

exercícios resolvidos para a unidade curricular

Tópicos de Matemática Discreta

mestrado integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho 2019/2020

Cláudia Mendes Araújo

Suzana Mendes Gonçalves

Capítulo 1

Noções elementares de lógica

1.1. Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

- (a) A Terra é redonda.
- (b) Hoje está sol.
- (c) $2 + x = 3$ e 2 é par.
- (d) $(25 \times 2) + 7$
- (e) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.
- (f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?
- (g) $4 < 3$
- (h) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.
- (i) A U.M. é a melhor academia do país.

resolução:

Relembremos que uma proposição é uma frase declarativa sobre a qual é possível dizer objetivamente se é verdadeira ou falsa (dado um contexto fixado à partida e ainda que possamos não ser capazes de, no momento, determinar o seu valor lógico).

Das frases apresentadas são proposições as seguintes: (a), (b), (e), (g) e (h).

As frases (d) e (f) não são proposições, uma vez que não são frases declarativas. A frase (c) não é uma proposição uma vez que a sua veracidade depende do valor atribuído a x . Relativamente à frase (h), repare-se que a afirmação é verdadeira independentemente do valor da variável x . De facto, se $x \geq 2$, sabemos que $x^3 \geq 2^3$, ou seja, $x^3 \geq 8$, o que, obviamente, implica $x^3 \geq 1$. Em relação à segunda frase, subentende-se um determinado contexto (um determinado dia num dado local). Sobre a última frase da lista, note-se que não existe uma norma reconhecida para o que é efetivamente a melhor academia.

1.2. Representando as frases *Eu gosto de leite*, *Eu não gosto de cereais* e *Eu sei fazer crepes* por p_0 , p_1 e p_2 , respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| (a) $p_0 \wedge p_1$ | (c) $\neg p_2$ | (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$ |
| (b) $p_1 \vee p_2$ | (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$ | (f) $p_2 \rightarrow p_0$ | (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$ |

resolução:

- (a) Eu gosto de leite e não gosto de cereais.
- (b) Eu gosto de leite ou sei fazer crepes.
- (c) Eu não sei fazer crepes.
- (d) Eu não gosto de leite mas gosto de cereais. [em alternativa, Não é verdade que: eu gosto de leite ou não gosto de cereais.]
- (e) Eu não gosto de leite ou gosto de cereais.
- (f) Se eu sei fazer crepes então eu gosto de leite.
- (g) Eu sei fazer crepes e gosto de leite ou eu não gosto de cereais.
- (h) Eu sei fazer crepes e eu gosto de leite ou não gosto de cereais.

1.3. Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, $3+1=4$ e *24 é divisível por 8* representadas, respetivamente, por p_0 , p_1 e p_2 .

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

- (i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.
- (ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.
- (iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|--|
| (i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ | (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ | (iii) $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_0)$ |
|---------------------------|-----------------------------|--|

resolução:

- (a)
 - (i) $\neg p_1 \wedge p_2$
 - (ii) $\neg(\neg p_0 \vee p_1)$
 - (iii) $p_1 \rightarrow \neg p_2$
- (b)
 - (i) 7 é um inteiro par ou 24 não é divisível por 8.
 - (ii) 7 não é um inteiro par ou $3 + 1 \neq 4$. [em alternativa, Não é verdade que: 7 é um inteiro par e $3 + 1 = 4$.]
 - (iii) Se 24 não é divisível por 8, então $3 + 1 \neq 4$ ou 7 é um inteiro par.

1.4. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto \mathcal{F}^{CP} :

- | | |
|---|--|
| (a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$ | (d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp)$ |
| (b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$ | (e) (\perp) |
| (c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($ | (f) $((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp))$ |

resolução:

Recordemos que o conjunto \mathcal{F}^{CP} das fórmulas do Cálculo Proposicional é o conjunto definido indutivamente pelas seguintes regras:

- (F_1) \perp é uma fórmula do CP;
- (F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula do CP;
- (F_3) se φ é uma fórmula do CP, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula do CP;
- (F_4) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula do CP;
- (F_5) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula do CP;
- (F_6) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \rightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP;
- (F_7) se φ, ψ são fórmulas do CP, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula do CP.

Nesta resolução vamos assumir a convenção de que os parêntesis extremos e os parêntesis à volta de negações podem ser omitidos, por simplificação de escrita.

(a) $(\neg(p_1 \vee p_2)) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

- ① $p_1, p_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2 ;
- ② $(p_1 \vee p_2) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_5 e por ①;
- ③ $(\neg(p_1 \vee p_2)) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ②.

(b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6)) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

- ① $p_5, p_6 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2 ;
- ② $(\neg p_5), (\neg p_6) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ①;
- ③ $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6)) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_6 e por ②.

(c) Nesta palavra existe um número distinto de parêntesis direitos e de parêntesis esquerdos, o que nunca acontece numa fórmula do Cálculo Proposicional. Portanto, $((p_3 \wedge p_1) \vee (\notin \mathcal{F}^{CP}$.

(d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp) \in \mathcal{F}^{CP}$, uma vez que:

- ① $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_1 ;
- ② $p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_2 ;
- ③ $\neg p_0 \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_3 e por ②;
- ④ $(p_0 \wedge \neg p_0) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_4 e por ② e ③;
- ⑤ $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp) \in \mathcal{F}^{CP}$ pela regra F_6 e por ④ e ①.

(e) Note-se que não existe nenhuma regra, na definição indutiva de \mathcal{F}^{CP} , que introduza parêntesis sem introduzir um dos conetivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ou \leftrightarrow . Assim, $(\perp) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

(f) Nesta palavra existe um número distinto de parêntesis direitos e de parêntesis esquerdos, o que nunca acontece numa fórmula do Cálculo Proposicional.

Logo, $((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)) \notin \mathcal{F}^{CP}$.

1.5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

- (a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$
- (b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.
- (c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.
- (d) $\sqrt{530} < 25 \rightarrow 530 < 25^2$
- (e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

resolução:

(a) Representemos por p_0 a proposição simples $e < 4$ e por p_1 a proposição simples $e^2 < 9$. A proposição dada é, assim, representada por $p_0 \wedge p_1$. Sabemos que a proposição é verdadeira se e só se as proposições p_0 e p_1 são ambas verdadeiras. Como $e \sim 2,7$, é verdade que $e < 4$. Além disso, sendo $e < 3$, $e^2 < 3^2 = 9$. Portanto, a afirmação (a) é verdadeira.

(b) Representemos por p_0 a proposição “1 é solução da equação $x^3 - 1 = 0$ ” e por p_1 a proposição “ -1 é solução da equação $x^3 - 1 = 0$ ”. A proposição dada, representada por $p_0 \wedge p_1$, é verdadeira se e somente se p_0 e p_1 são ambas verdadeiras. Ora, $1^3 - 1 = 0$, pelo que p_0 é verdadeira, mas $(-1)^3 - 1 = -2$, donde p_1 é falsa. Portanto, -1 não é solução da equação $x^3 - 1 = 0$ e a afirmação é falsa.

(c) Representemos por p_0 a proposição “64 é múltiplo de 3” e por p_1 a proposição “64 é múltiplo de 4”. A proposição dada é, então, representada por $p_0 \vee p_1$ e é verdadeira se e somente se pelo menos uma das proposições p_0 , p_1 é verdadeira. Sabemos que 64 não é múltiplo de 3 mas é múltiplo de 4. Logo, a afirmação é verdadeira.

(d) Representemos por p_0 a proposição $\sqrt{530} < 25$ e por p_1 a proposição $530 < 25^2$. A proposição dada é, assim, representada por $p_0 \rightarrow p_1$. Sabemos que, para mostrar que $p_0 \rightarrow p_1$ é verdadeira, devemos assumir a veracidade de p_0 e mostrar que, nesse caso, também p_1 é verdadeira. Admitamos, então, que $\sqrt{530} < 25$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $(\sqrt{530})^2 < 25^2$, ou seja, $530 < 25^2$. Portanto, se p_0 é verdadeira, também p_1 é verdadeira. Verificámos, deste modo, que a afirmação dada é verdadeira.

(e) Representemos por p_0 a proposição “ 7^4 é par” e por p_1 a proposição “ $7^4 + 1$ é ímpar”. Note-se que p_1 pode ser reescrita na forma “ $(7^4 + 1) - 1$ é par”, uma vez que um inteiro é ímpar se e somente se o seu antecessor é par. Assim, p_0 e p_1 representam frases em que se afirma precisamente o mesmo. Por isso, os valores lógicos de p_0 e de p_1 são iguais. A afirmação dada é representada por $p_0 \leftrightarrow p_1$. Como os valores lógicos de p_0 e p_1 são iguais, $p_0 \leftrightarrow p_1$ é uma proposição verdadeira.

1.6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$

(i) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$

(j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \rightarrow p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$

resolução:

(a)

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$
1	0	1
0	1	1

(b)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

(c)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

(d)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

(e)

p_0	p_1	$\neg p_1$	$p_0 \rightarrow \neg p_1$	$\neg(p_0 \rightarrow \neg p_1)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

(f)

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

(g)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \rightarrow p_1$	$\neg p_0 \vee p_1$	$(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

(h)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_0$	$(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

(i)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

(j)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$	$\neg(p_1 \rightarrow p_2)$	$p_0 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

(k)

p_0	p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_0 \leftrightarrow \neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0

(l)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$	$p_0 \wedge p_1$	$(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$	$(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $p_0 \vee p_2$ | (b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ | (c) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ |
| (d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$ | (e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ | (f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$ |
| (g) $p_2 \rightarrow p_1$ | (h) $p_0 \leftrightarrow p_2$ | (i) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$ |
| (j) $p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$ | (k) $((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ | (l) $(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$ |

resolução:

Sabemos que os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem nas fórmulas consideradas são os seguintes:

p_0	p_1	p_2	p_3
1	0	0	1

Em cada uma das alíneas, consideraremos, apenas, a linha da tabela de verdade da fórmula correspondente a esta combinação de valores lógicos.

(a)

p_0	p_2	$p_0 \vee p_2$
1	0	1

A fórmula $p_0 \vee p_2$ é verdadeira.

(b)

p_1	p_2	p_3	$p_2 \wedge p_3$	$(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$
0	0	1	0	0

A fórmula $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$ é falsa.

(c)

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$
1	0	0	1

A fórmula $\neg(p_0 \wedge p_1)$ é verdadeira.

(d)

p_2	p_3	$\neg p_2$	$\neg p_3$	$\neg p_3 \vee \neg p_2$
0	1	1	0	1

A fórmula $\neg p_3 \vee \neg p_2$ é verdadeira.

(e)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_3 \wedge p_0$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$
1	0	0	1	1	0	1

A fórmula $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$ é verdadeira.

(f)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_0 \wedge p_1$	$p_3 \vee (p_0 \wedge p_1)$	$p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$
1	0	0	1	0	1	1

A fórmula $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$ é verdadeira.

(g)

p_1	p_2	$p_2 \rightarrow p_1$
0	0	1

A fórmula $p_2 \rightarrow p_1$ é verdadeira.

(h)

p_0	p_2	$p_0 \leftrightarrow p_2$
1	0	0

A fórmula $p_0 \leftrightarrow p_2$ é falsa.

(i)

p_0	p_1	p_3	$p_1 \leftrightarrow p_3$	$(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$
1	0	1	0	0

A fórmula $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$ é falsa.

(j)

p_0	p_3	$\neg p_3$	$p_0 \rightarrow \neg p_3$	$p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$
1	1	0	0	0

A fórmula $p_3 \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_3)$ é falsa.

(k)

p_0	p_1	p_3	$\neg p_0$	$p_1 \rightarrow p_3$	$(p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3$	$((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$
1	0	1	0	1	1	0

A fórmula $((p_1 \rightarrow p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$ é falsa.

(l)

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_3 \rightarrow p_0$	$p_2 \vee p_1$	$\neg(p_2 \vee p_1)$	$(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$
1	0	0	1	1	0	1	1

A fórmula $(p_3 \rightarrow p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$ é verdadeira.

1.8. Admitindo que p_0 , p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

- (a) $p_0 \wedge p_1$
- (b) $p_0 \vee p_1$
- (c) $p_0 \rightarrow p_1$
- (d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

resolução:

Sabemos que os valores lógicos das variáveis proposicionais p_0 e p_1 são distintos, uma vez que a fórmula $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa. Assim, uma dessas variáveis proposicionais é verdadeira e a outra falsa.

- (a) Sendo uma das variáveis proposicionais p_0 , p_1 falsa, podemos afirmar que $p_0 \wedge p_1$ é falsa.
- (b) Dado que uma das variáveis proposicionais p_0 , p_1 é verdadeira, podemos concluir que $p_0 \vee p_1$ é verdadeira.
- (c) Sabemos que as combinações possíveis de valores lógicos de p_0 e p_1 são as seguintes:

p_0	p_1
1	0
0	1

Assim, o valor lógico de $p_0 \rightarrow p_1$ em cada um desses casos é descrito na tabela que se segue:

p_0	p_1	$p_0 \rightarrow p_1$
1	0	0
0	1	1

Podemos, assim, afirmar que o valor lógico de $p_0 \rightarrow p_1$ é igual ao de p_1 .

- (d) As combinações possíveis de valores lógicos de p_0 , p_1 e p_2 são

p_0	p_1	p_2
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

pelo que o valor lógico de $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ em cada um desses casos é descrito na tabela seguinte:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \wedge p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1

Podemos, assim, afirmar que o valor lógico de $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ é contrário ao de p_2 .

1.9. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

- (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.
- (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.
- (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.
- (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.
- (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.
- (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.
- (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.
- (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

resolução:

Representemos por p_0, p_1, p_2 e p_3 , respetivamente, as seguintes frases declarativas simples: “O Manuel gosta da cor azul”, “O Manuel gosta da cor vermelha”, “O Manuel gosta da cor amarela” e “O Manuel gosta da cor verde”. Sabemos que os valores lógicos de p_0, p_1, p_2 e p_3 são como se descreve na tabela que se segue:

p_0	p_1	p_2	p_3
1	0	1	0

Em cada uma das alíneas, apresentemos a fórmula que representa a proposição dada e estudemos o seu valor lógico, considerando as anteriores frases declarativas simples e a sua representação por p_0, p_1, p_2 e p_3 , assim como os respetivos valores lógicos.

- (a) $p_0 \wedge p_1$

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$
1	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

(b) $(p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_1$

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$p_2 \vee p_3$	$(p_2 \vee p_3) \wedge \neg p_1$
0	1	0	1	1	1

A proposição é verdadeira.

(c) $p_1 \vee (p_0 \wedge p_2)$

p_0	p_1	p_2	$p_0 \wedge p_2$	$p_1 \vee (p_0 \wedge p_2)$
1	0	1	1	1

Podemos, assim, afirmar que a proposição é verdadeira.

(d) $(p_0 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$

p_0	p_1	p_2	p_3	$p_0 \vee p_2$	$p_1 \vee p_3$	$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
1	0	1	0	1	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

(e) $p_0 \rightarrow p_2$

p_0	p_2	$p_0 \rightarrow p_2$
1	1	1

Logo, a proposição é verdadeira.

(f) $p_2 \leftrightarrow p_1$

p_1	p_2	$p_2 \leftrightarrow p_1$
0	1	0

Concluimos, então, que a proposição é falsa.

(g) $p_3 \wedge (p_2 \rightarrow p_0)$

p_0	p_2	p_3	$p_2 \rightarrow p_0$	$p_3 \wedge (p_2 \rightarrow p_0)$
1	1	0	1	0

Podemos, assim, afirmar que a proposição é falsa.

(h) $(p_2 \rightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_1)$

p_1	p_2	p_3	$p_2 \rightarrow p_3$	$p_2 \leftrightarrow p_1$	$(p_2 \rightarrow p_3) \vee (p_2 \leftrightarrow p_1)$
0	1	0	0	0	0

A proposição é, portanto, falsa.

1.10. Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

- (a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.
- (b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

resolução:

(a) Representemos por p_0 , p_1 e p_2 , respetivamente, as frases simples “Há vida em Marte”, “Zuzarte gosta de tarte” e “Zuzarte é um marciano”. As afirmações apresentadas podem ser expressas, então, por

$$\varphi = p_0 \rightarrow p_1$$

$$\psi = p_2 \vee \neg p_1$$

$$\sigma = \neg p_2 \wedge p_0$$

(b) Assumamos que as três afirmações podem ser simultaneamente verdadeiras e procuremos uma contradição. Sendo σ verdadeira, podemos afirmar que p_2 é falsa e p_0 é verdadeira. Nesse caso, dado que ψ também é verdadeira, podemos concluir que p_1 é falsa. Mas, assim, φ é falsa, o que contradiz a nossa assumpção de que as três afirmações são simultaneamente verdadeiras. Provámos, deste modo, que as três afirmações não podem ser simultaneamente verdadeiras.

NOTA: Em alternativa, podemos construir uma tabela conjunta para as três fórmulas e verificar que para nenhuma combinação possível de valores lógicos de p_0, p_1 e p_2 se tem φ, ψ e σ simultaneamente verdadeiras

p_0	p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	φ	ψ	σ
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0

1.11. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$

(d) $(p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$

(b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$

(e) $(p_0 \vee \neg p_0) \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$

(c) $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$

resolução:

Recordemos que uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem, e uma contradição é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem. Através da tabela de verdade de cada fórmula, podemos, em cada alínea, decidir se a fórmula em questão é uma tautologia, uma contradição ou nem tautologia nem contradição.

(a)

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

A fórmula $p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ é, portanto, uma tautologia.

(b)

p_0	p_1	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0

A fórmula $\neg(p_0 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)$ não é nem tautologia nem contradição.

(c)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_0$	$(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

A fórmula $(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0)$ é uma tautologia.

(d)

p_0	p_1	$(p_0 \vee p_1)$	$p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)$	$(p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

A fórmula $(p_0 \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$ não é nem tautologia nem contradição.

(e)

p_0	$\neg p_0$	$p_0 \vee \neg p_0$	$p_0 \wedge \neg p_0$	$(p_0 \vee \neg p_0) \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0

A fórmula $(p_0 \vee \neg p_0) \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$ é uma contradição.

(f)

p_0	p_1	$p_1 \rightarrow p_0$	$p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$	$\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$
1	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

A fórmula $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0))$ é uma contradição.

1.12. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \wedge p_1); \neg p_0 \wedge \neg p_1$ (b) $p_0 \rightarrow p_1; p_1 \rightarrow p_0$ (c) $\neg(p_0 \rightarrow p_1); p_0 \wedge (p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$ (d) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2); \neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0$

resolução:

Sabemos que duas fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Assim, para cada par de fórmulas φ e ψ , construímos, em cada alínea, a tabela de verdade de $\varphi \leftrightarrow \psi$ e verificamos se essa fórmula assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

(a)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$p_0 \wedge p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1)$	$\neg p_0 \wedge \neg p_1$	$\neg(p_0 \wedge p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \wedge \neg p_1)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1

(b)

p_0	p_1	$p_0 \rightarrow p_1$	$p_1 \rightarrow p_0$	$(p_0 \rightarrow p_1) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

(c) Sejam $\varphi = \neg(p_0 \rightarrow p_1)$ e $\psi = p_0 \wedge (p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0))$.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \rightarrow p_1$	φ	$p_0 \wedge \neg p_0$	$p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \neg p_0)$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1

NOTA: Em alternativa, podemos apresentar uma sequência de equivalências lógicas que mostre que $\varphi \Leftrightarrow \psi$:

$$\begin{aligned} \psi &\Leftrightarrow p_0 \wedge (p_1 \rightarrow \perp) \quad [\text{pois } p_0 \wedge \neg p_0 \Leftrightarrow \perp] \\ &\Leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_1 \quad [\text{uma vez que } \sigma \rightarrow \perp \Leftrightarrow \neg \sigma, \text{ para qualquer } \sigma \in \mathcal{F}^{CP}] \\ &\Leftrightarrow \varphi \quad [\text{pois } \neg(\sigma \rightarrow \tau) \Leftrightarrow \sigma \wedge \neg \tau, \text{ para quaisquer } \sigma, \tau \in \mathcal{F}^{CP}] \end{aligned}$$

(d) Sejam $\varphi = p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)$ e $\psi = \neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0$.

[illegible]

Pela tabela de verdade, podemos concluir que a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia e, portanto, as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.

NOTA: Em alternativa, podemos apresentar uma sequência de equivalências lógicas que mostre que $\varphi \leftrightarrow \psi$:

$$\begin{aligned}\varphi &\Leftrightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \neg p_0 \quad [\text{pois } \sigma \rightarrow \tau \Leftrightarrow \neg\tau \rightarrow \neg\sigma, \text{ para quaisquer } \sigma, \tau \in \mathcal{F}^{CP}] \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p_2 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow \neg p_0 = \psi\end{aligned}$$

1.13. Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conectivos \wedge e \neg .

resolução:

Pela dupla negação, sabemos que

$$p_0 \vee \neg p_1 \Leftrightarrow \neg\neg(p_0 \vee \neg p_1)$$

e, pelas leis de De Morgan, temos

$$\neg\neg(p_0 \vee \neg p_1) \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \wedge \neg\neg p_1).$$

Assim, novamente pela dupla negação e ainda pela transitividade da relação de equivalência lógica,

$$p_0 \vee \neg p_1 \Leftrightarrow \neg(\neg p_0 \wedge p_1)$$

e esta última fórmula envolve apenas os conectivos \wedge e \neg .

1.14. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

- (a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.
- (b) 1000000 não é o maior número natural.
- (c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.
- (d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

resolução:

$$(a) \exists_{x \in \mathbb{N}} x^3 = 28$$

$$(b) \exists_{x \in \mathbb{N}} x > 1000000$$

$$(c) \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}} n + (n + 1) + (n + 2) = 3k$$

$$(c) \forall_{x \in \mathbb{Q}} \forall_{y \in \mathbb{Q}} (x \neq y \rightarrow \exists_{z \in \mathbb{Q}} (x < z < y \vee y < z < x))$$

1.15. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

- (a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.
- (b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.
- (c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.
- (d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

resolução:

Representemos por H um Hobbit arbitrário e por $p(H)$ o predicado “ H é criatura pacífica”. Será seguramente aceitável assumir que “ H é criatura conflituosa” corresponde à negação de $p(H)$. Posto isto, a afirmação dada pode ser reescrita na forma

$$\forall_H p(H)$$

e a sua negação corresponderá a

$$\exists_H \neg p(H),$$

ou seja, “Existe pelo menos um Hobbit que é criatura conflituosa”. Assim, a proposição da alínea (c) equivale, claramente, à negação da proposição dada. Relativamente às restantes proposições, note-se que a da alínea (a) pode ser reescrita como

$$\forall_H \neg p(H),$$

a da alínea (b) como

$$\neg(\forall_H p(H))$$

e a da alínea (d) como

$$\neg(\forall_H \neg p(H)).$$

Assim, destas três, apenas a proposição da alínea (b) equivale à negação da proposição dada.

1.16. Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

- (a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.
- (b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.
- (c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real x .
- (d) Existe um inteiro n tal que n^2 é um número perfeito.

resolução:

- (a) Existe pelo menos um OVNI que não tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.
- (b) Todos os morcegos pesam menos de 50 quilogramas.
- (c) Existe pelo menos um número real x que não verifica a inequação $x^2 - 2x > 0$.
- (d) Para qualquer inteiro n , n^2 não é um número perfeito.

1.17. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

- (a) $\forall x \exists y \ x + y = 0$
- (b) $\exists x \forall y \ x + y = 0$
- (c) $\exists x \forall y \ x + y = y$
- (d) $\forall x \ (x > 0 \rightarrow \exists y \ xy = 1)$

Para cada proposição p acima (i) indique se p é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

resolução:

- (a)
 - (i) Em p afirma-se que, para todo o real x , existe pelo menos um real y tal que $x + y = 0$. Ora, dado um real x , basta tomar $y = -x$. A afirmação p é, portanto, verdadeira.
 - (ii) Temos que

$$\begin{aligned}\neg p &\Leftrightarrow \exists x \neg (\exists y \ x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \forall y \ \neg (x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \forall y \ x + y \neq 0\end{aligned}$$

Assim, $\exists x \forall y \ x + y \neq 0$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo \neg .

- (b)
 - (i) Em p afirma-se que existe um real x tal que, para todo o real y , se tem $x + y = 0$. Assim, para esse x , teríamos, por exemplo, $x + 1 = 0$ e $x + 2 = 0$, o que é impossível. A afirmação p é, portanto, falsa.
 - (ii) Temos que

$$\begin{aligned}\neg p &\Leftrightarrow \forall x \neg (\forall y \ x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \exists y \ \neg (x + y = 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \exists y \ x + y \neq 0\end{aligned}$$

Assim, $\forall x \exists y \ x + y \neq 0$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo \neg .

(c)

(i) Em p afirma-se que existe um real x tal que, para todo o real y , se tem $x + y = y$. Consideremos $x = 0$. Para esse valor de x , temos que $x + y = 0 + y = y$, pelo que a afirmação p é verdadeira.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned}\neg p &\Leftrightarrow \forall x \neg (\forall y x + y = y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \exists y \neg (x + y = y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \exists y x + y \neq y\end{aligned}$$

Assim, $\forall x \exists y x + y \neq y$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo \neg .

(d)

(i) Em p afirma-se que, para todo o real x positivo, existe um real y tal que $x + y = y$. Para cada real positivo x , considere-se $y = \frac{1}{x}$. Temos $xy = x \times \frac{1}{x} = 1$. A afirmação p é verdadeira.

(ii) Temos que

$$\begin{aligned}\neg p &\Leftrightarrow \exists x \neg (x > 0 \rightarrow \exists y xy = 1) \\ &\Leftrightarrow \exists x (x > 0 \wedge \neg (\exists y xy = 1)) \\ &\Leftrightarrow \exists x (x > 0 \wedge \forall y \neg (xy = 1)) \\ &\Leftrightarrow \exists x (x > 0 \wedge \forall y xy \neq 1)\end{aligned}$$

Assim, $\exists x (x > 0 \wedge \forall y xy \neq 1)$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do conetivo \neg .

1.18. Considerando que p representa a proposição $\forall a \in A \exists b \in B (a^2 = b \vee a + b = 0)$,

(a) verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 4\}$.

(b) indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p .

resolução:

(a) Em p afirma-se que, para todo o elemento a de A , existe pelo menos um elemento b de B tal que $a^2 = b \vee a + b = 0$. Verifiquemos, então, para cada valor a de A , a existência de um tal b em B .

$a = -2$:

$$\begin{aligned}a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow (-2)^2 = b \vee -2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 4 \vee b = 2\end{aligned}$$

Como $4 \in B$, podemos afirmar que $\exists b \in B (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$a = 0$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 0^2 = b \vee 0 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \vee b = 0 \end{aligned}$$

Como $0 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$a = 1$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 1^2 = b \vee 1 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \vee b = -1 \end{aligned}$$

Como $-1 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

$a = 2$:

$$\begin{aligned} a^2 = b \vee a + b = 0 &\Leftrightarrow 2^2 = b \vee 2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 4 \vee b = -2 \end{aligned}$$

Como $4 \in B$, podemos afirmar que $\exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)$.

Assim, para todo $a \in A$, $\exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)$. Logo, a proposição p é verdadeira.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \exists_{a \in A} \neg (\exists_{b \in B} (a^2 = b \vee a + b = 0)) \\ &\Leftrightarrow \exists_{a \in A} \forall_{b \in B} \neg (a^2 = b \vee a + b = 0) \\ &\Leftrightarrow \exists_{a \in A} \forall_{b \in B} (a^2 \neq b \wedge a + b \neq 0) \end{aligned}$$

Assim, $\exists_{a \in A} \forall_{b \in B} (a^2 \neq b \wedge a + b \neq 0)$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem ocorrências do símbolo de negação.

1.19. Considerando que p representa a proposição

$$\exists_{y \in A} \forall_{x \in A} (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)),$$

(a) dê exemplo de um universo A não vazio onde:

- (i) a proposição p é verdadeira;
- (ii) a proposição p é falsa.

(b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

resolução:

(a) Em p afirma-se que existe um elemento y de A tal que, para qualquer outro elemento x de A , se tem $xy > 0$ ou $x^2 + y = 0$.

(i) Seja $A = \{1, 2\}$. Consideremos $y = 1$. O único elemento x de A distinto de y é $x = 2$. Temos que $xy = 2 > 0$, pelo que $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira para esses valores de x e y . Assim, para este universo A , a proposição p é verdadeira.

OBS: Repare-se que, se A for apenas formado por reais positivos, sabemos que, para um qualquer elemento y de A , se terá $xy > 0$ para todos os restantes elementos x de A , o que garantirá que p é verdadeira em A . Mas existem outros exemplos de universos A , em que nem todos os elementos são reais positivos mas p é verdadeira. Consideremos, por exemplo, $A = \{-2, -1, 1\}$. Consideremos $y = -1$. Os elementos de A distintos de y são -2 e 1 . Para $x = -2$, temos que $xy = 2 > 0$, pelo que $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira. Para $x = 1$, temos que $xy = -1 < 0$, mas $x^2 + y = 1^2 + (-1) = 0$, donde $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição verdadeira. Assim, para este universo A , a proposição p é verdadeira.

(ii) Seja $A = \{-1, 2\}$. Vejamos que não existe $y \in A$ tal que $\forall x \in A (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))$. Temos apenas dois valores possíveis para y : -1 ou 2 . Consideremos $y = -1$. O único elemento x de A distinto de y é $x = 2$. Temos que $xy = -2 < 0$ e $x^2 + y = 2^2 + (-1) = 3 \neq 0$. Assim, para $y = -1$ e $x = 2$, $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição falsa. Portanto, y não pode ser -1 . Consideremos, agora, $y = 2$. O único elemento x de A distinto de y é $x = -1$. Temos que $xy = -2 < 0$ e $x^2 + y = (-1)^2 + 2 = 3 \neq 0$. Assim, para $y = 2$ e $x = -1$, $xy > 0 \vee x^2 + y = 0$ é uma proposição falsa. Portanto, y não pode ser 2 . Logo, não existe $y \in A$ tal que $\forall x \in A (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))$. Assim, para este universo A , a proposição p é falsa.

(b) Temos que

$$\begin{aligned} \neg p &\Leftrightarrow \forall y \in A \neg (\forall x \in A (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in A \exists x \in A \neg (x \neq y \rightarrow (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in A \exists x \in A (x \neq y \wedge \neg (xy > 0 \vee x^2 + y = 0)) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in A \exists x \in A (x \neq y \wedge xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0) \end{aligned}$$

Assim, $\forall y \in A \exists x \in A (x \neq y \wedge xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0)$ é uma proposição equivalente a $\neg p$ e sem recorrer ao conetivo *negação*.

1.20. Averigue a validade dos seguintes argumentos:

- (a) O João afirma: “Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão”. No dia seguinte o João comentou: “Ontem não fui ao cinema.” Em resposta, a Joana concluiu: “Então viste um filme na televisão!”.
- (b) A Maria afirmou: “Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia”. No dia seguinte a Maria comentou: “Ontem esteve calor e fui à praia”. Em resposta, a Rita concluiu: “Então encontrei a Alice”.
- (c) O Tiago disse: “Vou almoçar no bar ou na cantina”. E acrescentou: “Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema”. Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: “O Tiago foi almoçar à cantina”.

resolução:

(a) Representemos as frases declarativas simples “Hoje vou ao cinema” e “Fico em casa a ver um filme na televisão” por p_0 e p_1 , respetivamente. A primeira afirmação de João pode ser traduzida por $p_0 \vee p_1$. A segunda afirmação de João pode ser representada por $\neg p_0$ e a conclusão de Joana por p_1 . O argumento é, então representado por

$$((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \rightarrow p_1$$

O argumento será válido se esta última fórmula for uma tautologia, o que podemos averiguar através de uma tabela de verdade.

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \vee p_1$	$(p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0$	$((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \rightarrow p_1$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Como podemos comprovar na tabela acima, a fórmula $((p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_0) \rightarrow p_1$ é sempre verdadeira, independentemente das variáveis proposicionais que nela ocorrem. Portanto, é uma tautologia e o argumento apresentado é válido.

OBS: Outra forma de verificar se o argumento é válido é averiguar a veracidade da conclusão assumindo a veracidade de todas as premissas. Admitindo, então, que $p_0 \vee p_1$ e $\neg p_0$ são ambas proposições verdadeiras, averiguemos se p_1 é necessariamente verdadeira. Ora, se o valor lógico de $\neg p_0$ é 1, então o valor lógico de p_0 é 0. Assim, como o valor lógico de $p_0 \vee p_1$ é 1, segue-se que o valor lógico de p_1 tem de ser 1. Podemos, portanto, afirmar que o argumento é válido.

(b) Representemos as frases declarativas simples “encontrar a Alice”, “estar calor” e “ir à praia” por p_0 , p_1 e p_2 , respetivamente. A primeira afirmação de Maria pode ser traduzida por $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$. A segunda afirmação de Maria pode ser representada por $p_1 \wedge p_2$ e a conclusão de Rita por p_0 . O argumento é, então representado por

$$(((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow p_0$$

Assumindo que as premissas são ambas verdadeiras, sabemos que os valores lógicos de $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$ e $p_1 \wedge p_2$ são iguais a 1. Sendo 1 o valor lógico de $p_1 \wedge p_2$, sabemos que os valores lógicos de p_1 e p_2 são ambos 1. Com p_2 verdadeira, nada podemos garantir sobre o valor lógico de p_0 a partir da veracidade de $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$. De facto, p_0 tanto pode ser verdadeira como falsa, pelo que o argumento não é válido.

OBS: Claramente, o exercício pode ser resolvido fazendo a tabela de verdade da fórmula $(((p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow p_0$, comprovando-se que não é uma tautologia.

(c) Representemos as frases declarativas simples “Vou almoçar no bar”, “Vou almoçar na cantina”, “Fico mal disposto” e “Vou ao cinema” por p_0 , p_1 , p_2 e p_3 , respetivamente. A primeira afirmação de Tiago pode ser traduzida por $p_0 \vee p_1$. A segunda afirmação de Tiago pode ser representada

por $p_0 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)$. A informação de que Joana encontrou Tiago no cinema pode ser traduzida por p_3 e a conclusão de Joana por p_1 . O argumento é, então representado por

$$(((p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))) \wedge p_3) \rightarrow p_1$$

Assumindo que as três premissas são simultaneamente verdadeiras, sabemos que os valores lógicos de $p_0 \vee p_1$, de $p_0 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)$ e de p_3 são iguais a 1. Pretendemos verificar se, nesse caso, p_1 é necessariamente verdadeira. Sendo 1 o valor lógico de p_3 e de $p_0 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3)$, segue-se que p_0 tem de ser falsa. Assim, dado que $p_0 \vee p_1$ é verdadeira, podemos afirmar que p_1 tem de ser verdadeira. Logo, o argumento é válido.

OBS: O exercício pode ser resolvido fazendo a tabela de verdade da fórmula $((p_0 \vee p_1) \wedge (p_0 \rightarrow (p_2 \wedge \neg p_3))) \wedge p_3 \rightarrow p_1$, comprovando-se que é uma tautologia.

1.21. Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é um número par.

resolução:

Sejam n, m dois inteiros ímpares. Então, existem inteiros k, r tais que

$$n = 2k + 1$$

e

$$m = 2r + 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n + m &= (2k + 1) + (2r + 1) \\ &= 2k + 2r + 2 \\ &= 2(k + r + 1). \end{aligned}$$

Como $k, r \in \mathbb{Z}$, segue-se que $k + r + 1 \in \mathbb{Z}$. Assim, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $n + m = 2s$ (basta considerar $s = k + r + 1$), pelo que $n + m$ é par.

1.22. Mostre que o produto de números inteiros ímpares é um número ímpar.

resolução:

Sejam n, m dois inteiros ímpares. Então, existem inteiros k, r tais que

$$n = 2k + 1$$

e

$$m = 2r + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} nm &= (2k+1)(2r+1) \\ &= 4kr + 2k + 2r + 1 \\ &= 2(2kr + k + r) + 1. \end{aligned}$$

Como $k, r \in \mathbb{Z}$, segue-se que $2kr + k + r \in \mathbb{Z}$. Assim, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $nm = 2s + 1$ (basta considerar $s = 2kr + k + r$), pelo que nm é ímpar.

1.23. Mostre que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

resolução:

Admitamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$. Então, $n - 3n = 2 - 5$, ou seja, $-2n = -3$. Logo, $n = \frac{3}{2}$, o que é uma contradição pois $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. Portanto, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

1.24. Seja n um número natural ímpar. Mostre que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

resolução:

Seja n um natural ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 + 8n - 1 &= (2k+1)^2 + 8(2k+1) - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 16k + 8 - 1 \\ &= 4k^2 + 20k + 8 \\ &= 4(k^2 + 5k + 2). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $k^2 + 5k + 2 \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 8n - 1 = 4s$ (basta considerar $s = k^2 + 5k + 2$), pelo que $n^2 + 8n - 1$ é múltiplo de 4.

1.25. Mostre que, para todo o natural n , se $3n + 5$ é ímpar, então n é par.

resolução:

A prova segue por contraposição. Pretende-se provar que

$$3n + 5 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ par}$$

ou, equivalentemente, que

$$\neg(n \text{ par}) \Rightarrow \neg(3n + 5 \text{ ímpar}),$$

isto é,

$$n \text{ ímpar} \Rightarrow 3n + 5 \text{ par}.$$

Admitamos que n é ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} 3n + 5 &= 3(2k + 1) + 5 \\ &= 6k + 8 \\ &= 2(3k + 4). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $3k + 4 \in \mathbb{N}$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $3n + 5 = 2s$ (basta considerar $s = 3k + 4$), pelo que $3n + 5$ é par.

1.26. Prove que, para todo o natural n , n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

resolução:

Mostremos a dupla implicação

$$n \text{ ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ ímpar}$$

e

$$n^2 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ ímpar}.$$

A prova que apresentamos da primeira implicação é uma prova direta, ao passo que a prova que apresentamos para a segunda implicação é uma prova por contraposição.

(\Rightarrow) Admitamos que n é ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}_0$, segue-se que $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0$. Assim, existe $s \in \mathbb{N}_0$ tal que $n^2 = 2s + 1$ (basta considerar $s = 2k^2 + 2k$), pelo que n^2 é ímpar.

(\Leftarrow) A contrarrecíproca de

$$n^2 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ ímpar}.$$

é

$$\neg(n \text{ ímpar}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ ímpar}),$$

ou seja,

$$n \text{ par} \Rightarrow n^2 \text{ par}.$$

Admitamos que n é par. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Logo,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2(2k^2). \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$, segue-se que $2k^2 \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 2s$ (basta considerar $s = 2k^2$), pelo que n^2 é par.

1.27. Prove que, dado um número natural n , se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

resolução:

Seja n um natural múltiplo de 6. Então, existe um natural k tal que $n = 6k$. Assim, $n = 2r$, onde $r = 3k \in \mathbb{N}$, pelo que n é múltiplo de 2. Por outro lado, temos que $n = 3s$, onde $s = 2k \in \mathbb{N}$, e, portanto, n é múltiplo de 3.

1.28. Encontre um contraexemplo para cada das afirmações seguintes:

- (a) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.
- (b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.
- (c) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

resolução:

- (a) Consideremos $p = 3$ e $q = 5$, ambos primos. Temos que $n = p^2 + q^2 = 9 + 25 = 34$ não é primo.
- (b) Consideremos $a = 3$ e $b = -4$. Temos que $a > b$ mas $a^2 \not> b^2$
- (c) Consideremos $x = -1$. Temos que $x^4 = 1$ e $x \neq 1$.

Capítulo 2

Teoria elementar de conjuntos

2.1. Considere o conjunto $A = \{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

- (a) $\{a \in A \mid a^2 \in \mathbb{Z}\}$ (d) $\{a \in A \mid a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$
 (b) $\{a^2 \in \mathbb{R} \mid a \in A \wedge a^2 \in A\}$ (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\}$
 (c) $\{b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in A \quad b = a^2\}$ (f) $\{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad b^2 = a\}$

resolução:

(a) Seja $B = \{a \in A \mid a^2 \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto B é o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que $a^2 \in \mathbb{Z}$, ou seja, dos elementos de A cujo quadrado é um número inteiro.

Na seguinte tabela listamos os elementos de A e os correspondentes quadrados e averiguamos se estes pertencem ou não a \mathbb{Z} .

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a^2 \in \mathbb{Z}$	sim	sim	não	sim	sim	não

Assim, $B = \{1, -1, 2, 0\}$.

(b) Seja $C = \{a^2 \in \mathbb{R} \mid a \in A \wedge a^2 \in A\}$. O conjunto C é o conjunto dos valores reais a^2 em que $a \in A$ e $a^2 \in A$, ou seja, C é formado pelos reais a^2 em que a é elemento de A assim como a^2 .

Na seguinte tabela listamos os elementos de A , os correspondentes quadrados e averiguamos se estes pertencem ou não a A e se são reais.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a^2 \in \mathbb{R}$	sim	sim	sim	sim	sim	sim
$a^2 \in A$	sim	sim	não	não	sim	sim

Assim, $C = \{1, 0, \frac{1}{4}\}$.

(c) Seja $D = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in A \quad b = a^2\}$. Podemos reescrever D do seguinte modo:

$$D = \{a^2 \in \mathbb{Z} \mid a \in A\}.$$

O conjunto D é o conjunto dos valores inteiros a^2 em que $a \in A$, ou seja, D é formado pelos valores a^2 em que $a \in A$ e $a^2 \in \mathbb{Z}$.

Analisando a tabela apresentada na alínea (a), podemos concluir que $D = \{1, 4, 0\}$.

(d) Seja $E = \{a \in A \mid a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$. O conjunto E é o conjunto dos elementos $a \in A$ tais que $a \geq 0$ e $\sqrt{a} \in A$.

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A e as correspondentes raízes quadradas e averiguamos se $a \geq 0$ e se $\sqrt{a} \in A$.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
\sqrt{a}	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
$a \geq 0$	sim	não	sim	sim	sim	não
$\sqrt{a} \in A$	sim	não	não	não	sim	não

Assim, $E = \{1, 0\}$.

(e) Seja $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\}$. Podemos reescrever F do seguinte modo:

$$F = \{\sqrt{a} \in \mathbb{R} \mid a \in A \wedge a^2 \in A \wedge a \geq 0\}.$$

O conjunto F é o conjunto dos valores reais \sqrt{a} em que $a \in A$, $a^2 \in A$ e $a \geq 0$. Note-se que, exigindo que $a \geq 0$, estamos a garantir que $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$.

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A , as correspondentes raízes quadradas e os correspondentes quadrados e averiguamos se $a \geq 0$ e se $a^2 \in A$.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
\sqrt{a}	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
a^2	1	1	$\frac{1}{16}$	4	0	$\frac{1}{4}$
$a \geq 0$	sim	não	sim	sim	sim	não
$a^2 \in A$	sim	sim	não	não	sim	sim

Assim, os elementos a de A que satisfazem as condições $a \geq 0$ e $a^2 \in A$ em simultâneo são 0 e 1. Portanto, F será o conjunto formado pelas raízes quadradas desses elementos, isto é, $F = \{0, 1\}$.

(f) Seja $G = \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \quad b^2 = a\}$. Uma vez que

$$b^2 = a \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{a},$$

podemos reescrever G do seguinte modo:

$$G = \{\pm\sqrt{a} \in \mathbb{R} \mid a \in A\}.$$

Deste modo, G é o conjunto dos valores $\pm\sqrt{a}$ que são reais, onde $a \in A$.

Na seguinte tabela listamos os elementos a de A e as correspondentes raízes quadradas e averiguamos se estas são reais.

$a \in A$	1	-1	$\frac{1}{4}$	2	0	$-\frac{1}{2}$
\sqrt{a}	1	$\sqrt{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt{a} \in \mathbb{R}$	sim	não	sim	sim	sim	não

Assim, $G = \{-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}$.

2.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

- (a) $A = \{-1, 1\}$ (c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
 (b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$ (d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

resolução:

Para definirmos por compreensão cada um dos conjuntos dados devemos indicar uma condição que descreva totalmente os elementos do conjunto.

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$
 (b) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$
 (c) $AB = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$
 (d) $D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge 1 < n \leq 5\}$

2.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

- (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $\{1, 2\}$ e $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 \leq 4\}$ (c) \emptyset , $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$
 (b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$ (d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

resolução:

Relembremos que dois conjuntos são iguais se têm exatamente os mesmos elementos.

(a) Temos que

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2
 \end{aligned}$$

Portanto, $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

Note-se que $0 < 1^2 \leq 4$, $0 < 2^2 \leq 4$ e $3^2 \not\leq 4$. Assim, $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n^2 \leq 4\} = \{1, 2\}$

Assim, todos os conjuntos desta alínea são iguais.

(b) Assumamos que r, s e t são todos distintos entre si. Assim, os elementos de $\{r, t, s\}$ são r, t e s , os de $\{s, t, r, s\}$ são r, t e s , os de $\{t, s, t, s\}$ são t e s e os de $\{s, t, r, t\}$ são r, t e s . Assim, os conjuntos cujos elementos são r, t e s são iguais entre si, ou seja, $\{r, t, s\} = \{s, t, r, s\} = \{s, t, r, t\}$ e o conjunto $\{t, s, t, s\}$ é distinto dos demais.

(c) Temos que $\emptyset = \{\}$, sendo estas duas formas de denotar o conjunto vazio. O conjunto $\{0\}$ tem um elemento, o número 0, e o conjunto $\{\emptyset\}$ tem um elemento, o conjunto \emptyset . Assim, cada um destes dois conjuntos é distinto dos restantes conjuntos listados.

(d) O conjunto $\{1, \{-1\}\}$ tem dois elementos, o número 1 e o conjunto $\{-1\}$. O conjunto $\{1, -1\}$ tem dois elementos, os números 1 e -1 . Como

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1,$$

segue-se que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ tem dois elementos, os números 1 e -1 . Portanto, $\{1, -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ e o conjunto $\{1, \{-1\}\}$ é distinto dos restantes.

2.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

- | | | | |
|-----------------------------|-------------------|-----------------------|--------------------------------|
| (a) $5 \in A$ | (b) $\{5\} \in A$ | (c) $\{5, 11\} \in A$ | (d) $A \subseteq \mathbb{R}$ |
| (e) $\{5, 11\} \subseteq A$ | (f) $0 \in A$ | (g) $\emptyset \in A$ | (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$ |

resolução:

Na resolução deste exercício, tenhamos em conta que, dado um objeto x , $x \in A$ se x é um dos elementos de A , e que os elementos de A são os listados de seguida:

- 5
- 11
- $\{5, 11\}$
- $\{0\}$
- \emptyset

Recordemos, ainda, que dados dois conjuntos X e Y , dizemos que $X \subseteq Y$ se todos os elementos de X são elementos de Y .

(a) A afirmação é verdadeira pois 5 é um dos elementos de A , como podemos verificar na lista acima.

(b) A afirmação é falsa pois $\{5\}$ não é um dos elementos de A .

- (c) A afirmação é verdadeira pois $\{5, 11\}$ é um dos elementos de A .
- (d) A afirmação é falsa pois nem todos os elementos de A são números reais. De facto, há elementos de A que são conjuntos e, portanto, não pertencem a \mathbb{R} . Tomemos, por exemplo, o objeto $\{5, 11\}$. Temos que $\{5, 11\} \in A$ mas $\{5, 11\} \notin \mathbb{R}$. Logo, $A \not\subseteq \mathbb{R}$.
- (e) A afirmação é verdadeira. Por definição, $\{5, 11\} \subseteq A$ se 5 e 11 são elementos de A , o que pode ser comprovado na lista apresentada acima.
- (f) A afirmação é falsa pois 0 não é um dos elementos de A .
- (g) A afirmação é verdadeira pois \emptyset é um dos elementos de A .
- (h) A afirmação é falsa pois nem todos os elementos de $\{0, 5, 11\}$ são elementos de A . Com efeito, 5 e 11 são elementos de A , mas 0 não é elemento de A . Logo, $\{0, 5, 11\} \not\subseteq A$.

2.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

- (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (c) $\emptyset \notin \emptyset$ (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

resolução:

- (a) A afirmação é verdadeira pois o conjunto $\{\emptyset\}$ tem um só elemento, o conjunto \emptyset . Portanto, \emptyset é um dos elementos (o único) de $\{\emptyset\}$, pelo que $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
- (b) A afirmação é verdadeira. De facto, sabemos que \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- (c) A afirmação é verdadeira. Com efeito, pensando na afirmação $\emptyset \in \emptyset$, esta é falsa, uma vez que afirma que \emptyset tem pelo menos um elemento, o que é absurdo. Portanto, a sua negação ($\emptyset \notin \emptyset$) é verdadeira.
- (d) A afirmação é falsa porque \emptyset não é elemento de $\{\{\emptyset\}\}$. De facto, o único elemento deste conjunto é $\{\emptyset\}$.

2.7. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C . Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

- (a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

resolução:

As afirmações garantidamente verdadeiras são as das alíneas (a), (e) e (f). Designemos por U o universo em questão (ou seja, a, b, c, d, e, f são elementos de U e $A, B, C \subseteq U$).

Como $A \subseteq C$, todos os elementos de A são elementos de C . Portanto, dado que $a \in A$, podemos afirmar que $a \in C$.

Como $b \in B$ e $A \subseteq B$, sabemos que

$$b \in A \vee b \in B \setminus A.$$

No entanto, não temos garantias de que $b \in A$.

O facto de d não pertencer a A apenas nos garante que $d \in U \setminus A$. Sabemos que $d \in U \setminus A$, mas isso não garante que d pertença a B .

Como $c \in C$ e $A \subseteq C$, sabemos que

$$c \in A \vee c \in C \setminus A.$$

Não temos, portanto, garantias de que $c \notin A$.

Se e pertencesse a A , então e pertenceria a B , dado que $A \subseteq B$. Logo, podemos afirmar que $e \notin A$.

Se f pertencesse a A , então f pertenceria a C , uma vez que $A \subseteq C$. Assim, podemos afirmar que $f \notin A$.

2.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

- (a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$ (b) $A \not\subseteq B$ e $A \in B$
 (c) $A \not\subseteq B$ e $A \notin B$ (d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

resolução:

(a) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Todos os elementos de A são elementos de B , pelo que $A \subseteq B$, mas o objeto $\{1, 2\}$ não é um elemento de B , donde $A \notin B$.

(b) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, \{1, 2\}\}$. Nem todos os elementos de A são elementos de B , pelo que $A \not\subseteq B$. Dado que o objeto $\{1, 2\}$ é um dos três elementos de B , segue-se que $A \in B$.

(c) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$. Nem todos os elementos de A são elementos de B , pelo que $A \not\subseteq B$, e o objeto $\{1, 2\}$ não é um dos dois elementos de B , pelo que $A \notin B$.

(d) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$. Todos os elementos de A são elementos de B , pelo que $A \subseteq B$, e o objeto $\{1, 2\}$ é um dos elementos de B , pelo que $A \in B$.

2.9. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \mid x \in A\}$. Determine $A \cup C$, $A \cup B$, $C \cup B$, $A \cup A$, $A \cap B$, $B \cap B$, $B \cup C \cup A$, $C \setminus A$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

resolução:

Note-se que os elementos de B são os naturais que podem escrever-se na forma $2y$, com $y \in \mathbb{N}$. Assim, B é o conjunto dos naturais pares (i.e., $B = 2\mathbb{N}$). Os elementos do conjunto C são os valores de x^2 em que $x \in A$. Logo, $C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2\} = \{4, 16, 36, 64\}$. Assim,

$$A \cup C = \{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}, \quad A \cup B = B, \quad C \cup B = B, \quad A \cup A = A$$

$$A \cap B = A, \quad B \cap B = B, \quad B \cup C \cup A = B, \quad C \setminus A = \{16, 36, 64\}$$

$$A \setminus B = \emptyset, \quad B \setminus A = \{2y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \geq 5\}$$

2.10. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X . Prove que

- (a) $A \cup A = A$ (c) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ (e) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$
 (b) $A \setminus B \subseteq A$ (d) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ (f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

resolução:

Recordemos que para mostrar que dois conjuntos X e Y são iguais basta mostrar que, para todo o objeto x , $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. Mais ainda, para mostrar que $X \subseteq Y$, basta provar que, para todo o objeto X , $x \in X \Rightarrow x \in Y$.

(a) Para todo o objeto x ,

$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \quad [\text{pela definição de } \cup] \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad [\text{pela equivalência lógica } \varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi] \end{aligned}$$

Logo, $A \cup A = A$.

(b) Para todo o objeto x ,

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Assim, $A \setminus B \subseteq A$.

(c) Para todo o objeto x ,

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \setminus B \quad [\text{pela definição de } \cup] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \quad [\text{pela definição de } \cap \text{ e de } \setminus] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B) \quad [\text{pela distributividade de } \wedge \text{ em relação a } \vee] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \top \quad [\text{uma vez que } x \in B \vee x \notin B \text{ é uma tautologia}] \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad [\text{uma vez que } \varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{F}^{CP}] \end{aligned}$$

Logo, $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$.

(d) Para todo o objeto x ,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \quad [\text{pela definição de } \cap] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \quad [\text{pela definição de } \setminus] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \quad [\text{pela associatividade de } \wedge] \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \quad [\text{pela definição de } \cap] \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C \quad [\text{pela definição de } \setminus] \end{aligned}$$

Logo, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

(e) Pretendemos mostrar que

$$A \cup B = \emptyset \Rightarrow (A = \emptyset \wedge B = \emptyset).$$

Admitamos, então, que $A \cup B = \emptyset$. Queremos mostrar que $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$. Suponhamos que $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, admitamos que $A \neq \emptyset$ (note-se que o caso em $B \neq \emptyset$ é análogo). Nesse caso, existe um elemento a de A . Mas, então, $a \in A \cup B$, o que contradiz a hipótese $A \cup B = \emptyset$. A contradição resultou de supormos que $A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset$. Portanto, $A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.

(f) Para todo o objeto x ,

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \quad [1]$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \quad [2]$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C) \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B)) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) \quad [4]$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) \quad [5]$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \cup B \wedge x \notin C) \quad [6]$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \quad [7]$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \cap C \quad [8]$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C) \quad [9]$$

justificações:

[1] pela definição de reunião

[2] pela definição de complementação

[3] pela distributividade de \wedge em relação a \vee

[4] pelo facto de $x \in B \wedge x \notin B$ ser uma contradição, pela equivalência lógica $\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi$ e pela definição de reunião

[5] pela distributividade de \wedge em relação a \vee

[6] pela definição de reunião

[7] pela distributividade de \wedge em relação a \vee

[8] pela definição de interseção [note-se que $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in C$; logo, $x \notin B \cap C \Leftrightarrow \neg(x \in B \wedge x \in C)$]

[9] pela definição de complementação

2.11. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

resolução:

Mostremos que, nas condições do enunciado, para todo o objeto x , $x \in B \Leftrightarrow x \in C$. Provemos que, para todo o objeto x , $x \in B \Rightarrow x \in C$. A prova de que para todo o objeto x , $x \in C \Rightarrow x \in B$ é análoga.

Seja $x \in B$.

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in C \end{aligned}$$

Existem, portanto, dois casos possíveis: CASO 1: $x \in A$; CASO 2: $x \in C$.

CASO 1: Neste caso, sabemos que $x \in A$ e $x \in B$. Assim, $x \in A \cap B$. Dado que $A \cap B = A \cap C$, podemos afirmar que $x \in A \cap C$, donde $x \in C$.

CASO 2: Neste caso, é imediato o que pretendíamos provar: $x \in C$.

Provámos, deste modo, que em ambos os casos $x \in C$. Assim, se $x \in B$ então $x \in C$. Portanto, $B \subseteq C$.

2.12. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

$$(a) A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C) \quad (b) A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

resolução:

(a) Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{3\}$. Temos que $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$ e $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2, 3\} = \emptyset$. Assim, $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

(b) Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$. Temos que $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2\} \setminus \emptyset = \{1, 2\}$ e $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$. Portanto, $A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2.13. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

$$(a) \text{ Se } C \subseteq A \cup B \text{ então } C \subseteq A \text{ e } C \subseteq B. \quad (c) \text{ Se } C \subseteq A \text{ ou } C \subseteq B \text{ então } C \subseteq A \cap B.$$

$$(b) \text{ Se } C \subseteq A \text{ ou } C \subseteq B \text{ então } C \subseteq A \cup B. \quad (d) \text{ Se } C \subseteq (A \cap B) \text{ então } C \subseteq A \text{ e } C \subseteq B.$$

resolução:

(a) A afirmação é falsa. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1, 5\}$. Temos que $C \subseteq A \cup B$ mas $C \not\subseteq A$ e $C \not\subseteq B$.

(b) A afirmação é verdadeira. Admitamos que $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$. Se $C \subseteq A$, dado que $A \subseteq A \cup B$, segue-se, pela transitividade da relação de inclusão, que $C \subseteq A \cup B$. Se $C \subseteq B$, como $B \subseteq A \cup B$, temos, novamente pela transitividade da relação de inclusão, que $C \subseteq A \cup B$.

(c) A afirmação é falsa. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 6\}$ e $C = \{1, 2\}$. Temos que $C \subseteq A$ (pelo que a proposição " $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ " é verdadeira. No entanto, $C \not\subseteq A \cap B = \{2\}$.

(d) A afirmação é verdadeira. Admitamos que $C \subseteq (A \cap B)$. Como $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq A$, podemos concluir que $C \subseteq A$. De modo análogo, dado que $C \subseteq A \cap B$ e $A \cap B \subseteq B$, segue-se que $C \subseteq B$.

2.14. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

resolução:

Lembremos que, dado um conjunto X , o conjunto das partes de X , $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos de X . Assim, um conjunto Y é um elemento de $\mathcal{P}(X)$ se $Y \subseteq X$.

Temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{7\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{5, 7\}, \{1, 5, 7\}\}$$

e

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{7\}, \{\{1, 5, 7\}\}, \{\emptyset, 7\}, \{\emptyset, \{1, 5, 7\}\}, \{7, \{1, 5, 7\}\}, \{\emptyset, 7, \{1, 5, 7\}\}\}$$

Como $\{1, 5, 7\}$ não é um dos elementos de $\mathcal{P}(B)$, temos que $A \notin \mathcal{P}(B)$ (OBS: poderíamos, em alternativa, referir que nem todos os elementos de A são elementos de B , pelo que $A \not\subseteq B$ e, por conseguinte, $A \notin \mathcal{P}(B)$).

Sabemos que $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se e somente se $A \subseteq \mathbb{N}$. Ora, todos os elementos de A são números naturais, ou seja, todos os elementos de A são elementos de \mathbb{N} . Logo, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que se $X \subseteq Y$, então $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$, para quaisquer conjuntos X e Y . Como $A \subseteq \mathbb{N}$, podemos concluir que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.15. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\end{aligned}$$

2.16. Sejam A , B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes: (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

resolução:

(a) A afirmação (a) é verdadeira. De facto, para todo o objeto X , $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, como a seguir comprovamos:

$$\begin{aligned}X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \quad [\text{pela definição de conjunto das partes}] \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \quad [\text{pela definição de } \cap, \text{ pelo ex. 2.13(d) e recíproca}] \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \quad [\text{pela definição de conjunto das partes}] \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad [\text{pela definição de } \cap]\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) A afirmação (a) é falsa. De facto, consideremos $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2\}$ e

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\},$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

e

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Para estes conjuntos,

$$\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

2.17. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \emptyset \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

resolução:

$$A \times C = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in C\} = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$$

$$C \times A = \{(x, y) \mid x \in C \wedge y \in A\} = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

$$(A \times C) \setminus (C \times A) = \{a \mid a \in A \times C \wedge a \notin C \times A\} = A \times C$$

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$

$$= \{(1, a, 5), (2, a, 5), (3, a, 5), (1, b, 5), (2, b, 5), (3, b, 5)\}$$

$$A \times \emptyset \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A \wedge y \in \emptyset \wedge z \in C\} = \emptyset$$

$$C^3 = \{(x, y, z) \mid x \in C \wedge y \in C \wedge z \in C\} = \{(5, 5, 5)\}$$

$$C^3 \times B = \{(x, y) \mid x \in C^3 \wedge y \in B\}$$

$$= \{((5, 5, 5), a), ((5, 5, 5), b)\}$$

2.18. Sejam A , B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

resolução:

Para todo o objeto (x, y) ,

$$(x, y) \in C \times (A \cup B) \Leftrightarrow x \in C \wedge y \in A \cup B \quad [1]$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (y \in A \vee y \in B) \quad [2]$$

$$\Leftrightarrow (x \in C \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in B) \quad [3]$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in C \times A \vee (x, y) \in C \times B \quad [4]$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (C \times A) \cup (C \times B) \quad [5]$$

justificações:

- [1] pela definição de produto cartesiano
- [2] pela definição de reunião
- [3] pela distributividade de \wedge em relação a \vee
- [4] pela definição de produto cartesiano
- [5] pela definição de reunião

2.19. Sejam A , B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

resolução:

A prova segue por redução ao absurdo. Admitamos que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$ e suponhamos que $C \neq \emptyset$.

Dado que $A \neq B$, sabemos que existe um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro. Sem perda de generalidade, admitamos que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ (*). Sendo $C \neq \emptyset$, sabemos que C tem pelos menos um elemento, digamos y . Assim, $(x, y) \in A \times C$. Como $(x, y) \in A \times C$ e $A \times C = B \times C$, podemos afirmar que $(x, y) \in B \times C$. Mas, deste modo, $x \in B$, o que leva a uma contradição. A contradição resultou de supormos que $C \neq \emptyset$. Portanto, $C = \emptyset$.

(*) Aqui, o “sem perda de generalidade” refere-se ao facto de o caso em que existe $x \in B$ tal que $x \notin A$ ser perfeitamente análogo ao caso analisado.

2.20. Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A , B e C tais que:

- (a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$
- (b) $A \cap \emptyset = A$
- (c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$
- (d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$
- (e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \not\subseteq B$
- (f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$
- (g) $A \times (B \setminus C) = A \times C$ c/ $B, C \neq \emptyset$
- (h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ c/ $A, B \neq \emptyset$
- (i) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \emptyset$

resolução:

(a) Consideremos $A = \{1, \{1\}\}$. Temos que $\{1\}$ é um dos elementos de A . Assim, podemos dizer que $\{1\} \in A$. Mais ainda, todos os elementos de $\{1\}$ são elementos de A (de facto, 1 é elemento de A). Portanto, $\{1\} \subseteq A$.

(b) O único conjunto A que satisfaz $A \cap \emptyset = A$ é $A = \emptyset$.

(c) Consideremos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{1, 5\}$. Temos que $A \cap B = \{1\} = A \cap C$. No entanto, $B \neq C$.

(d) Não existem tais conjuntos. De facto, se $B = C$, então $A \cap B = A \cap C$ (de facto, basta substituir B em $A \cap B$ por C).

(e) Só podemos ter $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \not\subseteq B$ quando $B = \emptyset$ e A é um conjunto não vazio. Consideremos, por exemplo, $A = \{1\}$, $B = \emptyset$ e $C = \{2\}$. Temos que

$$A \times B = \{1\} \times \emptyset = \emptyset,$$

$$B \times C = \emptyset \times \{2\} = \emptyset,$$

$$A \times B = \emptyset \subseteq \emptyset = B \times C$$

e

$$A \not\subseteq B.$$

(f) Consideremos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ e $C = \{2, 4\}$. Temos que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = A \cup C$. No entanto, $B \neq C$.

(g) Consideremos, por exemplo, $A = \emptyset$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{2\}$. Temos que

$$A \times (B \setminus C) = \emptyset \times \{1\} = \emptyset$$

e

$$A \times C = \emptyset \times \{2\} = \emptyset.$$

Note-se que $B, C \neq \emptyset$ e $A \times (B \setminus C) = \emptyset = A \times C$.

(h) Consideremos, por exemplo, $A = B = \{1, 2\}$. Temos que $A, B \neq \emptyset$ e $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\} \cup \{1, 2\}) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(i) Consideremos $A = \{1, \{1\}\}$. Temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}.$$

Assim,

$$\mathcal{P}(A) \cap A = \{\{1\}\} \neq \emptyset.$$

2.21. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

resolução:

Seja n o número de elementos de A ($n \in \mathbb{N}_0$). Temos que $A \times A$ tem $n \times n = n^2$ elementos e, portanto, $\mathcal{P}(A \times A)$ tem $2^{(n^2)}$ elementos. Por outro lado, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos, pelo que $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem $2^n \times 2^n = 2^{(2n)}$ elementos. Portanto, se $n = 1$, é $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ que tem mais elementos. Se $n = 2$, os conjuntos em questão têm o mesmo número de elementos. Para $n \geq 3$, é $\mathcal{P}(A \times A)$ que tem mais elementos.

Capítulo 3

Indução nos naturais

3.1. Prove, por indução nos naturais, as seguintes propriedades:

- (a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, para todo $n \geq 1$.
- (b) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.
- (c) $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.
- (d) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.
- (e) $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.
- (f) $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.
- (g) $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.
- (h) $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.
- (i) $7n < 2^n$ para todo $n \geq 6$.
- (j) $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.
- (k) $a^n \leq b^n$, para todo $n \geq 1$ e para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$.

resolução:

(a) Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais pares é igual a $n(n + 1)$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ ” sobre os naturais n .

(I) Para $n = 1$, temos $2 = 1(1 + 1) \Leftrightarrow 2 = 2$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1). \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k+1) = (k+1)(k+2).$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(k+1) &= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k+1) \\ &= k(k+1) + 2(k+1) \quad \text{pela (H.I.)} \\ &= (k+1)(k+2), \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1),$$

para todo $n \geq 1$.

(b) Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ " sobre os naturais n .

(I) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (k+1) &= (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{pela (H.I.)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

para todo $n \geq 1$.

(c) Mostremos que $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ " sobre os naturais n .

(I) Para $n = 1$, temos $2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1 \Leftrightarrow 1 + 2 = 4 - 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Temos que

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k+1} &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^k) + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \quad \text{pela (H.I.)} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{1+k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

para todo $n \geq 1$.

(d) Mostremos que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ " sobre os naturais n .

(I) Para $n = 1$, temos $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$, pelo que $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 4 + 9 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 4 + 9 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 1 + 4 + 9 + \dots + (k+1)^2 &= (1 + 4 + 9 + \dots + k^2) + (k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{pela (H.I.)} \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},
 \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

para todo $n \geq 1$.

(e) Mostremos que $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$, pelo método de indução simples de base 3 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $n^2 > 2n + 1$ ” sobre os naturais $n \geq 3$.

(I) Para $n = 3$, temos $n^2 > 2n + 1 \Leftrightarrow 3^2 > 2 \times 3 + 1 \Leftrightarrow 9 > 7$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$k^2 > 2k + 1 \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$(k+1)^2 > 2(k+1) + 1,$$

isto é,

$$(k+1)^2 > 2k + 3.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
 &> (2k + 1) + 2k + 1 \quad (\text{note-se que } k^2 > 2k + 1 \text{ pela (H.I.)}) \\
 &= 4k + 2 \\
 &> 2k + 3, \quad (\text{uma vez que } k \geq 3 \text{ e } 4k + 2 > 2k + 3 \Leftrightarrow 2k > 1)
 \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 3 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

(f) Mostremos que $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$, pelo método de indução simples de base 4 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $n! \geq n^2$ " sobre os naturais $n \geq 4$.

(I) Para $n = 4$, temos $n! \geq n^2 \Leftrightarrow 4! > 4^2 \Leftrightarrow 24 > 16$, pelo que $p(4)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 4$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$k! \geq k^2 \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $(k+1)! \geq (k+1)^2$. Temos que

$$\begin{aligned} (k+1)! \geq (k+1)^2 &\Leftrightarrow (k+1)k! \geq (k+1)^2 \\ &\Leftrightarrow k! \geq k+1. \end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $k! \geq k^2$. Pela alínea (e), sabemos que $k^2 > 2k + 1$. É claro que $2k + 1 > k + 1$. Portanto,

$$k! \geq k^2 > 2k + 1 > k + 1,$$

donde é verdade que $k! \geq k + 1$ e $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 4 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.

(g) Mostremos que $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $n^3 - n$ é múltiplo de 3".

(I) Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$. Como 0 é múltiplo de 3, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é múltiplo de 3. Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$.

Assim,

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k - k \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ &= 3q + (3k^2 + 3k) \\ &= 3(q + k^2 + k). \end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3 - (k+1) = 3(q + k^2 + k)$, sendo $q + k^2 + k \in \mathbb{N}$. Portanto, $k^3 - k$ é múltiplo de 3, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que

$$n^3 - n \text{ é múltiplo de 3,}$$

para todo o natural n .

(h) Mostremos que $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $5^n - 1$ é múltiplo de 4”.

(I) Para $n = 1$, temos $5^n - 1 = 5 - 1 = 4$, que é, obviamente, múltiplo de 4. Logo, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $5^k - 1$ é múltiplo de 4. Então, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $5^k - 1 = 4r$.

Assim,

$$\begin{aligned} 5^{k+1} - 1 &= 5 \times 5^k - 1 \\ &= 5 \times (4r + 1) - 1 \quad (\text{uma vez que } 5^k - 1 = 4r \Leftrightarrow 5^k = 4r + 1) \\ &= 20r + 5 - 1 \\ &= 20r + 4 \\ &= 4 \times (5r + 1). \end{aligned}$$

Dado que $5r + 1 \in \mathbb{N}$, podemos dizer que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $5^{k+1} - 1 = 4s$, ou seja, $5^{k+1} - 1$ é múltiplo de 4. Assim, $p(k + 1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo o natural n .

(i) Mostremos que $7n < 2^n$ para todo $n \geq 6$, pelo método de indução simples de base 6 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $7n < 2^n$ ” sobre os naturais $n \geq 6$.

(I) Para $n = 6$, temos $7n < 2^n \Leftrightarrow 7 \times 6 < 2^6 \Leftrightarrow 42 < 64$, pelo que $p(6)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 6$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$7k < 2^k \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, que $7(k + 1) < 2^{k+1}$. Temos que

$$\begin{aligned} 7(k + 1) < 2^{k+1} &\Leftrightarrow 7k + 7 < 2 \times 2^k \\ &\Leftrightarrow 7k + 7 < 2^k + 2^k. \end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $7k < 2^k$. Como $k \geq 6$, sabemos que $2^k \geq 2^6 = 64$. Portanto, $7 < 2^k$. Como $7k < 2^k$ e $7 < 2^k$, podemos afirmar que $7k + 7 < 2^k + 2^k$. Portanto, $p(k + 1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 6 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $7n < 2^n$, para todo $n \geq 6$.

(j) Mostremos que $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$, pelo método de indução simples de base 10 nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $2^n > n^3$ " sobre os naturais $n \geq 10$.

(I) Para $n = 10$, temos $2^n > n^3 \Leftrightarrow 2^{10} > 10^3 \Leftrightarrow 1024 > 1000$, pelo que $p(10)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 10$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$2^k > k^3 \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $2^{k+1} > (k+1)^3$. Temos que

$$\begin{aligned} 2^{k+1} > (k+1)^3 &\Leftrightarrow 2 \times 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &\Leftrightarrow 2^k + 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1. \end{aligned}$$

Sabemos, por H.I., que $2^k > k^3$. Se mostrarmos que $2^k > 3k^2 + 3k + 1$, poderemos afirmar que $2^k + 2^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ e, consequentemente que $p(k+1)$ é verdadeira. Façamos esta prova também por indução nos naturais.

Consideremos o predicado $q(k) : 2^k > 3k^2 + 3k + 1$, para todo o natural $k \geq 10$. Provemos que $q(k)$ é verdadeira para todo $k \geq 10$.

(A) Para $k=10$, temos que $2^k > 3k^2 + 3k + 1 \Leftrightarrow 1024 > 3 \times 100 + 3 \times 10 + 1 \Leftrightarrow 1024 > 331$, donde $q(10)$ é verdadeira.

(B) Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 10$ e $q(m)$ é verdadeira, ou seja, $2^m > 3m^2 + 3m + 1$. Pretendemos mostrar que $q(m+1)$ é verdadeira, isto é, que $2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1$. Ora,

$$\begin{aligned} 2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2^m > 3m^2 + 6m + 3 + 3m + 3 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6). \end{aligned}$$

Pela H.I., sabemos que $2^m > 3m^2 + 3m + 1$. Pela alínea (i), sabemos que $2^m > 7m$. Mais ainda, é claro que, para $m \geq 10$, $7m > 6m + 6$ (note-se que $7m > 6m + 6 \Leftrightarrow 7m - 6m > 6 \Leftrightarrow m > 6$). Assim,

$$2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + 7m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6).$$

Sendo $2^m + 2^m > (3m^2 + 3m + 1) + (6m + 6)$, podemos afirmar que $2^{m+1} > 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1$, ou seja, que $q(m+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 10 para os naturais e por (A) e (B), podemos concluir que $2^k > 3k^2 + 3k + 1$, para todo $k \geq 10$.

Estamos, assim, em condições de afirmar que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução de base 10 para os naturais e por (I) e (II), podemos concluir que $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

(k) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$. Mostremos que $a^n \leq b^n$, para todo $n \geq 1$.

Representemos por $p(n)$ o predicado " $a^n \leq b^n$ ".

(I) Para $n = 1$, temos $a^n \leq b^n \Leftrightarrow a \leq b$. Portanto, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $a^k \leq b^k$. De $0 \leq a \leq b$ e de $a^k \leq b^k$, podemos concluir que

$$a \times a^k \leq b \times b^k,$$

ou seja, $a^{k+1} \leq b^{k+1}$ e, consequentemente, $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que $a^n \leq b^n$, para todo o natural n .

3.2. Seja $p(n)$ a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que se $p(k)$ é verdadeira (com $k \in \mathbb{N}$), então $p(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

resolução:

(a) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{(k-1)(k+2)}{2}. \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k+1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k+1) \\ &= \frac{(k-1)(k+2)}{2} + (k+1) \quad (\text{pela H.I.}) \\ &= \frac{(k-1)(k+2) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + 2k - k - 2 + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k}{2} \\ &= \frac{k(k+3)}{2}, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

(b) Consideremos $n = 1$. Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{(n-1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{(1-1)(1+2)}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 = 0, \end{aligned}$$

pelo que $p(1)$ é falsa. Logo, $p(n)$ não é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in X \Rightarrow n + 3 \in X.$$

Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

resolução:

Sabemos que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ se e somente se todos os elementos de $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$ são elementos de X . Pretendemos, pois, provar que $3n \in X$, para todo o natural n .

Representemos por $p(n)$ o predicado “ $3n \in X$ ” sobre os naturais.

(I) Para $n = 1$, temos $3n = 3$. Sabemos, pela definição de X , que $3 \in X$. Portanto, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$3k \in X \quad (\text{H.I.})$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $3(k+1) \in X$. Pela definição de X , como $3k \in X$ pela H.I., podemos afirmar que $3k + 3 \in X$. Portanto, $3(k+1) \in X$ e, por conseguinte, $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que $3n \in X$, para todo o natural n , donde $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

3.4. Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que a sequência de Fibonacci (definida por $F_1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$) satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$.

resolução:

A prova segue por Indução Completa nos naturais. Representemos por $p(n)$ o predicado

$$F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

sobre os naturais.

(I) Como o termo F_n é definido a partir de F_{n-1} e F_{n-2} apenas para $n \geq 3$, vejamos que $p(1)$ e $p(2)$ são verdadeiras. Temos que Se $n = 1$,

$$\begin{aligned} F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} &\Leftrightarrow F_1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

pelo que $p(1)$ é verdadeira. Se $n = 2$,

$$\begin{aligned} F_n &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \Leftrightarrow F_2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-2} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq 1, \end{aligned}$$

pelo que $p(2)$ é verdadeira.

(II) Consideremos, agora, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$ e tal que $p(1), p(2), \dots, p(k)$ são verdadeiras. Sabemos, então, que

$$F_j \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{j-2}, \quad (\text{H.I.})$$

para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Vejamos que $p(k+1)$ também é verdadeira. Temos que

$$\begin{aligned} F_{k+1} &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-2} \Leftrightarrow F_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &\Leftrightarrow F_{(k+1)-1} + F_{(k+1)-2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \quad (\text{pela definição de } F_n) \\ &\Leftrightarrow F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Pela H.I., sabemos que

$$F_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$$

e

$$F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)-2}.$$

Portanto,

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{(k-1)-2},$$

ou seja,

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3}.$$

Note-se que, se

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1},$$

então teremos

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e poderemos concluir que

$$F_k + F_{k-1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e, consequentemente, que

$$F_{k+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-2}.$$

Vejamos que, de facto,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^1 + 1 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

o que é verdade. Portanto,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-3} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

e $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução Completa para \mathbb{N} e por (I) e (II), podemos concluir que $F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$, para todo o natural n .