Problemas 4

Física Quântica

(Os problemas assinalados com *Griffiths* são retirados do livro *Revolutions in Twentieth Century Physics*, David J. Griffiths, Cambridge University Press (2013); os problemas assinalados com *Scarani* são retirados do livro *Six Quantum Pieces*, Valerio Scarani, World Scientific (2010).

Quantização e comprimento de onda de de Broglie

1. *(Griffiths, Cap. 3, P1)* Os lasers de hélio-néon emitem luz com um comprimento de onda de 6.338×10^{-7} m. Qual é a energia de um fotão do feixe de luz deste laser?

[Sol.: 3.14×10^{-19} J]

2. *(Griffiths, Cap. 3, P2)* Quantos fotões são emitidos por uma lâmpada de 100 W num minuto? Admita que a lâmpada emite luz monocromática, amarela, de frequência 5×10^{14} Hz.

[Sol.: 1.81×10^{22}]

3. *(Griffiths, Cap. 3, P3)* Luz com comprimento de onda de 4.5×10^{-7} m incide num pedaço de metal, provocando a extração de eletrões por efeito fotoelétrico. A função de trabalho (energia necessária para arrancar um eletrão) deste metal vale 2×10^{-19} J.

a) Qual é a energia de um fotão incidente?

b) Qual é a energia (máxima) de cada um dos eletrões extraídos?

[Sol.: a) 4.42×10^{-19} J; b) 2.42×10^{-19} J]

4. *(Griffiths, Cap. 3, P5)* Determine o comprimento de onda de de Broglie de uma bola de beisebol de massa 2 kg que se desloca à velocidade de 33 m/s.

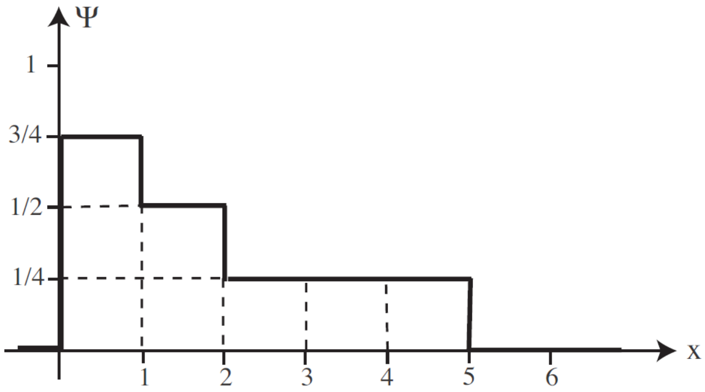
[Sol.: 1.00×10^{-35} m]

5. *(Griffiths, Cap. 3, P6)* Um eletrão desloca-se a uma velocidade tal que o seu comprimento de onda é igual ao da luz amarela (consulte a tabela 1.1 do livro). Qual é a sua velocidade?

[Sol.: 1230 m/s]

Função de onda e probabilidade

6. *(Griffiths, Cap. 1, P11)* Considere a função de onda de uma partícula apresentada na figura seguinte (x é uma distância expressa em unidades arbitrárias).



a) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre $x = 1$ e $x = 2$?

b) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre $x = 0$ e $x = 5$?

[Sol.: a) 1/4 ; b) 1]

7. Considere um eletrão descrito pela função de onda

$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}, & \text{se } x = 0 \\ \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão na posição $x = 0$.

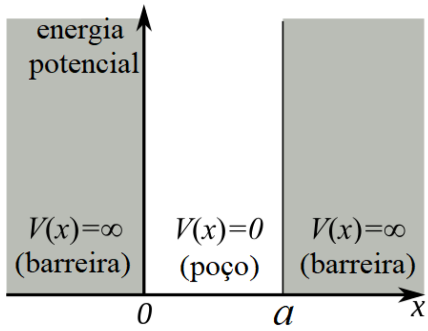
b) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão na posição $x = 5$.

[Sol.: a) $1/\pi^2$; b) 0.00372]

8. Considere uma partícula constrangida a movimentar-se numa região entre $x = 0$ e $x = a$, circunstância normalmente designada por partícula numa caixa rígida (ou poço de potencial infinito) a uma dimensão. Esta situação física pode ser representada por uma função energia potencial dada por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0 \; e \; x > a) \\ 0 & (0 < x < a) \end{cases}$$

e representada na figura.



Nestas condições a função de onda da partícula é dada por:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

em que A é uma constante de normalização e n é um inteiro ($n =$ 1, 2, 3,…).

a) Indique quais são as condições de fronteira a que deve obedecer a função de onda. Confirme que a função de onda acima verifica essas condições.

b) Qual é o valor da constante de normalização A?

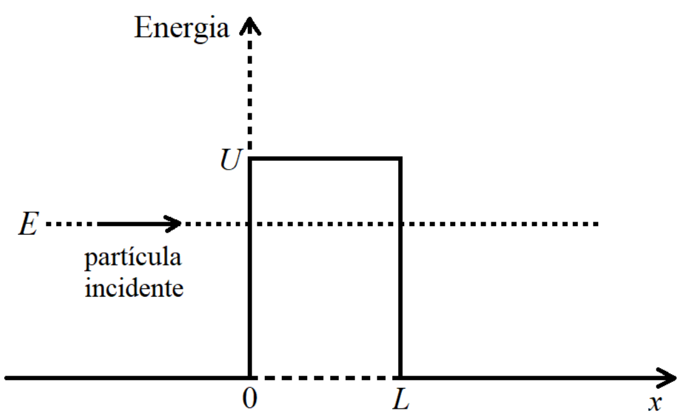
[Note que $\int \sin^2(kx)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$]

c) Qual é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição $x = a/2$, para cada n?

d) Use a relação de de Broglie e a aproximação clássica para determinar a expressão da energia cinética da partícula.

[Sol.: a) $\psi(0) = \psi(a) = 0$; b) $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$; **c)** $\frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi}{2})$; **d)** $\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ **]**

9. Classicamente uma partícula de energia E que incide numa barreira de potencial de valor $U > E$ (ver figura) não pode atravessá-la.



Contudo, a análise do problema de acordo com a física quântica permite concluir que a função de onda se pode estender para além dos limites clássicos do movimento da partícula. Por isso, ocorre um fenómeno designado por penetração da barreira de potencial (ou efeito túnel). A probabilidade de a partícula atravessar esta barreira é dada por

$$P = e^{-2\alpha L}$$

em que L é a largura da barreira e

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$$

Qual é a probabilidade de um eletrão de 0.5 eV de energia atravessar uma barreira de potencial de 3 eV e 1 nm de espessura?

[Sol.: 8.7×10^{-8}]

Relações de incerteza

10. *(Griffiths, Cap. 3, P12)* Um eletrão (massa de 9×10^{-31} kg) está localizado numa região de 1 mm de largura. Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

[Sol.: 0.0579 m/s]

11. *(Griffiths, Cap. 3, P13)* Sabe-se que uma bola de beisebol, de massa 0.5 kg, está no interior de uma caixa de sapatos, fechada, com 30 cm de comprimento.

a) Qual é a incerteza (mínima) do seu momento linear?

b) Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

c) A esta velocidade quanto tempo demoraria a bola a ir de uma extremidade à outra da caixa?

d) Tendo em consideração este resultado, discuta qual é a relevância do princípio de incerteza para objetos macroscópicos.

[Sol.: a) 1.76×10^{-34} kg m/s; b) 3.52×10^{-34} m/s; c) 8.53×10^{32} s; d) irrelevante]

12. Para uma partícula livre, o princípio de incerteza pode ser escrito como

$$(\Delta\lambda)(\Delta x) = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Se $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ para um fotão, qual o correspondente valor de Δx para:

a) $\lambda = 5.00\times10^{-4}$ Å (raios gama)

b) $\lambda = 5.00$ Å (raios x)

c) $\lambda = 5000$ Å (luz visível)

[Sol.: a) 397.9 Å; b) 3.979×10^{6} Å; c) 3.979×10^{9} Å]

13. Considere um feixe laser com um comprimento de onda de 800 ± 5 nm. Pode-se provar que

$$(\Delta\lambda)(\Delta t) = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

Determine a duração do pulso laser em fs.

[Sol.: 33.9 fs]

Transições

14. *(Griffiths, Cap. 3, P8)* Um átomo de hidrogénio sofre uma transição eletrónica do estado $n = 4$ para o estado $n = 1$.

a) Qual é a energia inicial do átomo?

b) Qual é a energia final do átomo?

c) Qual é a energia do fotão emitido?

d) Qual é a frequência do fotão emitido?

e) Este fotão pertence à região visível do espetro eletromagnético? Se não, qual é a região espectral a que pertence?

[Sol.: a) -0.851 eV; b) -13.61 eV; c) 012.76 eV; d) 3.09×10^{15} Hz; e) não; ultravioleta]

15. *(Griffiths, Cap. 3, P9)* Um eletrão de um átomo de hidrogénio transita do estado $n = 4$ para o estado $n = 2$ emitindo um fotão. Determine, para este fotão:

a) energia; b) a frequência; c) o comprimento de onda.

[Sol.: a) 2.55 eV; b) 6.16×10^{14} Hz; c) 4.87×10^{-7} m]

16. Os níveis energéticos de um poço de potencial infinito são dados por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que a é a largura do poço, e n é um inteiro.

Determine as frequências dos fotões emitidos quando um eletrão transita do estado em que $n = 4$ para os estados $n = 3$ e $n = 2$, quando $a = 1$ nm.

[Sol.: $f_{4\text{-}3}$ = 6.38×10^{14} Hz; $f_{4\text{-}2}$ = 1.09×10^{15} Hz]

17. Um sistema físico com importantes aplicações é o oscilador harmónico. O seu estudo fornece informações sobre as vibrações atómicas em moléculas e sólidos, uma vez que, em primeira aproximação, podemos admitir que o movimento relativo dos átomos é uma oscilação harmónica. Num oscilador harmónico os níveis de energia obtidos são particularmente simples:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

em que $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (K é uma constante e m é a massa) é igual à frequência de oscilação de um oscilador clássico com as mesmas características.

a) Verifique que a energia mínima do oscilador harmónico (energia do ponto zero) é $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$.

b) Verifique que os níveis de energia adjacentes do oscilador harmónico são todos igualmente espaçados de $\Delta E = \hbar\omega_c$.

c) Como se altera ΔE se se duplica a massa da partícula?

[Sol.: c) $\Delta E' = \Delta E/\sqrt{2}$]

Sobreposição de estados e entrelaçamento

18. *(Scarani, Cap. 1, Ex. 1.3)* Seja

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha\,|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$$
$$|\alpha^\perp\rangle = \sin\alpha\,|H\rangle - \cos\alpha|V\rangle$$

a) Prove que $\{|\alpha\rangle, |\alpha^\perp\rangle\}$ constitui uma base ortogonal e completa para qualquer α.

b) Seja $|\beta\rangle = \cos\beta\,|H\rangle + \sin\beta|V\rangle$. Calcule as probabilidades de, dado β, encontrar α ($P(\alpha|\beta)$) ou $\alpha^\perp$ ($P(\alpha^\perp|\beta)$).

[Sol.: $P(\alpha|\beta) = \cos^2(\alpha-\beta)$; $P(\alpha^\perp|\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$]

19. Uma determinada partícula está num estado quântico definido pelo vetor estado

$$|\psi\rangle = 0.1|\leftarrow\rangle + 0.3i|\uparrow\rangle + 0.5|\rightarrow\rangle - 0.4|\downarrow\rangle + a|\leftrightarrow\rangle$$

(Os estados $\big||\leftarrow\rangle, |\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle, \big|\downarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle$ são ortogonais entre si.)

Qual é a probabilidade de a partícula, ao se efetuar uma medida, ficar no estado $|\leftrightarrow\rangle$?
[Sol.: 0.49]

20. Um protão encontra-se no estado de spin descrito por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\downarrow\rangle$$

Qual é a probabilidade de, ao efetuar uma medida, encontrar o protão no estado $|\uparrow\rangle$ e qual a probabilidade de o encontrar no estado $|\downarrow\rangle$?
[Sol.: $P_\uparrow = 0.25$; $P_\downarrow = 0.75$]

21. Se tivermos duas partículas em que a primeira pode estar nos estados $|A\rangle$ ou $|B\rangle$, e a segunda pode estar nos estados $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$ ou $|\rightarrow\rangle$, quais são os estados possíveis das duas partículas?

[Sol.: $|A \uparrow\rangle$, $|A \downarrow\rangle$, $|A \leftarrow\rangle$, $|A \rightarrow\rangle$, $|B \uparrow\rangle$, $|B \downarrow\rangle$, $|B \leftarrow\rangle$, $|B \rightarrow\rangle$**]**

22. Considere um trio de partículas que podem, cada uma, estar num estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.

O seu vetor estado é dado por:

$$|\psi\rangle = 0.1|000\rangle + 0.3535(1+i)|001\rangle + 0.2|010\rangle - 0.1|100\rangle + 0.5|011\rangle - 0.361|101\rangle + 0.55|111\rangle$$

a) Qual é o estado mais provável, após uma medida (na base completa do espaço de Hilbert das três partículas)?

b) Se fizer 200 medidas em 200 sistemas idênticos a este, quantas vezes espera obter o estado $|010\rangle$?

c) Se fizer 20 medidas no mesmo sistema, quantas vezes espera obter o estado $|010\rangle$?

d) Qual é a probabilidade de, ao medir apenas a primeira das três partículas, a encontrar no estado $|0\rangle$?

e) Há alguma combinação de medidas que nunca aconteça?

[Sol.: a) $|111\rangle$; b) 8 (valor mais provável); c) 20 ou zero; d) 0.55; e) sim: $|110\rangle$]

23. *(Scarani, Cap. 1, Ex. 1.4)* Considere os seguintes estados de dois fotões

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle + |VV\rangle),$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|HH\rangle + |HV\rangle + |VH\rangle - |VV\rangle),$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|HH\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(|VH\rangle + |VV\rangle),$$

$$|\psi_4\rangle = \cos\theta\,|HH\rangle + \sin\theta|VV\rangle.$$

a) Verifique que todos os estados estão normalizados.

b) Quais são os estados não entrelaçados? Exprima-os como um produto explícito de estados com um só fotão.

[Sol.: b) estado não entrelaçado, $|\boldsymbol{\psi_1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{H}\rangle + |\boldsymbol{V}\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|\boldsymbol{H}\rangle + |\boldsymbol{V}\rangle) = |\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\pi}/4\rangle \otimes |\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\pi}/4\rangle$]

24. *(Scarani, Cap. 1, Ex. 1.5)* Considere $|\alpha\rangle$ e $|\alpha^{\perp}\rangle$, tal como definidos no problema 18.

Verifique que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle|\alpha\rangle + |\alpha^{\perp}\rangle|\alpha^{\perp}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle)$$

O que é que acontece se as polarizações dos dois fotões que se encontram neste estado forem medidas na mesma base?

[Sol.: as polarizações dos dois fotões são sempre iguais (estão perfeitamente correlacionadas)]

Problema adcional

25. Considere um eletrão no seguinte estado de spin segundo *z*:

$$|S_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

a) Faz-se uma medição do spin do eletrão utilizando um aparelho de Stern-Gerlach orientado segundo *z*. Qual é a probabilidade de, ao efetuar a medida, encontrar o eletrão no estado de spin para cima ($|\uparrow\rangle$) e qual a probabilidade de o encontrar no estado de spin para baixo ($|\downarrow\rangle$) ?

b) Suponha agora que se faz a experiência de medir o estado de spin de 10 eletrões, todos neste mesmo estado de spin $|S_z\rangle$, fazendo-os passar, um a um, pelo aparelho de Stern-Gerlach. Quantas vezes espera que se registe um eletrão com spin para cima e quantas com spin para baixo?

Nas várias repetições espera encontrar sempre o mesmo resultado?

c) Construa um gráfico de barras com a distribuição de probabilidades para o caso da alínea anterior.

[Sol.: a) $P_\uparrow = P_\downarrow = 0.5$; b)-c) as repetições vão produzir uma distribuição binomial de valores entre 0 e 10, com o pico em 5]