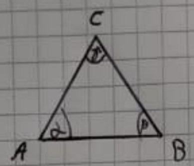
Punto 3



$\longrightarrow (A\alpha, B\beta, C\gamma) \rightarrow I$

a.) Tabla de multiplicación para G_Δ, donde Vale decir que $G_\Delta = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_k\}\}$ y la operación es la concatenación.

$i = j = \frac{2\pi}{3}$

$(A\gamma, B\alpha, C\beta) \rightarrow \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$; $(A\beta, B\gamma, C\alpha) \rightarrow R_{\frac{2\pi}{3}}$

$(A\alpha, B\gamma, C\beta) \rightarrow X_A$; $(A\gamma, B\beta, C\alpha) \rightarrow X_B$

$(A\beta, B\alpha, C\gamma) \rightarrow X_C$

$\bigcirc$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	X_A	X_B	X_C
I	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	X_A	X_B	X_C
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$
X_C	X_C	X_A	X_B	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{2}}$	I

$R_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc R_{\frac{2\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_A = X_C$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_B = X_A$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_C = X_B$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc R_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_A = X_B$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_B = X_C$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \bigcirc X_C = X_A$

$X_A \bigcirc R_{\frac{2\pi}{3}} = X_B$

$X_A \bigcirc \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = X_C$

$X_A \bigcirc X_A = I$

$X_A \bigcirc X_B = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_A \bigcirc X_C = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_B \bigcirc R_{\frac{2\pi}{3}} = X_C$

$X_B \bigcirc \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = X_A$

$X_B \bigcirc X_A = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_B \bigcirc X_B = I$

$X_B \bigcirc X_C = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_C \bigcirc R_{\frac{2\pi}{3}} = X_A$

$X_C \bigcirc \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = X_B$

$X_C \bigcirc X_A = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_C \bigcirc X_B = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$X_C \bigcirc X_C = I$

b) muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: G_Δ.

1) el conjunto es cerrado bajo la operación concatenación ($\circ$)

$$\{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}, \{X_K\} \in G_\Delta\} \; ; \; K = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow R_i \circ X_K = X_1 \in G_\Delta$$

$$R_i \circ R_i = \bar{R}_j \in G_\Delta$$

$$X_1 \circ X_2 = R_i, \; \bar{R}_j \in G_\Delta$$

$$X_K \circ R_i = X_2 \in G_\Delta$$

2) Asociativa respecto a la operación

$$\Rightarrow R_i \circ (\bar{R}_j \circ X_K) = X_K = (R_i \circ \bar{R}_j) \circ X_K$$

$$R_i \circ (X_1 \circ X_2) = (R_1 \circ X_1) \circ X_2 = I, \; \bar{R}_j$$

$$X_1 \circ (R_i \circ X_2) = (X_1 \circ R_i) \circ X_2 = I, \; X_3$$

$$R_i \circ (X_K \circ X_K) = (R_i \circ X_K) \circ X_K = R_i$$

3) Existe un elemento neutro $I \in G_\Delta$:

$$I \circ R_i = R_i$$

$$I \circ \bar{R}_j = \bar{R}_j$$

$$I \circ X_K = X_K$$

4. Existencia de un elemento inverso

Para la rotación

$R_i \circ \bar{R}_j = I$

Para la reflexión

$X_k \circ X_k = I$

c.) El conjunto de rotaciones R_i, $\bar{R}_j$ en sentido horario y antihorario respectivamente, con $\left(i, j = \frac{2\pi}{3}\right)$ forman un subgrupo cíclico de orden 3.

$I \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow R_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$\circ$	I	R_i	$\bar{R}_j$
I	I	R_i	$\bar{R}_j$
R_i	R_i	$\bar{R}_j$	I
$\bar{R}_j$	$\bar{R}_j$	I	R_i

• El conjunto de cada una de las reflexiones con la identidad forman un subgrupo de orden 2 $\{I, X_k\}$

$I \circ X_k = X_k \Rightarrow X_k \circ X_k = I$

$\circ$	I	X_k
I	I	X_k
X_k	X_k	I

d) Considere las siguientes matrices:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

muestren que forman grupo bajo la multiplicación de matrices, y que ese grupo es isomorfo a G_Δ.

X	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

1. el conjunto es cerrado bajo la multiplicación tal y como se muestra en la tabla, es decir, la multiplicación de dos cualesquiera matrices dará otra matriz que está dentro del conjunto $M=\{I,A,B,C,D,E\}$

2. el conjunto $M=\{I,A,B,C,D,E\}$ es asociativo para la Multiplicación

3. Existe un elemento neutro en el grupo bajo la multiplicación

$A\times I=A$, $B\times I=B$ | $C\times I=C$, $D\times I=D$ | $E\times I=E$

4. Existe un elemento inverso para cada elemento del grupo.

$A\times B=I$, $B\times A=I$ | $C\times C=I$, $D\times D=I$ | $E\times E=I$

Tanto para M como para G_Δ, cada uno tiene tres elementos que su inverso son ellos mismos.

M;	G_Δ;
$C \times C = I$	$X_A \circ X_A = I$
$D \times D = I$	$X_B \circ X_B = I$
$E \times E = I$	$X_C \circ X_C = I$

Tanto para M como para G_Δ, cada uno tiene tres elementos que su inverso son ellos mismos.

M;	G_Δ;
$C \times C = I$	$X_A \circ X_A = I$
$D \times D = I$	$X_B \circ X_B = I$
$E \times E = I$	$X_C \circ X_C = I$

e)

$\odot$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

$P_4 \to P_1$

$P_5 \to P_2$

$P_1 \to P_3$

$P_2 \to P_4$

$P_3 \to P_5$

$\odot$	P_0	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
P_0	P_0	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
P_4	P_4	P_5	P_0	P_2	P_3	P_1
P_5	P_5	P_0	P_4	P_3	P_1	P_2
P_1	P_1	P_3	P_2	P_0	P_5	P_4
P_2	P_2	P_1	P_3	P_4	P_0	P_5
P_3	P_3	P_2	P_1	P_5	P_4	P_0

$\circ$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	X_A	X_B	X_C
I	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	X_A	X_B	X_C
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	X_C	X_A	X_B
$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$
X_B	X_B	X_C	X_A	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$
X_C	X_C	X_A	X_B	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I

Si son un grupo isomorfo se observa que sus tablas de multiplicación son semejantes.

además tienen aspectos Algebraicos semejantes tales como tres elemento que su inverso son ellos mismos

$X_i \circ X_i = I \quad ; \quad i = 1, 2, 3$

$P_i \odot P_i = I \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$