Francisco Maria Sousa Gonçalves Paiva (a93311) MIEI

2° Parte

$0 \leq x+y \leq 1 \qquad 0 \leq 2x-y \leq 3$

$$T(u,v) = \left(\frac{u+v}{3}, \frac{2u-v}{3}\right) = \left(\frac{u}{3}+\frac{v}{3}, \frac{2u}{3}-\frac{v}{3}\right)$$

a) $JT(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

C.A.

$\left(\frac{u}{3}\right)' = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{v}{3}\right)' = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{2u}{3}\right)' = \frac{2}{3} \quad \left(-\frac{v}{3}\right)' = -\frac{1}{3}$

$\det(JT(u,v)) = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$ c.q.m

b) $x = \frac{u+v}{3}$ e $y = \frac{2u-v}{3}$

$\begin{cases} 3x = u+v \\ 3y = 2u-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-u = v \\ 3y = 2u-3x+u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3x-u \\ 3y+3x = 3u \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 2x-y \\ u = x+y \end{cases}$ e como $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq 2x-y \leq 3\}$

Substituindo [redacted] $2x-y$ por v e $x+y$ por u então temos

$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 3\}$ c.q.m.

c) T é de classe C^1 e é injetiva em D^* e como vimos anteriormente $\det(JT(u,v)) = -\frac{1}{3}$ daí ser considerada uma mudança de coordenadas. ($\det(JT(u,v)) \neq 0$)

d) $\iint_D (x+y)^2 \, dx\,dy = \iint_{D^*} \left(\frac{u+v}{3} + \frac{2u-v}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \, du\,dv$

C.A.

$(f \circ T)(u,v) = \left(\frac{u+v}{3} + \frac{2u-v}{3}\right)^2 \qquad |\det(JT(u,v))| = \frac{1}{3}$

Notação

$\iint_D f(x,y)\, d(x,y) = \iint_{D^*} (f \circ T)(u,v) \cdot |\det JT(u,v)| \, d(u,v)$

Cálculo:

$0 \leq u \leq 1 \quad e \quad 0 \leq v \leq 3$

$\int_0^3 \int_0^1 \left(\frac{3u}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \, du\,dv = \int_0^3 \int_0^1 \frac{u^2}{3} \, du\,dv =$

$= \int_0^3 \left. \frac{u^3}{9} \right|_0^1 dv = \int_0^3 \frac{1}{9} dv = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

R: $\iint_D (x+y)^2 \, dx\,dy = \frac{1}{3}$