

UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



Relatório do trabalho computacional

T800 - EMPILHAMENTO E

MESTRADO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

MATERIAIS COMPÓSITOS LAMINADOS

Professores Responsáveis:

José Miranda Guedes
Jorge da Cruz Fernandes

Grupo 23:

Francisco Ferreira, 92678
João Mendes, 92694

Lisboa

1º Semestre 2022/2023

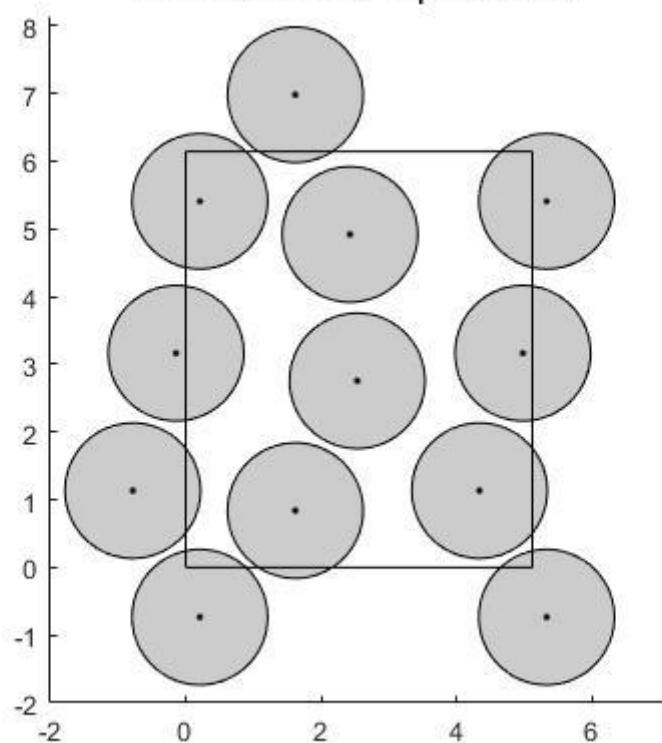
G 23	Nº 92678	Name: Francisco Lourenço Caldeira Ferreira
	Nº 92694	Name: João Filipe Cunha Mendes

Materiais Compósitos Laminados

Computational project – School year 2022/2023

Consider the composite laminated plate used in the experimental project. Assume that each lamina of the laminated plate is reinforced by long fibers, with the same volume fraction as in the experimental project, and that the material of the lamina can be modeled with the “cubic” RVE whose cross section is shown in the figure 1 and the location of fiber centers are shown in figure 2 (column 1 and 2) for a RVE with dimensions ($a=5.116$, $b=1.2*a$, $R=1$).

Generations=12; $V_f=60.0149\%$



X	Y	Fiber R	Fiber id
2.424985	4.915361	1	1
1.618854	0.838636	1	2
0.209918	5.404922	1	3
2.532247	2.754111	1	4
4.974708	3.162369	1	5
4.335689	1.13294	1	6
1.618854	6.977836	1	2
5.325918	5.404922	1	3
0.209918	-0.73428	1	3
5.325918	-0.73428	1	3
-0.14129	3.162369	1	5
-0.78031	1.13294	1	6

Figure 2

I - Characterization of the lamina equivalent properties:

1. Using a Finite element program, compute the equivalent material properties using the relation between average stress and average strain method and using the stored elastic energy of deformation method assuming that the RVE is subjected to stress boundary conditions.
2. Redo 1) but compute the properties assuming that deformation boundary conditions are applied.
3. For the same material compute the equivalent properties using PREMAT software, for a periodic RVE with one fiber in square array $\left(\frac{a_1}{b_1} = 1\right)$ and rectangular array $\left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1.2}\right)$.
4. Compare and comment the results obtained for the equivalent properties. Consider also the results obtained in the first project.

II - Modeling of the laminate:

1. Using a finite element code, and for two sets of the obtained equivalent properties (justify your choice), obtain a static linear solution for the same laminate and load situations as the experimental work. Compare the obtained results with the experimental ones, both in deformation, stress and strain aspects.
2. Find the maximum loading that you can apply for any of the cases, using the same criteria as in the experimental work. Comment and discuss the obtained results.
3. For the same laminate obtain, with free boundary conditions, do a natural frequency analysis (first 10 non null frequencies) for each set of equivalent properties. Compare and discuss the results. Whenever possible, compare with analytical solutions and experimental results.
4. For the bending loading case, using the Rayleigh-Ritz method, find an approximate solution for the CLPT considering and approximation of the transverse displacement w in the polynomial form up to 3rd degree. Comment and discuss the results. Whenever possible compare with experimental and analytical results.

Submit a report (2 students per group) with a maximum of 12 pages (font type Calibri 11 or bigger), where you show the formulations of the problems to solve, figures and/or tables of all issues that you think are relevant to address. Comment all results, and present some conclusions and a reference list. **The first 2 pages of the report must be these 2 pages.**

Índice

1	Introdução	1
2	RVE - Representative Volume Element	1
3	Expressões Clássicas da Micromecânica	1
4	Cálculo das propriedades através do programa de elementos finitos Siemens NX	3
4.1	Análise de Convergência	3
4.2	RVE associado a condições de fronteira de tensão	3
4.3	RVE associado a condições limite para o deslocamento	4
5	PREMAT	5
6	Análise de Resultados / Comparação e seleção das propriedades	6
7	Laminado / Placa laminada	6
7.1	Ensaio de Tração / Tensão	7
7.2	Teste de flexão	8
7.3	Frequências Naturais	9
7.4	Aproximação para o deslocamento através do método de Rayleigh-Ritz	10
	Referências	13
	Appendices	14
A	Computação de propriedades através do programa Siemens NX	14
A.1	Estudo de convergência RVE	14
A.2	Malhas testadas e RVE utilizado	14
A.3	Compliance Matrix	15
A.4	Stiffness Matrix	15
B	PREMAT	16
C	Placa laminada	17
C.1	Estudo de convergência e malha	17
C.2	Teste de Tração	18
C.3	Teste de Flexão	18
C.4	Frequências naturais	19
C.5	Rayleigh-Ritz	20
D	Resultados NX do Laminado	21
D.1	Teste de Tensão e Flexão	21
D.2	Frequências Naturais	21

1 Introdução

No primeiro trabalho realizado no âmbito da unidade curricular de Materiais Compósitos Laminados, procedeu-se à determinação, teórica e experimental, e estudo das propriedades do material compósito utilizado. O objetivo deste projeto também será estimar as propriedades e comportamento do compósito, através de um método computacional.

O primeiro passo consiste no cálculo das propriedades equivalentes do material usando as expressões simples clássicas da micromecânica. De seguida, será utilizado um programa comercial de elementos finitos (*Siemens NX*) de forma a obter estas mesmas propriedades através de duas abordagens diferentes, RVE (*Representative Volume Element*), sujeito a condições de fronteira de tensão, num dos casos, e deformação, no outro. Finalmente, as propriedades anteriormente referidas são calculadas através do software PREMAT, onde vai ser estudado um RVE periódico com uma fibra única num vetor quadrangular e num retangular.

Finalizada a análise das propriedades equivalentes do material compósito tendo em conta as diferentes abordagens, procede-se ao estudo do comportamento do provete utilizado no ensaio laboratorial recorrendo a uma série simulações, comparando-se assim os resultados obtidos anteriormente, de forma experimental, com os obtidos agora, de forma computacional.

É também importante realçar que a análise e conclusões relativas aos vários testes e abordagens se encontram descritas na respetiva secção e não no final do relatório, como aconteceu no primeiro relatório da Unidade Curricular.

2 RVE - *Representative Volume Element*

O conceito de RVE - *Representative Volume Element*, volume elementar representativo, em português, é utilizado como base para todos os métodos de análise de elementos finitos presentes nos cálculos e computações presentes neste relatório. Desta forma, antes de passar à determinação das constantes equivalentes e análise do comportamento do material laminado em estudo, principal objetivo deste trabalho, é fundamental introduzir e explicar este conceito.

O volume elementar representativo corresponde ao mínimo volume sobre o qual a realização de medições e estudo deste mesmo volume serão representativos do volume total do material. Este conceito é bastante utilizado na análise de materiais não homogéneos compostos por unidades celulares periódicas, uma vez que, nestes casos, os resultados obtidos serão uma aproximação válida da amostra que se pretende estudar. Assim, o material laminado sobre o qual se realizaram os ensaios experimentais é um bom exemplo onde este método pode ser utilizado, já que, apesar das existir várias camadas de lâminas com diversas orientações, as fibras longas de cada lâmina estão orientadas, aproximadamente, na mesma direção. Consequentemente, ao estender as propriedades calculadas para o volume elementar representativo ao volume total, transforma-se um problema complexo com um material heterogéneo num problema simples, com um material homogéneo associado a um tensor específico de propriedade equivalentes E_{ijkl} .

3 Expressões Clássicas da Micromecânica

Os materiais compósitos são tipicamente heterogéneos, contudo, assumindo que possuem propriedades equivalentes a um material teoricamente homogéneo, podem ser tratados como tal. A aproximação pode ser utilizada para avaliar o comportamento macroscópico do compósito em análise, dado que as suas propriedades estão relacionadas com a média das propriedades dos seus materiais constituintes.

O laminado em estudo, para cada lâmina, apresenta três direções mutuamente ortogonais, segundo as quais as propriedades podem diferir. Deste modo, o material em estudo é considerado ortotrópico e, por conseguinte, apenas é necessário calcular 9 constantes do material - três módulos de Young (E_X , E_Y e E_Z), três coeficientes de Poisson (ν_{XY} , ν_{YZ} e ν_{ZX}) e três módulos de cisalhamento (shear modulus) (G_{XY} , G_{YZ} e G_{ZX}). É importante notar que é possível simplificar ainda o problema. Assumindo que a direção X está alinhada com a direção das fibras do compósito, as suas propriedades nas direções Y e Z serão bastante semelhantes. Assim, pode-se considerar que $E_Y \approx E_Z$.

A aproximação considerada anteriormente baseia-se no facto de que, estando as fibras perfeitamente alinhadas com a direção X, a sua distribuição será similar em Y e Z. Consequentemente, irão apresentar propriedades materiais semelhantes segundo estes eixos. É possível clarificar acrescidamente o estudo. Para tal, considera-se um referencial local, analisando apenas a direção longitudinal (L substitui X) e transversal (T substitui Y e Z). Esta simplificação é particularmente útil aquando da aplicação da regra das misturas para computar o valor dos módulos de Young longitudinal e transversal.

	Carbono T800	Resina epoxídica
ρ (kg/m^3)	1754	1200
E (GPa)	290	4.5
ν	0.35	0.4
σ_r (GPa) da fibra segundo a norma EN 1007-5 L0=200mm	2.8	
Gramagem (g/m^2)	200	
Espessura nominal h_i (mm)	0.190 (60% V_f)	
Espessura total h_T (mm)	4.56	

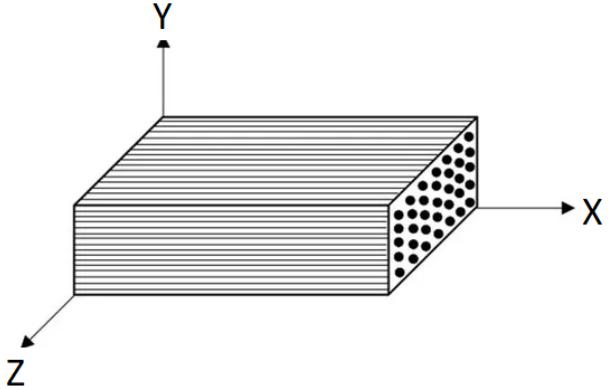


Tabela 1: Dados teóricos da matriz e das fibras.

Tabela 2: Representação esquemática da distribuição das fibras nas lâminas.

Tal como no relatório anterior, o módulo de elasticidade transversal da matriz e das fibras foi calculado através da seguinte expressão, válida para materiais isotrópicos:

$$G = E \cdot 2(1 + \nu) \quad (1)$$

Relativamente à matriz, a forma pode ser aplicada dado que as cadeias de polímeros que a compõem estão distribuídas de forma aleatória, pelo que, as suas propriedades apresentam variações insignificantes ou muito pequenas com a direção. Por outro lado, no caso das fibras, apesar das fibras de carbono não serem habitualmente isotrópicas, decidiu-se utilizar a fórmula como uma aproximação. Assim, obtiveram-se os valores de G para a matriz (m) e para a fibra (f):

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} = 1.607 \text{ GPa}, \quad (2)$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = 107.407 \text{ GPa}. \quad (3)$$

Com os módulos de elasticidade calculados, procede-se ao cálculo das constantes de elasticidade de cada lâmina no referencial local (L, T), através da regra das misturas:

$$E_L = E_m V_m + E_f V_f, \quad (4)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}, \quad (8)$$

$$\nu_{LT} = \nu_m V_m + \nu_f V_f, \quad (5)$$

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}, \quad (7)$$

obtendo-se os valores da tabela 3 já apresentados no relatório anterior.

E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)	ν_{LT}	ν_{TL}
175.800	10.994	3.929	0.370	0.023

Tabela 3: Valores obtidos para as constantes de elasticidade de cada lâmina no referencial local.

Tendo em conta os resultados acima e as premissas apresentadas anteriormente, entre as quais a utilização do referencial local e o volume elementar representativo (RVE), tem-se que $E_L \approx E_X$, $E_T \approx E_Y \approx E_Z$, $G_{LT} \approx G_{XY} \approx G_{XZ}$ (uma vez que a secção de cisalhamento é a mesma, já que se considera que o RVE tem uma secção transversal quadrada e é transversalmente isotrópica), $\nu_{LT} \approx \nu_{XY} \approx \nu_{XZ}$ and $\nu_{TL} \approx \nu_{YX} \approx \nu_{ZX}$.

Segue-se a determinação de uma das constantes em falta, G_{YZ} . No entanto, apesar de ser necessária ao longo do relatório, não existe maneira de calcular esta constante, pelo que o seu valor tem de ser estimado. Assim, devido ao facto do RVE ser uma representação de um material compósito, é trivial compreender que o valor de G_{YZ} será superior ao G da matriz, G_m , mas inferior ao das fibras, G_f . Além disso, considerando que, quando em atuação no RVE, ν_{YZ} e ν_{ZY} são aplicadas em planos que não estão em contacto direto com a fibra, mas sim com superfícies da matriz, o que significa que o valor que se procura terá de ser inferior a G_{XZ} e G_{XY} , ou seja, o RVE irá apresentar menor resistência ao cisalhamento quando ν_{YZ} e ν_{ZY} forem aplicados. É também necessário ter em consideração que os valores de ν_{YZ} e ν_{ZY} , calculados, novamente, assumindo a isotropia transversal do material, têm de ser válidos. Assim, conclui-se que G_{YZ} tem de ser ligeiramente inferior ao G_{LT} apresentado anteriormente. Desta forma, $G_{YZ} = 3.85$ GPa é um valor aceitável, obtendo-se:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \iff \nu_{YZ} = \nu_{ZY} = \frac{E_{YY}}{2 \cdot G_{YZ}} - 1 = \frac{10.994}{2 \cdot 3.85} - 1 = 0.428, \quad (9)$$

um valor plausível. Deste modo, obtém-se os seguintes valores, na tabela 4 para as propriedades do material compósito estimadas através da abordagem micro-mecânica, onde os valores de E e G estão apresentados em GPa:

E_x (GPa)	E_y (GPa)	E_z (GPa)	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{zy}	ν_{yz}	G_{xy} (GPa)	G_{xz} (GPa)	G_{yz} (GPa)
175.800	10.994	10.994	0.370	0.023	0.370	0.023	0.428	0.428	3.929	3.929	3.85

Tabela 4: Resultados obtidos através do método da micro-mecânica.

4 Cálculo das propriedades através do programa de elementos finitos Siemens NX

Ao longo desta secção, procede-se ao cálculo das propriedades equivalentes do material recorrendo a um programa computacional, Siemens NX, que aplica o método dos elementos finitos (Finite Element Method - FEM). Este método, FEM, é bastante útil na resolução de diversas situações, nomeadamente quando se trabalha com análise estrutural estática cujos problemas não têm uma solução analítica ou cuja solução é muito difícil de obter de outras formas.

As propriedades do material serão obtidas através de duas abordagens, dependendo das condições de fronteira a que o RVE é sujeito, tensão/*stress* ou deslocamento/*displacement*, condições estas que serão analisadas em separado. Com o objetivo de obter as propriedades equivalentes já estudadas anteriormente, em cada uma das duas situações descritas acima, vão ser utilizadas, como pedido no enunciado, duas teorias diferentes, primeiro, através do método da tensão e extensão médias e, depois, utilizando o método da energia elástica armazenada na deformação.

4.1 Análise de Convergência

De forma a obter resultados precisos, é fulcral realizar um estudo de convergência da solução. Assim, é possível garantir que os resultados são independentes da malha escolhida, isto é, um acréscimo no grau de refinamento da malha não altera os resultados significativamente. Esta análise foi realizada assumindo o caso de um teste de tensão unilateral segundo a direção y. O parâmetro utilizado para verificar a convergência foi a energia elástica armazenada na deformação e a força utilizada na análise foi de 100N.

A figura 5 em anexo apresenta os resultados obtidos para 5 malhas de diferente número de elementos. A malha mais grosseira apresenta 1032 elementos, com 0.6 mm em média cada um. Procedeu-se ao seu refinamento e criaram-se: malha com 5100 elementos, com 0.4 mm em média cada um; malha com 11645 elementos, com 0.3 mm em média cada um; malha com 30325 elementos, com 0.2 mm em média cada um; malha com 64459 elementos, com 0.15 mm em média cada um. É possível observar que a energia elástica armazenada na deformação converge e sofre alterações progressivamente mais reduzidas com o refinamento da malha. Contudo, para o caso da malha mais grosseira observa-se um valor inconsistente com o esperado. Visto que a malha possui poucos elementos, existe a possibilidade de as fibras ficarem deficientemente definidas na simulação e não existir condições para a simulação originar um resultado coerente.

Para detalhar o estudo de convergência, repetiu-se o procedimento para o caso de um teste de tensão unilateral segundo a direção x, correspondente à orientação das fibras. O resultado deste estudo encontra-se ilustrado na figura 10, em anexo. Novamente, observa-se a convergência esperada e, neste caso, a malha mais grosseira apresenta um valor que corrobora o esperado.

Assim, para o restante trabalho laboratorial utilizou-se uma malha de 30325 elementos, com 0.2 mm em média cada um, uma vez que os resultados eram bastante precisos e o tempo computacional era aceitável.

As malhas estudadas estão ilustradas em anexo, nas figuras 6 e 7.

4.2 RVE associado a condições de fronteira de tensão

Antes de apresentar os resultados, é importante descrever sucintamente os fundamentos teóricos do trabalho realizado. As fórmulas para a tensão média e para o teorema da tensão média, que defende que, caso se negligencie as forças volumétricas, a tensão média em RVE é igual à condição limite da tensão, são:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij} dV \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \quad (10)$$

Contudo, a distribuição das tensões dentro do RVE não é uniforme. Tal deve-se ao facto do volume representativo possuir heterogeneidades. Sabendo as condições limite aplicadas ao RVE, podemos resolver o problema utilizando o

método dos elementos finitos e, por conseguinte, torna-se possível computar a tensão média. Com os resultados calculados, computa-se a “compliance matrix” do material equivalente, expressa em anexo.

Devido ao facto do material ser ortotrópico, é necessário aplicar-se 6 condições de fronteira de tensão diferentes e independentes umas das outras, uma vez que se pretende determinar as entradas da “compliance matrix”. Assim, procedeu-se à aplicação, em cada um dos três eixos (x, y, z) de uma força de tensão uniaxial de 1 MPa, e, em cada um dos planos de cisalhamento (xy, xz, yz) a uma tensão de corte, também de 1 MPa.

Posto isto, foi possível obter os seguintes valores das constantes de elasticidade, com E e G apresentados em GPa:

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
59.297	21.878	17.961	0.2947	0.1089	0.4239	0.1283	0.5086	0.4177	6.862	5.465	5.338

Tabela 5: Resultados obtidos através do método do stress / tensão média com condições de fronteira de tensão.

Como referido na secção 4, o cálculo das constantes de elasticidade vai ser feito com recurso a dois métodos, o explicado acima e o da energia elástica armazenada durante a deformação. Neste último, energia elástica armazenada na deformação no RVE tem de ser a mesma que no material equivalente, ou seja:

$$U_{RVE} = U_{eq} = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[S]\{\sigma\}V \quad (11)$$

É importante ter em conta que, tal como no método anterior, o material é ortotrópico. Para além disso, a matriz é simétrica, pelo que serão precisas 9 condições de fronteira. As condições de fronteira utilizadas no método da tensão médias são também válidas neste caso, o que faz com que, para calcular a “compliance matrix”, seja apenas necessário adicionar três condições novas. Estas três condições baseiam-se em condições biaxiais: σ_{xx} e σ_{yy} , σ_{xx} e σ_{zz} , σ_{yy} e σ_{zz} . De notar também que o parâmetro de alívio de inércia foi utilizado juntamente com as cargas necessárias aplicadas no RVE no software NX.

Obtem-se assim, um novo conjunto de valores para as constantes de elasticidade, como é possível observar na tabela 6, com E e G apresentados em GPa:

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
59.189	21.866	17.958	0.2947	0.1089	0.4237	0.1286	0.5087	0.4178	6.827	5.467	5.332

Tabela 6: Resultados obtidos através do método da energia com condições de fronteira de tensão.

4.3 RVE associado a condições limite para o deslocamento

A metodologia para o cálculo da extensão média é semelhante à utilizada para o cálculo da tensão média, apresentada na subsecção anterior. Neste caso, a extensão média e as condições limites são dadas pelas seguintes expressões:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varepsilon_{ij} dV \quad u_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (12)$$

Após resolução do problema de equilíbrio em RVE ($\sum_{j=1}^3 \frac{\delta \sigma_{ji}}{\delta x_j} = 0$), obtém-se a distribuição da tensão e, sabendo que $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$ pelo teorema da extensão média, é possível computar a “stiffness matrix” (em Anexo, A.4). As condições fronteira obrigatórias para o deslocamento foram utilizadas em todos os casos analisados com o software NX. Por exemplo, para deslocamentos no caso x, aplicou-se um deslocamento “x” na direção x (com 0 nas restantes direções) a todos os elementos no limite do corpo. Consequentemente, a extensão na direção x tornou-se uniforme. Os seguintes resultados foram obtidos através do método supramencionado, sabendo que E e G são apresentados em GPa:

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
174.855	68.522	48.458	0.3558	0.1394	0.3608	0.09998	0.3195	0.2263	34.611	27.688	19.676

Tabela 7: Resultados obtidos através do método do strain / extensão média com condições de fronteira de deslocamento.

A abordagem utilizando o método da energia é semelhante à descrita anteriormente, contudo, uma vez que existe uma condição limite de deformação, a energia elástica armazenada é dada por:

$$U_{RVE} = U_{eq} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon\}V \quad (13)$$

Através desta metodologia, as propriedades equivalentes para o material obtidas são, E e G apresentados em GPa :

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
174.829	68.490	48.432	0.3559	0.1394	0.3613	0.1001	0.31996	0.2263	34.624	27.698	19.656

Tabela 8: Resultados obtidos através do método da energia com condições de fronteira de deslocamento.

5 PREMAT

Com o intuito de obter as propriedades equivalentes do material através de outra fonte, utilizou-se o software PREMAT. No nosso caso, o enunciado exige que se considere dois tipos de RVE's: um RVE periódico com uma fibra em *square array* e um RVE periódico com uma fibra em *rectangular array*. Primeiramente, é necessário mudar no ficheiro de input pré definido algumas constantes: o módulo de Young e o coeficiente de Poisson da fibra e da matriz, cujos valores estão presentes na tabela 1. O tipo de RVE (212) não sofreu alterações, uma vez que é relativo à geometria considerada, que se apresenta constante durante toda as simulações efetuadas. O parâmetro de refinamento de malha (ian), foi alterado entre os valores 1 a 4, de forma a realizar um estudo de convergência, que será explorado mais detalhadamente de seguida. Para além disso, foi alterado o número de nós de cada elemento. Devido ao facto do RVE periódico com uma fibra em *rectangular array* ser bastante mais pesado computacionalmente, apenas foi possível trabalhar com 8 nós por elemento, enquanto que, no caso do *square array*, se realizou este estudo com 20 nós por elemento, uma vez que as simulações continuavam a correr e num tempo aceitável. A variável *iproc* manteve-se a 0, assim como a variável *ixyz*, que se manteve a 1, ilustrando que a fibra está orientada segundo a direção x. Finalmente, o ratio "a" sobre "b" manteve-se a 1, que, juntamente com o facto da equação geral da elipse apresentar expoente 2, significa que as fibras são circulares. O parâmetro "a1" sobre "b1" (largura/altura do RVE) manteve-se primeiramente a 1.00 (*square array*) e, seguidamente, foi alterado para 0.833 (*rectangular array*).

Depois de corretamente definir o ficheiro de input, realizaram-se algumas experiências para otimizar o grau de refinamento da malha. Quatro níveis de refinamento foram utilizados no caso do *square array* e três no *rectangular array*. De seguida, as propriedades implícitas foram colocadas num ficheiro excel para se analisar a variação entre níveis de refinamento. Os resultados obtidos estão presentes na tabelas 12 e 13 em anexo, tal como as figuras 8 e 9 associadas às malhas em utilizadas pelo PREMAT. De notar que, observando as imagens, se conclui, facilmente, que o poder computacional relativo ao RVE periódico com uma fibra em *rectangular array* é bastante superior ao do *square array*, pelo que só se conseguiu obter imagens, para este último caso, para os parâmetros de refinamento de malha (ian) 1 e 2, contrastando com os 4 do *rectangular array*.

Analizando a tabela 12, conclui-se que do primeiro teste de refinamento para o segundo, as variações são reduzidas, todas inferiores a 0.829%. Aumentando o grau de refinamento, as variações tornam-se mais reduzidas, inferiores a 0.011% do 2º para o 3º e 0.003% do 3º para o 4º. Deste modo, e tendo em conta o poder e o tempo computacional para correr a simulação, considera-se que a convergência dos resultados é obtida a partir do primeiro nível de refinamento. Por outro lado, no caso do *rectangular array*, tabela 13, as variações são, também, bastante pequenas, com uma média de 0.15% do parâmetro de valor 1 para o 2 e 0.3413% do 2 para o 3. Por conseguinte, assume-se que a convergência é obtida a partir do primeiro teste de refinamento.

Assim, considera-se que se pode computar os valores das propriedades equivalentes do material para qualquer nível de refinamento da malha, sem que exista uma discrepância considerável entre valores. Deste modo, utilizou-se o valor para o parâmetro *ian* do nível 2 de refinamento da malha. A diferença de tempo computacional não é significativa e oferece-se mais refinamento dos resultados finais.

Finalmente, os valores das propriedades do material obtidas para os dois tipos de *array* encontram-se nas seguintes tabelas, com os valores de E e G apresentados em GPa :

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
175.670	27.749	27.749	0.36727	0.058013	0.36727	0.058013	0.33573	0.33573	6.531	6.531	4.457

Tabela 9: Resultados obtidos através do PREMAT com um *Square Array*.

E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}	G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
175.640	43.364	24.115	0.35921	0.088687	0.37429	0.05139	0.38849	0.21604	10.524	4.546	5.211

Tabela 10: Resultados obtidos através do PREMAT com um *Rectangular Array*.

6 Análise de Resultados / Comparação e seleção das propriedades

Após o cálculo das propriedades equivalentes obtidas através dos dois métodos desenvolvidos nas secções anteriores, métodos da tensão e extensão médias e da energia elástica armazenada, com recurso ao software NX, segue-se uma breve comparação dos resultados. Como seria expectável, verifica-se que o valor das constantes de elasticidade são bastante semelhantes, com diferenças irrisórias para os dois métodos, com as mesmas condições de fronteiras impostas.

Para além disso, é de notar que estas propriedades equivalentes estão compreendidas dentro de certos limites. Estes limites são conhecidos como os limites de Voigt e Reuss, que podem ser provados através dos princípios da energia, e são demonstrados através da seguinte expressão:

$$\{\varepsilon\}^T [\mathcal{C}] \{\varepsilon\} \leq \{\varepsilon\}^T [C]_{eq} \{\varepsilon\} \leq \{\varepsilon\}^T [\tilde{C}] \{\varepsilon\}, \quad (14)$$

onde $[\mathcal{C}]$ é a “stiffness matrix” do material obtida através da aplicação das condições de fronteira de tensão, $[C]_{eq}$ é “stiffness matrix” equivalente do material e $[\tilde{C}]$ é “stiffness matrix” do material obtida através da aplicação das condições de fronteira de deslocamento.

No entanto, a aplicação de condição de fronteira uniforme de strain não é totalmente correta, uma vez que faz com que a matriz e as fibras sofram exatamente o mesmo deslocamento, causando tensões maiores, o que, na realidade não acontece porque a matriz, sendo menos rígida que as fibras, sofre uma maior deformação, respeitando, assim, os princípios da energia. Desta forma, justifica-se o facto de se ter obtido, para o método da energia com estas condições de fronteira de deslocamento, valores mais elevados para as propriedades equivalentes, correspondendo estes ao limite superior.

Por outro lado, ao trabalhar-se com o RVE não é realista aplicar uma condição de fronteira de tensão dado que se está a assumir que o RVE está a resistir a estas tensões sozinho quando, na verdade, analisando o processo real, está rodeado por outros RVEs, formando um material como um todo e, consequentemente, mais rígido. Assim, as propriedades do material calculadas com as condições de fronteira relativas à tensão, através do método da energia, são associadas ao limite inferior.

Segue-se a análise comparativa dos resultados obtidos utilizando o programa de elementos finitos NX, sucintamente explicados acima, com os obtidos através da micro-mecânica e o PREMAT. O primeiro destaque corresponde ao facto do valor do módulo de elasticidade longitudinal (E_x) ser bastante semelhante para os três métodos (PREMAT, NX com displacement BC e micro-mecânica), o que já era previsto, uma vez que a fórmula da micro-mecânica corresponde ao limite superior abordado anteriormente.

Para além disso, no que diz respeito à análise micromecânica, verifica-se que, através deste método, obtém-se valores de G_{xz} e G_{xy} bastante realistas, já que estão dentro dos limites referidos acima. No entanto, o mesmo não se verifica relativamente às propriedades transversais do material, nomeadamente E_y , E_z e G_{yz} que estão abaixo do limite, o que pode ser justificado pelo facto destas propriedades serem muito sensíveis à disposição da matriz e das fibras e da micromecânica não ter em atenção a geometria a uma micro escala do material.

Por outro lado, é importante realçar o facto de se ter obtido, para ambas as condições de fronteira, valores dos módulos transversais de elasticidade (E_y e E_z e G_{xy} G_{xz}) algo distintos, pelo que se conclui que não se verifica totalmente a presença de um material isotrópico transversalmente.

Em relação ao PREMAT, observa-se a obtenção de resultados bastante satisfatórios quanto ao módulo de elasticidade longitudinal, tanto para o caso do *square* e *rectangular array*. Outro ponto a destacar é o facto dos restantes módulos da elasticidade se apresentarem dentro dos limites acima referidos, tirados da análise do NX com condições de fronteira de tensão e deslocamento.

Desta forma, após a análise dos resultados obtidos através da utilização dos diferentes métodos, segue-se a seleção dos grupos de propriedades a utilizar nos estudos que se realizaram no restante relatório. Posto isto, decidiu-se selecionar um grupo de propriedades obtido através das condições de fronteira de deslocamento, que representa o limite superior, e um grupo de propriedades proveniente das condições de fronteira de tensão, que representa o limite mínimo, ambos retirados com recurso ao mesmo método, o da energia, de forma a permitir uma comparação de resultados mais coerente. Com esta escolha é possível verificar a validade dos resultados obtidos nas seguintes secções, confirmando se estão entre os valores dos limites definidos.

7 Laminado / Placa laminada

Antes de se passar ao estudo da placa laminada, procedeu-se a um estudo de convergência da malha, de forma a garantir a independência dos resultados em relação à malha. Desta forma, realizou-se um ensaio de tração simples onde se avaliou a energia de deformação variando a malha utilizada. Assim, como expectável no teste de tração simples e se pode observar na figura 10, os resultados estabilizam rapidamente. Posto isto, foi escolhida a malha com o menor

número de elementos que apresenta os mesmos resultados que as malhas com mais precisão, já que irá diminuir o tempo computacional associado e manter a precisão dos resultados. Assim, ir-se-á continuar o estudo do laminado com uma malha com 2800 elementos, ilustrada na figura 11.

7.1 Ensaio de Tração / Tensão

O primeiro passo a realizar é a comparação dos resultados obtidos no software NX usando as propriedades equivalentes apresentadas anteriormente com os dados experimentais.

Assim, é necessário replicar o ensaio no software NX onde, primeiramente, se procedeu à imposição das condições de fronteira. Para isso, decidiu-se fixar todos os graus de liberdade de uma das arestas da placa modelada, para simular o efeito da garra fixadora, e fixar os graus de liberdade relativos aos eixos y e z da aresta oposta, para simular o movimento apenas na direção longitudinal resultante da força aplicada pela garra simulada nesta aresta. De seguida, com o objetivo de igualar a intensidade total a uma das cargas aplicadas no ensaio, aplicou-se uma força distribuída na aresta oposta. Depois da definição do laminado, com os dois grupos de propriedades escolhidos, retiraram-se os valores de tensão e extensão para as condições de fronteira de tensão e deslocamento e traçou-se a relação entre a tensão e a extensão do provete, no mesmo gráfico, tal como no relatório anterior, permitindo a determinação do módulo de elasticidade longitudinal E_{xx} do laminado. Além disso, é importante realçar que, ao contrário do relatório anterior, nos resultados que surgiram da utilização do programa NX, as linhas de tendência interseparam a origem do gráfico e os resultados estão na linha e não dispersos como os experimentais. Este aspeto é justificável com o facto do software NX considerar estar a estudar um material ideal, sem defeitos. Estes resultados podem ser encontrados na figura 1.

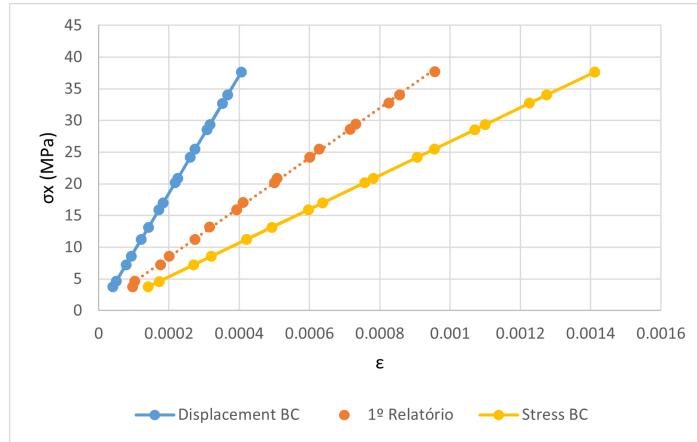


Figura 1: Tensão em função da extensão para os vários grupos de propriedades selecionados.

Através do gráfico da figura acima, é possível observar que os valores experimentais obtidos aquando da realização do teste de tração para o 1º relatório, cujo valor de E_{xx} do laminado é 39.273 GPa, se encontram dentro dos limites definidos pelas propriedades associadas às condições de fronteira de deslocamento, $E_{xx} = 92.763$ GPa, e de tensão $E_{xx} = 26.674$.

Depois da comparação referida em cima, segue-se a aplicação de uma força de 9 kN no laminado modelado no NX, correspondente ao valor utilizado para analisar a distribuição da tensão ao longo da espessura do laminado no estudo do ensaio de tração do primeiro relatório. Assim, nos Anexos C.2.1, observam-se as representações gráficas de ambos os resultados, tanto os obtidos no programa NX como os do relatório anterior, para ser mais fácil interpretar os resultados e retirar algumas conclusões.

Tendo em conta os gráficos apresentados na figura 12, é fundamental enaltecer o facto de que os dados relativos ao primeiro relatório não são resultados experimentais, as tensões internas do laminado foram calculadas através das fórmulas da micro-mecânica, com recurso a algumas propriedades conhecidas do material em estudo. Por outro lado, para determinar a distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado considerando as propriedades do material obtidas através das condições de fronteira de tensão e deslocamento impostas no RVE, recorreu-se à ferramenta de modelação existente no Siemens NX, onde se aplicou a força de tensão de 9 kN referida acima, obtendo-se os resultados presentes nos gráficos.

Através da observação dos gráficos referidos, é trivial perceber que, apesar de apresentarem propriedades do material substancialmente diferentes, como apresentado nas subsecções 4.2 and 4.3, os resultados da distribuição de tensão são bastante semelhantes para as condições de fronteira relativas à tensão e ao deslocamento. Por outro lado, os resultados associados à abordagem micro-mecânica apresentam uma grande disparidade em todas as direções de tensão quando comparados com os dois anteriores, principalmente para as lâminas com orientação de 0° e 90°, justificável pelos valores bastante reduzidos de E_y e E_z . Além disso, é de realçar que, como expectável, para qualquer dos métodos utilizados,

o valor de tensão mais elevado das tensões é a tensão longitudinal σ_{xx} correspondente à lâmina com orientação de 0° , uma vez que se está perante um ensaio de tração uniaxial e as fibras destas lâminas estão perfeitamente alinhadas com a direção da força.

Finalmente, antes de se passar para o teste de flexão, determinou-se a carga máxima suportada por cada uma das lâminas que constitui o laminado. Assim, foi utilizado, tal como no primeiro relatório, o critério de rotura da tensão máxima nas simulações NX. Os resultados foram, novamente, os esperados, uma vez que *first ply failure*, força máxima que é necessária aplicar em tração ao laminado para ter rotura da lâmina mais solicitada foi registada para a fibra com 90° de orientação já que estas fibras se encontram transversalmente alinhadas com a força de tração aplicada, tal como visto no relatório anterior.

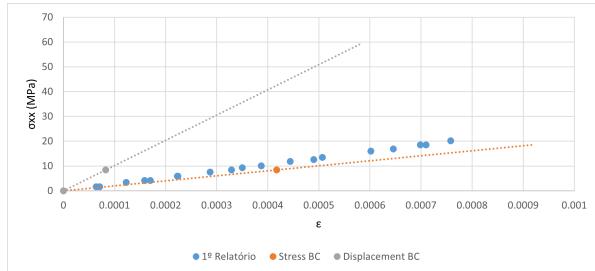
No entanto, existem algumas diferenças de substancial importância realçadas na tabela 11, onde estão representadas as forças máximas suportadas pelo laminado tendo em conta as características do material utilizadas em cada método. Se por um lado a força máxima suportada pelo laminado cujas propriedades do material foram obtidas a partir da aplicação de condições de fronteira de tensão e deslocamento no RVE têm valores muito próximos, com um valor ligeiramente mais elevado associado ao método do deslocamento (como esperado), o mesmo não se pode dizer para a força máxima suportada obtida através dos dados do primeiro relatório que excede consideravelmente os outros dois valores. A justificação deste fenómeno pode estar associada ao menor valor do módulo da elasticidade transversal obtido com as expressões da micro-mecânica quando comparado com os valores que surgiram dos outros dois métodos.

	Micro-Mecânica	Stress BC	Displacement BC
Carga Máxima (kN)	46.19	13.2	15.8

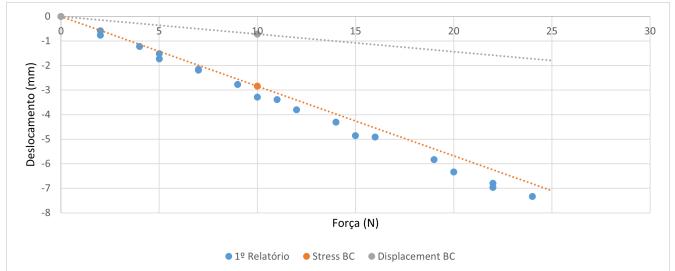
Tabela 11: Cargas críticas para grupos de propriedades do material diferentes.

7.2 Teste de flexão

No teste de flexão, uma extremidade do laminado foi fixada e a extremidade oposta foi submetida a uma força pontual no seu ponto médio de valor $10N$, que corresponde a um valor de força utilizado no laboratório. É importante notar que, visto que a experiência é realizada no software NX, os resultados não serão afetados pela deterioração do material. Assim, contrariamente ao que acontece no laboratório, os resultados serão lineares devido à linearidade entre E_{fx} e ϵ . Deste modo, não é necessário replicar a experiência para vários valores de carga, à semelhança da atividade laboratorial. O procedimento foi realizado para os dois conjuntos de propriedades equivalentes.



(a) Comparação dos resultados para a tensão e a extensão entre os valores provenientes do NX e os experimentais.



(b) Comparação dos resultados para o deslocamento entre os valores provenientes do NX e os experimentais.

Figura 2: Comparação dos resultados para provenientes do NX e os experimentais para o teste de flexão.

Tal como mencionado anteriormente, quando os conjuntos de propriedade equivalente das condições limite da tensão e do deslocamento no software NX (através de métodos da energia) foram selecionados, justificou-se com o facto de, sendo estas propriedades os valores limite superior e inferior para as propriedades do material real, os resultados derivados deste contexto serão também os limites superior e inferior e os dados experimentais encontrar-se-ão balizados pelos mesmos. A justificação é válida e pode ser comprovada analisando as figuras 2a e 2b. Contudo, constata-se que os valores do deslocamento em função da força se encontram muito próximos do limite inferior, resultando num desvio dos mesmos para além do do mesmo limite.

Nas figuras mencionadas anteriormente, é possível observar que os dados experimentais para a tensão, extensão e deformação encontram-se dentro do envelope definido pelos valores limite das propriedades equivalentes, com exceção dos mencionados anteriormente. Tal deve-se ao facto de existir deterioração causada pelo uso sucessivo do laminado e afeta parte dos resultados. Para além disso, o limite superior para o módulo de Young da flexão, ditado pelas condições limite para o deslocamento, é $101.868 GPa$ e o limite inferior para o módulo de Young da flexão, ditado pelas condições

limite para a tensão, é $20.164 GPa$. O módulo de Young da fexão experimental é $26.467 GPa$. É interessante notar que os resultados experimentais para o modulo de Young da flexão encontram-se próximos dos resultados derivados das propriedades da tensão para as condições limite.

Para as mesmas condições de carregamento do primeiro relatório ($M_x = 35.74 N$), como se pode observar nos gráficos presentes na figura 13 (presente em anexo), a tendência dos três tipos de propriedades equivalentes é a mesma, com algumas diferenças em termos da inclinação da curva de cada lâmina. As disparidades mais notáveis são em termos de magnitude. As tensões na direção x obtidas no primeiro relatório (através do método da micro-mecânica) são superiores às tensões obtidas posteriormente, com exceção das lâminas a 90° . As diferenças podem ser explicadas pelo facto de as propriedades transversais de cada lâmina correspondentes à micro-mecânica serem baixas, até mesmo inferiores à condição limite mais baixa estabelecida pelo conjunto de condições limite para a tensão. Assim, visto que existe uma tendência para as lâminas mais rígidas resistirem mais à tensão imposta no laminado, as lâminas de 90° , sendo menos rígidas segundo a micro-mecânica, carregam menos tensão do que as mesmas lâminas associadas aos outros dois conjuntos de valores.

É possível observar um elevado grau de similaridade entre os dois conjuntos de dados apresentados, apesar de apresentarem propriedades equivalentes diferentes. Tal como mencionado anteriormente, existem diferenças entre os dois cenários apresentados e a micro-mecânica em termos de magnitude. Deste modo, é necessário apresentar algum critério e atenção a escolher a teoria para caracterizar um dado material.

7.3 Frequências Naturais

O próximo objetivo do presente relatório passa pelo estudo do comportamento dinâmico do laminado, assim, procedeu-se à realização de uma análise modal. Através deste tipo de análise é possível determinar as frequências naturais e as respetivas formas dos modos, ou seja, é possível saber a que frequência e magnitude se comporta o laminado quando exposto a frequências próximas da sua frequência natural, pelo que é considerada de bastante importância.

Considerando o enunciado, é proposta a análise das dez primeiras frequências não nulas para cada grupo de propriedades equivalentes do material mencionadas anteriormente. Desta forma, durante a atividade laboratorial realizada, o provete foi suspenso por uma das arestas mais longas, de modo a diminuir as forças provocadas por outras formas de o "prender" como a encastração, deixando a outra aresta livre. Durante a atividade laboratorial, simulou-se frequências específicas no provete com o auxílio de um martelo. Para simular o procedimento laboratorial no software NX, procedeu-se a uma análise de frequências naturais do laminado de $310 mm$ sem qualquer constrangimento associado (laminado livre). Apesar deste cenário não representar na totalidade o que foi realizado experimentalmente, uma vez que no laboratório o laminado se encontrava fixo para se poder suspender, considera-se que descreve de forma aceitável a mesma.

Os valores obtidos experimentalmente e através do software para os dois conjuntos de propriedades do material encontram-se ilustrados na tabela 14. Como é possível observar, experimentalmente apenas se retiraram duas frequências, representadas nos picos de magnitude presentes no gráfico 14. Para além disso, constata-se que os valores provenientes do conjunto de propriedades associado ao *Stress BC* encontram-se mais próximos dos valores experimentais, apresentando um erro de aproximadamente 8%, comparativamente aos valores provenientes do conjunto de propriedades associado ao *Displacement BC*, tal como já se tinha observado na secção 7.2.

No que concerne a análise analítica, utilizou-se uma metodologia diferente. Procedeu-se à utilização de soluções analíticas para uma viga fixa numa extremidade e livre na outra extremidade, expressas em baixo. Para além disso, realizou-se novos estudos no software NX com o laminado fixo numa extremidade, de forma a apresentar coerência com as expressões analíticas utilizadas. Deste modo, a comparação dos valores torna-se mais direta e coerente.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E_{xx}I_{yy}}{I_0} \left(\frac{e_n}{a}\right)^4}, \quad (15)$$

onde I_{yy} é o segundo momento de área do provete, já calculado no relatório anterior, $386.4504 mm^4$, e I_0 é o momento de inércia da secção transversal, dado por $I_0 = \rho \cdot b \cdot h$, onde ρ é a densidade do material compósito, b a sua largura e h a espessura, tudo propriedades já obtidas no relatório anterior, seja de forma experimental ou analítica. De notar também que E_{xx} é a constante de elasticidade longitudinal e varia consoante o método utilizado no cálculo destas propriedades. Por fim, a constante a corresponde ao comprimento do provete, que neste caso é $310 mm$, e e_n depende da condição de fronteira imposta, sendo dada por:

$$\cos(e_n) \cdot \cosh(e_n) = -1. \quad (16)$$

Posto isto, os resultados relativos tanto à solução analítica como ao programa NX podem ser consultados na tabela 15. Para além disso, para uma maior facilidade de interpretação e análise de resultados, os gráficos das figuras 3a e

3b apresentam o valor de cada uma das dez primeiras frequências naturais, considerando as propriedades calculadas analiticamente e com recurso ao software NX.

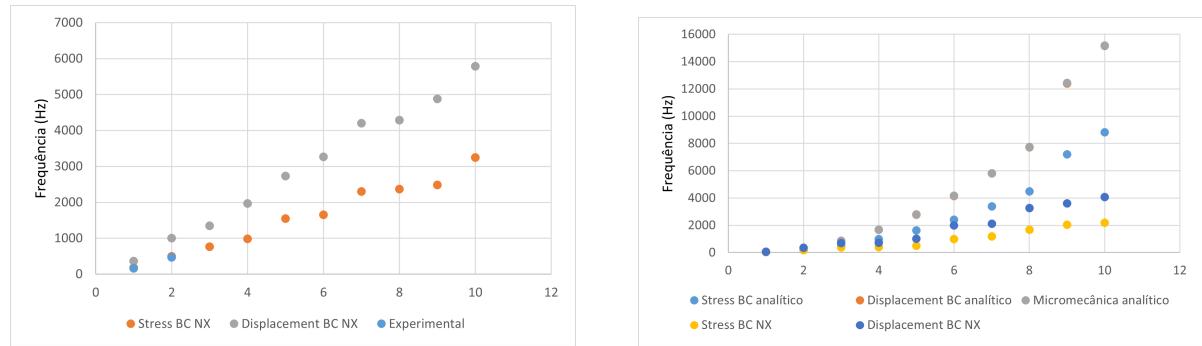


Figura 3: Comparação dos resultados para os diferentes tipos de análise de frequências.

De acordo com a figura 3b é possível concluir que as frequências naturais calculadas analiticamente, através da micro-mecânica, estão bastante mais próximas das determinadas analiticamente com base nas propriedades do laminado associadas ao *Displacement BC* e não *Stress BC*, tal como expectável uma vez que as propriedades dos dois primeiros conjuntos de dados são semelhantes. Para além disso, como esperado e referido anteriormente, os valores das frequências naturais do laminado cujas propriedades foram obtidas através da imposição de condições de fronteira de deslocamento no programa NX são superiores aos obtidos com a utilização de fronteira de tensão, uma vez que para as condições de deslocamento se obteve um módulo de elasticidade superior, assumindo-se, consequentemente, que o material é mais rígido que nos outros métodos, representando assim o limite superior abordado na secção 6.

Por outro lado, tendo em conta a figura, é trivial perceber que os valores obtidos para as frequências naturais do laminado através do programa NX são inferiores aos resultados analíticos. Além disso, tal como previsto, da imposição da condição de fronteira de deslocamento surgem resultados com valores superiores aos relativos à condição de fronteira de tensão.

De seguida, analisou-se o deslocamento registado na direção perpendicular ao laminado aquando da aplicação das duas primeiras frequências naturais. Para retirar as conclusões pretendidas, comparou-se os resultados provenientes do programa Siemens NX, considerando os dois grupos de propriedades do material que têm vindo a ser analisados ao longo do relatório, com as formas calculadas analiticamente através das expressões abaixo:

$$\omega(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x), \quad (17)$$

onde $\lambda = \frac{e_n}{a}$.

Apesar dos resultados da abordagem analítica serem adimensionais, eles podem ser utilizados como comparação visual do deslocamento vertical em x com os obtidos através do NX. É também importante realçar que, para a 2ª frequência os valores relativos à deflexão do laminado com propriedades do material que surgem da imposição das condições de fronteira de tensão são obtidas com o sinal oposto. No entanto, este facto não é problemático, uma vez que se está perante um fenómeno oscilatório, onde é possível alterar o sinal das coordenadas verticais de modo a comparar estas deflexões com as relativas à imposição das condições de fronteira de deslocamento e aos resultados analíticos, associadas à 2ª frequência. Os resultados encontram-se representados em 15.

7.4 Aproximação para o deslocamento através do método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz permite determinar soluções aproximadas de problemas em que as soluções analíticas não são possíveis ou, se possíveis, são muito complicadas. Este método baseia-se no princípio de energia potencial total mínima, onde uma incógnita dependente, neste caso o deslocamento transversal w , é aproximada por uma combinação linear finita de funções conhecidas.

$$w \approx w^0 = \sum_{k=1}^N w_k^0 \phi_k(x_1, x_2). \quad (18)$$

Os parâmetros constantes w_k^0 , que são agrupados no vetor Δ , são determinados através do princípio da energia potencial mínima, que defende que o equilíbrio estático do sistema minimiza a energia potencial total do sistema. Assim, obtemos a seguinte formulação que permite, como mencionado anteriormente, o cálculo dos parâmetros constantes:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = 0 \implies [K]\{\Delta\} = \{F\}. \quad (19)$$

$$[K] = \int_{\Omega_0} [B]^T [D] [B] dA = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & 2 \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & 2 \frac{\partial^2 \phi_N}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} dA$$

onde as segundas derivadas das funções ϕ_k formam a matriz operadora diferencial B e a matriz D é composta por algumas das entradas da “stiffness matrix”.

Uma propriedade importante preservar nas funções ϕ_k é o seu carácter polinomial completo, isto é, é importante que estas funções se apresentem como polinómios completos. Deste modo, para um polinómio de terceiro grau, a solução aproximada para w toma a seguinte forma:

$$w^0(x_1, x_2) = \Delta_1 + \Delta_2 x_1 + \Delta_3 x_2 + \Delta_4 x_1 x_2 + \Delta_5 x_1^2 + \Delta_6 x_2^2 + \Delta_7 x_1^3 + \Delta_8 x_1^2 x_2 + \Delta_9 x_1 x_2^2 + \Delta_{10} x_2^3. \quad (20)$$

Visto que o caso em estudo é o caso de flexão, as condições limite $w^0(0, x_2) = 0$ e $\frac{\delta w^0}{\delta x_1}(0, x_2) = 0$ são aplicadas, facilitando o cálculo de algumas constantes. Consequentemente, conclui-se que $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = \Delta_{10} = \Delta_2 = \Delta_4 = \Delta_9 = 0$. Desta forma, a solução aproximada pode ser reduzida para:

$$w^0 = \Delta_5 x_1^2 + \Delta_7 x_1^3 + \Delta_8 x_1^2 x_2, \quad (21)$$

onde $\phi_1 = x_1^2$, $\phi_2 = x_1^3$ e $\phi_3 = x_1^2 x_2$. O vetor força, visto que corresponde a uma força num ponto, é dado por:

$$\{F\} = P \begin{Bmatrix} L^2 & L^3 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (22)$$

Através das equações 19 é possível computar as constantes para a totalidade das propriedades equivalentes e, por conseguinte, encontrar w_{stress}^0 e w_{disp}^0 para $x_1 = 200mm$ e $x_2 = 0mm$ para cada caso de força aplicada. Com os parâmetros constantes computados para os dois casos de propriedades equivalentes, é possível realizar uma comparação com os resultados obtidos no primeiro trabalho laboratorial e com os resultados analíticos. Esta análise encontra-se sumarizada na tabela 16, em anexo.

Para aprofundar a análise, apresenta-se o seguinte gráfico comparativos:

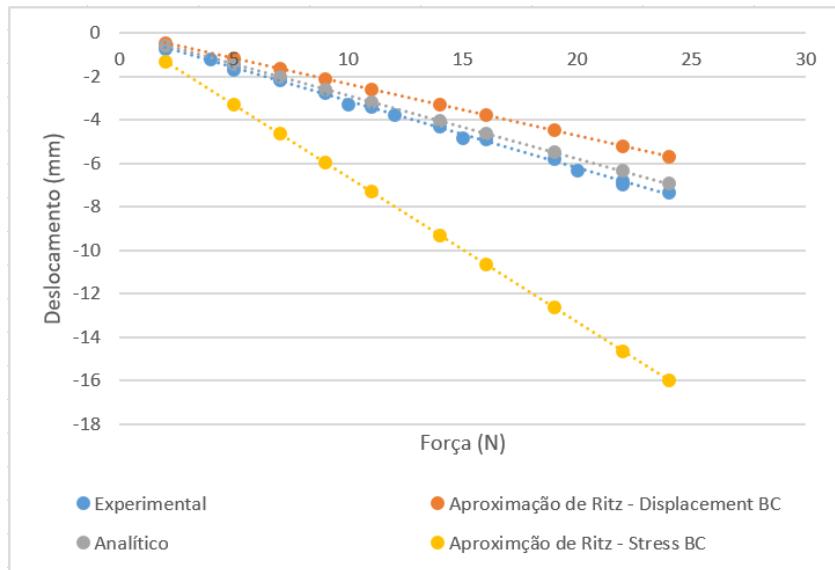


Figura 4: Valores do deslocamento em função da carga aplicada.

Observando a figura 4, verifica-se que os valores experimentais estão dentro do envelope definido pelos limites associados às propriedades das condições de fronteira de tensão e deslocamento. Para além disso, os valores analíticos e

experimentais, que são bastante semelhantes, como apresentado no relatório anterior, estão bastante próximos dos valores da aproximação de Ritz considerando as condições de fronteira de deslocamento, o que pode ser justificado pelo facto das propriedades destes métodos serem semelhantes entre si e consideravelmente diferentes das relativas às condições de fronteira de tensão, que, como visto anteriormente, não é a melhor opção para analisar o caso em estudo. Assim, prova-se a robustez e validade deste método de aproximação, que é bastante importante em situações em que não é possível obter soluções analíticas.

Por fim, é importante realçar, não só a possibilidade do laminado usado no ensaio laboratorial já ter algumas propriedades alteradas devido à utilização, bem como possíveis erros na aplicação da força ou nas medições efetuadas, que podem ser fontes de erros nos resultados.

Referências

- [1] da Cruz Fernandes J., *Fibras*, Fibers. 2021.
- [2] José Miranda Guedes. *Apontamentos das Aulas Teóricas*. 2022/2023
- [3] Efunda, *Compliance Matrix*, (Acessado a 13 de janeiro, 2023). Available in: https://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/mat_mechanics/hooke_orthotropic.cfm
- [4] The Mechanical Engineering Blog, *Quickly Determine Laminate Coupon Test Loads using NX Laminate Composites*, (Acessado a 18 de janeiro, 2023). Available in: <https://mechanicalengineeringblog.tumblr.com/post/129581534839/display-the-critical-ply-id-and-load-case-id-in>
- [5] Siemens, *Display the critical ply ID and load case ID in laminate elements using NX Advanced Post Report*, (Acessado a 19 de janeiro, 2023). Available in: <https://community.sw.siemens.com/s/article/quickly-determine-laminate-coupon-test-loads-using-nx-laminate-composites>
- [6] Siemens NX, *Failure Criteria*, (Acessado a 23 de janeiro, 2023). Available in: https://docs.plm.automation.siemens.com/data_services/resources/nx/1899/nx_help/custom/en_US/samcef_solver_documentation/m003/crit-comp-m003.html
- [7] Roberta, *Dissertação Roberta - Vibrações Estocásticas em Sistemas Contínuos*, (Acessado a 25 de janeiro, 2023). Available in: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/19543/19543_7.PDF
- [8] Reddy, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis*. CRC Press, 2003.

Anexos

A Computação de propriedades através do programa Siemens NX

A.1 Estudo de convergência RVE

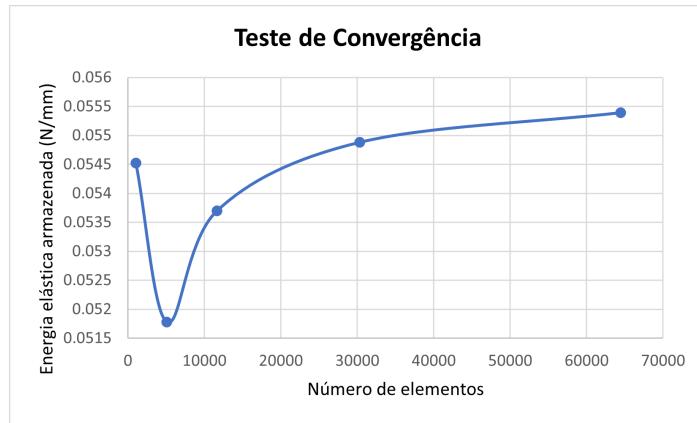


Figura 5: Análise de convergência da malha para um teste de tensão unilaterial segundo y.

A.2 Malhas testadas e RVE utilizado

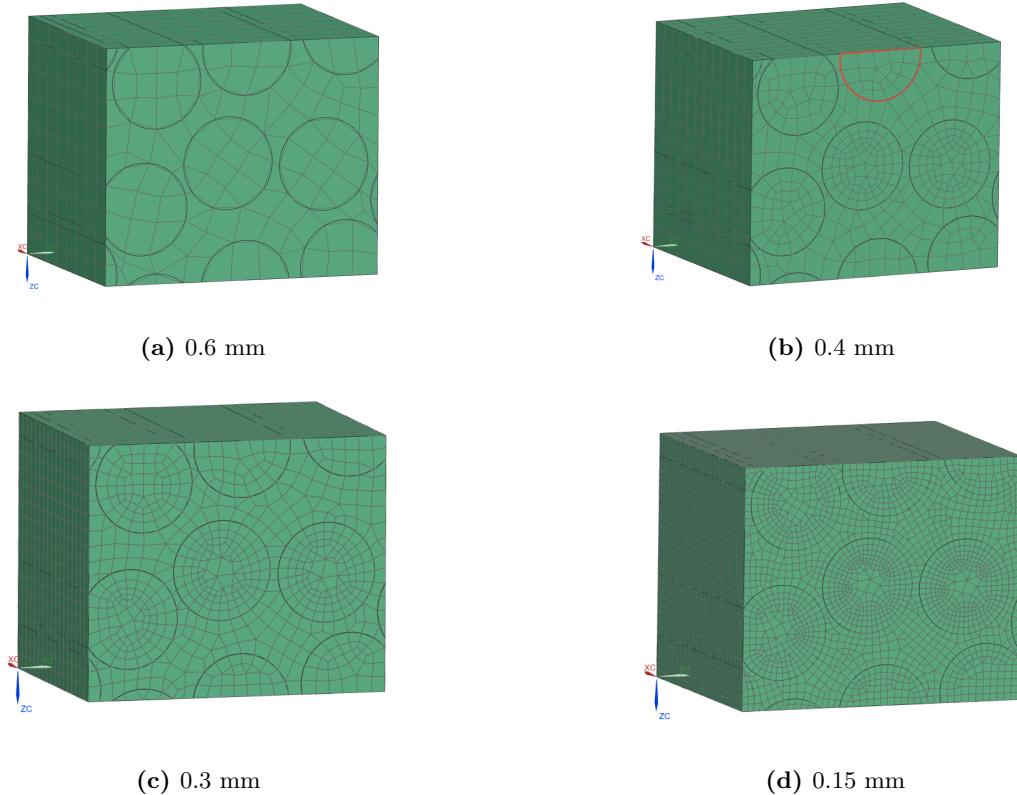


Figura 6: 4 níveis de refinamento da malha utilizados na análise de convergência.

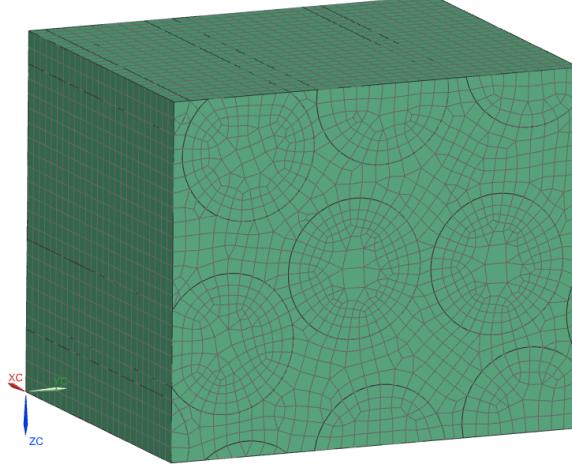


Figura 7: Malha 0.2 mm utilizada na análise de convergência e no trabalho laboratorial.

A.3 Compliance Matrix

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & -\frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} & -\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad (23)$$

A.4 Stiffness Matrix

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_{yy}E_{zz}\Delta} & \frac{\nu_{yx}+\nu_{zx}\nu_{yz}}{E_{yy}E_{zz}\Delta} & \frac{\nu_{zx}+\nu_{yx}\nu_{zy}}{E_{yy}E_{zz}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_{xx}E_{zz}\Delta} & \frac{1-\nu_{zx}\nu_{xz}}{E_{xx}E_{zz}\Delta} & \frac{\nu_{zy}+\nu_{zx}\nu_{xy}}{E_{xx}E_{zz}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz}+\nu_{xy}\nu_{yz}}{E_{xx}E_{yy}\Delta} & \frac{\nu_{yz}+\nu_{xz}\nu_{yx}}{E_{xx}E_{yy}\Delta} & \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_{xx}E_{yy}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} \quad (24)$$

, com $\Delta = \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}-\nu_{yz}\nu_{zy}-\nu_{zx}\nu_{xz}-2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_{xx}E_{yy}E_{zz}}$.

B PREMAT

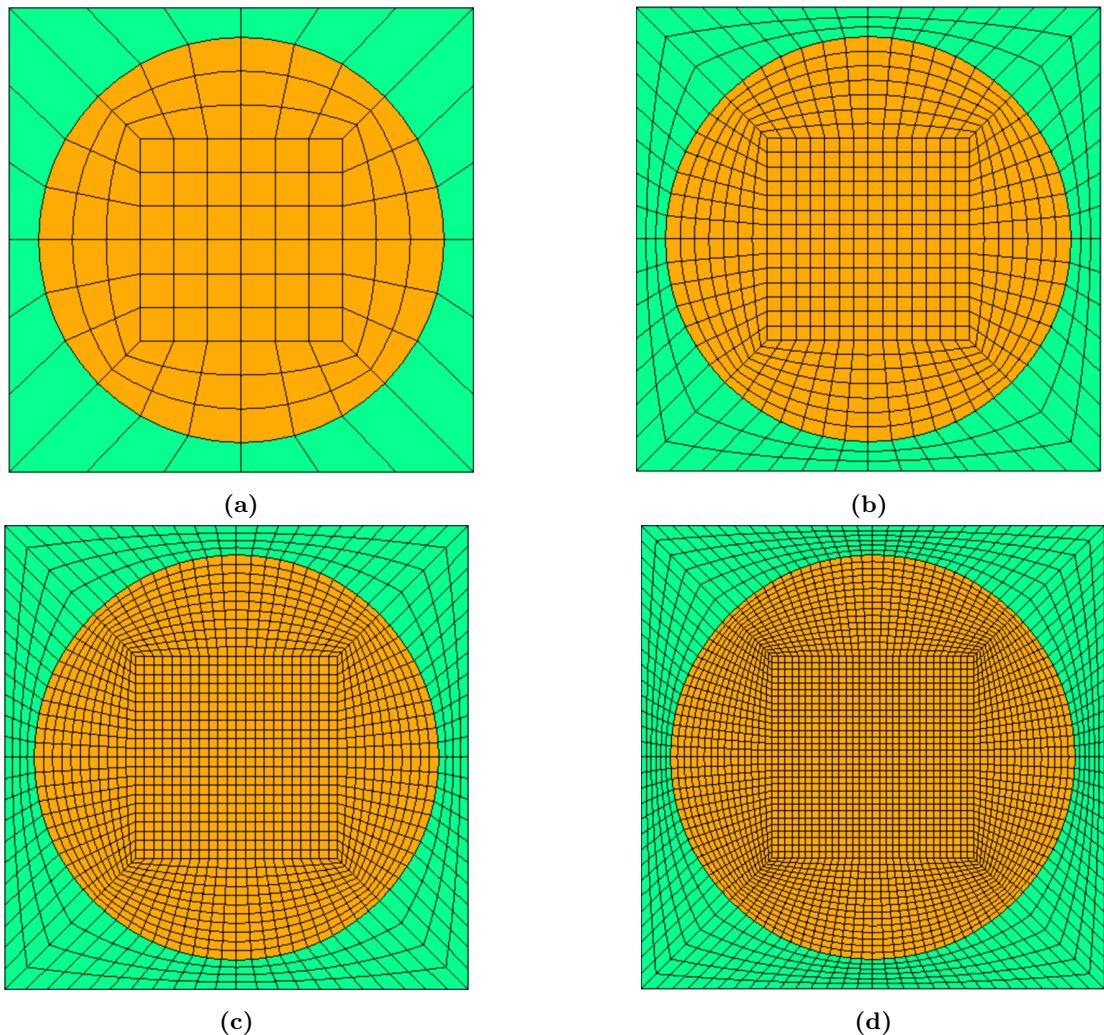


Figura 8: 4 níveis do parâmetro de refinamento da malha utilizados no programa PREMAT, para o *square array*.

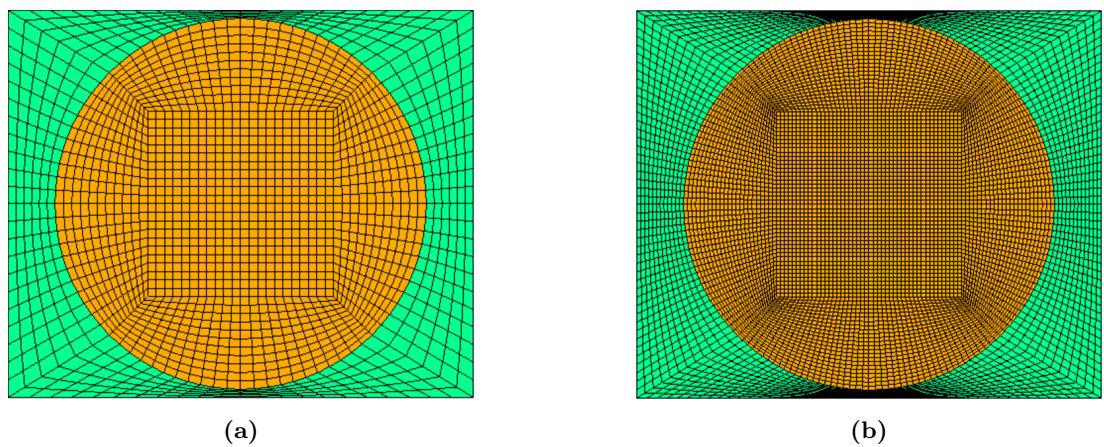


Figura 9: 2 níveis do parâmetro de refinamento da malha utilizados no programa PREMAT, para o *rectangular array*.

<i>Square Array</i>	Variação 1-2 (%)	Variação 2-3 (%)	Variação 3-4 (%)
E_1	0.000	0.000	0.000
E_2	0.655	0.007	0.000
E_3	0.655	0.007	0.000
G_{23}	0.731	0.011	0.002
G_{31}	0.066	0.000	0.000
G_{12}	0.066	0.000	0.000
ν_{21}	0.642	0.005	0.002
ν_{31}	0.642	0.005	0.002
ν_{32}	0.829	0.006	0.003
ν_{12}	0.014	0.000	0.000
ν_{13}	0.014	0.000	0.000
ν_{23}	0.010	0.006	0.003
Média (%)	0.429	0.004	0.00097

Tabela 12: Variação das propriedades equivalentes do material compósito com os vários níveis do parâmetro de refinamento para square array.

<i>Rectangular Array</i>	Variação 1-2 (%)	Variação 2-3 (%)
E_1	0.0626	0.0113
E_2	0.0414	0.0115
E_3	0.0829	0.0166
G_{23}	0.5035	0.0924
G_{31}	0.0326	0.0058
G_{12}	0.2286	0.0380
ν_{21}	0.1070	0.0237
ν_{31}	0.1438	0.0272
ν_{32}	0.2738	0.0555
ν_{12}	0.0056	0.0000
ν_{13}	0.0000	0.0000
ν_{23}	0.3176	0.0592
Média (%)	0.1500	0.3413

Tabela 13: Variação das propriedades equivalentes do material compósito com os vários níveis do parâmetro de refinamento para rectangular array.

C Placa laminada

C.1 Estudo de convergência e malha

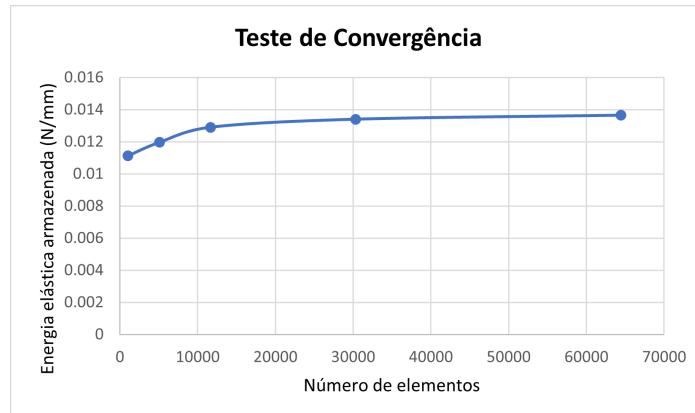


Figura 10: Análise de convergência da malha para um teste de tensão unilateral segundo x.

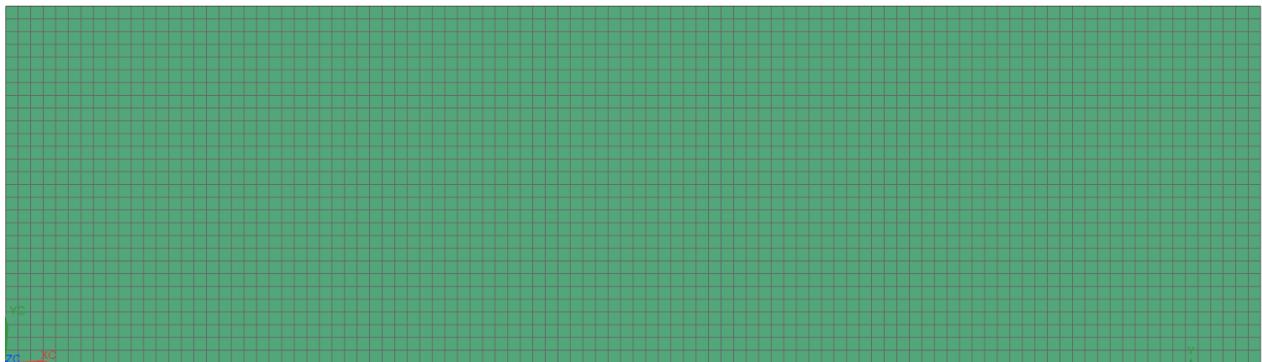


Figura 11: Malha de 2 mm utilizada na análise de convergência e no trabalho computacional.

C.2 Teste de Tração

C.2.1 Tensão ao longo da espessura

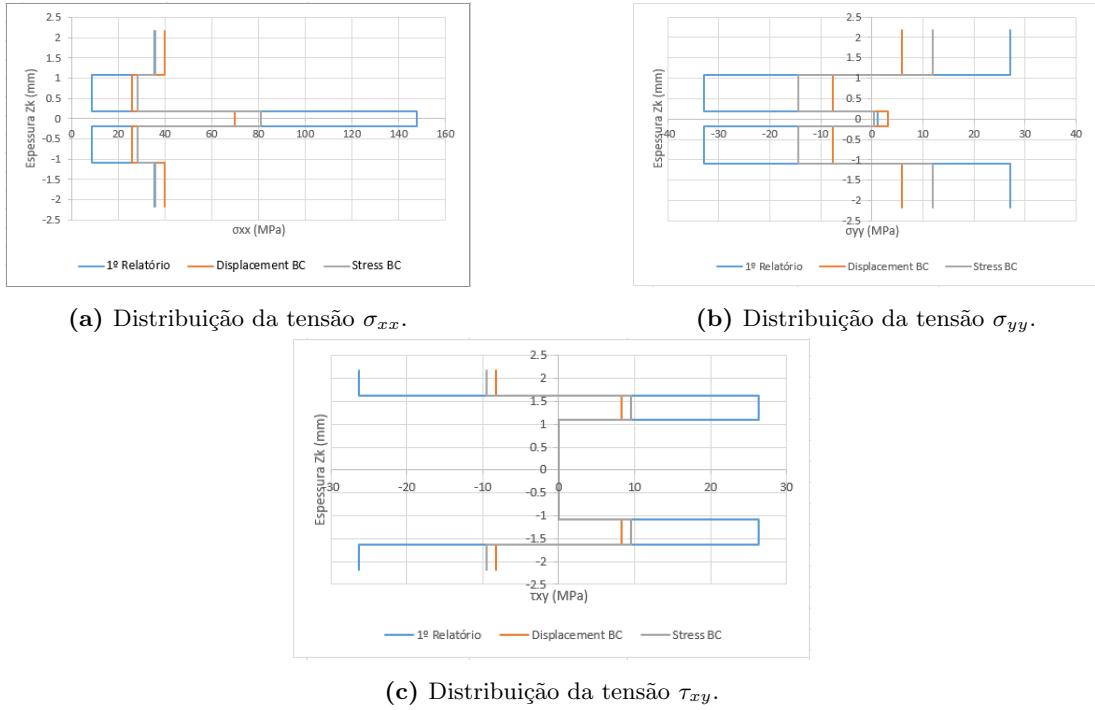


Figura 12: Distribuições das tensões ao longo da espessura experimental do laminado.

C.3 Teste de Flexão

C.3.1 Tensão ao longo da espessura

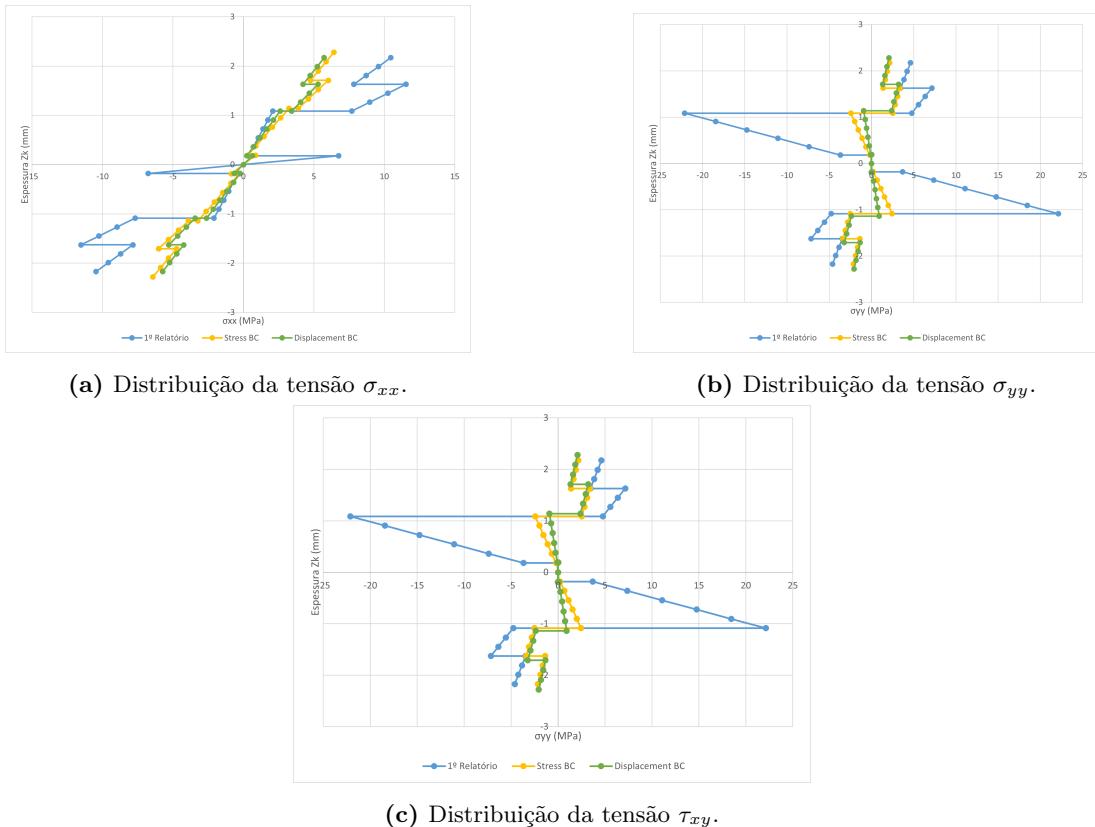


Figura 13: Distribuições das tensões ao longo da espessura experimental do laminado.

C.4 Frequências naturais

Frequências Naturais (Hz)			
Experimental	NX (Displacement BC)	NX (Stress BC)	
1º	165	361.94	178.97
2º	470	1002	499.16
3º	-	1343	766.43
4º	-	1971	989.77
5º	-	2729	1552
6º	-	3266	1651
7º	-	4198	2301
8º	-	4292	2373
9º	-	4880	2480
10º	-	5785	3248

Tabela 14: Frequências naturais com a placa livre obtidas através dos diferentes métodos.

Frequências Naturais (Hz)				
Analítico (Micromecânica)	Analítico (Displacement BC)	Analítico (Stress BC)	NX (Displacement BC)	NX (Stress BC)
1º	49.059	48.923	28.465	57.64
2º	307.446	306.595	178.393	360.38
3º	860.857	858.475	499.506	694.49
4º	1686.936	1682.269	978.833	728.38
5º	2788.626	2780.911	1618.081	1010
6º	4165.744	4154.219	2417.145	1981
7º	5818.270	5802.174	3376.012	2110
8º	7746.152	7724.722	4494.653	3276
9º	12428.293	12393.909	7211.433	3598
10º	15182.495	15140.492	8809.540	4069

Tabela 15: Frequências naturais obtidas com a placa encastrada através dos diferentes métodos.

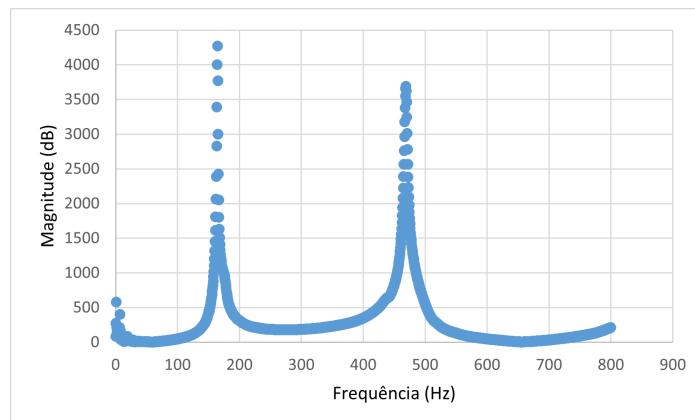
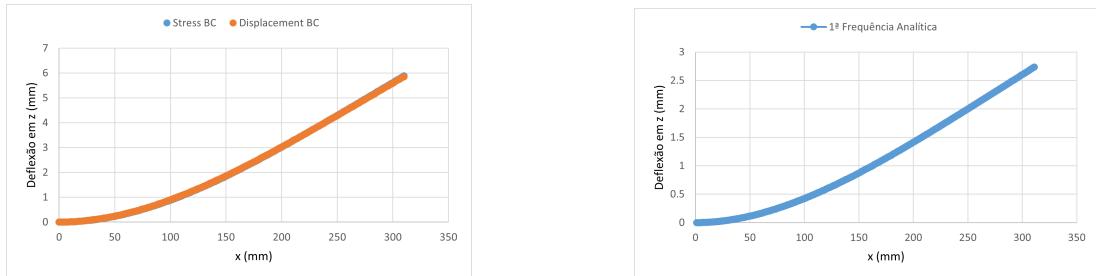
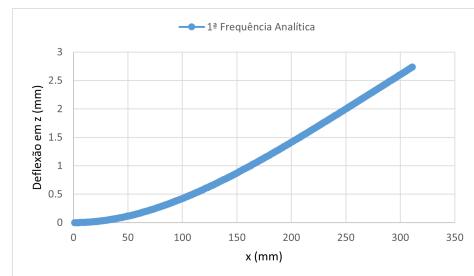


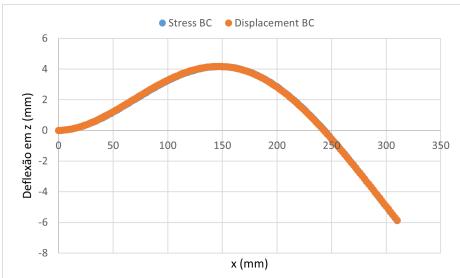
Figura 14: Gráfico experimental da frequência e respetiva magnitude.



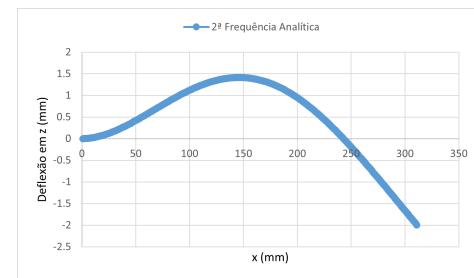
(a) Deflexão em Z através do software para a 1^a frequência.



(b) Deflexão analítica em Z para a 1^a frequência.



(c) Deflexão em Z através do software para a 2^a frequência.



(d) Deflexão analítica em Z para a 2^a frequência.

Figura 15: Deflexão em Z através do software NX e dos resultados analíticos.

C.5 Rayleigh-Ritz

		Deslocamento (mm)			
		Analítico	Experimental	Aproximação de Ritz (Displacement BC)	Aproximação de Ritz (Stress BC)
Força (N)	2	-0.579	-0.582	-0.473706569	-1.332919
	5	-1.448	-1.519	-1.184266422	-3.3322975
	7	-2.027	-2.157	-1.657972991	-4.6652165
	9	-2.606	-2.766	-2.13167956	-5.99813551
	11	-3.185	-3.389	-2.605386129	-7.33105451
	14	-4.053	-4.305	-3.315945982	-9.33043301
	16	-4.632	-4.908	-3.789652551	-10.663352
	19	-5.501	-5.825	-4.500212404	-12.6627305
	22	-6.369	-6.8	-5.210772257	-14.662109
	24	-6.948	-7.338	-5.684478826	-15.995028

Tabela 16: Valores de deslocamento em função das cargas aplicadas.

D Resultados NX do Laminado

D.1 Teste de Tensão e Flexão

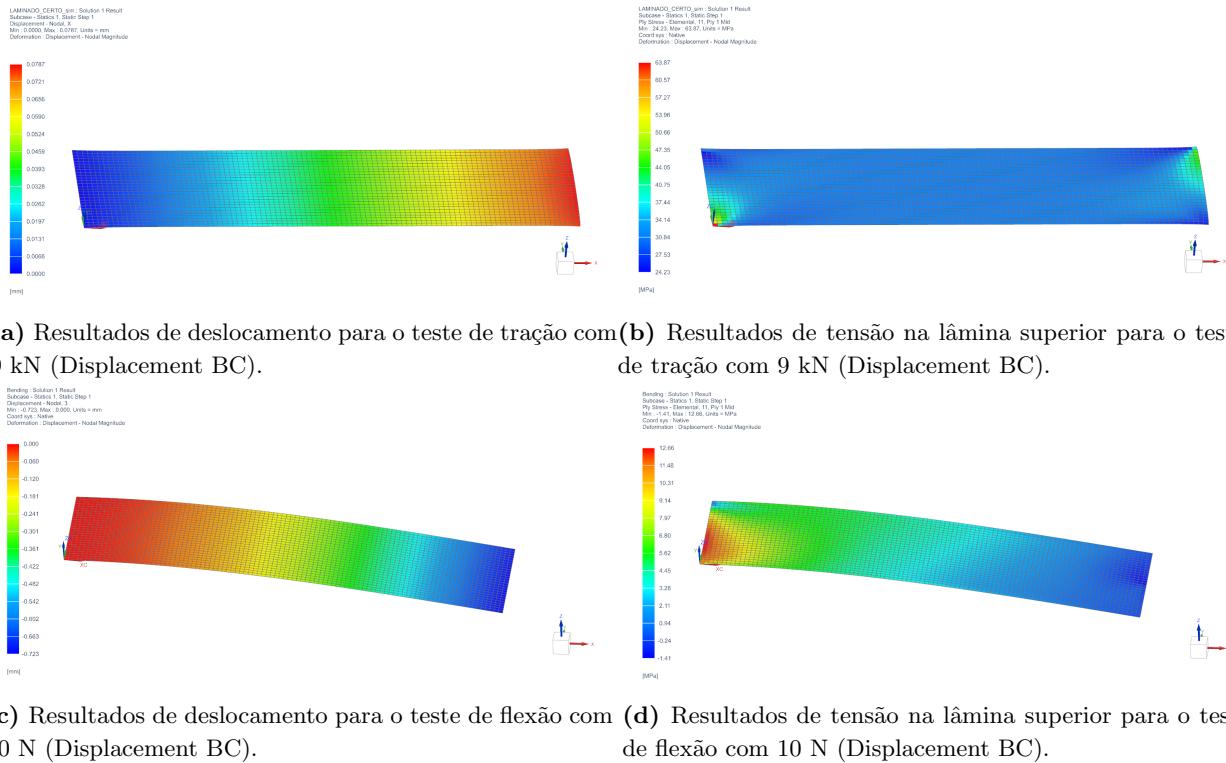


Figura 16: Resultados associados ao teste de tração e flexão.

D.2 Frequências Naturais

D.2.1 Laminado Livre

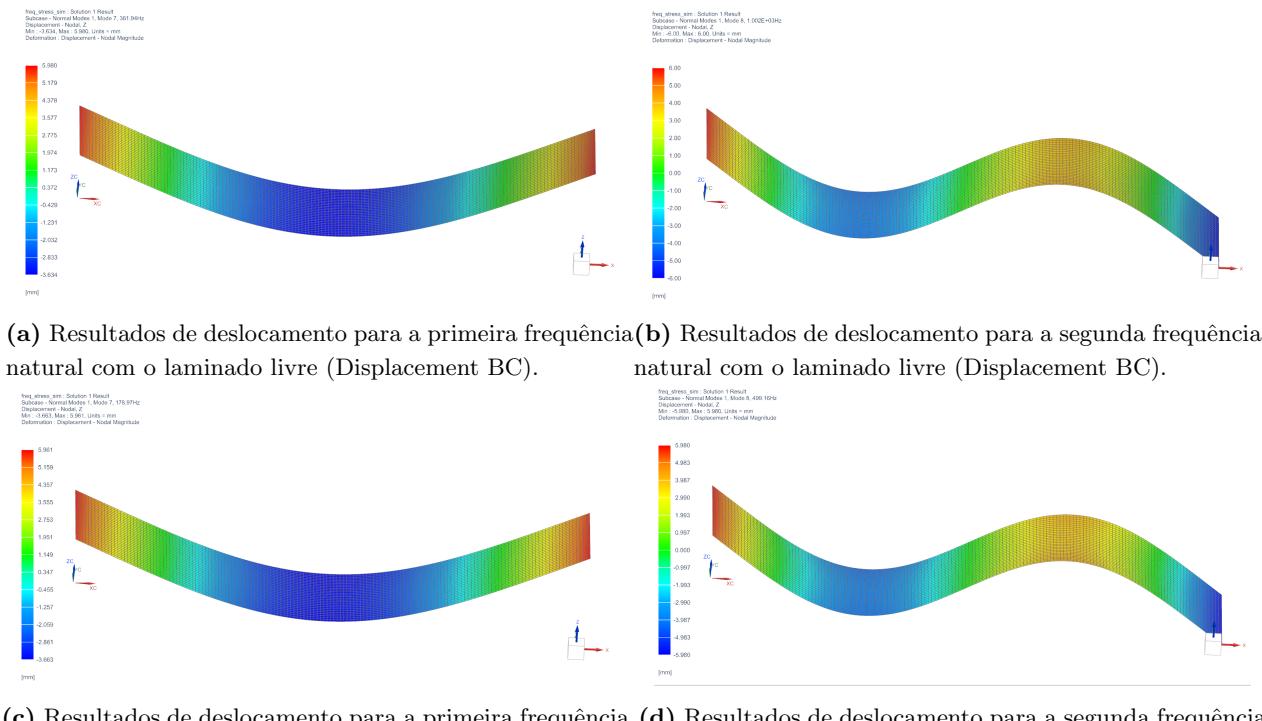


Figura 17: Resultados associados às frequências naturais com o laminado livre.

D.2.2 Laminado Encastrado

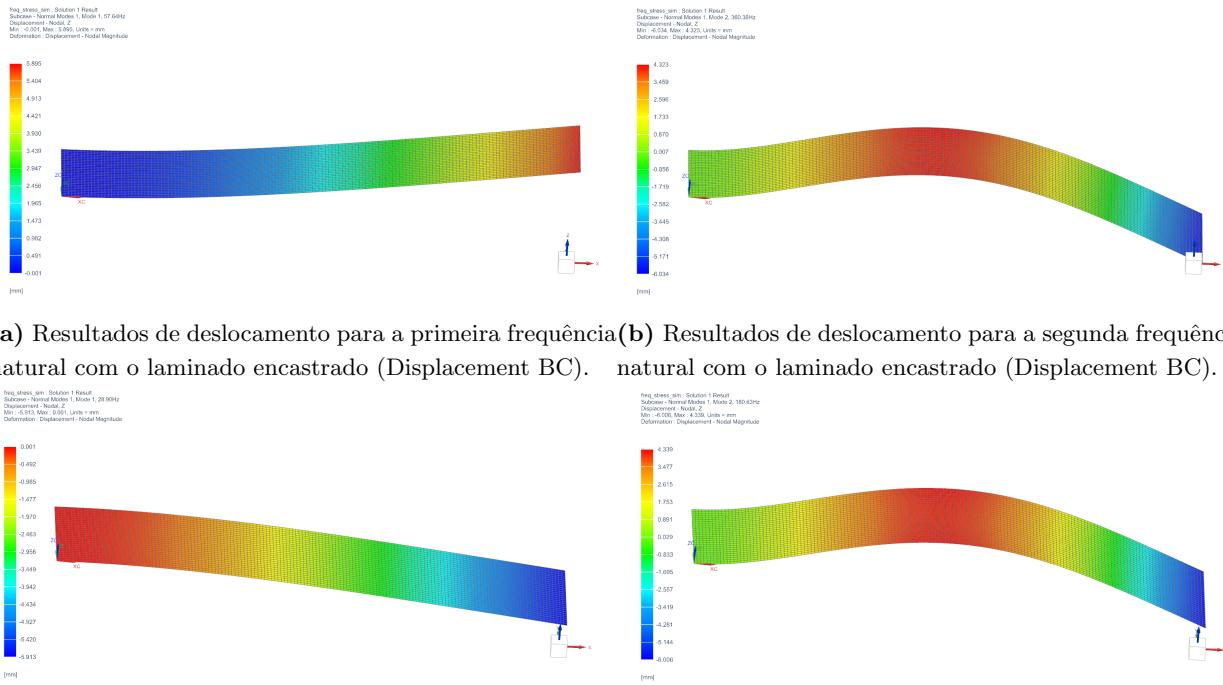


Figura 18: Resultados associados às frequencias naturais com o laminado encastrado.