LOS CUATERNIONES:

Problema 5 Sección 2.2.6

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial, respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Observemos si los cuaterniones $|a\rangle$ cumplen con las propiedades de espacio vectorial.

Definamos $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$
$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ $\in |a\rangle$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

y con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Entonces en cuanto a las propiedades de:

Suma:

- $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ ← Propiedad conmutativa.
- $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$ ← Propiedad Asociativa
- $q_1 + 0 = 0 + q_1 = q_1$ ← Existe el elemento neutro

Entonces en cuanto a la suma $|a\rangle$ es abeliano es decir que contiene la propiedad conmutativa.

Producto:

- $(\alpha + \beta) q_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$
- $\alpha(q_1 + q_2) = \alpha q_1 + \alpha q_2$
- $\alpha(\beta q_1) = (\alpha\beta) q_1$
- $1 q_1 = q_1$

En cuanto al producto por escalar cumple con las todas las propiedades de espacio vectorial, es cerrado bajo el producto, es distributivo y asociativo con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

* Entonces según lo anterior los números cuaterniones $|a\rangle$ forman un espacio vectorial respecto a la operación suma y multiplicación por escalares ya que cumple con todas las propiedades particulares de los espacios vectoriales *

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$, y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \leftrightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r \, , \, r^0 b + b^0 r + b \times r),$$ donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales de siempre.

Entonces tenemos dos cuaterniones

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

entonces el producto entre ellas $|b\rangle \odot |r\rangle$ será:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b_0(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_1 i(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_2 j(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_3 k(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$$

entonces

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b_0 r_0 + \underline{b_0 r_1 i} + \underline{b_0 r_2 j} + \underline{b_0 r_3 k} + \underline{b_1 i r_0} - b_1 r_1 + b_1 r_2 k - b_1 r_3 j + \dots$$

$$\dots \underline{b_2 j r_0} - b_2 r_1 k - b_2 r_2 + b_2 r_3 + \underline{b_3 k r_0} + b_3 r_1 j - b_3 r_2 i - b_3 r_3$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 r_0 - b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3)$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b_0 r_0 - (b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3)$$

entonces efectivamente el producto de estos cuaterniones $|b\rangle \odot |r\rangle$ se puede expresar de la forma: $(b_0 r_0 - b \cdot r \, , \, b_0 r + r_0 b + b \times r)$ con $\cdot$ como producto escalar y con $\times$ como el producto vectorial

e) Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas 2x2 del tipo:

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$, donde z, w son numeros complejos

Entonces tenemos un cuaternion $q = a + bi + cj + dk$ tal que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vectorialmente se puede representar como el producto interno del vector base $\langle 1, i, j, k\rangle$ y el vector $\langle a, b, c, d\rangle$ y se puede representar con la parte real e imaginaria separadas $x = \langle a, q\rangle$, donde se toma la parte real aparte y el producto interno se efectua entre el vector $\langle b, c, d\rangle$ y un vector imaginario q que contiene las unidades imaginarias i, j, k.

entonces definamos $|b\rangle = a + bi + cj + dk$, $z = a + bi$, $w = c + di$ con $|b\rangle$ cuaternino y z, w complejos

entonces formamos la matriz que representa el cuaternion.

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix}$$ Recorden que z^* y w^* son los conjugados de z y w respectivamente

entonces

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ -(c-di) & (a-bi) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ (-c+di) & (a-bi) \end{vmatrix}$$

Entonces el determinante de esta matriz será $\longrightarrow$

$$= (a+bi)(a-bi) - \left[(c+di)(-c+di)\right]$$

$$= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2 - \left[-c^2 + \cancel{cdi} - \cancel{cdi} + d^2i^2\right]$$

$$\det\begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ -(c-di) & (a-bi) \end{bmatrix} = a^2 - b^2i^2 - \left[-c^2 + d^2i^2\right] = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Pero recuerde que:

$z = a + bi$; $z^* = a - bi$
$w = c + di$; $w^* = c - di$
$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

entonces tenemos que

$$\det\begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix} = |q|^2$$

Por lo cual podemos afirmar que los cuaterniones $|b\rangle$ pueden representarse de forma matricial $|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$, donde z, w son números complejos