Matching Filter para la deteccion de eventos

Reporte de Avances

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Autor: Francisco Muñoz
Profesores Guia: Francisco Förster
Pablo Huijse

Ultima Actualización: 28 de mayo de 2018
Santiago, Chile

Resumen

Por definir.

Índice de Contenidos

Introduccion

por definir.

Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una transformación matematica que nos permite descomponer señales. Iniciando con el analisis para señales continuas, tendremos la Transformada Directa de Fourier, representando la descomposicion de datos que originalmente estaban en el espacio de frequencias $\tilde{x}(f)$ por coeficientes en el espacio de tiempos $x(t)$:

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2i\pi ft} dt = \mathcal{F}[x(t)] \tag{1}$$

Y la Transformada Inversa de Fourier que representa la descomposicion de datos que originalmente estaban en el espacio de tiempos $x(t)$ por coeficientes en el espacio de frequencias $\tilde{x}(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{2i\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{x}(f)] \tag{2}$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

Algunas propiedas importantes de la Transformada de Fourier, que seran utilizadas posteriormente, son:

La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto significa que, dada una constante a y funciones $f(t)$ y $g(t)$, se cumplira que:

$$\mathcal{F}[f(t) + g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[g(t)] \tag{3}$$

$$\mathcal{F}[af(t)] = a\mathcal{F}[f(t)] \tag{4}$$

Una traslacion genera una fase en la Transformada de Fourier. Para una funcion $f(t)$, se cumple:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \mathcal{F}[f(t)] e^{-2i\pi ft_0} \tag{5}$$

Teorema de la convolusion. Si bien la convolusion de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, esta definida por:

$$[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - \tau) d\tau \tag{6}$$

Calcular su Transformada de Fourier cumple con:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g] \tag{7}$$

o tambien se puede aplicar:

$$\mathcal{F}[f \cdot g)] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \tag{8}$$

Teorema de la multiplicación. Nos dice que, dado funciones $x(t)$ y $y(t)$, su multiplicacion cumple con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\tilde{y}^*(f)df \tag{9}$$

Correlación. La correlación cruzada de dos señales reales $x(t)$ y $y(t)$ esta definida po:

$$R_{xy}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau - t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)y(\tau)d\tau \tag{10}$$

Luego, aplicando el teorema de la multiplicación (9) junto con la propiedad de traslación (5) se obtiene:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\tilde{y}^*(\omega)e^{2i\pi\tau}df \tag{11}$$

Lo cual corresponde a la Transformada inversa de la Transformada de la convolucion de las dos señales (7)

$$R_{xy} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[x * y]] \tag{12}$$

Un resultado particular es la autocorrelación la cual corresponde a la transformada inversa de la Densidad de Potencial Espectral:

$$R_{xx} = \mathcal{F}^{-1}[|\tilde{x}(f)|^2] = \mathcal{F}^{-1}[S_x(f)] \tag{13}$$

La funcion Ventana

La transformada de fourier continua cuenta con la particularidad de que las funciones continuas esten bien definidas para todos los tiempos ($-\infty < t < \infty$). Esto es una idealizacion que no ocurre en señales reales devido a que solo son medidas en intervalos finitos de tiempo, con una frequencia de sampleo finita (no necesariamente constante). El ejemplo mas directo es que una señal continua medida en un intervalo de tiempo es igual a aplicar una ventana rectangular a la señal teorica medida en todos los tiempos.

Luego, la transformada de Fourier pasa de ser una transformacion de la funcion continua a la transformacion del producto elemento a elemento entre la señal y la ventaba observada.

$$g_{obs}(t) = g(t)W(t) \tag{14}$$

Usando el teorema de la convolución (8), la transformada correspondera a la convolución de transformadas.

$$\mathcal{F}[q_{obs}(t)] = \mathcal{F}[g(t)] * \mathcal{F}[W(t)] \tag{15}$$

Una aplicacion importante es usar ventanas que permitan reducir discontinuidad en los bordes de observacion, esto es necesario porque observar señales reales nunca entregara una periodicidad perfecta y tener discontinuidad afecta negativamente a los resultados que se puedan obtener de la transformada. Exsisten varios tipos de ventanas que se pueden aplicar, entre ellas, *Hann*, *Tukey*, *Blackmann*. La que se utilizara en esta ocacion es *Tukey* que corresponde a:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 + cos\left(\pi\left(\frac{2n}{\alpha(N-1} - 1\right)\right)\right] & 0 \leq n < \frac{\alpha(N-1)}{2} \\ 1 & \frac{\alpha(N-1)}{2} \leq n \leq (N-1)(1-\frac{\alpha}{2}) \\ \frac{1}{2}\left[1 + cos\left(\pi\left(\frac{2n}{\alpha(N-1} - \frac{2}{\alpha} + 1\right)\right)\right] & (N-1)(1-\frac{\alpha}{2} < n \leq (N-1)) \end{cases} \tag{16}$$

Donde el factor α define la forma, cuando $\alpha = 0$ se transforma en una ventana rectangular y para $\alpha = 1$ se transforma en una venta de *Hann*