



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

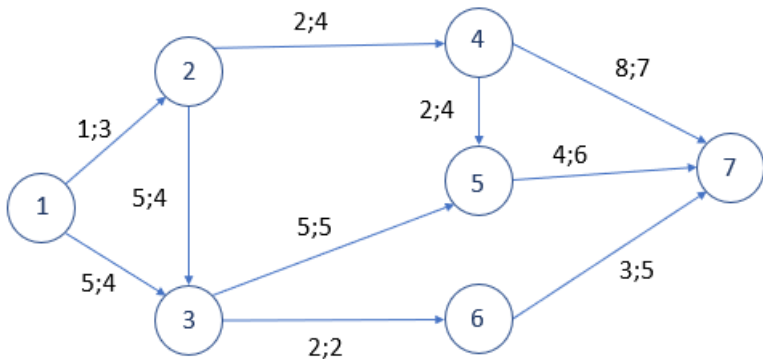
## **Aula Prática 3: Variantes e extensões do problema do caminho mais curto**

Elementos de Engenharia de Sistemas

2019/2020

## Caminhos disjuntos nos nodos

---



Rede com (comprimento; duração) nos arcos.

# Caminhos disjuntos nos nodos

---

- **Objetivo:** determinar dois caminhos disjuntos nos nodos (cada nodo, exceto o de origem e destino, faz parte de, no máximo, um caminho) entre o nodo  $o$  e o nodo  $d$ , de forma a minimizar a distância total.
- O modelo de PI vai ser semelhante ao que foi definido para o problema dos caminhos disjuntos nos arcos: o conjunto de restrições, a função objetivo e as restrições de conservação de fluxo para cada caminho mantêm-se.

# Caminhos disjuntos nos nodos

---

- Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall ij \in A$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho 2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall ij \in A$$

## Caminhos disjuntos nos nodos

---

- Função objetivo e restrições de conservação de fluxo para cada um dos caminhos:

$$\text{Min } z = x_{12} + 5x_{13} + \dots + 3x_{67} + y_{12} + 5y_{13} + \dots + 3y_{67} \quad (1)$$

$$x_{12} + x_{13} = 1 \quad (2)$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$-x_{45} - x_{57} - x_{65} = -1 \quad (4)$$

$$y_{12} + y_{13} = 1 \quad (5)$$

$$-y_{12} + y_{23} + y_{24} = 0 \quad (6)$$

$$\vdots$$

$$-y_{45} - y_{57} - y_{65} = -1 \quad (7)$$

## Caminhos disjuntos nos nodos

---

- Finalmente, adicionam-se as restrições que garantem que num nodo passa, no máximo, um caminho.

$$x_{23} + x_{24} + y_{23} + y_{24} \leq 1 \quad (8)$$

$$x_{35} + x_{36} + y_{35} + y_{36} \leq 1 \quad (9)$$

$$x_{45} + x_{46} + y_{45} + y_{46} \leq 1 \quad (10)$$

$$x_{57} + y_{57} \leq 1 \quad (11)$$

$$x_{67} + y_{67} \leq 1 \quad (12)$$

$$x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A. \quad (13)$$

# Caminhos disjuntos nos nodos

■ No Excel, temos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y											
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs	Rhs												
2	1	1	1																				0 =	1												
3	2	-1		1	1																		0 =	0												
4	3		-1	-1		1	1																0 =	0												
5	4				-1			1	1														0 =	0												
6	5					-1		-1		1													0 =	0												
7	6						-1				1												0 =	0												
8	7								-1	-1	-1												0 =	-1												
9	1											1	1										0 =	1												
10	2											-1		1	1								0 =	0												
11	3												-1	-1		1	1						0 =	0												
12	4														-1			1	1				0 =	0												
13	5															-1		-1		1			0 =	0												
14	6																-1				1		0 =	0												
15	7																		-1	-1	-1		0 =	-1												
16	2			1	1									1	1								0 <=	1												
17	3					1	1									1	1						0 <=	1												
18	4							1	1									1	1				0 <=	1												
19	5									1										1			0 <=	1												
20	6										1										1		0 <=	1												
21																							0 <=	1												
22		x_ij										y_ij																								
23	VD																																		Z	
24	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0													

# Caminhos disjuntos nos nodos

Solver Parameters



Set Objective:

\$WS24



To:



Max



Min



Value Of:

0

By Changing Variable Cells:

\$B\$23:\$U\$23



Subject to the Constraints:

\$B\$23:\$U\$23 = binary  
\$WS16:\$WS20 <= \$YS16:\$YS20  
\$WS2:\$WS15 = \$YS2:\$YS15



Add

Parâmetros no Solver.



# Caminhos disjuntos nos nodos

- Uma solução ótima para este problema é constituída pelos caminhos 1-2-4-5-7 e 1-3-6-7, com distância total igual a 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67	12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs
21																							
22		x <sub>ij</sub>										y <sub>ij</sub>											
23	VD	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		Z
24	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		19

## $k$ caminhos mais curtos

---

- **Objetivo:** determinar os  $k$  caminhos mais curtos entre o nodo  $o$  e o nodo  $d$ .
- Consideremos  $k = 3$ . Este problema vai ser resolvido iterativamente: na 1<sup>a</sup> iteração, será obtido o caminho mais curto de acordo com o modelo PI já construído.

## $k$ caminhos mais curtos

---

- Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- para cada arco  $ij \in A$ .

## $k$ caminhos mais curtos

---

- O modelo de PI é:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad z = & x_{12} + 5x_{13} + 5x_{23} + 2x_{24} + 5x_{35} + 2x_{36} + 2x_{45} + \\ & + 8x_{47} + 4x_{57} + 3x_{67} \end{aligned} \quad (14)$$

$$x_{12} + x_{13} = 1 \quad (15)$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 \quad (16)$$

$$-x_{13} + x_{35} + x_{36} = 0 \quad (17)$$

$$-x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 \quad (18)$$

$$-x_{35} + x_{57} = 0 \quad (19)$$

$$-x_{36} + x_{67} = 0 \quad (20)$$

$$-x_{45} - x_{57} - x_{67} = -1 \quad (21)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A. \quad (22)$$

## $k$ caminhos mais curtos

---

- Através do Solver, é obtido o caminho 1-2-4-5-7, com comprimento 9. Na 2<sup>a</sup> iteração, vamos acrescentar uma restrição ao modelo que exclua o caminho 1-2-4-5-7 das possíveis soluções.
- A restrição seguinte garante que na 2<sup>a</sup> iteração só podem ser escolhidos, no máximo, 3 dos 4 arcos do atual caminho.

$$x_{12} + x_{24} + x_{45} + x_{57} \leq 3 \quad (23)$$

## *k* caminhos mais curtos

---

- No Excel, acrescenta-se uma linha à matriz dos coeficientes e uma restrição ao Solver, obtendo o caminho 1-3-6-7, com comprimento 10.
- Para obter o 3<sup>o</sup> caminho mais curto, avançamos para a 3<sup>a</sup> iteração e excluímos também o caminho 1-3-6-7 (para além do 1-2-4-5-7 excluído anteriormente) das possíveis soluções, acrescentando ao modelo a restrição

$$x_{13} + x_{36} + x_{67} \leq 2 \quad (24)$$

- que garante que, dos 3 arcos da actual solução, só podem ser escolhidos para o 3<sup>o</sup> caminho mais curto, no máximo, 2.

## $k$ caminhos mais curtos

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										0 =		1
3	2	-1		1	1								0 =		0
4	3		-1	-1		1	1						0 =		0
5	4				-1			1	1				0 =		0
6	5					-1		-1		1			0 =		0
7	6						-1				1		0 =		0
8	7								-1	-1	-1		0 =		-1
9	1ºcmc	1			1			1		1			0 ≤		3
10	2ºcmc		1				1				1		0 ≤		2
11															
12	x <sub>ij</sub>												Z		
13	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3		0		

Dados do modelo no Excel na 3ª iteração.

## $k$ caminhos mais curtos

---

Solver Parameters

Set Objective:

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

- 
- 
- 
- 

Add Change

Dados do modelo no Solver na 3ª iteração.



## $k$ caminhos mais curtos

- Assim, o 3<sup>o</sup> caminho mais curto é 1-2-4-7, com comprimento 11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1 =		1
3	2	-1		1	1								0 =		0
4	3		-1	-1		1	1						0 =		0
5	4				-1			1	1				0 =		0
6	5					-1		-1		1			0 =		0
7	6						-1				1		0 =		0
8	7								-1	-1	-1		-1 =		-1
9	1 <sup>o</sup> cmc	1			1			1		1			2 <=		3
10	2 <sup>o</sup> cmc		1				1				1		0 <=		2
11															
12	x <sub>ij</sub>	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	Z			
13	comp	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3	11			

# Objetivo minmax

---

- **Objetivo:** determinar o caminho entre o nodo  $o$  e o nodo  $d$  cujo arco mais longo é o menor possível.
- Será definida uma variável de decisão adicional, além das variáveis binárias definidas anteriormente.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } ij \text{ faz parte do caminho mais curto} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall ij \in A$$

$u$  – comprimento do arco mais longo do caminho selecionado

## Objetivo minmax

---

- A função objetivo passa a ser **apenas**  $u$ , uma vez que se pretende minimizar o comprimento do arco mais longo.

$$\text{Min } u \quad (25)$$

$$x_{12} + x_{13} = 1 \quad (26)$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0 \quad (27)$$

$$-x_{13} + x_{35} + x_{36} = 0 \quad (28)$$

$$-x_{24} + x_{45} + x_{47} = 0 \quad (29)$$

$$-x_{35} + x_{57} = 0 \quad (30)$$

$$-x_{36} + x_{67} = 0 \quad (31)$$

$$-x_{45} - x_{57} - x_{65} = -1 \quad (32)$$

## Objetivo minmax

---

- Além das restrições de conservação de fluxo, é necessário acrescentar restrições que garantam que  $u$  corresponde efetivamente ao comprimento do arco mais longo do caminho selecionado.

$$u \geq x_{12} \quad (33)$$

$$u \geq 5x_{13} \quad (34)$$

$$u \geq 5x_{23} \quad (35)$$

$$\vdots$$

$$u \geq 4x_{57} \quad (36)$$

$$u \geq 3x_{67} \quad (37)$$

$$u \geq 0, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in A \quad (38)$$

# Objetivo minmax


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										0 =		1
3	2	-1		1	1								0 =		0
4	3		-1	-1		1	1						0 =		0
5	4				-1			1	1				0 =		0
6	5					-1		-1		1			0 =		0
7	6						-1				1		0 =		0
8	7								-1	-1	-1		0 =		-1
9															
10	Lhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
11		>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=				
12	Rhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
13															
14	VD	x_ij										u			
15															
16	custo	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3				

Dados do modelo no Excel.

# Objetivo minmax


- **Nota:** No Solver, é necessário adicionar  $u$  às variáveis de decisão.

Parâmetros do Solver ×

Definir Objetivo:  



Para: ☐ Máximo ☒ Mínimo ☐ Valor de:

Alterando as Células de Variável:



Sujeito às Restrições:

\$B\$10:\$K\$10 >= \$B\$12:\$K\$12  
\$M\$2:\$M\$8 = \$O\$2:\$O\$8

Parâmetros no Solver.

# Objetivo minmax

- Uma solução ótima é o caminho 1-2-4-5-7, com valor 4 (ou seja, o arco mais longo tem comprimento 4, e os arcos mais longos dos restantes caminhos têm comprimento igual ou superior a 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		12	13	23	24	35	36	45	47	57	67		Lhs		Rhs
2	1	1	1										1 =		1
3	2	-1		1	1								0 =		0
4	3		-1	-1		1	1						0 =		0
5	4				-1			1	1				0 =		0
6	5					-1		-1		1			0 =		0
7	6						-1				1		0 =		0
8	7								-1	-1	-1		-1 =		-1
9															
10	Lhs	3	4	4	2	4	4	2	4	0	4				
11		>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=	>=				
12	Rhs	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
13															
14	VD	x <sub>ij</sub>										u			
15		1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	4			
16	custo	1	5	5	2	5	2	2	8	4	3				