscópico pode ser substituído por um material homogéneo, cujas propriedades reais são as propriedades médias do RVE, o que é de particular importância na determinação das características de uma lâmina através da modelação por elementos finitos, visto que é de grande utilidade poder efetuar a sua representação numa porção de volume reduzida, minimizando, assim, o esforço computacional. O RVE representa uma porção do material à escala microscópica com propriedades representativas do domínio completo do material. A determinação do seu volume não é, no entanto, exata, o que implica a que não se deva optar por um volume demasiado pequeno, o que poria em causa a viabilidade da representação do material. Um volume demasiado grande, por outro lado, também seria indesejável pois contrariaria o propósito da utilização do RVE. Outra limitação consiste no facto de que numa representação em volume microscópico determinados efeitos como a distorção não são tão facilmente desprezáveis.

2 Propriedades do Provete Laminado

O material utilizado no ensaio experimental é um compósito constituído por 24 lâminas com o empilhamento E $[-45_3/+45_3/90_5/0]_S$. Cada lâmina é constituída por carbono T800 ($V_f \approx 60\%$) e resina epoxídica, materiais cujas propriedades se encontram na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Propriedades da fibra e matriz do provete utilizado no ensaio experimental.

	$\rho\,[kg/m^3]$	$E\,[GPa]$	ν	Gramagem $[g/m^2]$	$h_i\,[mm]$	$V_i\,[\%]$
Carbono T800	1754	290	$0,35$	200	$0,19$	$60,0016$
Resina Epoxídica	1200	$4,5$	$0,4$	-	-	$39,9984$

Com os dados fornecidos é ainda possível calcular a densidade equivalente, dada por $\rho_c = V_m\rho_m + V_f\rho_f = 1532,4\,kg/m^3$. Apresentam-se também, na tabela 2.2, as tensões de rotura de cada lâmina para várias direções.

Tabela 2.2: Tensões de rotura da lâmina em várias direções.

$S_L\,[MPa]$	$S_T\,[MPa]$	$S_{LT}\,[MPa]$
2580	45	110

3 Estimação das Propridades Elásticas das Lâminas

3.1 Micromecânica

Neste trabalho, as propriedades elásticas equivalentes de cada lâmina são inicialmente calculadas com recurso às expressões da Micromecânica, nomeadamente da "regra das misturas". As propriedades da fibra e da resina, bem como as respetivas frações volúmicas, são as indicadas no capítulo anterior.

Considera-se que, no referencial local, a direção 1 é a direção de alinhamento das fibras, e as direções 2 e 3 são, consequentemente, direções transversais. Deste modo, assumindo isotropia transversal, podemos imediatamente concluir as seguintes relações:

$$\begin{cases} E_3 = E_2 \\ G_{13} = G_{12} \\ \nu_{13} = \nu_{12} \end{cases} \tag{3.1}$$

A regra das misturas permite-nos calcular os módulos de elasticidade, através das eqs. (3.2a) e (3.2b):

$$E_1 = E_m V_m + E_f V_f \tag{3.2a}$$

$$E_2 = \frac{E_m E_f}{E_m V_f + E_f V_m} \tag{3.2b}$$

Paralelamente, para calcular os coeficientes de Poisson ν_{12} e ν_{21} faz-se uso das equações (3.3a) e (3.3b).

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \tag{3.3a}$$

$$\nu_{21} = \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} \tag{3.3b}$$

A assunção de que os materiais são isotrópicos permite-nos calcular os módulos de corte da fibra e da matriz, através da equação (3.4).

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \tag{3.4}$$

o que nos permite obter a equação (3.5).

$$G_{LT} = G_{TL} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \tag{3.5}$$

Finalmente, as restantes propriedades (ν_{23} e G_{23}) podem ser obtidas através das equações (3.6a) e (3.6b).

$$\nu_{23} = \frac{\nu_m \nu_f}{\nu_m V_f + \nu_f V_m} \tag{3.6a}$$

$$G_{23} = \frac{E_3}{2(1+\nu_{23})} \tag{3.6b}$$

Os resultados obtidos encontram-se representados na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Valores das constantes de elasticidade obtidas através das equações da Micromecânica.

$E_1\ [GPa]$	$E_2 = E_3\ [GPa]$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$\nu_{21} = \nu_{31}$	$\nu_{23} = \nu_{32}$	$G_{12} = G_{13}\ [GPa]$	$G_{23}\ [GPa]$
$175,8000$	$10,9941$	$0,3700$	$0,0231$	$0,3684$	$3,9297$	$4,0171$

3.2 RVE - Discretização e Estudo de Convergência da Malha

Dadas as caraterísticas do RVE, torna-se necessário modelar a estrutura num *software* de elementos finitos, sendo que para este estudo optou-se por utilizar o *SIEMENS NX*.

Para a discretização do RVE foi utilizado o elemento CHEXA(20), pois permite um bom compromisso entre precisão dos resultados e utilização de recursos computacionais. A função *MeshMate* do NX foi utilizada, garantindo a continuidade entre as malhas das fibras e a malha da matriz. Optou-se por utilizar elementos de igual tamanho para todas as malhas.

Por forma a otimizar o intervalo de tempo necessário para a obtenção de resultados, foi efetuado um estudo de convergência da malha para uma condição fronteira de deslocamento segundo xx. A variável observada para o estudo foi a energia elástica de deformação total, algo que será necessário obter para todas as simulações efetuadas para o RVE. Começou-se por utilizar uma malha com elementos de $0,7\,mm$, reduzindo-se progressivamente o tamanho até que a diferença entre resultados fosse negligenciável.

Analisando os resultados presentes no **Anexo A**, é possível concluir que o resultado converge para uma malha com elementos de $0,3\,mm$. Nota-se que uma malha com 45% mais elementos provoca apenas uma alteração de $0,05\%$ no resultado.

3.3 RVE - Método das Tensões e Extensões Médias

O método das tensões e extensões médias utiliza o conceito de material equivalente, já referido na secção 1.1, onde as propriedades reais são as propriedades médias obridas do RVE.

Aplicando uma distribuição de tensões constante na superfície do RVE, é possível demonstrar que $\langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0$, ou seja, o campo de tensões uniforme aplicado ao RVE é igual à média do campo de tensões (ou seja, ao campo de tensões do material equivalente). O mesmo raciocínio é também aplicado no caso das extensões. Desta forma, impondo as respetivas condições de fronteira em cada um dos casos, é possível calcular as tensões e extensões médias e retirar as propriedades mecânicas do material utilizando a lei de *Hooke* - equação (3.7)

$$\overline{\varepsilon} = [S]\,\overline{\sigma} \Leftrightarrow \overline{\sigma} = [C]\,\overline{\varepsilon} \tag{3.7}$$

onde S é a matriz de complacência e C a matriz de rigidez.

3.3.1 Condições de Fronteira de Tensão

Por forma a obter todos os dados desejados, foram realizadas 6 simulações distintas, com as seguintes condições de fronteira:

- tensões normais na direção xx, yy e zz em ambas as faces perpendiculares ao respetivo eixo x, y e z (e.g. para xx é aplicada uma força de $1\,N$ segundo x nas faces perpendiculares ao eixo x);
- tensões de corte na direção xy e yz, xz e zx, yz e zy (e.g. para xy e yx é aplicada uma força na direção y, nas faces perpendiculares ao eixo x e simultaneamente uma força na direção x nas faces perpendiculares ao eixo y).

Uma vez que o RVE não tem qualquer grau de liberdade restrito, para evitar o surgimento de forças de reação em apoios fixos ou apoios de rolamento (forças estas que poderiam afetar a precisão dos resultados obtidos) foi utilizada a função *Inertia Relief* do *NX* [1].

Nota-se ainda que o cálculo das extensões médias é obtido considerando uma equivalência da energia elástica de deformação no RVE e no material equivalente, resultando então na equação (3.8).

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{V_{RVE}} \sum \overline{\varepsilon_e} \times \frac{U_e}{\mu_e} \tag{3.8}$$

Das simulações computacionais obtém-se a extensão (*Strain - Elemental* - $\overline{\varepsilon}_e$), a energia elástica de deformação (*Strain Energy* - U_e) e a densidade da energia elástica de deformação (*Strain Energy Density* - μ_e) - o quociente dos dois últimos parâmetros corresponde ao volume de cada elemento que é constante ao longo das 6 simulações. Este processo é repetido em todas as simulações.

Torna-se então possível obter cada uma das 6 colunas da matriz S, através da eq. (3.9). Os dados da tabela 3.9 são finalmente obtidos através de manipulações algébricas.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Tabela 3.2: Propriedades obtidas através do método das extensões médias (condições fronteira de tensão).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{13}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$62,739$	$16,890$	$17,987$	$2,189$	$2,403$	$2,235$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
$0,105$	$0,098$	$0,528$	$0,377$	$0,328$	$0,496$

3.3.2 Condições de Fronteira de Deslocamento

Para este caso foram novamente realizadas 6 simulações distintas, desta vez com as seguintes condições de fronteira:

- extensões unitárias na direção xx, yy e zz em todas as faces do RVE, através da imposição de deformações $u_x = x$, $u_y = y$ e $u_z = z$, respetivamente;
- extensões unitárias na direção xy, xz e yz em todas as faces do RVE, impondo deformações $u_x = y$ e $u_y = x$; $u_x = z$ e $u_z = x$; $u_y = z$ e $u_z = y$, respetivamente.

Nesta situação, a função *Inertia Relief* do *NX* não é utilizada pois o RVE está já totalmente restrito nos seus graus de liberdade.

Considerando novamente uma equivalência da energia elástica de deformação no RVE e no material equivalente, obtemos a equação (3.10), de onde podem ser calculadas as tensões médias.

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{V_{RVE}} \sum \overline{\sigma}_e \times \frac{U_e}{\mu_e} \tag{3.10}$$

Das simulações computacionais obtém-se a tensão (*Strain - Elemental* - $\overline{\sigma}_e$) e, à semelhança do que foi feito anteriormente, obtém-se a energia elástica de deformação (*Strain Energy* - U_e) e a densidade da energia elástica de deformação (*Strain Energy Density* - μ_e). Este processo é repetido em todas as simulações.

É assim possível obter cada uma das 6 colunas da matriz de rigidez C, que é depois invertida para obter a matriz de complacência S.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Novamente, através de simples manipulações algébricas, é possível obter os dados da tabela 3.3.

Tabela 3.3: Propriedades obtidas através do método das tensões médias (condições fronteira de deslocamento).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{13}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$173,320$	$48,933$	$44,735$	$51,448$	$48,681$	$35,390$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
$0,101$	$0,093$	$0,292$	$0,359$	$0,361$	$0,314$

3.4 RVE - Método da Energia

O método da energia baseia-se no lema de Hill que enuncia que 'a densidade de energia elástica média armazenada no RVE deve ser igual à densidade de energia elástica armazenada no material equivalente', que se traduz na equação (3.12).

$$U_{RVE} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\langle\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\rangle V_{RVE} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\langle\sigma_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{ij}\rangle V_{RVE} \tag{3.12}$$

Uma vez que $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = S_{ijkl}\langle\sigma_{ij}\rangle$, e assumindo que o material equivalente é ortotrópico (transformando S_{ijkl} numa matriz com apenas 9 constantes independentes), da equação (3.12) é possível deduzir

$$\frac{U_{RVE}}{V_{RVE}} = \frac{1}{2}\left[S_{11}\overline{\sigma}_1^2 + S_{22}\overline{\sigma}_2^2 + S_{33}\overline{\sigma}_3^2 + S_{44}\overline{\sigma}_{12}^2 + S_{55}\overline{\sigma}_{13}^2 + S_{66}\overline{\sigma}_{23}^2 + 2S_{12}\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2 + 2S_{13}\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_3 + 2S_{23}\overline{\sigma}_2\overline{\sigma}_3\right]$$

De forma análoga, temos

$$\frac{U_{RVE}}{V_{RVE}} = \frac{1}{2}\left[C_{11}\overline{\varepsilon}_1^2 + C_{22}\overline{\varepsilon}_2^2 + C_{33}\overline{\varepsilon}_3^2 + C_{44}\overline{\varepsilon}_{12}^2 + C_{55}\overline{\varepsilon}_{13}^2 + C_{66}\overline{\varepsilon}_{23}^2 + 2C_{12}\overline{\varepsilon}_1\overline{\varepsilon}_2 + 2C_{13}\overline{\varepsilon}_1\overline{\varepsilon}_3 + 2C_{23}\overline{\varepsilon}_2\overline{\varepsilon}_3\right]$$

Para ambas as condições de fronteira, o cálculo da densidade de energia elástica média é obtido dividindo a energia elástica total (soma das energias elementares) pelo volume total da malha, que é obtido pela soma dos volumes de cada elemento, que por sua vez são obtidos através do quociente da energia e densidade de energia elementares.

3.4.1 Condições de Fronteira de Tensão

Foram agora realizadas 9 simulações distintas, sendo que 6 delas correspondem exatamente às simulações descritas na secção 3.3.1. Porém, uma vez que a equação (3.4) tem estados mistos de tensões, é necessário impôr 3 condições de fronteira adicionais: tensões normais na direção xx e yy; xx e zz; yy e zz em ambas as faces perpendiculares aos respetivos eixos x e y; x e z; y e z.

Utiliza-se novamente a função *Inertia Relief* do *NX*, sendo então possível obter cada uma das 9 entradas da matriz S, de onde se retiram as propriedades mecânicas da tabela 3.4.

Tabela 3.4: Propriedades obtidas através do método da energia (condições fronteira de tensão).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{13}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$65,891$	$17,295$	$18,431$	$2,835$	$3,055$	$2,903$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
$0,103$	$0,087$	$0,528$	$0,393$	$0,311$	$0,496$

3.4.2 Condições de Fronteira de Deslocamento

De forma semelhante, reutilizam-se as 6 simulações já descritas na secção 3.3.2. acrescentando-se ainda as seguintes 3 condições: extensões unitárias na direção xx e yy; xx e zz; yy e zz em todas as faces do RVE, através da imposição de deformações $u_x = x$ e $u_y = y$; $u_x = x$ e $u_z = z$; $u_y = y$ e $u_z = z$, respetivamente.

Obtendo as entradas da matriz C, calcula-se a sua inversa e obtém-se os dados da tabela 3.5.

Tabela 3.5: Propriedades obtidas através do método da energia (condições fronteira de deslocamento).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{13}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$175,819$	$50,105$	$45,797$	$50,263$	$45,887$	$33,783$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
$0,102$	$0,094$	$0,302$	$0,359$	$0,360$	$0,331$

3.5 PREMAT

Para além dos métodos acima indicados, o *software* PREMAT foi também utilizado para a obtenção das propriedades equivalentes. Este programa permite, através de uma interface em MATLAB, calcular as propriedades médias de um RVE com base na teoria da Homogeneização. Para o presente relatório, foram utilizados dois RVE's - quadrado ($\frac{a_1}{b_1} = 1$) e retangular ($\frac{a_1}{b_1} = 0.9$), ambos com uma fibra central e circular ($\frac{a}{b} = 1$).

Após a escolha da geometria adequada (o que, no caso deste *software*, implica a seleção da opção *Elliptical Fiber - Rectangular Array*), o primeiro passo consistiu em definir o tipo de malha a ser utilizada para a realização das simulações necessárias. Após um estudo preliminar onde foram efetuados testes com os diferentes tipos de elementos fornecidos pelo programa, foi decidido utilizar elementos hexaédricos (8 nós), pois esta escolha revelou ser aquela que apresentava melhor compromisso entre precisão numérica e esforço computacional.

Seguidamente, por forma a proceder ao cálculo das propriedades pretendidas, é necessário introduzir as características relevantes ao problema em análise, tanto da fibra como da matriz, em conformidade com os valores apresentados na tabela 2.1 [2]. Relativamente ao parâmetro de refinamento da malha - 'ian' - este foi definido, para cada um dos RVE's, através da realização de um estudo de convergência, estando os resultados apresentados no **Anexo B**. Para efeitos representativos, é apenas apresentada a evolução do parâmetro E_2.

Os valores finais obtidos, tanto para a o RVE quadrado como para o RVE retangular, encontram-se apresentados nas tabelas 3.6 e 3.7, respetivamente:

Tabela 3.6: Propriedades obtidas através do software PREMAT ($\frac{a_1}{b_1} = 1; ian = 4$).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{31}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$175,60$	$27,828$	$27,828$	$6,5285$	$6,5285$	$4,4726$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
0.058204	0.058204	0.33396	0.36726	0.36726	0.33396

Tabela 3.7: Propriedades obtidas através do software PREMAT ($\frac{a_1}{b_1} = 0.9; ian = 3$).

$E_1\,[GPa]$	$E_2\,[GPa]$	$E_3\,[GPa]$	$G_{12}\,[GPa]$	$G_{31}\,[GPa]$	$G_{23}\,[GPa]$
$175,62$	$33,707$	$25,111$	$8,0731$	$5,6592$	$4,4889$
ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
0.069659	0.053084	0.27621	0.36295	0.37127	0.37076

4 Análise do Laminado

Como requisitado no enunciado do trabalho proposto, é necessário selecionar 2 dos conjuntos de propriedades equivalentes calculadas no capítulo 3. Optou-se por utilizar as propriedades equivalentes obtidas para o RVE com recurso ao método da energia, tanto para as condições de fronteira de tensão, como de deformação.

A escolha baseou-se por exclusão dos restantes conjuntos. As propriedades obtidas pela micromecânica refletem os resultados e métodos já utilizados no primeiro trabalho, não sendo, portanto, uma escolha interessante. As propriedades obtidas pelo PREMAT foram excluídas pois não existe um conhecimento tão profundo do modo como o programa calcula as propriedades mecânicas, o que aumentaria a dificuldade em analisar os resultados criticamente. Dos conjuntos de propriedades que restam (os obtidos pelo RVE), é mais interessante comparar propriedades provenientes do mesmo método para as diferentes condições fronteira, ao invés de métodos diferentes para as mesmas condições fronteira; deste modo, havendo mais informação disponível relativamente ao método da energia, optou-se por excluir o método das tensões e extensões médias.

4.1 Modelação, Discretização e Estudo de Convergência da Malha

O laminado é considerado como uma superfície bidimensional de dimensões $200 \times 56,69\,mm$, não sendo necessário atribuir espessura à geometria. Foi gerada uma malha com elementos CQUAD4 e efetuado um estudo de convergência da energia de deformação para um ensaio de tração com uma força $F = 5\,kN$ aplicada. Os resultados da análise encontram-se no **Anexo C**. O estudo concluiu que os resultados convergem para uma malha de $1,5\,mm$, sendo que uma malha com aproximadamente o dobro do número de elementos mostra um desvio de apenas $0,002\%$.

Importa relembrar que a espessura do laminado medida experimentalmente foi de $h = 4,29\,mm$, ou seja, assume-se que cada lâmina tem uma espessura igual a $h_i = \frac{4,29}{12} \approx 0,179\,mm$. O laminado é então modelado no NX de acordo com a sequência de empilhamento E $[-45_3/+45_3/90_5/0]_S$ (ver **Anexo D**).

4.2 Ensaio de Tração

Para o ensaio de tração, uma das arestas curtas foi fixa em todos os seus graus de liberdade (deslocamento e rotação) e a outra aresta curta foi fixa em todos os graus de liberdade exceto no seu deslocamento segundo o eixo x (encastramento móvel). Adicionalmente, foi aplicada uma carga de $5248,0\,N$ segundo a direção x nesta última aresta. Este valor de carga foi escolhido pois foi uma das cargas para a qual foi registada uma extensão no ensaio experimental. Nota-se que, optando-se por uma solução linear (no NX, *SOL 101 Linear Statics*), é suficiente analisar apenas um valor de carregamento.

Assim, para cada conjunto de propriedades equivalentes escolhidas, retirou-se o valor da extensão segundo xx a $x = L/2$ do laminado, que corresponde ao mesmo local onde estava colocado um extensómetro no ensaio laboratorial. Os valores obtidos encontram-se na tabela 4.1, juntamente com uma aproximação analítica do módulo de Young E_x, calculada através da expressão $E_x = \dfrac{F}{\varepsilon A}$.

Tabela 4.1: Resultados para o ensaio de tração.

	$F\,[N]$	$\varepsilon_x\,[\mu\varepsilon]$	$E_x\,[GPa]$
Energia - Deformação	5248	$181,64$	$118,80$
Energia - Tensão	5248	$757,83$	$28,475$
Experimental	5248	542	$39,044$

Os valores obtidos mostram que o conjunto de propriedades da condição de fronteira (CF) de tensão aproximam-se mais do valor obtido experimentalmente, com um erro de $39,8\%$. As propriedades através da CF de deformação apresentam um erro de $66,49\%$. Os resultados entre os dois tipos de CF são substancialmente diferentes, o que era esperado dado que os valores do módulo de rigidez segundo xx para a lâmina diferem em mais de $100\,GPa$.

Foram ainda extraídos os valores de tensão em cada lâmina, segundo xx, yy e xy. Uma vez que os valores do NX referem-se às coordenadas locais $(1,2)$, foi necessário converter os resultados para coordenadas globais (x,y) (através da equação E.1). Os valores e respetivos gráficos de distribuição de tensão encontram-se no **Anexo E**.

4.3 Ensaio de Flexão

Para este ensaio, foi aplicada uma carga de $8,0\,N$ numa das arestas curtas da placa, no sentido negativo do eixo z (transversal ao plano da placa). A outra aresta curta foi fixa em todos os seus graus de liberdade. A escolha da solução linear faz com que, tal como acontece para a tração, seja suficiente a realização do estudo para uma única carga.

Novamente, para cada conjunto de propriedades equivalentes escolhidas, foi retirado o valor da extensão segundo xx, desta vez num ponto a $50\,mm$ do encastramento, correspondente ao ponto onde estava também colocado o extensómetro no ensaio laboratorial. Foi também retirada a tensão segundo xx nesse mesmo ponto e o valor do deslocamento na extremidade do laminado. A tabela 4.2 mostra os resultados obtidos, juntamente com duas aproximações analíticas distintas para o cálculo do módulo de Young em flexão E_{f_x}.

Tabela 4.2: Resultados para o ensaio de flexão.

	$F\,[N]$	$u_{max}\,[mm]$	$\varepsilon_x\,[\mu\varepsilon]$	$\sigma_{f_x}\,[MPa]$	$E_{f_x}\,[GPa]$ (a)	$E_{f_x}\,[GPa]$ (b)
Energia - Deformação	8	$0,386$	$44,576$	$6,9008$	$148,1748$	$154,8098$
Energia - Tensão	8	$2,598$	$329,877$	$7,58504$	$22,0152$	$22,9935$
Experimental	8	$2,222$	260	$6,901$	$24,8283$	$26,20466$

Nota-se que a tensão para o ensaio experimental foi obtida analiticamente através da condição $\sigma_{f_x} = \frac{(L-d)Ph}{2I_y}$ com $I_y = \frac{bh^3}{12}$. O módulo de Young associado ao deslocamento máximo (a) é obtido através da expressão $E_{f_x} = -\frac{PL^3}{3\delta I_y}$, enquanto que o módulo associado à tensão (b) é dado por $E_{f_x} = \frac{\sigma_{f_x}}{\varepsilon_x}$.

Os resultados obtidos mostram novamente que o conjunto de propriedades da CF de tensão estimam de forma mais adequada os valores experimentais, principalmente no que toca ao valor do deslocamento máximo na extremidade do laminado. Ambas as CF aproximam-se do valor de σ_{f_x}, mas esta aproximação tem pouca relevância uma vez que a tensão depende largamente do local de medição e da geometria do laminado. Já a extensão (que depende do material) é muito melhor aproximada pela CF de tensão.

Foram também traçados, de forma análoga ao ensaio de tração, os gráficos de distribuição de tensão, que se encontram no **Anexo F**.

4.4 Análise de Rotura

No trabalho experimental foi feita uma análise da força máxima que se poderia aplicar, em caso de tração, ao laminado. Por forma a fazer uma análise equivalente para os conjuntos de propriedades em estudo, foi realizado um processo iterativo (com intervalos de força de $500\,N$, por forma a limitar o número de simulações necessárias) começando por utilizar o valor máximo de força obtido no trabalho experimental.

Foram então retirados os valores de tensão na zona central do laminado, para evitar as concentrações de tensão máxima (singularidades) na extremidade encastrada do laminado. Estes valores foram comparados com os da tabela 2.2.

A análise concluiu que as lâminas com as fibras orientadas a $90\,°$ são as primeiras a entrar em rotura, o que seria expectável visto que o carregamento ocorre na direção transversal das mesmas e o valor de

Tabela 4.3: Resultados para a análise de rotura.

	$F\,[N]$	$\theta°$	$\sigma_L\,[MPa]$	$\sigma_T\,[MPa]$	$\sigma_{LT}\,[MPa]$
Energia - Deformação	33500	90	$-36,526$	$44,983$	$0,001$
Energia - Tensão	133000	90	$-730,910$	$44,957$	$0,000$
Experimental	$42256,58$	90	$-175,114$	$45,000$	$0,000$

rotura transversal da lâmina é o mais reduzido.

O resultado para o conjunto de propriedades das CFs de deformação é o que mais se aproxima do valor experimental, embora, mesmo assim, apresente um desvio relativo de $20,7\%$. Já o resultado para o conjunto de propriedades das CFs de tensão ultrapassa em larga escala o valor experimental, o que não seria expectável pois este conjunto de propriedades é que mostra melhor aproximação para os ensaios acima mostrados.

4.5 Análise Modal para Flexão

Para a análise modal, pretende-se analisar os modos de vibração e respetivas frequências naturais do laminado, utilizando as condições fronteira de flexão, ou seja, uma das arestas foi fixa em todos os graus de liberdades e as outras três permanecem livres. Para cada conjunto de propriedades em estudo, realizou-se uma simulação para o tipo de solução *SOL 103 Real Eigenvalues* do *NX*.

Uma vez que experimentalmente não se obtiveram resultados, torna-se importante comparar os valores do *NX* com aproximações analíticas. Para tal, recorre-se à equação (4.1), válida para o modelo de viga de Euler-Bernoulli. De referir que o rácio comprimento/largura do laminado é aproximadamente $3,5$, não se podendo considerar que seja uma viga, mas sim uma placa. Desta forma, espera-se que esta discrepância origine desvios nos resultados.

$$\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E^b_{xx} I_{yy}}{\rho b h}} \tag{4.1}$$

Na eq. (4.1), ω_i corresponde à frequência natural do modo i que é definido pelo valor próprio λ_i. Os valores próprios são obtidos através da resolução da equação transcendente (4.2), que resulta da imposição das condições de fronteira do ensaio de flexão[1]. E^b_{xx} corresponde ao módulo de Young em flexão do laminado e I_{yy} ao momento de inércia da secção transversal da placa; ρ é a densidade do laminado, b a sua largura e h a espessura total.

$$\cos(\lambda_i)\cosh(\lambda_i) + 1 = 0 \tag{4.2}$$

Na tabela 4.4 encontram-se os resultados para os conjuntos de propriedades em estudo, juntamnte com as respetivas soluções analíticas.

Nota-se que os resultados para ambos os conjuntos de propriedades aproximam-se bastante das soluções analíticas até ao 2º modo. Já a partir do 3º modo, estes começam a divergir de forma cada vez mais notória. Ora, visualizando os modos no NX, é possível notar que o 3º modo revela algum efeito de torção e, por exemplo, o 4º modo apresenta flexão na direção y (ver **Anexo G**). Estes modos não refletem o modelo analítico da viga, onde se considera apenas o deslocamento transversal, uma vez que o laminado foi modelado como uma superfície bidimensional. Por forma a poder comparar modos mais elevados, seria necessário modelar o laminado como uma geometria unidimensional.

De referir também que todas as frequências naturais são superiores para o conjunto de propriedades das CF de extensão. Tal justifica-se pelo facto das CF de deformação apresentarem valores superio-

[1] Os 10 primeiros valores próprios da equação (4.2) foram obtidos utilizando o MATLAB: S=vpasolve(cos(x)*cosh(x)+1==0,x)

Tabela 4.4: Resultados para análise modal.

	Energia - Deformação		**Energia - Tensão**	
Modo	NX	Analítico	NX	Analítico
1	$173,3350$	$174,1361$	$68,8869$	$67,1108$
2	$1060,7800$	$1091,3011$	$432,8920$	$420,5797$
3	$1106,4400$	$3055,6962$	$618,9470$	$1177,6437$
4	$1920,9500$	$5987,8357$	$946,1080$	$2307,6696$
5	$3007,6800$	$9898,4391$	$1251,2300$	$3814,7885$
6	$3426,6800$	$14786,5572$	$1892,6100$	$5698,6346$
7	$5857,0700$	$20652,2988$	$2526,0300$	$7959,2500$
8	$6213,7500$	$27495,6641$	$3268,2000$	$10596,6346$
9	$9333,7900$	$35316,3885$	$4207,1900$	$13610,6866$
10	$9413,6000$	$44114,9699$	$4599,4200$	$17001,5976$

res para o módulo de rigidez e módulo de corte, sendo que materiais mais rígidos tendem a apresentar frequências naturais mais elevadas.

4.6 Solução Aproximada para o Deslocamento Transversal da Placa

Partindo da definição de energia potencial da equação (4.3), sabe-se que, para a condição de equilíbrio, a energia deve ser mínima, ou seja, importa resolver o sistema da equação (4.4).

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T[K]\{\Delta\} - \{\Delta\}^T\{F\} \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\Delta_i} = 0 \Rightarrow [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad , \tag{4.4}$$

onde K é a matriz de rigidez, Δ é o vetor de deslocamentos e F é o vetor de forças.

Como pedido no enunciado, é feita uma aproximação cúbica da solução do deslocamento transversal:

$$w_0 = w_1^0 + w_2^0 x_1 + w_3^0 x_2 + w_4^0 x_1 x_2 + w_5 x_1^2 + w_6^0 x_2^2 + w_7^0 x_1^3 + w_8^0 x_1^2 x_2 + w_9^0 x_1 x_2^2 + w_{10}^0 x_2^3 \tag{4.5}$$

Aplicando as condições de fronteira essenciais no encastramento, w_0 fica definido da seguinte forma:

$$w_0 = Ax_1^2 + Bx_1^3 + Cx_1^2 x_2 = x_1^2(A + Bx_1 + Cx_2) \tag{4.6}$$

onde A, B e C são as entradas do vetor Δ e onde é possível definir $\phi_1 = x_1^2$, $\phi_2 = x_1^3$ e $\phi_3 = x_1^2 x_2$. Por forma a resolver o sistema da eq. (4.4), define-se matriz de rigidez:

$$[K] = \int_S [B]^T[D][B]\, dx_1 dx_2 \quad , \tag{4.7}$$

sendo que o seu cálculo, juntamente com o cálculo de B e D, está demonstrado no **Anexo H.**

Resta definir o vetor de forças F, sendo que para o ensaio de flexão, existe uma carga ($P = 8\,N$) na extremidade da placa, no seu eixo central:

$$F = P \times w(L, b/2) = P \times w_0(L, b/2) = P \times \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} (L, b/2) = P \times \begin{Bmatrix} L^2 \\ L^3 \\ \frac{L^2 b}{2} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

Finalmente, através do código MATLAB desenvolvido (secção H1 do anexo) é possível obter os seguintes resultados:

$$\Delta_{CF-\sigma} = \begin{Bmatrix} 6880,197 \\ -10,40247 \\ 7,841046 \end{Bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$\Delta_{CF-\varepsilon} = \begin{Bmatrix} 1688,797 \\ -2,577359 \\ 2,306888 \end{Bmatrix} \times 10^{-8}$$

$$w_{CF-\sigma}(L, b/2) = 2,0087\, mm$$

$$w_{CF-\varepsilon}(L, b/2) = 0,4955\, mm$$

Observando novamente a tabela 4.2, nota-se que existe um desvio de $22,68\%$ relativamente ao valor do deslocamento máximo obtido para o conjunto de propriedades associadas às CF de tensão e um desvio de $28,36\%$ para as propriedades de CF de deformação.

5 Discussão de Resultados

Relativamente aos conjuntos de propriedades estudados referentes ao RVE com o método da energia, nota-se, através das tabela 3.4 e 3.5, que as CF de tensão representam um limite inferior para as propriedades mecânicas, enquanto que as CF de deformação representam um limite superior. Este facto vai de encontro ao modelo dos limites de Reuss e Voigt, portanto, embora não seja possível determinar as propriedades exatas do material, sabe-se que estas deverão estar na região definida pelos dois limites superior e inferior.

De referir também que as propriedades resultantes da imposição de CF de tensão produziram sempre resultados mais próximos do ensaio experimental de tração e flexão. Os gráficos de distribuição de tensão nos anexos E e F estão também em concordância com os resultados experimentais realizados, sendo novamente as propriedades relacionadas com as CF de tensão que mais se aproximam destes resultados.

Referências

[1] NX Nastran User's Guide. *Introduction to Inertia Relief*. URL: `http://www2.me.rochester.edu/courses/ME204/nx_help/index.html#uid:id503206`. (Acesso: 07/02/2022).

[2] Professor José Miranda Guedes. *Guia de Utilização do software PREMAT*. Instituto Superior Técnico.

A Estudo da Convergência da Malha - RVE

Tabela A.1: Análise da convergência da malha do RVE para a energia elástica de deformação total.

Tamanho $[mm]$	Nº de Elementos	Energia de Deformação $[N.mm]$	Variação $[\%]$	Δt
$0,7$	1620	$2,6708E+07$	-	5 seg.
$0,6$	2486	$2,6668E+07$	$0,05$	8 seg.
$0,5$	4771	$2,6635E+07$	$0,06$	30 seg.
$0,4$	9584	$2,6611E+07$	$0,05$	50 seg.
$\mathbf{0,3}$	$\mathbf{19184}$	$\mathbf{2,6568E+07}$	$\mathbf{0,08}$	**3 min.**
$0,25$	27820	$2,6555E+07$	$0,02$	7 min.
$0,2$	47392	$2,6540E+07$	$0,06$	27 min.

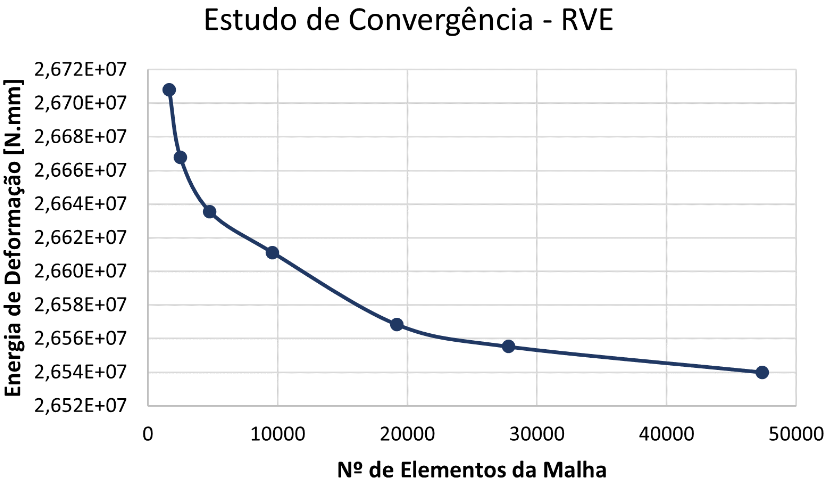


Figura A.1: Análise da convergência da malha do RVE para a energia elástica de deformação total.

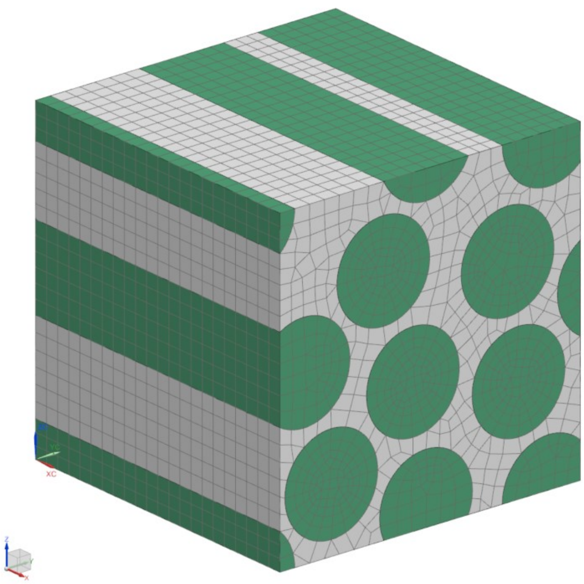


Figura A.2: RVE discretizado com uma malha de $0,3\,mm$ (19184 elementos) no *SIEMENS NX*.

B Estudo da Covergência da Malha - PREMAT

Tabela B.1: Análise da convergência da malha do PREMAT para o módulo de Young transversal E_2.

	$a_1/b_1 = 1$		$a_1/b_1 = 0,9$	
Parâmetro de Refinamento	$E_2\ [GPa]$	**Variação** $[\%]$	$E_2\ [GPa]$	**Variação** $[\%]$
2	$28,071$	-	$33,794$	-
3	$27,941$	$0,4631$	$\mathbf{33,707}$	$\mathbf{0,2574}$
4	$\mathbf{27,828}$	$\mathbf{0,4044}$	$33,680$	$0,0801$
5	$27,809$	$0,0683$	$33,668$	$0,0356$
6	$27,783$	$0,0935$	$33,663$	$0,0149$
7	$27,777$	$0,0216$	$33,660$	$0,0089$

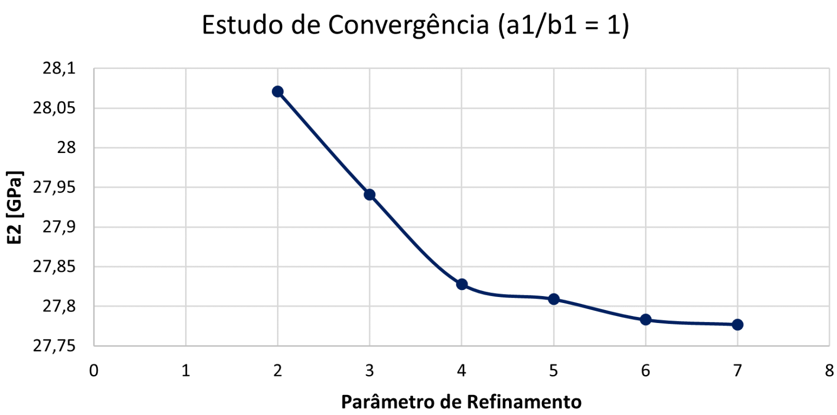


Figura B.1: Análise da convergência da malha do PREMAT para o módulo de Young transversal E_2 $(a_1/b_1 = 1)$.

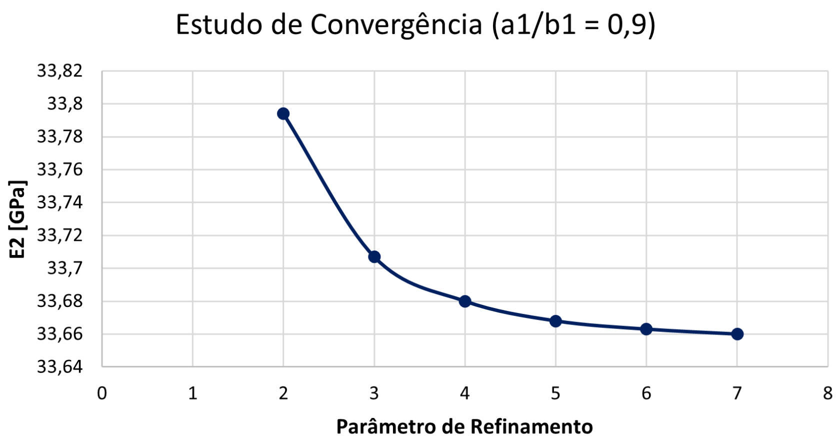


Figura B.2: Análise da convergência da malha do PREMAT para o módulo de Young transversal E_2 $(a_1/b_1 = 0,9)$.

C Estudo da Convergência da Malha - Laminado

Tabela C.1: Análise da convergência da malha do laminado para a energia elástica de deformação total.

Tamanho $[mm]$	Nº de Elementos	Energia de Deformação $[N.mm]$	Variação $[\%]$	Δt $[seg.]$
10	120	$1,21631E+02$	-	1
5	440	$1,21739E+02$	$0,064$	2
3	1273	$1,21777E+02$	$0,020$	4
2	2800	$1,21788E+02$	$0,005$	7
$\mathbf{1,5}$	$\mathbf{5054}$	$\mathbf{1,21798E+02}$	$\mathbf{0,004}$	$\mathbf{10}$
1	11400	$1,21802E+02$	$0,002$	12
0.8	17750	$1,21804E+02$	$0,001$	30

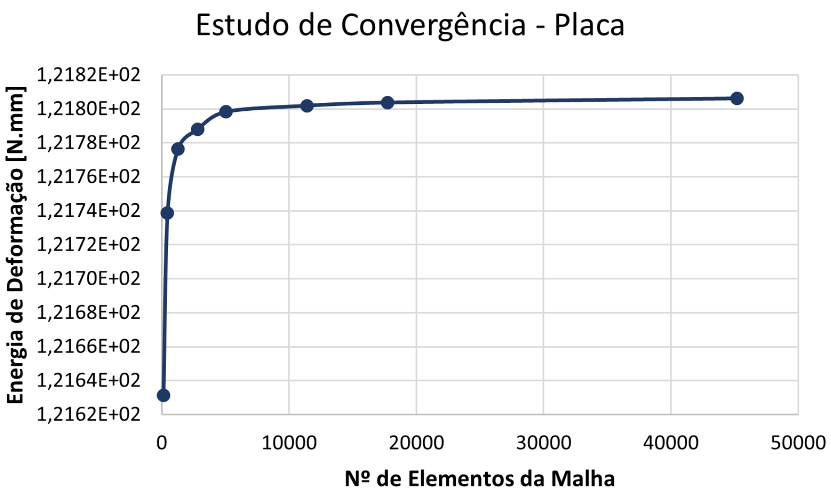


Figura C.1: Análise da convergência da malha do laminado para a energia elástica de deformação total.

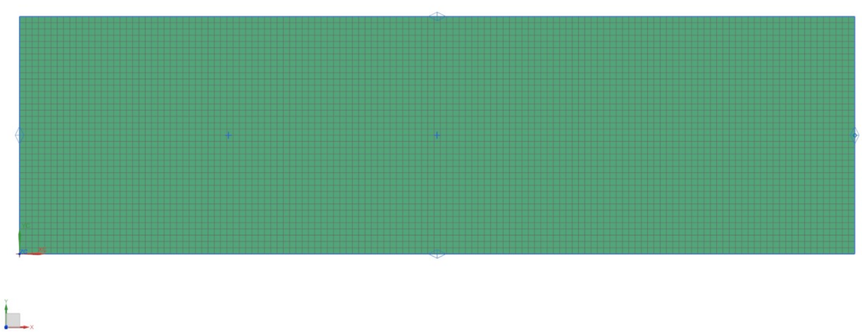
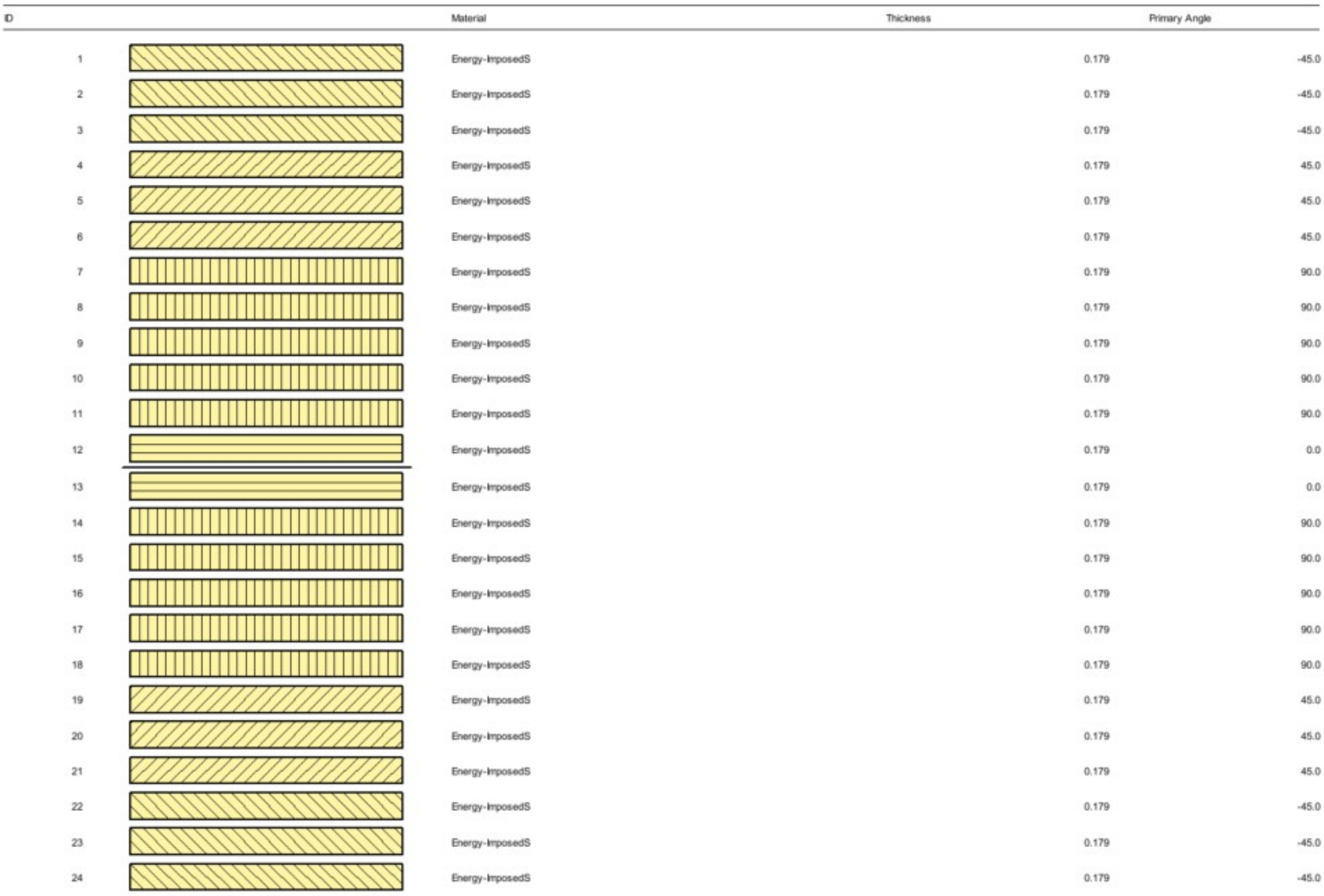


Figura C.2: Laminado discretizado com uma malha de $1,5\,mm$ (5054 elementos) no *SIEMENS NX*.

D Sequência de Empilhamento do Laminado



ID	Material	Thickness	Primary Angle
1	Energy-ImposedS	0.179	-45.0
2	Energy-ImposedS	0.179	-45.0
3	Energy-ImposedS	0.179	-45.0
4	Energy-ImposedS	0.179	45.0
5	Energy-ImposedS	0.179	45.0
6	Energy-ImposedS	0.179	45.0
7	Energy-ImposedS	0.179	90.0
8	Energy-ImposedS	0.179	90.0
9	Energy-ImposedS	0.179	90.0
10	Energy-ImposedS	0.179	90.0
11	Energy-ImposedS	0.179	90.0
12	Energy-ImposedS	0.179	0.0
13	Energy-ImposedS	0.179	0.0
14	Energy-ImposedS	0.179	90.0
15	Energy-ImposedS	0.179	90.0
16	Energy-ImposedS	0.179	90.0
17	Energy-ImposedS	0.179	90.0
18	Energy-ImposedS	0.179	90.0
19	Energy-ImposedS	0.179	45.0
20	Energy-ImposedS	0.179	45.0
21	Energy-ImposedS	0.179	45.0
22	Energy-ImposedS	0.179	-45.0
23	Energy-ImposedS	0.179	-45.0
24	Energy-ImposedS	0.179	-45.0

Figura D.1: Sequência de empilhamento do laminado no *NX*.

E Distribuição de Tensões para o Ensaio de Tração

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c^2 & s^2 & 2cs\\ s^2 & c^2 & -2cs\\ -cs & cs & c^2-s^2\end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \tag{E.1}$$

	Energia - Deformação		Ref. Local	Energia - Deformação		Ref. Global
	F=9000N	Tração		F=9000N	Tração	
Ply	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy
-45	49,9909	4,3627	9,7022	36,879	17,4746	-22,8141
45	49,9909	4,3627	-9,7022	36,879	17,4746	22,8141
90	-9,81036	12,0846	-3,84E-04	12,0846	-9,8104	3,84E-04
0	83,5705	22,8676	-2,17E-04	83,5705	22,8676	-0,00022

	Energia - Tensão		Ref. Local	Energia - Tensão		Ref. Global
	F=9000N	Tração		F=9000N	Tração	
Ply	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy
-45	45,3574	33,3412	14,1672	53,5165	25,1821	-6,0081
45	45,3574	33,3412	-14,1672	53,5165	25,1821	6,0081
90	-49,4408	3,04306	-1,11E-05	3,04306	-49,441	1,11E-05
0	156,486	47,3234	-4,61E-06	156,486	47,3234	-4,6E-06

Figura E.1: Valores de tensão do ensaio de tração extraídos do *NX* e transformados para o ref. global.

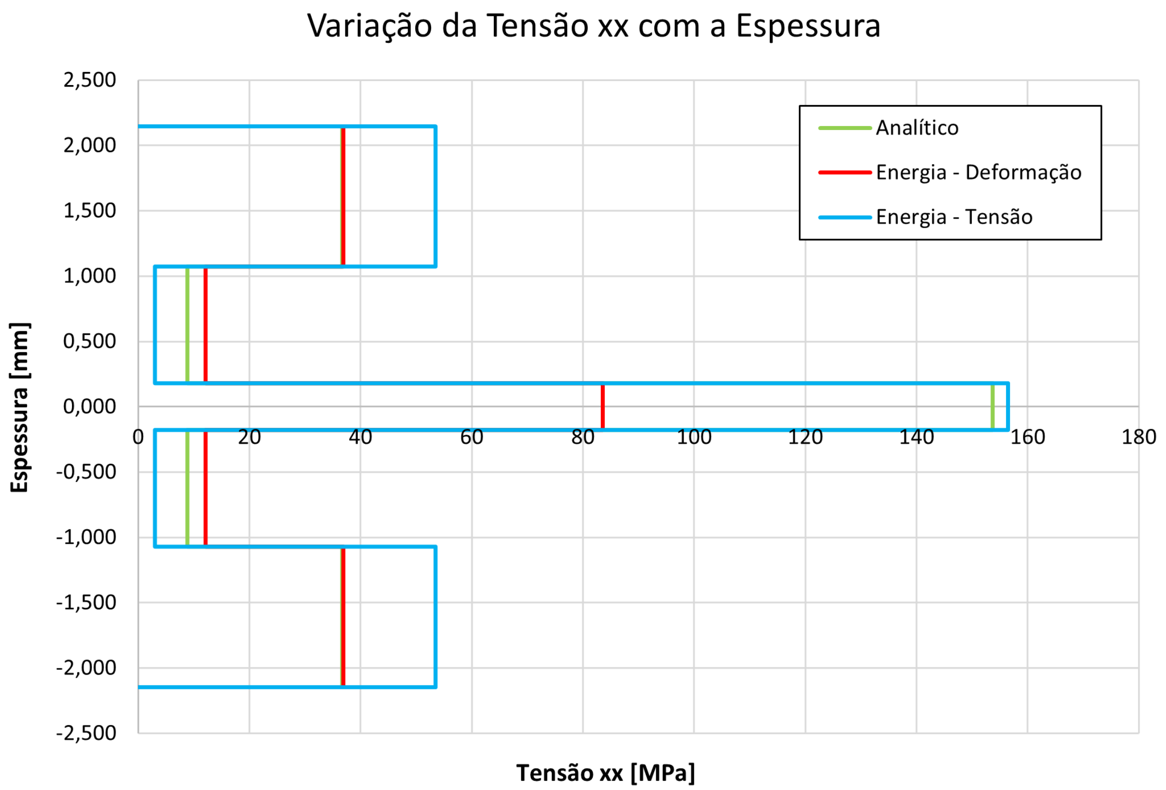


Figura E.2: Variação de σ_{xx} com a espessura do laminado para o ensaio de tração.

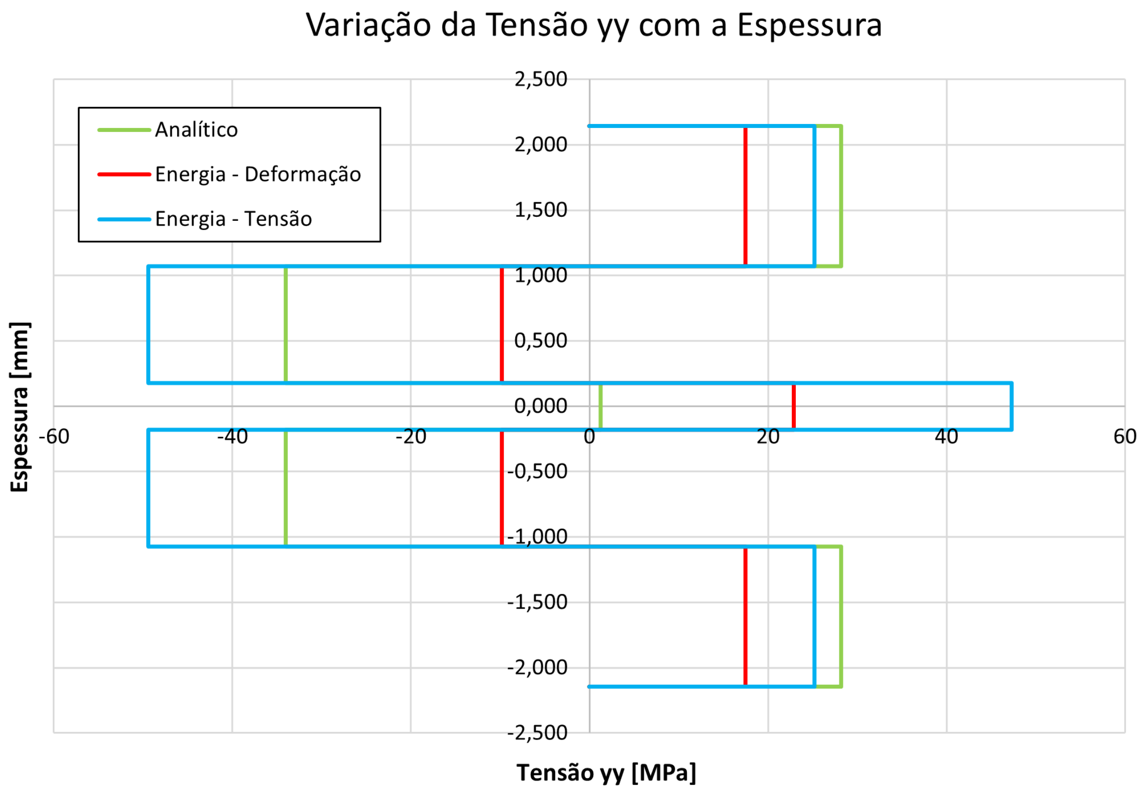


Figura E.3: Variação de σ_{yy} com a espessura do laminado para o ensaio de tração.

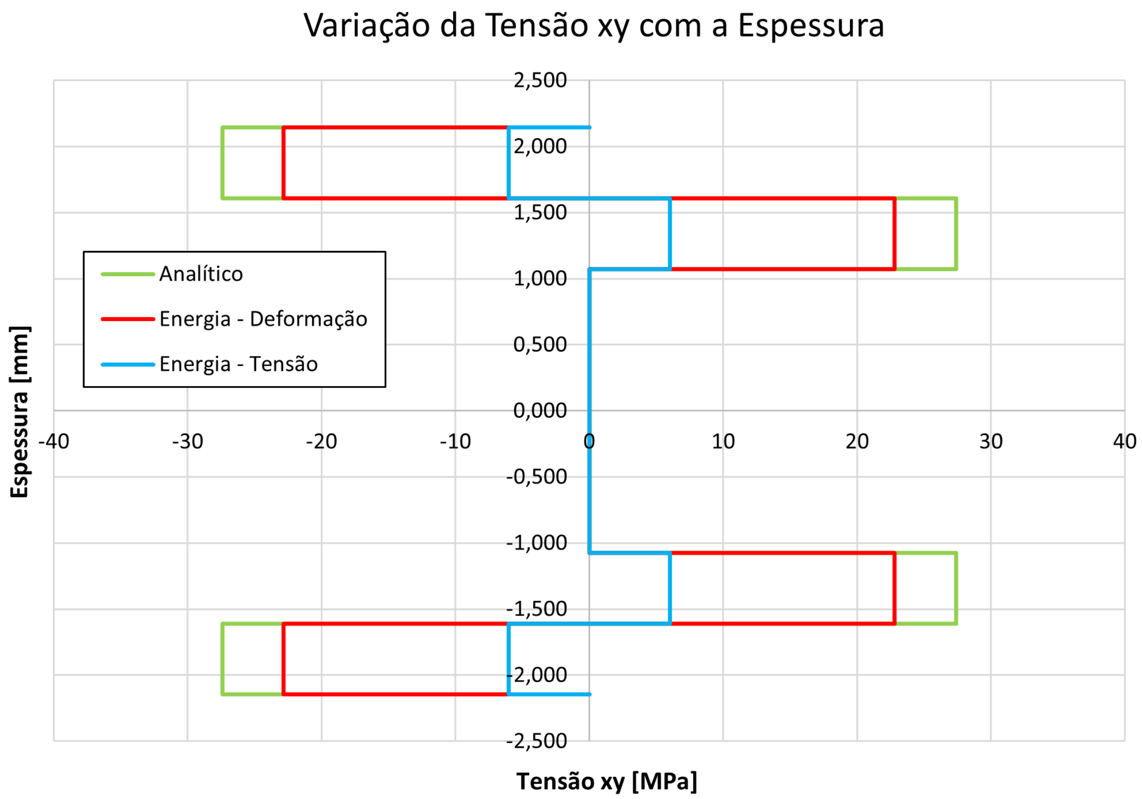


Figura E.4: Variação de τ_{xy} com a espessura do laminado para o ensaio de tração.

F Distribuição de Tensões para o Ensaio de Flexão

	Energia - Deformação		Ref. Local	Energia - Deformação		Ref. Global
	F=10N	Flexão		F=10N	Flexão	
	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy
neg45 top	2,20E+03	1,20E+03	1,74E+03	3,438E+03	-3,563E+01	-5,013E+02
neg45 bot	1,65E+03	9,00E+02	1,30E+03	2,578E+03	-2,673E+01	-3,760E+02
pos45 top	2,31E+03	9,75E+02	-1,30E+03	2,943E+03	3,377E+02	6,649E+02
pos45 bot	1,54E+03	6,50E+02	-8,68E+02	1,962E+03	2,251E+02	4,433E+02
90 top	-4,58E+02	4,20E+02	-1,06E+02	4,198E+02	-4,582E+02	1,064E+02
90 bot	-7,64E+01	7,00E+01	-1,77E+01	6,996E+01	-7,637E+01	1,774E+01
0 top	5,16E+02	1,38E+02	1,77E+01	5,16E+02	1,38E+02	1,77E+01
0 bot	-1,12E-12	-3,01E-13	-3,86E-14	-1,12E-12	-3,01E-13	-3,86E-14

	Energia - Tensão		Ref. Local	Energia - Tensão		Ref. Global
	F=10N	Flexão		F=10N	Flexão	
	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy	sigma-xx	sigma-yy	sigma-xy
neg45 top	3,33E+03	1,80E+03	1,03E+03	3,598E+03	1,536E+03	-7,680E+02
neg45 bot	2,50E+03	1,35E+03	7,73E+02	2,698E+03	1,152E+03	-5,760E+02
pos45 top	3,85E+03	1,64E+03	-7,73E+02	3,517E+03	1,971E+03	1,105E+03
pos45 bot	2,57E+03	1,09E+03	-5,15E+02	2,345E+03	1,314E+03	7,368E+02
90 top	-6,72E+03	-9,04E+02	-2,62E+01	-9,035E+02	-6,717E+03	2,622E+01
90 bot	-1,12E+03	-1,51E+02	-4,37E+00	-1,506E+02	-1,120E+03	4,370E+00
0 top	1,83E+03	4,83E+02	4,37E+00	1,83E+03	4,83E+02	4,37E+00
0 bot	-3,97E-12	-1,05E-12	-9,50E-15	-3,97E-12	-1,05E-12	-9,50E-15

Figura F.1: Valores de tensão do ensaio de flexão extraídos do *NX* e transformados para o ref. global.

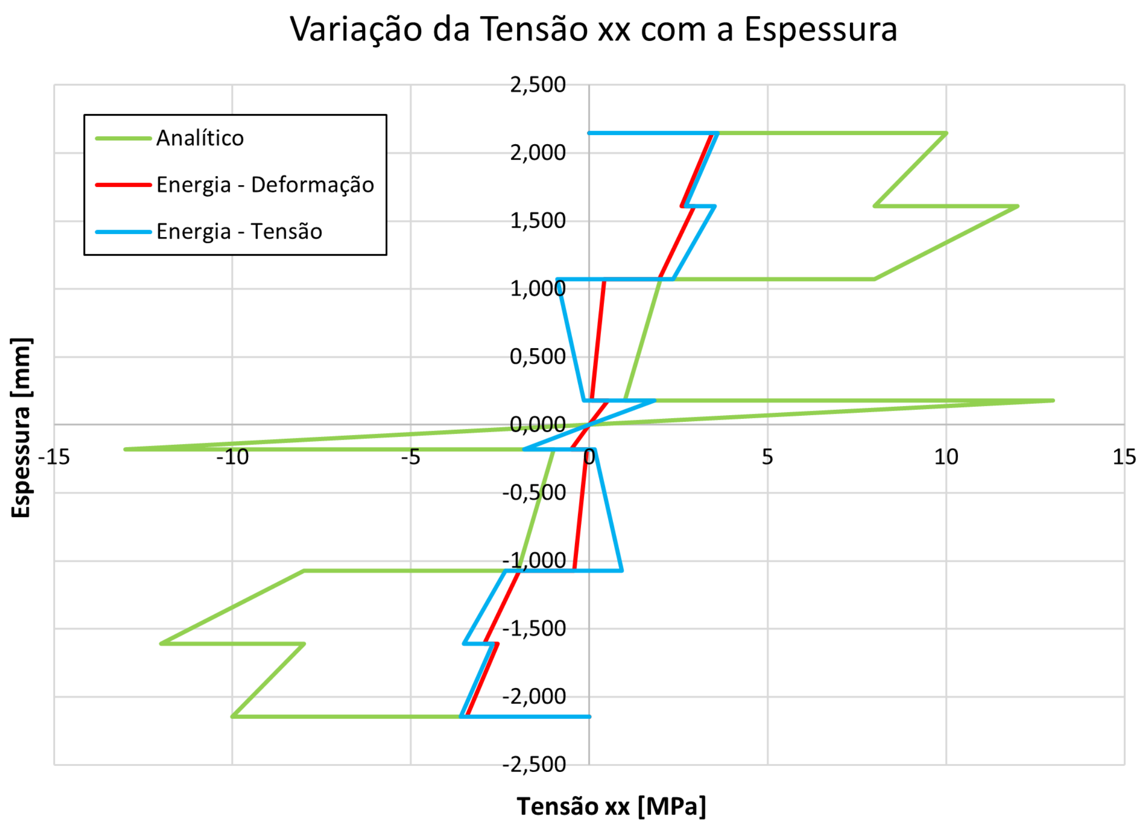


Figura F.2: Variação de σ_{xx} com a espessura do laminado para o ensaio de flexão.

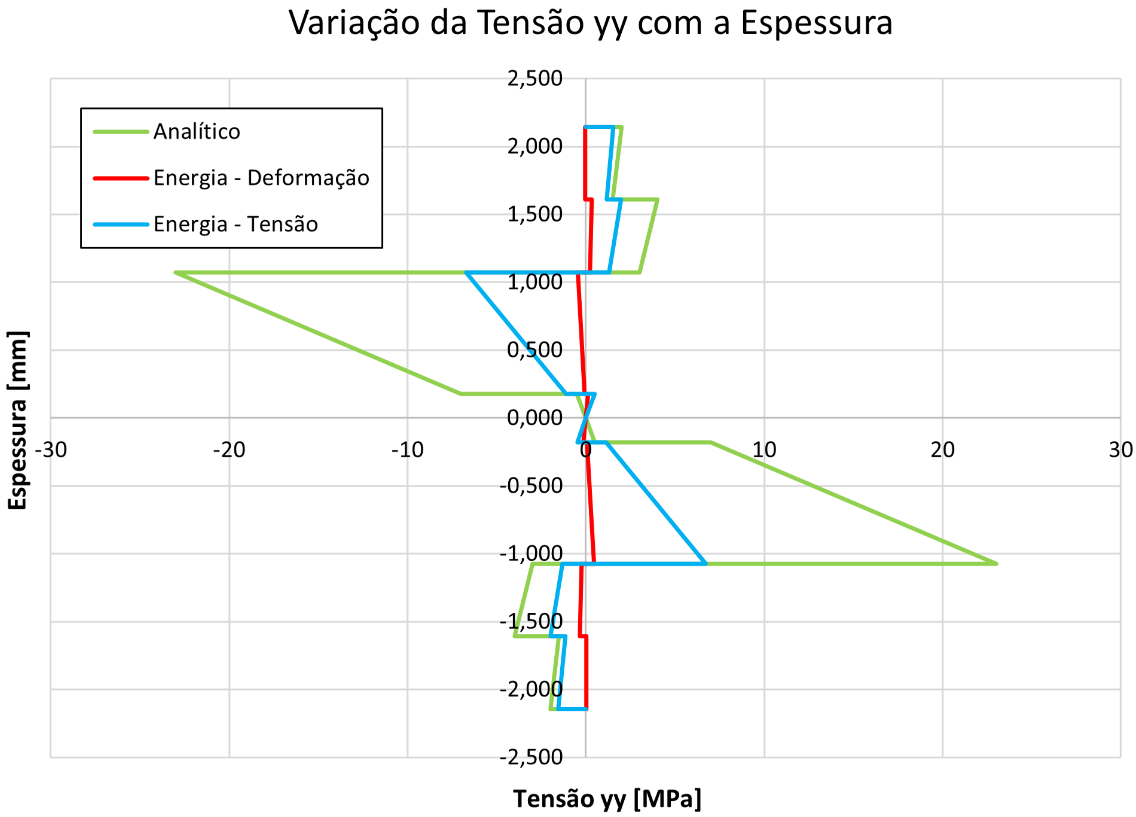


Figura F.3: Variação de σ_{yy} com a espessura do laminado para o ensaio de flexão.

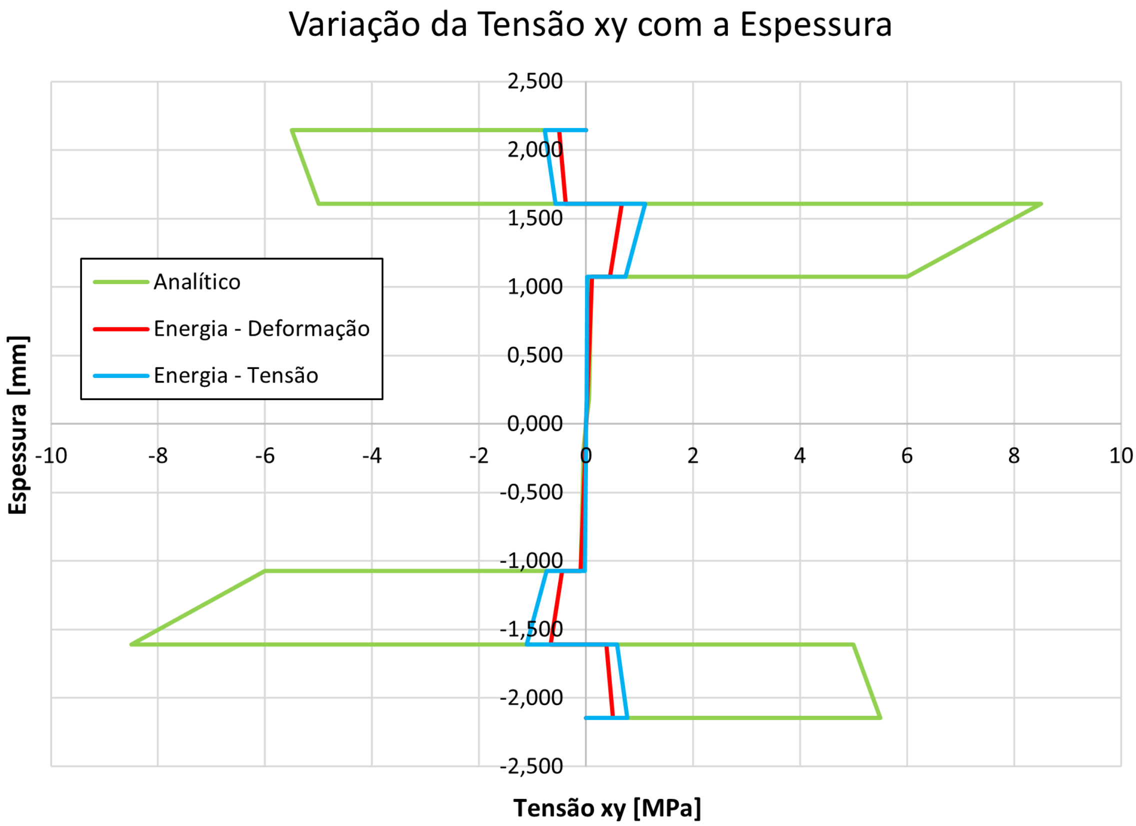


Figura F.4: Variação de σ_{xy} com a espessura do laminado para o ensaio de flexão.

G Modos 3 e 4 da Análise Modal para Flexão

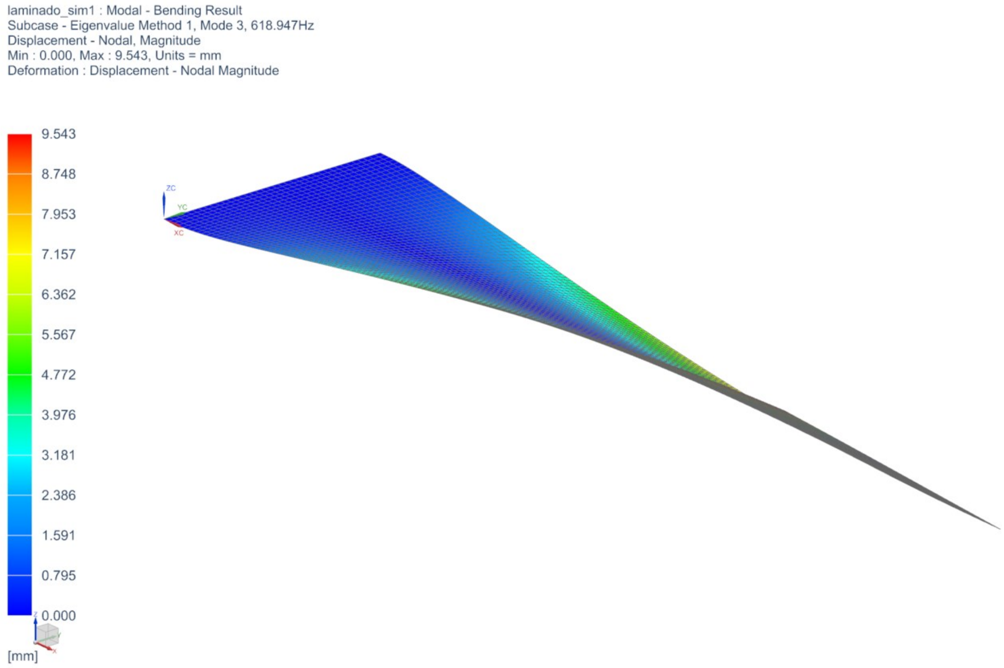


Figura G.1: 3º modo da análise modal para as condições fronteira de flexão no *NX*.

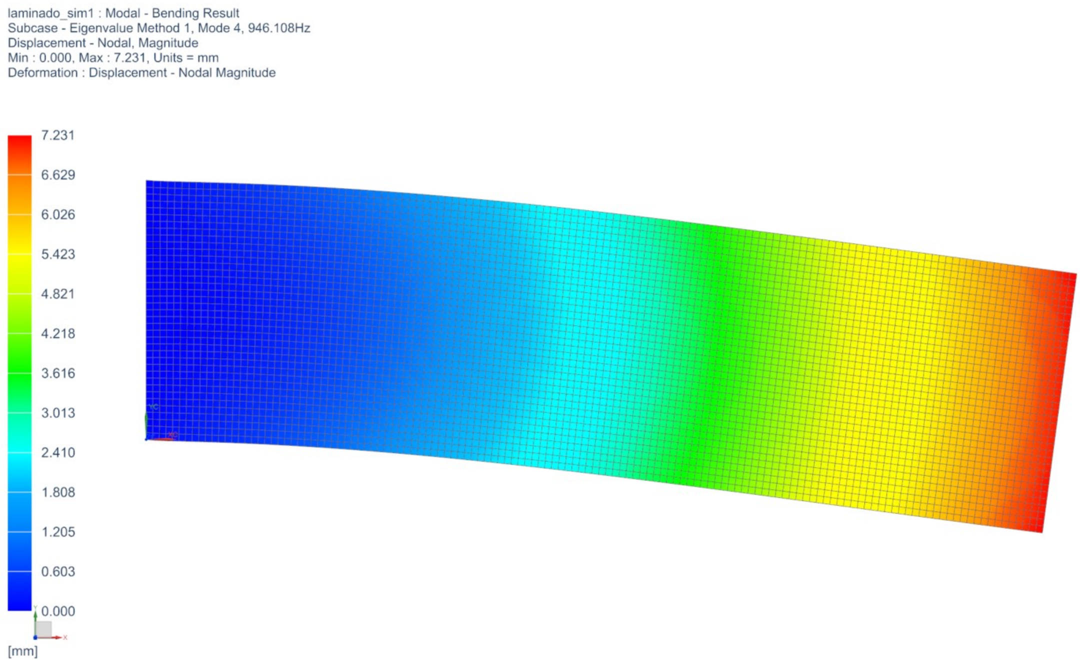


Figura G.2: 4º modo da análise modal para as condições fronteira de flexão no *NX*.

H Cálculos para a Solução Aproximada do Deslocamento Transversal da Placa

Para o cálculo da matriz B da equação (4.7), importa definir a aproximação do deslocamento transversal, dada por:

$$w_0 = \sum_{k=1}^{N} w_k^0 \, \phi_k(x_1, x_2) = [\phi_1 \;\; \phi_2 \ldots \phi_N] \begin{Bmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \\ \vdots \\ w_N^0 \end{Bmatrix} \tag{H.1}$$

É importante também apresentar o seguinte vetor de extensões:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} \{w_0\} = [D][\phi_1 \;\; \phi_2 \ldots \phi_N] \begin{Bmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \\ \vdots \\ w_N^0 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} w_1^0 \\ w_2^0 \\ \vdots \\ w_N^0 \end{Bmatrix} \tag{H.2}$$

Assim, a matriz B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2 \phi_3}{\partial x_2^2} \\ -\dfrac{-2\partial^2 \phi_1}{\partial x_2 \partial x_1} & -\dfrac{-2\partial^2 \phi_2}{\partial x_2 \partial x_1} & -\dfrac{-2\partial^2 \phi_3}{\partial x_2 \partial x_1} \end{bmatrix} \tag{H.3}$$

Após a obtenção de ϕ_i provenientes da aproximação de w_0, é possível obter as entradas da matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -6x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4x_1 \end{bmatrix} \tag{H.4}$$

Ora, outra matriz que importa definir é a matriz D, cujas entradas são da seguinte forma:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Q}_{ij} \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \tag{H.5}$$

Para o cálculo das entradas de D, foi utilizado o mesmo método do trabalho experimental. Os resultados da matriz D para a imposição de condições fronteira de tensão e deslocamento, respetivamente, são os seguintes:

$$D_{CF-\sigma} = \begin{bmatrix} 211,9549 & 161,7153 & -28,1438 \\ 161,7049 & 261,5147 & -28,1438 \\ -28,1320 & -28,1320 & 128,1807 \end{bmatrix}$$

$$D_{CF-\varepsilon} = \begin{bmatrix} 869,2722 & 140,7235 & -72,5301 \\ 140,6685 & 996,9656 & -72,5301 \\ -72,4676 & -72,4676 & 390,5412 \end{bmatrix}$$

É assim possível determinar a matriz de rigidez através da equação (4.7):

$$K_{CF-\sigma} = \begin{bmatrix} 9612578624,8 & 2883773587440,0 & -527744064640,0 \\ 2883773587440,0 & 1153509434976000,1 & -183850771743986,8 \\ -527637033920,0 & -183807959455986,8 & 334806089047983,9 \end{bmatrix} N/mm$$

$$K_{CF-\varepsilon} = \begin{bmatrix} 39423232814,4 & 11826969844320,0 & -1775328553164,2 \\ 11826969844320,0 & 4730787937727999,9 & -598386267853250,4 \\ -1774761653164,2 & -598159507853250,4 & 1024141837869877,0 \end{bmatrix} N/mm$$

H.1 Código MATLAB

```
syms x1 x2 a1 a2 a3
P = 8;
b = 56.69;
h = 4.29;
L = 200;

D_E = [869.2722 140.7235 -72.5301;
       140.6685 996.9656 -72.5301;
       -72.4676 -72.4676 390.5412]*10^3;

D_S = [211.9549 161.7153 -28.1438;
       161.7049 261.5147 -28.1438;
       -28.1320 -28.1320 128.1807]*10^3;

B  = [-2  -6*x1  2*x2;
        0     0     0;
        0    0    -4*x1];

stiffness_E = vpa(transpose(B)*D_E*B,8);
stiffness_S = vpa(transpose(B)*D_S*B,8);

K_E = int(int(stiffness_E,x1,0,L),x2,0,b)
K_S = int(int(stiffness_S,x1,0,L),x2,0,b)

F = [P*L^2 P*L^3 P*L^2*b/2];
F = transpose(F);

delta_E = linsolve(K_E,F)
delta_S = linsolve(K_S,F)

w_E = @(x1,x2) x1^2*(delta_E(1) + delta_E(2)*x1 + delta_E(3)*x2);
w_S = @(x1,x2) x1^2*(delta_S(1) + delta_S(2)*x1 + delta_S(3)*x2);

w_E(L,b/2)
w_S(L,b/2)
```