



Universidade de Brasília
Instituto de Física
Física Experimental 1

Relatório 03:
Coeficiente de Restituição

Turma 27
Grupo: 02

Anthony Ribeiro Rocha	Mat:22/2014840
Francisco Ribeiro de Souza Campos	Mat:22/2014590
Pedro de Lacerda Rangel	Mat:24/1027072

Professor:
Jailton Correia Fraga Junior

5 de fevereiro de 2025

1 Objetivos

O experimento teve como objetivo principal determinar o coeficiente de restituição em diferentes condições de colisão e verificar se a posição de retorno de um carrinho, após colidir com um elástico na base de um trilho de ar inclinado, decai exponencialmente com o número de colisões. Para isso, foram realizadas medições da posição de retorno do carrinho ao longo de sucessivas colisões, considerando três cenários distintos: um tubo de ensaio acoplado ao carrinho vazio, meio cheio e cheio de líquido. Os dados obtidos permitiram a análise da relação entre a perda de energia em cada colisão e o coeficiente de restituição, bem como a construção de gráficos para modelar o comportamento da posição do carrinho em função do número de colisões.

2 Materiais

1. 01 trilho de 120cm conectado a uma unidade de fluxo de ar;
2. 01 bloco cilíndrico para inclinar o trilho;
3. 01 Y de final de curso com fixador U para elástico;
4. 01 carrinho para trilho cor preta;
5. 01 elástico circular;
6. 01 tubo de ensaio;
7. 01 suporte para acoplar o tubo de ensaio ao carrinho;
8. 01 fita métrica;
9. 01 Água para encher o tubo de ensaio.
10. SciDAVis
11. Python

3 Introdução

O coeficiente de restituição (ε) é um parâmetro fundamental na caracterização de colisões mecânicas, definido como a razão entre a velocidade relativa dos corpos após a colisão e a velocidade relativa antes da colisão. Em termos matemáticos, ele pode ser expresso como:

$$\varepsilon = \frac{|v_{f2} - v_{f1}|}{|v_{i2} - v_{i1}|} \quad (1)$$

onde v_{i1} e v_{i2} são as velocidades iniciais dos corpos e v_{f1} e v_{f2} são as velocidades após a colisão. Para colisões perfeitamente elásticas, $\varepsilon = 1$; para colisões perfeitamente inelásticas, $\varepsilon = 0$. Em casos reais, o coeficiente de restituição assume valores intermediários, refletindo a dissipação parcial de energia cinética em forma de calor, som ou deformações plásticas [Resnick e Halliday 2002].

No presente experimento, analisou-se o comportamento do coeficiente de restituição em um sistema onde um carrinho, movendo-se sobre um trilho de ar inclinado, colide repetidamente com uma mola localizada na extremidade inferior. A cada colisão, parte da energia mecânica do sistema é dissipada, resultando em um retorno progressivamente menor do carrinho ao longo das sucessivas colisões. Esse fenômeno pode ser descrito por um modelo matemático baseado no decaimento exponencial:

$$\Delta X_n = \Delta X_0 e^{-\alpha n} \quad (2)$$

onde ΔX_n é a distância do carrinho após a n -ésima colisão, ΔX_0 é a posição inicial, e α é um parâmetro relacionado à taxa de perda de energia. A modelagem por um decaimento exponencial é uma consequência direta da redução sucessiva da energia mecânica devido à dissipação em cada colisão, um fenômeno que pode ser verificado experimentalmente através da análise de gráficos em escala linear e logarítmica.

Além disso, a inserção de um tubo de ensaio acoplado ao carrinho, em diferentes condições de volume de líquido, permite investigar o impacto da distribuição de massa e da interação entre o líquido e o movimento do carrinho na dissipação de energia. Assim, o estudo experimental conduzido visa não apenas quantificar o coeficiente de restituição para diferentes cenários, mas também compreender a influência das condições do sistema na perda de energia ao longo das colisões sucessivas.

4 Procedimento e análise de dados

Para a análise dos dados obtidos no experimento, inicialmente, foram registradas as posições do carrinho após cada colisão, tanto para o tubo vazio quanto para os cenários de tubo meio cheio e cheio. Esses dados foram organizados em uma tabela, contendo os valores de ΔX (distância inicial) e $\Delta X'$ (distância após a colisão subsequente) para cada colisão nos três cenários, conforme apresentado na tabela 1.

Tabela dos ΔX e $\Delta X'$					
Tubo Vazio		Tubo Meio Cheio		Tubo Cheio	
ΔX	$\Delta X'$	ΔX	$\Delta X'$	ΔX	$\Delta X'$
0.443 ± 0.001	0.351 ± 0.001	0.443 ± 0.001	0.338 ± 0.001	0.443 ± 0.001	0.355 ± 0.001
0.351 ± 0.001	0.286 ± 0.001	0.338 ± 0.001	0.264 ± 0.001	0.355 ± 0.001	0.292 ± 0.001
0.286 ± 0.001	0.236 ± 0.001	0.264 ± 0.001	0.210 ± 0.001	0.292 ± 0.001	0.241 ± 0.001
0.236 ± 0.001	0.195 ± 0.001	0.210 ± 0.001	0.170 ± 0.001	0.241 ± 0.001	0.199 ± 0.001
0.195 ± 0.001	0.166 ± 0.001	0.170 ± 0.001	0.138 ± 0.001	0.199 ± 0.001	0.162 ± 0.001
0.166 ± 0.001	0.137 ± 0.001	0.138 ± 0.001	0.113 ± 0.001	0.162 ± 0.001	0.134 ± 0.001
0.137 ± 0.001	0.118 ± 0.001	0.113 ± 0.001	0.090 ± 0.001	0.134 ± 0.001	0.114 ± 0.001
0.118 ± 0.001	0.097 ± 0.001	0.090 ± 0.001	0.070 ± 0.001	0.114 ± 0.001	0.098 ± 0.001
0.097 ± 0.001	0.082 ± 0.001	0.070 ± 0.001	0.060 ± 0.001	0.098 ± 0.001	0.079 ± 0.001

Tabela 1: Tabela dos ΔX e $\Delta X'$

A partir dos valores experimentais, foram gerados gráficos representando o comportamento de ΔX em função da ordem da colisão, permitindo visualizar o decaimento exponencial das posições de retorno do carrinho. A equação ajustada aos dados experimentais seguiu o formato mono-log, permitindo extrair os coeficientes angulares e lineares de cada curva ajustada [SciDAVis 2021].

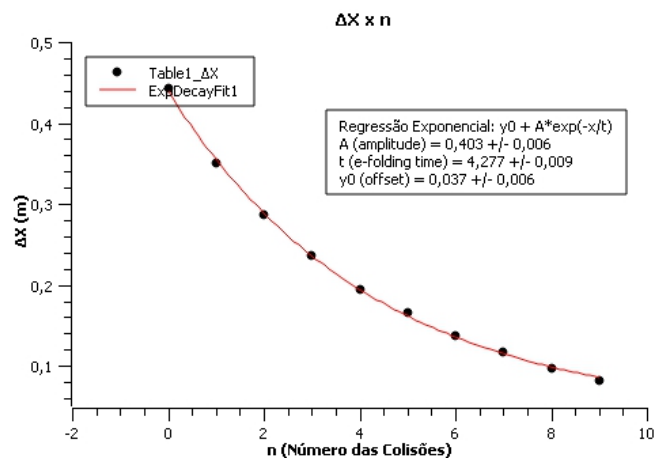


Figura 1: Gráfico Regressão Exponencial ΔX x n

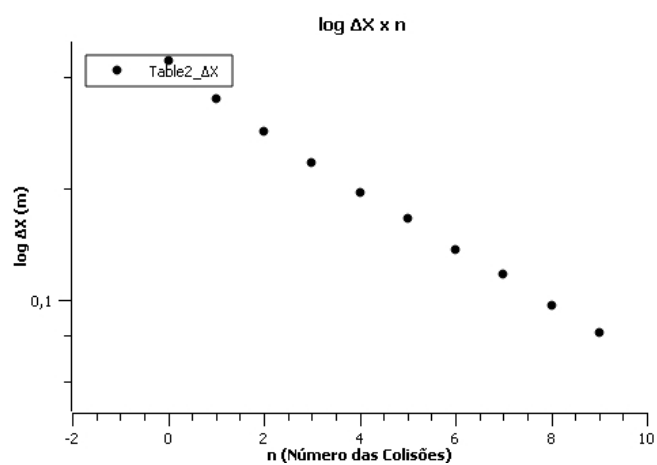


Figura 2: Gráfico $\log \Delta X$ x n

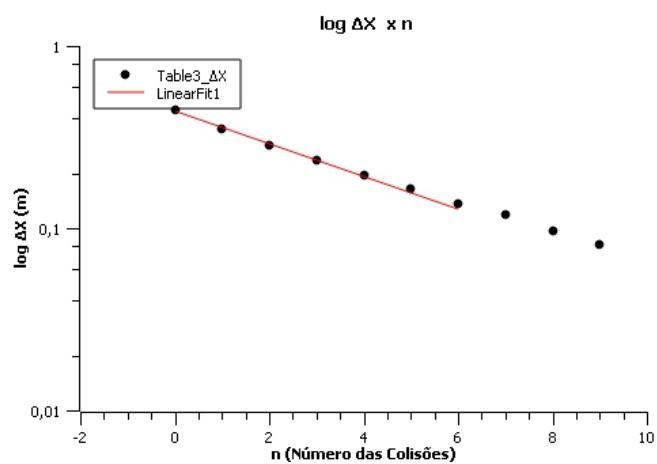


Figura 3: Gráfico Regressão Linear $\log \Delta X$ x n

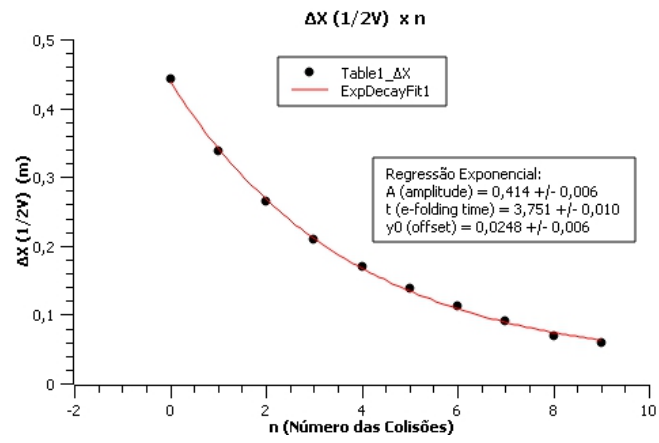


Figura 4: Gráfico Regressão Exponencial $\Delta X (1/2V) \times n$

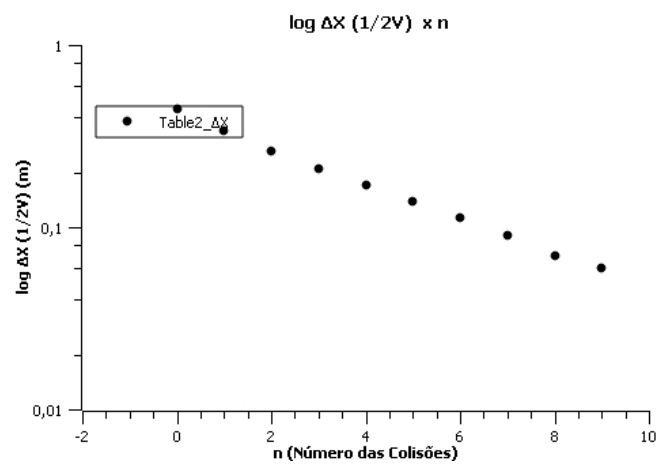


Figura 5: Gráfico $\log \Delta X (1/2V) \times n$

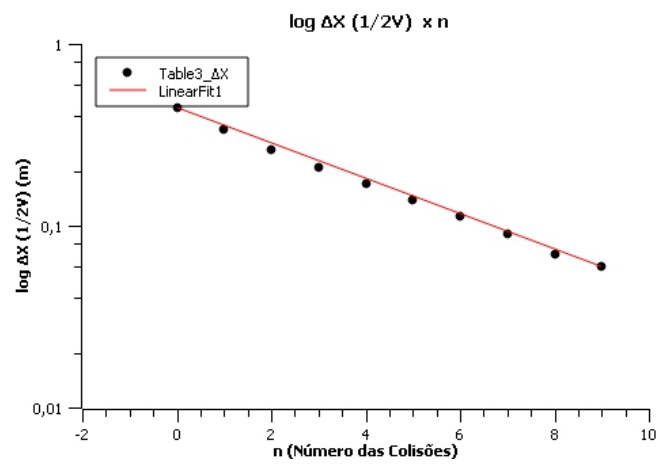


Figura 6: Gráfico Regressão Linear $\log \Delta X (1/2V) \times n$

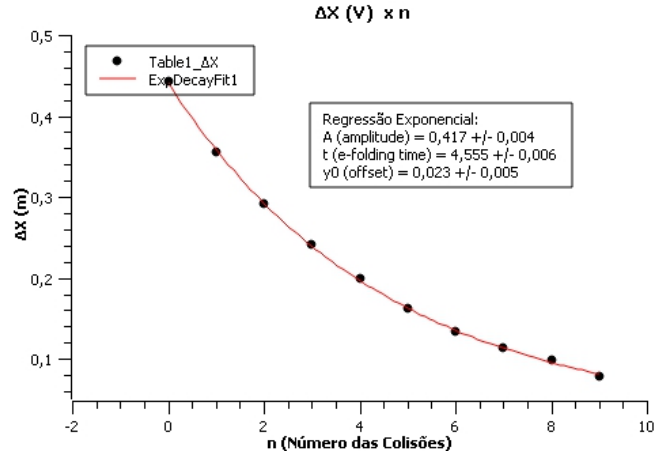


Figura 7: Gráfico Regressão Exponencial ΔX (V) x n

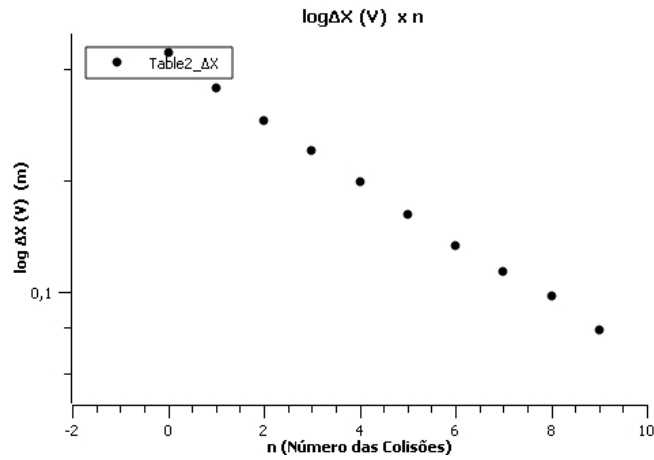


Figura 8: Gráfico $\log \Delta X$ (V) x n

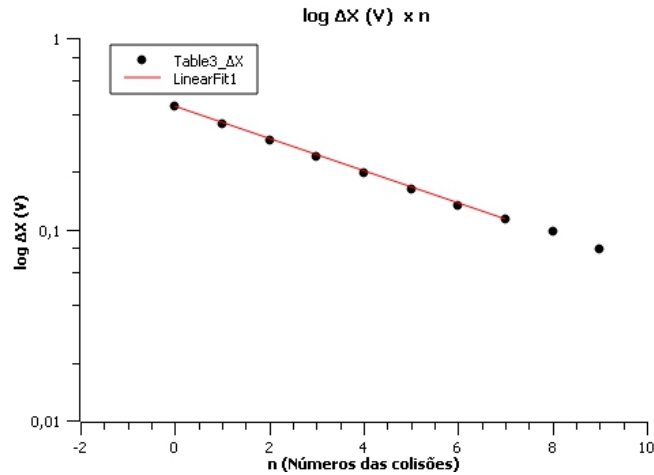


Figura 9: Gráfico Regressão Linear $\log \Delta X$ (V) x n

Com os coeficientes extraídos, foi possível calcular o parâmetro α de decaimento exponencial e, conseqüentemente, os coeficientes de restituição para cada cenário. Para facilitar a análise, os valores médios do coeficiente de restituição foram determinados para cada condição do experimento, viabilizando a construção de um gráfico do coeficiente de restituição em função do volume de líquido presente no tubo. Os cálculos e as equações foram todos realizados no programa *Python* conforme é mostrado a seguir:

```

import math

class medida:
    def __init__(self, x, dx):
        self.x = x
        self.dx = dx
    def __add__(self, outro):
        x = self.x + outro.x
        dx = self.dx + outro.dx
        return medida(x, dx)
    def __sub__(self, outro):
        x = self.x - outro.x
        dx = self.dx + outro.dx
        return medida(x, dx)
    def __mul__(self, outro):
        x = self.x * outro.x
        dx = self.x * outro.dx + outro.x * self.dx
        return medida(x, dx)
    def __truediv__(self, outro):
        x = self.x / outro.x
        dx = (self.dx + self.x / outro.x * outro.dx) / outro.x
        return medida(x, dx)
    def __str__(self):
        return ("{0:.3f} ± {1:.3f}").format(self.x, self.dx)

def ler_amostragem(amostra, amostragem, erro_instrumental):
    n = len(amostragem)
    medio = 0
    for valor in amostragem:
        medio += valor
    medio /= n
    desvio = 0
    for valor in amostragem:
        desvio += (valor - medio) ** 2
    desvio /= n * (n - 1)
    desvio = math.sqrt(desvio)
    print(f'### Desvio {amostra} ###')
    print(f'{desvio:.3f}')
    return medida(medio, desvio + erro_instrumental)

print("### experimento 3 ###")

#Dados experimentais
erro_regua = 0.0005 # m

X_e = medida(0.443, erro_regua)

tv_0 = medida(0.443, erro_regua)
tvi_0 = medida(0.351, erro_regua)
tv_1 = medida(0.351, erro_regua)
tvi_1 = medida(0.286, erro_regua)

```

```

tv_2 = medida(0.286, erro_regua)
tvi_2 = medida(0.236, erro_regua)
tv_3 = medida(0.236, erro_regua)
tvi_3 = medida(0.195, erro_regua)
tv_4 = medida(0.195, erro_regua)
tvi_4 = medida(0.166, erro_regua)
tv_5 = medida(0.166, erro_regua)
tvi_5 = medida(0.137, erro_regua)
tv_6 = medida(0.137, erro_regua)
tvi_6 = medida(0.118, erro_regua)
tv_7 = medida(0.118, erro_regua)
tvi_7 = medida(0.097, erro_regua)
tv_8 = medida(0.097, erro_regua)
tvi_8 = medida(0.082, erro_regua)
tv_9 = medida(0.082, erro_regua)
tvi_9 = medida(0.066, erro_regua)

delta_s_tv = [tv_0, tv_1, tv_2, tv_3, tv_4, tv_5, tv_6, tv_7,
tv_8, tv_9]
delta_s_tvi = [tvi_0, tvi_1, tvi_2, tvi_3, tvi_4, tvi_5, tvi_6,
tvi_7, tvi_8, tvi_9]

print("### Tabela dos  $\Delta X$  e  $\Delta X'$  do tubo vazio ###")
print("|  $\Delta X$  |  $\Delta X'$  |")
for delta in range(9):
    print("| {0} | {1} |".format(delta_s_tv[delta],
    delta_s_tvi[delta]))
print()
print("#####")
print()

erro_ang = 0.004
coef_ang = medida(-0.0524, erro_ang)
print("### Valor do Coeficiente Angular ###")
print("A = {0}".format(coef_ang))
print("#####")
print()

erro_lin = 0.017
coef_lin = medida(0.440, erro_lin)
print("### Valor do Coeficiente Linear ###")
print("B = {0}".format(coef_lin))
print("#####")
print()
log_e = 0.434
e = 2.718

#valor de alfa
alfa = medida(coef_ang.x / -log_e, coef_ang.dx)
print("### Valor de alfa ###")
print("alfa = {0}".format(alfa))
print()

```



```

#equacao encontrada
print("### Equacao encontrada ###")
print("log  $\Delta X(n) = \{0:.3f\} \{1:.3f\} * n$ ".format(coef_lin.x, coef_ang.x))
print()
print("#####")
print()

print("### Relacao entre eps e o parametro alfa ###")
#coeficiente de restituicao
print("eps = e^(alfa(n - n')/2)")
print()
print("#####")
print()

coef_restl = []
for deltax in range(9):
    div = delta_s_tvi[deltax]/delta_s_tv[deltax]
    div.x = math.sqrt(div.x)
    div.dx = math.sqrt(div.dx)
    coef_restl.append(div)

print("### Coeficientes de Restituicao  $\Delta X$  (0V) ###")
print("| eps |")
for e in coef_restl:
    print("| {0} |".format(e))
print()
print("#####")
print()

#Tabela dos  $\Delta X$  do tubo meio cheio
X_e = medida(0.443, erro_regua)

tx_0 = medida(0.443, erro_regua)
txi_0 = medida(0.338, erro_regua)
tx_1 = medida(0.338, erro_regua)
txi_1 = medida(0.264, erro_regua)
tx_2 = medida(0.264, erro_regua)
txi_2 = medida(0.210, erro_regua)
tx_3 = medida(0.210, erro_regua)
txi_3 = medida(0.170, erro_regua)
tx_4 = medida(0.170, erro_regua)
txi_4 = medida(0.138, erro_regua)
tx_5 = medida(0.138, erro_regua)
txi_5 = medida(0.113, erro_regua)
tx_6 = medida(0.113, erro_regua)
txi_6 = medida(0.090, erro_regua)
tx_7 = medida(0.090, erro_regua)
txi_7 = medida(0.070, erro_regua)
tx_8 = medida(0.070, erro_regua)
txi_8 = medida(0.060, erro_regua)
tx_9 = medida(0.060, erro_regua)

```

```

txi_9 = medida(0.058, erro_regua)

delta_s_tx = [tx_0, tx_1, tx_2, tx_3, tx_4, tx_5, tx_6, tx_7,
tx_8, tx_9]
delta_s_txi = [txi_0, txi_1, txi_2, txi_3, txi_4, txi_5, txi_6,
txi_7, txi_8, txi_9]

print("### Tabela dos  $\Delta X$  e  $\Delta X'$  do tubo meio cheio ###")
print("|  $\Delta X$  (1/2V) |  $\Delta X'$  (1/2V) |")
for delta2 in range(9):
    print("| {0} | {1} |".format(delta_s_tx[delta2],
    delta_s_txi[delta2]))
print()
print("#####")
print()

erro_ang2 = 0
coef_ang2 = medida(-0.043, 0)
print("### Valor do Coeficiente Angular ###")
print("A = {0}".format(coef_ang2))
print("#####")
print()

erro_lin2 = 0
coef_lin2 = medida(0.0443, 0)
print("### Valor do Coeficiente Linear ###")
print("B = {0}".format(coef_lin2))
print("#####")
print()

print("### Valor de alfa (1/2V) ###")
#valor de alfa
alfa2 = medida(coef_ang2.x / -log_e, 0)
print("alfa = {0}".format(alfa2))
print()
print("#####")
print()

print("### Equacao encontrada ###")
#equacao encontrada
print("log  $\Delta X(n)$  = {0:.3f} {1:.3f}*n".format(coef_lin2.x,
coef_ang2.x))
print()
print("#####")
print()

#coeficiente de restituicao
coef_restl2 = []
for deltax2 in range(9):
    div2 = delta_s_txi[deltax2]/delta_s_tx[deltax2]
    div2.x = math.sqrt(div2.x)
    div2.dx = math.sqrt(div2.dx)

```

```

    coef_restl2.append(div2)

print("### Coeficientes de Restituicao (1/2V) ###")
print("| eps |")
for e2 in coef_restl2:
    print("| {0} |".format(e2))

print()
print("#####")
print()

#Tabela dos  $\Delta X$  do tubo cheio
X_e = medida(0.443, erro_regua)

ts_0 = medida(0.443, erro_regua)
tsi_0 = medida(0.355, erro_regua)
ts_1 = medida(0.355, erro_regua)
tsi_1 = medida(0.292, erro_regua)
ts_2 = medida(0.292, erro_regua)
tsi_2 = medida(0.241, erro_regua)
ts_3 = medida(0.241, erro_regua)
tsi_3 = medida(0.199, erro_regua)
ts_4 = medida(0.199, erro_regua)
tsi_4 = medida(0.162, erro_regua)
ts_5 = medida(0.162, erro_regua)
tsi_5 = medida(0.134, erro_regua)
ts_6 = medida(0.134, erro_regua)
tsi_6 = medida(0.114, erro_regua)
ts_7 = medida(0.114, erro_regua)
tsi_7 = medida(0.098, erro_regua)
ts_8 = medida(0.098, erro_regua)
tsi_8 = medida(0.079, erro_regua)
ts_9 = medida(0.079, erro_regua)
tsi_9 = medida(0.066, erro_regua)

delta_s_ts = [ts_0, ts_1, ts_2, ts_3, ts_4, ts_5, ts_6, ts_7,
ts_8, ts_9]
delta_s_tsi = [tsi_0, tsi_1, tsi_2, tsi_3, tsi_4, tsi_5, tsi_6,
tsi_7, tsi_8, tsi_9]

print("### Tabela dos  $\Delta X$  e  $\Delta X'$  do tubo cheio ###")
print("|  $\Delta X$  (V) |  $\Delta X'$  (V) |")
for delta1 in range(9):
    print("| {0} | {1} |".format(delta_s_ts[delta1],
delta_s_tsi[delta1]))
print()
print("#####")
print()

erro_coef_ang1 = 0
coef_ang1 = medida(-0.047, 0)
print("### Valor do Coeficiente Angular ###")

```

```

print("A = {0}".format(coef_ang1))
print("#####")
print()

erro_lin1 = 0
coef_lin1 = medida(0.443, 0)
print("### Valor do Coeficiente Linear ###")
print("B = {0}".format(coef_lin1))
print("#####")
print()

print("### Valor de alfa (V) ###")
#valor de alfa
alfa1 = medida(coef_ang1.x / -log_e, erro_coef_ang1)
print("alfa = {0}".format(alfa1))
print()
print("#####")
print()

print("### Equacao encontrada ###")
print("log  $\Delta X(n)$  = {0:.3f} {1:.3f}*n".format(coef_lin1.x,
coef_ang1.x))
print()
print("#####")
print()

#coeficiente de restituicao
coef_restl1 = []
for deltax1 in range(9):
    div1 = delta_s_tsi[deltax1]/delta_s_ts[deltax1]
    div1.x = math.sqrt(div1.x)
    div1.dx = math.sqrt(div1.dx)
    coef_restl1.append(div1)

print("### Coeficientes de Restituicao  $\Delta X$  (V) ###")
print("| eps |")
for e1 in coef_restl1:
    print("| {0} |".format(e1))

print()
print("#####")
print()

print("### Valores medios dos coeficientes de restituicao ###")
coef_vazio = medida(0, 0)
coef_meio = medida(0, 0)
coef_cheio = medida(0, 0)

for i in range(9):
    coef_vazio = medida(coef_vazio.x + coef_restl[i].x/9,
    coef_vazio.dx + coef_restl[i].dx/9)
    coef_meio = medida(coef_meio.x + coef_restl2[i].x/9,

```

```

coef_meio.dx + coef_restl2[i].dx/9)
coef_cheio = medida(coef_cheio.x + coef_restl1[i].x/9,
coef_cheio.dx + coef_restl1[i].dx/9)

print("Coeficiente de Restituicao Medio Vazio = {0}".
format(coef_vazio))
print("Coeficiente de Restituicao Medio Meio-Cheio = {0}".
format(coef_meio))
print("Coeficiente de Restituicao Medio Cheio = {0}".
format(coef_cheio))

```

```

### experimento 3 ###
### Tabela dos  $\Delta X$  e  $\Delta X'$  do tubo vazio ###
|  $\Delta X$  |  $\Delta X'$  |
| 0.443  $\pm$  0.001 | 0.351  $\pm$  0.001 |
| 0.351  $\pm$  0.001 | 0.286  $\pm$  0.001 |
| 0.286  $\pm$  0.001 | 0.236  $\pm$  0.001 |
| 0.236  $\pm$  0.001 | 0.195  $\pm$  0.001 |
| 0.195  $\pm$  0.001 | 0.166  $\pm$  0.001 |
| 0.166  $\pm$  0.001 | 0.137  $\pm$  0.001 |
| 0.137  $\pm$  0.001 | 0.118  $\pm$  0.001 |
| 0.118  $\pm$  0.001 | 0.097  $\pm$  0.001 |
| 0.097  $\pm$  0.001 | 0.082  $\pm$  0.001 |

#####

### Valor do Coeficiente Angular ###
A = -0.052  $\pm$  0.004
#####

### Valor do Coeficiente Linear ###
B = 0.440  $\pm$  0.017
#####

### Valor de alfa ###
alfa = 0.121  $\pm$  0.004

### Equacao encontrada ###
log  $\Delta X(n)$  = 0.440 -0.052*n

#####

### Relacao entre eps e o parametro alfa ###
eps =  $e^{(alfa(n - n')/2)}$ 

#####

### Coeficientes de Restituicao  $\Delta X$  (0V) ###
| eps |
| 0.890  $\pm$  0.045 |
| 0.903  $\pm$  0.051 |
| 0.908  $\pm$  0.056 |

```

0.909	± 0.062
0.923	± 0.069
0.908	± 0.074
0.928	± 0.082
0.907	± 0.088
0.919	± 0.098

#####

Tabela dos ΔX e $\Delta X'$ do tubo meio cheio

ΔX (1/2V)	$\Delta X'$ (1/2V)
0.443	± 0.001
0.338	± 0.001
0.264	± 0.001
0.210	± 0.001
0.170	± 0.001
0.138	± 0.001
0.113	± 0.001
0.090	± 0.001
0.070	± 0.001

#####

Valor do Coeficiente Angular

A = -0.043 ± 0.000

#####

Valor do Coeficiente Linear

B = 0.440 ± 0.017

#####

Valor de alfa (1/2V)

alfa = 0.099 ± 0.000

#####

Equacao encontrada

$\log \Delta X(n) = 0.044 - 0.043 \cdot n$

#####

Coeficientes de Restituicao (1/2V)

eps	
0.873	± 0.045
0.884	± 0.051
0.892	± 0.058
0.900	± 0.066
0.901	± 0.073
0.905	± 0.081
0.892	± 0.089
0.882	± 0.099
0.926	± 0.115

#####

Tabela dos ΔX e $\Delta X'$ do tubo cheio

ΔX (V)	$\Delta X'$ (V)
0.443 ± 0.001	0.355 ± 0.001
0.355 ± 0.001	0.292 ± 0.001
0.292 ± 0.001	0.241 ± 0.001
0.241 ± 0.001	0.199 ± 0.001
0.199 ± 0.001	0.162 ± 0.001
0.162 ± 0.001	0.134 ± 0.001
0.134 ± 0.001	0.114 ± 0.001
0.114 ± 0.001	0.098 ± 0.001
0.098 ± 0.001	0.079 ± 0.001

#####

Valor do Coeficiente Angular

A = -0.047 ± 0.000

#####

Valor do Coeficiente Linear

B = 0.443 ± 0.000

#####

Valor de alfa (V)

alfa = 0.108 ± 0.000

#####

Equacao encontrada

$\log \Delta X(n) = 0.443 - 0.047 \cdot n$

#####

Coeficientes de Restituicao ΔX (V)

eps
0.895 ± 0.045
0.907 ± 0.051
0.908 ± 0.056
0.909 ± 0.062
0.902 ± 0.068
0.909 ± 0.075
0.922 ± 0.083
0.927 ± 0.090
0.898 ± 0.096

#####

Valores medios dos coeficientes de restituicao

Coeficiente de Restituicao Medio Vazio = 0.911 ± 0.069

Coeficiente de Restituicao Medio Meio-Cheio = 0.895 ± 0.075

```
Coeficiente de Restituicao Medio Cheio = 0.909 ± 0.069  
>>>
```

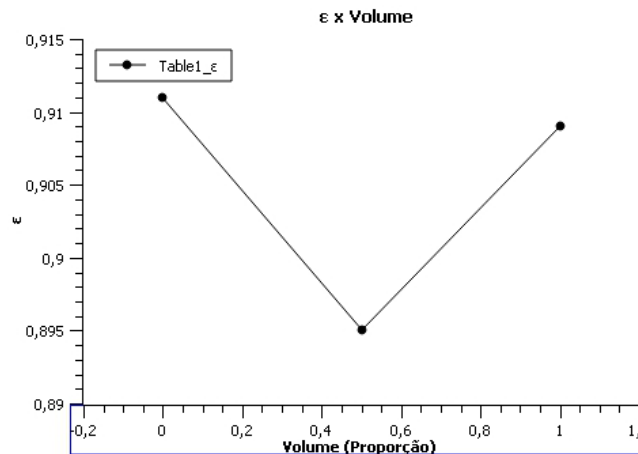


Figura 10: Gráfico ϵ x Volume

5 Conclusão

Os resultados obtidos revelaram uma variação interessante no comportamento do coeficiente de restituição. No cenário do tubo vazio, o coeficiente manteve-se relativamente estável. No entanto, no cenário com o tubo meio cheio, observou-se uma queda significativa no valor médio de ϵ . Esse fenômeno pode ser atribuído à movimentação do líquido dentro do tubo, que gera dissipação adicional de energia devido à interação fluido-estrutura, conforme discutido por Halliday [Resnick e Halliday 2002]. Já no caso do tubo completamente cheio, o coeficiente de restituição voltou a crescer, pois a massa do líquido tornou-se rigidamente acoplada ao movimento do carrinho, reduzindo os efeitos dissipativos internos.

Dessa forma, os dados coletados e analisados permitiram verificar empiricamente a relação entre a dissipação de energia, o coeficiente de restituição e a presença de líquido no sistema, corroborando a hipótese de que a distribuição de massa e a interação fluido-estrutura afetam significativamente o comportamento das colisões.

Referências

[Resnick e Halliday 2002] RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física*: Vol. i. 5^a. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora (LTC), 2002.

[SciDAVis 2021] SciDAVis2021 SCIDAVIS. [S.l.]: SciDAVis Development Team, 2021.