Ejercicio 10

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|P_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

Entonces $|P_n\rangle$ es un espacio vectorial si existe una operación $\boxplus$ respecto al cual los elementos de $p(x)$ y $q(x) \in |P_n\rangle$ forman un grupo abeliano y una operación multiplicación por un elemento de un campo, $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ tal que los elementos de $K \in \mathbb{R}$

Primero: $|P_n\rangle$ es cerrado bajo la operación $\boxplus$: $\forall\, p(x), q(x) \in |P_n\rangle$

$$\Rightarrow p(x) \boxplus q(x) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\right) \boxplus \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}\right) =$$

$$\left[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_{n-1} + b_{n+1})x^{n-1}\right]$$ entonces $|P_n\rangle$ es cerrado bajo la operación $\boxplus$ esto implica las propiedades conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el polinomio nulo

Segundo: $|P_n\rangle$ es cerrado bajo el producto por un número $\in k$: $\forall\, \alpha \in K$ y cualquier $p(x) \in |P_n\rangle \Rightarrow \alpha\, p(x) \in P_n$ entonces:

$$\alpha\, p(x) = \alpha\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\right) = \left(\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}\right)$$

entonces $\left(|P_n\rangle, \boxplus, K\right)$ es un Espacio Vectorial

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿ P_n será un espacio vectorial? ¿Porqué?

$|P_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

En el inciso anterior demostramos que $|P_n\rangle$ era un espacio vectorial ya que era cerrado bajo la operación $\boxplus$ y el producto $k = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ tal que $k \in \mathbb{R}$

entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \text{ con } a_i \in \mathbb{Z} \text{ entonces}$$

$$\alpha p(x) = \alpha \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } a_i \in \mathbb{Z}$$

entonces como el producto entre un $\alpha \in \mathbb{R}$ y un $a_i \in \mathbb{Z}$ pertenecerá al conjunto de los $\mathbb{R}$ ya que al operar entre ellos no se violan las propiedades de operación $\boxplus$ y el producto por escalar $k = \{\alpha, \beta, \gamma \dots\}$ con $k \in \mathbb{R}$ entonces

P_n es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}$ con respecto a las operaciones $\boxplus$ y producto por escalar con elementos $\in K$.

c) ¿Cual de las siguentes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial? ¿por qué?

1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

3) Todos los polinomios que tienen a x como factor (grado $n>1$)

4) Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

Entonces para que P_{n-1} sea un subespacio vectorial de P_n debe satisfacer las sgtes propiedades:

$\boxed{1}$ El polinomio neutro de $|P_n\rangle$ que es el polinomio cero está en P_{n-1}

$\boxed{2}$ Si $p(x), q(x) \in P_{n-1}$, entonces $p(x) \boxplus q(x) \in P_{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\} \\ q(x) = \{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}\} \end{array}\right\} \in P_{n-1} \text{ tal que } p(x) \boxplus q(x) \in P_{n-1}$$

entonces

$$p(x) \boxplus q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} \in P_{n-1}$$

$\boxed{3}$ Si $p(x) \in P_{n-1}$ y α es un elemento del campo K con $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ con $K \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha\, p(x) \in P_{n-1}$

$$p(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}\} \in P_{n-1} \text{ y}$$

$$\alpha\, p(x) = \{\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1}\} \text{ entonces } \alpha\, p(x) \in P_{n-1}$$

Por lo tanto como el subconjunto ① $\Rightarrow$ Polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$ cumple las propiedades $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ entonces ① es un subespacio vectorial de $|P_n\rangle$