1. Funciones y Modelos

1.1 Cuatro maneras de representar una función

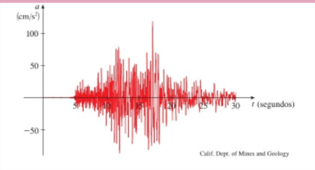
Una cantidad que depende de otra

-El area de un circulo depende de su radio $A = \pi r^2$

-La población depende del tiempo $P(1950) = 2\,560\,000$

-El costo de un paquete depende de su peso

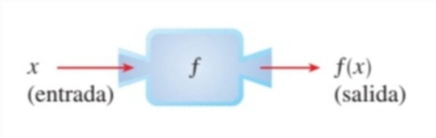
-La aceleración vertical del suelo en el tiempo



Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elementos, llamado f(x), de un conjunto E.

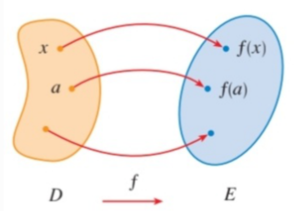
Donde D se llama dominio de la función. El rango es el conjunto de todos los valores posibles de f(x), conforme x varia en todo el dominio.

Variable Independiente   Variable Dependiente



$g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ División $x \neq 0$, $x \neq 1$ $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x+2}$ Raiz $x \geq 0$ $[-2, \infty)$

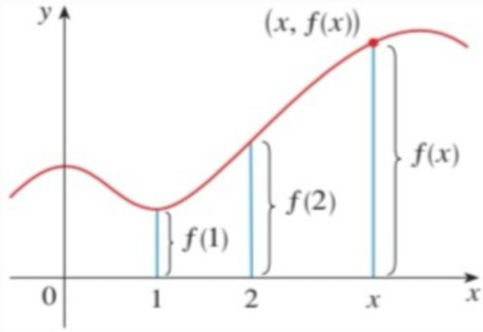


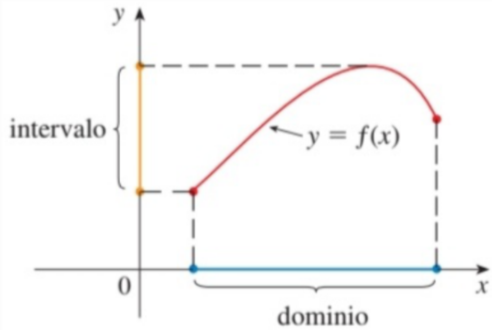
D todas las entradas posibles

E todas las salidas posibles

$f(x) = \sqrt{x}$ $x \geq 0$ $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$

(x, y) $y = f(x)$





Coeficiente de diferencia

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Representa la razón promedio de cambio f(x) entre x=a y x=a+h

$f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$f(a+h) = 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1$

$= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5a - 5h + 1$

$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h}$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5$$

REPRESENTACION DE LAS FUNCIONES

-Verbalmente (mediante una descripcion en palabras)

-Numéricamente (con una tabla de valores)

-Visualmente (mediante una gráfica)

-Algebraicamente (por medio de una fórmula explícita)

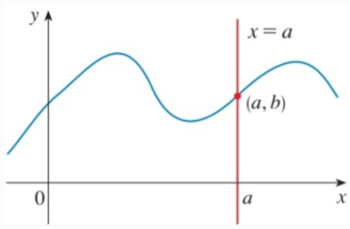
Pendiente-Ordenada

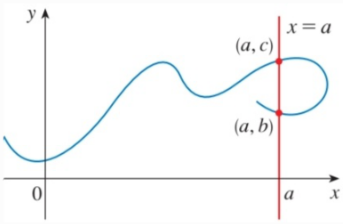
$y = mx + b$ Dominio $\mathbb{R}$, Rango $\mathbb{R}$

Parabola

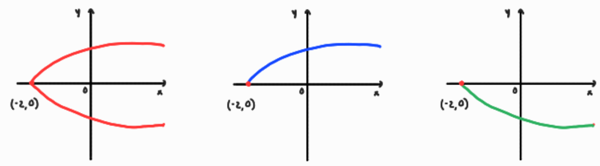
$y = x^2$ Dom: $\mathbb{R}$, Rang: $x^2 \geq 0$ $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$

PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL Es una funcion de x si y solo si la linea vertical se interseca solo una vez con la función.





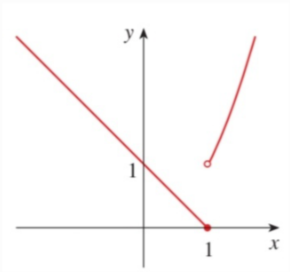
Parabola $y^2 = x + 2$ → $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = -\sqrt{x+2}$



FUNCIONES SECCIONALMENTE DEINIDAS

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$



Valor Absoluto

La distancia siempre son positivas o 0

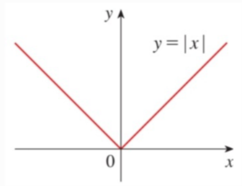
$|a| \geq 0$

$|3| = 3$ $|-3| = 3$ $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ $|3 - \pi| = \pi - 3$

$3 - 3.14$
$-0.14 = 0.14$

$$|a| = a \quad \text{si } a \geq 0$$
$$|a| = -a \quad \text{si } a < 0$$

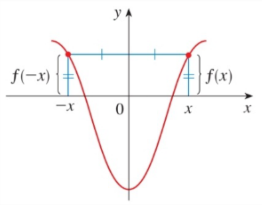
Trace la gráfica de la funcion abolutà f(x)=lxl



$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

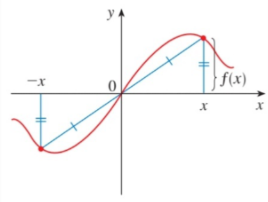
SIMETRÍA

Si una función f satisface f(-x)=f(x) denomina **función par**



Espejo
$F(x)=x^2$
$F(-x)=(-x)^2=x^2=F(x)$

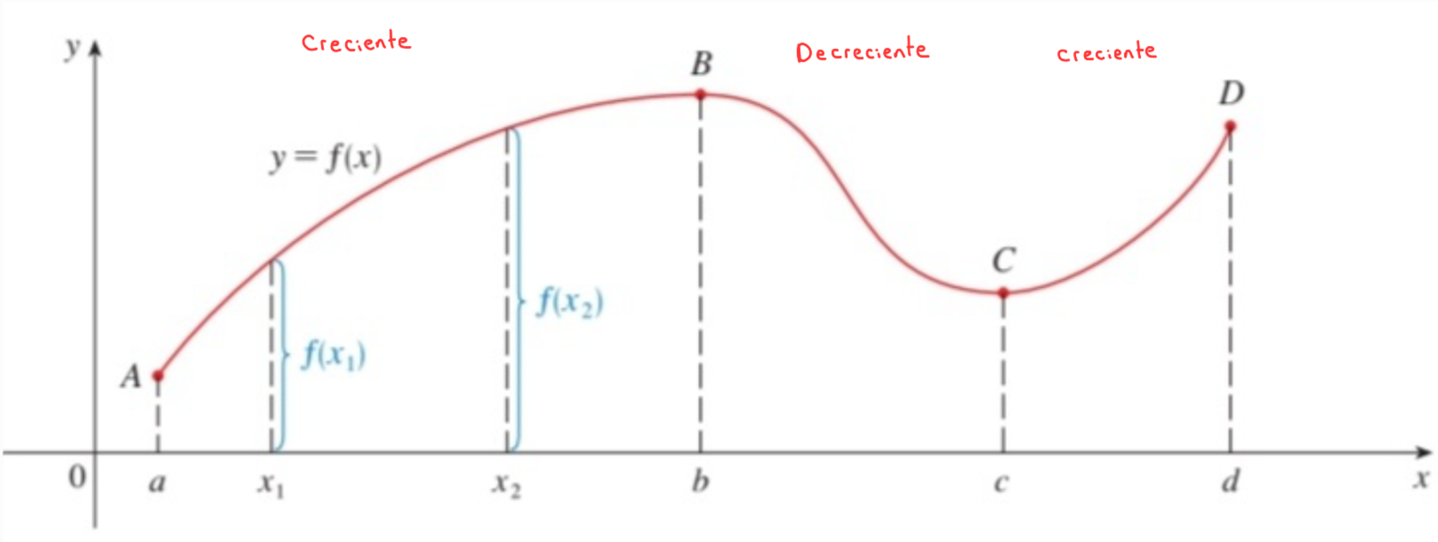
Si f satisface f(-x)=-f(x) se conoce como **función impar**



180°
$F(x)=x^3$
$F(-x)=(-x)^3=-x^3=-F(x)$

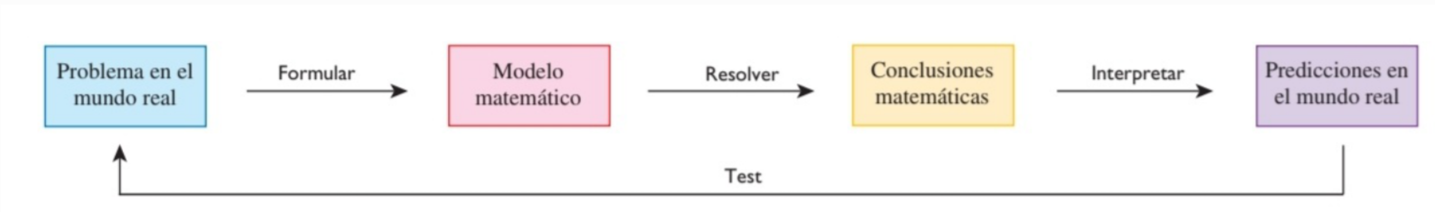
FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función es creciente si $f(x_1)<f(x_2)$



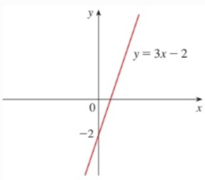
1.2 Modelos matemáticos: un catálogo de funciones básicas

Un modelo matematico es una descripcion matematica; su proposito es entender el fenómeno y quiza acer prediciones con respecto al comportamiento futuro.



MODELOS LINEALES

Función lineal
y=f(x)=mx+b donde m es la pendiente y b la coordenada al origen y

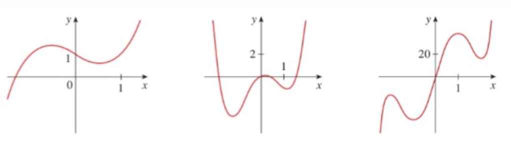


x	$f(x)=3x-2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

observe que los valores aumentan 3 veces mas rapido por lo que
3 s la relacion de cambio de y con respecto a x

POLINOMIOS

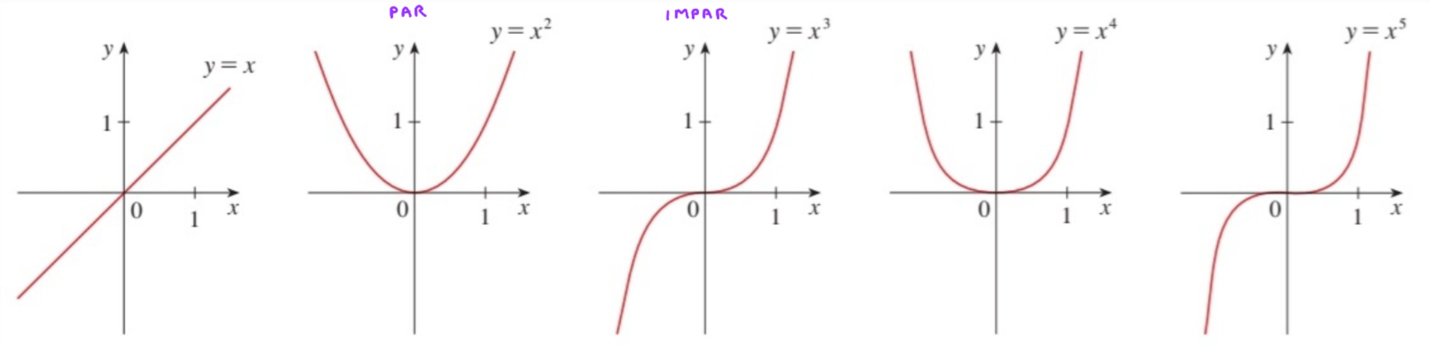
A una funcion P se le llama **polinomio** si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ donde a son **coeficientes**. El dominio ed cualquier polinomio es R=( )
Un polinomio de grado 1 tiene la forma P(x)=mx b y de este modo es una función lineal.
Un polinomio de grado 2 tiene la forma P(x)=ax bx c se le llama función cuadrática. La parabola se abre hacia arriba si a 0
Un polinomio de grado 3 tiene la forma P(x)=ax bx cx d es una función cúbica.

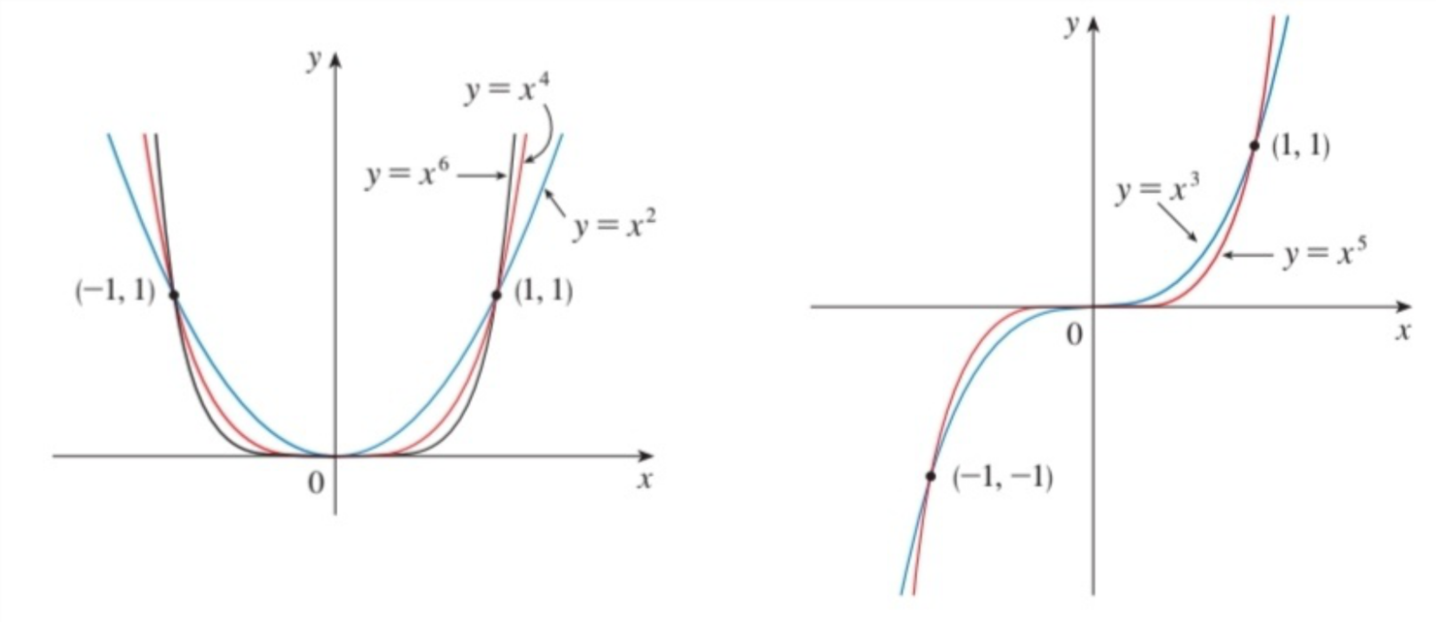


(a) $y=x^3-x+1$ (b) $y=x^4-3x^2+x$ (c) $y=3x^5-25x^3+60x$

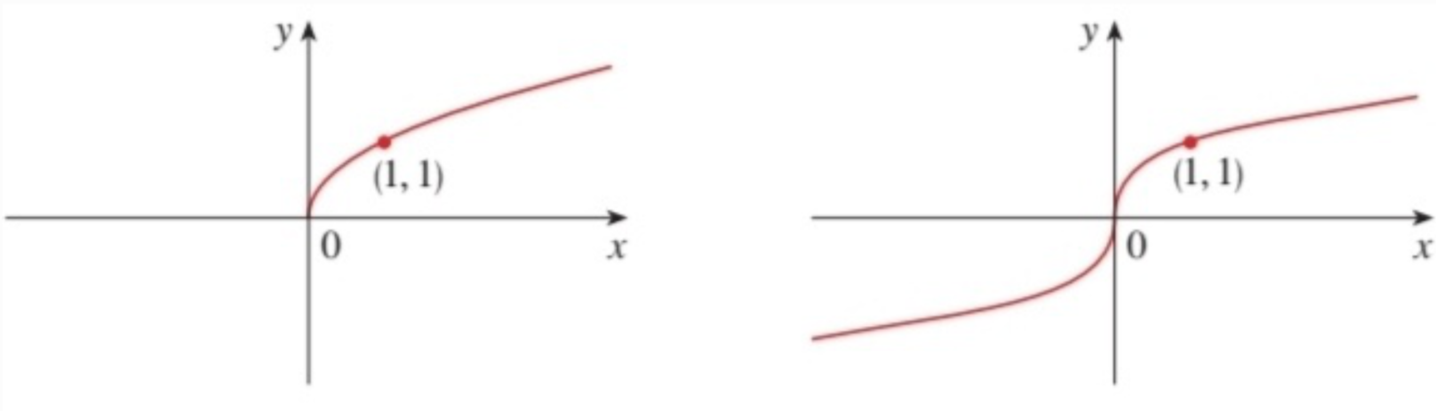
FUNCIONES DE POTENCIA

una función de la forma $f(x)=x^n$ se llama **función potencia.**



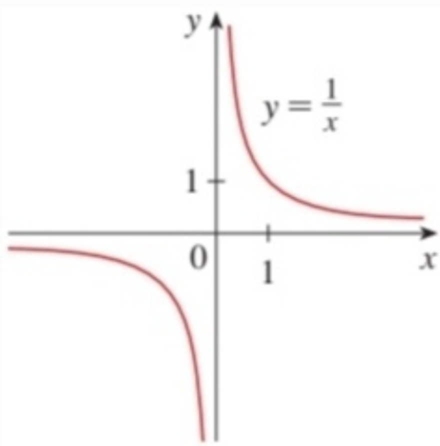


Una función de la forma $f(x)=x^{1/2} = \sqrt{x}$ es una **función de raíz**; cuyo dominio es $(0, \infty)$ y su grafica la mitad de una parabola.



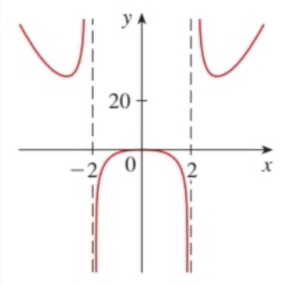
(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Una función de la forma $f(x)=x^{-1} = 1/x$ es una **función recíproca**, su grafica es una hiperbola con sus ejes de coordenadas como asíntotas



FUNCIONES RACIONALES

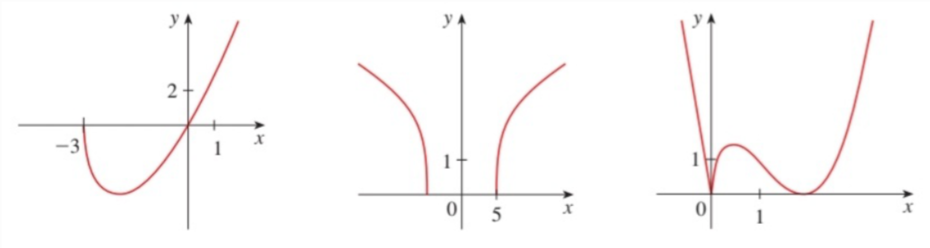
Una **función racional** f es una razón de dos polinomios:



$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\{x \mid x \neq 0\}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función construida usando aciones algebraicas (sumas, restas multiplicación y raíces) se llama **función algebraica.**



(a) $f(x) = x \cdot \sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3} \cdot (x-2)^2$

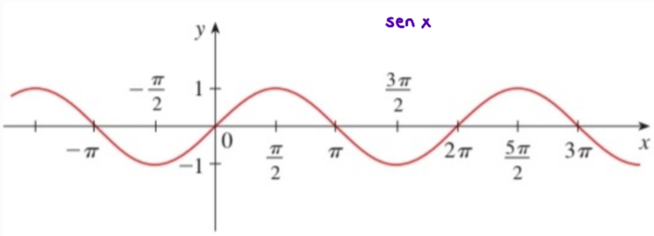
La masa de una partícula

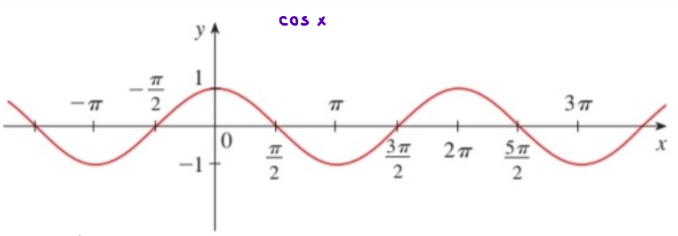
$M = f(v) = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$C: 3.0 \times 10^5$ Km/s rapidez de la luz

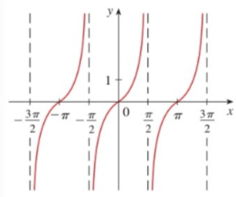
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sen, Cos; son funciones periodicas de 2π. Se usan para modelar fenomenos repetitivos (mareas, resortes y ondas).





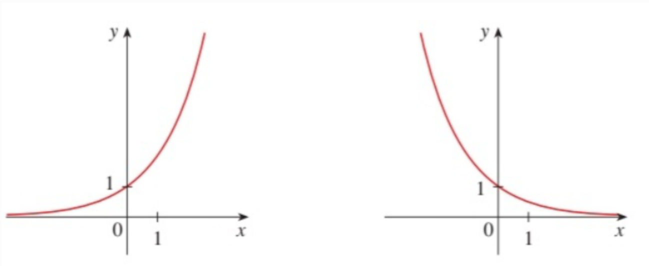
dominio $(-\infty, \infty)$ alcance $[-1, 1]$



$\tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$

FUNCIONES EXPONENCIALES

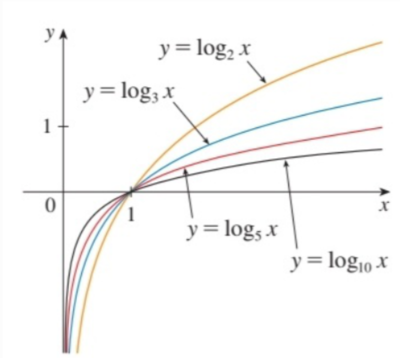
Las **funciones exponenciales** son funciones de la forma $f(x)=a^x$



(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

FUNCIONES LOGARITMICAS

Las **funciones logarítmicas** $f(x)=\log_a x$; son las inversas de las funciones exponenciales.



FUNCIONES TRASECNDENTES

En el capitulo 11 se definen como sumas de series infinitas.

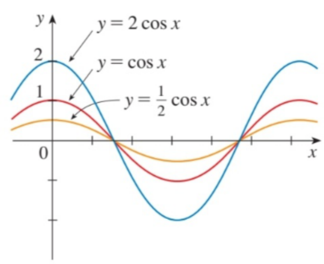
1.3 Funciones nuevas a partir de funciones antiguas

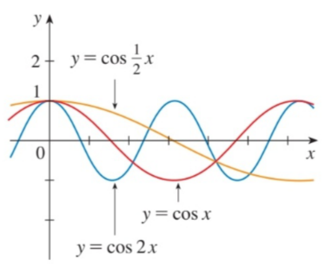
Funciones nuevas mediante el desplazamiento, el alargamiento y la reflexión de sus graficas.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

ALARGAMIENTOS Y REFLEXIONES VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

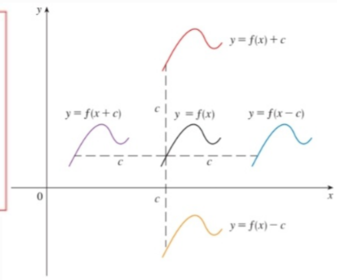
- $y = cf(x)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c
- $y = (1/c)f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmernte en un factor de c
- $y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c
- $y = f(x/c)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c
- $y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x
- $y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y

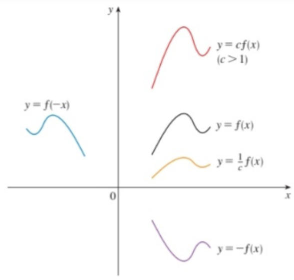




DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

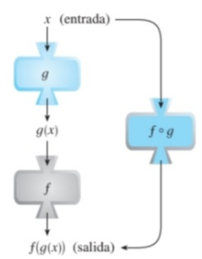
- $y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba
- $y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo
- $y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha
- $y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda





COMBINACIONES DE FUNCIONES

Se pueden combinar las dos funciones f y g para formar funciones nuevas f+g , f- g, f·g, f/ g. El procedimiento se denomina composición.

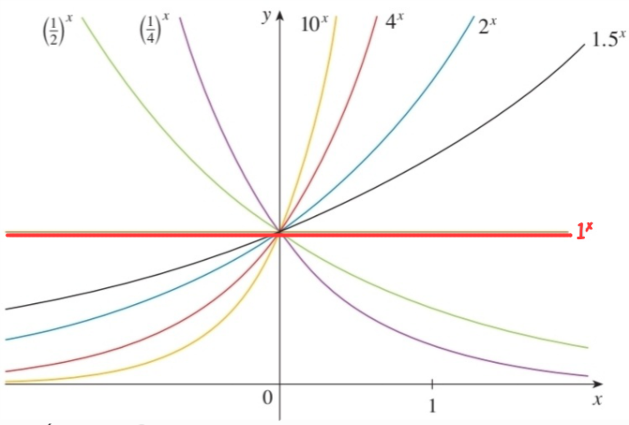


$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $A \cap B$

DEFINICIÓN Conocidas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también denominada la **composición** de f y g) se define mediante

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

1.5 Funciones exponeciales



$f(x) = a^x$

dominio $\mathbb{R}$

rango $(0, \infty)$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots a}_{n \text{ factores}}$

$a > 1$ Incrementa

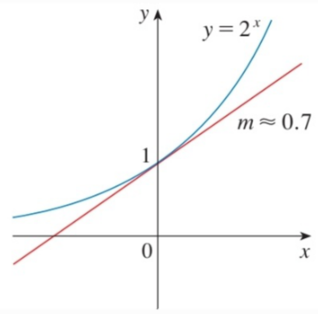
$0 < a < 1$ Disminuye

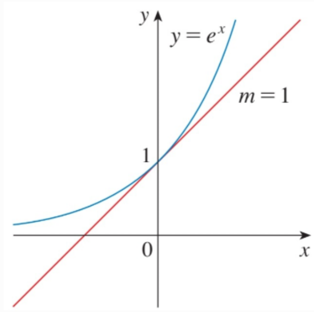
$a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

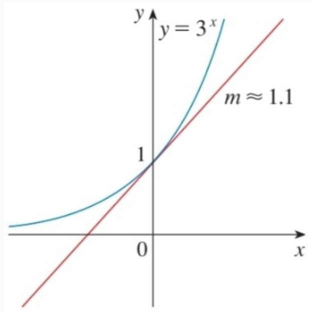
LEY DE LOS EXPONENTES Si a y b son números positivos y x y y son cualquier número real, entonces

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ 2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ 3. $(a^x)^y = a^{xy}$ 4. $(ab)^x = a^x b^x$

EL NÚMERO e







$e = 2.71828$

1.6 Funciones inversas y logaritmos

PRUEBA DE LA LÍNEA HORIZONTAL Una función es uno a uno si y sólo si, ninguna línea horizontal interseca su gráfica más de una vez.

No todas las funciones poseen inversas.

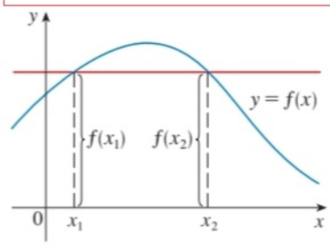
1 DEFINICIÓN A una función f se le llama **función uno a uno** si nunca toma el mismo valor dos veces; es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

2 DEFINICIÓN Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y se define mediante

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

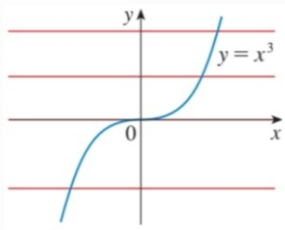
para cualquier y en B.



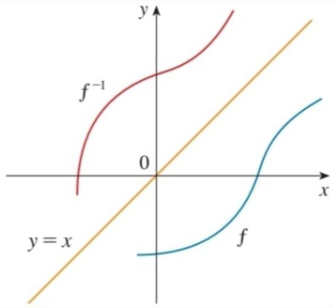
Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$

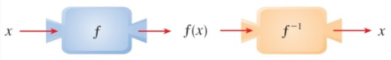
dominio de f^{-1} = rango de f

rango f^{-1} = dominio de f



La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la línea $y = x$.





5 CÓMO ENCONTRAR LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN f UNO A UNO

ETAPA 1 Escriba $y = f(x)$.

ETAPA 2 Resuelva la ecuación para x en términos de y (de ser posible).

ETAPA 3 Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

$F(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2$

Despejar Y

$\sqrt[3]{y-2} = x$

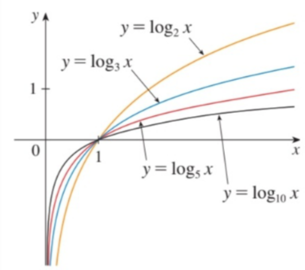
intercambiar y por x

$y = \sqrt[3]{x-2}$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La función inversa de la exponencial es la **función logarítmica con base a**

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$



LEYES DE LOS LOGARITMOS Si x y y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (donde r es cualquier número real)

LOGARITMOS NATURALES

Al logaritmo con base e se le llama logaritmo natural

$$\log_e x = \ln x$$

Los logaritmos con cualquier base se pueden representar en terminos de logaritmo natural

10 FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE Para cualquier número positivo a $(a \neq 1)$, se tiene

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$