Álgebra Linear

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{\text{A}}$

21 dezembro 2019 Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. A forma em escada reduzida da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.
Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é: $((1,5,9),(2,6,10))$.

b) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 2.

c) $(1,-1,1,0) \in \mathcal{N}(A)$? Não.

d) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: $((1,0,-1,-2),(0,1,2,3))$.

e) Um vetor de $\mathbb{R}^4$ não pertencente a $\mathcal{L}(A)$ é: $(0,0,1,0)$.

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a aplicação linear $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associada à matriz $\begin{pmatrix} 2k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$.

a) $T_2(1,2,3,1) = (9,6,6)$.

b) Um vetor não nulo x tal que $x \in \text{Im}\ T_1$ é: $x = (2,0,0)$.

c) $\dim(\text{Im}\ T_0) = 2$ e $\dim(\text{Nuc}\ T_2) = 1$.

d) Os valores de k para os quais a aplicação T_k é sobrejetiva são: $k \neq 0$.

e) Os valores de k para os quais a aplicação T_k não é injetiva são: $k \in \mathbb{R}$.

3. Considere uma matriz A de ordem 3 cujos valores próprios são $-1,1,3$.

a) $\det A = -3$.

b) O sistema $(A + 2I_3)x = 0$ é possível e determinado.

c) Os valores próprios da matriz $(2A + 4I_3)^T$ são: $2,6,10$.

d) A matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é semelhante à matriz A.

e) A^2 é diagonalizável?

Sim, porque, se λ é um valor próprio de A com um vetor próprio associado x, então λ^2 é uma valor próprio de A^2 com vetor próprio associado x; logo, os vetores próprios de A são também vetores próprios de A^2; como A tem três valores próprios distintos, existem três vetores próprios de A linearmente independentes; logo A^2 também admite três vetores próprios linearmente independentes, sendo, por isso, diagonalizável.

EM ALTERNATIVA:

Como A tem três valores próprios distintos, então A é diagonalizável isto é, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D uma matriz diagonal. Mas,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} &\Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &\Rightarrow P^{-1}A^2P = D^2 \end{aligned}$$

Sendo D uma matriz digonal, também D^2 é uma matriz diagonal, pelo que a igualdade $P^{-1}A^2P = D^2$ mostra que A^2 é uma matriz diagonalizável.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 3y - 4w = 0 \text{ e } z = 0\big\}.$$

a) Determine uma base e indique qual a dimensão de U.

$$\begin{aligned} U &= \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -y + \tfrac{4}{3}w \text{ e } z = 0\big\} = \big\{(-y + \tfrac{4}{3}w, y, 0, w) : y, w \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle(-1, 1, 0, 0), (4, 0, 0, 3)\rangle \end{aligned}$$

Como os vetores $\mathbf{a} = (-1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{b} = (4, 0, 0, 3)$ geram U e são linearmente independentes (imediato), então $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é uma base de U e consequentemente U tem dimensão 2.

b) Verifique que o vetor $(5, 3, 0, 6)$ pertence a U e escreva as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.

:: Verificar que $(5, 3, 0, 6) \in U$:

1º Processo: Verificar que $\mathbf{c} = (5, 3, 0, 6)$ satisfaz as condições $x = -y + \frac{4}{3}w$ e $z = 0$ (imediato)

2º Processo: Verificar que $c = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (imediato), pelo que $c \in \langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = U$

3º Processo: Verificar que car $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ = car $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ (imediato)

:: Coordenadas de $(5, 3, 0, 6)$ na base $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

Como $c = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, as coordenadas de $c = (5, 3, 0, 6)$ na base $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ são $(3, 2)$.

c) Diga, justificando, se os vetores $u = (2, -2, 0, 0)$, $v = (4, 0, 0, 3)$ e $w = (6, -2, 0, 3)$ são vetores geradores de U.

1º processo: Como $w = u + v, u = -\mathbf{a}, v = \mathbf{b}$, então (ver resultados na página 14 e 16 dos slides) $\langle u, v, w\rangle = \langle u, v, u + v\rangle = \langle u, v\rangle = \langle -\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = U$

2º processo: Calcular $\langle u, v, w\rangle$, verificando que o sistema $(x, y, z, w) = \alpha u + \beta v + \gamma w$ é possível apenas quando $3x + 3y - 4w = 0$ e $z = 0$ e, por isso, $\langle u, v, w\rangle = U$.

d) Indique, caso exista, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores u, v e w.

Não existe tal base, porque os vetores u, v e w são linearmente dependentes, uma vez que $w = u + v$.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que o polinómio característico de A não depende de a.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Usando o Teorema de Laplace (última linha), obtém-se

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a & a \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix} + (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, pelo que o polinómio característico de A é independente de a.

b) Verifique que $(0,-1,1)$ é um vetor próprio de A.

Basta verificar que $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para concluir que $(0,-1,1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 2.

c) Verifique que existe um valor de a para o qual a matriz A é diagonalizável e indique, para este valor, uma matriz que a diagonaliza.

De acordo com a alínea a), a matriz A tem dois valores próprios distintos: 1 (duplo) e 2 (simples). Conclui-se então que a multiplicidade geométrica do vp 2 é 1 e, atendendo à alínea b), podemos dizer que o subespaço próprio associado a este vp é $V_2 = \langle(0,-1,1)\rangle$.

A matriz será diagonalizável se a multiplicidade geométrica do vp 1 for 2, ou seja, se $\dim V_1 = 2$. Como $\dim V_1 = 3 - \text{car}(A - I)$, pretende saber-se para que valores de a, a matriz $A - I$ tem característica 1. Como

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conclui-se que $\text{car}(A - I) = 1$ sse $a = 0$. Neste caso, obtém-se

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\} = \langle(1,0,-1),(0,1,0)\rangle.$$

Como existem três vetores próprios linearmente independentes, a saber, $u = (0,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ e $w = (0,1,0)$), uma matriz P que diagonaliza A é a matriz cujas colunas são u, v, w. Assim, escolhendo,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

obtém-se a seguinte matriz diagonal semelhante a A:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma dada matriz e seja $f_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por $f_A(X) = XA - AX$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Mostre que f_A é uma aplicação linear.

f_A é uma aplicação linear sse

1. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n},\ f_A(X+Y) = f_A(X) + f_A(Y)$;
2. $\forall X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f_A(\alpha X) = \alpha f_A(X)$.

Como

$$f_A(X+Y) = (X+Y)A - A(X+Y) = XA + YA - AX - AY = (XA - AX) + (YA - AY) = f_A(X) + f_A(Y),$$

a primeira condição é satisfeita. Além disso, como

$$f_A(\alpha X) = (\alpha X)A - A(\alpha X) = \alpha(XA) - \alpha(AX) = \alpha f_A(X),$$

a segunda condição também é satisfeita e está provado que f_A é uma aplicação linear.

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determine Nuc f_A e indique uma sua base.

$$\begin{aligned}
\text{Nuc } f_A &= \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : f_A(X) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{pmatrix} a - a - 2c & 2a + 3b - b - 2d \\ c - 3c & 2c + 3d - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : c = 0 \text{ e } a = d - b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

Facilmente se verifica que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são vetores linearmente independentes, pelo que uma base de Nuc f_A é $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cotação: $\boxed{\textbf{I}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 3 valores; **3.** 3 valores; $\boxed{\textbf{II}}$ - **1.** 3.5 valores; **2.** 4 valores; **3.** 2.5 valores.