LOS CUATERNIONES:

Problema 5 Sección 2.2.6

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial, respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Observemos si los cuaterniones $|a\rangle$ cumplen con las propiedades de espacio vectorial.

Definamos
$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$
$$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \in |a\rangle \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ y } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
y con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Entonces en cuanto a las propiedades de:

Suma:

- $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ ← Propiedad conmutativa.
- $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$ ← Propiedad Asociativa
- $q_1 + 0 = 0 + q_1 = q_1$ ← Existe el elemento neutro

Entonces en cuanto a la suma $|a\rangle$ es abeliano es decir que contiene la propiedad conmutativa.

Producto:

- $(\alpha + \beta) q_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$
- $\alpha (q_1 + q_2) = \alpha q_1 + \alpha q_2$
- $\alpha (\beta q_1) = (\alpha \beta) q_1$
- $1 q_1 = q_1$

En cuanto al producto por escalar cumple con las todas las propiedades de espacio vectorial, es cerrado bajo el producto, es distributivo y asociativo con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* Entonces según lo anterior los números cuaterniones $|a\rangle$ forman un espacio vectorial respecto a la operación suma y multiplicación por escalares ya que cumple con todas las propiedades particulares de los espacios vectoriales *

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

e) Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas 2x2 del tipo:

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$ , donde $z, w$ son numeros complejos

Entonces tenemos un cuaternion $q = a + bi + cj + dk$ tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vectorialmente se puede representar como el producto interno del vector base $\langle 1, i, j, k \rangle$ y el vector $\langle a, b, c, d \rangle$ y se puede representar con la parte real e imaginaria separadas $x = \langle a, q \rangle$, donde se toma la parte real aparte y el producto interno se efectua entre el vector $\langle b, c, d \rangle$ y un vector imaginario $q$ que contiene las unidades imaginarias $i, j, k$.

entonces definamos $|b\rangle = a + bi + cj + dk$ , $z = a + bi$, $w = c + di$ con $|b\rangle$ cuaternion y $z, w$ complejos

entonces formamos la matriz que representa el cuaternion.

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix}$$ Recorden que $z^*$ y $w^*$ son los conjugados de $z$ y $w$ respectivamente

entonces

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ -(c-di) & (a-bi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ (-c+di) & (a-bi) \end{bmatrix}$$

Entonces el determinante de esta matriz será $\longrightarrow$

$$= (a+bi)(a-bi) - \left[(c+di)(-c+di)\right]$$

$$= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2 - \left[-c^2 + \cancel{cdi} - \cancel{cdi} + d^2i^2\right]$$

$$\det \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ -(c-di) & (a-bi) \end{bmatrix} = a^2 - b^2i^2 - \left[-c^2 + d^2i^2\right] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Pero recuerde que:

$$\boxed{\begin{aligned} z &= a + bi \;;\; z^* = a - bi \\ w &= c + di \;;\; w^* = c - di \\ |q|^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}}$$

entonces tenemos que

$$\det \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix} = |q|^2$$

Por lo cual podemos afirmar que los cuaterniones $|b\rangle$ pueden representarse de forma matricial $|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$, donde $z, w$ son números complejos