INTRODUÇÃO A AEROELASTICIDADE

*Roberto **Gil** A. Silva*

(gil@ita.br)

Bibliografia e referências

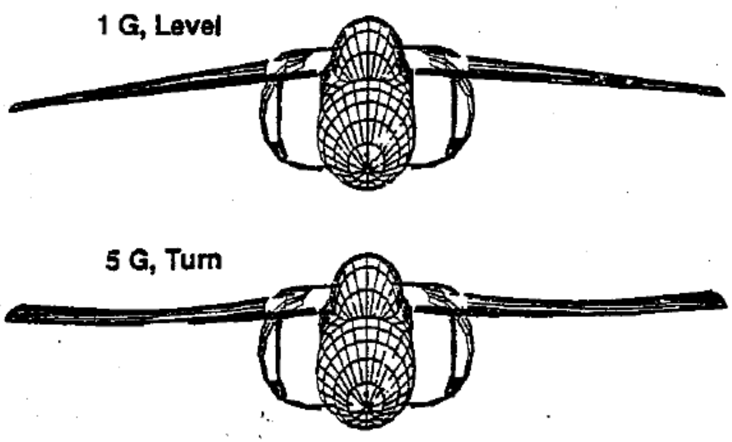
- Textos básicos do curso:
  - **Bismarck**-Nasr, M. N. ***Structural Dynamics in Aeronautical Engineering***. Reston, VA: AIAA, 1999. (AIAA Education Series).
  - **B**isplinghoff, R.L. **A**shley, H. and **H**alfman, R. ***Aeroelasticity***. Addison Wesley, 1955.
  - **Dowell**, E. H. et al. ***A Modern Course in Aeroelasticity***. 4. ed. Kluwer Academic, 2005.
  - **Fung**, Y. C. ***An Introduction to the Theory of Aeroelasticity***, Wiley, 1955
- Mais um conjunto de referências a serem passadas durante o curso, de acordo com o assunto.

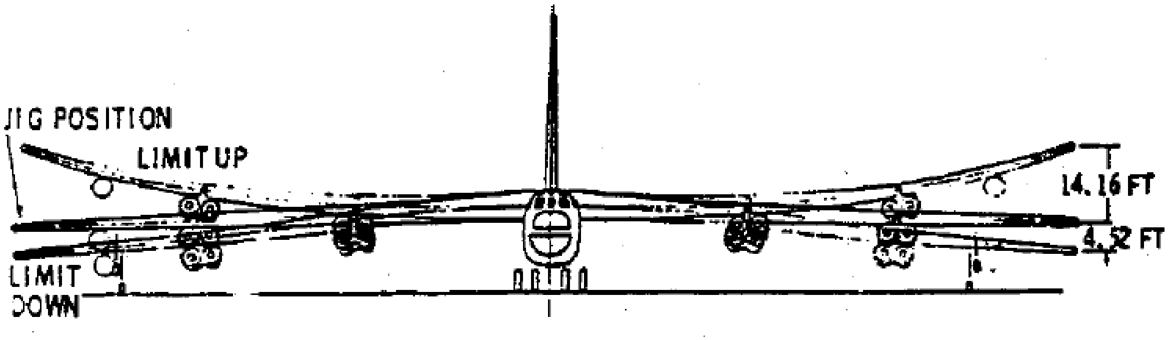
Introdução

- ***AEROELASTICIDADE*** é a ciência que estuda as consequências da interação de forças de inércia, elásticas e aerodinâmicas, agindo simultaneamente na estrutura de um corpo.
- <u>Forças de inércia</u> – decorrentes das acelerações às quais a massa do corpo está sujeita;
- <u>Forças elásticas</u> – decorrentes das reações elásticas do corpo que se desloca (deforma);
- <u>Forças aerodinâmicas</u> – decorrentes do escoamento de fluido ao qual o corpo está sujeito;

Introdução

- ***AEROELASTICIDADE ESTÁTICA:***
- Quando o movimento varia pouco com o tempo; sem aceleração e/ou velocidade significativas.

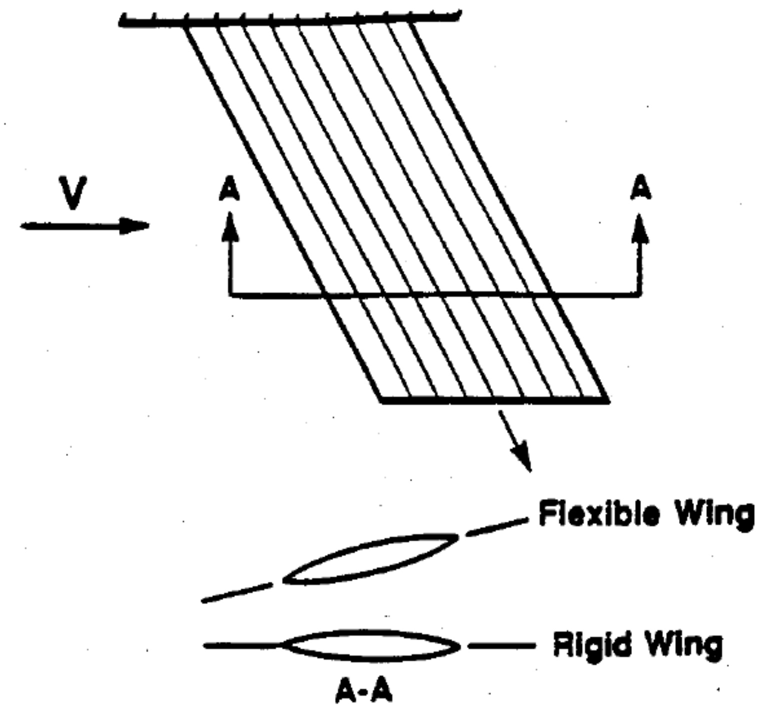




Deflexão das asas de aeronaves em vôo em função do carregamento aerodinâmico.

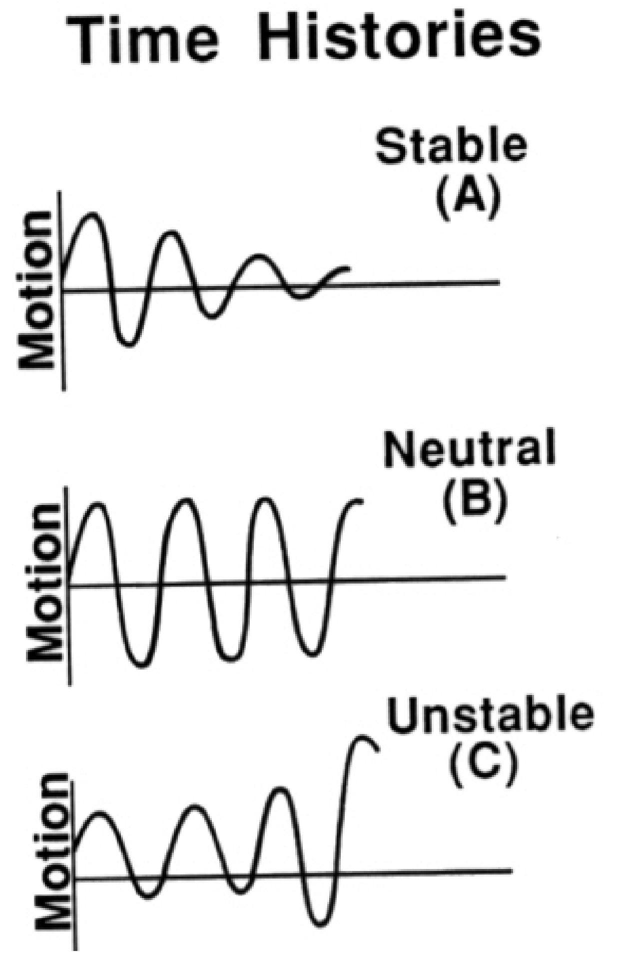
Introdução

- Para o entendimento do fenômeno físico de uma forma elementar, note o esquema ao lado ->
- A mudança de ângulo de ataque devido a flexibilidade promove um aumento da sustentação, que por sua vez deforma ainda mais asa, realimentando o processo na forma do aumento do ângulo de ataque proporcionando novamente o aumento da sustentação.



Introdução

- ***AEROELASTICIDADE DINÂMICA:***
- Quando o movimento varia significativamente com o tempo;
- Acelerações e velocidades significativas o que implica no surgimento das componentes de inércia que interagem com as componentes elásticas e aerodinâmicas



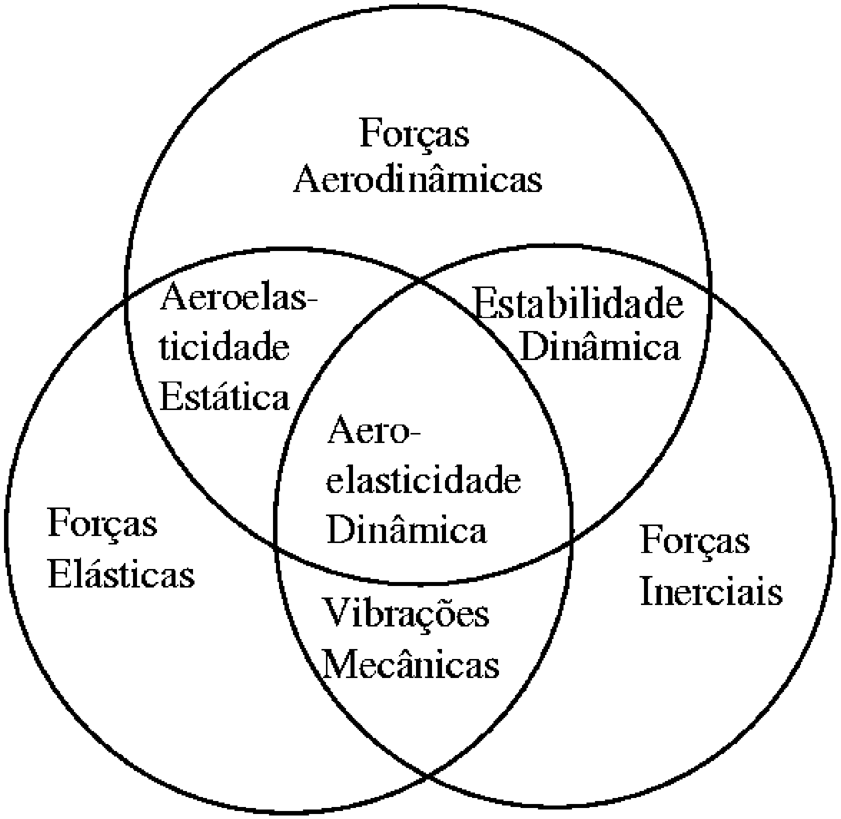
Introdução

- Ou seja, uma aeronave é um corpo flexível, portanto pode ser deformada, sua aerodinâmica será alterada;
- Estas alterações aerodinâmicas em função das deformações da estrutura, caracterizam o comportamento aeroelástico;
- O **sistema dinâmico** que caracteriza o corpo e o meio que o envolve (escoamento de fluido), passa a ser chamado de **sistema aeroelástico**, e pode ser representado matematicamente através de modelos adequados, fundamentados nas teoria a serem apresentadas neste curso.

- Obs: O termo ***AEROELASTICIDADE*** foi formalmente introduzido por Roxbee Cox e Pugsley – em 1932.

Aeroelasticidade

- A interação mútua entre as forças elásticas, de inércia e aerodinâmicas pode ser representada graficamente através de um diagrama conhecido como **diagrama dos três anéis ->**
- Obs: Collar em 1946, inicialmente definiu aeroelasticidade em termos de um triângulo de forças análogo ao diagrama ao lado.

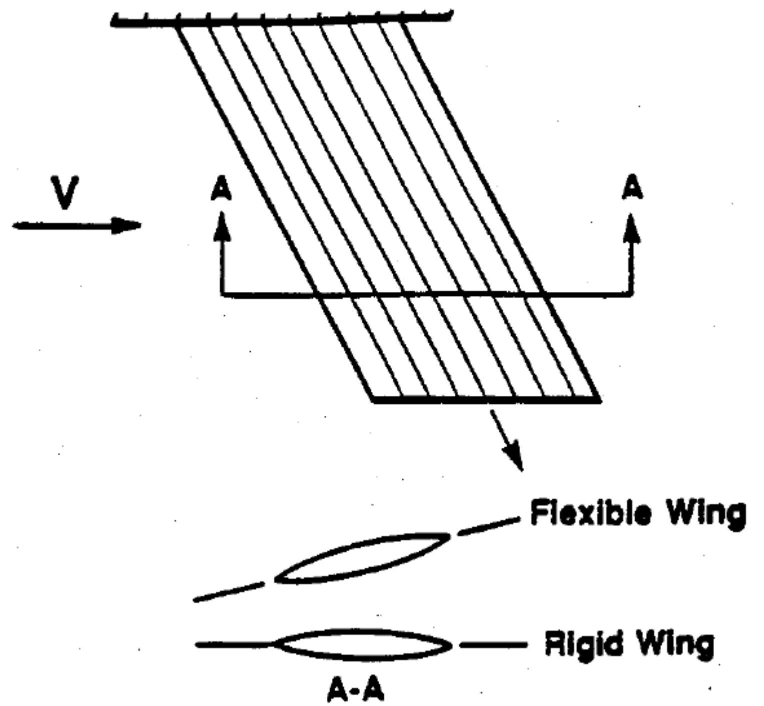


Fenômenos Aeroelásticos

- Os fenômenos físicos associados aos dois tipos de comportamento de um sistema, estático ou dinâmico, podem ser subdivididos como:
  - Associados a estabilidade do sistema aeroelástico:
    - Divergência (estático)
    - Flutter (dinâmico)
  - Associados à resposta (aeroelástica) no tempo:
    - Redistribuição de Cargas (estático)
    - reversão de comandos (estático)
    - cargas de rajadas (dinâmico)
    - Buffeting (dinâmico)
- Cada um dos fenômenos físicos serão apresentados ao longo do curso, bem como a forma de modela-los matematicamente.

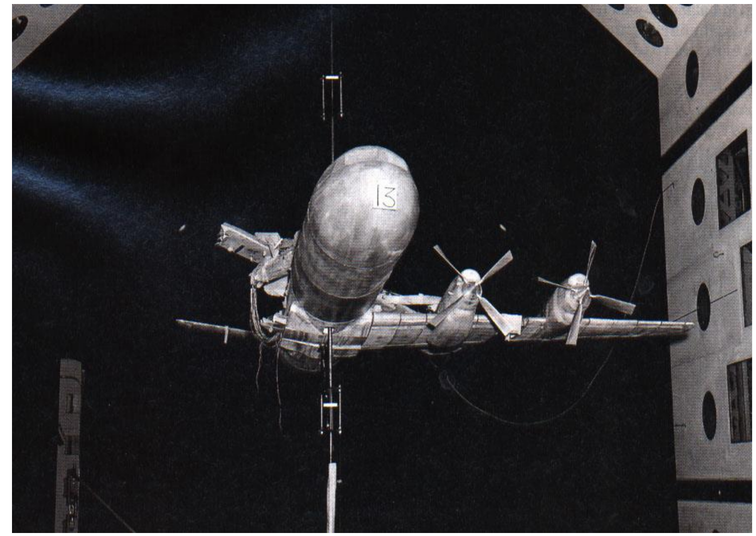
Divergência

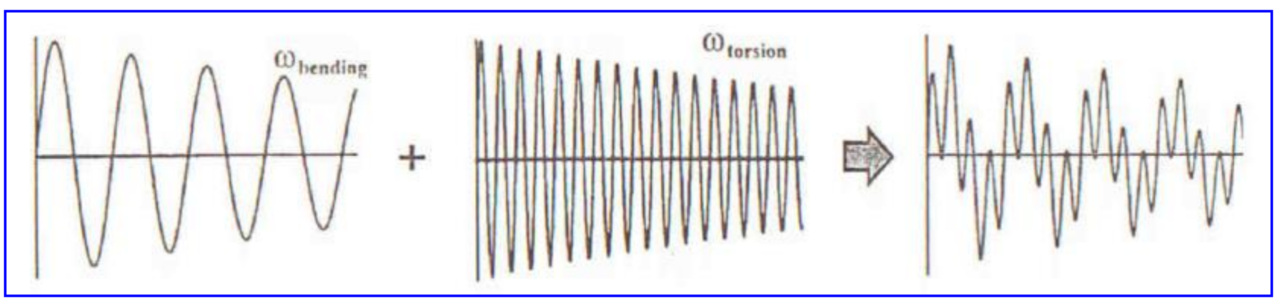
- Conforme apresentou-se anteriormente, o aumento de sustentação ocorre devido ao aumento do ângulo de ataque. ;
- Se a pressão dinâmica do escoamento for suficientemente alta, este processo realimentado pode levar ao colapso da estrutura devido a "**divergência**" do movimento da asa;
- Caso contrário, a asa permanece estaticamente deformada.

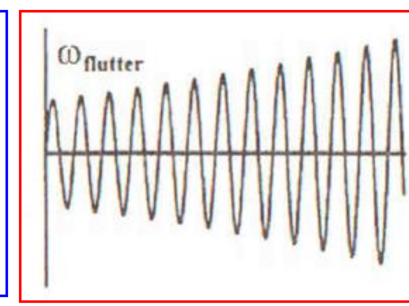


Flutter

- ***Flutter*** é uma auto-excitação de dois ou mais modos de vibração de um sistema, devidamente alterada e realimentada pelo escoamento de um fluido. Pode vir a causar oscilações de amplitude que crescem exponencialmente levando a estrutura a uma falha dinâmica.

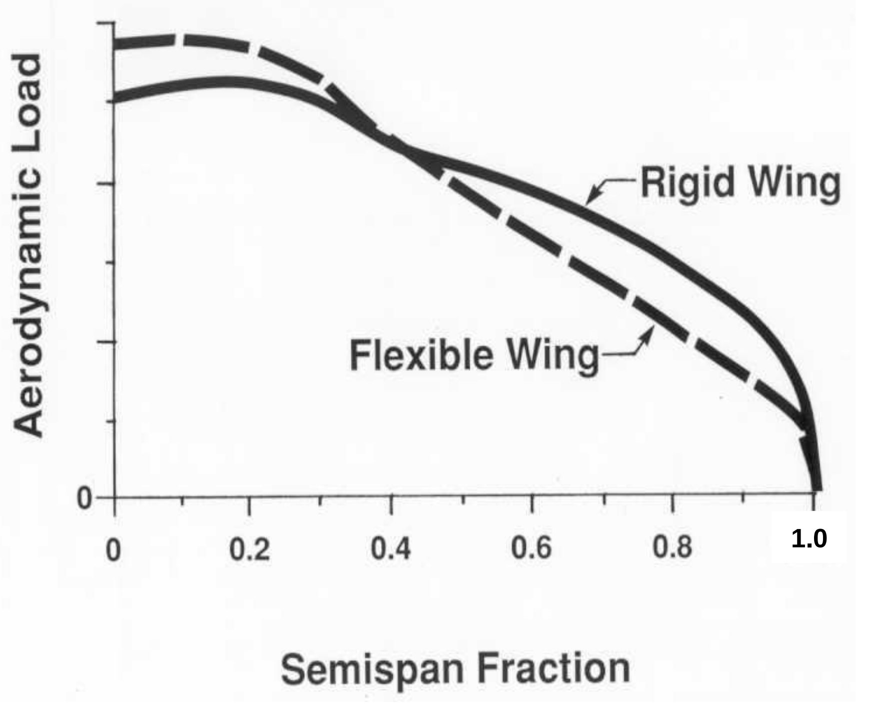






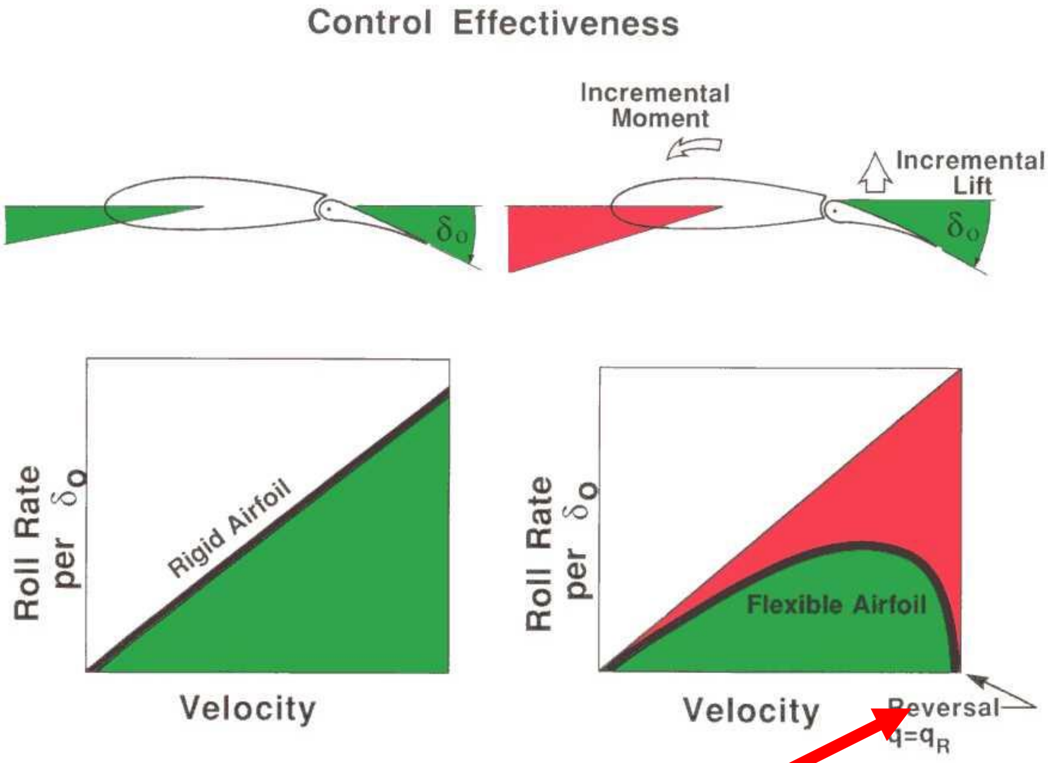
Redistribuição de Cargas

- Quando a asa é flexível, o carregamento aerodinâmico ao longo da envergadura pode ser alterado devido a deformação da asa em ângulo de ataque.



Reversão (eficiência) de comandos

- Pode causar ineficiência, perda ou até a reversão de uma ação de comando de uma superfície de controle



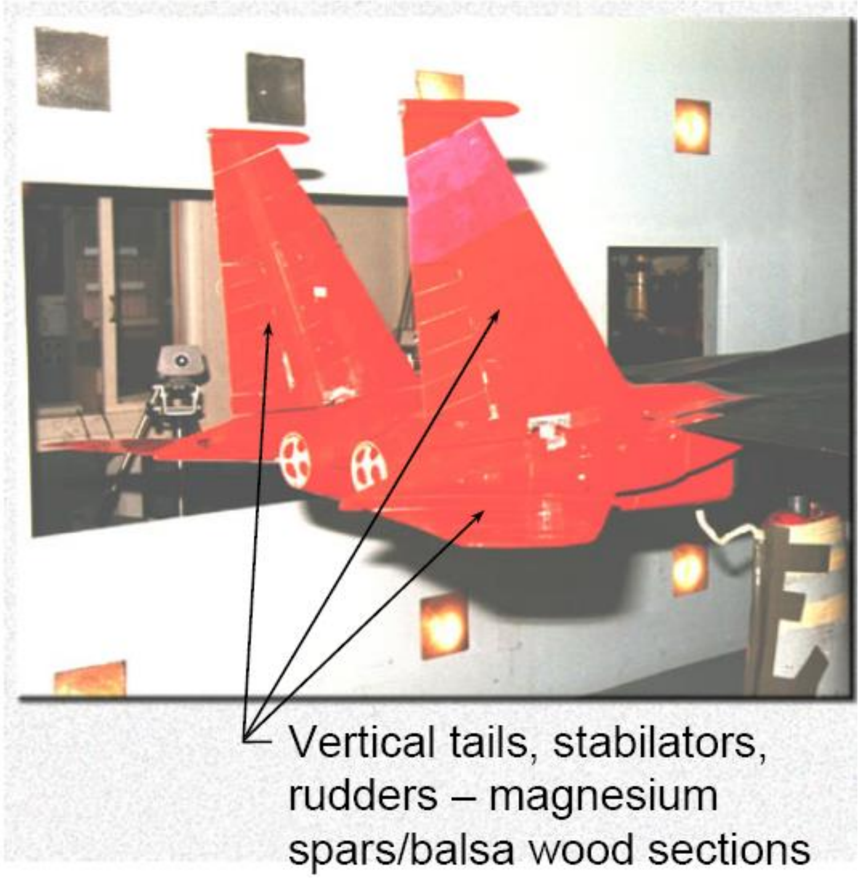
Reversão do Aileron

Cargas de rajada

- Cargas dinâmicas:
  - Devido rajadas de vento, pouso, disparo de armamentos, alijamento, choques e etc.;
  - O aumento do carregamento aerodinâmico devido uma rajada de vento ocorre devido ao aumento do ângulo de ataque instantâneo, podendo elevar o fator de carga a limites além dos autorizados para a aeronave;
  - Modela-se o sistema aeroelástico considerando a presença da rajada também para o projeto de sistemas de alívio de cargas desta natureza.

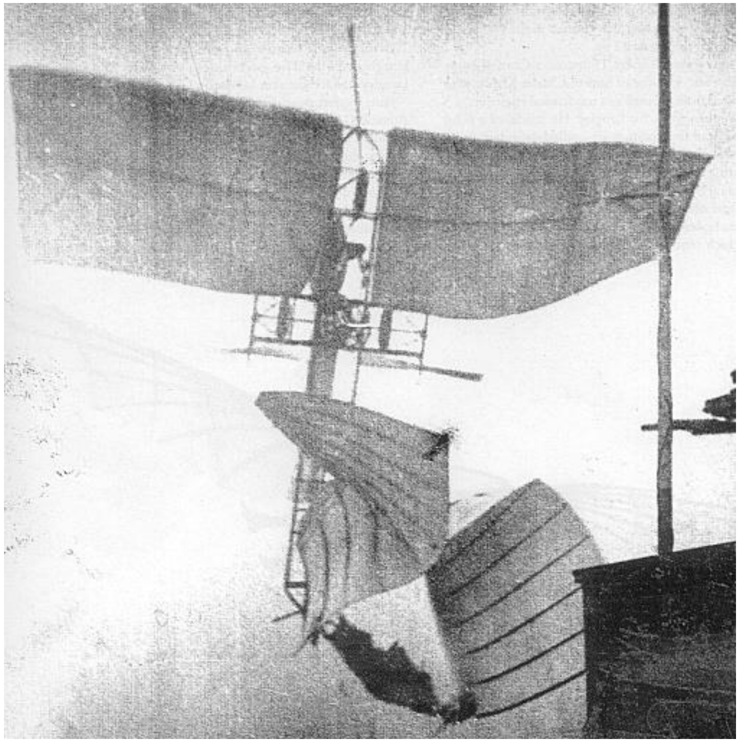
Buffeting

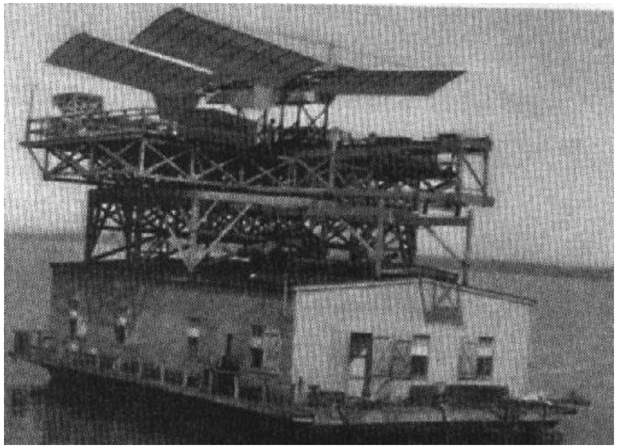
- Fenômeno típico de aeronaves de alta manobrabilidade;
- Vibrações causadas pela esteira gerada por outras partes da aeronave, por exemplo interferência da esteira da asa na empenagem;
- Fenômeno altamente não linear, difícil de modelar matematicamente, sendo necessária investigação em túnel de vento



Um Pouco de História da Aeroelasticidade....

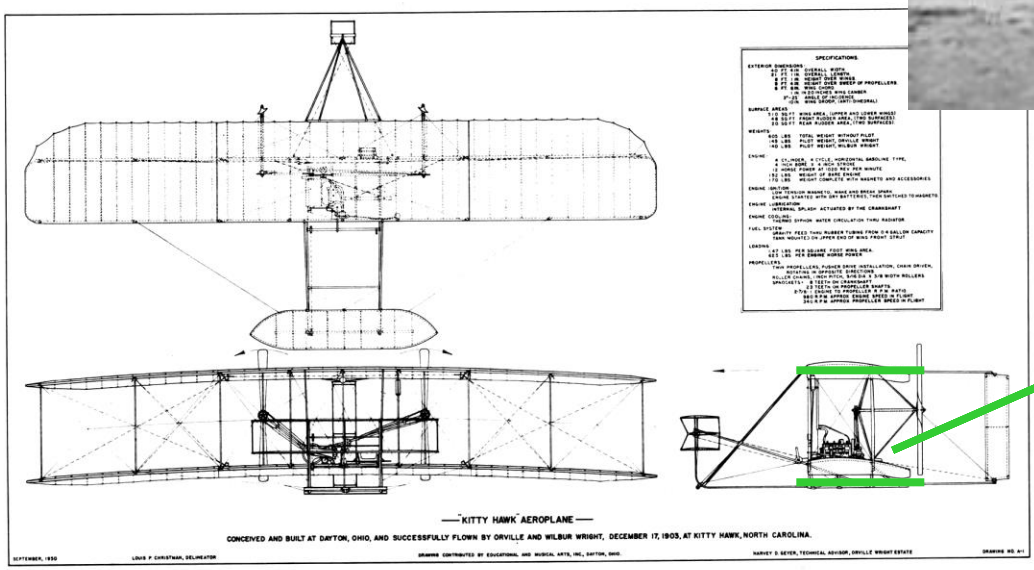
- O primeiro incidente aeronáutico documentado e relacionado a um problema aeroelástico implicou na catastrófica do Aerodrome de Samuel Langley, em 1903. O acidente foi causado por uma divergência devido ao alto camber d

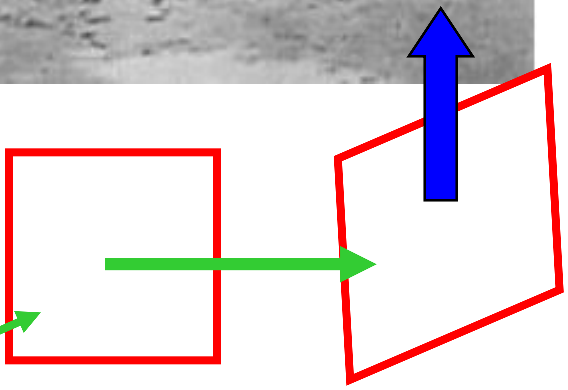




O “Wright Flyer”

Wing morphing (*warping* = distorção) é um conceito que hoje está sendo estudado de novo.

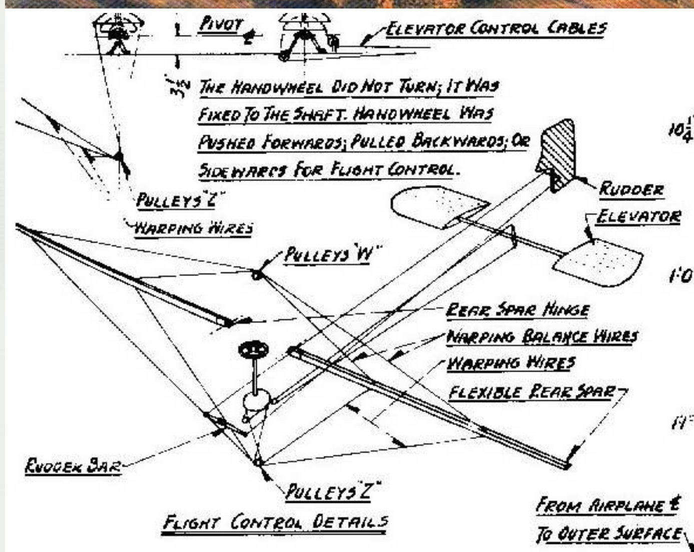




Distorção da asa

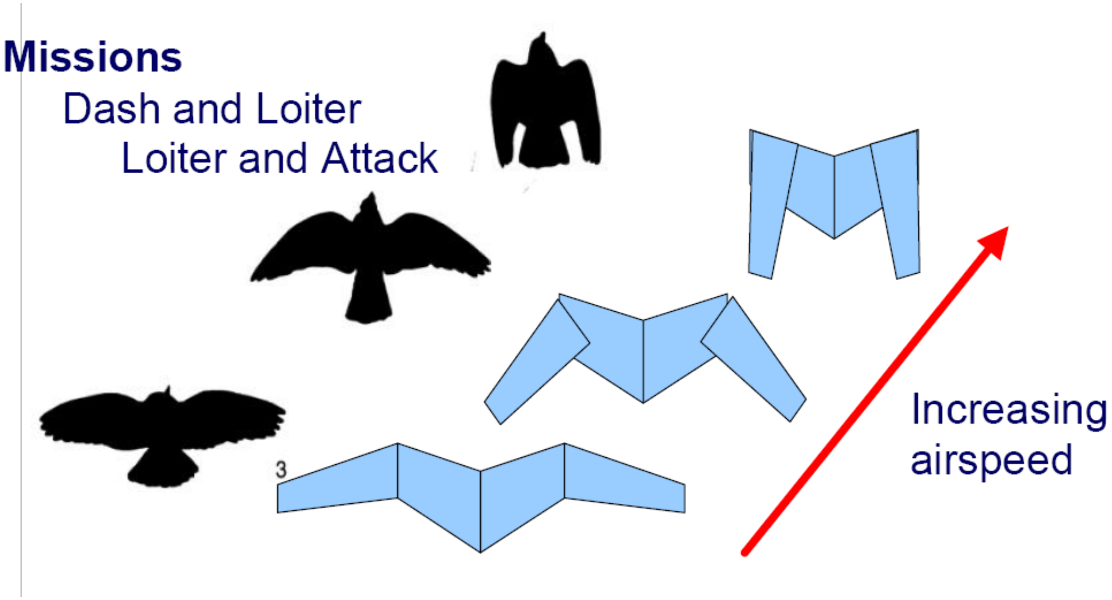
Controle Aeroelástico

Bleriot XI – monoplano controlado por "*wing warping*". Requer asa flexível em torção, muito sujeita a divergência !



Wing Morphing

- Modificação da forma em planta da asa, bem como do camber não é algo inédito, a natureza nos ensina...

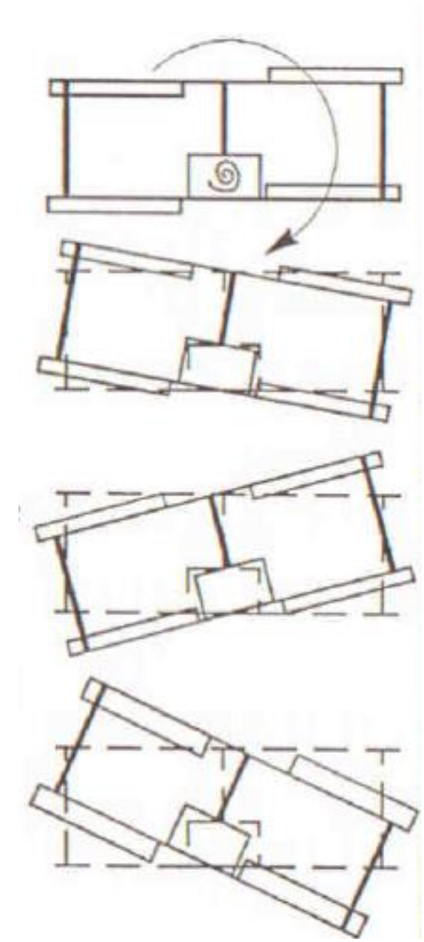


Opção pelos Biplanos

- Possivelmente, a falha de Langley com seu monoplano e o sucesso dos irmão Wright com o seu biplano influenciou a preferência por biplanos;
- Porém, analisando tecnicamente, a montagem das asas de um biplano gera um conjunto de superfícies de sustentação mais rígido em torção do que uma asa única. O lembre-se que o maior problema das asas na ocasião era a rigidez em torção.
- A rigidez em um biplano era aumentada pelos estais e barras que conectam as duas asas, compondo uma caixa rígida.

Flutter na I Guerra Mundial

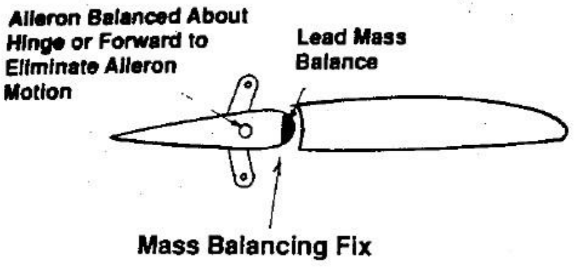
- Lanchester e Bairstow – flutter dos aviões Handley Page O-400 e DeHavilland DH-9 (1916);
- Este de fato foi um flutter resultante da coalescência de dois modos estruturais, um associado a torção da fuselagem a rotação anti-simétrica do profundor.

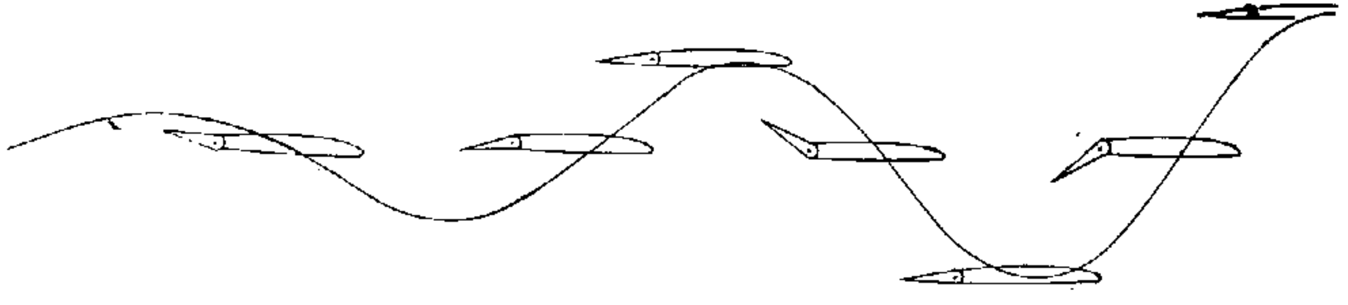


> "… at certain critical speeds of flight a tail wobble is set up, involving heavy torsional stresses on the fuselage, the type of vibration being an angular oscillation approximately about the axis of the fuselage; I am informed that the angular magnitude of this oscillation amounts at times to something approaching 15°, and is undoubtedly extremely dangerous to the structure of the machine. I gather that the experience of the pilots when this vibration is at its worst is terrifying … "

Flutter de superfícies de controle

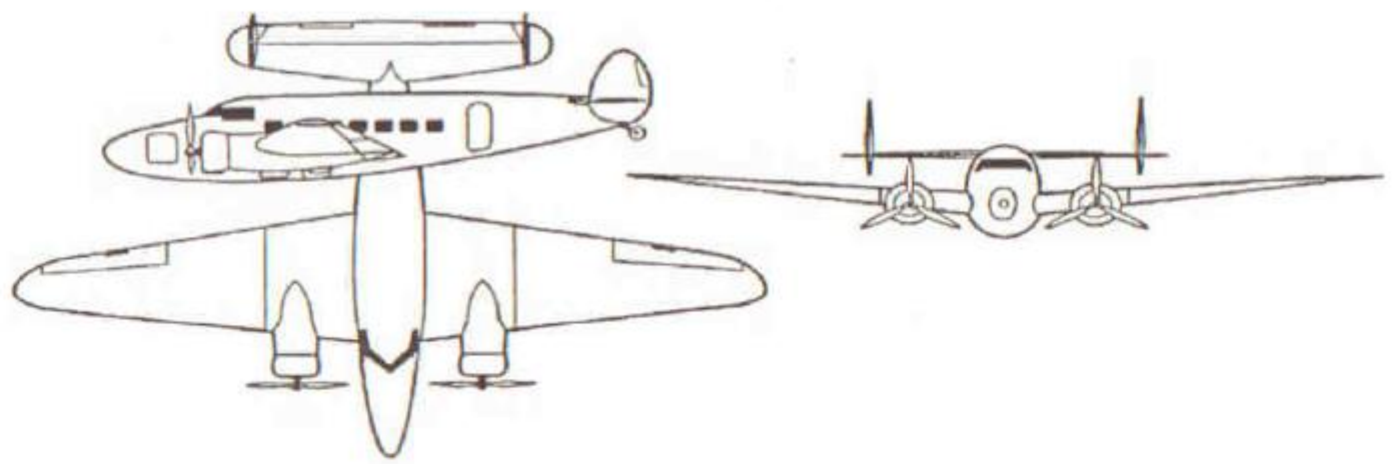
- von Baumhauer e Köning – flutter de aileron do van Berkel WB Seaplane causado pelo acoplamento dinâmico entre o modo de flexão da asa com o modo de rotação do aileron
- Este problema está relacionado com a posição do centro de gravidade do aileron, e para tal empregou-se o balanceamento mássico para a solução do problema (1923).



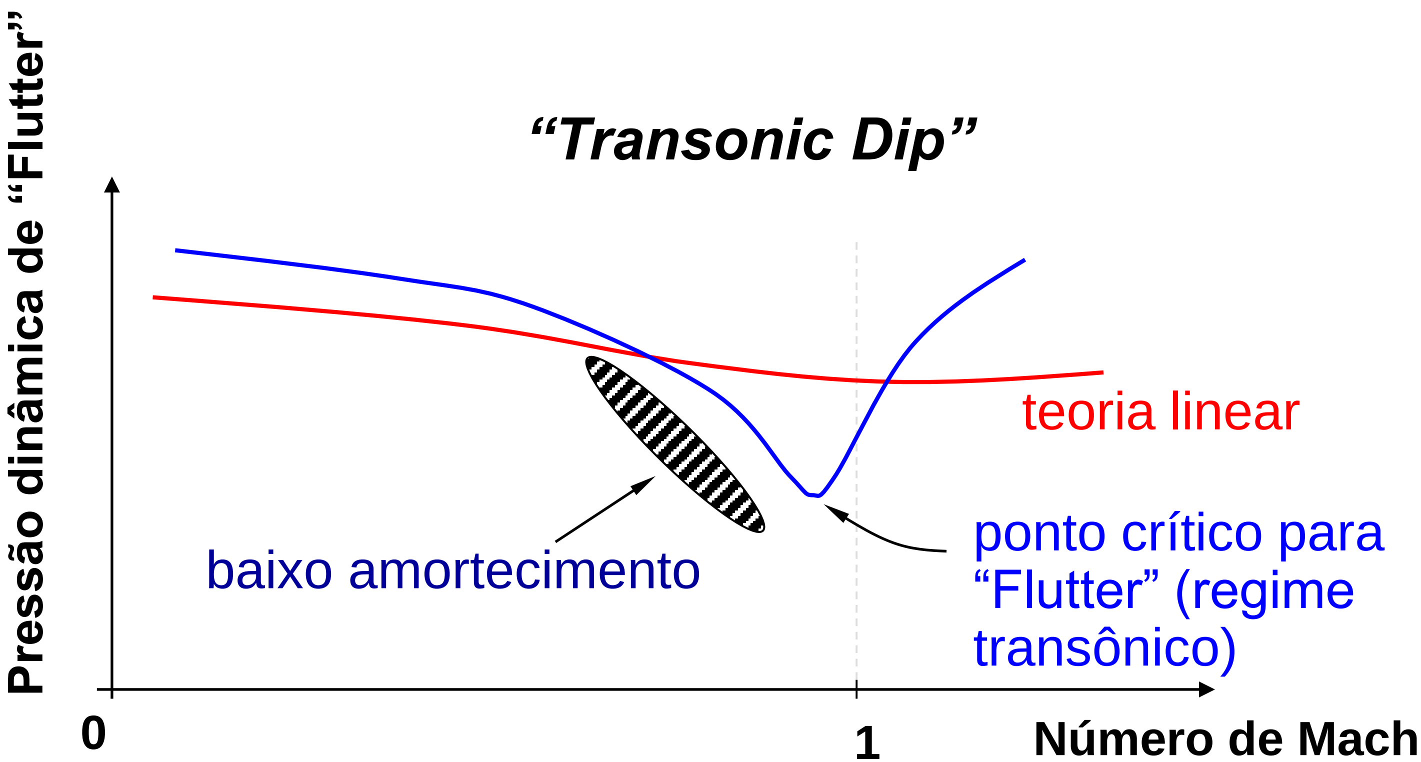


Flutter de superfícies de controle

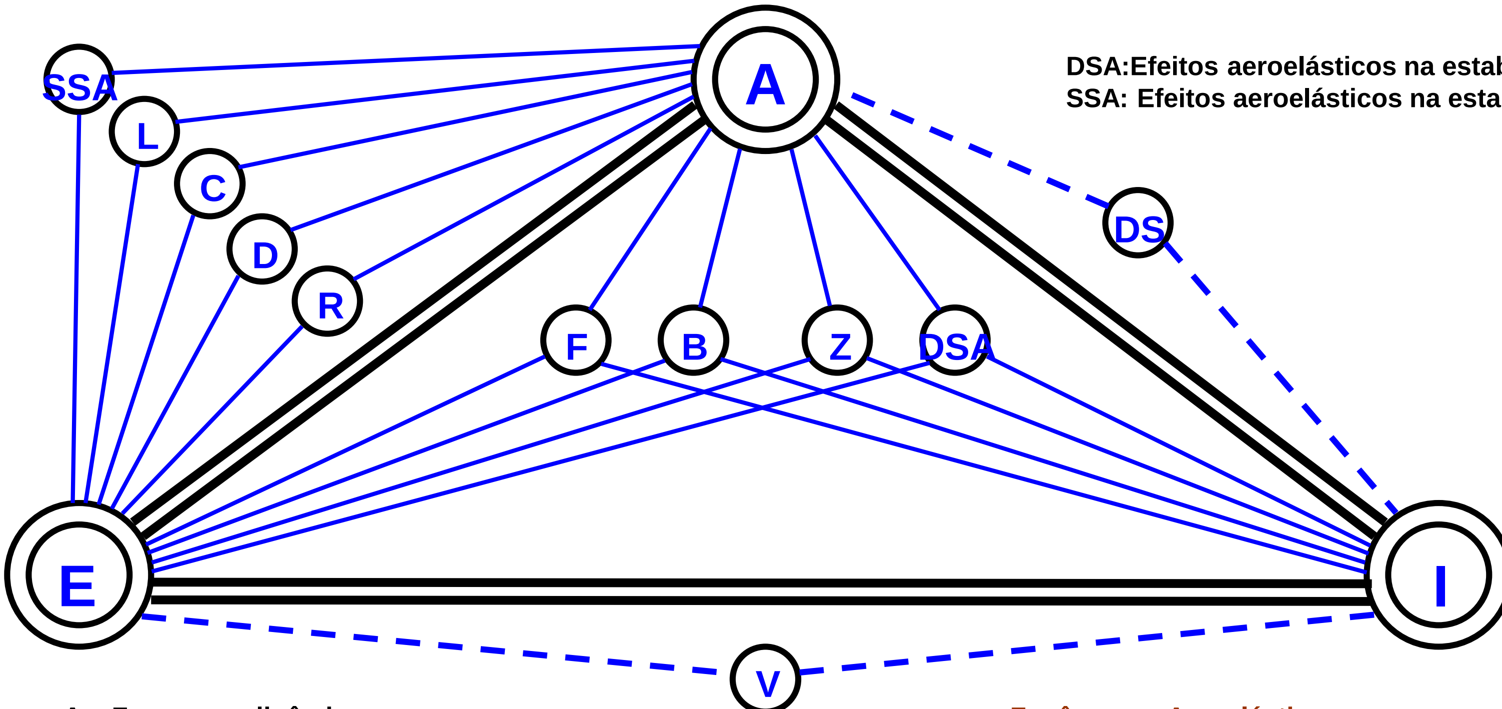
- Lockheed 14H Super Electra (1938), apresentou problemas de flutter no leme. Uma tentativa prévia de correção antes da entrega da aeronave mostrou-se ineficaz, causando um acidente com vítimas fatais.



Regime Transônico



Triângulo de Collar



DSA:Efeitos aeroelásticos na estabilidade dinâmica
SSA: Efeitos aeroelásticos na estabilidade estática

A: Força aerodinâmica
E: Força elástica
I: Força inercial

Campos Relacionados
V: Vibrações mecânicas
DS: Estabilidade dinâmica

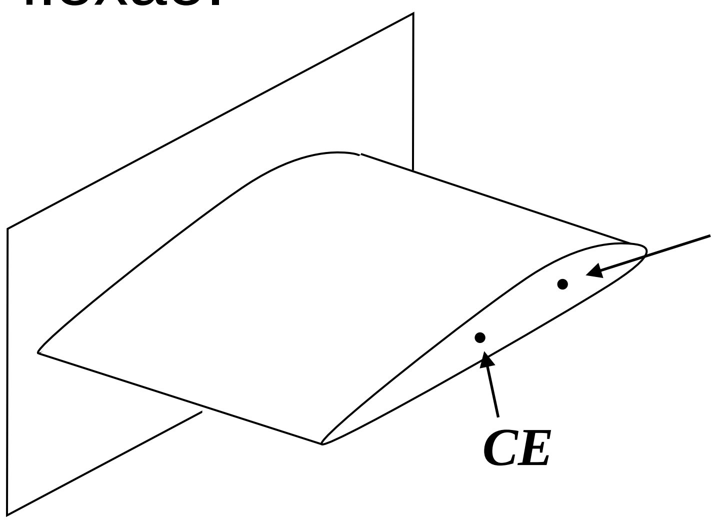
Fenômenos Aeroelásticos
F: “Flutter”
B: “Buffeting”
Z: Resposta dinâmica
L: Distribuição de carga
D: Divergência
C: Eficiência de controle
R: Reversão do sistema de controle

Introdução à
Aeroelasticidade Estática

X-29

Aeroelasticidade Estática

- **<u>Centro Elástico</u> (*CE*):** é o ponto para o qual uma força normal à corda é aplicada e a seção não sofre torção, mas apenas flexão.
- Uma força aplicada fora do *CE* causa torção e flexão.

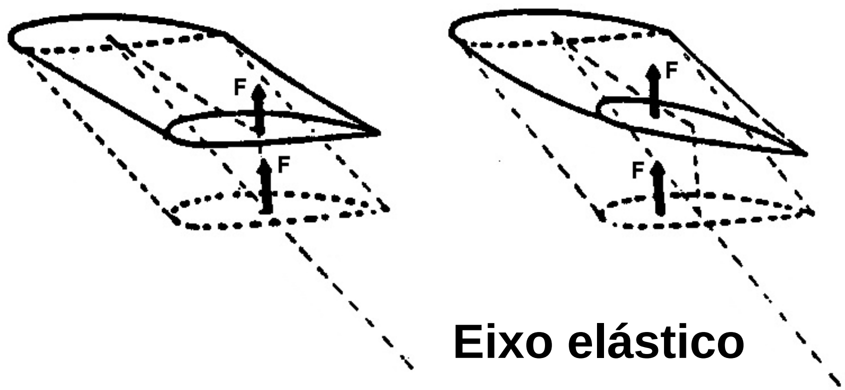


AC **- Centro Aerodinâmico**
(Ponto onde o Momento Aerodinâmico não muda)

Aeroelasticidade Estática

- **<u>Eixo Elástico</u>:** linha ao longo do comprimento da semi-asa, formada pelos pontos (*CE*) onde forças podem ser aplicadas sem resultar em torção da mesma.

Esforço aplicado no eixo elástico (flexão)

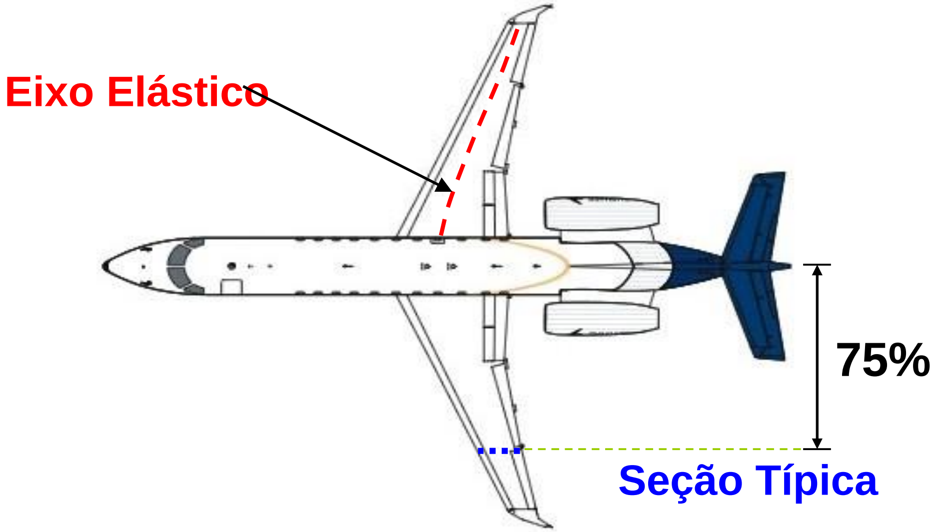


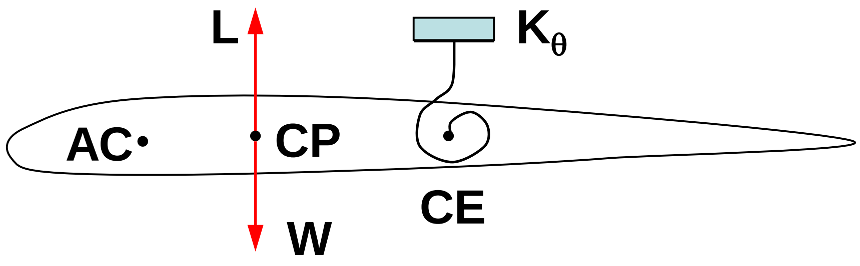
Esforço aplicado fora do eixo elástico (torção e flexão)

Seção Típica de uma Asa

Seção mais representativa da asa. Em geral, é considerada a 75% da semi-envergadura da asa.

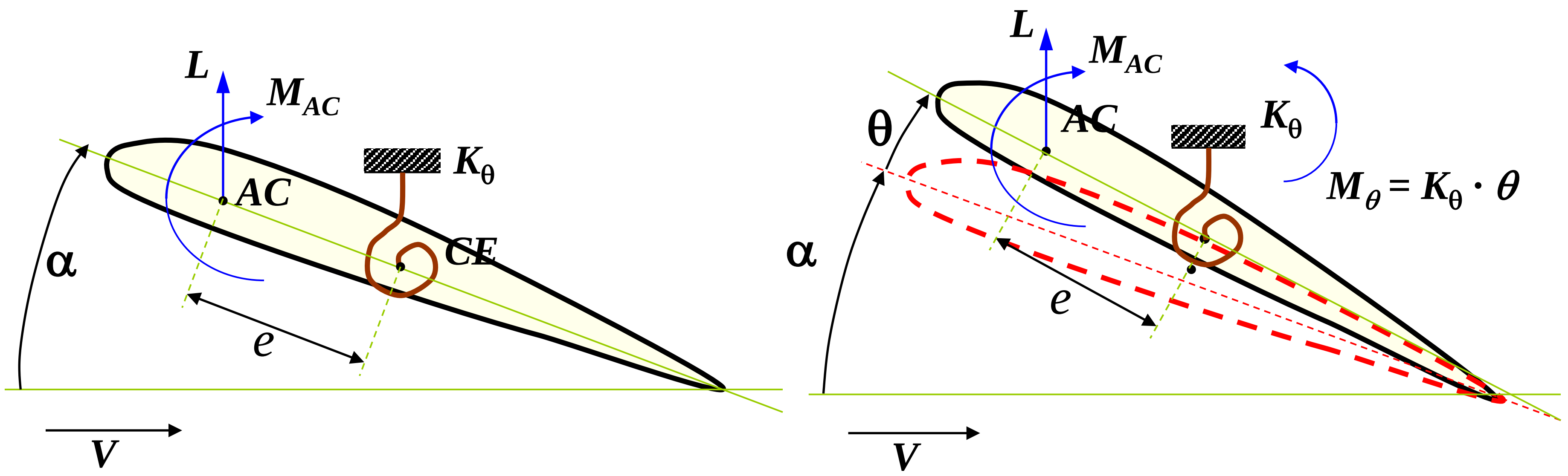
Esta seção depende da rigidez torcional ao longo da asa.





A resistência devido à rigidez torcional é a tendência de uma seção da asa em resistir à torção imposta pela seção adjacente. É representada pela *Mola Torcional* (K_θ).

Divergência Aeroelástica-1 GDL



e - distância do CE ao AC

α - ângulo de ataque inicial

θ - ângulo de torção elástica

Obs.: Geralmente o "Flutter" ocorre antes que a Divergência, exceto para asas com enflechamento negativo.

Hipóteses restritivas

- Contexto linear, a pequenas deformações, o que implica em comportamento linear do material e da aerodinâmica;
- Deformações ocorrem em um período de tempo suficientemente grande, podendo-se classificar o fenômeno como quasi-estático.

Equilíbrio de Momentos (ref. CE)

$$M_{AC} + Le = K_\theta \theta$$

Em termos de coeficientes aerodinâmicos, tem-se:

$$C_{M_{AC}} qSc + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) qSe = K_\theta \theta$$

Determina o quanto tem de torção, dependendo da velocidade. Então,

$$\theta = \frac{qS}{K_\theta}\left(\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC}}}{1 - q\dfrac{Se}{K_\theta}\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

Obs.: θ aumenta quando diminui o denominador. Denominador nulo corresponde a *condição de divergência*.

Condição de divergência

<u>Pressão Dinâmica de Divergência</u> (q_D):
Que proporciona a divergência sobre um aerofólio.

$$q_D = \frac{K_\theta}{Se\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}$$

<u>Velocidade de Divergência</u> (V_D):
Velocidade em que ocorre a Divergência.

$$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho Se\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}}$$

$$L_{Total} = qS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) \quad \therefore \quad L_{Total} = L_{Rígida} + L_{Elástica}$$

O carregamento é alterado pela flexibilidade

Para aumentar a V_D: aumentar K_θ; diminuir e; e reduzir o ρ (aumentar o nível de vôo). Se $e < 0$, não existe a condição de Divergência.

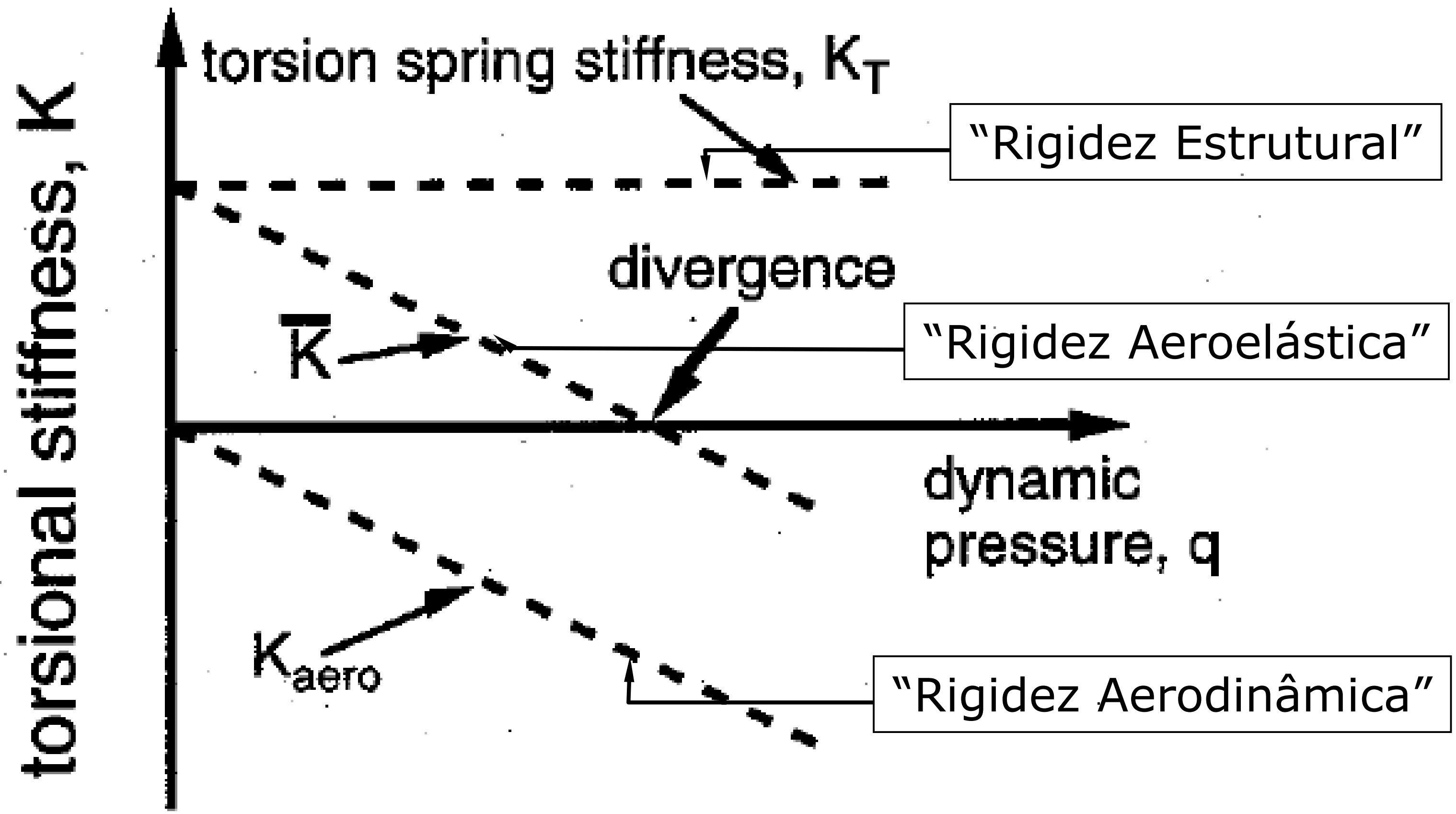
Condição de divergência

- Note os termos que compõem a relação abaixo:

$$\theta = \frac{qSeC_{L\alpha}\alpha_0 + qScC_{M_{AC}}}{\underbrace{\underbrace{K_\theta}_{\text{“Rigidez Estrutural”}} - \underbrace{qSeC_{L\alpha}}_{\text{“Rigidez Aerodinâmica”}}}_{\text{“Rigidez Aeroelástica”}}}$$

A divergência é uma instabilidade independente da magnitude dos esforços (momentos), mas sim dependente da rigidez aeroelástica

Condição de divergência



Influência do peso

- O peso *W*, cujo ponto de aplicação é o CG, também tem influência sobre a torção elástica, devido o momento negativo gerado por ele, resultando em

$$M_{AC} + Le - Wd = K_\theta \theta$$

$$C_{M_{AC}} qSc + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) qSe - Wd = K_\theta \theta$$

$$\theta = \frac{qS}{K_\theta}\left(\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC}} - Wd}{1 - q\dfrac{Se}{K_\theta}\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

Entretanto, note que a divergência independe desta “força externa”...

Acréscimo de sustentação

Efeito Aeroelástico abaixo da *VD*:

$$M_{AC} + Le = K_{\theta}\theta \quad \therefore \quad Se\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) + qScC_{M_{AC}} = K_{\theta}\theta \quad \therefore$$

$$qSe\left(\underbrace{\alpha_0 + \frac{c}{e}\frac{C_{M_{AC}}}{\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}}_{\overline{\alpha}_0} + \theta\right)\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = K_{\theta}\theta$$

$\overline{\alpha}_0$ = ângulo de ataque antes da torção elástica

Acréscimo de sustentação

Como $q_D = \dfrac{K_\theta}{Se\left(\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)} \quad \therefore \quad K_\theta = q_D Se\left(\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)$

Então obtém-se :

$$qS\cancel{e}\left(\overline{\alpha}_0 + \theta\right)\cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} = q_D S\cancel{e}\cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{\alpha}_0 + \theta}{\overline{\alpha}_0} = \frac{1}{1 - \frac{q}{q_D}}$$

que é a expressão que indica o quanto de sustentação
se tem em relação à asa rígida.

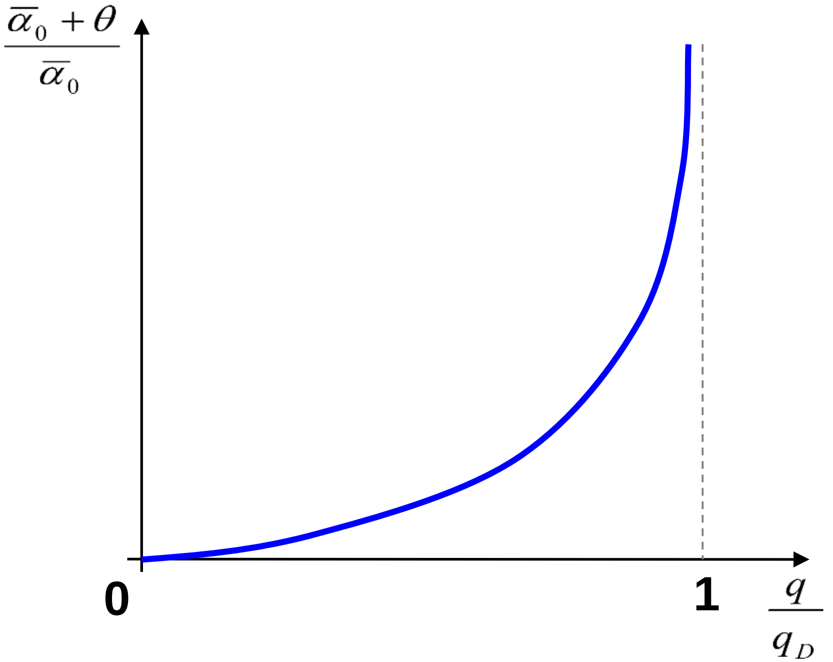
Sustentação Efetiva

$$L_{Efetiva} = \frac{L_{Rígida} + L_{Elástica}}{L_{Rígida}} \cong \frac{\overline{\alpha}_0 + \theta}{\overline{\alpha}_0}$$

Ex.: $\frac{V}{V_D} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q_D} = 0,64$

$$\therefore \quad \frac{\overline{\alpha}_0 + \theta}{\overline{\alpha}_0} \cong 0,3$$

então $L_{Elástica} \cong 2L_{Rígida}$



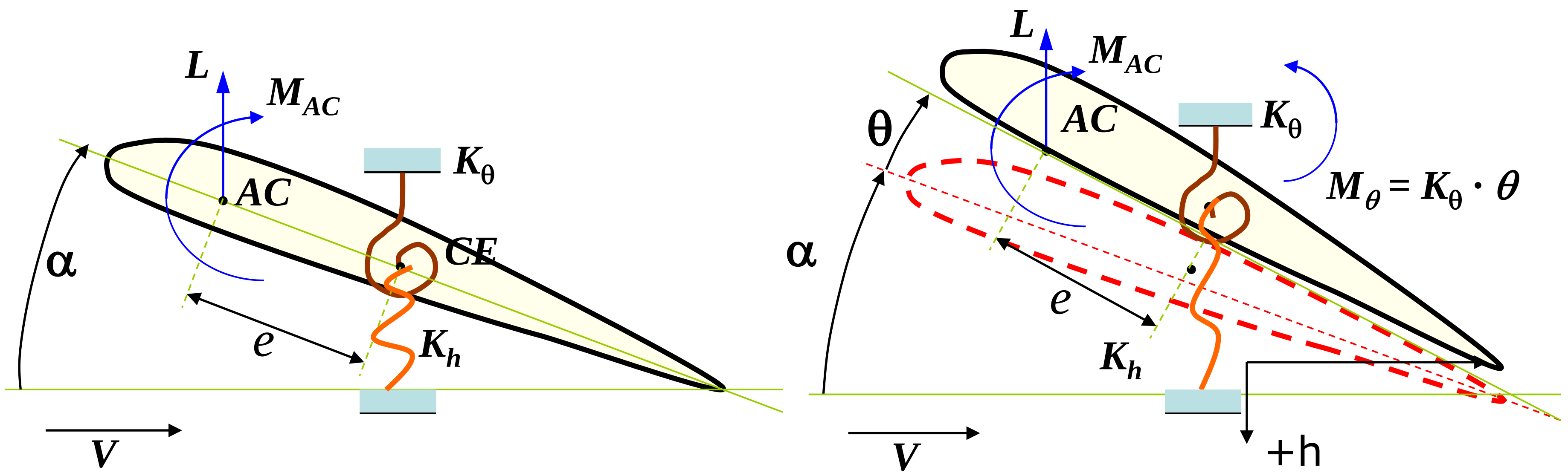
Mas, com $\overline{\alpha}_0 = 5° \quad \Rightarrow \quad \theta = 10°$, e $\overline{\alpha}_0 + \theta = 15°$

que está fora da faixa linear (tomar cuidado).

Considerações adicionais

- A eficiência da sustentação modifica o desempenho da aeronave, e deve ser considerada no projeto;
- A superfícies de sustentação devem ser dimensionadas considerando a flexibilidade;
- A redistribuição da sustentação move o centro de pressão de uma asa na direção da raiz, e para a frente (direção do BA);
- O estudo da estabilidade e controle da aeronave deve levar em conta os efeitos da flexibilidade.

Divergência Aeroelástica-2 GDL



e - distância do CE ao AC

α - ângulo de ataque inicial

θ - ângulo de torção elástica

h - deslocamento vertical

$\boldsymbol{K_h}$ = rigidez em translação

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$M_{AC} + L \cdot e = K_\theta \cdot \theta$$

$$L = K_h \cdot h$$

Agrupando:

$$qS\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right)\right] = K_h \cdot h$$

$$qScC_{M_{AC}} + qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right)\right] = K_\theta \cdot \theta$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = qSC_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + qSC_{L_\alpha} \alpha_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + qScC_{M_{AC}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} - qSC_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = qSC_{L_\alpha} \alpha_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + qScC_{M_{AC}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{K_\theta} & \dfrac{qSC_{L_\alpha}}{K_\theta} \\ 0 & 1 - \dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha} \alpha_0}{K_\theta} \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + \frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha}\alpha_0}{K_\theta}\begin{bmatrix} \dfrac{K_\theta}{K_h} & \dfrac{\left(-qSC_{L_\alpha}/K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}} \\ 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + \frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta}\begin{bmatrix} \dfrac{K_\theta}{K_h} & \dfrac{\left(-qSC_{L_\alpha}/K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}} \\ 0 & \dfrac{1}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Os deslocamentos são dados por:

$$h=\left[\frac{\left(-qSC_{L_\alpha}\alpha_0 \big/ K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]-\frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta}\left[\frac{\left(-qSC_{L_\alpha} \big/ K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]$$

$$\theta=\left[\frac{\left(qSC_{L_\alpha}\alpha_0 \big/ K_\theta\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]-\frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta}\left[\frac{1}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]$$

Moral da história: A pressão dinâmica de divergência é a mesma que o caso com 1 GDL.

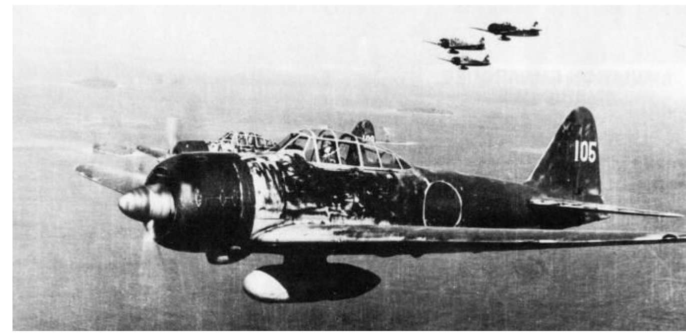
Outros efeitos...

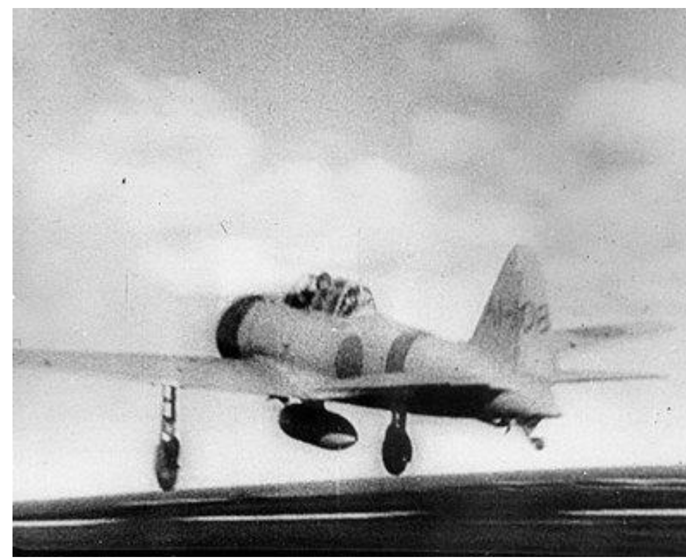
- A condição (pressão dinâmica, por exemplo) em que o aerofólio perde a sua resistência em torção é conhecida como divergência;
- Não apenas o efeito da compressibilidade, mas também um eventual aquecimento aerodinâmico pode mudar as características estruturais da estrutura, diminuindo a sua rigidez. (Aerotermoelasticidade). Ex. vôos em regime hipersônico.
- Uma falha estrutural pode alterar a característica aeroelástica e levar a divergência

Sumário

- A divergência aeroelástica é uma instabilidade prevista por uma análise de rigidez estática;
- Próximo da condição de divergência, pequenas deformações em torção (incidência da asa) implicam em grande deformações que podem levar a carregamentos aerodinâmicos ainda maiores – pode-se atingir regimes não lineares quanto ao comportamento aerodinâmico;
- Perto da condição de pressão dinâmica de divergência, o efeito da flexibilidade promove um incremento significativo na sustentação.

Eficiência e Reversão de Comandos





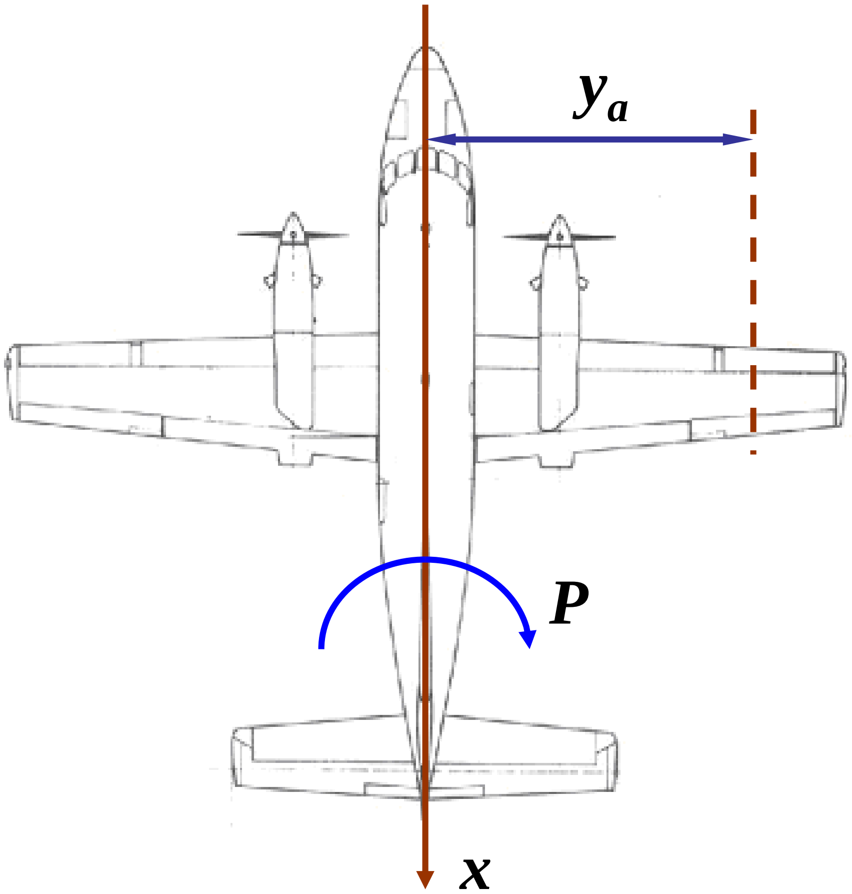
Eficiência e reversão de comandos

Fenômenos que também estão associados à Aeroelasticidade Estática.

Será usado o aileron para exemplificar estes fenômenos. Seu objetivo é criar um momento de rolamento *P*.

ΔL_a = diferença de sustentação

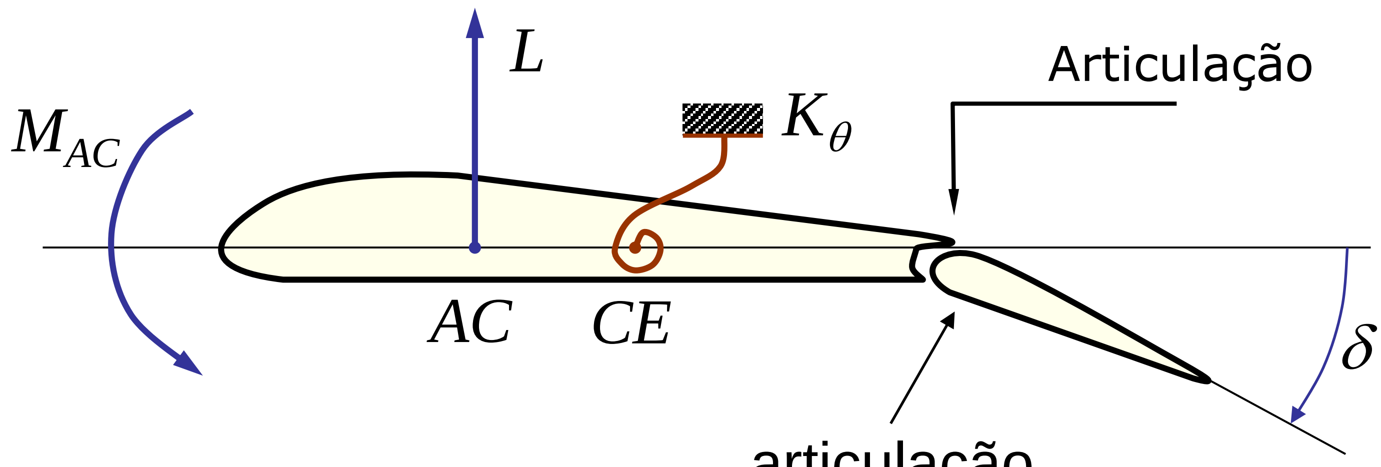
$M_x = 2\Delta L_a \cdot y_a$



Eficiência e reversão de comandos

- Supõem-se que a superfície de comando rotacione fazendo um ângulo δ com a linha da corda da seção;
- Com a deflexão da superfície de comando, a geometria do perfil muda (camber efetivo), então o C_{MAC} também muda;
- Esta variação angular da superfícies de comando gera um momento picador que tende a deformar a asa da aeronave, que é flexível;
- Tal deformação pode ser suficientemente grande de forma que a ação do aileron pode gerar um torque em rolamento em sentido contrário do que o esperado.

Reversão de comandos



sem deflexão

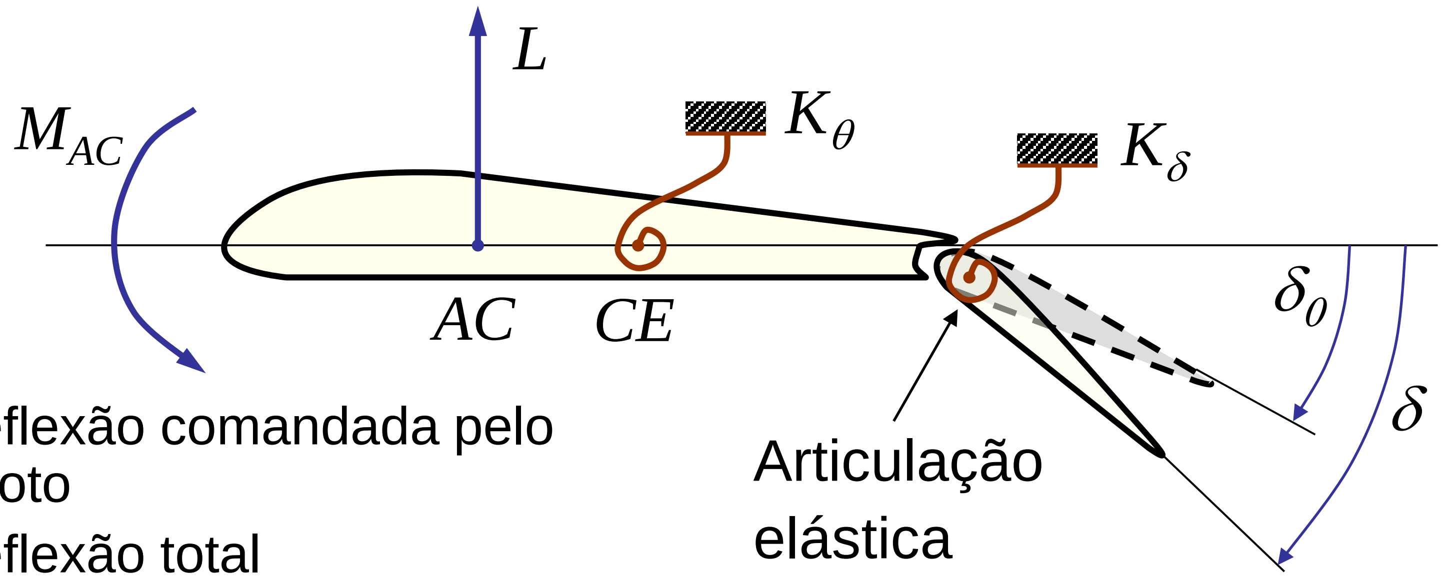
total

coeficiente de momento
da deflexão do aileron

$$C_{M_{AC}} = C_{M_{AC_0}} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta$$

deflexão do aileron

Reversão de comandos



δ_0 deflexão comandada pelo piloto

δ deflexão total

K_δ rigidez da articulação

Devido os esforços aerodinâmicos que tendem a introduzir uma nova deflexão da superfície de comando, a deflexão total é diferente da imposta pelo piloto. A deflexão pode ser maior ou menor que a deflexão inicial.

Reversão de comandos

Então, relativo a seção típica com superfície de controle, tem-se:

$$L = qSC_L \qquad \therefore \qquad L = qS\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) + \frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]$$

$$M_{AC} = qScC_{M_{AC}} \qquad \therefore \qquad M_{AC} = qSc\left(C_{M_{AC_0}} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right)$$

Reversão de comandos

Devido à articulação, o momento aerodinâmico da superfície de controle (H), em relação ao eixo da articulação, é dado por:

$$H = qS_{(H)}c_{(H)}C_{M_{(H)}} \quad \therefore$$

$$H = qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}} + \frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) + \frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \delta}\delta\right]$$

<u>Nota</u>: com δ +, H +

Exemplo: Seção Típica

1) Equilíbrio de momentos em relação ao CE da seção:

$$qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0+\theta)+\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]+qSc\left[C_{M_{AC_0}}+\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\theta\theta$$

2) Equilíbrio de momentos em relação ao eixo de articulação:

$H=K_\delta(\delta-\delta_0)$, com $(\delta-\delta_0)$ sendo a torção elástica da superfície de controle, em relação ao eixo de articulação.

$$qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}}+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \alpha}(\alpha_0+\theta)+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\delta(\delta-\delta_0)$$

Reversão de comandos

O que resulta em um sistema cuja equação matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \cdot [B]$$

$$a_{11} = e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{K_\theta}{qS}, a_{12} = e\frac{\partial C_L}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}$$

$$a_{21} = \frac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}, a_{22} = \frac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta} - \frac{K_\delta}{qS_H c_H}$$

Demonstração do desenvolvimento da matriz

Equilíbrio de momentos em relação ao CE da seção:

$$qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0+\theta)+\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]+qSc\left[C_{M_{AC_0}}+\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\theta\theta$$

$$qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta+qSe\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta+qScC_{M_{AC_0}}+qSc\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta=K_\theta\theta$$

$$\left(\cancel{qS}e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}-K_\theta\right)\theta+\cancel{qS}\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \delta}+c\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta=-\cancel{qS}\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right)$$

$$\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}-\frac{K_\theta}{qS}\right)\theta+\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \delta}+c\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta=-\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right)$$

Equilíbrio de momentos em relação ao eixo de articulação

$$qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}}+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial\alpha}\left(\alpha_0+\theta\right)+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial\delta}\delta\right]=K_\delta\left(\delta-\delta_0\right)$$

$$qS_Hc_HC_{M_{0H}}+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\theta+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta=K_\delta\delta-K_\delta\delta_0$$

$$\left(\cancel{qS_Hc_H}\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\right)\theta+\left(\cancel{qS_Hc_H}\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta-K_\delta\right)\delta=-\left[\cancel{qS_Hc_H}\left(C_{M_{0H}}+\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0\right)+K_\delta\delta_0\right]$$

$$\left(\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\right)\theta+\left(\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta-\frac{K_\delta}{qS_Hc_H}\right)\delta=-\left[\left(C_{M_{0H}}+\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0\right)+\frac{K_\delta\delta_0}{qS_Hc_H}\right]$$

Montagem da equação matricial

$$\begin{cases} \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \dfrac{K_\theta}{qS}\right)\theta + \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta} + c\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta = -\left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC_0}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\right)\theta + \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta}\delta - \dfrac{K_\delta}{qS_H c_H}\right)\delta = -\left[\left(C_{M_{0H}} + \dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\alpha_0\right) + \dfrac{K_\delta \delta_0}{qS_H c_H}\right] \end{cases}$$

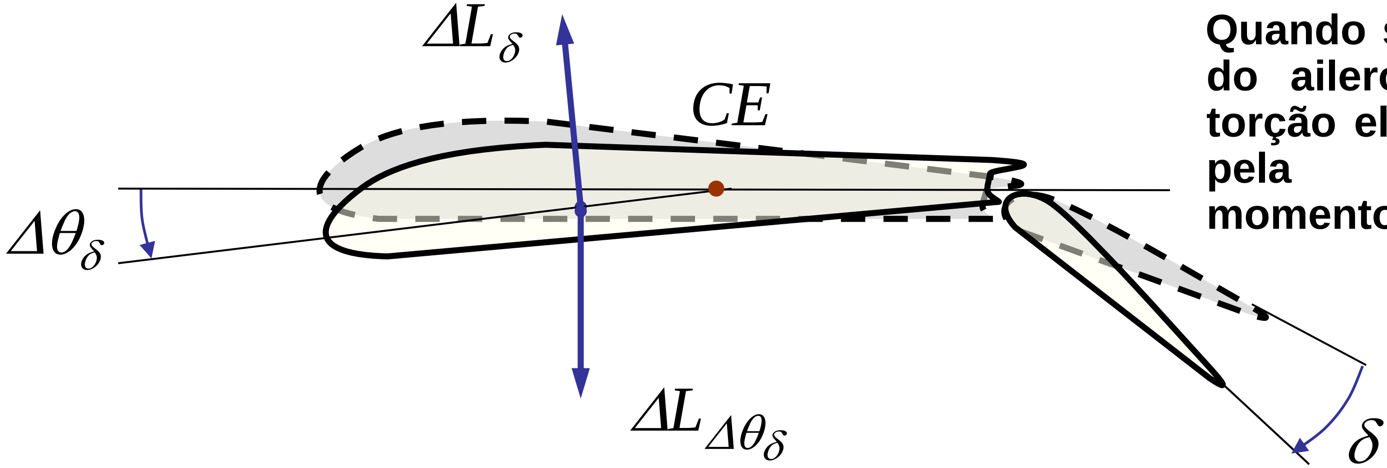
$$\begin{bmatrix} \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \dfrac{K_\theta}{qS}\right) & \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta} + \dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right) \\ \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\right) & \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta} - \dfrac{K_\delta}{qS_H c_H}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC_0}}\right) \\ -\left(C_{M_{0H}} + \dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\alpha_0 + \dfrac{K_\delta \delta_0}{qS_H c_H}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \{A\} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \{B\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \{A\}^{-1} \cdot \{B\}$$

Divergência

- A divergência aeroelástica vai ocorrer quando o det[A] = 0, o que é real para um determinado valor da pressão dinâmica, exceto se o CE estiver à frente do AC, caso onde nunca ocorre a divergência aeroelástica.
- Este critério de estabilidade é conhecido como critério de estabilidade de Euler, e será apresentado formalmente quando tratarmos do problemas de asas sujeitas a fenômenos aeroelásticos estáticos.

Reversão de comandos



Quando se tem deflexão do aileron, surge uma torção elástica, causada pela variação do momento aerodinâmico.

$\Delta L_{\Delta\theta_\delta}$ **é devido o momento picador que surge com a deflexão positiva do aileron, tendendo a diminuir a sustentação adicional gerada, ou o momento de cabragem que surge com a deflexão negativa do aileron, tendendo a adicionar sustentação.**

ΔL_δ **sustentação gerada pela deflexão do aileron se a asa fosse rígida.**

$$\Delta L_\delta = qS\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta$$

onde $\partial C_L/\partial\delta$ é a derivada de controle, que depende do perfil e da superfície de controle.

Reversão de comandos

A deflexão do aileron também gera uma mudança no momento aerodinâmico, representado por:

$$\Delta M_{AC_\delta} = qSc\frac{\partial M_{AC}}{\partial \delta}\delta$$

onde $\partial M_{AC}/\partial \delta$ é uma derivada tipicamente negativa.

Voltando à equação de equilíbrio $Le + M_{AC} = K_\theta \theta$.

as variações em L e M_{AC} produzirão uma torção elástica adicional $\Delta\theta_\delta$ resultando em $\Delta L_a e + \Delta M_{AC} = K_\theta \Delta\theta_\delta$

ou seja, saindo de uma condição de equilíbrio para outra condição de equilíbrio, onde:

$$\Delta L_a = \Delta L_\delta + \Delta L_{\Delta\theta_\delta}$$

Reversão de comandos

E escrevendo-se na forma de coeficientes, tem-se:

$$qSc\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial\delta}\delta+eqS\left(\frac{\partial C_L}{\partial\delta}\delta+\frac{\partial C_L}{\partial\alpha}\Delta\theta_\delta\right)=K_\theta\Delta\theta_\delta$$

A partir desta expressão, obtém-se a mudança na torção elástica correspondente, ou seja, a Torção Elástica Adicional causada pela deflexão do aileron. ·

Assumindo-se que δ seja conhecido, a expressão para a Torção Elástica Adicional é dada por:

$$\boxed{\Delta\theta_\delta=\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial\delta}+c\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial\delta}}{\dfrac{K_\theta}{qS}-e\dfrac{\partial C_L}{\partial\alpha}}\delta}$$

Eficiência dos comandos

Com isso, pode-se calcular as mudanças adicionais no carregamento aerodinâmico do perfil devido à deflexão do aileron:

$$\Delta L_a = \Delta L_\delta + \Delta L_{\Delta\theta_\delta} \;\therefore\; \Delta L_a = qS\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta + qS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta} + c\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\dfrac{K_\theta}{qS} - e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\delta\right) \therefore$$

$$\Delta L_a = qS\delta\left(\frac{\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}\dfrac{K_\theta}{qS} + c\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\dfrac{K_\theta}{qS} - e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

Eficiência dos comandos

devido à deflexão do aileron

$$\Delta L_a = qS\delta\left(\frac{\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\frac{K_\theta}{qS} + c\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\frac{K_\theta}{qS} - e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

devido à torção na asa, por causa da deflexão do aileron

A uma determinada pressão dinâmica (q) não muito pequena, pode ocorrer do termo no numerador zerar, ou seja ΔL_a será nulo, o que será um bom critério para adotar a condição de reversão do comando

Limite da reversão

$$0 = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta} \frac{K_\theta}{qS} + c \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta} \right) qS\delta =$$

$$= C_{L\delta} K_\theta + c C_{L\alpha} C_{M_{AC}\delta} qS = 0 \qquad \Rightarrow$$

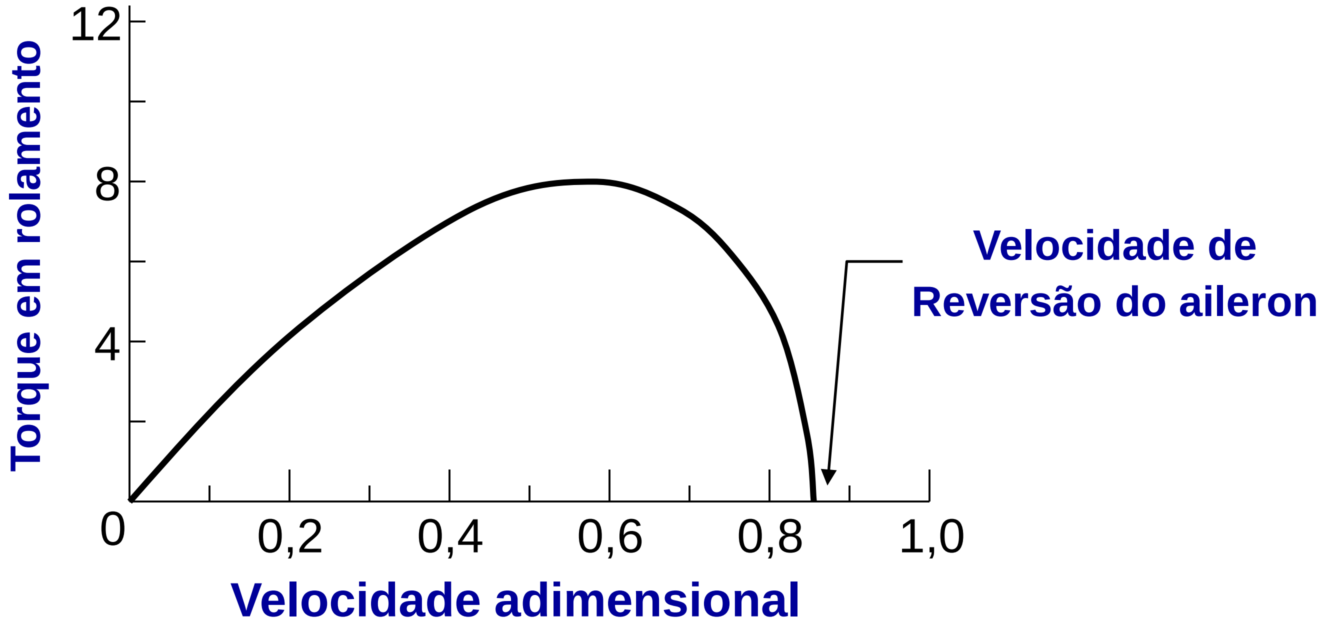
$$q_R = -\frac{C_{L\delta} K_\theta}{S c C_{L\alpha} C_{M_{AC}\delta}}$$

Eficiência dos comandos

Esta pressão é denominada *Pressão Dinâmica de Reversão de Controle* (q_R).

$$\boxed{q_R = -\frac{K_\theta}{Sc}\,\frac{\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}}{\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\,\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}}$$

Eficiência dos Comandos



Efeito da velocidade na eficiência do aileron

O efeito do enflechamento

Aeroelasticidade estática de asas enflechadas.

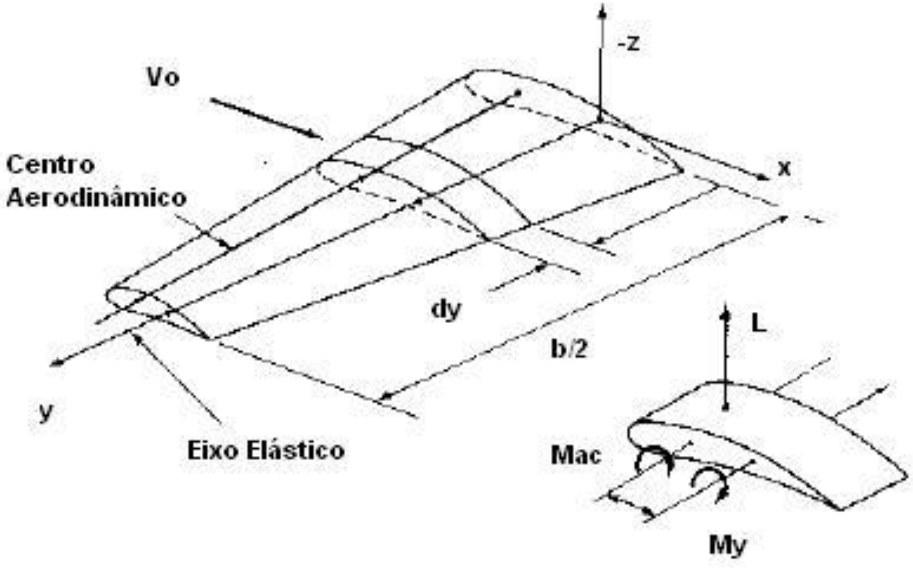
- Objetivo
  - Determinar como a flexão, não somente a torção como se viu antes, muda o carregamento em asas enflechadas;
  - Apresentação de modelos aerodinâmicos e estruturais simples.

Considerações iniciais

- Asas podem ter o seu enflechamento positivo ("para trás"), ou negativo ("para frente")
- Para que enflechar para frente ?
  - Tentar diminuir a distância entre o centro aerodinâmico e o centro de gravidade da aeronave;
  - Melhorar características de controlabilidade longitudinal para o caso de aeronaves com pouco volume de cauda, uma vez que a eficiência de sustentação aumentada;
  - Diminuir efeito de arrasto de onda no regime transônico, aumento Mach de cruzeiro...

Teoria das Faixas

- Técnica para resolver um problema tridimensional empregando soluções bidimensionais conhecidas;
- Não é restrito apenas ao cálculo de carregamento estacionário para aeroelasticidade;
- A idéia é subdividir uma dada superfície de sustentação em faixas dispostas ao longo da envergadura:



Teoria das Faixas

• Cada faixa possui uma largura finita, a partir da qual pode-se calcular o carregamento por faixa multiplicando:

$$\boxed{L_i = \bar{l} \cdot dy_i \quad , \quad L^{total} = \sum_{i=1}^{nfaixas} L_i}$$

Note que o carregamento obtido através da teoria do carregamento estacionário sobre um perfil, é por unidade de comprimento de envergadura.

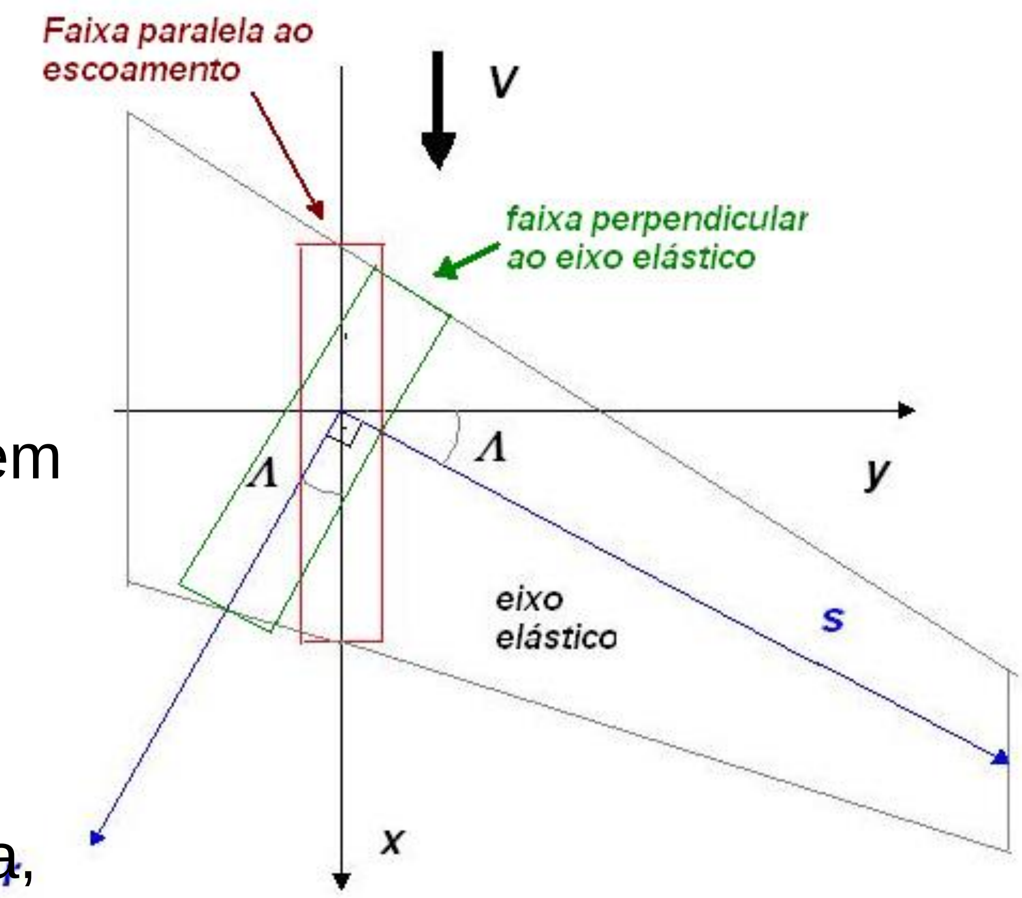
• Para o cálculo do carregamento, emprega-se os movimentos referentes aos graus de liberdade de uma determinada faixa.

Teoria das Faixas

- Esta teoria é limitada a casos de asas onde os efeitos tridimensionais do escoamento podem ser desprezados, por exemplo, asas de grande alongamento;
- Não são considerados efeitos de influência aerodinâmica entra as faixas, → solução bidimensional
- As faixas poderiam estar preferencialmente alinhadas com o escoamento, → para usar o modelo das seção típica, corda perpendicular ao eixo elástico.
- Decompõem-se o escoamento para um sistema de coordenadas local da asa onde para a envergadura, o eixo "y" deve coincidir com o eixo elástico.

Teoria das Faixas Modificada

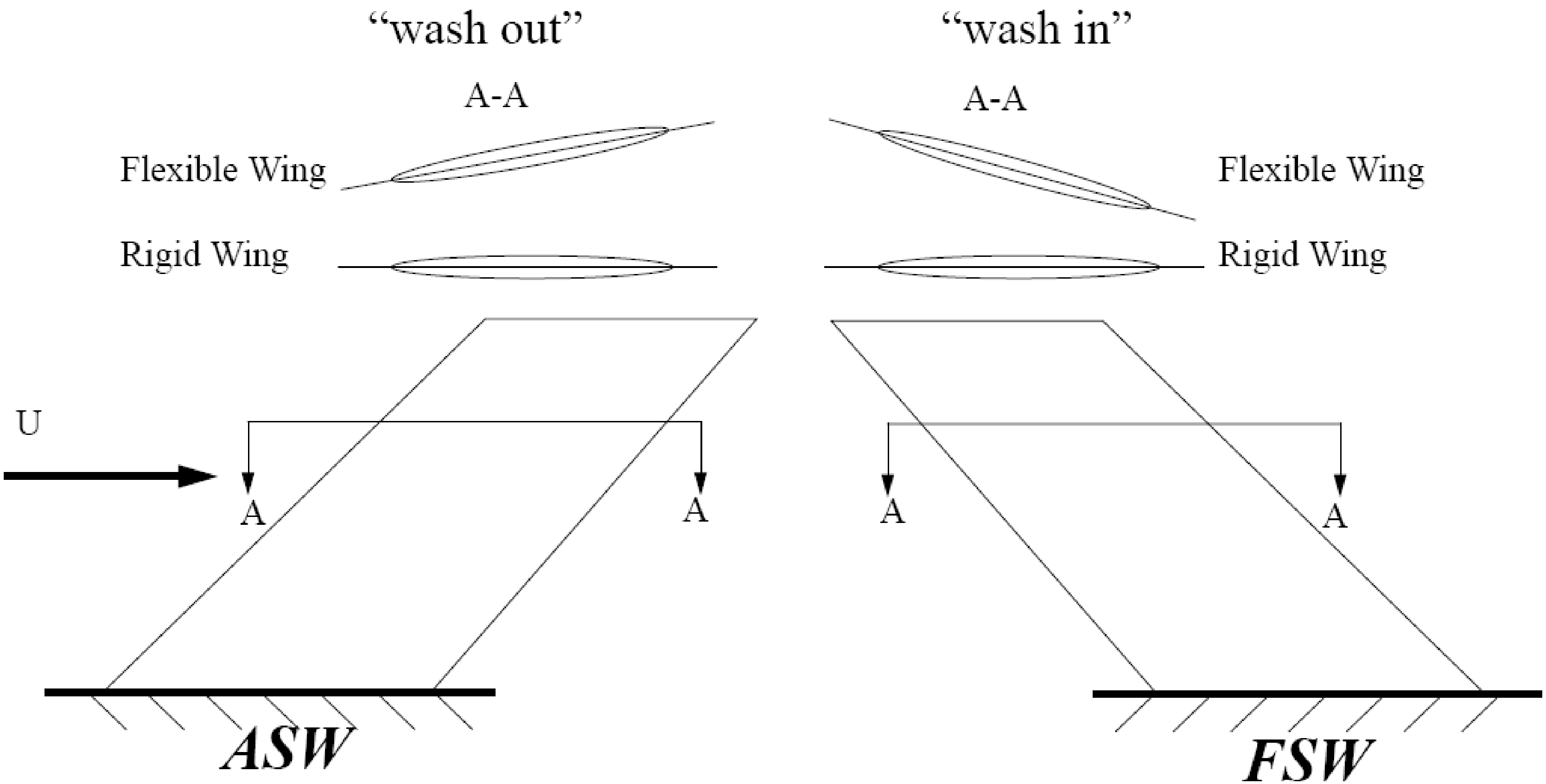
- Asa enflechada
  - Método das componentes de velocidade
- A asa é discretizada em faixas, cuja corda de cada seção típica é perpendicular ao seu eixo elástico;
- Se a asa é enflechada, o eixo elástico também será;



Entendendo o efeito do enflechamento

- Para asa rígida existem efeitos aerodinâmicos associados ao carregamento devido a conformação do sistemas de vórtices da asa (Ver Bertin e Smith - Aerodinâmica), em função do enflechamento da mesma
- A asa flexível, por sua vez apresenta uma peculiaridade, ao mesmo tempo que deformação em flexão pura em torno de um eixo perpendicular o eixo elástico, para o escoamento (alinhado como a comprimento dos aerofólios da asa) ela apresentará um ângulo de ataque.
- Este acoplamento flexo-torcional influencia severamente a característica de divergência da asa.

Efeitos de “Wash in” e “Wash Out”



São resultantes do acoplamento de um movimento de flexão que induz uma torção.
NOTE A DIFERENÇA DEVIDO O ENFLECHAMENTO!

Efeito do Enflechamento

- Quando a asa é enflechada, deve-se observar que as seções típicas, definidas perpendiculares ao eixo elástico, não estão alinhadas com o escoamento;

- Emprega-se a solução aerodinâmica bidimensional para resolver o problemas por faixas (aproximação);

- Entretanto, alguns “termos novos”surgirão nas relações de sustentação e momento, pois existirá um acoplamento do movimento de flexão que induzirá uma torção nas faixas alinhadas com o escoamento não perturbado;

- O primeiro passo será escrever a velocidade de deformação da asa na direção vertical como função de coordenadas de um novo sistema de eixos, onde um deles é coincidente com o eixo elástico da asa.

Efeito do Enflechamento

Ref. NACA-REPT-1014

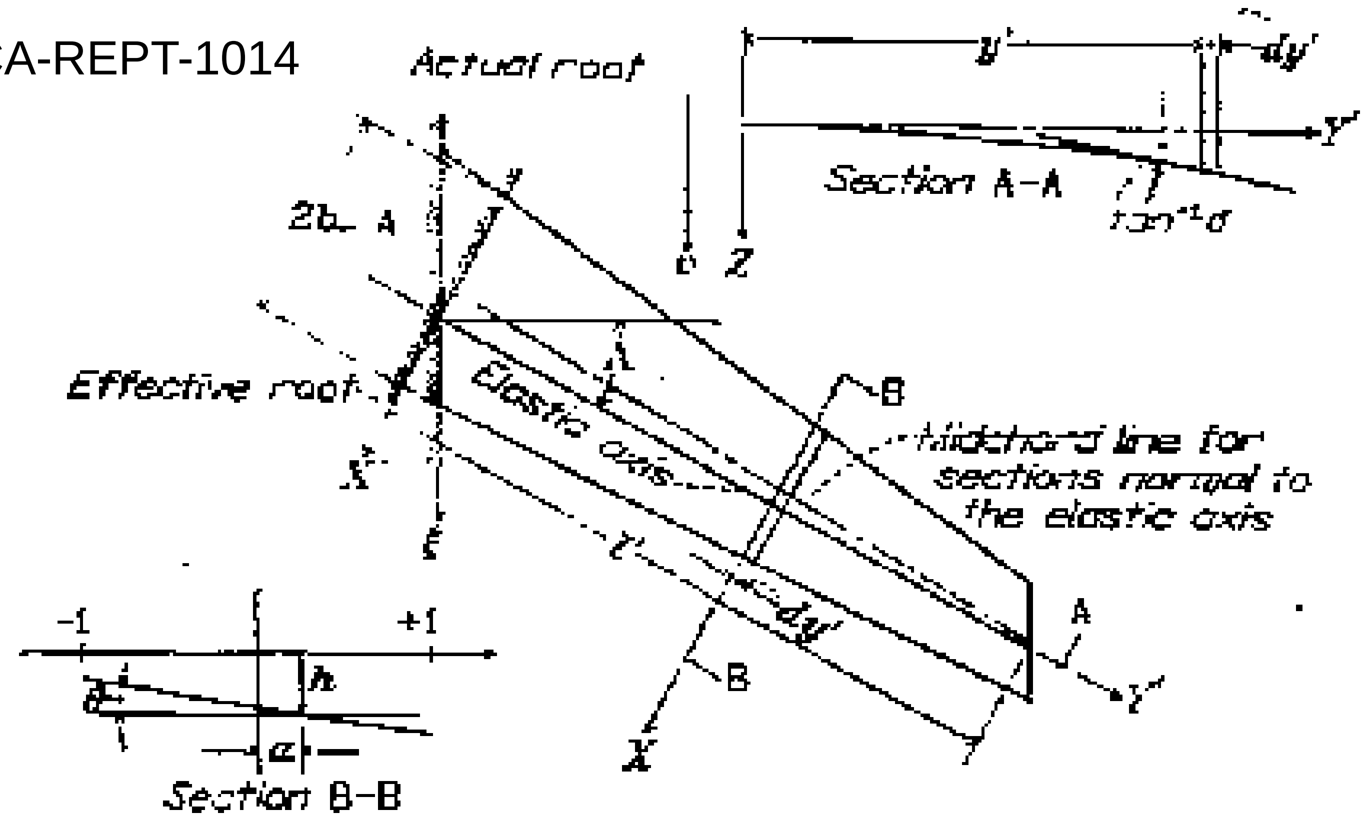


FIGURE 1.—Nonuniform swept wing treated in the present analysis.

Efeito do Enflechamento

- Sendo “s”o eixo alinhado com a direção da envergadura e coincidente com o eixo elástico; e “r” perpendicular a “s”, um deslocamento Z escrito neste novo sistema de coordenadas é uma função: Z = Z(r,s,t) . (na figura, y’ = s)

- E a condição de contorno, ou seja o normalwash induzido pela superfície da asa é:

$$W(r,s) = -V_0 \frac{\partial Z}{\partial \xi}(r,s)$$

onde a coordenada ξ é paralela com o escoamento não perturbado. Define-se o normalwash (ou downwash) como sendo a velocidade normal induzida pelo deslocamento da asa sujeita ao escoamento V_0.

$$\xi // V_0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi} = \cos\Lambda \frac{\partial Z}{\partial r} + \sin\Lambda \frac{\partial Z}{\partial s}$$

Efeito do Enflechamento

- Condição de contorno:

$$W(r,s) = -\left(V_0 \cos\Lambda \frac{\partial Z}{\partial r} + V_0 \sin\Lambda \frac{\partial Z}{\partial s}\right)$$

- Porém o deslocamento na direção do eixo Z pode ser escrito como uma função de h(s) e α(s), graus de liberdade da seção típica :

$$Z(r,s) = h(s) - r \cdot \alpha(s)$$

$$\cos\alpha \cong 1.0 \qquad \sin\alpha \cong \alpha$$

onde se considerou que $\cos\alpha \cong 1.0$ e $\sin\alpha \cong \alpha$

- Substituindo esta última relação na condição de contorno:

$$W(r,s) = V_0 \cos\Lambda \frac{\partial}{\partial r}\left[h(s) - r \cdot \alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda \frac{\partial}{\partial s}\left[h(s) - r \cdot \alpha(s)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(r,s) = -V_0 \cos\Lambda\left[\alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda\left[\frac{\partial h}{\partial s}(s) - r \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s)\right]$$

Efeito do Enflechamento

- Portanto, sobre o eixo elástico (r = 0) temos a expressão final para o ângulo de ataque no sistema rotacionado, a partir da expressão para o downwash:

$$W(r,s) = -V_0 \cos\Lambda\left[\alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda\left[\frac{\partial h}{\partial s}(s) - \cancel{r}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s)\right]$$

$$\Rightarrow W(r,s) = -V_0 \cos\Lambda\left[\alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda\left[\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right]$$

- Como $V_n = V_0\cos(\Lambda)$, o ângulo de ataque observado pela seção típica com corda normal ao eixo elástico é dado por:

$$-\frac{W(r,s)}{V_0 \cos\Lambda} = \alpha_s(r,s) = \alpha(s) - \tan\Lambda\left(\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right)$$

Efeito do Enflechamento

- Mudando a notação, temos:

$$-\frac{W(r,s)}{V_0\cos\Lambda}=\alpha_s(r,s)=\theta-\phi\tan\Lambda$$

$$\left(\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right)=\phi \quad \rightarrow$$ Inclinação local do eixo elástico deformado em flexão

Ou seja, fica claro agora que o ângulo de ataque efetivo na seção típica é composto por uma componente devido a torção (θ) e uma componente devido a flexão ($\phi.tan\Lambda$), que depende do enflechamento. Note que se o ângulo de enflechamento for positivo (para trás), temos o fenômeno de "wash out". Por outro Lado, se Λ for negativo, (para frente) temos o "wash in".

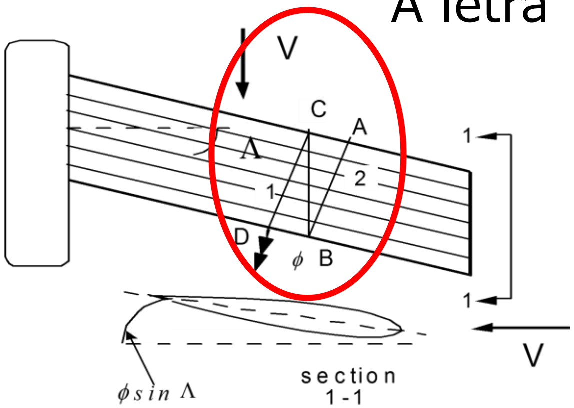
Exemplo simplificado:

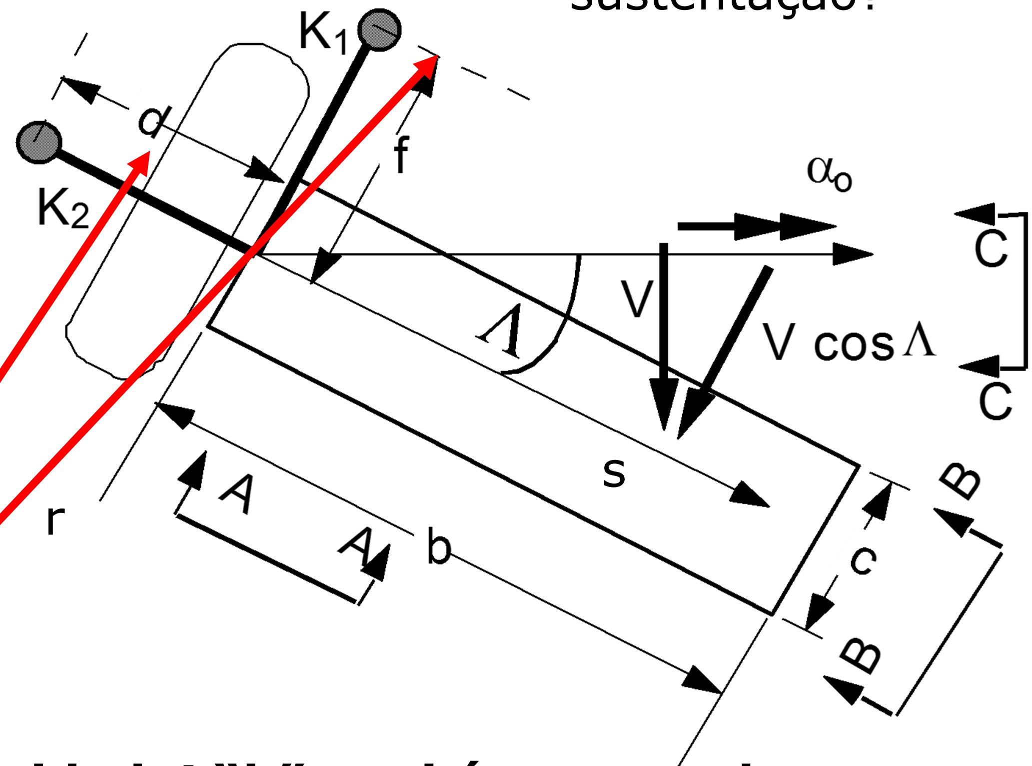
- Asa rígida com engastes flexíveis:
  - Vamos estudar um primeiro modelo simplificado, cujo propósito é entender o efeito do enflechamento;
  - Supõem-se que a asa é rígida e engastada através de molas que restringem movimento de corpo rígido que em flexão e torção.

Sistemas de eixos

A letra “N”

Flexão gera sustentação?



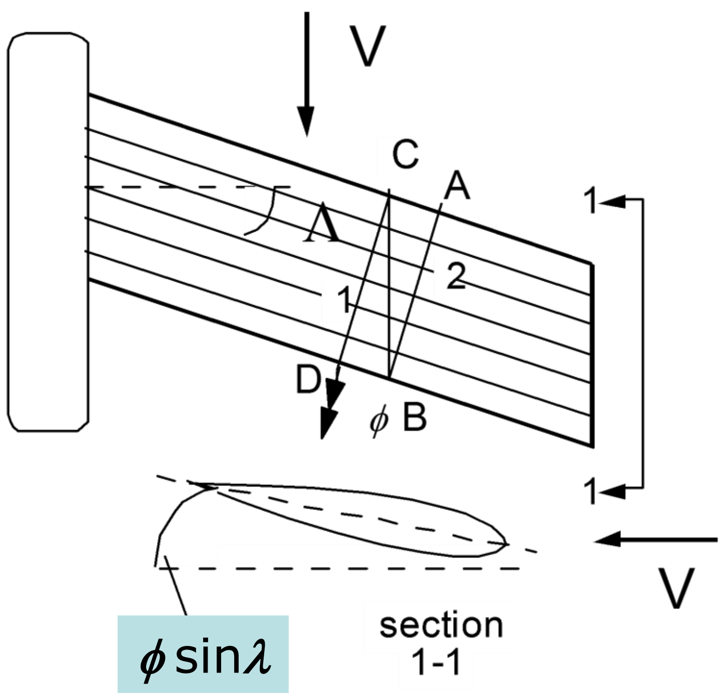


Molas que resistem a
deslocamentos verticais

Cuidado! “b” aqui é envergadura….

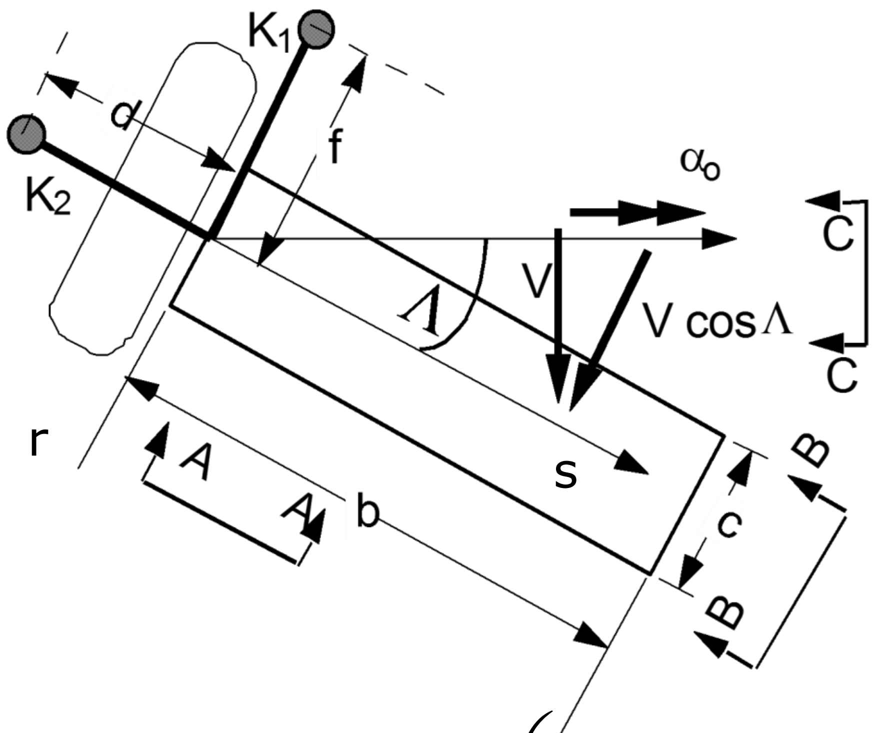
Acoplamento tipo flexo-torção

Pela figura abaixo, pode-se entender com funciona o acoplamento entre o modo de flexão e a torção induzida a uma seção de asa enflechada, alinhada com o escoamento aerodinâmico.



Os segmentos CD e AB acompanham o movimento vertical devido a flexão sem torcer. Por outro lado o segmento CB desloca-se verticalmente, porém ele torce, pois o ponto B desloca-se mais no sentido vertical que o ponto C. O segmento CB representa a seção da asa alinhada com o escoamento.

Sustentação na asa flexível



Para calcular o carregamento aerodinâmico na seção típica, que por razões estruturais é perpendicular ao eixo elástico, leva-se em conta a componente de escoamento não perturbado normal a este eixo.

$$q_n = q\cos^2\Lambda$$

$$L = q_n c b C_{L\alpha}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi\tan\Lambda\right)$$

Ângulo de ataque efetivo

$$\alpha_{freestream} = \frac{v}{V} = \alpha_o + \theta \cos \Lambda - \phi \sin \Lambda$$

(a expressão acima obtivemos da condição de contorno a pequenas Perturbações – expressão para o downwash)

Entretanto, queremos o ângulo de ataque "percebido" pela seção típica.

$$\alpha_c = \alpha_{corda} = \frac{v}{V \cos \Lambda} = \frac{\alpha_o}{\cos \Lambda} + \frac{\theta \cos \Lambda}{\cos \Lambda} - \frac{\phi \sin \Lambda}{\cos \Lambda}$$

Estrutural ou na direção da corda...

$$\alpha_{estrutural} = \theta - \phi \tan \Lambda$$

Sustentação da asa flexível

Portanto, para o cálculo da sustentação na asa assumindo a teoria
Das faixas, devemos calcular a sustentação em cada faixa
empregando a pressão dinâmica equivalente.

$$q_n = q\cos^2\Lambda$$

Componente de velocidade normal ao eixo elástico da asa.

$$L = q_n c b C_{L\alpha}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi\tan\Lambda\right)$$

Note que esta sustentação é calculada com relação a seção típica, ou seja empregando o ângulo de ataque “estrutural”, mais A contribuição de um ângulo de ataque inicial α_0

Modelo estrutural simplificado

- Assumiu-se que as molas que restringem os movimentos de corpo rígido da nossa asa enflechada são representadas pelas molas K_1 e K_2, dispostas com uma excentricidade “f” e “d”, respectivamente;
- Estas molas podem ser representadas por molas que restringem os graus de liberdade em flexão na forma da derivada da deformação ao longo da envergadura e no sentido vertical, e o grau de liberdade em torção da asa.

$$K_1 f \theta$$

A mola K_1 resiste ao a torção da asa gerando a força
Por outro lado, promove um torque restaurador:

$$\left(K_1 f \theta\right) f = K_1 f^2 \theta = K_\theta$$

Analogamente: $K_\phi = K_2 d^2$

Carregamento aerodinâmico

- O carregamento aerodinâmico para o nosso problema pode ser aproximado por:

$$\int_0^b (l \cdot s)\, ds = q_n c C_{l_\alpha} \frac{b^2}{2}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi \tan\Lambda\right)$$

$$\int_0^b (l \cdot e)\, ds = q_n c C_{l_\alpha} eb\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi \tan\Lambda\right)$$

Onde: $q_n = \frac{1}{2}\rho V_n^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 \cos^2\Lambda = q\cos^2\Lambda$

Note que na realidade são momentos resultantes da distribuição do carregamento aerodinâmico ao longo da envergadura b, no sentido deste e no sentido da corda.

Equilíbrio estático

Momentos associados à flexão e torção

Equilíbrio em flexão (ϕ)

$$K_\phi \phi = \int_o^b (l \cdot s)\, ds \qquad \Rightarrow$$

$$K_\phi \phi = q_n c C_{l_\alpha} \frac{b^2}{2} \left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi \tan\Lambda \right)$$

Equilíbrio em torção (θ)

$$K_\theta \theta = \int (le)\, dy \qquad \Rightarrow$$

$$K_\theta \theta = q_n c C_{l_\alpha} e b \left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi \tan\Lambda \right)$$

Chegamos a um sistema de duas equações e duas incógnitas.

“Parametrizando” o problema

$$t = \tan\Lambda \qquad\qquad Q = q_n c b C_{l_\alpha}$$

Equações para o equilíbrio estático supondo ângulo de ataque inicial

$$\begin{bmatrix} K_\phi & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix} + Q \begin{bmatrix} \frac{-tb}{2} & \frac{b}{2} \\ -te & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Note que a matriz de rigidez estrutural é desacoplada, porém a matriz aeroelástica representará um acoplamento de natureza aerodinâmica.

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{bmatrix} K_\phi & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} - Q \begin{bmatrix} \frac{-tb}{2} & \frac{b}{2} \\ -te & e \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

Sistema aeroelástico

Resultando em :

$$\begin{bmatrix} \left(K_\phi + {}^{Qtb}\!/\!_2 \right) & \left(-{}^{Qb}\!/\!_2 \right) \\ \left(Qte \right) & \left(K_\theta - Qe \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

ou

$$\left[\overline{K}_{ij} \right] \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} {}^{b}\!/\!_2 \\ e \end{Bmatrix}$$

Resposta aeroelástica

- Resolve-se o sistema de equações para obter $\boldsymbol{\phi}$ e $\boldsymbol{\theta}$:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{bmatrix} \left(K_\phi + {}^{Qtb}\!/_{2}\right) & \left(-{}^{Qb}\!/_{2}\right) \\ \left(Qte\right) & \left(K_\theta - Qe\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

$$\phi = \frac{Qb\alpha_0}{2\cos\Lambda}\left(\frac{1}{K_\phi + Q\left(\frac{b\tan\Lambda}{2} - \frac{K_\phi}{K_\theta}e\right)}\right) \qquad \theta = \frac{Qb\alpha_0}{\cos\Lambda}\left(\frac{1}{K_\theta + Q\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\frac{b\tan\Lambda}{2} - e\right)}\right)$$

Estabilidade do sistema

Utilizamos o critério de estabilidade de Euler para estudar a estabilidade do sistema, chegando a uma equação para o parâmetro "Q" (não confundir "Q" com "q" de pressão dinâmica!)

$$\Delta = \left|\overline{K}\right| = \left(K_\phi + \frac{Qbt}{2}\right)\left(K_\theta - Qe\right) + Q^2\,\frac{bet}{2}$$

$$\Delta = K_\theta K_\phi + Q\left(K_\theta\,\frac{bt}{2} - K_\phi e\right)$$

Condição de divergência

$$\Delta = 0$$

$$\boxed{Q_D = \frac{K_\theta K_\phi}{eK_\phi - K_\theta \dfrac{bt}{2}}}$$

$$Q = q_n cbC_{L\alpha}$$

Ou agora, isolando a pressão dinâmica associada à velocidade de escoamento não perturbado temos:

$$\boxed{q_D = \frac{K_\theta / SeC_{L\alpha}}{\cos^2\Lambda\left(1 - \left(\dfrac{b}{e}\right)\left(\dfrac{K_\theta}{K_\phi}\right)\dfrac{\tan\Lambda}{2}\right)}}$$

O que acontece se Λ for igual a zero?

Análise do enflechamento

Fazendo o denominador igual a zero:

$$1-\left(\frac{b}{e}\right)\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\right)\frac{\tan\Lambda_{critical}}{2}=0$$

$$\tan\Lambda_{crit}=2\left(\frac{e}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{K_\phi}{K_\theta}\right)$$

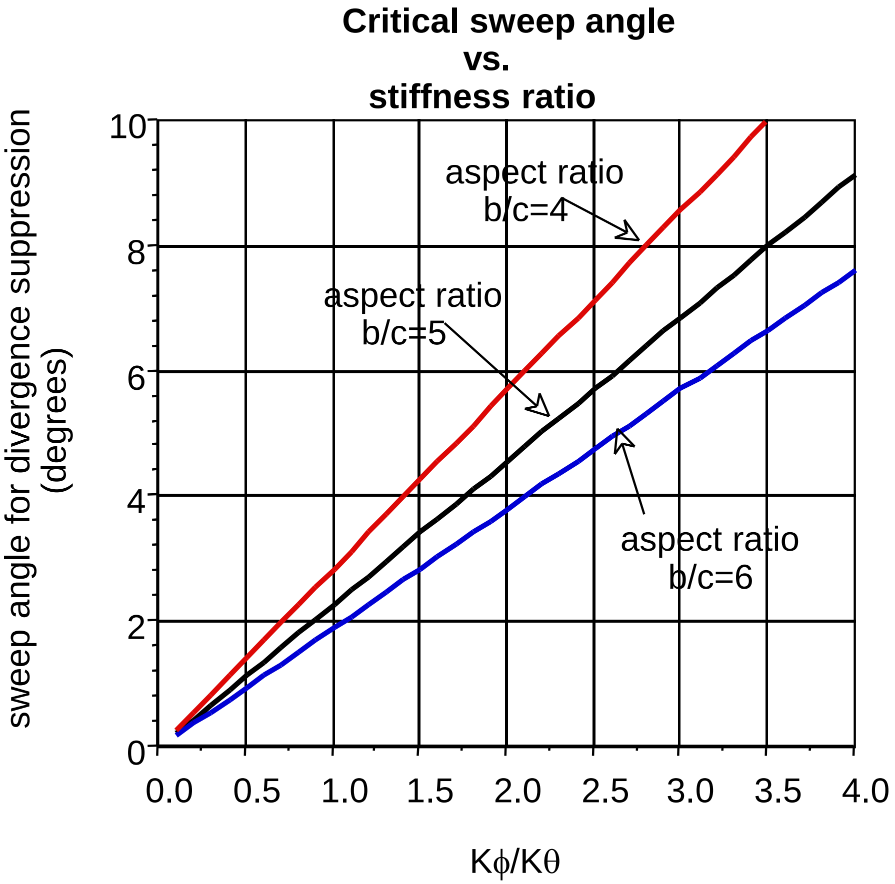
Implica em uma pressão dinâmica de divergência infinita.

Sem divergência:

$$\Lambda\geq\tan^{-1}\left(2\left(\frac{e}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{K_\phi}{K_\theta}\right)\right)$$

Exemplo

$$e/c = 0.1$$



$$b/c = 4{,}5{,}6$$

Se a razão entre as rigidezes em flexão e torção for 3, temos Λ_{cr} = 5.71°. Ou seja se asa for enflechada mais de 5.71°, nunca teremos divergência.