Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{B}}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

21 dezembro 2019 | Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. A forma em escada reduzida da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2.
Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é: $((12, 9, 6, 3), (11, 8, 5, 2))$.

b) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.

c) $(1, -2, 1) \in \mathcal{N}(A)$? Sim.

d) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: $((1, 0, -1), (0, 1, 2))$.

e) Um vetor de $\mathbb{R}^3$ não pertencente a $\mathcal{L}(A)$ é: $(0, 0, 1)$.

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a aplicação linear $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associada à matriz $\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3k & 0 \end{pmatrix}$.

a) $T_1(1, 2, 3, 1) = (3, -4, 9)$.

b) Um vetor não nulo x tal que $x \in \text{Im } T_2$ é: $(2, 0, 0)$.

c) $\dim(\text{Im } T_1) = 3$ e $\dim(\text{Nuc } T_0) = 2$.

d) Os valores de k para os quais a aplicação T_k não é sobrejetiva são: $k = 0$.

e) Os valores de k para os quais a aplicação T_k não é injetiva são: $k \in \mathbb{R}$

3. Considere uma matriz A de ordem 3 cujos valores próprios são $-2, 2, 1$.

a) $\det A = -4$.

b) O sistema $(A - 2I_3)x = 0$ é possível e indeterminado..

c) Os valores próprios da matriz $(3A - 2I_3)^T$ são: $-8, 4, 1$.

d) A matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é semelhante à matriz A.

e) A^2 é diagonalizável? Sim, porque, se λ é um valor próprio de A com um vetor próprio associado x, então λ^2 é uma valor próprio de A^2 com vetor próprio associado x; logo, os vetores próprios de A são também vetores próprios de A^2; como A tem três valores próprios distintos, existem três vetores próprios de A linearmente independentes; logo A^2 também admite três vetores próprios linearmente independentes, sendo, por isso, diagonalizável.

EM ALTERNATIVA:

Como A tem três valores próprios distintos, então A é diagonalizável isto é, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D uma matriz diagonal. Mas,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} &\Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &\Rightarrow P^{-1}A^2P = D^2 \end{aligned}$$

Sendo D uma matriz diagonal, também D^2 é uma matriz diagonal, pelo que a igualdade $P^{-1}A^2P = D^2$ mostra que A^2 é uma matriz diagonalizável.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

Para sugestões de resolução das questões deste grupo, consultar a resolução da versão A, com as devidas adaptações.

1. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 3z - 4w = 0 \text{ e } y = 0\}.$$

a) Determine uma base e indique qual a dimensão de U.

b) Verifique que o vetor $(3, 0, 5, 6)$ pertence a U e escreva as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.

c) Diga, justificando, se os vetores $u = (2, 0, -2, 0)$, $v = (4, 0, 0, 3)$ e $w = (6, 0, -2, 3)$ são vetores geradores de U.

d) Indique, caso exista, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores u, v e w.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que o polinómio característico de A não depende de a.

b) Verifique que $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A.

c) Verifique que existe um valor de a para o qual a matriz A é diagonalizável e indique, para este valor, uma matriz que a diagonaliza.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma dada matriz e seja $f_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por $f_A(X) = XA - AX$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Mostre que f_A é uma aplicação linear.

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determine $\operatorname{Nuc} f_A$ e indique uma sua base.

Cotação: $\boxed{\text{I}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 3 valores; **3.** 3 valores; $\boxed{\text{II}}$ - **1.** 3.5 valores; **2.** 4 valores; **3.** 2.5 valores.