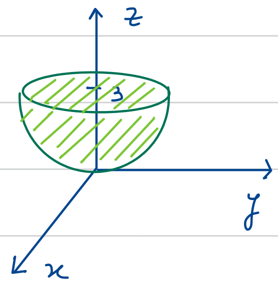
Folha 8

Os exercícios 1.a), 8.a), 9 e 13 encontram-se resolvidos nos diapositivos.
Segue-se a resolução dos exercícios propostos.

1. Calcule os seguintes integrais:

   (d) $\iiint_{\mathcal{D}} x \, dV$, com $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.



Consideramos a interseção de $\mathcal{D}$ com o plano $z=3$:
esta interseção é o círculo $x^2+y^2 \leq 3$ com cota 3.
Este círculo pode ser descrito como o conjunto:

(x,y): $\quad -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3-y^2} \leq x \leq \sqrt{3-y^2}$

Portanto, $\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}, \ -\sqrt{3-y^2} \leq x \leq \sqrt{3-y^2} \text{ e } x^2+y^2 \leq z \leq 3 \right\}$

Logo: $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x \, dV = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{3} x \, dz \, dx \, dy =$

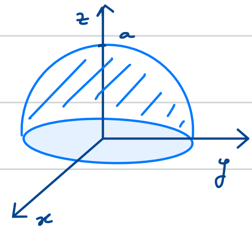
$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} xz \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=3} dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} x\,(3-(x^2+y^2))\, dx\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} 3x - x^3 - y^2 x \; dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-y^2)\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-\sqrt{3-y^2}}^{x=\sqrt{3-y^2}} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 0 \, dy = 0.$$

Note que era expectável que $\iiint_D x\,dv = 0$, uma vez que a região de integração é simétrica em relação ao plano $x=0$ e $f(x,y,z)=x$ é tal que $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$.

2. Use integrais triplos para expressar o volume do sólido definido pela superfície de equação $z = a - x^2 - y^2$, com $a > 0$, e pelo plano XOY.



Seguindo um raciocínio semelhante ao do exercício anterior podemos escrever:

$S: \ 0 \leq z \leq a - x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$

$0 \leq z \leq a - x^2 - y^2, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ e $-1 \leq x \leq 1$

Logo: $vol(S) = \iiint_S 1\,dv = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx.$

5. Calcule, mudando se necessário a ordem de integração,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 \, dz\, dy\, dx.$$

Seja $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}, \ x \leq y \leq \sqrt{\pi/2}, \ 1 \leq z \leq 3 \right\}$ o domínio de integração.

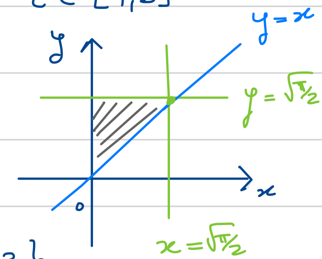
A função $g(y) = \operatorname{sen}(y^2)$ tem primitiva (pois é contínua) mas tal primitiva não é combinação de funções elementares.

Para calcular $\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen}(y^2)\, dV$ é então necessário trocar a ordem de integração.

Basta analisar a variação de (x,y) mantendo $z \in [1,3]$.

$$0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2} \quad \text{e} \quad x \leq y \leq \sqrt{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq y \leq \sqrt{\pi/2} \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq y$$



Logo:

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq \sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\ 0 \leq x \leq y,\ 1 \leq z \leq 3 \right\}.$$

Assim:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen}(y^2)\, dV = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \int_1^{3} \operatorname{sen}(y^2)\, dz\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} 2 \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = \underline{1}.$$

7. Considerando $\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0,\ \sqrt{x+y} + 1 \leq z \leq 2 \right\}$, calcule

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\, d(x,y,z),$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \\ (u,v,w) &\longmapsto (u^2, v^2, w) \end{aligned}$$

Começamos por identificar o conjunto $\mathcal{D}^*$ tal que $\Phi(\mathcal{D}^*) = \mathcal{D}$

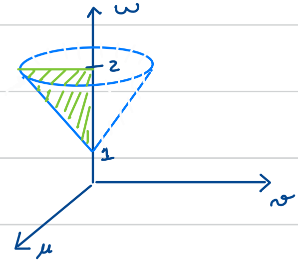
Como estamos a fazer $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w$ então:

$u \geq 0$, $v \geq 0$ e $\sqrt{u^2+v^2}+1 \leq w \leq 2$

Observamos que: $w \geq 1$ e $w = 1+\sqrt{u^2+v^2} \Leftrightarrow (w-1)^2 = u^2+v^2$

Portanto: $D^* = \{(u,v,w):\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ (w-1)^2 \geq u^2+v^2 \text{ e } w \leq 2\}$

A aplicação Φ é claramente injetiva e de classe C^1



$$J\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det J\Phi(u,v) = 4uv$

Assim $\det J\Phi(u,v) = 4uv \Leftrightarrow u=0 \vee v=0$

Portanto $\det J\Phi(u,v) \neq 0$ no interior de D^*.

Pelo teorema de mudança de variável para integrais temos

$$\iiint_D f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_{D^*} (f\circ\Phi)(u,v,w)\, |\det J\Phi(u,v)|\, d(u,v,w)$$

$$= \iiint_{D^*} \sqrt{u^2v^2}\; 4uv\; d(u,v,w) = \iiint_{D^*} 4u^2v^2\, d(u,v,w)$$

Para o cálculo deste integral recorremos a coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} u = R\cos\theta \\ v = R\,\text{sen}\,\theta \\ w = w \end{cases}$$

Por observação da figura vemos que:

$0 \leq R \leq 1$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq \pi/2$

e que w verifica: $1+R \leq w \leq 2$

Logo: $$\iiint_{D^*} 4u^2v^2\, d(u,v,w) = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{1+R}^2 4\,(R\cos\theta)^2(R\,\text{sen}\,\theta)^2 R\; dw\, dR\, d\theta =$$

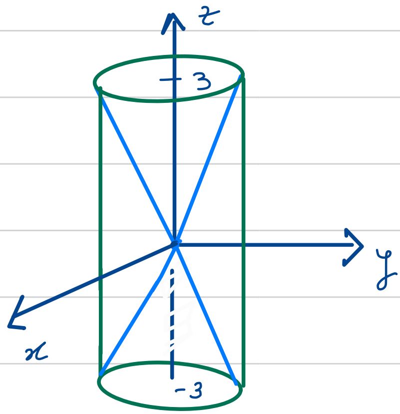
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\; R^5(1-R)\,dR = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\left[\frac{R^6}{6}-\frac{R^7}{7}\right]_{R=0}^{R=1} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\frac{\cos(2\theta)+1}{2}\;\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = -\frac{1}{42}\int_0^{\pi/2}\cos^2(2\theta)-1\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{42}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(4\theta)+1}{2}-1\,d\theta = -\frac{1}{84}\int_0^{\pi/2}\cos(4\theta)-1\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{84}\left[\frac{\mathrm{sen}(4\theta)}{4}-\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{168}.$$

12. Seja $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2 \le x^2+y^2 \le 9\}$. Calcule o volume de V, usando coordenadas cilíndricas.



O sólido apresentado:

- é interior ao cilindro $x^2+y^2=9$
- é exterior ao (duplo) cone $z^2=x^2+y^2$
- verifica $-3\le z\le 3$ (pois $z^2\le 9$)

Este sólido é simétrico em relação ao plano $z=0$ pelo que basta calcular o volume de $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2\le x^2+y^2\le 9 \text{ e } z\ge 0\}$.

Coordenadas cilíndricas:
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

De $z^2 \leq x^2+y^2 \leq 9$ e $z \geq 0$ obtemos: $z \leq R \leq 3$.

Logo $W = \{ (R, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 3,\ z \leq R \leq 3 \}$

Portanto:

$$\mathrm{vol}(W) = \iiint_W 1 \, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_z^3 R \, dR\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{R^2}{2}\Bigg|_{R=z}^{R=3} dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \frac{9}{2} - \frac{z^2}{2}\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}z - \frac{z^3}{6}\Bigg|_{z=0}^{z=3} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{27}{2} - \frac{9}{2}\, d\theta = 18\pi.$$

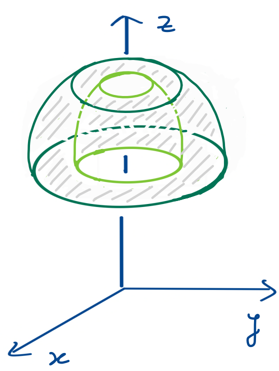
Finalmente: $\mathrm{vol}(V) = 2\,\mathrm{vol}(W) = 36\pi$.

14. Seja a região $\mathcal{D}$ definida, em coordenadas esféricas, pelas condições $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$.

   (a) Represente graficamente a região $\mathcal{D}$.

   (b) Calcule $\iiint_{\mathcal{D}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d(x,y,z)$.

a Fixado $\rho = \rho_0$ com $1 \leq \rho_0 \leq 2$, a região $\rho = \rho_0$ como $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ corresponde à porção da superfície esférica $\rho = \rho_0$ compreendida entre os "paralelos" $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\phi = \frac{\pi}{3}$.



b. Recordando que em coordenada esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

então $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ e $|\det \mathcal{J}T| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$ temos que:

$$\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} d(x,y,z) = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} e^{\rho^3}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{\rho^3}\Big[-\cos\phi\Big]_{\phi=\frac{\pi}{6}}^{\phi=\pi/3} d\theta \, d\rho = \int_1^2\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{\rho^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\, 2\pi \int_1^2 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \frac{\sqrt{3}-1}{3}\,\pi \int_1^2 3\rho^2 e^{\rho^3} d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{3}\,\pi \; e^{\rho^3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-1)(e^8-e).$$

17. Calcule o volume da esfera em $\mathbb{R}^3$ de raio $r > 0$.

Seja $\mathcal{E}_R$ a esfera de centro na origem e raio R.
Em coordenadas esféricas $\mathcal{E}_R$ escreve-se

$$\mathcal{E}_R = \{(\rho,\theta,\phi): \; 0\le\rho\le R, \; 0\le\theta\le 2\pi, \; 0\le\phi\le\pi\}$$

Logo: $\operatorname{vol}(\mathcal{E}_R) = \iiint_{\mathcal{E}_R} 1 \, dV =$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho = \int_0^R \int_0^{2\pi} -\rho^2 \cos\phi \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \, d\rho$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2\rho^2 \, d\theta \, dR = \int_0^R 4\pi \rho^2 \, d\rho = 4\pi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3.$$