

Movimento ondulatório: onda na corda.

IF - UnB / Física 2 Experimental

Objetivo didático: Observar e discutir ondas reais utilizando ondas estacionárias geradas em uma corda. Mostrar a interdependência entre velocidade, frequência e comprimento de onda, avaliar as propriedades que afetam a velocidade de propagação e observar a relação dos harmônicos em sistemas de ondas estacionárias.

Conhecimentos explorados: Leis de Newton, propagação de ondas, reflexão de ondas em obstáculos fixos, ondas estacionárias, ferramentas de análise gráfica.

MATERIAL

- Excitador de ondas PASCO modelo (WA-9857),
- Gerador de ondas senoidais PASCO (WA-9867),
- Balança de precisão (0,1g),
- 1m de corda elástica, 1m de fio de nylon,
- Dois conjuntos com 8 pesos (total aproximado de 400g) com suportes,
- 2 suportes de fixação,
- Poste com roldana.

INTRODUÇÃO

A propagação de ondas é um fenômeno que ocorre em todos os sistemas físicos. Até mesmo na ausência de sistemas físicos ele se manifesta, como exemplificado pela propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo. A maior parte dos fenômenos ondulatórios, tais como a propagação, a difração, a refração e a interferência, é universal, no sentido de que as características gerais desses fenômenos independem do tipo de sistema físico oscilante e, por isso, entender bem o que acontece em um desses sistemas significa entender a fenomenologia do que ocorre na maioria dos demais.

Neste experimento, analisaremos o movimento de uma onda em uma corda elástica esticada, que é um tipo de onda conhecida como onda transversal. Esse nome decorre do fato de que as oscilações produzidas pela onda são perpendiculares (transversais) à direção de sua propagação.

Os parâmetros fundamentais que definem uma onda são a amplitude, a frequência e a sua velocidade de propagação. Qualquer onda, com forma arbitrária, pode ser decomposta como uma superposição de ondas senoidais de várias frequências e amplitudes.

Cada uma dessas, em um determinado instante de tempo, possui uma variação espacial que pode ser expressa pelo chamado comprimento de onda (veja λ na figura 1), que é função do número de oscilações por segundo que essa onda realiza (sua frequência) e da sua velocidade de propagação. Para um dado número de oscilações por segundo, quanto maior a velocidade, maior será a distância entre dois máximos consecutivos (comprimento de onda).

Descrição matemática de uma onda propagante

Imagine que se tenha tirado, em três instantes consecutivos, três fotos de uma onda que se propaga em uma corda. O que se observa é semelhante à figura (1) mostrada a seguir. A onda de cor preta corresponde à foto tirada no tempo $t=0s$, a vermelha à do tempo $t=0,8s$ e a verde à do tempo $t=1,6s$. Na realidade essas três ondas foram geradas usando-se a função

$$y(x) = \sin(2\pi(x + \phi)),$$

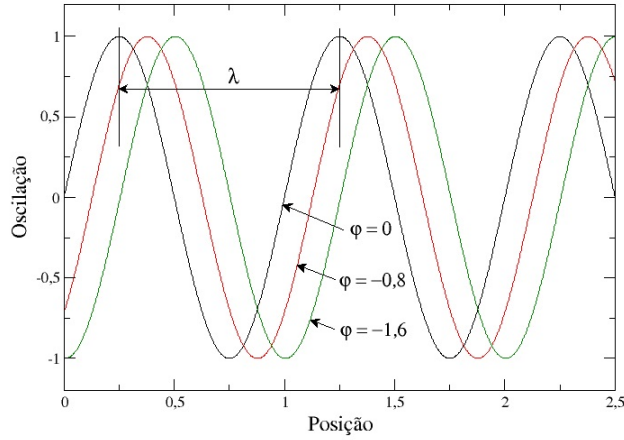


Figura 1. Três ondas em três instantes distintos. Preto: $t=0s$, vermelho: $t=0,8s$, verde: $t=1,6s$.

com $\phi = 0$ (preta), $\phi = -0,8$ (vermelha) e $\phi = -1,6$ (verde), respectivamente. Ao escolher $\phi = 0$, por exemplo, o ponto de máximo da função ($y(x) = 1$) ocorre para os valores de x tais que $2\pi x = \pi/2$, ou seja quando $x = 0,25$. Quando $\phi = -0,8$, o valor máximo ocorre quando $2\pi(x - 0,8) = \pi/2$, ou seja, $x = 0,25 + 0,8 = 1,05$. Veja que quanto mais negativa for a fase ϕ , mais para a direita se move o pico da onda. Assim, se uma onda há de se propagar continuamente no tempo, sua descrição deve envolver uma fase ϕ que, em módulo, cresce linearmente com o tempo, mas com sinal negativo, ou seja, $\phi \propto -t$. Normalmente representamos a fase como $\phi = -\omega t$, em que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, sendo T o tempo necessário que se deve aguardar para a onda se deslocar até o próximo pico, ou seja, é o próprio período da oscilação. Após esse tempo a onda terá percorrido uma distância λ , conhecida como **comprimento de onda** (Figura 1).

De modo geral, as ondas que se propagam no sentido crescente do eixo das coordenadas (para a direita neste caso) são descritas por uma função do tipo

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t), \quad (1)$$

(assumindo que k e ω são constantes positivas), em que o parâmetro A , que descreve a magnitude da oscilação, é chamada de amplitude. As ondas que se propagam no sentido contrário (para a esquerda) são descritas por

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t). \quad (2)$$

A constante k é conhecida como **número de onda** e se relaciona com o comprimento de onda por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3)$$

e a constante ω é chamada de frequência angular e é medida em rad.s^{-1} . Como dito anteriormente, ela se relaciona com a frequência da onda (em Hz) e com o período T da onda (em s) por

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

Observe, portanto, que para a onda se deslocar de um comprimento de onda λ , é necessário aguardar um tempo igual a um período de oscilação T . Assim, é possível deduzir que a onda percorre uma distância λ em um tempo T , e, portanto a sua velocidade v de propagação é

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{(2\pi/k)}{(2\pi/\omega)} = \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

Como a frequência de oscilação é $f = 1/T$, obtemos ainda a conhecida expressão para a velocidade de propagação

$$v = \lambda f. \quad (6)$$

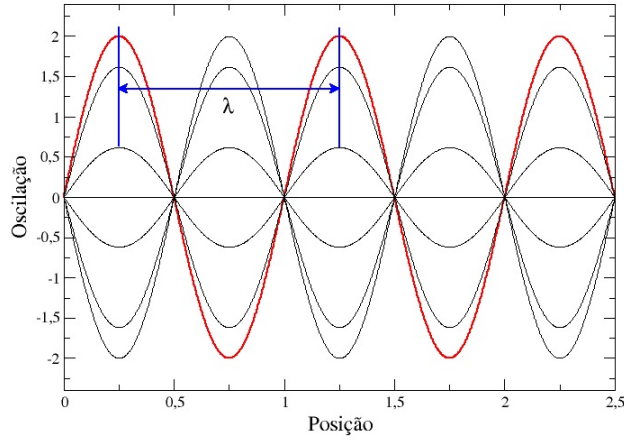


Figura 2. Padrão de onda estacionária gerada por duas ondas contrapropagantes.

Usando-se as expressões (3), (4) e (6), é possível reescrever uma onda propagando-se com velocidade v no sentido crescente do eixo dos x por uma expressão equivalente à (1):

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right). \quad (7)$$

Princípio da superposição, interferência, reflexão e ondas estacionárias

Uma característica fundamental do movimento ondulatório é expressa pelo princípio da superposição. Da mesma forma que a força resultante sobre um corpo é dada pela soma vetorial das forças que agem sobre ele, o valor da oscilação em um determinado instante e em um ponto particular do espaço é a soma de todas as oscilações individuais que compõem a onda resultante, naquele ponto do espaço e do tempo. É possível, portanto, que em algum local do espaço ocorra o cancelamento dessas ondas e, em outros, um reforço, fenômenos conhecidos como interferência destrutiva e construtiva, respectivamente. Considere, portanto, que existam duas ondas contrapropagantes de mesma amplitude, $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, descritas, respectivamente, por

$$y_1(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right), \quad (8a)$$

$$y_2(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) \right). \quad (8b)$$

O encontro dessas duas ondas gera uma onda resultante $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$. Utilizando-se a expressão para o seno da soma de dois ângulos, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$, é fácil mostrar que

$$y(x, t) = 2A \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi vt}{\lambda} \right) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (9)$$

A figura 2 ilustra o comportamento desta função em tempos diferentes. Note que agora, na expressão (9), espaço e tempo encontram-se separados em duas funções trigonométricas distintas. Nesse caso, se escolhermos $x = 0$, por exemplo, a função $\sin(2\pi x/\lambda)$ se anula para qualquer valor de tempo escolhido, não ocorrendo oscilação nesse ponto (interferência destrutiva). Esse ponto da onda é conhecido como nó. Esse padrão, descrito pela expressão (9), é o que será observado no experimento. Observe que o comprimento de onda das ondas que formam esse padrão na corda, corresponde agora **ao dobro da distância entre dois máximos, ou dois nós, consecutivos** (veja fig.2), e não à distância entre dois deles.

O padrão de onda estacionária pressupõe duas ondas contrapropagantes. Se a corda é colocada a oscilar a partir de uma das extremidades, a existência de duas ondas só pode ser conseguida se houver uma reflexão na extremidade fixa, caso contrário teríamos apenas uma onda. Como a reflexão é produzida nessa extremidade? A onda propagante só existe porque é necessário um tempo para que o sistema se recupere da perturbação. Assim, a propagação de uma onda em uma corda deve-se à tensão, que é a força responsável por devolver a corda à sua posição de equilíbrio. Quanto maior a tensão na corda, mais rapidamente ela é capaz de voltar à posição de equilíbrio e, portanto, maior a velocidade de propagação de um pulso produzido nela. Nos pontos em a onda deforma a corda existe uma tensão adicional, tensão essa que cresce com a amplitude da onda. O que acontece quando a onda encontra a extremidade de uma corda presa em uma parede? A chegada da onda exerce uma força perpendicular à parede e, como esse ponto não se move, a parede deve estar reagindo para manter o ponto imóvel, exercendo na corda uma força em sentido contrário. Essa força de reação da parede, perpendicular à linha da corda e em sentido contrário à tensão exercida pela onda, é a força responsável pelo surgimento da onda refletida.

No caso de uma corda com as duas extremidades fixas, somente aquelas ondas cujo comprimento de onda produzem um padrão em que os nós coincidem com as extremidades fixas poderão oscilar. Como consequência, só serão estacionárias as ondas que possuam um número inteiro de meios-comprimentos-de-onda que seja igual ao comprimento da corda, ou seja: $n\lambda/2 = L$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Ou escrito de outra forma,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (10)$$

O número n corresponde ao número de ventres visíveis da onda entre as duas extremidades fixas.

Velocidade de propagação de onda em uma corda

A capacidade de voltar à sua posição de equilíbrio determina a velocidade de propagação da onda na corda. A tensão τ é um dos elementos que controlam quão rapidamente uma corda distendida retorna à sua posição de equilíbrio. Outro parâmetro é a sua inércia, caracterizada pela quantidade de massa que essa tensão terá que acelerar para devolver a corda à posição de equilíbrio. Nesse caso, como a massa está distribuída na corda, o parâmetro que interessa não é a massa, mas a densidade linear μ . Quanto maior a densidade, portanto, maior a massa a ser movida e menor a velocidade de propagação. Essa linha de raciocínio é seguida no livro do Halliday (Vol.2) para deduzir a velocidade de propagação com base na Segunda Lei de Newton. Para os nossos propósitos aqui, uma análise dimensional (também discutida no livro do Halliday) basta.

Segundo a nossa argumentação, a velocidade é tanto maior quanto maior for a tensão e menor for a densidade linear. Será que a velocidade poderia ser diretamente proporcional à tensão e inversamente proporcional à densidade linear, ou seja, será que poderíamos assumir que $v \propto \tau/\mu$? Vejamos o que acontece com as dimensões resultantes dessa razão:

$$\frac{\tau}{\mu} \rightarrow \frac{kg \cdot m/s^2}{kg/m} = \frac{m^2}{s^2}. \quad (11)$$

Vê-se, portanto, que as unidades de tensão dividido por densidade linear resulta em unidades iguais às do quadrado da velocidade. Assim, o melhor seria admitir que $v \propto \sqrt{\tau/\mu}$, o que dimensionalmente estaria correto. Faltaria descobrir a constante de proporcionalidade que transformaria esta expressão em uma igualdade. Para isso não basta uma simples análise dimensional e deixamos aqui apenas a observação de que essa constante é, felizmente, igual a 1, ou seja:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (12)$$

APARATO EXPERIMENTAL

As figuras 3 e 4 mostram o equipamento a ser utilizado. O sistema em estudo consiste de uma corda elástica que é esticada por meio de pesos que são pendurados em uma das suas extremidades. A outra extremidade da corda é presa em um equipamento capaz de excitar ondas transversais na corda. Esse excitador é acionado eletricamente por um gerador de sinais, capaz de gerar um movimento senoidal de frequência ajustável. Para esticar a corda com os

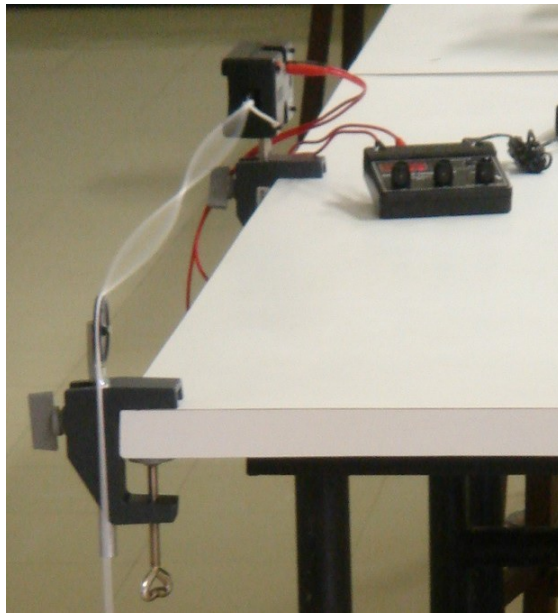


Figura 3. Equipamento em funcionamento.

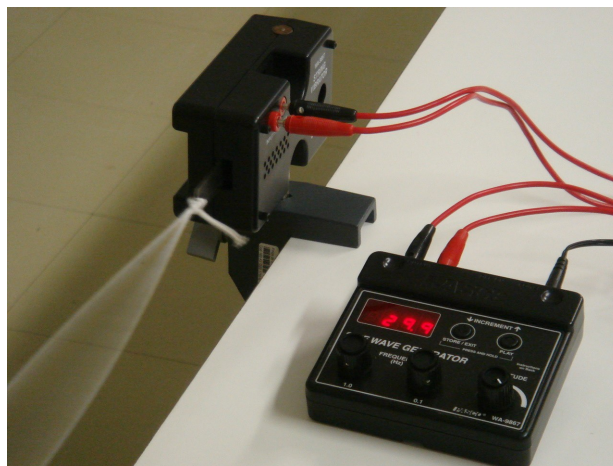


Figura 4. Detalhe do oscilador e do excitador de ondas.

pesos, uma polia é utilizada. Com a excitação, forma-se uma onda estacionária entre a polia e o excitador, que é o objeto de estudo deste experimento.

É possível que a frequência escolhida faça o aparato entrar em ressonância, fazendo um barulho característico. Nesse caso, recomenda-se mudar a frequência ou reduzir a amplitude, uma vez que a exposição a essa trepidação acaba causando danos ao aparelho, como pode ser visto na figura 5.

PROCEDIMENTOS

1. O objetivo desse procedimento é calcular a velocidade de propagação v da onda na corda por meio da relação $v = \sqrt{\tau/\mu}$, em que τ é a tensão na corda e μ é a densidade linear.
 - (a) Meça o comprimento de um pedaço de corda não esticada e o seu peso correspondente. Calcule a densidade da corda não distendida. Estime a incerteza na determinação da densidade.
 - (b) Coloque um peso de cerca de 300g pendurado na corda para estabelecer nela uma tensão. Não se esqueça que tudo o que estiver pendurado contribui para a tensão na corda. É necessário, portanto, medir o peso

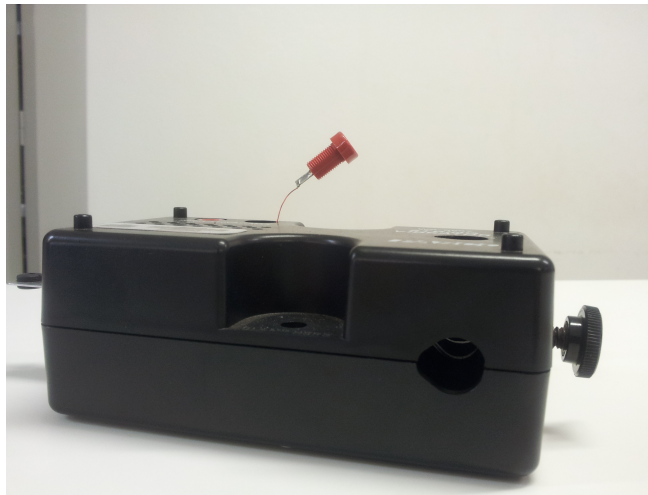


Figura 5. Soquete solto pela trepidação.

- de todo o conjunto. A corda encontra-se agora distendida, certifique-se de que o peso não toca o chão. Procure determinar o quanto ela se distendeu. Discuta com o seu grupo uma forma de determinar a densidade da corda distendida. Encontre uma função que descreva o valor da densidade em função da distensão.
- (c) Calcule velocidade de propagação da onda para essa tensão da corda, usando a expressão $v = \sqrt{\tau/\mu}$. Admita que a tensão na corda é dada por mg , em que m é a massa utilizada e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
 - (d) Obtenha uma estimativa para a incerteza no valor obtido para a velocidade de propagação.
2. O objetivo deste procedimento é mostrar que o produto do comprimento de onda pela frequência é constante ($\lambda f = v$), ou, equivalentemente que $f \propto 1/\lambda$.
- (a) Mantenha o mesmo peso de cerca de 300g usado no procedimento 1 pendurado na corda para estabelecer uma tensão.
 - (b) Ajuste o oscilador para frequência $f = 0 \text{ Hz}$ e aumente-a devagar até encontrar a frequência fundamental (a de maior comprimento de onda, $n = 1$). **Nessa frequência, a onda deve ter a maior amplitude possível, mas deve-se observar que, para ser a frequência fundamental verdadeira, a ponta do oscilador onde a corda é presa deve estar praticamente parada, ou seja, ela deve ser um bom nó!** Note que é possível conseguir amplitudes maiores com o excitador vibrando, mas essa já não é mais a frequência fundamental para uma corda cujo comprimento é igual à distância entre a ponta do excitador e a polia. Anote essa frequência e o comprimento de onda correspondente.
 - (c) Aumente a frequência até encontrar os valores para $n = 2, 3, \dots$, anotando os respectivos comprimentos de onda e as respectivas incertezas nesses valores. Talvez seja possível chegar até $n = 8$. Coloque os valores em uma tabela com os valores respectivos de n , f , e λ .
 - (d) Faça um gráfico de f em função de $1/\lambda$ e obtenha a constante de proporcionalidade e incerteza.
 - (e) Compare esse coeficiente angular da reta com a velocidade calculada no procedimento 1. É possível concluir que são iguais dentro das respectivas incertezas?
3. Nesse procedimento deve-se procurar mostrar que para ondas estacionárias, só os comprimentos de onda dados por $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ são permitidos, sendo L o comprimento da corda e $n = 1, 2, 3, \dots$.
- (a) Utilizando os dados do procedimento 2, faça um gráfico de λ vs $1/n$ e verifique que o coeficiente angular da reta é igual a $2L$ dentro das respectivas incertezas experimentais.
4. Mostrar que a velocidade é proporcional à raiz quadrada da tensão τ .
- (a) Substitua a corda elástica por um fio de nylon, para que, mesmo sob a ação do peso, a corda mantenha o seu comprimento praticamente inalterado.

- (b) Coloque um peso de 100 g e determine a frequência para a qual se tem uma configuração com $n = 2$. Nesse caso o comprimento de onda é igual ao comprimento da própria corda.
- (c) Aumente o peso de 50 em 50g, alternando os pesos de 50g e 100g, até atingir 400g e, para cada peso, encontre a frequência correspondente para obter $n = 2$ e faça uma tabela de f , v , m e τ .
- (d) Mostre graficamente que $v \propto \sqrt{\tau}$.

BIBLIOGRAFIA

- Halliday, Walker e Resnick, Fundamentos de Física - 2, Editora LTC.
-