



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Relatório do Projeto 1

Mestrado em Engenharia Aeroespacial
Ano letivo 2022/2023

Autores

João MACHADO, Nº92696
Vítor SILVA, Nº92731

Professor Jorge da Cruz FERNANDES

Data 5 de dezembro de 2022

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Produção de Fibras de Carbono, Vidro e Kevlar	1
2.1	Fibras de Vidro	1
2.2	Fibras de Carbono	2
2.3	Fibras de Kevlar	4
3	Produção de Materiais Compósitos	5
4	Propriedades do Laminado	7
4.1	Constantes de Elasticidade de Cada Lâmina	7
4.2	Matrizes Q , \bar{Q} , A , B e D	8
4.3	Constantes de Elasticidade do Laminado	10
4.4	Tensão de rotura média das fibras	11
4.5	Fabrico de um painel laminado ($1 \times 1m^2$)	11
5	Resultados Experimentais do Ensaio de Tração	12
5.1	Dimensões reais da viga	12
5.2	Ensaio Experimental	12
5.3	Cálculo das tensões ao longo da espessura do laminado	13
6	Resultados Experimentais do Ensaio de Flexão	16
6.1	Ensaio Experimental	16
6.2	Módulo de Elasticidade em Flexão do Laminado	17
6.3	Método de aproximação de Halpin Tsai	18
7	Resultados Analíticos do Ensaio de Flexão	20
7.1	Deslocamento vertical no local de aplicação da força e extensão no local do extensómetro	20
7.1.1	Cálculo das tensões ao longo da espessura do laminado	21
8	Análise de Rotura do Laminado	23
9	Análise de Resultados e Conclusões	24
Referências		24
A	Apêndice I - Resultados experimentais	26
B	Apêndice II - Empilhamento do laminado	27
C	Apêndice III - Matrizes T	28
C.1	Transformações da extensão	28
C.2	Transformações inversa da extensão	28
C.3	Transformações da tensão	28
C.4	Transformações inversa da tensão	29
D	Apêndice IV - Cálculos para as matrizes A, B e C - Teoria Clássica dos Laminados	29
E	Apêndice V - Cálculos para as matrizes A, B e C - Equações Halpin Tsai	31
F	Apêndice VI - Cálculos para as tensões de tração e flexão ao longo do laminado	33
G	Apêndice VII - Código do Matlab para a pergunta 8	33

MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS
Eng. Aeroespacial / Eng. Mecânica
TRABALHO EXPERIMENTAL Nº 19

Alunos nº 92731, 92696 Empilhamento - D Material - T800

Nota:

Relatório com cerca de 25 páginas.

Inclua o enunciado do trabalho no íncio do relatório

As folhas de dados experimentais devem ser incluídos em anexo.

Têm de entregar o RELATÓRIO EM PAPEL e ENVIAR-ME POR E-MAIL o mesmo relatório em suporte digital até dia 5/12/2022.

- 1 - Considere um laminado com o material e sequência de empilhamento indicados.
- 2 - Descreva sucintamente os métodos de produção das fibras de carbono, das fibras de vidro e das fibras de Kevlar. Dê exemplos de propriedades mecânicas (valores numéricos).
- 3- Descreva sucintamente os métodos que poderiam ser usados para produzir o painel do material compósito referido em 1).
- 4 – Com base na Tabela 1, calcule:

- a) as constantes de elasticidade de cada lâmina no referencial local (L , T)
- b) as matrizes Q , \bar{Q} , A , B e D .
- c) as constantes de elasticidade do laminado no referencial global (x , y). (E_x , E_y , G_{xy} , v_{xy} e v_{yx}) e (E_{fx} , E_{fy} , G_{fxy} , v_{fxy} e v_{fyx}).
- d) O valor da tensão de rotura médio das fibras se em vez de um comprimento inicial de 200mm (Norma EN 1007-5) tivessem 2 metros (assuma um módulo de Weibull $m=7$)
- e) Pretende-se fabricar um painel ($1 \times 1 \text{ m}^2$) do laminado referido em 1), com 60% V_f . Determine a espessura do painel e a massa de fibra e de matriz que deverá ser utilizada para o fabrico..

- 5 – Realize o trabalho experimental no laboratório para uma solicitação de tracção do laminado e utilize as folhas de dados experimentais para:

- registar as dimensões reais da viga (largura e espessura)
- registar a força aplicada e a extensão medida pelo extensómetro e determine o módulo de elasticidade longitudinal (experimental) E_x do laminado.
- calcular as tensões σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} ao longo da espessura do laminado para a solicitação F (Provetas IM7 $F = 8 \text{ KN}$; Provetas T800 $F = 9 \text{ KN}$)

- 6 – Realize o trabalho experimental no laboratório, laminado/viga encastrada com força na extremidade, utilize as folhas de dados experimentais e para uma solicitação de flexão:

- a) - registe a força aplicada,
- b) - o deslocamento vertical no ponto de aplicação da força

- c) - a extensão medida no extensómetro.
- d) - determine o módulo de elasticidade em flexão (experimental) E_F do laminado.
- 7 – Calcule analiticamente para a solicitação de flexão descrita em 5):
- o deslocamento vertical no local de aplicação da força e a extensão ϵ_{xx} no local do extensómetro causado por uma força F aplicada na extremidade do laminado/viga encastrada, para todas as cargas F usadas em 5a.
 - as tensões σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} na espessura do laminado para o momento causado por uma força F aplicada na extremidade do laminado/viga encastrada.

(Provetes IM7 $F = 8 \text{ N}$; Provetes T800 $F = 10 \text{ N}$)

8 – Com base na Tabela 2, e utilizando o critério de rotura de Tensão Máxima calcule a força máxima que poderia aplicar em Tração ao laminado para ter a rotura na lâmina mais solicitada (cálculo no encastramento).

9 – Compare os valores obtidos experimentalmente com os calculados analiticamente. Analise e discuta os resultados obtidos. Tire conclusões.

DADOS:

Empilhamentos

A - $[(+45/0/-45/90)4]_S$

B - $[-45_3/+90_3/+45_3/0_3]_S$

C - $[-45/90/+45/0/-45_2/+90_2/+45_2/0_2]_S$

D - $[-45_4/+45_4/90_3/0]_S$

E - $[-45_3/+45_3/90_5/0]_S$

Constantes de elasticidade da fibra e da matriz

Tabela 1	Carbono T800	Carbono IM7	Resina epoxídica
$\rho (\text{kg/m}^3)$	1 754	1 790	1 200
E (GPa)	290	300	4.5
ν	0.35	0.35	0.4
$\sigma_r (\text{GPa})$ da fibra segundo a norma EN 1007-5 Lo=200 mm	2.8	3.1	
Gramagem (g/m^2)	200	145	
Espessura nominal h_i (mm)	0.190 (60% V_f)	0.135 (60% V_f)	

Tensões de rotura da lâmina (60% V_f)

Tabela 2	S_L (MPa)	S_T (MPa)	S_{LT} (MPa)
IM7/977-2	2 470	85	90
T800/5245C	2580	45	110

1 Introdução

No presente trabalho, pretende-se estudar e validar as características mecânicas de um material compósito de fibras de **carbono T800** em matriz polimérica, através de ensaios com um provete. De acordo com a nomenclatura descrita em [1], o empilhamento deste provete é o **D**:

$$[-45_4 / +45_4 / 90_3 / 0]_s$$

Começar-se-á por descrever e explicar os diferentes métodos de fabrico de fibras, tais como vidro, carbono e Kevlar, assim como de métodos que poderiam ser utilizados para o fabrico do compósito a ser testado. Com base nas propriedades da **Tabela 1** do enunciado, as constantes de elasticidade de cada lâmina e do laminado serão calculadas, tal como as matrizes $T_\varepsilon, T_\sigma, Q, \bar{Q}, A, B$ e D , que possibilitam o cálculo das constantes de elasticidade do laminado no referencial global (x, y) .

Também irá ser verificado a alteração do valor da tensão de rotura do mesmo material para diferentes comprimentos, assim como o peso necessário para a matriz e para a fibra caso seja necessário criar este laminado para um painel com uma área ($1 \times 1 = 1 \text{ m}^2$).

Após isto, serão apresentados os resultados obtidos para os ensaios de tração e flexão. Para validação destes dados, uma discussão e comparação de resultados entre as propriedades teóricas e experimentais do laminado será executada, assim como entre os resultados experimentais e analíticos do ensaio de flexão. Será também calculada a força máxima de tração a que o laminado poderia estar sujeito até haver rutura da lâmina mais solicitada.

2 Produção de Fibras de Carbono, Vidro e Kevlar

Por definição, um material compósito é uma mistura de diferentes materiais química e/ou geometricamente diferentes, que são geralmente insolúveis entre eles [2]. Os componentes que definem o compósito designam-se de matriz e reforço, geralmente com propriedades mais rígidas e pouco flexíveis. Com esta combinação, melhores propriedades mecânicas conseguem ser obtidas para aplicações mais específicas. Há diferentes tipos de materiais compósitos, dependendo do tipo de reforço: reforçado com partículas, com fibras e reforço estrutural (como um painel *sandwich*). Quanto à matriz, esta pode ter origem cerâmica, polimérica ou metálica [1].

Para este trabalho, será apenas relevante apresentar informação sobre os compósitos de matriz polimérica reforçados com fibras, visto que o laminado tem estas características.

Nos compósitos de matriz polimérica, o tipo de fibra mais utilizado é de vidro, carbono e aramida, como o Kevlar. As principais vantagens destas é apresentarem um elevado módulo de Young e relativamente baixa densidade [3] quando comparadas com ligas metálicas comuns de aço e alumínio.

2.1 Fibras de Vidro

Uma das propriedades mais vantajosas do vidro é a tensão máxima de rutura. Sendo o vidro um material frágil, o valor desta tensão é fortemente influenciado pela presença de defeitos. Ora, fazendo uma analogia com um tubo maciço de vidro, à medida que o diâmetro deste diminui, a probabilidade de este ter defeitos também diminui [1].

A estrutura química das fibras de vidro é amorfa, não apresentando qualquer tipo de estrutura ordenada ou cristalina. A base destas fibras é silicatos, que se baseiam em estruturas tetraédricas de ligações Si-O (Silício e Oxigénio) e que podem ser complementadas com óxidos para variar as suas propriedades e, consequentemente, as aplicações das fibras de vidro. Algumas características mecânicas dependentes do tipo de fibra são apresentadas na figura 1.

	Physical properties								
	A-glass	C-glass	D-glass	E-glass	ECR-glass	AR-glass	R-glass	S-2-glass	No boron E-glass
Tensile strength, Mpa									
-196 °C		5380		5310	5310			8275	
23 °C	3310	3310	2415	3445	3445	3241	4135	4890	3450
371 °C				2620	2165		2930	4445	
538 °C				1725	1725		2140	2415	
Young's modulus, Gpa									
23 °C	68.9	68.9	51.7	72.3	72.3	73.1	85.5	86.9	80.5
538 °C				81.3	81.3			88.9	
Elongation at break, %	4.8	4.8	4.6	4.8	4.8	4.4	4.8	5.7	4.6

Figura 1: Algumas características mecânicas de fibras de vidro

Dependendo da quantidade de cada óxido, presente na composição das fibras, estas podem ter designações diferentes. Alguns exemplos de composições e a respetiva designação das fibras são apresentados na figura 2.

Oxide	A-glass (%)	C-glass (%)	D-glass (%)	E-glass (%)	ECR-glass (%)	AR-glass (%)	R-glass (%)	S-2-glass (%)	No boron E-glass (%)
SiO ₂	63–72	64–68	72–75	52–56	54–62	55–75	55–65	64–66	52–62
Al ₂ O ₃	0–6	3–5	0–1	12–16	9–15	0–5	15–30	24–25	12–16
B ₂ O ₃	0–6	4–6	21–24	5–10		0–8			
CaO	6–10	11–15	0–1	16–25	17–25	1–10	9–25	0–0.1	16–25
MgO	0–4	2–4		0–5	0–4		3–8	9.5–10	0–5
ZnO					2–5				
BaO		0–1							
Li ₂ O						0–1.5			
Na ₂ O + K ₂ O	14–16	7–10	0–4	0–2	0–2	11–21	0–1	0–0.2	0–2
TiO ₂	0–0.6			0–1.5	0–4	0–12			0–1.5
ZrO ₂						1–18			
Fe ₂ O ₃	0–0.5	0–0.8	0–0.3	0–0.8	0–0.8	0–5		0–0.1	0–0.8
F ₂	0–0.4			0–1	0–5	0–5	0–0.3		0–1.0

Figura 2: Composição e respetiva designação de alguns tipos de fibras de vidro

Quanto ao seu processo de fabrico, este inicia-se com o escoamento de vidro derretido a partir de um reservatório, até pontas metálicas cilíndricas, com cerca 1 a 2 mm de diâmetro, como na figura 3a. Destas, filamentos são trefilados a alta velocidade, tracionados e rapidamente arrefecidos. Seguidamente, tal como apresentado na figura 3b, as fibras são cobertas por uma solução, ao passarem por um cilindro, que define o diâmetro final das fibras. Por fim, estas são processadas tendo em conta o destino final, podendo ser armazenadas em bobinas ou cortadas/trituradas [4].

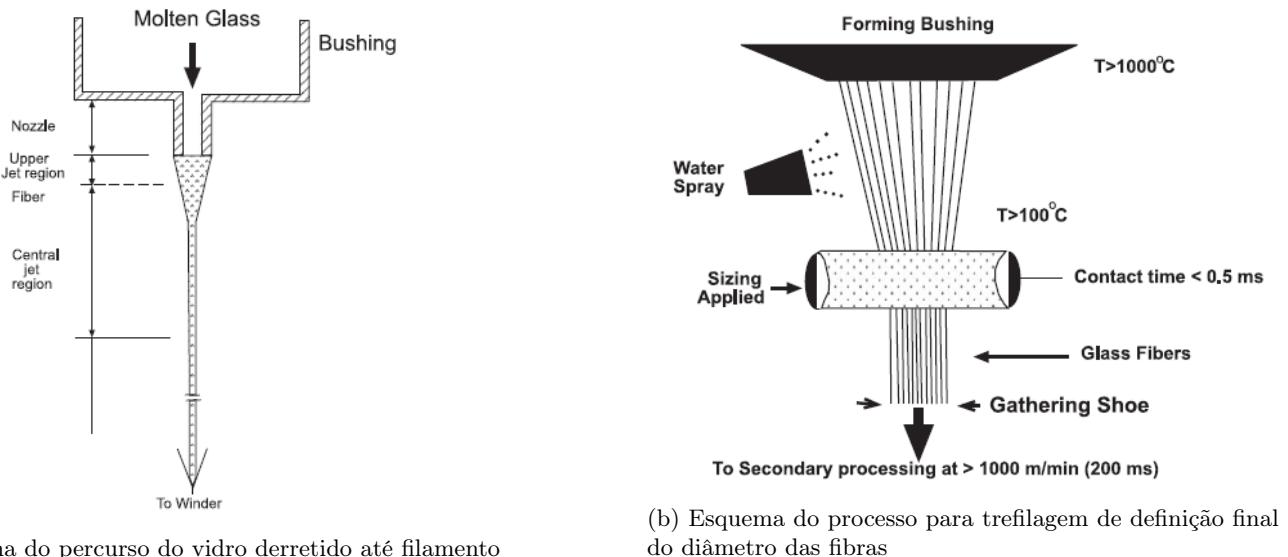


Figura 3: Esquema simplificado de produção das fibras de vidro

2.2 Fibras de Carbono

As fibras de carbono resultam do alinhamento paralelo de planos de grafeno, com o eixo axial da fibra. Como estas ligações químicas nos planos são bastante fortes, conferem às fibras de carbono uma resistência axial elevada. Ora, o mesmo não acontece na direção transversal da fibra (são ligações químicas mais fracas, entre planos), o que proporciona o comportamento anisotrópico desta [3]. Às fibras com este comportamento dá-se o nome de fibras de grande performance.

É, também, importante referir que, dependendo do processo de fabrico, nomeadamente do precursor químico utilizado, as fibras apresentam características diferentes. É por isso importante, apresentar alguns destes métodos, assim como propriedades características de cada um.

A partir da PAN (Poliacrilonitrila)

Um dos principais métodos de produção de fibras de carbono, responsável por cerca de 90% da produção mundial, é a partir da poliacrilonitrila [5]. Este processo está representado nas figuras 4 e 5, sendo resumido em 5 passos fundamentais:

1. **Polimerização da acrilonitrila:** uma solução de monómeros é misturada num solvente, iniciando-se a polimerização.
2. **Trefilagem da solução polimérica:** depois da polimerização ser terminada e os monómeros que não reagiram removidos, a solução atravessa um molde com 3 a 100 mil capilares, de diâmetros entre 0.05 e 0.25 mm. As fibras são trefiladas através de uma solução coagulante. Devido a esta trefilagem se dar com as fibras diretamente mergulhadas na solução coagulante, como se observa na figura 4, dá-se o nome de *wet spinning*. Por fim, estas fibras são atravessadas por um banho para lavagem.
3. **Extensão da solução trefilada:** de modo reduzir a porosidade e orientar as cadeias poliméricas de forma desejada, as fibras são estendidas através de rolos.
4. **Estabilização e secagem:** uma aplicação final numa solução é também usualmente feita para evitar a aglomeração de fibras. Depois desta passagem, a secagem é feita por contacto com rolos aquecidos que fecham os poros para minimizar imperfeições nas fibras. Estas são reservadas em bobinas.
5. **Carbonização:** dentro desta fase há 4 sub-processos inerentes, sendo eles a oxidação, carbonização, grafitização e tratamento de superfície. As bobinas de filamento passam inicialmente pelo oxidação, onde as fibras aumentam a sua densidade de 1.18 a 1.35 g cm^{-3} . Depois, para ser conferida elevada resistência às fibras, estas são carbonizadas, melhorando a sua estrutura amorfa. Segue depois para uma estação de grafitização a elevadas temperaturas (de 2000°C a 3000°C), onde as fibras aumentam a quantidade e o tamanho das estruturas químicas ordenadas que as constituem. Por fim, um tratamento superficial é dado às fibras para melhorar as suas propriedades de aderência entre esta e a matriz polimérica [6][7].

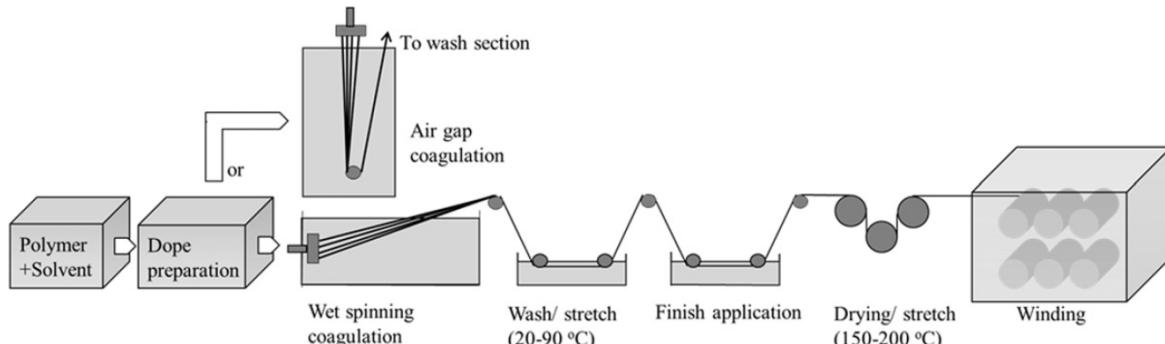


Figura 4: Processo de trefilagem das fibras obtidas a partir da PAN

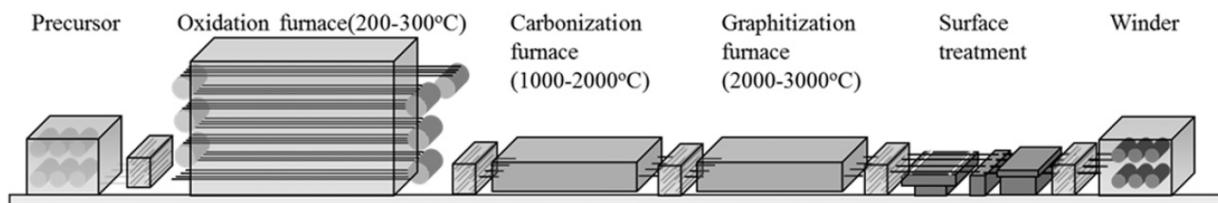


Figura 5: Carbonização das fibras obtidas a partir da PAN

A partir de derivados do petróleo

Utilizando uma resina derivada do petróleo, é possível também produzir-se fibras de elevada performance (se esta estiver em mesofase), assim como fibras denominadas gerais, provenientes da resina isotrópica, e por isso com comportamento igualmente isotrópico. O processo de fabrico, em si, é muito semelhante ao descrito para a PAN como precursor, no entanto as diferenças entre as fibras podem ser significativas.

Apresenta-se na tabela 1, alguns valores das características mecânicas das fibras de elevada performance, assim como das fibras gerais, provenientes de ambos os percursos.

Tabela 1: Características mecânicas de algumas fibras de carbono [8]

Gama	Designação	Tensão máxima de tração [MPa]	Módulo de Young [Gpa]	Diâmetro [μm]	Produtor
Geral	T-101S	720	32	14.5	Kureha Chem.
	T-201S	690	30	14.5	Kureha Chem.
	S-210	784	39	13	Donac
	P-400	690	48	10	Ashlanh Petroleum
	GF-20	980	98	7-11	Nippon Carbon
Elevada Performance (PAN)	T-300	3530	230	7	Toray
	T-800H	5590	294	5,2	Toray
	T-1000	7060	294	5,3	Toray
	MR 50	5490	294	5	Mitsubishi Rayon
	HMS-40	3430	392	6,2	Toho Rayon
Elevada Performance (petróleo)	P-25	1400	160	11	Amoco
	P-120S	2200	827	10	Amoco
	E-35	2800	241	9,6	du Pont
	E-130	3900	894	9,2	du Pont
	F-600	3000	600	9	Donac

Tal como se observa, em média, as fibras proveniente do petróleo têm uma menor tensão máxima de tração do que as obtidas a partir da PAN. Para além disso, os módulos de Young das fibras dos diferentes métodos são distintos.

2.3 Fibras de Kevlar

As fibras de Kevlar inserem-se no grupo de fibras poliméricas devido à sua estrutura química constituída por longas cadeias de anéis aromáticos de poliamida. Uma das características principais destas fibras é a sua tenacidade, relativamente às fibras anteriormente mencionadas, visto que o deslize entre as cadeias poliméricas proporcionam um pouco mais de deformação plástica, até à rotura.

A produção destas fibras pode ser resumida em 4 passos:

1. **Polimerização de PPD-T (*Poly(p-phenylene terephthalamide)*):** Para a polimerização de PPD-T, PPD (p-Fenilenodiamina) é utilizado como precursor. Este processo dá-se rapidamente a baixas temperaturas, até se obter uma elevada viscosidade;
2. **Preparação das fibras:** Após a polimerização, uma solução anisotrópica de ácido sulfúrico com PPD-T é criada para ser extrudida;
3. **Trefilagem das fibras:** Para dar grande tenacidade e módulo de elasticidade às fibras de Kevlar, a solução de trefilagem é diferente à solução *wet spinning* apresentada na secção 2.2. No presente caso, a ponta por onde a fibra começa a ser extrudida não se encontra logo imersa no banho coagulante. Existe uma pequena distância só de ar, como se observa na figura 6. A grande vantagem deste processo é o facto de permitir a trefilagem a maiores temperaturas, podendo ser assim usadas soluções mais concentradas de PPD-T. Para além disto, o espaço de ar promove a o grau de orientação molecular;
4. **Tratamento térmico:** Para conferir um maior grau de cristalinidade, as fibras são tracionadas a elevadas temperaturas. Dependendo da aplicação e do tipo de fibra pretendido, é possível com diferentes combinações de temperatura e tensão obter propriedades diferentes [9];

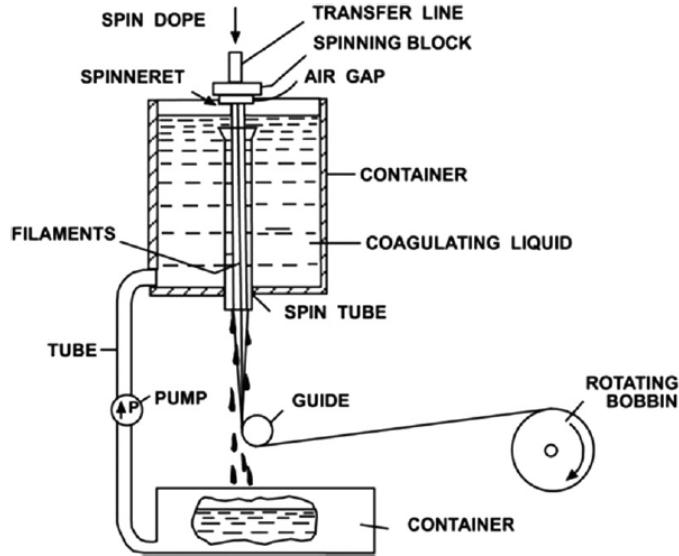


Figura 6: Processo de trefilagem das fibras de Kevlar

Ora, algumas das diferentes características das fibras de Kevlar, consoante o tratamento, são resumidas na figura 2.

Tabela 2: Propriedades de algumas fibras de Kevlar [9]

Produto	Kevlar	Kevlar 49	Kevlar 68	Kevlar 119	Kevlar 129	Kevlar KM2
Diâmetro (mm)	0.012-0.015	0.012	0.012	0.012-0.015	0.012	0.012
Densidade (g cm^{-3})	1.44	1.45	1.44	1.44	1.45	1.44
Tensão de rotura (GPa)	2.9	2.9	3.0	3.1	3.4	3.3
Módulo de Young (GPa)	70	135	99	55	99	64

3 Produção de Materiais Compósitos

Tal como introduzido inicialmente, o provete analisado neste trabalho é constituído por fibras de carbono. É, por isso, importante fazer uma breve revisão dos métodos de fabrico de materiais compósitos de fibras poliméricas.

O fabrico destes compósitos é também dependente do tipo de matriz em que as fibras se inserem. Os mais comuns, que se encontram atualmente em uso em compósitos com o tipo de fibras referidos no capítulo 2, são com material termoplástico ou termoendurecível.

Resumidamente, os termoplásticos são materiais que repetidamente podem ser aquecidos, para fácil manuseamento e arrefecidos para endurecerem e manterem a sua forma. Já os plásticos termoendurecíveis resultam da transformação de uma resina líquida num material sólido e rígido, através de um processo químico que cria interligações entre as cadeias poliméricas. Uma das resinas termoendurecíveis mais utilizadas para matriz é epoxy [3, 10].

Relativamente aos métodos de produção, estes podem ser divididos em 2 tipos: molde aberto ou molde fechado. Os métodos de molde aberto incluem:

- **Moldagem manual (Laminação manual ou Prepreg):** uma camada de *gel-coat* é aplicada num molde para facilitar a desmoldagem, assim como deixar um acabamento superficial mais suave. Na laminação manual, camadas de fibra entrelaçadas são colocadas, juntamente com a matriz, sendo esta aplicada manualmente, geralmente com o auxílio de um rolo ou trincha. Já os prepregs pré-empregados em resina basta serem colocados num molde e curados através do auxílio de sacos de vácuo. Visto que esta aplicação é manual, as peças em geral podem ter qualquer forma.
- **Moldagem em spray:** uma vez mais, *gel-coat* é aplicado num molde onde, após isso, é pulverizada uma mistura de fibras (geralmente fibras cortadas) e resina. Depois de curado, o compósito é finalizado e retirado do molde. Tal como o método anterior, as peças poderão ter qualquer forma.
- **Filament Winding:** neste processo, fibras contínuas são aplicadas ao longo de um mandril rotativo, impregnado em resina. É possível também, com este método, ter controlo sobre a orientação das camadas dado que a alimentação contínua das fibras pode ser feita a vários ângulos, em relação ao eixo do mandril. Como este processo se dá por meio de rotação, as peças têm geralmente formas axissimétricas, como cilindros ocos, peças cónicas e também esféricas.

- **Centrifugal Casting:** este processo consiste na introdução de uma mistura de resina e pedaços curtos de fibras num molde que, ao rodar, espalha esta uniformemente ao longo do molde. Com a adição de calor no molde durante o processo, a peça cura e fica com essa forma. Pela mesma razão do método mencionado anteriormente, as peças neste método apenas terão forma cilíndrica ou cónica.

Como complemento aos métodos de moldagem manual e moldagem em spray, um saco de vácuo e cura em autoclave podem ser utilizados, para melhorar a qualidade e propriedades do compósito.

Quanto aos métodos de molde fechado, estes incluem os seguintes:

- **Moldagem por injeção:** uma mistura de resina e pedaços curtos de fibras são inseridas num sistema de parafuso sem fim. Ao longo do processo, o parafuso comprime o material e juntamente com o calor, derrete a resina e mistura a resina derretida. Por fim, esta é inserida num molde fechado onde a parte solidifica e obtém a forma desejada, geralmente, sem limitações.
- **Vacuum Infusion Moulding:** camadas de fibra entrelaçadas são inseridas num molde. Seguidamente, um saco de vácuo é inserido por cima e o ar retirado por entre as camadas de fibra e o molde. Simultaneamente, resina é bombeada, difundindo-se por entre as fibras. Por fim, o compósito cura ficando com a forma desejada, geralmente também, sem limitações nesta.
- **Pultrusão:** durante este processo, fibras são continuamente alimentadas por meio de roldanas. Estas começam por atravessar um banho de resina, seguem por um conjunto de moldes com o perfil desejado, saindo, por fim, o compósito curado e com a forma pretendida. No entanto, devido à natureza deste processo, a secção da peça final é constante.
- **Resin Transfer Moulding:** neste processo, camadas de fibra são colocadas entre dois moldes (o positivo e negativo) da forma desejada. Seguidamente, o molde é fechado e, em semelhança ao processo de *Vaccum Infusion Moulding*, resina é bombeada por um ponto central até o excesso ser vertido. Por fim a peça é curada e a forma desejada obtida, sem limitações desta.
- **Moldagem por prensa (a quente ou frio):** para este processo, fibras previamente impregnadas em resina (sejam fibras curtas ou prepreg) são colocadas entre os moldes negativos e positivos da forma desejada. Por fim, estes fecham, comprimem o compósito e este escoa durante a sua cura, até à forma final, também sem limitações nesta [11, 10].

Após apresentados os métodos de fabrico de compósitos, algumas características são resumidas nas tabelas 3 e 4. A partir destas, serão escolhidos os processos de fabrico que poderiam ser utilizados para o projeto estudado neste relatório.

Tabela 3: Algumas características dos métodos de fabrico de molde aberto [10]

	Mold. Manual	Mold. em Spray	Filament Wind.	Centrif. Casting
Dimensões	1 a 5 m ² Espessura >2 mm	Sem limite área Espessura >1 mm	Diâmetro <4 m Comprimento <14 m	Diâmetro entre 100 e 4500 mm Comprimento entre 0.3 e 6 m Espessura entre 4 a 50 mm
Aspetto	Liso	Liso de um lado e rugoso no outro	Interior liso e exterior um pouco rugoso	Exterior liso e interior um pouco rugoso
% máx. fibra	60%	45%	65%	50%
Cadênciac de peças	1 peça/hora	1 peça/hora	Mediana	Baixa

Tabela 4: Algumas características dos métodos de fabrico de molde fechado [10]

	Mold. por injeção	Vac. Infusion Mould.	Pultrusão	Resin Transf. Mould.	Mold. por prensa
Dimensões	Pequenas	Sem limite área Espessura >2mm	Largura <1,5m Sem limite espessura	1 a 5 m ² Espessura >2mm	<4m ² Espessura >1mm
Aspetto	Liso	Alguma rugosidade	Liso	Liso	Liso
% máx. fibra	65%	60%	70%	60%	65%
Cadências de peças	20 a 100 peças/hora	1 peça/1,5h	Elevada	1 peça/hora	Alta

Ora, sendo o provete utilizado com a forma paralelipípedica, com pouca espessura, podem ser excluídos os processos de *Filament Winding* e *Centrifugal Casting*. De acordo com as características de empilhamento do compósito utilizado, as fibras devem ser aplicadas ordenadamente e, por isso, moldagem em *spray* e moldagem por injeção não pode ser utilizada já que as fibras aplicadas são em pedaços e de forma aleatória. Para além deste, pultrusão não permite diferentes alinhamentos das camadas já que as fibras estão alinhadas apenas longitudinalmente e, por isso, não poderia ser utilizado. Ora, devido à percentagem de volume de fibras presente no provete utilizado, 60%, tal como mencionado no enunciado, confirma-se que **moldagem manual, vacuum infusion moulding, resin transfer moulding** e **moldagem por prensa** são os mais indicados para a produção deste laminado.

Assumindo que se quereria fazer apenas um destes provetes, os métodos que se acreditam ser melhores seria a moldagem manual ou *vacuum infusion moulding*. Isto prende-se com o facto de ser um processo barato comparativamente aos outros possíveis, já que é apenas necessário um molde.

Caso fosse para produzir este laminado em maiores quantidades, a moldagem por prensa apresenta as maiores vantagens já que, apesar de necessitar de um maior investimento inicial devido à maquinaria, tem elevadas cadências de produção e apresenta um bom acabamento das peças.

4 Propriedades do Laminado

4.1 Constantes de Elasticidade de Cada Lâmina

Recorrendo-se à regra das misturas, pode-se obter muito facilmente as constantes de elasticidade de cada lâmina no referencial local (\mathbf{L} , \mathbf{T}). Esta regra tem como base as seguintes preposições:

- O material compósito apenas poderá ser constituído por fibras e matriz sem espaços vazios ao longo do lâmina. Significa, portanto, que a porção de volume de ambos os materiais têm de ser igual a 1.
- Tanto as fibras como a matriz têm de ter um módulo de Young constante, o que pressupõe que ambos os materiais têm de satisfazer a lei de Hooke.
- As fibras têm de estar dispostas continuamente na matriz.

A fórmula para a regra das misturas para a direção longitudinal é a seguinte:

$$E_L = E_m V_m + E_f V_f \quad (1)$$

onde o E é o módulo de Young e o V é a fração volúmica. É de notar que os subscritos m e f significam, respetivamente, matriz e fibra.

Para a direção transversal do compósito, as constantes são as mesmas, apenas a fórmula é apresentada do seguinte modo:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (2)$$

É importante lembrar que a regra das misturas longitudinais (equação 1) também é feita para relacionar os coeficientes de Poisson longitudinais (ν_{LT}).

$$\nu_{LT} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (3)$$

A equação importante a ser destacado logo no início, é a relação entre o coeficiente de Poisson longitudinal (ν_{LT}) com o coeficiente de Poisson transversal (ν_{TL}):

$$\nu_{TL} = \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT} \quad (4)$$

Esta equação é válida porque o material é isotrópico.

Com isto em mente, e através da **Tabela 1** do enunciado do projeto, podem ser consultados os seguintes valores:

Tabela 5: Constantes de elasticidade da fibra e da matriz

	Carbono T800	Resina epóxídica
Módulo de Young (GPa)	290	4.5
Coeficiente de Poisson	0.35	0.4
Fração volúmica	0.6	0.4

Outra constante a reter através desta informação é o módulo de corte. Cada material tem um módulo de corte diferente (equação 5), a partir dos quais se pode obter o módulo de corte da lâmina (equação 6).

$$G_f = \frac{F_f}{2(1 + \nu_f)} \quad G_m = \frac{F_m}{2(1 + \nu_m)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (6)$$

A tabela 6 contém todos os valores obtidos para as constantes de elasticidade da lâmina no referencial local (**L, T**) de cada lâmina, usando as equações acima descritas.

Tabela 6: Valores da constantes de elasticidade de cada lâmina no referencial local (**L, T**)

E_L (GPa)	E_T (GPa)	ν_{LT}	ν_{TL}	G_f (GPa)	G_m (GPa)	G_{LT} (GPa)
175.8	10.99	0.37	0.023	107.41	1.61	3.93

4.2 Matrizes Q , \bar{Q} , A , B e D

A matriz Q depende das constantes de elasticidade do material compósito. Esta apresenta-se da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

Extraindo os valores presentes na tabela 6 e colocando-os na matriz acima descrita, obtém-se a matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 177.3181 & 4.1029 & 0.0000 \\ 4.1029 & 11.0890 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.9297 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (8)$$

Através da equação 9, consegue-se obter a segunda equação pedida, a \bar{Q} .

$$[\bar{Q}] = [T]_\sigma^{-1} [Q] [T]_\epsilon \quad (9)$$

Para que esta equação seja resolvida, é necessário solucionar as duas equações de transformação de coordenadas, a $[T]_\sigma$ e a $[T]_\epsilon$. Estas matrizes encontram-se representadas em 10 e 11, respectivamente.

$$[T]_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[T]_\epsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Como é possível verificar, as duas equações, 10 e 11, dependem de uma variável (θ), que, neste caso, é um ângulo. Este representa a orientação das fibras com os eixos x e y do laminado. Na figura 7 encontra-se representado o ângulo e o sentido positivo.

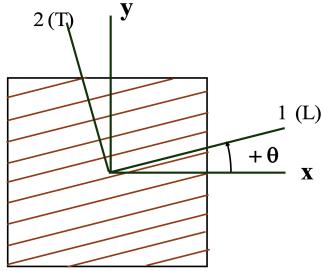


Figura 7: Ângulo da orientação das fibras(θ)

Atendendo ao código de empilhamento (Apêndice B), $[-45_4 / +45_4 / 90_3 / 0]_s$, obter-se-ão quatro matrizes $[T]_\sigma$ e quatro matrizes $[T]_c$. Irá ser necessário calcular as matrizes de transformações de coordenadas para cada ângulo $\theta = -45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$. Significa, portanto, que serão obtidas quatro matrizes \bar{Q} .

Atendendo às matrizes de transformações de coordenadas no Apêndice C, podem-se substituir essas matrizes na equação 9 resultando as seguintes matrizes \bar{Q} . É necessário ter em atenção que os valores apresentados em cada uma encontra-se em GPa:

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 177.3181 & 4.1029 & 0.0000 \\ 4.1029 & 11.0890 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.9297 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[\bar{Q}]_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 53.0829 & 45.2236 & 41.5573 \\ 45.2236 & 53.0829 & 41.5573 \\ 41.5573 & 41.5573 & 45.0503 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[\bar{Q}]_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 53.0829 & 45.2236 & -41.5573 \\ 45.2236 & 53.0829 & -41.5573 \\ -41.5573 & -41.5573 & 45.0503 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 11.0890 & 4.1029 & 0.0000 \\ 4.1029 & 177.3181 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.9297 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sabendo agora os valores das matrizes \bar{Q} para os diferentes valores de ângulo do empilhamento ($\theta = -45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$), poder-se-á calcular os valores para as matrizes A , B e D , matriz de extensão, de acoplamento e de flexão, respectivamente. As seguintes equações mostram como se determinam as diferentes entradas para cada matriz,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (16)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \quad (17)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \quad (18)$$

onde n é o número de lâminas, z_k a distância do plano médio do laminado à parte superior da lâmina k e z_{k-1} é a distância do plano médio do laminado à parte inferior da lâmina.

Tendo em atenção o empilhamento, as diferentes matrizes \bar{Q} e as distâncias k e z_{k-1} obtém-se as seguintes matrizes (consultar apêndice D):

$$A = \begin{bmatrix} 241.3944 & 143.7162 & 0.0000 \\ 143.7162 & 367.7285 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 142.9260 \end{bmatrix} \text{ GPa mm} \quad (19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ GPa mm}^2 \quad (20)$$

$$D = \begin{bmatrix} 407.9088 & 345.3033 & -145.9411 \\ 345.3033 & 455.0356 & -145.9411 \\ -145.9411 & -145.9411 & 343.9341 \end{bmatrix} \text{ GPa mm}^3 \quad (21)$$

Os seguintes comentários são importantes de referir pois ajudam a confirmar o resultado das matrizes em estudo:

- A matriz B é nula pois existe simetria no empilhamento $[-45_4 / +45_4 / 90_3 / 0]_s$.
- As entradas A_{13} e A_{23} são nulas pois este empilhamento está em equilíbrio.
- Como o empilhamento contém orientações de $\theta = -45^\circ, 45^\circ$, as entradas D_{13} e D_{23} não são nulas.

4.3 Constantes de Elasticidade do Laminado

Segundo a Teoria Clássica dos Laminados, é possível calcular as diferentes constantes de elasticidade do laminado no referencial global (x, y).

Antes de mais, será necessário inverter a matriz A que está presente na equação 19. Sendo assim, a matriz fica com a seguinte forma:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00540 & -0.00211 & 0.00000 \\ -0.00211 & 0.00354 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00700 \end{bmatrix} \text{ GPa}^{-1} \text{ mm}^{-1} \quad (22)$$

Tendo em mente as diferentes entradas da matriz inversa A_{ij} , poder-se-á chegar às seguintes constantes:

$$E_x = \frac{1}{A_{11}^{-1} h} \quad (23) \qquad E_y = \frac{1}{A_{22}^{-1} h} \quad (24)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{A_{21}^{-1}}{A_{11}^{-1}} \quad (25) \qquad \nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x} \quad (26)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{A_{33}^{-1} h} \quad (27)$$

sendo h a espessura total do laminado. No caso do laminado em estudo, a espessura total é $h = n \times h_i$, sendo n o número de camadas do laminado ($n = 24$) e h_i a espessura de cada lâmina ($n = 0.19 \text{ mm}$). Sendo assim, resulta $h = 4.56 \text{ mm}$.

Resolvendo todas as equações acima referidas, obtém-se as diferentes constantes de elasticidade na tabela 7.

Tabela 7: Valores da constantes de elasticidade do laminado no referencial global (x, y)

E_x (GPa)	E_y (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	G_{xy} (GPa)
40.6170	61.8785	0.3908	0.5954	31.3434

Para o teste de flexão, será necessário calcular as constantes de elasticidade de flexão. Para tal, em vez de usar a matriz A , será necessário inverter a matriz D (equação 21).

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00706 & -0.00509 & 0.00084 \\ -0.00509 & 0.00621 & 0.00048 \\ 0.00084 & 0.00048 & 0.00346 \end{bmatrix} \text{ GPa}^{-1} \text{ mm}^{-3} \quad (28)$$

Tendo agora em conta as diferentes entradas da matriz inversa D (D_{ij}), poder-se-á chegar às seguintes constantes de elasticidade de flexão:

$$E_{fx} = \frac{12}{D_{11}^{-1} h^3} \quad (29)$$

$$E_{fy} = \frac{12}{D_{22}^{-1} h^3} \quad (30)$$

$$\nu_{xy}^f = -\frac{D_{21}^{-1}}{D_{11}^{-1}} \quad (31)$$

$$\nu_{yx}^f = -\frac{D_{12}^{-1}}{D_{22}^{-1}} \quad (32)$$

$$G_{xy}^f = \frac{12}{D_{33}^{-1} h^3} \quad (33)$$

Utilizando-se o mesmo valor para a espessura do laminado, resultam os valores das constantes de elasticidade do laminado de flexão na tabela 8

Tabela 8: Valores da constantes de elasticidade de flexão do laminado no referencial global (**x**, **y**)

E_{fx} (GPa)	E_{fy} (GPa)	ν_{xy}^f	ν_{yx}^f	G_{xy}^f (GPa)
17.9340	20.3769	0.7209	0.8190	36.5290

4.4 Tensão de rotura média das fibras

Para calcular a tensão de rotura média das fibras de um provete de 2000 mm, em vez de 200 mm, irá ser utilizada a regra empírica de Weibull. Como é possível verificar na **Tabela 1** do enunciado, a tensão de rotura média de Carbono T800 segundo a norma EN 1007-5 para um comprimento inicial de $L_0 = 200$ mm é de 2.8 GPa. Segundo a regra empírica, utilizar-se-á a seguinte equação:

$$\frac{\sigma_{r1}}{\sigma_{r2}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (34)$$

sendo V os volumes de cada provete e m o módulo de Weibull. Para o caso em estudo será usado um módulo de Weibull $m = 7$. Sabendo que os provetes têm as mesmas áreas, é válido afirmar que os volumes são proporcionais ao comprimento dos mesmos. Sendo assim, poder-se-á afirmar que a tensão de rotura do provete com um comprimento de $L = 2000$ mm é:

$$\sigma_{r2} = \sigma_{r1} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{-\frac{1}{m}} = 2.8 \left(\frac{2000}{200} \right)^{-\frac{1}{7}} = 2.0151 \text{ GPa} \quad (35)$$

4.5 Fabrico de um painel laminado ($1 \times 1m^2$)

Recorrendo ao código do empilhamento, percebe-se que existem 24 camadas de fibra (oito de -45° e de 45° , seis de 90° e duas de 0°). Sabendo também que a espessura nominal da fibra de carbono T800 é de 0.190 mm (verificar **Tabela 1** do enunciado), pode-se chegar à conclusão de que a espessura total do laminado é $h = 4.56$ mm.

Com este valor em mente, pode ser calculado o volume do painel, multiplicando a área do laminado pretendido com a espessura do mesmo. Sendo assim, o volume do laminado é de $V_L = 0.00456 \text{ m}^3$.

Através das regras da mistura pode-se adaptar a equação 1, trocando os Módulos de Young para a densidade dos materiais.

$$\rho = \rho_m V_m + \rho_f V_f = 1754 \times 0.6 + 1200 \times 0.4 = 1532.4 \text{ kg m}^{-3} \quad (36)$$

Considerando agora a densidade do laminado, pode-se calcular a massa do mesmo, multiplicando o valor da densidade pelo volume. A massa do laminado fica com um valor de $m_L = 6.9877$ kg. Para se calcular a massa da fibra e da matriz utilizar-se-á as seguintes equações:

$$m_f = V_f \frac{\rho_f}{\rho} m_L = 4.7991 \text{ kg} \quad (37)$$

$$m_m = V_m \frac{\rho_m}{\rho} m_L = 2.1889 \text{ kg} \quad (38)$$

5 Resultados Experimentais do Ensaio de Tração

5.1 Dimensões reais da viga

Antes de passar para os resultados experimentais do ensaio de tração será necessário calcular a área real da secção transversal do provete de Carbono T800 (ver imagem 8). Para tal, foram realizadas três medições da espessura e da largura para poder ser obtido um valor médio para a espessura e para a largura (ver tabela 9).

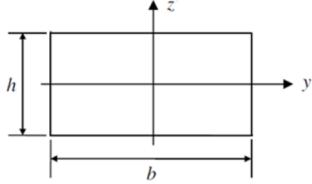


Figura 8: Secção transversal do provete em estudo

Tabela 9: Dimensões da secção transversal do provete de Carbono T800 com resina epoxídica

	1ª Medição	2ª Medição	3ª Medição	Medição Média
Largura b (mm)	57.28	57.20	57.05	57.18
Espessura h (mm)	4.45	4.32	4.48	4.42

Tendo em base o valor médio da largura e da espessura da secção transversal, poderá-se calcular a área que será usada para todos os cálculos daqui por diante (equação 39).

$$A = b \times h = 57.18 \times 4.42 = 252.53 \text{ mm}^2 \quad (39)$$

É importante realçar qual é a espessura média que têm de ser usado para os futuros cálculos. Para tal, basta dividir o valor médio da espessura, que se encontra na tabela 9, pelo número de camadas (24) ficando assim com um valor de $h_i = 0.1842 \text{ mm}$.

5.2 Ensaio Experimental

Para se descobrir o módulo de elasticidade longitudinal experimental do laminado será necessário calcular a tensão em cada força aplicada durante o trabalho experimental. A seguinte expressão será utilizada:

$$\sigma = \frac{F_{aplicada}}{A_{experimental}} \quad (40)$$

Usando a equação 40, é possível calcular as tensões obtidas durante as duas experiências, de carga e descarga, respectivamente, colocando-as nas tabelas abaixo:

Tabela 10: Valores da força, extensão e tensão no ensaio de tração experimental nº 1 (Carga)

Força (N)	Extensão ($\mu\epsilon$)	Tensão (MPa)
1130	97	4.4747
2115	192	8.3752
3300	309	13.0677
4120	390	16.3149
5250	502	20.7896
6193	596	24.5238
6970	676	27.6007
8000	780	31.6794
8991	880	35.6037

Tabela 11: Valores da força, extensão e tensão no ensaio de tração experimental nº 2 (Descarga)

Força (N)	Extensão ($\mu\epsilon$)	Tensão (MPa)
8991	880	35.6037
7788	763	30.8399
6791	663	26.8918
5975	583	23.6605
4930	480	19.5224
3978	390	15.7526
2920	290	11.5630
1900	141	7.5239
880	90	3.4847

Com base nas tabelas 10 e 11, poder-se-á desenhar um gráfico com os valores obtidos de tensão e extensão no ensaio de carga e descarga. O gráfico contém duas regressões lineares, a azul é para o processo de carga e a laranja é para a descarga.

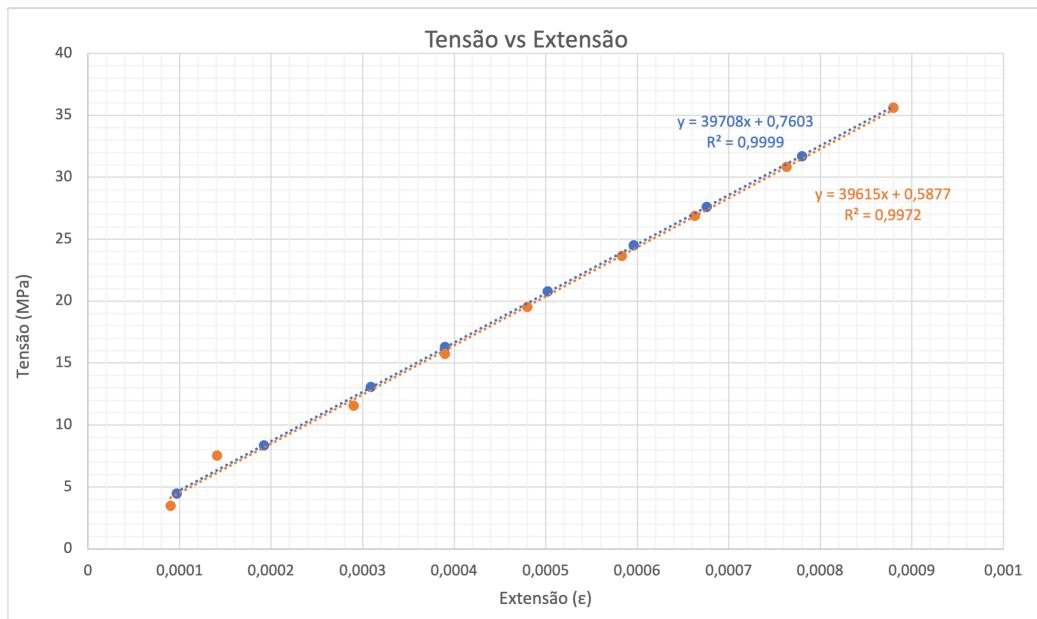


Figura 9: Gráfico Tensão vs Extensão do carregamento de tração

Com base no gráfico da figura 9, pode-se verificar a regressão linear para o ensaio em carga é $y = 39708x + 0.7603$. Através da lei de Hooke, pode-se verificar que o gradiente do gráfico Tensão vs Extensão resulta no Módulo de Young do provete. Perante isto, pode-se afirmar que para este ensaio de carregamento, o seu valor é $E_x = 39.708$ GPa.

Utilizando novamente o gráfico da imagem 9, é possível verificar que a linha de regressão linear que corresponde à descarga (a laranja) é $y = 39615x + 0.5877$. Tendo esta equação em mente, chega-se a conclusão que para o ensaio em descarga, o Módulo de Young é $E_x = 39.615$ GPa.

Sabendo os módulos chega-se a um valor médio para o Módulo de Young do provete em questão. Este valor é $E_x = 39.615$ GPa.

Para finalizar a secção do ensaio de tração pode-se verificar o desvio entre os valores verdadeiros do Módulo de Young e o calculado teoricamente usando a Teoria Clássica dos Laminados presente na tabela 8 na secção 4.3.

$$Desvio = \frac{|E_{terico} - E_{experimental}|}{E_{terico}} \times 100 = 2.36\% \quad (41)$$

Sabendo que o desvio é tão insignificante, poder-se-á concluir que a Teoria Clássica dos Laminados é válida para o ensaio em tração deste provete.

5.3 Cálculo das tensões ao longo da espessura do laminado

Segundo a Teoria Clássica de Laminados, as forças por unidade de comprimento (N_x, N_y e N_{xy}) e os momentos por unidade de comprimento (M_x, M_y e M_{xy}) podem ser relacionados com as extensões (ϵ_x e ϵ_y), com a distorção (γ_{xy}) e com

as diferentes matrizes A (equação 19), B (equação 20) e D (equação 21) através das seguintes formulas:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (43)$$

sendo $k_x = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}$, $k_y = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}$ e $k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}$

No ensaio de tração não existe criação de momentos. Por essa razão, a equação 43 não é usada. Como foi estudado na secção 4.2, a matriz B (equação 20) é nula por isso pode-se ter uma equação dos esforços, desconhecidos, em função das forças, conhecidas.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Para o ensaio em questão, a força é aplicada somente segundo o eixo x , tornando as forças N_y e N_{xy} nulas. Sendo assim, a força por unidade de comprimento é dada por:

$$N_x = \frac{F_x}{b} = \frac{9000}{57.1767} = 158.36 \text{ N mm}^{-1} \quad (45)$$

Usando a matriz inversa A (equação 22 calculada na secção 4.3 e o valor da força N_x (equação 45) obtém-se as seguintes extensões e deflexão:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8550 \\ -0.3341 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad (46)$$

Um comentário importante a realçar é o valor da distorção (γ_{xy}) ser zero. Como não existem momentos, não ocorre distorção. Sendo assim confirma-se a viabilidade do resultado.

Como o objetivo é calcular as diferentes tensões ao longo da espessura do laminado, a próxima etapa será multiplicar as diferentes matrizes \bar{Q} (equações 12, 13, 14 e 15) pelos valores das extensões e deflexão.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Sabendo que as tensões ao longo da espessura do laminado no ensaio da tração não é influenciado pela altura do mesmo, pode-se calcular facilmente as diferentes tensões para as diferentes direções das lâmina (0° , 45° , -45° e 90°).

Tabela 12: Valores das tensões para as diferentes lâminas para a força $F = 9000 \text{ N}$

Ângulo θ°	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)
0	150.2273	-0.1974	0.0000
+45	30.2726	20.9272	21.6438
-45	30.2726	20.9272	-21.6438
90	8.1096	-55.7401	0.0000

Tendo em contas as tensões descritas na tabela 12, podem ser desenhados os gráficos com as variações das diferentes tensões ao longo da espessura do laminado.

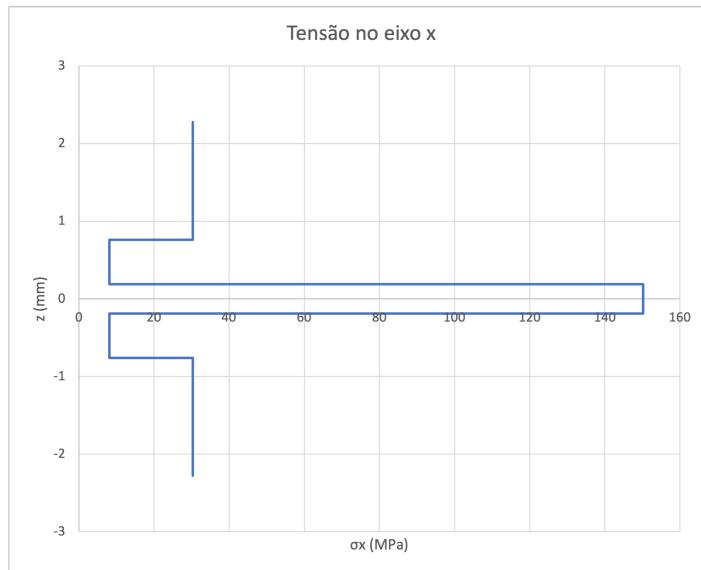


Figura 10: Gráfico Tensão no eixo x ao longo da espessura do laminado

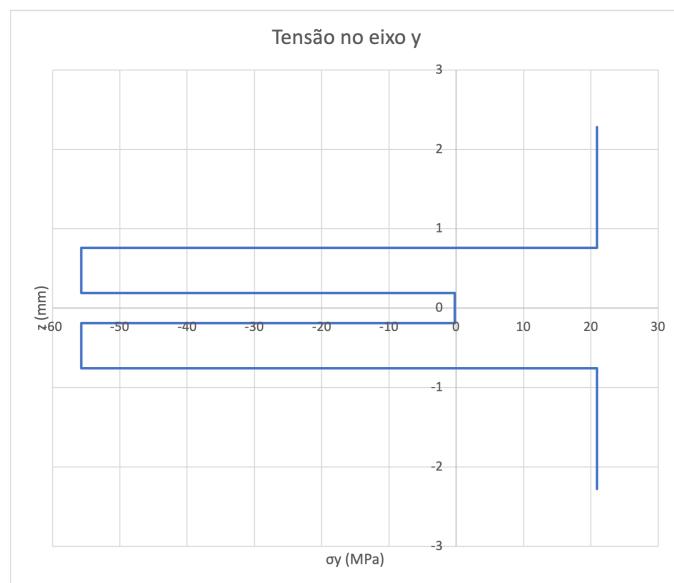


Figura 11: Gráfico Tensão no eixo y ao longo da espessura do laminado

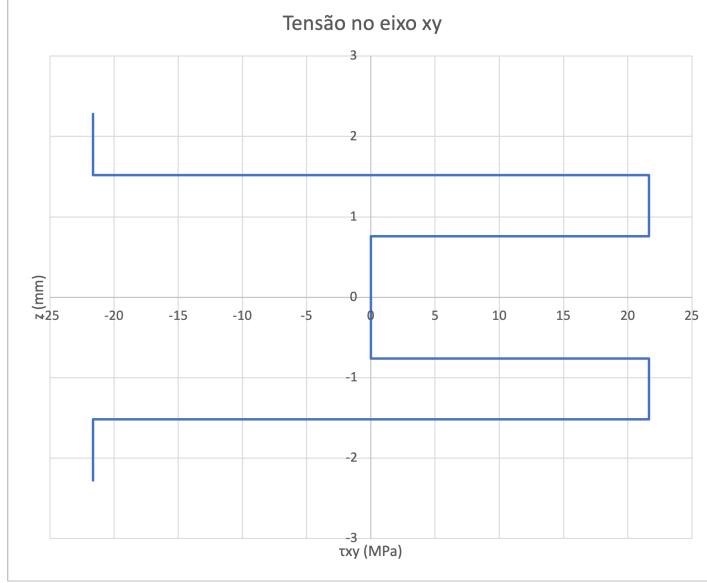


Figura 12: Gráfico Tensão no eixo xy ao longo da espessura do laminado

Como é possível verificar nos gráficos das figuras 10, 11 e 12, a tensão não varia com a espessura do laminado, mas sim, com a orientação da fibra no laminado. Na mudança da orientação do laminado, o gráfico muda automaticamente o valor da tensão segundo a tabela 9.

6 Resultados Experimentais do Ensaio de Flexão

6.1 Ensaio Experimental

Depois do ensaio de tração, foi realizado um ensaio de flexão para a mesma placa de compósito. O ensaio flexão consiste em aplicar uma carga numa das extremidades da placa. A outra extremidade está presa de modo a que não se consiga mover em nenhum dos três eixos. Significa portanto, que o provete vai ser considerado como uma peça encastrada numa das exterminadas.



Figura 13: Representação do ensaio de flexão do provete

A figura 13 mostra o método do ensaio em que a distância entre o encastramento e o extensómetro é $d = 50$ mm e o comprimento da placa é $L = 200$ mm. Sabendo que o provete está perante uma flexão uniaxial (perante um eixo), tem de ser calculada a tensão normal de flexão σ_{fx} . Usa-se a seguinte fórmula:

$$\sigma_{fx} = \frac{P(L-d)h}{2I_y} \quad (48)$$

em que P é a força aplicada na extremidade da placa, h a espessura média da placa e I_y o segundo momento de área da placa usando os valores médios para a espessura (h) e para a largura (b), ambos calculados na secção 5.1. Sendo assim, utiliza-se o seguinte valor para I_y :

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 57.1767 \times 4.4167 = 410.5078mm^4 \quad (49)$$

Sabendo todas as constantes da fórmula 48 e utilizando os dados experimentais para a força aplicada, pode ser obtido as tabelas 13 e 14:

Tabela 13: Valores da força, deslocamento, extensão e tensão normal de flexão no ensaio de flexão experimental nº 1 (Carga)

Força (N)	Deslocamento (δ) (mm)	Extensão ($\mu\epsilon$)	Tensão normal de flexão (MPa)
2	-0.52	64	1.6139
4	-1.20	130	3.2277
5	-1.46	159	4.0346
7	-2.05	225	5.6485
10	-2.89	321	8.0693
12	-3.46	387	9.6831
15	-4.32	486	12.1039
17	-4.88	550	13.7178
20	-5.62	636	16.1385
25	-7.00	797	20.1732

Tabela 14: Valores da força, deslocamento, extensão e tensão normal de flexão no ensaio de flexão experimental nº 2 (Descarga)

Força (N)	Deslocamento (δ) (mm)	Extensão ($\mu\epsilon$)	Tensão normal de flexão (MPa)
25	-7.00	797	20.1732
20	-5.69	640	16.1385
17	-4.86	545	13.7178
15	-4.34	482	12.1039
12	-3.52	387	9.6831
10	-2.97	323	8.0693
7	-2.04	223	5.6485
5	-1.48	159	4.0346
4	-1.20	128	3.2277
2	-0.59	61	1.6139

6.2 Módulo de Elasticidade em Flexão do Laminado

Sabendo agora os resultados para a tensão e extensão dos dois ensaios, consegue-se calcular o Módulo de Elasticidade de Flexão através do declive da reta dos gráficos de tensão extensão. Assim como na secção 5.2, o seguinte gráfico contém os dois ensaios (carga e descarga). Para ser fácil de interpretar, a azul está o ensaio de carga e a laranja o de descarga.

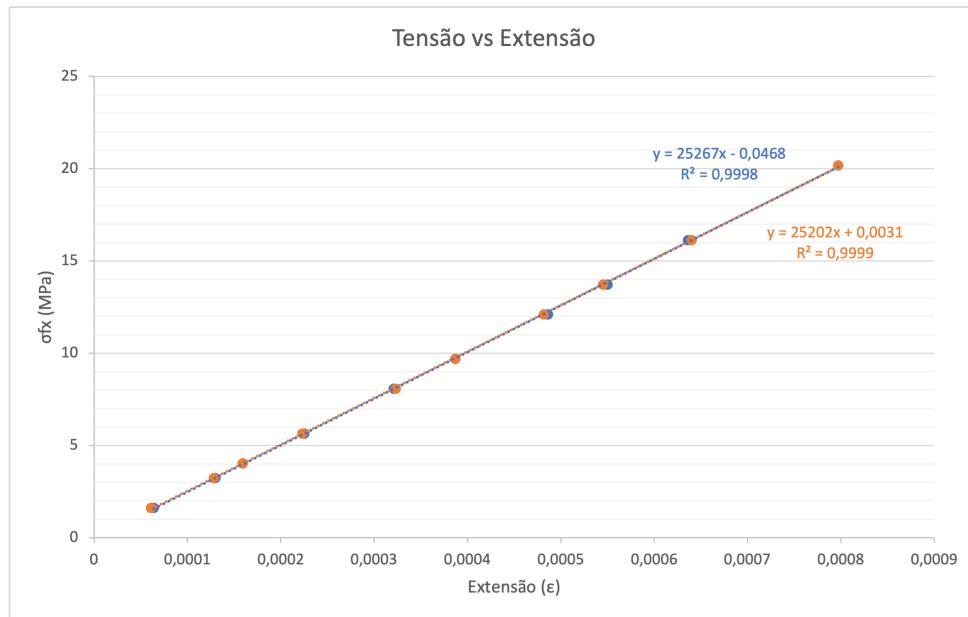


Figura 14: Gráfico Tensão vs Extensão do carregamento de flexão

Através do gráfico da figura 14, verifica-se a regressão linear $y = 25267x - 0.0047$. Assim como na secção 5.2, através da regressão linear chega-se ao valor do Módulo de Elasticidade em Flexão E_{fx} , por consequência da lei de Hooke. Por essa razão, o seu valor é $E_{fx} = 25.267 \text{ GPa}$.

Assim como se fez no processo de carga, o processo de descarga é igual. Por isso, a regressão linear presente no mesmo gráfico corresponde a $y = 25202x + 0.0031$ (a laranja). Com isto, chega-se a conclusão que para o ensaio em descarga, o Módulo de Elasticidade em Flexão do Laminado é $E_{fx} = 25.202 \text{ GPa}$.

Com base nos dois últimos valores para o Módulo de Elasticidade pode-se determinar um valor médio para usar como resposta do ensaio de flexão. Ou seja, o módulo de elasticidade experimental do laminado é $E_{fx} = 25.2345 \text{ GPa}$.

Sabendo agora o Módulo de Elasticidade de flexão verdadeiro, pode-se comparar este valor com algumas abordagens teóricas. A primeira a ser abordada tem como base o valor obtido experimentalmente do deslocamento vertical δ . A fórmula usada será o deslocamento máximo que uma viga encastrada pode sofrer perante uma força aplicada na extremidade livre da placa.

$$E_{fx} = -\frac{PL^3}{3\delta I_y} \quad (50)$$

Assim como foi referido acima, o valor da força P varia conforme o ensaio é feito. O comprimento é $L = 200 \text{ mm}$ e o segundo momento de área $I_y = 410.5078 \text{ mm}^4$.

Tabela 15: Valores da força e o Módulo de Elasticidade de Flexão experimental no ensaio nº 1 (Carga)

Força (N)	2	4	5	7	10	12	15	17	20	25
E_{fx} (GPa)	24.9847	21.6534	22.2467	22.1815	22.4776	22.5295	22.5556	22.6296	23.1175	23.2001

Tabela 16: Valores da força e o Módulo de Elasticidade de Flexão experimental no ensaio nº 2 (Descarga)

Força (N)	25	20	17	15	12	10	7	5	4	2
E_{fx} (GPa)	23.2001	22.8331	22.7227	22.4517	22.1455	21.8721	22.2903	21.9460	21.6534	22.0204

Sabendo isto, foram calculados os Módulos de elasticidade para cada momento de força (ver tabela 15 e 16). Fazendo uma média dos diferentes valores para o Módulo de Elasticidade de flexão temos um valor de $E_{fx} = 22.5006 \text{ GPa}$. Sabendo este valor e o valor obtido experimentalmente, pode ser verificado o desvio para avaliar se a aproximação feita pode ser utilizada.

$$\text{Desvio} = \frac{|22.5006 - 25.2345|}{22.5006} \times 100 = 12.15\% \quad (51)$$

Observando a equação 51, pode-se afirmar que o desvio é um pouco elevado, sendo por isso possível admitir, que esta aproximação não é muito viável.

Outro método mais teórico sem envolver valores experimentais é a Teoria Clássica dos Laminados que foi utilizada na secção 4.3. Nessa secção, foi calculado o valor do Módulo de Elasticidade de flexão teórico (ver equação 29). O valor obtido foi $E_{fxTCL} = 17.9340 \text{ GPa}$ (ver tabela 8). Testando a viabilidade do resultado usando a fórmula do desvio obtem-se a seguinte equação:

$$\text{Desvio} = \frac{|17.9340 - 25.2345|}{17.9340} \times 100 = 40.71\% \quad (52)$$

Como é visível na equação 52, a Teoria Clássica dos Laminados não é valida para o provete em questão. O desvio é muito elevado. Por esta razão, não se poderá utilizar este método para calcular teoricamente o valor do Módulo de Elasticidade em Flexão do laminado.

6.3 Método de aproximação de Halpin Tsai

Sabendo então que, até agora, não foi possível obter nenhuma fórmula teórica para obter "corretamente" o Módulo de Elasticidade em Flexão do laminado, usar-se-á a aproximação das equações de Halpin Tsai. Este modelo vai alterar a matriz Q que foi apresentada na secção 4.2. Sabendo isto, tem de ser calculado o valor para as constantes de elasticidade transversal e longitudinal assim como os seus respetivos coeficientes de Poisson e o módulo de corte (G_{LT}).

Esta aproximação na direção longitudinal é igual a do Método das misturas, estudado na secção 4.1. As fórmulas 1 e a 3 são as mesmas, e, por essa razão, tem-se o valor da constante de elasticidade do laminado na direção longitudinal $E_L = 175.8 \text{ GPa}$ e o coeficiente de poisson longitudinal $\nu_{LT} = 0.37$.

A aproximação das equações de Halpin Tsai tem uma equação para conseguir obter a constante de elasticidade do laminado na direção transversal:

$$E_T = E_M \frac{1 + \zeta \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (53)$$

onde $E_M = 4.5$ GPa é o módulo de Young da matriz (resina epoxídica), $V_f = 0.6$ é a fração volúmica da fibra. Assumindo $\zeta = 2$ porque a fibra de carbono é circular, a variável η é obtida pela seguinte fórmula:

$$\eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \zeta} \quad (54)$$

onde $E_f = 290$ GPa é o módulo de Young da fibra (Carbono T800).

Substituindo os valores da equação 54, obtém-se o valor $\eta = 0.9549$, e substituindo este valor na equação 53, o valor do Módulo de Young Transversal é $E_T = 22.6092$ GPa.

O próximo coeficiente que tem de ser retirado da aproximação das equações de Halpin Tsai é o módulo de corte G_{LT} através da seguinte equação:

$$G_{LT} = G_m \frac{1 + \zeta \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (55)$$

sendo $G_m = 1.61$ GPa o módulo de corte da matriz calculado na secção 4.1 (ver tabela 6), $\zeta = 1 + 40V_f^{10} = 1.2419$ e η a seguinte equação:

$$\eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + \zeta} \quad (56)$$

Utilizando a equação 56, o módulo de corte da fibra é $G_f = 107.41$ GPa (ver tabela 6).

Substituindo todos os valores na equação 55, obtém-se o valor de $G_{LT} = 6.5876$ GPa e utilizando a equação 4, consegue-se obter o novo coeficiente de Poisson para a posição transversal, $\nu_{TL} = 0.0476$

Com estes novos dados, pode-se substituir as variáveis na equação 7 e criar uma nova matriz Q .

$$Q = \begin{bmatrix} 178.9507 & 8.5153 & 0.0000 \\ 8.5153 & 23.0144 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.5876 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (57)$$

Repetindo todo o processo que foi descrito na secção 4.2, temos novas matrizes \bar{Q} e uma nova matriz D , tendo em mente que o empilhamento é o mesmo.

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 178.9507 & 8.5153 & 0.0000 \\ 8.5153 & 23.0144 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.5876 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (58)$$

$$[\bar{Q}]_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 61.3366 & 48.1613 & 38.9841 \\ 48.1613 & 61.3366 & 38.9841 \\ 38.9841 & 38.9841 & 46.2336 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (59)$$

$$[\bar{Q}]_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 61.3366 & 48.1613 & -38.9841 \\ 48.1613 & 61.3366 & -38.9841 \\ -38.9841 & -38.9841 & 46.2336 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (60)$$

$$[\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 23.0144 & 8.5153 & 0.0000 \\ 8.5153 & 178.9507 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 6.5876 \end{bmatrix} \text{ GPa} \quad (61)$$

$$D = \begin{bmatrix} 474.1531 & 368.9476 & -136.9045 \\ 368.9476 & 518.3619 & -136.9045 \\ -136.9045 & -136.9045 & 353.7156 \end{bmatrix} \text{ GPa mm}^3 \quad (62)$$

Na teoria das equações de Halpin Tsai o método para se achar as diferentes constantes de elasticidade recorre às mesmas fórmulas da Teoria Clássica dos laminados presentes na secção 4.3. Sabendo isto, pode-se calcular muito facilmente o Módulo de Elasticidade em Flexão do laminado teórico usando a equação 29. Sabe-se então, que este valor teórico usando as equações de Halpin Tsai é $E_{fx} = 26.1528$ GPa.

Com este valor, pode-se agora verificar o desvio para saber se a aproximação das equações de Halpin Tsai são válidas para o ensaio em questão. Fazendo as contas do desvio chega-se à conclusão que o valor do desvio é de cerca de 3.5114%. Pode-se concluir que o modelo de Halpin Tsai é válido para o caso em estudo e pode ser usado para se estimar os valores para as constantes de elasticidade para o ensaio de flexão e para o provete com o empilhamento do projeto.

7 Resultados Analíticos do Ensaio de Flexão

7.1 Deslocamento vertical no local de aplicação da força e extensão no local do extensómetro

Recorrendo à equação 50 e tendo como variável desconhecida o δ em vez do E_{fx} , poder-se-á calcular o deslocamento no local da aplicação de cada força utilizada nos ensaios de carga (ver tabela 13) e de descarga (ver tabela 14), sabendo que o comprimento $L = 200mm$, o $E_{fx} = 25.2345\text{ GPa}$ (média do declive da reta dos dois ensaios de flexão) e $I_y = 410.5078mm^4$.

A extensão ε_{xx} é obtida através da equação:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{fx}}{E_{fx}} \quad (63)$$

sendo σ_{fx} , o valor de cada tensão para cada carga aplicada e E_{fx} a média do declive da reta dos dois ensaios de flexão. É importante salientar que o extensómetro encontra-se a 50 mm do local do encastramento.

Tabela 17: Valores da força, deslocamento no local da aplicação da força e extensão no local do extensómetro calculada analiticamente para a solicitação de flexão

Força (N)	Deslocamento (δ) (mm)	Extensão ($\mu\varepsilon$)
2	-0.5149	63.9543
4	-1.0297	127.9086
5	-1.2871	159.8857
7	-1.8020	223.8400
10	-2.5743	319.7715
12	-3.0891	383.7258
15	-3.8614	479.6572
17	-4.3762	543.6115
20	-5.1485	639.5430
25	-6.4357	799.4287

Como o deslocamento e a extensão só são afetados pelas forças experimentais, os valores analíticos para a carga e para a descarga do deslocamento e da extensão são os mesmos já que as forças aplicadas em ambos os ensaios foram as mesmas.

Tabela 18: Desvios da extensão do resultado obtido experimentalmente com o resultado obtido analiticamente para o ensaio de carga

Extensão experimental ($\mu\varepsilon$)	64	130	159	225	321	387	486	550	636	797
Extensão analítica ($\mu\varepsilon$)	63.9543	127.9086	159.8857	223.8400	319.7715	383.7258	479.6572	543.6115	639.5430	799.4287
Desvio (%)	0.0715	1.6351	0.5540	0.5182	0.3842	0.8532	1.3224	1.1759	0.5540	0.3038

Tabela 19: Desvios da extensão do resultado obtido experimentalmente com o resultado obtido analiticamente para o ensaio de descarga

Extensão experimental ($\mu\varepsilon$)	797	640	545	482	387	323	223	159	128	61
Extensão analítica ($\mu\varepsilon$)	799.4287	639.5430	543.6115	479.6572	383.7258	319.7715	223.8400	159.8857	127.9086	63.9543
Desvio (%)	0.3038	0.0715	0.2554	0.4884	0.8533	1.0096	0.3753	0.5540	0.0715	4.6194

Com base nas tabelas 18 e 19, é possível verificar que a média dos desvios da extensões experimentais com as analíticas é cerca de 0.8247%. Este valor é muito reduzido o que implica dizer novamente que o resultado analítico é muito viável para este ensaio.

Fazendo o cálculo para o desvio nos deslocamentos obtém-se as seguintes tabelas.

Tabela 20: Desvios do deslocamento do resultado obtido experimentalmente com o resultado obtido analiticamente para o ensaio de carga

Deslocamento experimental (δ) (mm)	-0.52	-1.2	-1.46	-2.05	-2.89	-3.46	-4.32	-4.88	-5.62	-7
Deslocamento analítico (δ) (mm)	-0.5149	-1.0297	-1.2871	-1.8020	-2.5743	-3.0891	-3.8614	-4.3762	-5.1485	-6.4357
Desvio (%)	0.9999	16.5383	13.4306	13.7636	12.2652	12.0063	11.8768	11.5112	9.1575	8.7691

Tabela 21: Desvios do deslocamento do resultado obtido experimentalmente com o resultado obtido analiticamente para o ensaio de descarga

Deslocamento experimental (δ) (mm)	-7	-5.69	-4.86	-4.34	-3.52	-2.97	-2.04	-1.48	-1.20	-0.59
Deslocamento analítico (δ) (mm)	-6.4357	-5.1485	-4.3762	-3.8614	-3.0891	-2.5743	-1.8020	-1.2871	-1.0297	-0.5149
Desvio (%)	8.7691	10.5172	11.0542	12.3947	13.9486	15.3729	13.2086	14.9845	16.5383	14.5960

Como se pode ver nas tabelas 20 e 21, a média dos desvios do deslocamento é maior quando comparado com o desvio das extensões. Neste caso, a média é cerca de 12.2597%. Este valor é normal ser superior pois o método experimental de retirar as medidas é por meio de um equipamento que pode variar muito facilmente, ou seja, a exatidão não é tão elevada quando se compara para um extensómetro. Mesmo assim, é possível garantir que é um desvio aceitável para o ensaio em questão.

7.1.1 Cálculo das tensões ao longo da espessura do laminado

Assim como foi feito para a secção 5.3, neste capítulo vai ser calculado através da equação 43, as extensões (ε_x e ε_y) e a distorção (γ_{xy}) ao longo da espessura do laminado no ensaio de flexão. Como é possível verificar na equação 43, existem duas matrizes B e D , calculadas na secção 4.2.

Chegou-se à conclusão na secção 6.1, que a Teoria Clássica dos Lamindos não era válida. Sendo assim, na secção 6.3 foi estudado uma aproximação diferente (as equações de Halpin Tsai), que no final dessa secção foi validada, ou seja, a aproximação teórica poderá ser utilizada para obter valores teóricos. Sendo assim, nessa mesma secção foi calculada uma nova matriz D (equação 62) e esta sim será a utilizada com os valores obtidos através das equações de Halpin Tsai.

Sabendo que a matriz B é nula pois o empilhamento é simétrico ficando apenas a segunda parte da equação 43. Sabe-se também que a força aplicada no provete T800 é 10N e tem sentido no eixo z , criando momento apenas no eixo x , poder-se-á calcular a parte da esquerda da equação através da seguinte fórmula:

$$M_x = \frac{FL}{b} = \frac{10 \times 200}{57.1767} = 35.1911 \text{ N} \quad (64)$$

onde F é a força aplicada, L é a distância entre o encastramento e o local da aplicação da força e b a espessura do laminado. Invertendo a matriz D , pode-se calcular as entradas do vetor:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1703 \\ -0.1156 \\ 0.0212 \end{bmatrix} 10^3 \text{ mm}^{-1} \quad (65)$$

Tendo agora o vetor k , tem de ser descoberto o valor do vetor de extensões. Para tal usar-se-á a equação $\varepsilon = \varepsilon_0 + zk$. Como não existe extensão inicial $\varepsilon_0 = 0$, o vetor da extensão fica apenas composto pela equação $\varepsilon = zk$. Com isto em mente, falta apenas transformar o vetor da extensão para um vetor de tensão. Para tal, usar-se-á a equação 47, presente na secção 5.3, para determinar os valores das diferentes tensões para as diferentes orientações da fibra.

Tabela 22: Valores das tensões por unidade de largura para as diferentes lâminas para a força $F = 10 \text{ N}$

Ângulo $\theta(\circ)$	$\sigma_x(\text{MPa mm}^{-1})$	$\sigma_y(\text{MPa mm}^{-1})$	$\tau_{xy}(\text{MPa mm}^{-1})$
0	29.4898	-1.2108	0.1394
+45	5.7019	1.9349	3.1099
-45	4.0519	0.2849	-1.1531
90	2.9347	-19.2401	0.1394

Multiplicando a coordenada z (posição entre cada limite do lamiado, superior e inferior, com a linha de simetria do laminado), com o vetor k que corresponde a orientação laminado em questão consegue-se obter os gráficos com as diferentes tensões (σ_x , σ_y e τ_{xy}) ao longo da espessura do laminado criado pelo momento da força aplicada de $F = 10 \text{ N}$.

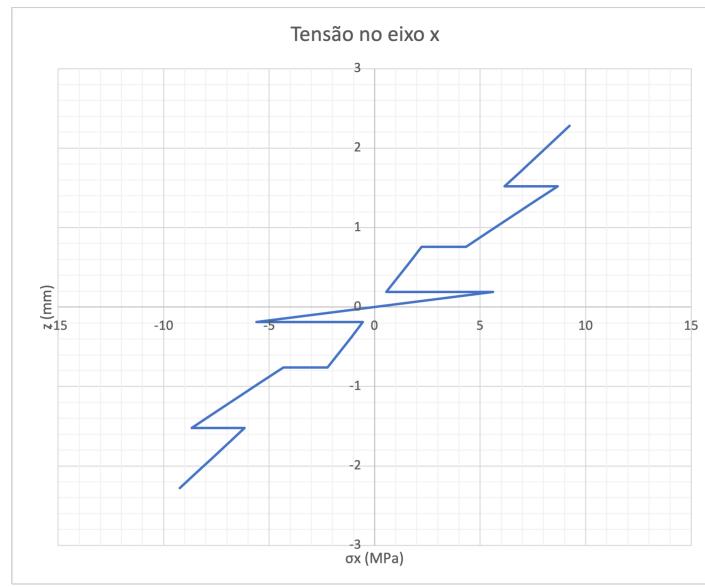


Figura 15: Gráfico Tensão no eixo x ao longo da espessura do laminado

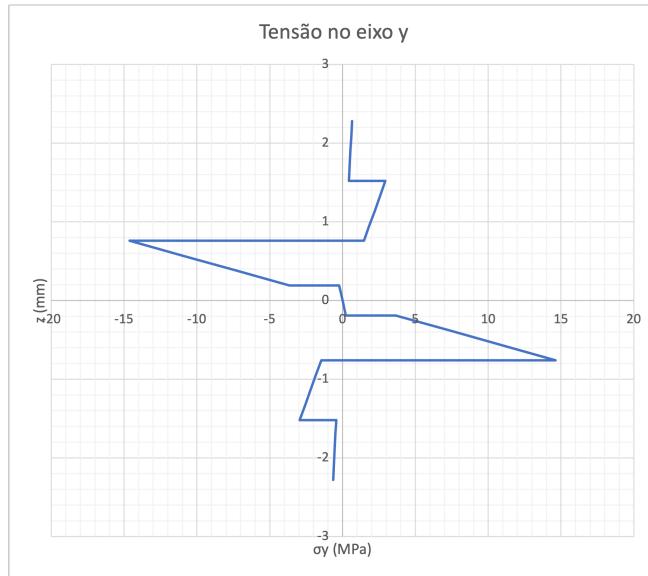


Figura 16: Gráfico Tensão no eixo y ao longo da espessura do laminado

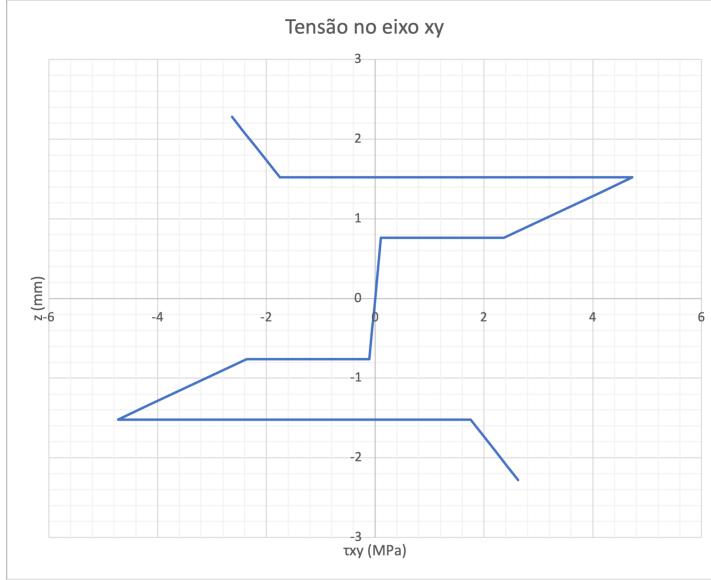


Figura 17: Gráfico Tensão no eixo xy ao longo da espessura do laminado

Oposto ao que foi possível observar nos gráficos de tensão ao longo do laminado na secção 5.3, nas figuras 15, 16 e 17, é possível verificar que a tensão varia com a espessura do laminado e com a orientação da fibra no laminado.

8 Análise de Rotura do Laminado

O critério de rotura de tensão máxima diz que qualquer laminado não parte (não entra em rotura) se todas as condições abaixo forem verificadas:

$$-S_L^{(-)} < \sigma_1 < +S_L^{(+)} \quad (66)$$

$$-S_T^{(-)} < \sigma_2 < +S_T^{(+)} \quad (67)$$

$$|\tau_{12}| < S_{LT} \quad (68)$$

Como está no enunciado, os valores de $S_L = 2.580$ GPa e $S_T = 0.045$ GPa são os valores de tensão de rotura da lâmina no sentido longitudinal e transversal, respetivamente, e $S_{LT} = 0.110$ GPa é o valor da tensão de rotura da lâmina no sentido do módulo de corte. Como é pedido para um ensaio em tração, apenas será necessário usar os valores positivos. Caso fosse para um ensaio de compressão usar-se-ia os valores negativos.

Para resolver este problema irá ser necessário recorrer as equações 44 e a equação 45, sendo que, para esta última, a força usada será a máxima. É necessário relembrar que, como se está presente num processo de tração, as entradas N_y e N_{xy} serão nulas. Uma nova equação terá de ser utilizada.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [T]_\sigma \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Como é possível ver na equação 69, os valores σ_1 , σ_2 e σ_{12} irão depender da orientação das fibras devido a multiplicação da matriz $[T]_\sigma$. Através de um processo iterativo realizado em Matlab (ver apêndice G), o resultado obtido foi de aproximadamente $F = 50.2429$ kN. Se realizarmos os cálculos feitos na secção 5.3, mas em vez de $F = 9$ kN, usar o valor obtido iterativamente obtém-se os valores para as tensões máximas na tabela abaixo:

Tabela 23: Valores das tensões para as diferentes lâminas para a força $F = 50.2429$ kN

Ângulo $\theta(^{\circ})$	σ_1 (MPa)	σ_2 (MPa)	τ_{12} (MPa)
0	833.6026	-1.0954	0.0000
+45	262.1522	21.9523	-25.9285
-45	262.1522	21.9523	25.9285
90	-309.2982	45.0000	-3.8611

Como é possível verificar na tabela 23, o valor máximo foi atingido no laminado com a orientação a 90° . O sentido da tensão que atingiu a rotura em primeiro lugar foi a tensão σ_2 . Se esta tensão for dividida pela transformação da tensão 80 ($[T]_\sigma(\theta = 90^\circ)$), obter-se-á a tensão na direção do eixo y . Por esta razão, conclui-se que o laminado quebrar-se-ia segundo o eixo y .

9 Análise de Resultados e Conclusões

Tração

De acordo com os resultados apresentados na secção 5.2 para o cálculo do módulo de Young, um desvio de 2.36% foi obtido. Pode-se concluir com este que, a Teoria Clássica dos Laminados é uma boa aproximação. No entanto, é importante referir que, a equação 5 para a fibra, pressupõe que esta é isotrópica, algo que se sabe não ser verdade, tal como foi explicado na secção 2.2, aquando da explicação do fabrico destas. Isto pode ter sido uma explicação para o desvio, apesar de pequeno, existir.

Para além deste, erros na medição do provete devido a defeitos superficiais ou erros na leitura dos dados pelo extensómetro e da força na leitura, devido ao facto de estes estarem a variar, podem ter ocorrido. Contudo, olhando para o R^2 das retas de carga e descarga, observa-se um valor praticamente unitário, revelando uma boa correlação dos dados.

É possível também concluir que, à tração, a lámina com maior valor, na direção da força (σ_x), é a com orientação de 0° . Estando num estado de isoextensão, como as fibras estão orientadas na direção da força, têm o maior módulo de elasticidade. Desta forma, terão também a maior tensão, para a mesma extensão.

Flexão

Inicialmente, utilizando a Teoria Clássica dos Laminados, para obter o módulo de elasticidade de flexão, um desvio de quase 41% foi obtido. Sabendo que tal teoria não podia ser usada para calcular valores analíticos para deslocamentos, extensões e tensões, foi necessário procurar uma teoria diferente. Para se tentar obter uma teoria que melhor explicasse o comportamento do provete em flexão, foram efetuados cálculos utilizando a teoria de Halpin Tsai. Esta teoria utiliza a base da Teoria Clássica dos Laminados mas para as constantes transversais são utilizadas pequenas correções para obter diferentes valores. Com esta, um desvio de 3.5% foi determinado. Sendo a percentagem de fibras algo elevada (60%), a diferença entre ambos os métodos é grande, pois quanto maior for a percentagem de fibra maior é o Módulo de Young transversal.

Olhando para os deslocamentos das tabelas 13, 14 e 17 é possível notar-se algumas discrepâncias nos valores. Uma das possíveis razões poderá ser o facto de, a equação 50 estar definida para materiais homogéneos, o que não é o caso devido ao compósito.

Relativamente aos valores da extensão, esta no modelo teórico depende diretamente da espessura do laminado. Ora, existe uma significativa diferença entre o valor medido e o valor que seria esperado tendo em conta o número de camadas e o diâmetro das fibras e, por isso, este desvio nas extensões era esperado. Para além destas, a posição do extensómetro poderia não ser exatamente a 50 mm do encastramento resultando em comparações de extensões analíticas e experimentais, em sítios diferentes.

Relativamente aos gráficos de tensão, observa-se que para $z > 0$, as lâminas na direção x estão em tração, enquanto que para $z < 0$, estão em compressão. Isto é de esperar pelo tipo de momento que a força cria (sentido horário). Caso fosse no sentido inverso, seria precisamente o contrário do comportamento das tensões em x .

Rotura do Laminado

Relativamente à rotura do laminado, esta dá-se na lámina com orientação a 90° quando tracionado com uma força de cerca de 50.2 kN. Isto era já o esperado, dado que, à tração, para esta lámina, as condições são de isotensão. Assim, o módulo de Young nesta lámina é o menor possível, não suportando portanto, a mesma extensão que outras lâminas e, por isso, quebrando primeiro. É possível também refletir com este resultado que, tomando esta força máxima obtida, como a de rotura total do compósito, o valor de tensão de rotura do compósito pode ser calculado como $\sigma_{rot} = \frac{F_{rot}}{b \times h} \approx 199$ MPa. Comparando com valores de tensão de rotura, por exemplo, de um alumínio [12], este valor está a par de algumas séries, mesmo com tratamentos térmicos. No entanto, o compósito apresenta uma densidade de 60% do alumínio.

Referências

- [1] Junuthula Narasimha Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.

- [2] Materiais Compósitos Laminados. Apresentação, 2022. Disponível em: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/563568428873950/01-apresentacao%20vs2022.pdf> (Consultado a 10/11/2022).
- [3] Trevor William Clyne and Derek Hull. *An introduction to composite materials*. Cambridge university press, 2019.
- [4] David W Dwight and S Begum. 1.10 glass fiber reinforcements. In *Comprehensive composite materials II*, pages 243–268. Elsevier, 2018.
- [5] N Yusof and AF Ismail. Post spinning and pyrolysis processes of polyacrylonitrile (pan)-based carbon fiber and activated carbon fiber: A review. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 93:1–13, 2012.
- [6] Fumihiro Tanaka and Tomonaga Okabe. Historical review of processing, microstructures, and mechanical properties of pan-based carbon fibers. In *Comprehensive composite materials II*, pages 66–85. Elsevier, 2017.
- [7] Xiaosong Huang. Fabrication and properties of carbon fibers. *Materials*, 2(4):2369–2403, 2009.
- [8] Deborah Chung. *Carbon fiber composites*. Elsevier, 2012.
- [9] Hung Man Yang. 1.8 aramid fibers. In *Comprehensive composite materials II*, pages 187–217. Elsevier, 2018.
- [10] Materiais Compósitos Laminados. Polymeric fibre composites: Production methods, 2022. Disponível em: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1970943312368745/Polymeric%20Fibre%20Composites-Production%20Methods%20.pdf> (Consultado a 10/11/2022).
- [11] Flake C Campbell Jr. *Manufacturing processes for advanced composites*. Elsevier, 2003.
- [12] Aalco Metals Ltd, Parkway House, Unit 6 Parkway Industrial Estate, Wednesbury WS10 7WP. *Aluminium Alloy Specifications*, July 2019. <https://www.aalco.co.uk/datasheets/Aluminium-Alloy-Specifications42.ashx>.

A Apêndice I - Resultados experimentais

Materiais Compósitos Laminados:

Tracção/ Tensile Test		Flexão/ Bending Test		
Força (Load) (kN)	Extensão (Strain) ($\mu\epsilon$)	Força (Load) (N)	Deslocam. (Displacement) (mm)	Extensão (Strain) ($\mu\epsilon$)
1130	97	2	-0,52	64
2115	192	4	-1,20	130
3300	309	5	-1,46	159
4120	390	7	-2,05	225
5250	502	10	-2,89	321
6193	596	12	-3,46	387
6970	676	15	-4,32	486
8000	780	17	-4,88	550
8991	880	20	-5,67	636
7788	763	25	-7	797
6791	663	20	-5,69	640
5975	583	17	-4,86	545
4930	480	15	-4,34	482
3978	390	12	-3,52	387
2920	290	10	-2,97	323
1900	141	7	-2,04	223
880	90	5	-1,48	159
		4	-1,20	128
		2	-0,59	61

Specimen Width (mm) : 57,28 / 57,20 / 57,05

Specimen thickness (mm) : 4,45 / 4,32 / 4,48

B Apêndice II - Empilhamento do laminado

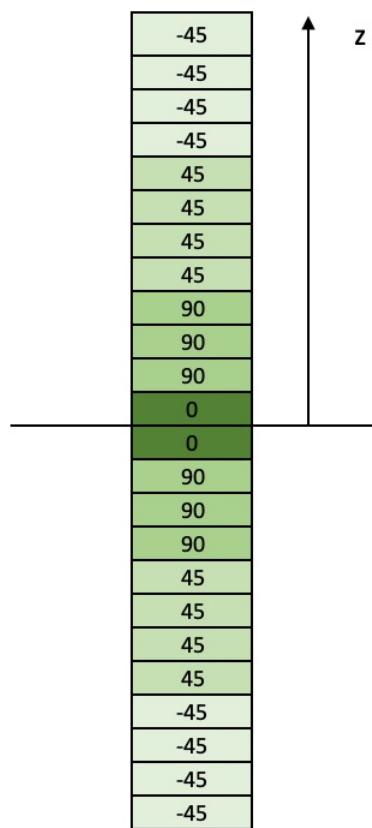


Figura 18: Empilhamento $[-45_4 / +45_4 / 90_3 / 0]_s$

C Apêndice III - Matrizes T

C.1 Transformações da extensão

$$[T]_{\varepsilon}(\theta = -45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 1.0000 & -1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$[T]_{\varepsilon}(\theta = 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$[T]_{\varepsilon}(\theta = 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$[T]_{\varepsilon}(\theta = 0^\circ) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (73)$$

C.2 Transformações inversas da extensão

$$[T]_{\varepsilon}^{-1}(\theta = -45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$[T]_{\varepsilon}^{-1}(\theta = 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 1.0000 & -1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$[T]_{\varepsilon}^{-1}(\theta = 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$[T]_{\varepsilon}^{-1}(\theta = 0^\circ) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (77)$$

C.3 Transformações da tensão

$$[T]_{\sigma}(\theta = -45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & -1.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \\ 0.5000 & -0.5000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$[T]_{\sigma}(\theta = 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -1.0000 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$[T]_{\sigma}(\theta = 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$[T]_{\sigma}(\theta = 0^\circ) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (81)$$

C.4 Transformações inversas da tensão

$$[T]_{\sigma}^{-1}(\theta = -45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -1.0000 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$[T]_{\sigma}^{-1}(\theta = 45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & -1.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 1.0000 \\ 0.5000 & -0.5000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$[T]_{\sigma}^{-1}(\theta = 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$[T]_{\sigma}^{-1}(\theta = 0^\circ) = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (85)$$

D Apêndice IV - Cálculos para as matrizes A , B e C - Teoria Clássica dos Laminados

Ângulo	Zk (mm)	Zk-1 (mm)	Zk - Zk-1 (mm)	(Zk^2-Zk-1^2)/2 (mm^2)	(Zk^3 - Zk-1^3)/3 (mm^3)
-45 Zk	24 Zk24	2,28	2,09	0,19	0,41515
-45 Zk	23 Zk23	2,09	1,9	0,19	0,37905
-45 Zk	22 Zk22	1,9	1,71	0,19	0,34295
-45 Zk	21 Zk21	1,71	1,52	0,19	0,30685
45 Zk	20 Zk20	1,52	1,33	0,19	0,27075
45 Zk	19 Zk19	1,33	1,14	0,19	0,23465
45 Zk	18 Zk18	1,14	0,95	0,19	0,19855
45 Zk	17 Zk17	0,95	0,76	0,19	0,16245
90 Zk	16 Zk16	0,76	0,57	0,19	0,12635
90 Zk	15 Zk15	0,57	0,38	0,19	0,09025
90 Zk	14 Zk14	0,38	0,19	0,19	0,05415
0 Zk	13 Zk13	0,19	7,21645E-16	0,19	0,01805
0 Zk	12 Zk12	7,2E-16	-0,19	0,19	-0,01805
90 Zk	11 Zk11	-0,19	-0,38	0,19	-0,05415
90 Zk	10 Zk10	-0,38	-0,57	0,19	-0,09025
90 Zk	9 Zk9	-0,57	-0,76	0,19	-0,12635
45 Zk	8 Zk8	-0,76	-0,95	0,19	-0,16245
45 Zk	7 Zk7	-0,95	-1,14	0,19	-0,19855
45 Zk	6 Zk6	-1,14	-1,33	0,19	-0,23465
45 Zk	5 Zk5	-1,33	-1,52	0,19	-0,27075
-45 Zk	4 Zk4	-1,52	-1,71	0,19	-0,30685
-45 Zk	3 Zk3	-1,71	-1,9	0,19	-0,34295
-45 Zk	2 Zk2	-1,9	-2,09	0,19	-0,37905
-45 Zk	1 Zk1	-2,09	-2,28	0,19	-0,41515
Zk	0 Zk0	-2,28			

Figura 19: Tabelas com as distâncias entre as lâminas do laminado

Q_11	Q_12	Q_13
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
177,3180896	4,102944948	0
177,3180896	4,102944948	0
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
11,0890404	4,102944948	5,34912E-17
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231
53,0829126	45,22359736	-41,55726231

Figura 20: Tabelas com as entradas Q_{11} , Q_{12} e Q_{13} do laminado

Q_21	Q_22	Q_23
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
4,102944948	11,0890404	0
4,102944948	11,0890404	0
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
4,102944948	177,3180896	1,01293E-14
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231
45,22359736	53,0829126	-41,55726231

Figura 21: Tabelas com as entradas Q_{21} , Q_{22} e Q_{23} do laminado

Q_31	Q_32	Q_33
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
0	0	3,929657623
0	0	3,929657623
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
5,34912E-17	1,01293E-14	3,929657623
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
41,55726231	41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003
-41,55726231	-41,55726231	45,05031003

Figura 22: Tabelas com as entradas Q_{31} , Q_{32} e Q_{33} do laminado

E Apêndice V - Cálculos para as matrizes A , B e C - Equações Halpin Tsai

Q_11	Q_12	Q_13
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
178,950677	8,51534349	0
178,950677	8,51534349	0
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
23,0144419	8,51534349	-8,10966E-17
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881
61,3365682	48,1613348	-38,98405881

Figura 23: Tabelas com as entradas Q_{11} , Q_{12} e Q_{13} do laminado usando as equações Halpin Tsai

Q_21	Q_22	Q_23
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	38,98405881
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
8,51534349	23,0144419	0
8,51534349	23,0144419	0
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
8,51534349	178,950677	9,63335E-15
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	38,98405881
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588
48,1613348	61,3365682	-38,9840588

Figura 24: Tabelas com as entradas Q_{21} , Q_{22} e Q_{23} do laminado usando as equações Halpin Tsai

Q_31	Q_32	Q_33
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
0	0	6,5876167
0	0	6,5876167
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
-8,10966E-17	9,63335E-15	6,5876167
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
38,98405881	38,98405881	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608
-38,98405881	-38,9840588	46,233608

Figura 25: Tabelas com as entradas Q_{31} , Q_{32} e Q_{33} do laminado usando as equações Halpin Tsai

F Apêndice VI - Cálculos para as tensões de tração e flexão ao longo do laminado

	Ângulo	z (mm)	Flexão				Tração				z (mm)
			σ_x (Mpa)	σ_y (Mpa)	τ_{xy} (Mpa)	σ_x (Mpa)	σ_y (Mpa)	τ_{xy} (Mpa)			
zlim superi.	-45	2,28	9,238411	0,649682	-2,62901	30,27259	20,9272	-21,64376623	2,28		
zlim inferio	-45	2,09	8,468543	0,595542	-2,40993	30,27259	20,9272	-21,64376623	2,09		
zlim superi.	-45	2,09	8,468543	0,595542	-2,40993	30,27259	20,9272	-21,64376623	2,09		
zlim inferio	-45	1,9	7,698676	0,541401	-2,19084	30,27259	20,9272	-21,64376623	1,9		
zlim superi.	-45	1,9	7,698676	0,541401	-2,19084	30,27259	20,9272	-21,64376623	1,9		
zlim inferio	-45	1,71	6,928808	0,487261	-1,97176	30,27259	20,9272	-21,64376623	1,71		
zlim superi.	-45	1,71	6,928808	0,487261	-1,97176	30,27259	20,9272	-21,64376623	1,71		
zlim inferio	-45	1,52	6,158941	0,433121	-1,75267	30,27259	20,9272	-21,64376623	1,52		
zlim superi.	45	1,52	8,666875	2,941055	4,726989	30,27259	20,9272	21,64376623	1,52		
zlim inferio	45	1,33	7,583515	2,573423	4,136115	30,27259	20,9272	21,64376623	1,33		
zlim superi.	45	1,33	7,583515	2,573423	4,136115	30,27259	20,9272	21,64376623	1,33		
zlim inferio	45	1,14	6,500156	2,205791	3,545241	30,27259	20,9272	21,64376623	1,14		
zlim superi.	45	1,14	6,500156	2,205791	3,545241	30,27259	20,9272	21,64376623	1,14		
zlim inferio	45	0,95	5,416797	1,838159	2,954368	30,27259	20,9272	21,64376623	0,95		
zlim superi.	45	0,95	5,416797	1,838159	2,954368	30,27259	20,9272	21,64376623	0,95		
zlim inferio	45	0,76	4,333437	1,470528	2,363494	30,27259	20,9272	21,64376623	0,76		
zlim superi.	90	0,76	2,230372	-14,6224	0,105949	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,76		
zlim inferio	90	0,57	1,672779	-10,9668	0,079462	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,57		
zlim superi.	90	0,57	1,672779	-10,9668	0,079462	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,57		
zlim inferio	90	0,38	1,115186	-7,31122	0,052975	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,38		
zlim superi.	90	0,38	1,115186	-7,31122	0,052975	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,38		
zlim inferio	90	0,19	0,557593	-3,65561	0,026487	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	0,19		
zlim superi.	0	0,19	5,603068	-0,23005	0,026487	150,2274	-0,1974	1,23351E-16	0,19		
zlim inferio	0	7,22E-16	2,13E-14	-8,7E-16	1,01E-16	150,2274	-0,1974	1,23351E-16	7,22E-16		

Figura 26: Tabelas com as tensões de tração e flexão ao longo do laminado superior

	Ângulo	z (mm)	Flexão				Tração				z (mm)
			σ_x (Mpa)	σ_y (Mpa)	τ_{xy} (Mpa)	σ_x (Mpa)	σ_y (Mpa)	τ_{xy} (Mpa)			
zlim superi.	0	7,22E-16	2,13E-14	-8,7E-16	1,01E-16	150,2274	-0,1974	1,23351E-16	7,22E-16		
zlim inferio	0	-0,19	-5,60307	0,230052	-0,02649	150,2274	-0,1974	1,23351E-16	-0,19		
zlim superi.	90	-0,19	-0,55759	3,65561	-0,02649	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,19		
zlim inferio	90	-0,38	-1,11519	7,311221	-0,05297	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,38		
zlim superi.	90	-0,38	-1,11519	7,311221	-0,05297	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,38		
zlim inferio	90	-0,57	-1,67278	10,96683	-0,07946	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,57		
zlim superi.	90	-0,57	-1,67278	10,96683	-0,07946	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,57		
zlim inferio	90	-0,76	-2,23037	14,62244	-0,10595	8,109658	-55,7401	-3,21544E-15	-0,76		
zlim superi.	45	-0,76	-4,33344	-1,47053	-2,36349	30,27259	20,9272	21,64376623	-0,76		
zlim inferio	45	-0,95	-5,4168	-1,83816	-2,95437	30,27259	20,9272	21,64376623	-0,95		
zlim superi.	45	-0,95	-5,4168	-1,83816	-2,95437	30,27259	20,9272	21,64376623	-0,95		
zlim inferio	45	-1,14	-6,50016	-2,20579	-3,54524	30,27259	20,9272	21,64376623	-1,14		
zlim superi.	45	-1,14	-6,50016	-2,20579	-3,54524	30,27259	20,9272	21,64376623	-1,14		
zlim inferio	45	-1,33	-7,58352	-2,57342	-4,13612	30,27259	20,9272	21,64376623	-1,33		
zlim superi.	45	-1,33	-7,58352	-2,57342	-4,13612	30,27259	20,9272	21,64376623	-1,33		
zlim inferio	45	-1,52	-8,66687	-2,94106	-4,72699	30,27259	20,9272	21,64376623	-1,52		
zlim superi.	-45	-1,52	-6,15894	-0,43312	1,752675	30,27259	20,9272	-21,64376623	-1,52		
zlim inferio	-45	-1,71	-6,92881	-0,48726	1,971759	30,27259	20,9272	-21,64376623	-1,71		
zlim superi.	-45	-1,71	-6,92881	-0,48726	1,971759	30,27259	20,9272	-21,64376623	-1,71		
zlim inferio	-45	-1,9	-7,69868	-0,5414	2,190843	30,27259	20,9272	-21,64376623	-1,9		
zlim superi.	-45	-1,9	-7,69868	-0,5414	2,190843	30,27259	20,9272	-21,64376623	-1,9		
zlim inferio	-45	-2,09	-8,46854	-0,59554	2,409928	30,27259	20,9272	-21,64376623	-2,09		
zlim superi.	-45	-2,09	-8,46854	-0,59554	2,409928	30,27259	20,9272	-21,64376623	-2,09		
zlim inferio	-45	-2,28	-9,23841	-0,64968	2,629012	30,27259	20,9272	-21,64376623	-2,28		

Figura 27: Tabelas com as tensões de tração e flexão ao longo do laminado inferior

G Apêndice VII - Código do Matlab para a pergunta 8

```

format long g
SL = 2.580;
ST = 0.045;
SLT = 0.110;

Q_0 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab', 'C7:E9');

```

```

Q_M45 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C11:E13');

Q_m45 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C15:E17');

Q_90 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C19:E21');

Ts_0 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C23:E25');

Ts_M45 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C27:E29');

Ts_m45 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C31:E33');

Ts_90 = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C35:E37');

A_inv = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Matriz Matlab','C3:E5');

b = xlsread('Excel_grupo19_MCL', 'Experimental (2)', 'B29');

F = 10;

condicao = false;
F_aux=10;
i = 1;
a = [0, 0, 0];
while condicao == false
    %disp(i);
    N_xx = F/b;
    VetorN = [N_xx ; 0; 0];

    extensoes = A_inv * VetorN;

    sigmax_0 = Q_0 * extensoes;
    sigmax_M45 = Q_M45 * extensoes;
    sigmax_m45 = Q_m45 * extensoes;
    sigmax_90 = Q_90 * extensoes;

    sigma_0 = Ts_0 * sigmax_0;
    sigma_M45 = Ts_M45 * sigmax_M45;
    sigma_m45 = Ts_m45 * sigmax_m45;
    sigma_90 = Ts_90 * sigmax_90;

    sigma_1 = [sigma_0(1), sigma_M45(1), sigma_m45(1), sigma_90(1)];
    sigma_2 = [sigma_0(2), sigma_M45(2), sigma_m45(2), sigma_90(2)];
    tau_12 = [sigma_0(3), sigma_M45(3), sigma_m45(3), sigma_90(3)];

    a(1) = SL - max(abs(sigma_1));
    a(2) = ST - max(abs(sigma_2));
    a(3) = SLT - max(abs(tau_12));

    incremento = min(a);
    %disp(incremento);

    if incremento <= 0
        N_xx = F_aux/b;
        VetorN = [N_xx ; 0; 0];

        extensoes = A_inv * VetorN;

```

```

sigmax_0 = Q_0 * extensoes* 1000;
sigmax_M45 = Q_M45 * extensoes* 1000;
sigmax_m45 = Q_m45 * extensoes* 1000;
sigmax_90 = Q_90 * extensoes* 1000;

sigma_0 = Ts_0 * sigmax_0;
sigma_M45 = Ts_M45 * sigmax_M45;
sigma_m45 = Ts_m45 * sigmax_m45;
sigma_90 = Ts_90 * sigmax_90;

disp(F);
disp(F_aux);
disp(sigmax_0);
disp(sigmax_M45);
disp(sigmax_m45);
disp(sigmax_90);
condicao = true;
end
F_aux = F;
i = i+1;
F = F*(1 + i*incremento);
end

```