Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 - $\boxed{A}$

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

21 dezembro 2019 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. A forma em escada reduzida da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço de __________ de dimensão __________.

Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é: ______________________________.

b) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de __________ de dimensão __________.

c) $(1,-1,1,0) \in \mathcal{N}(A)$? __________.

d) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: ______________________________.

e) Um vetor de $\mathbb{R}^4$ não pertencente a $\mathcal{L}(A)$ é: ______________________________.

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a aplicação linear $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associada à matriz $\begin{pmatrix} 2k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$.

a) $T_2(1,2,3,1) =$ __________.

b) Um vetor não nulo x tal que $x \in \text{Im } T_1$ é: __________.

c) $\dim(\text{Im } T_0) =$ __________ e $\dim(\text{Nuc } T_2) =$ __________.

d) Os valores de k para os quais a aplicação T_k é sobrejetiva são: ______________________________

e) Os valores de k para os quais a aplicação T_k não é injetiva são: ______________________________

3. Considere uma matriz A de ordem 3 cujos valores próprios são $-1, 1, 3$.

a) $\det A =$ __________.

b) O sistema $(A + 2I_3)x = 0$ é ______________________________.

c) Os valores próprios da matriz $(2A + 4I_3)^T$ são: ______________________________.

d) A matriz $B = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ é semelhante à matriz A.

e) A^2 é diagonalizável?__________, porque ______________________________

____

(continua no verso)

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U = \big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 3y - 4w = 0 \text{ e } z = 0\big\}.$$

a) Determine uma base e indique qual a dimensão de U.

b) Verifique que o vetor $(5, 3, 0, 6)$ pertence a U e escreva as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.

c) Diga, justificando, se os vetores $u = (2, -2, 0, 0)$, $v = (4, 0, 0, 3)$ e $w = (6, -2, 0, 3)$ são vetores geradores de U.

d) Indique, caso exista, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores u, v e w.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que o polinómio característico de A não depende de a.

b) Verifique que $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A.

c) Verifique que existe um valor de a para o qual a matriz A é diagonalizável e indique, para este valor, uma matriz que a diagonaliza.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma dada matriz e seja $f_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a aplicação definida por $f_A(X) = XA - AX$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Mostre que f_A é uma aplicação linear.

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determine $\operatorname{Nuc} f_A$ e indique uma sua base.

Cotação: $\boxed{\text{I}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 3 valores; **3.** 3 valores; $\boxed{\text{II}}$ - **1.** 3.5 valores; **2.** 4 valores; **3.** 2.5 valores.