

Tese apresentada à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Área de Mecânica de Voo

**Flávio Luiz Cardoso Ribeiro**

## **DINÂMICA DE VOO DE AERONAVES MUITO FLEXÍVEIS**

Tese aprovada em sua versão final pelos abaixo assinados:



Prof. Dr. Pedro Paglione

Orientador



Prof. Dr. Roberto Gil Annes da Silva

Co-orientador

Prof. Dr. Celso Massaki Hirata

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Campo Montenegro

São José dos Campos, SP - Brasil

2011

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

**Divisão de Informação e Documentação**

Cardoso Ribeiro, Flávio Luiz

Dinâmica de Voo de Aeronaves Muito Flexíveis / Flávio Luiz Cardoso Ribeiro.

São José dos Campos, 2011.

157f.

Tese de Mestrado – Curso de Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Mecânica de Voo – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2011. Orientador: Prof. Dr. Pedro Paglione.

Co-orientador: Prof. Dr. Roberto Gil Annes da Silva.

1. Estruturas de aeronaves. 2. Corpos flexíveis. 3. Aeroelasticidade. 4. Dinâmica de voo. 5. Aerodinâmica não estacionária. 6. Engenharia aeronáutica. I. Comando Geral de Tecnologia Aeroespacial. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Divisão de Engenharia Aeronáutica. II. Dinâmica de Voo de Aeronaves Muito Flexíveis.

**REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

CARDOSO RIBEIRO, Flávio Luiz. **Dinâmica de Voo de Aeronaves Muito Flexíveis**. 2011. 157f. Tese de Mestrado – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

**CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

TÍTULO DO TRABALHO: Dinâmica de Voo de Aeronaves Muito Flexíveis.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Tese / 2011

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias desta tese e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta tese pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

Rua Francisca Maria de Jesus, 148, ap. 301, Bloco 4, Floradas de São José

CEP 12.230-048 – São José dos Campos-SP

# DINÂMICA DE VOO DE AERONAVES MUITO FLEXÍVEIS

**Flávio Luiz Cardoso Ribeiro**

Composição da Banca Examinadora:

Prof. Dr.	Luiz Carlos Sandoval Goes	Presidente	-	ITA
Prof. Dr.	Pedro Paglione	Orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Roberto Gil Annes da Silva	Co-orientador	-	ITA
Prof. Dr.	Paulo Afonso de Oliveira Soviero	Membro	-	ITA
Dr.	Fernando José de Oliveira Moreira	Membro	-	EMBRAER

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Paglione e ao Prof. Gil, pela orientação, sempre muito prestativos, desempenhando papel fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos demais professores que marcaram presença na minha vida até agora, pelos valiosos ensinamentos.

Aos meus alunos, com quem sempre tenho muito a aprender.

Aos amigos, em especial ao Mauricio, que me ajudou imensamente com as atividades do ITA, permitindo que eu pudesse dedicar mais tempo na conclusão do mestrado.

Aos meus pais, pelo carinho, pela educação e por terem sempre incentivado que eu buscasse meus sonhos.

À minha querida Nastenka, pela paciência e compreensão de minha ausência durante a execução deste trabalho, pelo carinho, amor e companhia.

# Resumo

Este trabalho apresenta uma formulação matemática para a modelagem de aeronaves de grande flexibilidade. Uma ferramenta computacional foi implementada e utilizada para analisar como a flexibilidade afeta as características de dinâmica de voo.

Um modelo de viga não linear, ou seja considerando grandes deslocamentos, foi aplicado para a dinâmica de estruturas. Para os cálculos aerodinâmicos, utilizou-se a teoria das faixas incluindo três modelos bi-dimensionais: quase estacionário, quase estacionário com massa aparente e não estacionário.

Uma asa voadora de grande alongamento foi considerada como caso de estudo. Uma investigação de sensibilidade foi desempenhada para verificar como os modelos aerodinâmicos empregados e a discretização da dinâmica estrutural afetam os resultados da ferramenta computacional.

As equações elásticas do movimento foram linearizadas, permitindo estudo de estabilidade aeroelástica. Os resultados obtidos baseados no modelo de aeronave proposto mostraram que a instabilidade aeroelástica é fortemente afetada pelos graus de liberdade de corpo rígido, bem como pelas grandes deflexões estruturais da asa em equilíbrio.

# Abstract

*This work addresses a mathematical formulation to model highly flexible airplanes. A computational tool was developed and used to analyze how flexibility affects the airplane flight dynamics.*

*A nonlinear beam model was applied to represent the structural dynamics, taking into account large displacements. For aerodynamic calculations, the strip theory was used including three bidimensional modeling approaches: a quasi-steady, quasi-steady with apparent mass and full unsteady aerodynamics representations.*

*In this work, a large aspect ratio flying wing was considered as a test case. A sensitivity investigation was performed to study how the assumed aerodynamic modeling and structural dynamics discretization affect the computational tool results.*

*The elastic equations of motion are linearized, allowing studies of aeroelastic stability. The results based on the proposed model show that aeroelastic instability is strongly affected by the rigid-body degrees of freedom as well as by the wing large deflections in equilibrium.*

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Aeronave NASA Helios . . . . .	24
FIGURA 2.1 – Sistemas de coordenadas - Adaptado de (SU, 2008) . . . . .	29
FIGURA 3.1 – Sistemas de coordenadas - (SU, 2008) . . . . .	56
FIGURA 3.2 – Ângulos de Euler . . . . .	79
FIGURA 4.1 – Exemplo de aeronave modelada no AeroFlex . . . . .	90
FIGURA 5.1 – Viga modelada com força $F$ aplicada na ponta - (BROWN, 2003) . .	92
FIGURA 5.2 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $x$ para aplicação de uma força concentrada . . . . .	93
FIGURA 5.3 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $z$ para aplicação de uma força concentrada . . . . .	93
FIGURA 5.4 – Viga modelada com momento $M$ aplicado na ponta - (BROWN, 2003)	94
FIGURA 5.5 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $x$ para aplicação de um momento concentrado . . . . .	95
FIGURA 5.6 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $z$ para aplicação de um momento concentrado . . . . .	95
FIGURA 5.7 – Viga modelada com duas forças concentradas aplicadas - (BROWN, 2003) . . . . .	96
FIGURA 5.8 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $x$ para aplicação de duas forças concentradas . . . . .	96

FIGURA 5.9 – Deslocamento da ponta da asa no eixo $z$ para aplicação de duas forças concentradas . . . . .	97
FIGURA 5.10 –Viga modelada com força dependente do tempo aplicada na ponta - (BROWN, 2003) . . . . .	97
FIGURA 5.11 –Deslocamento da ponta da asa para força $F(t) = 10 \sin 20t$ . . . . .	98
FIGURA 5.12 –Deslocamento da ponta da asa para força $F(t) = 10 \sin 50t$ . . . . .	99
FIGURA 5.13 –Deslocamento da ponta da asa para força $F(t) = 5 \sin 55.6t$ . . . . .	99
FIGURA 5.14 –Determinação da velocidade de flutter para a asa de Goland utilizando aerodinâmica não estacionária (nível do mar) . . . . .	101
FIGURA 5.15 –Asa muito flexível deformada (devido à gravidade) e não deformada	103
FIGURA 5.16 –Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio . . . . .	107
FIGURA 5.17 –Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio . . . . .	107
FIGURA 5.18 –Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio . . . . .	108
FIGURA 5.19 –Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio . . . . .	108
FIGURA 5.20 –Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundo . . . . .	109
FIGURA 5.21 –Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundo . . . . .	109
FIGURA 5.22 –Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundo . . . . .	110
FIGURA 5.23 –Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundo . . . . .	110
FIGURA 5.24 –Resposta da aeronave para uma condição inicial de taxa de rolamento	112
FIGURA 5.25 –Resposta da aeronave para uma deflexão degrau de aileron . . . . .	112



---

FIGURA 6.1 – Aeronave-modelo: Asa voadora . . . . .	114
FIGURA 6.2 – Ângulo de ataque e deflexão da ponta da asa de equilíbrio em função do número de elementos (valores normalizados) . . . . .	115
FIGURA 6.3 – Autovalores de período longo em função do número de elementos (valores normalizados) . . . . .	116
FIGURA 6.4 – Autovalores de período curto em função do número de elementos (valores normalizados) . . . . .	116
FIGURA 6.5 – Resultados da simulação de ângulo de ataque inicial perturbado para diferentes números de elementos estruturais . . . . .	118
FIGURA 6.6 – Resultados da simulação de ângulo de ataque inicial perturbado para diferentes números de elementos estruturais . . . . .	119
FIGURA 6.7 – Resultados da simulação para entrada doublet no profundor para diferentes números de elementos estruturais . . . . .	120
FIGURA 6.8 – Resultados da simulação para entrada doublet no profundor para diferentes números de elementos estruturais . . . . .	121
FIGURA 6.9 – Tempo de processamento em função do número de elementos por semi-asa . . . . .	122
FIGURA 6.10 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos	123
FIGURA 6.11 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos	124
FIGURA 6.12 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos	124
FIGURA 6.13 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos	125
FIGURA 6.14 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos	125

FIGURA 6.15 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos . . . . .	126
FIGURA 6.16 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos . . . . .	127
FIGURA 6.17 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos . . . . .	127
FIGURA 6.18 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos . . . . .	128
FIGURA 6.19 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos . . . . .	128
FIGURA 6.20 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	129
FIGURA 6.21 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	130
FIGURA 6.22 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	130
FIGURA 6.23 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	131
FIGURA 6.24 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	131
FIGURA 6.25 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	132
FIGURA 6.26 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	132
FIGURA 6.27 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	133
FIGURA 6.28 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	133

FIGURA 6.29 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis . . . . .	134
FIGURA 6.30 – Forma modal da aeronave associada ao modo instável . . . . .	136
FIGURA 6.31 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 10 kg) . . .	137
FIGURA 6.32 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 12 kg) . . .	138
FIGURA 6.33 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 15 kg) . . .	138
FIGURA 6.34 – Simulação da resposta dinâmica para uma entrada doublet de profundor com velocidade acima e abaixo da instabilidade . . . . .	139
FIGURA 6.35 – Simulação da resposta dinâmica para uma entrada doublet de profundor com velocidade acima e abaixo da instabilidade . . . . .	139
FIGURA 6.36 – Taxa de rolamento da aeronave para uma entrada degrau de aileron para diferentes velocidades de voo . . . . .	141
FIGURA 6.37 – Taxa de rolamento da aeronave para uma entrada degrau de aileron para diferentes valores de rigidez . . . . .	141
FIGURA A.1 – Viga (membro estrutural incluindo três elementos) - (SU, 2008) . . .	156

# Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Propriedades da viga teste - (BROWN, 2003) . . . . .	92
TABELA 5.2 – Propriedades da asa de Goland - (BROWN, 2003) . . . . .	100
TABELA 5.3 – Velocidade e frequência de flutter para a asa de Goland . . . . .	102
TABELA 5.4 – Propriedades da asa Muito Flexível - (PATIL, 1999) . . . . .	103
TABELA 5.5 – Velocidade e frequência de flutter para a asa muito flexível - asa sem deformações . . . . .	104
TABELA 5.6 – Velocidade e frequência de flutter para a asa muito flexível - asa deformada (equilíbrio não linear) . . . . .	104
TABELA 5.7 – Propriedades aerodinâmicas do perfil utilizado na asa voadora . . .	105
TABELA 5.8 – Equilíbrio . . . . .	106
TABELA 5.9 – Autovalores . . . . .	106
TABELA 6.1 – Velocidade e frequências de instabilidade para a asa voadora . . . .	137

# Lista de Símbolos

$G$	Sistema de coordenadas inercial.
$B$	Sistema de coordenadas do corpo.
$w$	Sistema de coordenadas local (representa a orientação de um nó da estrutura flexível).
$b$	Sistema de coordenadas auxiliar (preso à um nó da estrutura flexível, utilizado para modelar forças ou inércias concentradas presas à estrutura).
$C^{XY}$	Matriz de rotação do sistema de coordenadas $Y$ para $X$ .
$\vec{w}_x, \vec{w}_y, \vec{w}_z$	Vetores de orientação do sistema de coordenadas local $w$ .
$\epsilon$	Vetor de deformações estruturais.
$\vec{p}(s)$	Vetor posição de um nó da viga.
$\vec{h}(s)$	Vetor de posição e orientação de um nó da viga.
$\vec{p}_p$	Vetor posição de uma partícula da viga.
$\vec{a}_p$	Vetor aceleração de uma partícula da viga.
$\delta W$	Trabalho virtual.
$m_{cs}$	Massa por unidade de comprimento.
$r_x, r_y$ e $r_z$	Posição do centro de massa de uma seção transversal da viga em relação ao eixo elástico escrito no sistema de coordenadas local.
$I_{11}, I_{22}, I_{33}, \dots$	Momentos de inércia por unidade de comprimento.
$I_{xx}, I_{yy}$	Momentos de inércia de área.

---

$M(s)$	Matriz de massa da seção transversal.
$k(s)$	Matriz de rigidez da seção transversal..
$c(s)$	Matriz de amortecimento da seção transversal.
$K_e, C_e, M_e$	Matrizes de rigidez, amortecimento e massa de um elemento.
$\Delta s$	Comprimento de um elemento.
$M_{FF}, C_{FF}, K_{FF}$	Matrizes de massa, amortecimento e rigidez de toda a estrutura.
$J_{uv}$	Matriz Jacobiana de $\vec{u}$ em relação à $\vec{v}$ : $J_{uv} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{v}}$

# Sumário

LISTA DE FIGURAS . . . . .	vii
LISTA DE TABELAS . . . . .	xii
LISTA DE SÍMBOLOS . . . . .	xiii
<b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1 Motivação . . . . .	19
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	22
1.3 Objetivos . . . . .	25
1.4 Organização da dissertação . . . . .	26
<b>2 FORMULAÇÃO TEÓRICA DA DINÂMICA DE ESTRUTURAS . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1 Trabalhos Virtuais . . . . .	31
2.1.1 Trabalho virtual devido a forças internas . . . . .	32
2.1.2 Trabalho virtual devido a forças externas . . . . .	39
2.2 Equações da dinâmica estrutural . . . . .	42
2.3 Inclusão do modelo aerodinâmico . . . . .	45
2.3.1 Modelos utilizados . . . . .	45
2.3.2 Cálculo das velocidades e acelerações no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula . . . . .	48

2.3.3	Obtenção das forças e momentos no sistema de coordenadas do corpo . . .	50
<b>2.4</b>	<b>Resolução das equações, linearização e estabilidade . . . . .</b>	<b>52</b>
2.4.1	Linearização e estabilidade . . . . .	53
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO TEÓRICA DA DINÂMICA COMPLETA DA AERONAVE</b>	<b>55</b>
<b>3.1</b>	<b>Trabalhos Virtuais . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1.1	Trabalho virtual devido a forças internas . . . . .	59
3.1.2	Trabalho virtual devido a forças externas . . . . .	68
<b>3.2</b>	<b>Equações elásticas do movimento completo . . . . .</b>	<b>72</b>
<b>3.3</b>	<b>Inclusão do modelo aerodinâmico . . . . .</b>	<b>75</b>
3.3.1	Cálculo das velocidades e acelerações no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula . . . . .	76
3.3.2	Inclusão da deflexão do bordo de fuga no modelo aerodinâmico . . . . .	77
<b>3.4</b>	<b>Equações de propagação do sistema de coordenadas do corpo . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.5</b>	<b>Resolução das equações, linearização e estabilidade . . . . .</b>	<b>81</b>
3.5.1	Determinação do Equilíbrio . . . . .	81
3.5.2	Integração das equações do movimento não lineares . . . . .	82
3.5.3	Linearização e estabilidade . . . . .	82
<b>4</b>	<b>AMBIENTE DE SIMULAÇÃO . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>4.1</b>	<b>Inicialização dos dados do avião . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>4.2</b>	<b>Cálculo do equilíbrio . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>4.3</b>	<b>Linearização das equações do movimento . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>4.4</b>	<b>Simulações não lineares . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>4.5</b>	<b>Saídas gráficas . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>4.6</b>	<b>Flags do programa . . . . .</b>	<b>89</b>



---

<b>5</b>	<b>VALIDAÇÃO DO CÓDIGO</b>	<b>91</b>
<b>5.1</b>	<b>Validação da Estrutura - Problemas Estáticos</b>	<b>91</b>
5.1.1	Viga engastada sujeita a força concentrada	92
5.1.2	Viga engastada sujeita a momento concentrado	94
5.1.3	Viga engastada sujeita a duas forças concentradas	94
<b>5.2</b>	<b>Validação da Estrutura - Problemas Dinâmicos</b>	<b>94</b>
<b>5.3</b>	<b>Validação da interação Estrutura-Aerodinâmica - Problemas de Aeroelasticidade</b>	<b>98</b>
5.3.1	Asa de Goland	100
5.3.2	Asa muito flexível	101
<b>5.4</b>	<b>Validação do modelo de aeronave completa</b>	<b>104</b>
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>113</b>
<b>6.1</b>	<b>Variação do número de elementos</b>	<b>115</b>
<b>6.2</b>	<b>Modelo aerodinâmico Quase estacionário x Não estacionário</b>	<b>117</b>
<b>6.3</b>	<b>Utilização de matrizes estruturais constantes ou variáveis</b>	<b>126</b>
<b>6.4</b>	<b>Estudos de estabilidade aeroelástica</b>	<b>134</b>
<b>6.5</b>	<b>Reversão de comandos de aileron</b>	<b>140</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>142</b>
<b>7.1</b>	<b>Implementação e validação do modelo dinâmico de aeronaves muito flexíveis</b>	<b>142</b>
<b>7.2</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>144</b>
<b>7.3</b>	<b>Limitações da formulação empregada</b>	<b>145</b>
<b>7.4</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b>	<b>146</b>
7.4.1	Melhorias no AeroFlex	146
7.4.2	Sugestões de estudos para contribuições para o estado da arte	148

---

REFERÊNCIAS . . . . .	150
APÊNDICE A – CÁLCULO DAS DEFLEXÕES ESTRUTURAIS . . . . .	153
GLOSSÁRIO . . . . .	158

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

Aeronaves, em geral, são flexíveis, ou seja, deformam-se durante o voo. A principal preocupação no projeto das primeiras estruturas aeronáuticas era a garantia de sua integridade estrutural. No entanto, nos primórdios da aviação, optou-se também por fazer uso da flexibilidade estrutural para o controle de voo, através da deformação integral das superfícies sustentadoras. As aeronaves Bleriot XI (WEISSHAAR, 1995) e Demoiselle (MATTOS, 2006), por exemplo, faziam uso desse tipo de controle.

A partir dessas primeiras aplicações de controle aeroelástico, surgem alguns problemas inerentes à estabilidade da estrutura, dentre elas a divergência e reversão de comandos de voo (WEISSHAAR, 1995).

Com a evolução da indústria aeronáutica, acompanhado do crescente emprego dos materiais metálicos, a flexibilidade estrutural passou a ter papel secundário. As estruturas tornaram-se mais rígidas para suportar as cargas aerodinâmicas inerentes ao voo de alta velocidade bem como para evitar a ocorrência de fenômenos aeroelásticos tais como o flutter (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1955). Consequentemente, a deformação da estrutura como um todo não mais fora empregada para controle, pelas restrições de

natureza aeroelástica (estabilidade e cargas) impostas.

Recentemente, com o advento do emprego de novos materiais buscando o baixo peso estrutural e o voo autônomo de grande duração, naturalmente as estruturas aeronáuticas tornaram-se mais flexíveis. Adicionalmente, tais veículos podem ter suas características dinâmicas consideravelmente afetadas pela flexibilidade, e os modelos clássicos de dinâmica de voo de corpo rígido tornam-se insuficientes para descrever o movimento.

De acordo com Perkins e Courtland (1970), o primeiro desenvolvimento rigoroso das equações do movimento dos aviões como conhecemos hoje foi proposto por C.H. Bryan, em 1911. Bryan foi o primeiro a sugerir o conceito de derivadas de estabilidade. As equações, deduzidas a partir de conceitos da dinâmica de corpos rígidos, juntamente com o conceito de derivadas de estabilidade, permitiu o estudo da estabilidade dinâmica das aeronaves.

As implicações da elasticidade da estrutura só começaram a ser consideradas a partir da década de 30 do século XX, quando aviões voando em velocidades mais altas começaram a experimentar diferentes problemas associados à interação entre a aerodinâmica e a estrutura (PERKINS; COURTLAND, 1970). Entre os efeitos que foram estudados, incluem-se: a divergência da asa, flutter e reversão de comandos do aileron.

Até a década de 60, as duas disciplinas apresentadas nos dois parágrafos anteriores, dinâmica de corpo rígido e aeroelasticidade, foram estudadas de maneira quase independentes. Os efeitos de aeroelasticidade só eram incluídos no estudo da dinâmica de voo a partir de correções dos coeficientes aerodinâmicos. Um exemplo dessa integração parcial é o estudo da reversão de comandos: para elevadas pressões dinâmicas, o coeficiente de momento de rolamento devido à deflexões do aileron é modificado, pela perda de eficiência devido à torção da asa. Esse resultado da aeroelasticidade é então integrado à dinâmica

de corpo rígido através de um coeficiente de momento que é função da pressão dinâmica.

Uma tendência das últimas décadas é a adoção de materiais mais leves. Busca-se um projeto estrutural cada vez mais otimizado, mas que pode ter como implicação o aumento dos efeitos da flexibilidade estrutural. A grande flexibilidade pode influenciar na qualidade de voo bem como controlabilidade. Além disso, diversos estudos têm envolvido a utilização de materiais inteligentes, permitindo que a estrutura de deforme de forma controlada, ativa ou passivamente. Não deixa de ser um retorno ao emprego do conceito de controle aeroelástico apresentado no início da aviação (BROWN, 2003; CESNIK; BROWN, 2002).

Os movimentos de corpo rígido dos aviões em geral são lentos. Por outro lado, os movimentos associados com a dinâmica estrutural são de frequência bastante elevada. Essa diferença entre as frequências acaba por desacoplar os dois movimentos, e uma abordagem separada das duas disciplinas é suficiente para aeronaves muito rígidas. Entretanto, ao aumentar a flexibilidade estrutural, as frequências de vibração da estrutura ficam menores, podendo se aproximar das relacionadas ao movimento de corpo rígido. Nesse caso, o comportamento de dinâmica de voo pode ser afetado mesmo em velocidades mais baixas.

Etkin (1972) descreve duas possíveis categorias para os métodos empregados no tratamento da dinâmica de voo das aeronaves flexíveis:

- Método das deflexões quase estáticas: Muitos dos importantes efeitos da elasticidade podem ser tomados simplesmente alterando as derivadas de estabilidade aerodinâmicas. A hipótese feita é tal que as mudanças na aerodinâmica são muito mais lentas do que as estruturais, de tal forma que a estrutura está sempre em equilíbrio estático. (essa hipótese é equivalente a assumir que as frequências naturais de vi-

bração da estrutura são muito maiores que as frequências de corpo rígido). Logo, uma alteração no carregamento aerodinâmico gera uma alteração proporcional na forma do veículo, que por sua vez influencia o carregamento.

- Método dos Modos Normais: Quando a separação em frequência entre os graus de liberdade elásticos e os de corpo rígido não é grande, um acoplamento significativo pode ocorrer entre os dois. Nesse caso, uma análise dinâmica é requerida, a qual leva em consideração a dependência do tempo dos movimentos elásticos.

A seguir, é apresentada uma revisão de formulações existentes para a descrição da dinâmica de aeronaves flexíveis.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Milne (1964) foi um dos primeiros a estudar a influência da flexibilidade estrutural na dinâmica de voo através da segunda abordagem apresentada acima. A partir de duas hipóteses simplificadoras: pequenas deflexões estruturais e colinearidade entre a quantidade de movimento das partículas e seus deslocamentos, foi criado o conceito de eixo médio, permitindo eliminar o acoplamento inercial decorrente das deflexões estruturais e das características de corpo rígido da aeronave (WASZAK; SCHMIDT, 1988).

Consequentemente, Waszak e Schmidt (1988) apresentam um sistema de equações diferenciais análogo à bem estabelecida forma de representar as equações da dinâmica de voo da aeronave rígida através de derivadas de estabilidade. Eliminando-se o acoplamento inercial, ao assumir a hipótese dos eixos médios, o acoplamento entre a contribuição de modos elásticos e de corpo rígido se dará apenas através de cargas aerodinâmicas incrementais de acordo com uma teoria aerodinâmica adequada. O modelo estrutural

adotado é linear. Sendo assim é possível representar a dinâmica estrutural do corpo em uma base modal. A partir das deformações associadas a cada modo, são calculados coeficientes de influência do modo nas forças e momentos aerodinâmicos da aeronave rígida. Cada modo estrutural adiciona uma equação de segunda ordem às equações de corpo rígido. (WASZAK; DAVIDSON; SCHMIDT, 1987)

Vários trabalhos foram desenvolvidos no ITA baseados na abordagem proposta por Waszak: Silvestre (2007) implementou um modelo dinâmico flexível látero-direcional de uma aeronave similar ao Lancer B2, incluindo os coeficientes látero-direcionais (SILVESTRE; PAGLIONE, 2008). Neto (2008) substituiu o modelo aerodinâmico da teoria das faixas pelo método Doublet Lattice. Pogorzelski (2010) empregou um modelo aerodinâmico de teoria das faixas não estacionário para um planador com asas de enflechamento negativo. Para tal, utilizou a teoria das faixas não estacionária modificada (YATES, 1958). SILVA (2010) criou modelos de aeronaves flexíveis representativos de aeronaves comerciais para o estudo de aplicações de controle ótimo não linear (SILVA; PAGLIONE; YONEYAMA, 2010).

Os trabalhos citados até aqui utilizam dinâmicas estruturais linearizadas: ou seja, são feitas análises modais em softwares de elementos finitos, e os autovetores associados a cada modo são utilizados para calcular coeficientes aerodinâmicos globais da aeronave flexível. Para que essas abordagens sejam válidas, é necessária a hipótese de pequenas deflexões estruturais.

Nos últimos anos, aeronaves não tripuladas cuja missão exige voos em grandes altitudes e com grande autonomia (HALE) têm sido pesquisadas. Para que sejam viáveis do ponto de vista de baixo consumo energético, torna-se fundamental utilizar uma asa com alongamento extremamente alto, aumentando a razão sustentação/arrasto. Além disso, o



FIGURA 1.1 – Aeronave NASA Helios

peso estrutural deve ser minimizado.

A Figura 1.1 apresenta a aeronave Helios da NASA (NOLL *et al.*, 2004). Nota-se que o elevado alongamento (próximo de 31), faz com que a estrutura tenha grandes deflexões. Nesse caso, a hipótese de pequenas deflexões não é adequada.

Hodges (1990) desenvolveu uma formulação de dinâmica estrutural de vigas supondo grandes deflexões estruturais. Patil (1999) utilizou essa formulação acoplada a equações de corpo rígido permitindo o estudo de aeroelasticidade e dinâmica de voo de veículos muito flexíveis, como as aeronaves do tipo HALE. Entre os resultados obtidos, Patil mostrou que para esse tipo de aeronave o estudo do fenômeno de flutter deve ser realizado em torno de uma condição de equilíbrio não linear, com diferenças significativas em relação à abordagem tradicional (PATIL; HODGES; CESNIK, 1999).

Brown (2003) desenvolveu um modelo de dinâmica de estruturas com deflexões não lineares no qual as coordenadas generalizadas são as deformações estruturais. O modelo



foi utilizado para estudos aeroelásticos e de dinâmica de voo de aeronaves muito flexíveis. Adicionalmente, Brown analisou a possibilidade do uso de estruturas ativas para o controle de voo (CESNIK; BROWN, 2002).

Shearer (2006) melhorou diversos cálculos dessa formulação, substituindo expressões que eram obtidas numericamente por expressões analíticas, tornando os resultados mais precisos e reduzindo o custo computacional.

Su (2008) adicionou à formulação a possibilidade de utilizar estruturas de vigas ramificadas, permitindo, por exemplo, a utilização de fuselagens flexíveis. Além disso, através dos Multiplicadores de Lagrange, Su incluiu restrições de deslocamentos permitindo o estudo de aeronaves com asas com extremidade ligada (configuração “Joined-Wing”).

Su e Cesnik (2010) fizeram um estudo da aeroelasticidade não linear de uma asa voadora, incluindo efeitos aerodinâmicos não lineares.

### 1.3 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo principal apresentar a implementação de um código computacional para estudo da dinâmica de voo de aeronaves de grande flexibilidade. O trabalho é baseado nas teses de Brown (2003), Shearer (2006) e Su (2008).

O software desenvolvido, chamado AeroFlex, implementa o modelo de dinâmica de estruturas proposto por Brown com as fórmulas analíticas da dinâmica estrutural apresentadas por Shearer. Através desse programa, é possível realizar análises de aeroelasticidade em torno de pontos de equilíbrio não lineares, bem como efetuar simulações da dinâmica de voo de aeronaves com múltiplas superfícies aerodinâmicas flexíveis.

Foram feitos diversos estudos visando compreender como os seguintes aspectos influenciam os resultados do AeroFlex:

- Escolha do modelo aerodinâmico: Quase estacionário x Não estacionário;
- Dinâmica de estruturas: matrizes estruturais constantes x variáveis;
- Variação da rigidez estrutural.

Buscou-se identificar como os aspectos acima influenciam os resultados para a resposta dinâmica e os fenômenos de instabilidade aeroelástica de um modelo-exemplo: uma asa voadora de grande alongamento, semelhante às aeronaves do tipo HALE. Adicionalmente, para a aeronave modelo, fez-se um estudo numérico de como os estados de corpo rígido influenciam nos fenômenos de instabilidade dinâmica aeroelásticos.

## 1.4 Organização da dissertação

Com objetivos didáticos, buscou-se inicialmente simplificar o equacionamento. Dessa forma, o Capítulo 2 apresenta a dedução das equações da dinâmica estrutural sem considerar os graus de liberdade de corpo rígido. Ao final, é apresentado como as equações obtidas podem ser utilizadas para estudos de aeroelasticidade. São apresentados também os diversos modelos aerodinâmicos empregados neste trabalho.

Em seguida, o Capítulo 3 apresenta a dedução das equações do movimento completo, incluindo os graus de liberdade de corpo rígido. São adicionadas também explicações sobre como podem ser adicionadas estruturas rígidas presas aos nós estruturais, fuselagem rígida e motores presos a nós estruturais.

O Capítulo 4 apresenta uma visão geral de como funciona o código AeroFlex: quais os dados de inicialização, procedimentos de cálculo de equilíbrio, linearização, estudos de estabilidade e integração das equações não lineares do movimento.

No Capítulo 5, são apresentados os resultados de diversos casos de teste feitos com o objetivo validar o código computacional. Os dados obtidos com o AeroFlex foram comparados com resultados da literatura para casos de equilíbrio não linear da estrutura, simulação da dinâmica para forças variantes no tempo aplicadas na ponta da viga e casos de aeroelasticidade considerando equilíbrio não linear.

O Capítulo 6 apresenta os resultados numéricos obtidos com o AeroFlex no estudo da asa voadora. Foram feitas análises de variações paramétricas e escolhas de diferentes modelos aerodinâmicos. É apresentado um estudo dos fenômenos de instabilidade dinâmica aeroelásticos ao se considerar os graus de liberdade de corpo rígido. Adicionalmente, um breve estudo do efeito de reversão de comandos de aileron é mostrado.

Finalmente, as principais conclusões, dificuldades e sugestões de continuidade do trabalho são apresentadas no Capítulo 7.

## 2 Formulação teórica da dinâmica de estruturas

Este capítulo tem por objetivo detalhar o desenvolvimento do modelo estrutural de uma viga engastada sujeita a grandes deflexões, caracterizando assim um comportamento não linear. É apresentada a dedução das equações do movimento associadas à dinâmica estrutural acoplada ao modelo aerodinâmico. Em seguida, são apresentadas soluções de equilíbrio, integração numérica, linearização e estudo de estabilidade do sistema aeroelástico.

A dedução das equações do movimento é realizada através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. A estrutura é modelada através de um membro flexível unidimensional (viga), capaz de sofrer grandes deflexões tridimensionais. A viga é definida através de dados de rigidez e massa obtidos da análise da seção transversal. O modelo empregado utiliza como coordenadas generalizadas as deformações de cada elemento da viga e foi originalmente apresentado por Brown (2003).

O primeiro passo para o entendimento da formulação consiste na apresentação dos sistemas de coordenadas de interesse. O sistema de coordenadas  $G$  está fixo ao solo (referencial inercial); o sistema  $B$  é o sistema do corpo, fixo a um ponto do corpo. Nesse

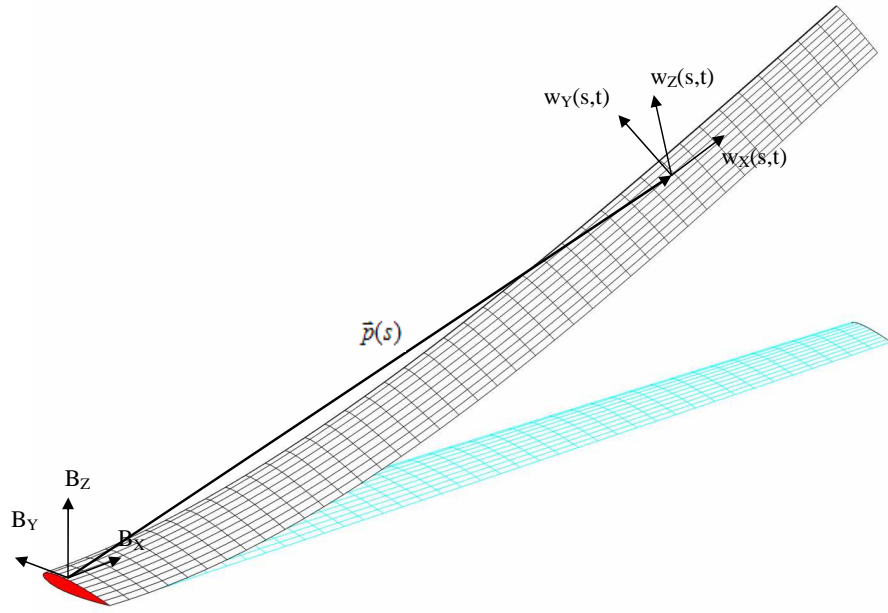


FIGURA 2.1 – Sistemas de coordenadas - Adaptado de (SU, 2008)

capítulo, por se tratar de uma análise de uma asa engastada, os sistemas de coordenadas  $G$  e  $B$  são idênticos, estando localizados na origem do sistema, no ponto de engaste da asa.

O próximo sistema de coordenadas de interesse é o sistema de coordenadas local da viga ( $w(s, t)$ ), definindo a posição e orientação de cada nó localizado no eixo de referência da viga (onde  $s$  é a posição ao longo do eixo elástico da viga). Como pode ser visto na Figura 2.1, os vetores base desse sistema de coordenadas são  $\vec{w}_x, \vec{w}_y$  e  $\vec{w}_z$ . Observe que em  $s = 0$ , o sistema de coordenadas do corpo  $B$  coincide com o sistema de coordenadas local  $w(0, t)$ .

Para modelar a estrutura da asa, são utilizados elementos de viga. Cada elemento possui 3 nós e 4 graus de liberdade (extensão, torção e duas flexões). O vetor de deformações é denotado por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \kappa_x & \kappa_y & \kappa_z \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

Note que cada elemento de viga utilizado representa 4 novos graus de liberdade ao sistema.

$\epsilon_x$  é a deformação de extensão;  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  e  $\kappa_z$  são as torções em relação aos eixos  $w_x, w_y$  e  $w_z$  (ou seja,  $\kappa_x$  é a deformação de torção do elemento de viga, e os outros dois são as flexões).

A teoria empregada supõe deformações constantes ao longo de cada elemento.

Na Figura 2.1 é definido o vetor  $\vec{p}(s)$ , que representa uma posição ao longo do eixo elástico da viga, localizada a uma distância 's' do ponto de engaste.

A partir do vetor posição  $\vec{p}(s)$  de um nó, e da orientação do sistema de coordenadas do nó  $w(s)$ , define-se o vetor  $\vec{h}(s)$ , representando a posição e orientação de cada nó:

$$\vec{h}(s) = \begin{bmatrix} \vec{p}(s) & \vec{w}_x^T & \vec{w}_y^T & \vec{w}_z^T \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

Note que o vetor  $\vec{h}$  possui 12 elementos. Cada vetor  $\vec{w}_i$  representa a direção do eixo  $w_i$  escrito no sistema de coordenadas do corpo  $B$ .

Na formulação empregada, as coordenadas generalizadas utilizadas são as deformações  $\epsilon$ . As posições de cada nó são obtidas através de relações de cinemática, conforme explicações apresentadas no Apêndice A. O vetor  $\vec{h}(s)$  é função do vetor de deformações  $\epsilon$  (além da posição  $s$ , é claro). Dessa forma, pode-se chegar às seguintes expressões, que serão úteis na dedução das equações a partir do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta \vec{h} = J_{h\epsilon} \delta \epsilon \quad (2.3)$$

$$d\vec{h} = J_{h\epsilon} d\epsilon \quad (2.4)$$

$$\dot{\vec{h}} = J_{h\epsilon} \dot{\epsilon} \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{h}} = J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + \dot{J}_{h\epsilon} \dot{\epsilon} \quad (2.6)$$

As matrizes Jacobianas acima consistem na derivada parcial entre o vetor  $\vec{h}$  e o vetor

de deformações. Ou seja:

$$J_{h\epsilon} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial \epsilon} \quad (2.7)$$

note que tanto  $\vec{h}$  quanto  $\epsilon$  são vetores. Dessa forma, a Jacobiana consiste em uma matriz que relaciona variações do vetor de deformações com variações de deflexões estruturais dos nós da estrutura.

Como dito anteriormente, o vetor  $\vec{h}$  é função apenas da deformação. Para obtenção das Jacobianas, pode-se derivar numericamente  $\vec{h}$  em relação ao vetor de deformações, ou ainda utilizar expressões analíticas. A Ref. (SHEARER, 2006) apresenta expressões analíticas para a obtenção do vetor  $\vec{h}$  em função das deformações, bem como das Jacobianas acima, nos apêndices B, C e D.

## 2.1 Trabalhos Virtuais

Para a dedução das equações do movimento é utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Note que existem contribuições de trabalhos virtuais das forças internas e externas. Entre as forças causadoras de trabalhos virtuais internos, incluem-se as forças inerciais (de componentes rígidos, flexíveis e unidade rígidas presas à estrutura), e as tensões devido a deformações e taxas de deformações internas. Entre as forças externas, incluem-se: forças distribuídas, momentos distribuídos, forças pontuais e momentos pontuais.

Deve-se obter o trabalho virtual devido a deslocamentos virtuais em termos das coordenadas generalizadas para cada uma dessas forças, e por fim somar todas as contribuições.

### 2.1.1 Trabalho virtual devido a forças internas

Para o presente capítulo, não foram modeladas estruturas rígidas, nem componentes rígidos ligados à estrutura flexível. Dessa forma, os seguintes trabalhos virtuais internos devem ser calculados: devido a forças de inércia da estrutura flexível e devido a deformações e taxas de deformações.

#### 2.1.1.1 Trabalho virtual devido a forças de inércia de membros elásticos

O trabalho virtual devido a “força de inércia” de uma partícula de uma seção localizada no comprimento ‘s’ de uma viga elástica, para um deslocamento virtual  $\delta\vec{p}$  é dado por:

$$\delta W_p^{int} = \delta\vec{p} \cdot (-\vec{a}_p \rho dA ds) \quad (2.8)$$

onde o vetor  $\vec{a}_p$  é a aceleração da partícula;  $dA ds$  consiste no volume infinitesimal da partícula;  $\rho$  é a massa específica do material da viga.

A aceleração da partícula pode ser obtida através da seguinte dedução: A posição de uma partícula é dada pelo vetor:

$$\vec{p}_p(s) = \vec{p}(s) + x\vec{w}_x + y\vec{w}_y + z\vec{w}_z \quad (2.9)$$

Onde  $\vec{p}(s)$  representa a posição de um nó ao longo do eixo de referência da viga, e (x,y,z) consiste na posição de uma partícula no sistema de coordenadas local, em relação ao nó.

Pode-se agora obter a velocidade da partícula, derivando a expressão acima no tempo;



em seguida, obtém-se a aceleração:

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{p}}_p = \dot{\vec{p}} + x\dot{\vec{w}}_x + y\dot{\vec{w}}_y + z\dot{\vec{w}}_z \quad (2.10)$$

$$\vec{a}_p = \dot{\vec{v}}_p = \ddot{\vec{p}} + x\ddot{\vec{w}}_x + y\ddot{\vec{w}}_y + z\ddot{\vec{w}}_z \quad (2.11)$$

A partir da definição da posição da partícula  $\vec{p}_p$ , podemos obter uma nova expressão para o deslocamento virtual  $\delta p_p$ :

$$\delta \vec{p}_p = \delta \vec{p} + x\delta \vec{w}_x + y\delta \vec{w}_y + z\delta \vec{w}_z \quad (2.12)$$

Temos agora uma nova expressão para o trabalho virtual devido a forças de inércia de

uma partícula da estrutura flexível:

$$\delta W_p^{int} = \delta \vec{p}_p \cdot (-\vec{a}_p \rho dAds) \quad (2.13)$$

$$= -(\delta \vec{p} + x\delta \vec{w}_x + y\delta \vec{w}_y + z\delta \vec{w}_z) \cdot (\ddot{\vec{p}} + x\ddot{\vec{w}}_x + y\ddot{\vec{w}}_y + z\ddot{\vec{w}}_z) \rho dAds \quad (2.14)$$

$$= - \left( \begin{bmatrix} \delta \vec{p} & \delta \vec{w}_x & \delta \vec{w}_y & \delta \vec{w}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix} \right) \rho dAds \quad (2.15)$$

$$= - \begin{bmatrix} \delta \vec{p} & \delta \vec{w}_x & \delta \vec{w}_y & \delta \vec{w}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ x & x^2 & xy & xz \\ y & yx & y^2 & yz \\ z & zx & zy & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix} \rho dAds \quad (2.16)$$

$$= -\delta \vec{h}^T \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ x & x^2 & xy & xz \\ y & yx & y^2 & yz \\ z & zx & zy & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix} \rho dAds \quad (2.17)$$

Obs.: nas equações acima, note que: para haver coerência entre os produtos matriciais da Eq. 2.17, a matriz interna deve ser 12x12. Na Eq. 2.15 cada elemento do vetor  $\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix}$  multiplica um vetor de três componentes. Utilizando notação matricial para os vetores, podemos reescrever cada um desses números como sendo multiplicados por uma matriz identidade 3x3 - dessa forma, a matriz em questão fica 12x12.

Integrando em relação à área da seção, chega-se à expressão de trabalho virtual devido

a forças de inércia por unidade de comprimento:

$$\delta W_p^{int}(s) = -\delta \vec{h}^T M(s) \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde:

$$M(s) = \int_{A(s)} \rho \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ x & x^2 & xy & xz \\ y & yx & y^2 & yz \\ z & zx & zy & z^2 \end{bmatrix} dA \quad (2.19)$$

$$= \begin{bmatrix} m_{cs} & m_{cs}r_x & m_{cs}r_y & m_{cs}r_z \\ m_{cs}r_x & \frac{1}{2}(I_{22} + I_{33} - I_{11}) & I_{12} & I_{13} \\ m_{cs}r_y & I_{21} & \frac{1}{2}(I_{11} + I_{33} - I_{22}) & I_{23} \\ m_{cs}r_z & I_{31} & I_{32} & \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22} - I_{33}) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde  $I_{ij}$  são as propriedades de inércia de massa da seção transversal;  $m_{cs}$  é a massa da viga por unidade de comprimento;  $r_x, r_y, r_z$  são os componentes do vetor posição do centro de massa da seção, escritas no sistema de coordenadas local (com origem no nó).

Note que  $\begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} & \ddot{\vec{w}}_x & \ddot{\vec{w}}_y & \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix}$  é a derivada segunda do vetor  $\vec{h}$ . Vimos anteriormente (Eq. 2.6) que podemos relacionar esse vetor aos estados (deformações) através das Jacobianas  $J_{h\epsilon}$  e  $\dot{J}_{h\epsilon}$ . Além disso, os deslocamentos virtuais também podem ser obtidos em termos das coordenadas generalizadas:  $\delta \vec{h} = J_{h\epsilon} \delta \epsilon$  (Eq. 2.3).

A expressão de trabalho virtual então fica:

$$\delta W_p^{int}(s) = -\delta\epsilon(s)^T \left( J_{h\epsilon}^T M(s) J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + J_{h\epsilon}^T M(s) \dot{J}_{h\epsilon} \dot{\epsilon} \right) \quad (2.21)$$

Deve-se lembrar que esse trabalho virtual é por unidade de comprimento, ao longo da seção transversal que atravessa um nó de posição 's'. O trabalho virtual por elemento será apresentado adiante.

#### 2.1.1.2 Trabalho virtual devido a deformações e taxas de deformações

O trabalho interno devido a deformações, por unidade de comprimento, é dado por:

$$\delta W_\epsilon^{int}(s) = -\delta\epsilon(s)^T k(s) \epsilon(s) \quad (2.22)$$

onde  $k(s)$  é a matriz de rigidez por unidade de comprimento, constante ao longo de um elemento.

Da mesma forma, o trabalho virtual devido a taxas de deformação é dado por:

$$\delta W_{\dot{\epsilon}}^{int}(s) = -\delta\epsilon(s)^T c(s) \dot{\epsilon}(s) \quad (2.23)$$

onde  $c(s)$  é a matriz de amortecimento.

A matriz de amortecimento utilizada nesse trabalho é dada por uma relação de proporcionalidade com a matriz de rigidez:

$$c(s) = \alpha k(s) \quad (2.24)$$

O coeficiente  $\alpha$  pode ser fornecido como dado de entrada do programa. Brown (2003) sugere também a determinação desse coeficiente numericamente: obtém-se o valor de  $\alpha$  para o qual o coeficiente de amortecimento estrutural do primeiro modo seja igual ao valor desejado (obtido a partir de ensaios, por exemplo).

### 2.1.1.3 Soma dos trabalhos virtuais internos

Obtivemos até agora três expressões para o trabalho virtual:

$$\text{Forças de inércia:} \quad \delta W_p^{int}(s) = -\delta\epsilon(s)^T \left( J_{h\epsilon}^T M(s) J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + J_{h\epsilon}^T M(s) \dot{J}_{h\epsilon} \dot{\epsilon} \right)$$

$$\text{Deformações:} \quad \delta W_\epsilon^{int}(s) = -\delta\epsilon(s)^T k(s) \epsilon(s)$$

$$\text{Taxas de deformações:} \quad \delta_\epsilon^{int} W(s) = -\delta\epsilon(s)^T c(s) \dot{\epsilon}(s)$$

Observe que todas as expressões são dadas por unidade de comprimento: ou seja, referem-se ao trabalho virtual interno em uma seção transversal que atravessa um ponto do eixo lástico localizado a uma distância 's' ao longo da viga.

Deve-se então integrar as equações ao longo do comprimento do elemento. Note que para a formulação utilizada, consideram-se deformações e propriedades de rigidez constantes no elemento. Dessa forma, ao integrar as expressões de trabalho virtual obtém-se:

$$\text{Deformações:} \quad \delta W_e = -\delta\epsilon^T k \epsilon \Delta s$$

$$\text{Taxas de deformações:} \quad \delta W_e = -\delta\epsilon^T c \dot{\epsilon} \Delta s$$

Com essas expressões, podemos obter as matrizes de rigidez e amortecimento do elemento a partir das matrizes da seção:

$$K_e = k \Delta s \tag{2.25}$$

$$C_e = c \Delta s \tag{2.26}$$

As propriedades de inércia (ou seja, matriz  $M(s)$ ), por sua vez, podem variar e são especificadas para cada um dos três nós. Além disso, os deslocamentos (que aparecem através das Jacobianas  $J_{h\epsilon}$  e  $\dot{J}_{h\epsilon}$ ) também variam e são determinados para cada nó (em função de  $\epsilon$ ). Supõe-se variação linear entre os nós (tanto das Jacobianas quanto da matriz de inércia  $M(s)$ ).

Pode-se demonstrar que, dadas a hipóteses de variação linear de  $J_{h\epsilon}$ ,  $\dot{J}_{h\epsilon}$  e  $M(s)$  entre cada nó, o trabalho virtual devido a forças de inércia para um elemento é dado por:

$$\delta W_e = -\delta\epsilon^T \left( J_{h\epsilon}^T M_e J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} \dot{\epsilon} \right) \quad (2.27)$$

Note que as Jacobianas não representam mais a variação da posição de um nó em relação a deformação do elemento (12x4), mas sim a variação da posição dos três nós em relação a deformação do elemento: ou seja, são matrizes 36x4:

$$J_{h\epsilon} = \begin{bmatrix} J_{h\epsilon,1} \\ J_{h\epsilon,2} \\ J_{h\epsilon,3} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

A matriz de massa do elemento  $M_e$  é obtida a partir das matrizes de massa de cada seção transversal  $M_i$  (referente ao nó  $i$ , Eq. 2.20) (BROWN, 2003):

$$M_e = \frac{1}{2} \Delta s \begin{bmatrix} \frac{1}{4}M_1 + \frac{1}{12}M_2 & \frac{1}{12}M_1 + \frac{1}{12}M_2 & 0 \\ \frac{1}{12}M_1 + \frac{1}{12}M_2 & \frac{1}{12}M_1 + \frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{12}M_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M_2 + \frac{1}{12}M_3 & \frac{1}{12}M_2 + \frac{1}{4}M_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

obs.: como cada matriz  $M_i$  é 12x12, a matriz  $M_e$  é 36x36.

Somando as três contribuições de trabalho virtual interno temos, para um elemento:

$$\delta W_e^{int} = -\delta \epsilon^T \left[ J_{h\epsilon}^T M_e J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + \left( J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} + C_e \right) \dot{\epsilon} + K_e \epsilon \right] \quad (2.30)$$

### 2.1.2 Trabalho virtual devido a forças externas

O trabalho virtual devido a uma força  $\vec{f}$ , para um deslocamento  $\delta \vec{u}$  aplicado em um volume  $V$  é dado por:

$$\delta W^{ext} = \int_V \delta \vec{u}(x, y, z) \cdot \vec{f}(x, y, z) dV \quad (2.31)$$

A seguir, é apresentada a obtenção do trabalho virtual devido a forças e momentos pontuais (que atuam sobre um nó); e forças e momentos distribuídos:

#### 2.1.2.1 Forças Pontuais

Seja um elemento no qual são aplicadas três forças pontuais  $\vec{F}_i$  (uma em cada nó). O trabalho virtual devido a cada força é dado pelo produto escalar entre o deslocamento virtual de cada nó e cada uma das forças:

$$\delta W_{F,pt}^{ext} = \sum_{i=1}^3 \delta \vec{p}_i \cdot \vec{F}_i \quad (2.32)$$

Entretanto, devemos escrever os deslocamentos virtuais em termos das coordenadas generalizadas (deformações estruturais  $\delta \epsilon$ ), e não deslocamentos ( $\delta \vec{p}$ ). Para isso, basta

relacionar as duas variáveis, tal como fizemos com o vetor  $h$ :

$$\delta \vec{p} = J_{p\epsilon} \epsilon \quad (2.33)$$

onde:  $J_{p\epsilon} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \epsilon}$ .

Com isso, a expressão de trabalho virtual devido a força pontual fica:

$$\delta W_{F,pt}^{ext} = \delta \epsilon^T J_{p\epsilon}^T F^{pt} \quad (2.34)$$

onde  $F^{pt}$  é uma matriz  $9 \times 1$ , representando as forças atuantes em cada um dos nós do elemento.

### 2.1.2.2 Momentos pontuais

O trabalho virtual devido a momento pontual  $M_i$ , para uma deflexão virtual angular  $\delta \theta$ :

$$\delta W_{M,pt}^{ext} = \sum_{i=1}^3 \delta \vec{\theta}_i \cdot \vec{M}_i \quad (2.35)$$

A dedução segue exatamente o mesmo raciocínio das forças pontuais, chegando à seguinte expressão em termos de coordenadas generalizadas:

$$\delta W_{M,pt}^{ext} = \delta \epsilon^T J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} \quad (2.36)$$

onde  $J_{\theta\epsilon} = \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \epsilon}$ .



### 2.1.2.3 Forças distribuídas

Seja uma força distribuída em um elemento de viga, que varia em função da posição ao longo da viga ( $s$ ), e deslocamentos virtuais  $\delta p(s)$  (também função da posição  $s$ ), o trabalho virtual ao longo do elemento é:

$$\delta W_{F,dist}^{ext} = \int_{\Delta s} \delta \vec{p} \cdot \vec{f}(s) ds \quad (2.37)$$

As forças distribuídas devem ser calculadas nos nós. Supondo que as forças distribuídas variam linearmente entre os nós, pode-se demonstrar que o trabalho virtual é dado por (BROWN, 2003):

$$\delta W_{F,dist}^{ext} = \delta \epsilon^T J_{pe}^T B_e^F F^{dist} \quad (2.38)$$

onde:

$$B_e^F = \frac{\Delta s}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} [I]_{3 \times 3} & \frac{1}{6} [I]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ \frac{1}{6} [I]_{3 \times 3} & \frac{2}{3} [I]_{3 \times 3} & \frac{1}{6} [I]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & \frac{1}{6} [I]_{3 \times 3} & \frac{1}{3} [I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$F_{dist}$  é um vetor  $9 \times 1$  com as forças distribuídas calculadas em cada nó;  $\Delta s$  é o comprimento do elemento. Note que, para haver coerência, a matriz  $B_e^F$  deve ser  $9 \times 9$ . Cada um dos elementos apresentados na realidade é  $3 \times 3$ , sendo por esse motivo multiplicados por uma matriz identidade.

### 2.1.2.4 Momentos distribuídos

De maneira análoga ao caso anterior, chega-se a:

$$\delta W_{M,dist}^{ext} = \delta \epsilon^T J_{\theta \epsilon}^T B_e^M M_{dist} \quad (2.40)$$

A matriz  $B_e^M$  é igual à  $B_e^F$ .

### 2.1.2.5 Soma dos trabalhos virtuais externos

Somando as contribuições de cada uma das forças e momentos externos, chegamos à seguinte expressão para o trabalho virtual externo total **em um elemento**:

$$\delta W_e^{ext} = \delta \epsilon^T (J_{p\epsilon}^T F^{pt} + J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} + J_{p\epsilon}^T B_e^F F^{dist} + J_{\theta\epsilon}^T B_e^M M^{dist}) \quad (2.41)$$

## 2.2 Equações da dinâmica estrutural

Temos agora todas as contribuições de trabalhos virtuais de interesse. Para obter o trabalho virtual total do sistema, deve-se somar as contribuições internas e externas de

cada elemento:

$$\delta W = \sum \delta W_e^{ext} + \delta W_e^{int} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \delta W = \sum \delta \epsilon^T & \left[ -J_{h\epsilon}^T M_e J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} - \left( J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} + C_e \right) \dot{\epsilon} - K_e \epsilon \right. \\ & \left. + J_{p\epsilon}^T F_e^{pt} + J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} + J_{p\epsilon}^T B_e^F F^{dist} + J_{\theta\epsilon}^T B_e^M M^{dist} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \delta W = \delta \epsilon^T & \left[ -J_{h\epsilon}^T M J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} - \left( J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{h\epsilon} + C \right) \dot{\epsilon} - K \epsilon \right. \\ & \left. + J_{p\epsilon}^T F^{pt} + J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} + J_{p\epsilon}^T B^F F^{dist} + J_{\theta\epsilon}^T B^M M^{dist} \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Note que na passagem para a última equação acima, tomou-se a liberdade de fazer vários abusos de notação, com o objetivo de simplificar o equacionamento. Deve-se ter em mente que antes da Eq. 2.44, estávamos trabalhando com elementos individuais e, dessa forma, todas as matrizes apresentadas são específicas para cada elemento. O vetor  $\epsilon$ , por exemplo, referia-se à deformação do elemento (era 4x1). Na última linha, o vetor é de dimensão 4Nx1, onde N é o número de elementos, incluindo a deformação de todos os elementos.

As matrizes  $M, C, K, B^F, B^M$  são matrizes “bloco-diagonais”, onde cada elemento da diagonal é a matriz de um dos elementos estruturais ( $M_e, C_e, K_e, B_e^F, B_e^M$ ).

Já os vetores de forças e momentos são vetores aplicados em cada um dos 3N nós (e, por esse motivo, têm dimensão 9N).

Oberve ainda que, para um elemento, as Jacobianas  $J_{h\epsilon}$  eram de dimensão 36x4. Agora, elas têm dimensão 36Nx4N. Entretanto, ao contrário das matrizes especificadas anteriormente, não se trata de uma mera formação bloco diagonal. Isso porque deformações de um elemento influenciam os deslocamentos de todos os elementos seguintes da

viga. A obtenção é feita a partir das Jacobianas de cada elemento, mas propagando as deformações para os elementos seguintes. Esse cálculo é apresentado no apêndice D de Shearer (2006).

Finalmente, uma vez que o deslocamento virtual  $\delta\epsilon$  é arbitrário, e o trabalho virtual é nulo, chega-se à seguinte expressão:

$$J_{h\epsilon}^T M J_{h\epsilon} \ddot{\epsilon} + \left( J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{h\epsilon} + C \right) \dot{\epsilon} + K\epsilon = J_{p\epsilon}^T F^{pt} + J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} + J_{p\epsilon}^T B^F F^{dist} + J_{\theta\epsilon}^T B^M M^{dist} \quad (2.45)$$

Para simplificar a visualização:

$$M_{FF} \ddot{\epsilon} + C_{FF} \dot{\epsilon} + K_{FF} \epsilon = R_F \quad (2.46)$$

onde:

$$M_{FF}(\epsilon) = J_{h\epsilon}^T M J_{h\epsilon} \quad (2.47)$$

$$C_{FF}(\epsilon, \dot{\epsilon}) = J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{h\epsilon} + C \quad (2.48)$$

$$K_{FF} = K \quad (2.49)$$

$$R_F = J_{p\epsilon}^T F^{pt} + J_{\theta\epsilon}^T M^{pt} + J_{p\epsilon}^T B^F F^{dist} + J_{\theta\epsilon}^T B^M M^{dist} \quad (2.50)$$

Com isso, temos as equações da dinâmica estrutural. Faltou apenas apresentar como pode ser feita a obtenção dos deslocamentos estruturais, tal como a determinação das Jacobianas. Esses cálculos são apresentados em detalhes nos apêndices B,C e D do trabalho de Shearer (2006), e por esse motivo não serão apresentados aqui.

## 2.3 Inclusão do modelo aerodinâmico

O modelo aerodinâmico pode ser incluído através da adição de forças e momentos distribuídos sobre as vigas. Neste trabalho, será empregada a teoria das faixas: calcula-se as forças e momentos aerodinâmicos em cada nó, considerando um modelo aerodinâmico bi-dimensional, independente para cada nó.

Uma vez calculadas as forças aerodinâmicas (sustentação e arrasto), e momento em relação à cada nó, as forças e momentos são passados do sistema de coordenadas aerodinâmico local para o sistema de coordenadas do corpo. Em seguida, os vetores de força de cada nó são postos um sobre o outro, formando um vetor-coluna de dimensão  $9N$  (onde  $N$  é o número de elementos). Esses vetores, de forças e momentos distribuídos, são então inseridos na Eq. 2.50.

### 2.3.1 Modelos utilizados

Três diferentes modelos foram empregados para o cálculo das forças aerodinâmicas. O primeiro consiste em um modelo quase estacionário levando em consideração apenas a parcela circulatória da força de sustentação, e sem considerar a influência da esteira. Em seguida empregou-se também termos de massa aparente. O terceiro modelo consiste em um modelo aerodinâmico não estacionário proposto por Peters, Hsieh e Torrero (2007), no qual são adicionados estados que representam o atraso aerodinâmico causado pela esteira. Em todos os casos, as expressões apresentadas consideram um modelo de placa plana. No código computacional implementado, entretanto, o usuário pode modificar o coeficiente  $C_{L_\alpha}$  do perfil e o ângulo de sustentação nula.

### 2.3.1.1 Modelo aerodinâmico quase estacionário

As seguintes equações permitem calcular a sustentação e momento aerodinâmico em torno do eixo elástico para uma placa plana (HADDADPOUR; FIROUZ-ABADI, 2006):

$$L = 2\pi\rho bU^2 \left[ \frac{\dot{h}}{U} + b(0.5 - a)\frac{\dot{\alpha}}{U} + \alpha \right] \quad (2.51)$$

$$M_{ea} = b(0.5 + a)L - \frac{\pi\rho Ub^3}{2}\dot{\alpha} \quad (2.52)$$

Podemos reescrever as equações em função das velocidades relativas do perfil escritas no sistema de coordenadas de sustentação nula <sup>1</sup>:

$$L = 2\pi\rho b\dot{y}^2 \left[ \frac{-\dot{z}}{\dot{y}} + b(0.5 - a)\frac{\dot{\alpha}}{\dot{y}} \right] \quad (2.53)$$

$$M_{ea} = b(0.5 + a)L - \frac{\pi\rho\dot{y}b^3}{2}\dot{\alpha} \quad (2.54)$$

### 2.3.1.2 Modelo aerodinâmico quase estacionário com massa aparente

O seguinte modelo aerodinâmico inclui termos de massa aparente, ou seja, devido à inércia do movimento do ar (HADDADPOUR; FIROUZ-ABADI, 2006):

$$L = \pi\rho b^2 \left[ \ddot{h} - ba\ddot{\alpha} + U\dot{\alpha} \right] + 2\pi\rho bU \left[ \dot{h} + b(0.5 - a)\dot{\alpha} + U\alpha \right] \quad (2.55)$$

$$M_{ea} = b(0.5 + a)L - \pi\rho b^3 \left[ 0.5\ddot{h} + b(0.125 - 0.5a^2)\ddot{\alpha} + U\dot{\alpha} \right] \quad (2.56)$$

Novamente, podemos reescrever a sustentação e momento em função das variáveis

---

<sup>1</sup>Consiste no sistema de coordenadas cujo eixo  $y$  é paralelo à linha de sustentação nula do perfil. O eixo  $z$  é perpendicular, apontando para cima do perfil. As velocidades nesse sistema de coordenadas são aqui representadas por  $\dot{z}$  e  $\dot{y}$ . A obtenção dessas velocidades é apresentada na próxima seção.

escritas no sistema de coordenadas de sustentação nula.

$$L = \pi \rho b^2 (-\ddot{z} + \dot{y}\dot{\alpha} - d\ddot{\alpha}) + 2\pi \rho b \dot{y}^2 \left[ -\frac{\dot{z}}{\dot{y}} + \left( \frac{1}{2}b - d \right) \frac{\dot{\alpha}}{\dot{y}} \right] \quad (2.57)$$

$$M_{ea} = b(0.5 + a)L - \pi \rho b^3 [-0.5\ddot{z} + b(0.125 - 0.5a^2)\ddot{\alpha} + \dot{y}\dot{\alpha}] \quad (2.58)$$

### 2.3.1.3 Modelo aerodinâmico não estacionário

É utilizado um modelo aerodinâmico bidimensional baseado na teoria de Peters, Hsieh e Torrero (2007). As expressões para sustentação e momento são dadas por (SHEARER, 2006):

$$L = \pi \rho b^2 (-\ddot{z} + \dot{y}\dot{\alpha} - d\ddot{\alpha}) + 2\pi \rho b \dot{y}^2 \left[ -\frac{\dot{z}}{\dot{y}} + \left( \frac{1}{2}b - d \right) \frac{\dot{\alpha}}{\dot{y}} - \frac{\lambda_0}{\dot{y}} \right] \quad (2.59)$$

$$M_{ea} = Ld + 2\pi \rho b^2 \left( -\frac{1}{2}\dot{y}\dot{z} - \frac{1}{2}d\dot{y}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}\dot{y}\lambda_0 - \frac{1}{16}b^2\ddot{\alpha} \right) \quad (2.60)$$

onde  $\lambda_0$  consiste em:

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_A} b_n \lambda_n \quad (2.61)$$

onde  $b_n$  pode ser obtido através da seguinte expressão (essa e outras opções para o cálculo de  $b_n$  são apresentadas na Ref. (PETERS; KARUNAMOORTHY; CAO, 1995)):

$$b_n = (-1)^{n-1} \frac{(N_A + n - 1)!}{(N_A - n - 1)! (n!)^2} \quad 1 < n < N_A - 1$$

$$b_{N_A} = (-1)^{N_A+1} \quad (2.62)$$

Os estados de atraso  $\lambda_n$  podem ser obtidos através de um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{\lambda} = E_1\lambda + E_2\ddot{z} + E_3\ddot{\alpha} + E_4\dot{\alpha} \quad (2.63)$$

Nas expressões acima,  $N_A$  é o número de estados de atraso aerodinâmico  $\lambda_n$ ;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  e  $E_4$  são matrizes apresentadas na Ref. (BALVEDI, 2010).

#### 2.3.1.4 Cálculo do arrasto

Nos três modelos apresentados, o arrasto é calculado considerando um coeficiente de arrasto do perfil  $C_{d0}$  constante:

$$D = \frac{1}{2}\rho\dot{y}^2 C_{d0} \quad (2.64)$$

### 2.3.2 Cálculo das velocidades e acelerações no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula

As expressões de força e momento apresentadas na seção anterior são funções de:  $\ddot{z}$ ,  $\dot{z}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $\ddot{\alpha}$ , que, por sua vez, dependem das coordenadas generalizadas e suas derivadas. Essas velocidades e acelerações representam as velocidades e acelerações dos nós em relação ao ar escritas no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula. As expressões



para essas variáveis são obtidas a partir de:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (U_\infty + J_{p\epsilon} \dot{\epsilon})$$

$$\dot{\alpha} = e_1^T (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{\theta\epsilon} \dot{\epsilon}) \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{p\epsilon} \ddot{\epsilon})$$

$$\ddot{\alpha} = e_1^T (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{\theta\epsilon} \ddot{\epsilon}) \quad (2.66)$$

Onde  $U_\infty + J_{p\epsilon} \dot{\epsilon}$ <sup>2</sup> é a velocidade aerodinâmica do nó escrita no sistema de coordenadas do corpo  $B$ . Ao multiplicar pelas duas matrizes de transformação de coordenada, obtém-se o vetor escrito no sistema de coordenadas de sustentação nula. Analogamente,  $J_{p\epsilon} \ddot{\epsilon}$  é a aceleração do nó no sistema de coordenadas do corpo.

A matriz de rotação  $C^{Bw}$  representa a rotação entre o sistema de coordenadas local  $w$  e o sistema de coordenadas do corpo  $B$ . Essa matriz pode ser obtida através dos termos de direção  $\vec{w}_x$ ,  $\vec{w}_y$  e  $\vec{w}_z$  do vetor  $\vec{h}(s)$ :

$$C^{Bw} = \begin{bmatrix} \vec{w}_x & \vec{w}_y & \vec{w}_z \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

A matriz de rotação  $C^{wa_0}$  representa a rotação entre o sistema de coordenadas aero-

---

<sup>2</sup> $U_\infty$  é a velocidade do vento;  $J_{p\epsilon} \dot{\epsilon}$  é a velocidade de deflexão do nó devido a deformações estruturais.

dinâmico de sustentação nula e o sistema de coordenadas local  $w$ . O ângulo entre esses dois sistemas é o ângulo de sustentação nula do perfil ( $\alpha_0$ ):

$$C^{wa_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_0) \\ 0 & -\sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

### 2.3.3 Obtenção das forças e momentos no sistema de coordenadas do corpo

A partir das forças e momentos no sistema de coordenadas aerodinâmico, podemos obter as forças e momentos aerodinâmicos no sistema de coordenadas do corpo através das seguintes transformações:

$$F^{aero} = C^{Ba_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -D \\ L \end{bmatrix} = C^{Ba_0} C^{a_0a_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -D \\ L \end{bmatrix} = C^{Bw} C^{wa_0} C^{a_0a_1} \begin{bmatrix} 0 \\ -D \\ L \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$M^{aero} = C^{Ba_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_x \end{bmatrix} = C^{Ba_0} C^{a_0a_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_x \end{bmatrix} = C^{Bw} C^{wa_0} C^{a_0a_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_x \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

A matriz  $C^{a_0a_1}$  representa a rotação entre o sistema de coordenadas aerodinâmico usual (alinhado com o vento) e o sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula (alinhado com a linha de sustentação nula do perfil). Note que o ângulo entre esses

dois sistemas de coordenadas é o ângulo de ataque “efetivo” do perfil, e pode ser calculado através de:

$$\tilde{\alpha} = \arctan\left(-\frac{\dot{z}}{\dot{y}}\right) \quad (2.71)$$

E a matriz de rotação fica:

$$C^{a_0 a_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\alpha}) & \sin(\tilde{\alpha}) \\ 0 & -\sin(\tilde{\alpha}) & \cos(\tilde{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Através das expressões apresentadas nos itens anteriores, calculamos as forças e momentos em cada nó. Para incluir a contribuição das forças e momentos em todos os nós, basta calcular esses vetores para cada nó e posiciona-los um sobre o outro, montando um vetor de dimensão  $9N$  (onde  $N$  é o número de elementos). A Eq. 2.50 fica:

$$R_F^{aero}(\epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \lambda) = J_{p\epsilon}^T B^F F^{aero} + J_{\theta\epsilon}^T B^M M^{aero} \quad (2.73)$$

É possível reescrever a Eq. 2.63 em função das coordenadas generalizadas, chegando ao seguinte sistema de equações para a dinâmica estrutural acoplada às forças aerodinâmicas:

$$M_{FF}\ddot{\epsilon} + C_{FF}\dot{\epsilon} + K_{FF}\epsilon = R_F \quad (2.74)$$

$$\dot{\lambda} = F_1\lambda + F_2\ddot{\epsilon} + F_3\dot{\epsilon} \quad (2.75)$$

onde  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são obtidos substituindo as Equações 3.57 e 3.58, em 2.63:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 \\ F_2 &= E_2 e_3^T (C^{wa0})^T (C^{Bw})^T J_{p\epsilon} + E_3 e_1^T (C^{wa0})^T (C^{Bw})^T J_{\theta\epsilon} \\ F_3 &= E_4 e_1^T (C^{wa0})^T (C^{Bw})^T J_{\theta\epsilon} \end{aligned} \quad (2.76)$$

## 2.4 Resolução das equações, linearização e estabilidade

As equações 2.74 e 2.75 representam a dinâmica estrutural acoplada com a aerodinâmica não estacionária. Trata-se de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem.

Para encontrar a posição de equilíbrio para um determinado carregamento, basta encontrar a deformação  $\epsilon$  que satisfaça a Eq. 2.74 onde  $\dot{\epsilon}$  e  $\ddot{\epsilon}$  são nulos. Ou seja:

$$K_{FF}\epsilon = R_F \quad (2.77)$$

Note que  $R_F$  é uma função não linear de  $\epsilon$  (uma vez que as deformações afetam a distribuição de forças aerodinâmicas e gravitacionais através de mudanças nos ângulos de ataque e orientação locais). Dessa forma, a solução da equação acima é obtida numericamente.

Para integrar o sistema de equações dinâmicas, duas metodologias são propostas: integração explícita ou implícita. A integração explícita é feita através da transformação

do sistema de equações em um sistema equivalente de primeira ordem, onde  $X = \dot{\epsilon}$ :

$$\begin{bmatrix} M_{FF} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{FF} & K_{FF} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FF} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} -C_{FF} & -K_{FF} \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_F \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2.79)$$

$$\dot{\lambda} = F_1 \ddot{\epsilon} + F_2 \dot{\epsilon} + F_3 \lambda \quad (2.80)$$

Temos um sistema de equações de primeira ordem, que pode ser integrado numericamente.

Note, entretanto, que  $R_F$  pode ser função de  $\ddot{\epsilon}$  (no caso de utilizarmos um modelo aerodinâmico com massa adicionada, por exemplo). Nesse caso, a integração explícita irá desprezar esses termos. A solução mais adequada nesse caso é a utilização de métodos implícitos, que antes de integrar as equações do movimento determinam o valor de  $\ddot{\epsilon}$ . Nesse caso, o sistema integrado é de segunda ordem.

### 2.4.1 Linearização e estabilidade

Com o objetivo de fazer um estudo de estabilidade aeroelástica, permitindo calcular a velocidade de flutter da asa, fez-se a linearização do sistema acima em torno de um ponto

de equilíbrio. Note que podemos representar o sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = f(\epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \lambda) \quad (2.81)$$

onde  $f$  é uma função não linear.

Pode-se linearizar o sistema em torno de uma condição de equilíbrio, obtendo um sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{\epsilon}} \\ \dot{\tilde{\lambda}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{\epsilon} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

A linearização é feita numericamente. Analisando os autovalores da matriz  $A$ , pode-se determinar se o sistema é estável. Para determinar a velocidade de instabilidade aeroelástica adotou-se o seguinte procedimento: varia-se a velocidade do escoamento  $e$ , para cada velocidade deve-se:

1. Encontrar as deformações de equilíbrio;
2. Linearizar as equações do movimento;
3. Determinar o maior valor real entre os autovalores da matriz  $A$  linearizada.

Assim que a parte real de algum autovalor deixa de ser negativa o sistema torna-se instável. Através da análise da parte imaginária do autovalor, pode-se determinar a frequência associada ao flutter (ou, caso a parte imaginária seja nula, detecta-se a ocorrência de divergência).

# 3 Formulação teórica da dinâmica completa da aeronave

O procedimento para a dedução das equações do movimento é o mesmo empregado no capítulo anterior. A diferença é que modificaremos o sistema de coordenadas do corpo, que passa a movimentar-se em relação ao sistema de coordenadas inercial. Além disso, permitiremos a adição de múltiplos membros flexíveis, todos presos ao sistema de coordenadas do corpo, uma fuselagem rígida, fixa em relação ao sistema de coordenadas do corpo, e elementos rígidos concentrados fixos aos nós estruturais.

Outros itens fundamentais para a descrição completa da dinâmica da aeronave serão aqui incluídos: deflexões do bordo de fuga dos perfis aerodinâmicos (permitindo adicionar superfícies de controle); motores fixos à nós estruturais; força gravitacional.

Assim como no capítulo anterior, a dedução das equações do movimento é realizada através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Ao final do capítulo são apresentadas soluções de equilíbrio, integração das equações do movimento completo e linearização para o estudo da estabilidade.

São utilizados os sistemas de coordenadas inercial  $G$ , do corpo  $B$  e local  $w$  já definidos no capítulo anterior. A diferença é que agora o sistema de coordenadas  $B$  movimenta-se

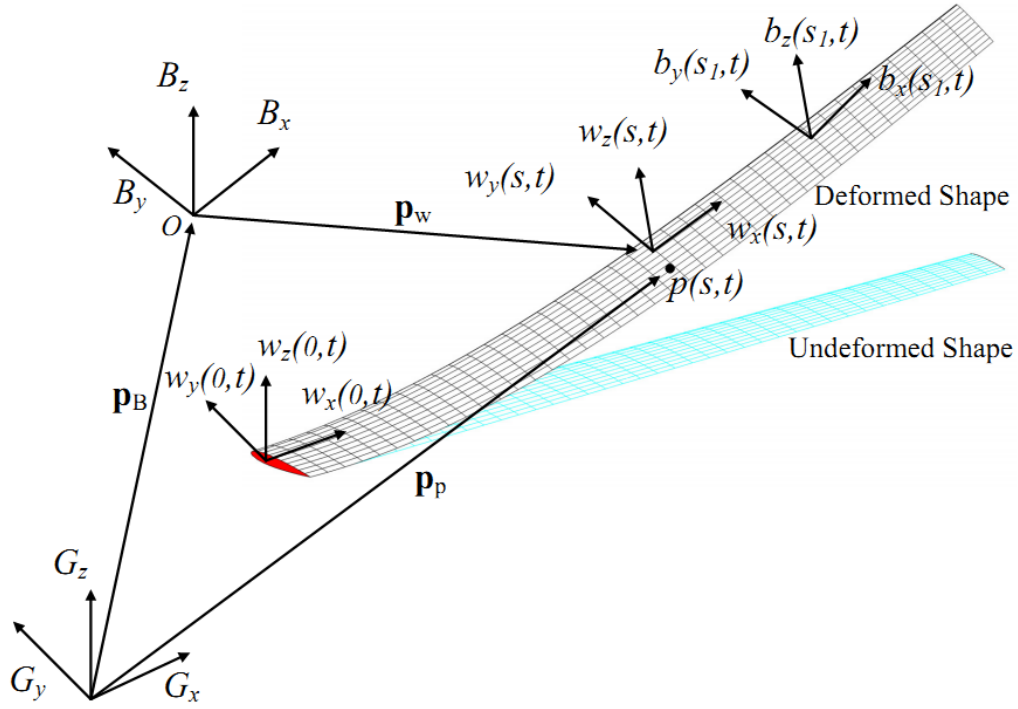


FIGURA 3.1 – Sistemas de coordenadas - (SU, 2008)

em relação ao inercial. Sua posição em relação à  $G$  (vetor  $\vec{p}_B$ ) descreve a posição espacial da aeronave, e a orientação dos eixos de coordenadas descreve a orientação da aeronave (eixo  $B_x$  aponta para asa direita,  $B_y$  para frente,  $B_z$  é o produto vetorial dos dois).

Adicionalmente, define-se o sistema de coordenadas auxiliar  $b$ . Trata-se de um sistema de coordenadas fixo a um nó de um elemento flexível, rotacionado em relação ao sistema de coordenadas local. Esse sistema será empregado ao estudar forças propulsivas e elementos rígidos presos aos nós estruturais. Os sistemas de coordenadas de interesse são apresentados na Figura 3.1.

A posição e orientação do sistema de coordenadas do corpo é representada por  $\vec{b}$ :

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{p}_B \\ \vec{\theta}_B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A posição da origem sistema de coordenadas do corpo, em relação ao referencial inercial, é



dada pelo vetor  $\vec{p}_B$ . A orientação desse mesmo sistema de coordenadas é dada pelo vetor  $\vec{\theta}_B$ . O vetor  $\vec{b}$  representa então a posição e orientação do sistema de coordenadas B. A velocidade e aceleração do sistema de coordenadas do corpo pode ser calculada:

$$\dot{\vec{b}} = \dot{\beta} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{p}}_B \\ \dot{\vec{\theta}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_B \\ \vec{\omega}_B \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\vec{b}} = \ddot{\beta} = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}}_B \\ \ddot{\vec{\theta}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_B \\ \dot{\vec{\omega}}_B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para modelar a estrutura dos membros flexíveis, são utilizados elementos de viga. Cada elemento possui 3 nós e 4 graus de liberdade (extensão, torção e duas flexões). O vetor de deformação é denotado por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \kappa_x & \kappa_y & \kappa_z \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

Na Figura 3.1, são definidos os vetores  $\vec{p}_p(s)$ ,  $\vec{p}_B$  e  $\vec{p}_w(s)$ .  $\vec{p}_w$  é uma posição (em relação ao referencial do corpo) ao longo do eixo elástico onde está definido o sistema de coordenadas local  $w(s)$ ;  $\vec{p}_p$  é a posição de uma partícula qualquer da estrutura (não necessariamente no eixo elástico);  $\vec{p}_B$  é a posição do sistema de coordenadas do corpo em relação ao sistema de coordenadas inercial.

Adicionalmente, definimos abaixo  $\vec{p}(s)$ , que consiste numa posição ao longo do eixo elástico em relação ao referencial inercial:

$$\vec{p}(s) = \vec{p}_B + \vec{p}_w(s) \quad (3.5)$$

A partir do vetor posição  $\vec{p}(s)$  de um nó, e da orientação do sistema de coordenadas do nó  $w(s)$ , pode-se escrever o vetor  $\vec{h}(s)$ , representando a posição e orientação de cada nó:

$$\vec{h}(s) = \begin{bmatrix} \vec{p}(s) & \vec{w}_x^T & \vec{w}_y^T & \vec{w}_z^T \end{bmatrix}^T \quad (3.6)$$

Lembre-se que o vetor  $\vec{h}$  possui 12 elementos, cada vetor  $\vec{w}_i$  consiste em três vetores representando a direção do eixo  $w_i$ .

Outro vetor é definido, representando a posição do nó em relação ao sistema de coordenadas do corpo, e sua orientação:

$$\vec{h}_r(s) = \begin{bmatrix} \vec{p}_w(s) & \vec{w}_x^T & \vec{w}_y^T & \vec{w}_z^T \end{bmatrix}^T \quad (3.7)$$

Na formulação empregada, os estados utilizados são as deformações  $\epsilon$ . As posições de cada nó são obtidas através de relações de cinemática. O vetor  $\vec{h}(s)$  é função (além da posição  $s$ , é claro) das deformações dos elementos de viga e da posição e orientação do sistema de coordenadas  $B$ .<sup>1</sup>

Dessa forma, pode-se chegar às seguintes expressões, que serão úteis na dedução das equações a partir do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\delta h = J_{h\epsilon} \delta \epsilon + J_{hb} \delta b \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Note que no capítulo anterior esse vetor era função apenas das deformações estruturais.

$$dh = J_{h\epsilon}dh + J_{hb}db \quad (3.9)$$

$$\dot{h} = J_{h\epsilon}\dot{h} + J_{hb}\dot{b} = J_{h\epsilon}\dot{h} + J_{hb}\beta \quad (3.10)$$

$$\ddot{h} = J_{h\epsilon}\ddot{h} + \dot{J}_{h\epsilon}\dot{\epsilon} + J_{hb}\dot{\beta} + \dot{J}_{hb}\beta \quad (3.11)$$

As Jacobianas acima consistem na derivada parcial entre o vetor  $h$  e o vetor de deformações ( $\epsilon$ ) e o vetor de posição e orientação do sistema de coordenadas do corpo ( $b$ ). Foram utilizadas as expressões analíticas apresentadas por Shearer (2006).

## 3.1 Trabalhos Virtuais

### 3.1.1 Trabalho virtual devido a forças internas

Os seguintes trabalhos virtuais internos devem ser calculados: devido a forças de inércia da estrutura flexível, forças de inércia de estruturas rígidas presas ao sistema de coordenadas de corpo ou a nós da estrutura flexível, e devido a deformações e taxas de deformações.

#### 3.1.1.1 Trabalho virtual devido a forças de inércia de membros elásticos

O trabalho virtual devido à “força de inércia” em uma partícula de uma seção localizada no comprimento ‘s’ de uma viga elástica, para um deslocamento virtual  $\delta\vec{p}$  é dada por:

$$\delta W_p^{int} = \delta\vec{p} \cdot (-\vec{a}_p \rho dA ds) \quad (3.12)$$

onde o vetor é  $\vec{a}_p$  é a aceleração da partícula;  $d\text{Ads}$  consiste no volume infinitesimal da partícula.

A aceleração da partícula pode ser obtida através da seguinte dedução: A posição de uma partícula é dada pelo vetor:

$$\vec{p}_p(s) = \vec{p}_B + \vec{p}_w(s) + x\vec{w}_x + y\vec{w}_y + z\vec{w}_z \quad (3.13)$$

Onde  $\vec{p}_B$  representa a posição do sistema de coordenadas do corpo;  $\vec{p}_w(s)$  representa a posição ao longo do eixo de referência da viga de um nó; e  $(x,y,z)$  consiste na posição de uma partícula no sistema de coordenadas local, em relação ao nó.

Pode-se agora obter a velocidade e aceleração da partícula:

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{p}}_p + \vec{\omega}_B \times \vec{p}_p \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \dot{\vec{v}}_p + \vec{\omega}_B \times \vec{v}_p \\ &= \ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{\omega}}_B \times \vec{p}_p + \vec{\omega}_B \times \dot{\vec{p}}_p + \vec{\omega}_B \times (\dot{\vec{p}}_p + \vec{\omega}_B \times \vec{p}_p) \\ &= \ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{\omega}}_B \times \vec{p}_p + 2\vec{\omega}_B \times \dot{\vec{p}}_p \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde:

$$\dot{\vec{p}}_p(s) = \dot{\vec{p}}_B + \dot{\vec{p}}_w(s) + x\dot{\vec{w}}_x + y\dot{\vec{w}}_y + z\dot{\vec{w}}_z \quad (3.16)$$

$$\ddot{\vec{p}}_p(s) = \ddot{\vec{p}}_B + \ddot{\vec{p}}_w(s) + x\ddot{\vec{w}}_x + y\ddot{\vec{w}}_y + z\ddot{\vec{w}}_z \quad (3.17)$$

Note que essas expressões são mais complicadas que as apresentadas no capítulo anterior, pois acrescentam também os termos devido à rotação do sistema de coordenadas do corpo

em relação ao sistema de coordenadas inercial.

Os produtos vetoriais apresentados nas equações acima podem ser substituídos por um produto matricial entre uma matriz antissimétrica e um vetor:

$$\vec{m} \times \vec{n} = [\tilde{m}]\{n\} = \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

onde:

$$[\tilde{m}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{n\} \equiv \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

De maneira análoga ao que foi apresentado no capítulo anterior, substituindo as expressões acima na expressão de trabalho virtual e integrando em relação a área da seção transversal, chega-se à expressão de trabalho virtual devido às forças de inércia por uni-

dade de comprimento:

$$\delta W_p^{int}(s) = -\delta \vec{h}^T \left\{ M(s) \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix} + M(s) \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_w^T \\ 0 & \tilde{w}_x^T \\ 0 & \tilde{w}_y^T \\ 0 & \tilde{w}_z^T \end{bmatrix} \dot{\beta} \right. \\ \left. + M(s) \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_w^T \\ 0 & \tilde{w}_x^T \\ 0 & \tilde{w}_y^T \\ 0 & \tilde{w}_z^T \end{bmatrix} \beta + 2M(s) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{p}}_w^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_x^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_y^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_z^T \end{bmatrix} \beta \right\} \quad (3.20)$$

onde  $M(s)$  é a matriz de massa da seção transversal (Eq. 2.20). Note que na dedução apresentada no capítulo anterior, apenas o primeiro termo aparece. Os demais termos estão relacionados com o movimento de corpo rígido da aeronave.

Reescrevendo a expressão do trabalho virtual em termos das variáveis de estado ( $\epsilon$  e  $b$ ), chega-se à:

$$\delta W_p^{int}(s) = - \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T M(s) J_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T M(s) J_{hb} \\ J_{hb}^T M(s) J_{h\epsilon} & J_{hb}^T M(s) J_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon}(s) \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T M(s) \dot{J}_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T M(s) H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T M(s) \dot{J}_{hb} \\ J_{hb}^T M(s) \dot{J}_{h\epsilon} & J_{hb}^T M(s) H_{hb} + 2J_{hb}^T M(s) \dot{J}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(s) \\ \beta \end{bmatrix} \right\} \quad (3.21)$$

onde são definidos:

$$J_{hb} = \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_w^T \\ 0 & \tilde{w}_x^T \\ 0 & \tilde{w}_y^T \\ 0 & \tilde{w}_z^T \end{bmatrix}, \quad \dot{J}_{hb} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{p}}_w^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_x^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_y^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_z^T \end{bmatrix}, \quad H_{hb} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_w^T \\ 0 & \tilde{w}_x^T \\ 0 & \tilde{w}_y^T \\ 0 & \tilde{w}_z^T \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.1.1.2 Trabalho virtual devido a forças de inércia de unidades rígidas presas à estrutura flexível

De maneira análoga à dedução apresentada para membros elásticos, pode-se chegar à seguinte expressão para o trabalho virtual devido a forças de inércia de unidades rígidas como massa e inércias concentradas presas aos nós da estrutura flexível:

$$\delta W_{ur}^{int} = -\delta(\vec{h}^b)^T \left\{ M_{ur} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{p}}_b \\ \ddot{\tilde{b}}_x \\ \ddot{\tilde{b}}_y \\ \ddot{\tilde{b}}_z \end{bmatrix} + M_{ur} \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_b^T \\ 0 & \tilde{b}_x^T \\ 0 & \tilde{b}_y^T \\ 0 & \tilde{b}_z^T \end{bmatrix} \dot{\beta} \right. \\ \left. + M_{ur} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_b^T \\ 0 & \tilde{b}_x^T \\ 0 & \tilde{b}_y^T \\ 0 & \tilde{b}_z^T \end{bmatrix} \beta + 2M_{ur} \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{p}}_b^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_x^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_y^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_z^T \end{bmatrix} \beta \right\} \quad (3.23)$$

onde  $M_{ur}$  é a matriz de massa da unidade rígida concentrada e  $\vec{h}^b$  é o vetor posição e orientação da unidade, escrita no sistema de coordenadas auxiliar  $b^2$ :

$$M_{ur} = \begin{bmatrix} m_{ur} & m_{ur}r_x^{ur} & m_{ur}r_y^{ur} & m_{ur}r_z^{ur} \\ m_{ur}r_x^{ur} & I_{xx_{cg}} + m_{ur}(r_x^{ur})^2 & I_{xy_{cg}} + m_{ur}r_x^{ur}r_y^{ur} & I_{xz_{cg}} + m_{ur}r_x^{ur}r_z^{ur} \\ m_{ur}r_y^{ur} & I_{yx_{cg}} + m_{ur}r_y^{ur}r_x^{ur} & I_{yy_{cg}} + m_{ur}(r_y^{ur})^2 & I_{yz_{cg}} + m_{ur}r_y^{ur}r_z^{ur} \\ m_{ur}r_z^{ur} & I_{zx_{cg}} + m_{ur}r_z^{ur}r_x^{ur} & I_{zy_{cg}} + m_{ur}r_z^{ur}r_y^{ur} & I_{zz_{cg}} + m_{ur}(r_z^{ur})^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$m_{ur}$  é a massa da unidade rígida concentrada.  $\begin{bmatrix} r_x^{ur} & r_y^{ur} & r_z^{ur} \end{bmatrix}$  é a posição<sup>3</sup> do centro de massa da unidade rígida no sistema de coordenadas auxiliar  $b$ .

As unidades rígidas estão presas à estrutura flexível, podendo estar rotacionadas em relação ao nó (cuja orientação é dada pelo vetor  $\vec{h}$ ). Podemos obter os deslocamentos  $\vec{h}^b$  no sistema de coordenadas auxiliar a partir do deslocamento  $\vec{h}$  do nó:

$$\vec{h}^b = D^{bw}\vec{h} \quad (3.25)$$

e adicionalmente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}}_b \\ \ddot{\vec{b}}_x \\ \ddot{\vec{b}}_y \\ \ddot{\vec{b}}_z \end{bmatrix} = D^{bw} \begin{bmatrix} \ddot{\vec{p}} \\ \ddot{\vec{w}}_x \\ \ddot{\vec{w}}_y \\ \ddot{\vec{w}}_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & \tilde{p}_b^T \\ 0 & \tilde{b}_x^T \\ 0 & \tilde{b}_y^T \\ 0 & \tilde{b}_z^T \end{bmatrix} = D^{bw} \begin{bmatrix} I & \tilde{p}^T \\ 0 & \tilde{w}_x^T \\ 0 & \tilde{w}_y^T \\ 0 & \tilde{w}_z^T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{p}}_b^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_x^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_y^T \\ 0 & \dot{\tilde{b}}_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{p}}^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_x^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_y^T \\ 0 & \dot{\tilde{w}}_z^T \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde  $D^{bw}$  é uma matriz que representa a rotação entre o sistema de coordenadas local

<sup>2</sup>Posição em relação ao referencial inercial

<sup>3</sup>Posição em relação ao nó.



e o sistema de coordenadas auxiliar  $b$ . Chega-se então à seguinte expressão de trabalho interno:

$$\begin{aligned} \delta W_{ur}^{int} = & - \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} J_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} J_{hb} \\ J_{hb}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} J_{h\epsilon} & J_{hb}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} J_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon}(s) \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \right. \\ & + \left. \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} \dot{J}_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} \dot{J}_{hb} \\ J_{hb}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} \dot{J}_{h\epsilon} & J_{hb}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} H_{hb} + 2J_{hb}^T (D^{bw})^T M_{ur} D^{bw} \dot{J}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(s) \\ \beta \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Note que a expressão acima é muito parecida com a Eq. 3.21. A diferença básica é que a matriz de massa da seção  $M(s)$  é aqui substituída por  $(D^{bw})^T M_{ur} D^{bw}$ . Além disso, a expressão anterior era contínua (representava trabalho por unidade de comprimento), enquanto a última expressão é discreta (representa o trabalho interno total de cada unidade rígida).

### 3.1.1.3 Trabalho virtual devido a fuselagem rígida

Consideramos aqui uma fuselagem rígida de massa  $m_B$  e matriz de inércia  $I_B$  presa ao sistema de coordenadas do corpo, cuja posição do centro de massa em relação ao referencial  $B$  é dada pelo vetor  $\vec{p}_{cm}$ . Através de procedimento parecido com os casos de membros

flexíveis e unidades rígidas, pode-se chegar à seguinte expressão de trabalho virtual<sup>4</sup>:

$$\delta W_{RB} = \begin{bmatrix} \delta \vec{p}_B^T & \delta \vec{\theta}_B^T \end{bmatrix} \left\{ -M_{RB} \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}}_B \\ \dot{\vec{\omega}}_B \end{bmatrix} - C_{RB} \begin{bmatrix} \vec{v}_B \\ \vec{\omega}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{RB}^{ext} \\ M_{RB}^{ext} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.28)$$

$$= \delta \vec{b}^T \left( -M_{RB} \dot{\beta} - C_{RB} \beta + R_{RB}^{ext} \right) \quad (3.29)$$

onde:

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m_B I & m_B \tilde{\vec{p}}_{r_{cm}}^T \\ m_B \tilde{\vec{p}}_{r_{cm}} & I_B \end{bmatrix}, \quad C_{RB} = \begin{bmatrix} m_B \tilde{\vec{\omega}}_B & m_B \tilde{\vec{\omega}}_B \tilde{\vec{p}}_{r_{cm}}^T \\ m_B \tilde{\vec{\omega}}_B \tilde{\vec{p}}_{r_{cm}} & I_B \tilde{\vec{\omega}}_B \end{bmatrix}, \quad R_{RB}^{ext} = \begin{bmatrix} F_{RB}^{ext} \\ M_{RB}^{ext} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

#### 3.1.1.4 Trabalho virtual interno devido a deformações e taxas de deformações

Nada muda no cálculo do trabalho virtual devido a deformações e taxas de deformações em relação ao que foi apresentado no capítulo anterior. Chega-se às seguintes expressões:

$$\delta W(s) = -\delta \epsilon(s)^T k(s) \epsilon(s) \quad (3.31)$$

$$\delta W(s) = -\delta \epsilon(s)^T c(s) \dot{\epsilon}(s) \quad (3.32)$$

#### 3.1.1.5 Soma dos trabalhos virtuais internos

Obtivemos nas Equações 3.21, 3.31 e 3.32 o trabalho virtual por unidade de comprimento devido às contribuições das forças de inércia, deformações e taxas de deformações

<sup>4</sup>A diferença básica na dedução dessas equações é que para a fuselagem rígida não há influência de deflexões estruturais no cálculo da aceleração; dessa forma, os componentes de trabalho virtual estão apenas relacionados com rotações e acelerações do sistemas de coordenadas do corpo. Note também que os termos de trabalho virtual devido a forças e momentos externos aplicados na fuselagem já estão incluídos na expressão de trabalho virtual apresentada.

estruturais. Tal como foi apresentado no capítulo anterior, devemos integrar as expressões de trabalho virtual ao longo do elemento, e somar cada uma das contribuições. Adicionalmente, a Eq. 3.27 inclui a contribuição de trabalho virtual devido a unidades rígidas presas aos nós dos elementos. Somando as contribuições flexíveis com as unidades rígidas, temos então a expressão de trabalho virtual interno total para um elemento estrutural:

$$\begin{aligned} \delta W_e^{int} = & - \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T M_e J_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T M_e J_{hb} \\ J_{hb}^T M_e J_{h\epsilon} & J_{hb}^T M_e J_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon}(s) \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \right. \\ & + \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} + C_e & J_{h\epsilon}^T M_e H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{hb} \\ J_{hb}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} & J_{hb}^T M_e H_{hb} + 2J_{hb}^T M_e \dot{J}_{hb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(s) \\ \beta \end{bmatrix} \\ & \left. + \begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ b \end{bmatrix} \right\} \quad (3.33) \end{aligned}$$

onde  $K_e$ ,  $C_e$  e  $M_e$  são as matrizes de rigidez, amortecimento e massa de cada elemento, conforme definidas no capítulo anterior. A matriz  $M_e$  agora inclui as massas e inércias das unidades rígidas:

$$M_e = \frac{1}{2} \Delta s \begin{bmatrix} \frac{1}{4} M_1 + \frac{1}{12} M_2 & \frac{1}{12} M_1 + \frac{1}{12} M_2 & 0 \\ \frac{1}{12} M_1 + \frac{1}{12} M_2 & \frac{1}{12} M_1 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{12} M_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} M_2 + \frac{1}{12} M_3 & \frac{1}{12} M_2 + \frac{1}{4} M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ur,1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ur,2} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ur,3} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

A expressão de trabalho virtual apresentada é para um elemento estrutural. Quanto todas as contribuições forem somadas, faltará ainda adicionar o trabalho interno devido a fuselagem rígida (Eq. 3.29).

### 3.1.2 Trabalho virtual devido a forças externas

#### 3.1.2.1 Forças Pontuais

Vimos que:

$$\delta W_{F,pt}^{ext} = \sum_{i=1}^3 \delta \vec{p}_i \cdot \vec{F}_i \quad (3.35)$$

Entretanto, devemos escrever os deslocamentos virtuais em termos das coordenadas generalizadas (deformações estruturais  $\delta\epsilon$  e posição e orientação do sistema de coordenadas  $B$  ( $\vec{b}$ )) e não deslocamentos ( $\delta\vec{p}$ ). Para isso, basta relacionar as duas variáveis:

$$\delta\vec{p} = J_{p\epsilon}\delta\epsilon + J_{pb}\delta\vec{b} \quad (3.36)$$

onde:  $J_{p\epsilon} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial\epsilon}$  e  $J_{pb} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial\vec{b}}$

Com isso, a expressão de trabalho virtual devido à força pontual fica:

$$\delta W_{F,pt}^{ext} = \begin{bmatrix} \delta\epsilon^T & \delta\vec{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} F^{pt} \quad (3.37)$$

onde  $F^{pt}$  é uma matriz 9x1, representando as forças atuantes em cada um dos nós do elemento.

**Inclusão de tração** Note que o vetor de forças pontuais expresso na Eq. 3.37 deve estar escrito no sistema de coordenadas do corpo. Motores, entretanto, podem estar fixos a nós de membros flexíveis e, dessa forma, o vetor tração deve acompanhar o movimento da estrutura. A força de tração é inicialmente calculada no sistema de coordenadas auxiliar ( $b$ ), referente ao motor. Em seguida, deve ser recalculada no sistema de coordenadas do

corpo B:

$$F^B = C^{Bb} F^b \quad (3.38)$$

onde:

$$C^{Bb} = C^{Bw} C^{wb} \quad (3.39)$$

onde  $C^{wb}$  é uma matriz de rotação constante, que relaciona a rotação entre o sistema de coordenadas do sistema propulsivo (b) com o sistema de coordenadas local do nó.  $C^{Bw}$  é a matriz de rotação entre o sistema de coordenadas local do nó, e o sistema de coordenadas do corpo (Eq. 2.67).

O modelo propulsivo empregado nesse trabalho admite variações de tração com a massa específica do ar ( $\rho$ ) e velocidade do voo ( $V$ ), sendo que a tração é obtida a partir da seguinte fórmula:

$$T = \pi T_{max,i} \left( \frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \left( \frac{V}{V_i} \right)^{n_V} \quad (3.40)$$

onde  $\pi$  é a posição da manete (entre 0 e 1);  $T_{max,i}$  é a tração máxima admitida pelo motor em uma condição de massa específica do ar  $\rho_i$  e velocidade  $V_i$ .  $n_\rho$  e  $n_V$  são parâmetros do modelo propulsivo e variam com o tipo de motor.

### 3.1.2.2 Momentos pontuais

Vimos que:

$$\delta W_{M,pt}^{ext} = \sum_{i=1}^3 \delta \vec{\theta}_i \cdot \vec{M}_i \quad (3.41)$$

A dedução segue exatamente o mesmo raciocínio das forças pontuais, chegando à seguinte expressão em termos de coordenadas generalizadas:

$$\delta W_{M,pt}^{ext} = \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} M^{pt} \quad (3.42)$$

onde  $J_{\theta\epsilon} = \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \epsilon}$  e  $J_{\theta b} = \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \vec{b}}$ .

### 3.1.2.3 Forças distribuídas

Vimos que:

$$\delta W_{F,dist}^{ext} = \int_{\Delta s} \delta \vec{p} \cdot \vec{f}(s) ds \quad (3.43)$$

As forças distribuídas devem ser calculadas nos nós. Supondo que as forças distribuídas variam linearmente entre os nós, pode-se demonstrar que o trabalho virtual é dado por:

$$\delta W_{F,dist}^{ext} = \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} B_e^F F^{dist} \quad (3.44)$$

onde  $B_e$  é uma matriz que pondera o valor das forças distribuídas em cada nó. Essa matriz é apresentada no capítulo anterior.

### 3.1.2.4 Momentos distribuídos

De maneira análoga ao caso anterior, chega-se à:

$$\delta W_{M,dist}^{ext} = \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} B_e^M M^{dist} \quad (3.45)$$

A matriz  $B_e^M$  é igual à  $B_e^F$ .

### 3.1.2.5 Gravidade

O trabalho virtual devido à gravidade é obtido de forma parecida com as forças e momentos distribuídos. De fato, a gravidade consiste em uma força distribuída bem como em momentos distribuídos em torno do eixo elástico dos membros:

$$\delta W_{grav}^{ext}(s) = \begin{bmatrix} \delta \vec{p}^T & \delta \vec{w}_x^T & \delta \vec{w}_y^T & \delta \vec{w}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ mr_x \\ mr_y \\ mr_z \end{bmatrix} \vec{g} = \delta h(s)^T N(s) \vec{g} \quad (3.46)$$

onde  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade escrita no sistema de coordenadas do corpo. Note que  $N(s)$  consiste na primeira coluna<sup>5</sup> da matriz de massa da seção transversal apresentada na Eq. 2.20. Deve-se integrar a expressão de trabalho virtual ao longo do elemento, obtendo:

$$\delta W_{grav}^{ext} = \int_0^{\Delta s} \delta h(s)^T N(s) \vec{g} = \delta h^T N \vec{g} \quad (3.47)$$

$$= \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} N \vec{g} \quad (3.48)$$

onde:

$$N = \frac{1}{2} \Delta s \begin{bmatrix} \frac{1}{3} N_1 + \frac{1}{6} N_2 \\ \frac{1}{6} N_1 + \frac{2}{3} N_2 + \frac{1}{6} N_3 \\ \frac{1}{6} N_2 + \frac{1}{3} N_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ur,1} \\ N_{ur,2} \\ N_{ur,3} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

<sup>5</sup>Lembrando que na realidade essa coluna é composta por três colunas, uma vez que cada elemento é multiplicado por uma matriz identidade 3x3.

onde  $N_i$  são as matrizes associadas à seção transversal de cada nó,  $N_{ur,i}$  são as matrizes associadas às unidades rígidas em cada nó.

### 3.1.2.6 Soma dos trabalhos virtuais externos

Somando as contribuições de cada uma das forças e momentos externos, chegamos à seguinte expressão para o trabalho virtual externo total **em um elemento**:

$$\delta W_e^{ext} = \begin{bmatrix} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} F^{pt} + \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} M^{pt} + \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} B_e^F F^{dist} + \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} B_e^M M^{dist} + \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T \\ J_{hb}^T \end{bmatrix} N \vec{g} \right\} \quad (3.50)$$

## 3.2 Equações elásticas do movimento completo

Temos agora todas as contribuições de trabalho virtual de interesse. Para obter o trabalho virtual total do sistema, deve-se somar as contribuições interna e externa de **cada elemento** (Eqs. 3.33 e 3.50), e ainda o trabalho virtual associado à fuselagem rígida (Eq. 3.29):

$$\delta W = \delta W_{RB} + \sum (\delta W_e^{ext} + \delta W_e^{int}) \quad (3.51)$$



$$\begin{aligned}
 \delta W = & \delta \vec{b}^T \left( -M_{RB} \dot{\beta} - C_{RB} \beta + R_{RB}^{ext} \right) \\
 & + \sum \left[ \begin{array}{cc} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{array} \right] \left\{ - \left[ \begin{array}{cc} J_{h\epsilon}^T M_e J_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T M_e J_{hb} \\ J_{hb}^T M_e J_{h\epsilon} & J_{hb}^T M_e J_{hb} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\epsilon}(s) \\ \dot{\beta} \end{array} \right] \right. \\
 & - \left[ \begin{array}{cc} J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} + C_e & J_{h\epsilon}^T M_e H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T M_e \dot{J}_{hb} \\ J_{hb}^T M_e \dot{J}_{h\epsilon} & J_{hb}^T M_e H_{hb} + 2J_{hb}^T M_e \dot{J}_{hb} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}(s) \\ \beta \end{array} \right] \\
 & - \left[ \begin{array}{cc} K_e & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \epsilon \\ \vec{b} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{array} \right] F^{pt} + \left[ \begin{array}{c} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{array} \right] M^{pt} \\
 & \left. + \left[ \begin{array}{c} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{array} \right] B_e^F F^{dist} + \left[ \begin{array}{c} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{array} \right] B_e^M M^{dist} + \left[ \begin{array}{c} J_{h\epsilon}^T \\ J_{hb}^T \end{array} \right] N \vec{g} \right\} \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta W = & \left[ \begin{array}{cc} \delta \epsilon^T & \delta \vec{b}^T \end{array} \right] \left\{ - \left[ \begin{array}{cc} J_{h\epsilon}^T M J_{h\epsilon} & J_{h\epsilon}^T M J_{hb} \\ J_{hb}^T M J_{h\epsilon} & J_{hb}^T M J_{hb} + M_{RB} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \ddot{\epsilon} \\ \dot{\beta} \end{array} \right] \right. \\
 & - \left[ \begin{array}{cc} J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{h\epsilon} + C & J_{h\epsilon}^T M H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{hb} \\ J_{hb}^T M \dot{J}_{h\epsilon} & J_{hb}^T M H_{hb} + 2J_{hb}^T M \dot{J}_{hb} + C_{RB} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \dot{\epsilon} \\ \beta \end{array} \right] \\
 & - \left[ \begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \epsilon \\ \vec{b} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{array} \right] F^{pt} + \left[ \begin{array}{c} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{array} \right] M^{pt} + \\
 & \left. \left[ \begin{array}{c} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{array} \right] B^F F^{dist} + \left[ \begin{array}{c} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{array} \right] B^M M^{dist} + \left[ \begin{array}{c} J_{h\epsilon}^T \\ J_{hb}^T \end{array} \right] N \vec{g} + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ R_{RB}^{ext} \end{array} \right] \right\} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Assim como no capítulo anterior, na passagem para a última equação acima, tomou-se a liberdade de fazer vários abusos de notação, com o objetivo de simplificar o equacionamento. Até a Eq. 3.52, estávamos trabalhando com elementos individuais e, dessa forma, todas as matrizes apresentadas são específicas para cada elemento. O vetor  $\epsilon$ , por

exemplo, referia-se à deformação do elemento (era de dimensão  $4 \times 1$ ). Na Eq. 3.53, o vetor é de dimensão  $4N \times 1$ , onde  $N$  é o número total de elementos, incluindo a deformação de todos os elementos (e todos os membros estruturais).

$M, C, K, B^F, B^M$  são matrizes “bloco-diagonais”, onde cada elemento da diagonal é a matriz de um dos elementos estruturais ( $M_e, C_e, K_e, B_e^F, B_e^M$ ).

Já os vetores de forças e momentos são os vetores aplicados em cada um dos  $3N$  nós (e, por esse motivo, tais vetores tem dimensão  $9N$ ).

Para um elemento, as matrizes Jacobianas  $J_{h\epsilon}$  eram de dimensão  $36 \times 4$ . Agora, elas têm dimensão  $36N \times 4N$ . Entretanto, ao contrário das matrizes especificadas no parágrafo anterior, não se trata de uma mera formação bloco diagonal. Isso porque deformações em um elemento influenciam os deslocamentos de todos os elementos seguintes da viga. A obtenção dessa Jacobiana é feita a partir das Jacobianas individuais, mas propagando as deformações de cada elemento para os seguintes de um dado membro estrutural. O apêndice D da tese de Shearer (2006) apresenta a dedução das Jacobianas estruturais. Para obter as Jacobianas de toda a estrutura flexível (ou seja, dos diversos membros flexíveis), deve-se montar matrizes “bloco-diagonais” das Jacobianas de cada membro estrutural<sup>6</sup>.

Finalmente, uma vez que o deslocamento virtual  $\delta\epsilon$  é arbitrário, e o trabalho virtual é nulo, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} M_{FF} & M_{FB} \\ M_{BF} & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{FF} & C_{FB} \\ C_{BF} & C_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_F \\ R_B \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

---

<sup>6</sup>Note que deformações em um elemento de um membro estrutural não afetam deflexões em outros membros - dessa forma, as Jacobianas dos membros estão desacopladas.

onde:

$$\begin{aligned}
M_{FF}(\epsilon) &= J_{h\epsilon}^T M J_{h\epsilon} & M_{FB}(\epsilon) &= J_{h\epsilon}^T M J_{hb} \\
M_{MF}(\epsilon) &= J_{hb}^T M J_{h\epsilon} & M_{BB}(\epsilon) &= J_{hb}^T M J_{hb} + M_{RB} \\
C_{FF}(\epsilon, \dot{\epsilon}) &= J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{h\epsilon} + C & C_{FB}(\epsilon, \dot{\epsilon}, \beta) &= J_{h\epsilon}^T M H_{hb} + 2J_{h\epsilon}^T M \dot{J}_{hb} + C_{RB} \\
C_{BF}(\epsilon, \dot{\epsilon}) &= J_{hb}^T M \dot{J}_{h\epsilon} & C_{BB}(\epsilon, \dot{\epsilon}, \beta) &= J_{hb}^T M H_{hb} + 2J_{hb}^T M \dot{J}_{hb} \\
K_{FF} &= K
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} R_F \\ R_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} F^{pt} + \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} M^{pt} + \begin{bmatrix} J_{p\epsilon}^T \\ J_{pb}^T \end{bmatrix} B^F F^{dist} \\
&+ \begin{bmatrix} J_{\theta\epsilon}^T \\ J_{\theta b}^T \end{bmatrix} B^M M^{dist} + \begin{bmatrix} J_{h\epsilon}^T \\ J_{hb}^T \end{bmatrix} N \vec{g} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_{RB}^{ext} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 3.3 Inclusão do modelo aerodinâmico

São utilizados os mesmos modelos aerodinâmicos do capítulo anterior. Ou seja, emprega-se a teoria das faixas, sendo calculadas forças e momentos aerodinâmicos de perfil em cada nó dos membros flexíveis. A principal diferença é que agora os deslocamentos dos nós (e que são necessários para calcular as velocidades e acelerações) são dependentes do movimento do sistema de coordenadas do corpo. Dessa forma, as expressões de velocidades devem incluir termos devidos ao movimento de corpo rígido da aeronave.

Além disso, o modelo aerodinâmico é incrementado com a possibilidade de adição de superfícies controladoras aos perfis, através de um bordo de fuga móvel no aerofólio.

Deve-se lembrar que, ao utilizar modelo aerodinâmico não estacionário, as seguintes equações devem ser adicionadas ao modelo dinâmico:

$$\dot{\lambda} = F_1\ddot{\epsilon} + F_2\dot{\epsilon} + F_3\lambda \quad (3.56)$$

### 3.3.1 Cálculo das velocidades e acelerações no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula

No capítulo anterior, obtivemos expressões para as velocidades e acelerações escritas no sistema de coordenadas aerodinâmico de sustentação nula em função das coordenadas generalizadas. Naquele caso, as derivadas das deformações eram suficientes para o cálculo. Aqui, entretanto, a aeronave está em movimento, e as velocidades/acelerações aerodinâmicas locais dependem também da velocidade/aceleração do corpo. As expressões para essas variáveis são obtidas a partir de:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (U_\infty + J_{p\epsilon}\dot{\epsilon} + J_{pb}\dot{\beta})$$

$$\dot{\alpha} = e_1^T (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{\theta\epsilon}\dot{\epsilon} + J_{\theta b}\dot{\beta}) \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{p\epsilon}\ddot{\epsilon} + J_{pb}\dot{\beta})$$

$$\ddot{\alpha} = e_1^T (C^{wa_0})^T (C^{Bw})^T (J_{\theta\epsilon}\ddot{\epsilon} + J_{\theta b}\dot{\beta}) \quad (3.58)$$

Onde  $U_\infty + J_{pe}\dot{\epsilon} + J_{pb}\dot{\beta}$ <sup>7</sup> é a velocidade aerodinâmica do nó escrita no sistema de coordenadas do corpo  $B$ . Ao multiplicar pelas duas matrizes de transformação de coordenadas, obtém-se o vetor escrito no sistema de coordenadas de sustentação nula. Analogamente,  $J_{pe}\ddot{\epsilon} + J_{pb}\ddot{\beta}$  é a aceleração do nó no sistema de coordenadas do corpo.

### 3.3.2 Inclusão da deflexão do bordo de fuga no modelo aerodinâmico

A deflexão do bordo de fuga é implementada no modelo aerodinâmico através de uma adição aos valores de sustentação e momento aerodinâmico calculado (SHEARER, 2006):

$$L' = L + L^\delta \quad (3.59)$$

$$M' = M + M^\delta \quad (3.60)$$

onde:

$$L^\delta = 2\pi\rho b(c_1\dot{\gamma}^2\delta_u + c_2\dot{\gamma}\dot{\delta}_u + c_3\ddot{\delta}_u) \quad (3.61)$$

$$M^\delta = 2\pi\rho b\left(d(c_1\dot{\gamma}^2\delta_u + c_2\dot{\gamma}\dot{\delta}_u + c_3\ddot{\delta}_u) + b(c_4\dot{\gamma}^2\delta_u + c_5\dot{\gamma}\dot{\delta}_u + c_6\ddot{\delta}_u)\right) \quad (3.62)$$

$\delta_u$  é o ângulo de deflexão do bordo de fuga. Os coeficientes  $c_i$  são baseados na geometria do perfil e do bordo de fuga. Na prática, os termos das expressões acima relativos à  $\dot{\delta}_u$  e  $\ddot{\delta}_u$  são pequenos e podem ser desprezados para o caso de pequenas áreas de bordo de fuga

---

<sup>7</sup> $U_\infty$  é a velocidade do vento;  $J_{pe}\dot{\epsilon}$  é a velocidade de deflexão do nó devido à deformações estruturais;  $J_{pb}\dot{\beta}$  é a velocidade devido ao movimento do corpo.

móvel. Assim, as equações ficam com a seguinte forma:

$$L^\delta = \rho b \dot{y}^2 C_{L,\delta} \delta_u \quad (3.63)$$

$$M^\delta = \rho b^2 \dot{y}^2 C_{m,\delta} \delta_u \quad (3.64)$$

### 3.4 Equações de propagação do sistema de coordenadas do corpo

Para calcular a evolução da posição e orientação do sistema de coordenadas do corpo em relação ao referencial inercial, utilizou-se a formulação de ângulos de Euler, classicamente utilizada no estudo da mecânica de voo de corpo rígido, onde  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  são, respectivamente, o ângulo de rolamento, ângulo de arfagem e ângulo de proa da aeronave. Esses ângulos representam a orientação entre o sistema de coordenadas do corpo “usual”  $B_u$  e o sistema de coordenadas inercial, conforme Figura 3.2.

É importante observar que o sistema de coordenadas do corpo usualmente utilizado em mecânica de voo (STEVENS; LEWIS, 2003; NELSON, 1989; ETKIN; REID; DUFF, 1996; ROSKAM, 1995) é definido de maneira diferente do sistema de coordenadas do corpo  $B$  apresentado anteriormente nesse trabalho. No sistema de coordenadas usual, o eixo  $x$  está na linha da fuselagem, orientado em direção ao nariz; o eixo  $z$  está no plano de simetria da aeronave, apontando para baixo;  $y$  completa o sistema, apontando para a asa direita.<sup>8</sup> Por esse motivo, deveremos relacionar as velocidades angulares e lineares

---

<sup>8</sup>Enquanto isso, no sistema de coordenadas empregado nesse trabalho, o eixo  $x$  aponta para a asa direita, o eixo  $y$  está no eixo da fuselagem no sentido do nariz, e o eixo  $z$  está no plano de simetria, apontando para cima.

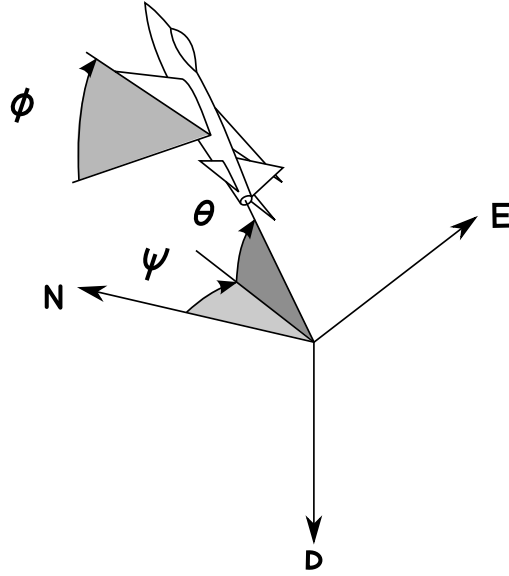


FIGURA 3.2 – Ângulos de Euler

do corpo no sistema de coordenadas usual  $B_u$ , com o sistema de coordenadas  $B$  definido nesse trabalho.

Pode-se demonstrar (STEVENS; LEWIS, 2003) que as derivadas dos ângulos de Euler se relacionam com as velocidades angulares de rotação do sistema de coordenadas  $B_u$  (dadas por  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ <sup>9</sup>) é dada por:

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (3.65)$$

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \sin \phi + R \cos \phi) \quad (3.66)$$

$$\dot{\psi} = \frac{(Q \sin \phi + R \cos \phi)}{\cos \theta} \quad (3.67)$$

<sup>9</sup>Velocidades angulares em torno dos eixos x,y e z, respectivamente, do sistema de coordenadas do corpo usual  $B_u$

A relação entre as velocidades angulares nos sistemas de coordenadas  $B$  e  $B_u$  é dada por:

$$\vec{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ P \\ -R \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Stevens e Lewis (2003) também apresentam a relação entre as velocidades no sistema de coordenadas do corpo usual ( $U, V, W$ <sup>10</sup>) e as velocidades no sistema de coordenadas inercial:

$$\dot{H} = U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta \quad (3.69)$$

$$\dot{x} = U \cos \theta \cos \psi + V(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + W(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \quad (3.70)$$

$$\dot{y} = U \cos \theta \sin \psi + V(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + W(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \quad (3.71)$$

A relação entre as velocidades nos sistemas de coordenadas  $B$  e  $B_u$  é dada por:

$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ U \\ -W \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Note que os vetores  $\vec{v}_B$  e  $\vec{\omega}_B$  consistem em estados da dinâmica completa da aeronave:

$$\vec{\beta} = [\vec{v}_B^T \quad \vec{\omega}_B^T]^T.$$

---

<sup>10</sup>Velocidades de translação nos eixos x,y e z, respectivamente, do sistema de coordenadas do corpo usual  $B_u$



## 3.5 Resolução das equações, linearização e estabilidade

Com as equações elásticas do movimento completo (Eq. 3.54), as equações do modelo aerodinâmico não estacionário (Eq. 3.56) e as equações cinemáticas de propagação dos sistema de coordenadas do corpo (Eqs. 3.65, 3.66, 3.67, 3.69, 3.70 e 3.71), temos todas as expressões necessárias para descrever o modelo completo da aeronave flexível. Tratam-se de  $4N$  equações diferenciais para a descrição da dinâmica estrutural,  $3NN_A$  equações diferenciais para descrever os estados de atraso aerodinâmico e 12 equações para o movimento de corpo rígido<sup>11</sup>.

A seguir, são apresentados os procedimentos utilizados para encontrar a condição de equilíbrio da aeronave em voo; integração e linearização das equações do movimento.

### 3.5.1 Determinação do Equilíbrio

A determinação da condição de equilíbrio no caso da aeronave completa é feita através de um procedimento iterativo:

1. Cálculo do equilíbrio de corpo rígido ( $\dot{\beta} = 0$ )<sup>12</sup>;
2. Cálculo do equilíbrio estrutural ( $\ddot{\epsilon} = 0$ )<sup>13</sup>;
3. Voltar ao item 1 até que as duas condições sejam satisfeitas ( $\dot{\beta} = 0$  e  $\ddot{\epsilon} = 0$ ).

<sup>11</sup>Onde  $N$  é o número total de elementos e  $N_A$  é o número de estados aerodinâmicos utilizados em cada nó - equação válida supondo que são utilizados o mesmo número de atrasos aerodinâmicos em cada nó, o que não precisa ser feito na prática

<sup>12</sup>Note que na situação de equilíbrio  $M_{BB}\dot{\beta} = R_B$ . Dessa forma:  $\dot{\beta} = 0$  equivale à  $R_B = 0$ . Onde  $R_B$  é o somatório das forças externas, que é função de  $\epsilon$ . Na primeira iteração, utiliza-se deformações nulas.

<sup>13</sup>Calcula-se  $\epsilon$  tal que  $K_{FF}\epsilon = R_F$ . Lembrando que  $R_F$  é função de  $\epsilon$ .

Para uma condição de voo reto, por exemplo, para uma determinada condição de voo especificada (altitude, velocidade e ângulo de trajetória), obtém-se a posição da manete, ângulo de deflexão da superfície de controle e ângulo de arfagem da aeronave (etapa 1), e deformações estruturais (etapa 2). A solução do equilíbrio em cada etapa é obtida numericamente.

### 3.5.2 Integração das equações do movimento não lineares

Tal como no capítulo anterior, para integrar o sistema de equações dinâmicas, duas metodologias são propostas: integração explícita ou implícita. A integração explícita é feita através da transformação do sistema de equações em um sistema equivalente de primeira ordem.

Utilizou-se as ferramentas *ode15i* e *ode15s*, do MATLAB, para integração implícita e explícita, respectivamente.

### 3.5.3 Linearização e estabilidade

Com o objetivo de fazer um estudo de estabilidade do avião flexível, fez-se a linearização do sistema de equações em torno de um ponto de equilíbrio. Note que podemos representar o sistema da seguinte forma:

$$f(\epsilon, \dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \lambda, \dot{\lambda}, \beta, \dot{\beta}, \vec{k}, \dot{\vec{k}}, \delta_{u,i}, \pi_i) = 0 \quad (3.73)$$

onde  $f$  é uma função não linear de dimensão igual ao número total de estados do sistema.

$\vec{k}$  é o vetor de estados de propagação do sistema de coordenadas do corpo<sup>14</sup>:

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & H \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Pode-se reduzir a um sistema de primeira ordem (fazendo  $X = \dot{\epsilon}$ ) e linearizá-lo em torno de uma condição de equilíbrio, obtendo:

$$M \begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{\epsilon}} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\tilde{k}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{\epsilon} \\ \lambda \\ \tilde{k} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{u,i} & \tilde{\pi}_i \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

A linearização é feita de forma numérica. Analisando os autovalores da matriz  $M^{-1}A$ , pode-se determinar se o sistema é estável. Escolhendo subconjuntos das matrizes  $M$  e  $A$ , pode-se desacoplar os movimentos estruturais dos movimentos de corpo rígido. Isso permite, em um único processo de linearização, determinar as características de estabilidade e resposta autônoma dos seguintes sistemas:

- Corpo rígido;
- Asa engastada;
- Avião completo em voo livre.

O procedimento para determinação de velocidade de instabilidade aeroelástica é o mesmo apresentado no capítulo anterior: variou-se a velocidade do escoamento e, para

---

<sup>14</sup>Os estados  $x$  e  $y$  foram excluídos, uma vez que eles não afetam a dinâmica da aeronave.

cada velocidade, determinou-se o maior valor real entre os autovalores de  $M^{-1}A$ <sup>15</sup>. Assim que a parte real de algum autovalor deixa de ser negativa o sistema torna-se instável. Através da análise da parte imaginária do autovalor, pode-se determinar a frequência associada ao modo aeroelástico instável.

---

<sup>15</sup>Ou uma de suas sub-matrizes

## 4 Ambiente de Simulação

Durante o presente trabalho, foi desenvolvida uma ferramenta para estudos de aeroelasticidade e dinâmica de voo de aeronaves muito flexíveis, batizada de AeroFlex. Entre as funcionalidades desejadas para o programa, destacam-se as seguintes:

- Implementar o modelo de dinâmica estrutural com deflexões não lineares baseado em deformações, proposto por Brown (2003), com as melhorias nos cálculos sugeridas por Shearer (2006);
- Permitir o estudo de aeronaves com as seguintes características:
  - Fuselagem rígida e diversos membros flexíveis (asas, empenagens horizontais e verticais);
  - Elementos rígidos concentrados presos aos nós estruturais flexíveis (como motores, armamentos, tanque de combustível, etc);
  - Elementos propulsivos presos aos nós da estrutura flexível ou ao sistema de coordenadas do corpo;
- Efetuar o cálculo do equilíbrio não linear, considerando as deformações estruturais;
- Linearizar as equações do movimento, permitindo o estudo da estabilidade dinâmica do sistema aeroelástico com ou sem os graus de liberdade de corpo rígido;

- Permitir simulações da dinâmica linear e não linear, utilizando diferentes técnicas de integração numérica.

Procurou-se fazer um código o mais geral possível, de tal forma que o usuário terá liberdade para definir uma nova configuração de aeronave em poucos minutos e já iniciar os estudos de aeroelasticidade e dinâmica de voo.

Para cumprir os requisitos acima, o autor optou por escrever o código AeroFlex utilizando o Matlab <sup>1</sup>. A escolha por esse software se deve ao fato de já possuir diversas ferramentas matemáticas que auxiliam as implementações, tais como códigos para resolver equações não lineares, integrar equações diferenciais com muitos estados, etc.

## 4.1 Inicialização dos dados do avião

O AeroFlex foi feito utilizando programação orientada a objetos. Foram definidas diversas classes de objetos, utilizadas para inicializar e atualizar os diferentes tipos de dados que devem ser tratados pelo programa. As quatro classes mais básicas da ferramenta são as seguintes: *node*, *element*, *engine*, *airplane*.

Para inicializar a modelagem de um avião, o usuário precisa das seguintes informações: massas e inércias por unidades de comprimento em cada nó estrutural; matriz de rigidez e amortecimento de cada elemento; comprimento de cada elemento e orientação relativa entre cada elemento e o próximo. Esses dados são obtidos da geometria do avião, bem como de algum software de análise estrutural de seção transversal. Adicionalmente, o usuário deve informar os dados do modelo aerodinâmico de cada nó (ângulo de ataque de sustentação nula, coeficientes  $C_{l_\alpha}$ ,  $C_{m_0}$ , número de estados de atraso aerodinâmico, etc.).

---

<sup>1</sup>Matlab 2010a, The MathWorks, Natick, MA

Uma vez conhecidas todas as propriedades do avião, o seguinte procedimento deve ser feito pelo usuário:

1. Criar objetos do tipo *node*. Cada objeto é um nó estrutural e deve ser inicializado com as informações de massa. Os objetos dessa classe também possuem as informações relativas ao modelo aerodinâmico (uma vez que o cálculo aerodinâmico é feito por nó);
2. Criar vetores de objetos do tipo *element*. Cada vetor é um membro flexível. Cada unidade desse vetor é um elemento e estão associados a três objetos do tipo *node*. Esses objetos incluem ainda as propriedades de rigidez e amortecimento, inerentes à cada elemento. O usuário pode criar quantos membros forem necessários para descrever a aeronave;
3. Criar objetos do tipo *engine*. Cada objeto dessa classe é um motor. Na inicialização desse objeto, o usuário passa as informações relativas a posição do motor (número do membro, elemento e nó), orientação em relação ao sistema de coordenadas local, e parâmetros do modelo propulsivo (conforme Eq. 3.40).
4. Criar um objeto do tipo *airplane*. Esse objeto engloba todas as informações da aeronave e tem como dados de entrada: os vetores de objetos do tipo *element* (membros) e objetos da classe *engine*. Adicionalmente, o usuário pode inicializar esse objeto com dados da fuselagem rígida, se existir.

Seguindo esse procedimento, o usuário terá um objeto da classe *airplane* que inclui todos os dados estruturais, aerodinâmicos e propulsivos de um avião. Esse objeto permite a utilização das diferentes rotinas de cálculo de equilíbrio; linearização das equações do movimento e simulação do AeroFlex.

## 4.2 Cálculo do equilíbrio

A classe *airplane* tem como uma de suas funções a rotina *trimairplane*. Essa função tem por objetivo efetuar o cálculo do equilíbrio estrutural e de corpo rígido para uma condição de voo reto nivelado em uma altitude e velocidade especificada pelo usuário. A saída dessa função é o vetor de deformações estruturais de equilíbrio  $\epsilon$ , ângulo de arfagem, tração e deflexão de profundor de equilíbrio.

A metodologia utilizada para cálculo do equilíbrio é descrita na Seção 3.5.1 deste trabalho. As equações são resolvidas utilizando a função FSOLVE do Matlab.

## 4.3 Linearização das equações do movimento

A função *linearizeairplane* tem como dados de entradas um objeto da classe *airplane*, e condições de equilíbrio em torno da qual deseja-se linearizar as equações do movimento. As saídas dessa função são: as matrizes A e B do sistema linearizado completo; as matrizes  $A_{aeroelast}$  e  $A_{body}$ , que consistem nas matrizes características dos sistemas linearizados desconsiderando os graus de liberdade de corpo rígido, e flexível, respectivamente. Analisando os autovalores dessas matrizes, torna-se possível fazer estudos de estabilidade.

A linearização é feita numericamente e o procedimento é apresentado na Seção 3.5.3.

## 4.4 Simulações não lineares

A função *simulate* é uma rotina da classe *airplane* especializada em simulação da dinâmica não linear. Os dados de entrada são: o objeto da classe *airplane* que se deseja



simular; as condições iniciais da simulação; funções de deflexão dos bordos de fuga e motores dependentes do tempo; e o tipo de integração que se deseja fazer (implícita ou explícita).

São utilizadas as ferramentas ODE15i e ODE15s do Matlab para integração (implícita e explícita, respectivamente). Os detalhes sobre o procedimento de integração são apresentados nas seções 2.4 e 3.5.2.

## 4.5 Saídas gráficas

As saídas da rotina de simulação consistem nos vetores de estados do sistema para cada instante de tempo (ou seja: deformações  $\epsilon$ , velocidades lineares e angulares do corpo  $\vec{\beta}$ , posição e orientação do sistema de coordenadas do corpo  $\vec{k}$  e estados de atraso aerodinâmicos  $\lambda$ ). Com o objetivo de fazer um vídeo tridimensional das deflexões estruturais ao longo do tempo a partir dos resultados de uma simulação, foi criada a função *airplanemovie*. Os dados de entrada dessa função são: o objeto da classe *airplane*, um vetor de tempos, e uma matriz de deformações para cada instante de tempo.

Adicionalmente, a função *plotairplane3d* apresenta uma figura 3D do objeto *airplane*. A Figura 4.1 apresenta um exemplo de saída gráfica do AeroFlex.

## 4.6 Flags do programa

Com o objetivo de permitir a utilização do AeroFlex para aplicações distintas, o usuário deve escolher alguns parâmetros do programa:

- *isPINNED*: Se os graus de liberdade de corpo rígido serão desprezados em todas as

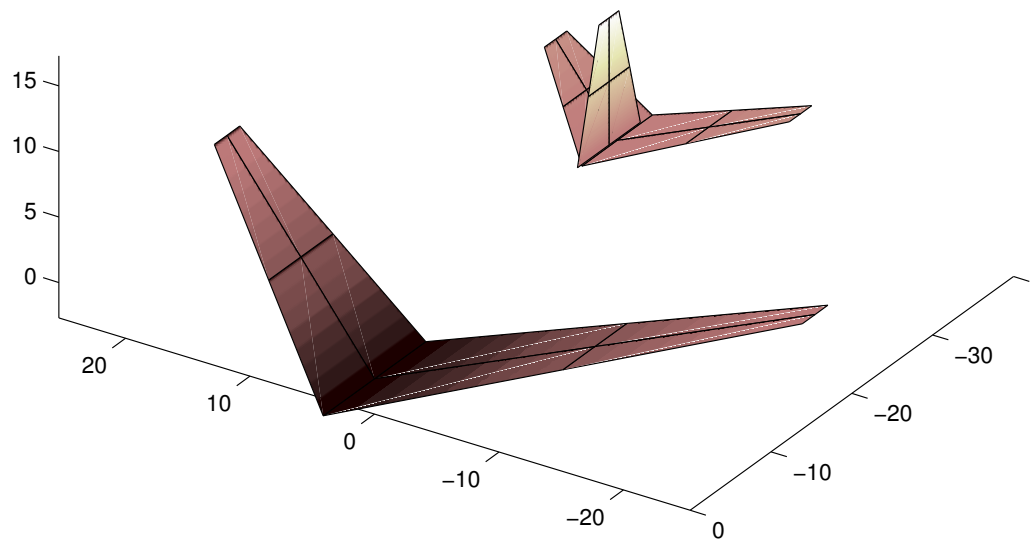


FIGURA 4.1 – Exemplo de aeronave modelada no AeroFlex

análises. O usuário deve ativar essa opção caso queira fazer estudos de aeroelasticidade considerando asas engastadas;

- *isGRAV*: Permite desabilitar a gravidade;
- *isITER*: Especifica se o cálculo do equilíbrio é feito de maneira iterativa ou não;
- *numITER*: Determinar o número de iterações para o cálculo do equilíbrio, caso o item anterior tenha sido acionado;
- *modAED*: Especifica qual modelo aerodinâmico será utilizado;
- *updateStrJac*: Especifica se as matrizes Jacobianas estruturais serão atualizadas.

Três opções estão disponíveis: não atualizar, atualizar apenas no cálculo do equilíbrio; atualizar sempre.

## 5 Validação do código

As equações do movimento de aeronaves muito flexíveis são bastante complexas: envolvem o cálculo de deslocamentos estruturais a partir do vetor de deformações, matrizes Jacobianas estruturais não lineares, forças e momentos aerodinâmicos com termos de atrasos, etc.

Como uma ferramenta para análise de aeronaves muito flexíveis foi desenvolvida como atividade dessa tese (o AeroFlex), fez-se necessário buscar formas de validar o código.

Com esse objetivo, foram repetidos diversos casos de teste empregados na literatura. Validou-se o código para casos de resolução de problemas estáticos estruturais de grandes deflexões, dinâmica estrutural e aeroelasticidade linear e não linear.

Além disso, um modelo de aeronave foi criado. Trata-se de uma asa voadora de grande alongamento. Os resultados puderam ser comparados com o modelo de corpo rígido para respostas autônomas e forçadas do movimento longitudinal e látero-direcional.

### 5.1 Validação da Estrutura - Problemas Estáticos

Para validar o código estrutural, foram utilizados os casos de teste apresentados na Ref. (BROWN, 2003). A estrutura utilizada consiste em uma viga engastada com propriedades

constantes conforme apresentado na Tabela 5.1.

TABELA 5.1 – Propriedades da viga teste - (BROWN, 2003)

Comprimento da viga	1.0 m
Massa por unidade de comprimento	0.2 kg/m
Inércia rotacional $I_{11}$	$1.0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2/\text{m}$
Inércia $I_{22}$	$1.0 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2/\text{m}$
Inércia $I_{33}$	$1.0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2/\text{m}$
Rigidez extensional $K_{11} = EA$	$1.0 \times 10^6 \text{ Pa.m}^2$
Rigidez torcional $K_{22} = GJ$	$50 \text{ N.m}^2$
Rigidez flexional $K_{33} = EI_{yy}$	$50 \text{ N.m}^2$
Rigidez flexional $K_{44} = EI_{zz}$	$1000 \text{ N.m}^2$

### 5.1.1 Viga engastada sujeita a força concentrada

O primeiro caso de teste consiste na aplicação de uma força pontual na extremidade livre da viga (Figura 5.1). Calculou-se a posição de equilíbrio não linear devido à essa força conforme procedimento apresentado no Capítulo 2 (resolução da Eq. 2.77). Encontra-se o vetor de deformações  $\epsilon$ . A partir desse vetor, pode-se calcular as deflexões estruturais.

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam as deflexões de equilíbrio da ponta da viga em função da força aplicada. Os resultados aqui obtidos (AeroFlex) são comparados com os resultados apresentados na Ref. (BROWN, 2003) (UM/NAST). Nota-se que os resultados estão bastante próximos.

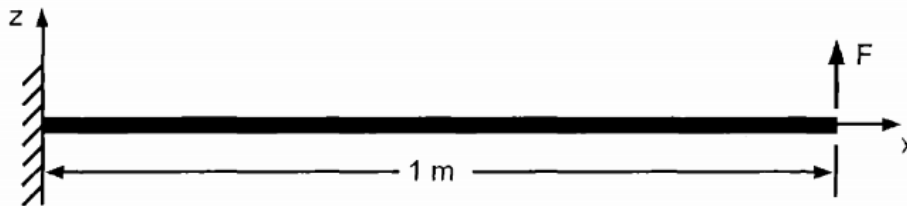


FIGURA 5.1 – Viga modelada com força F aplicada na ponta - (BROWN, 2003)

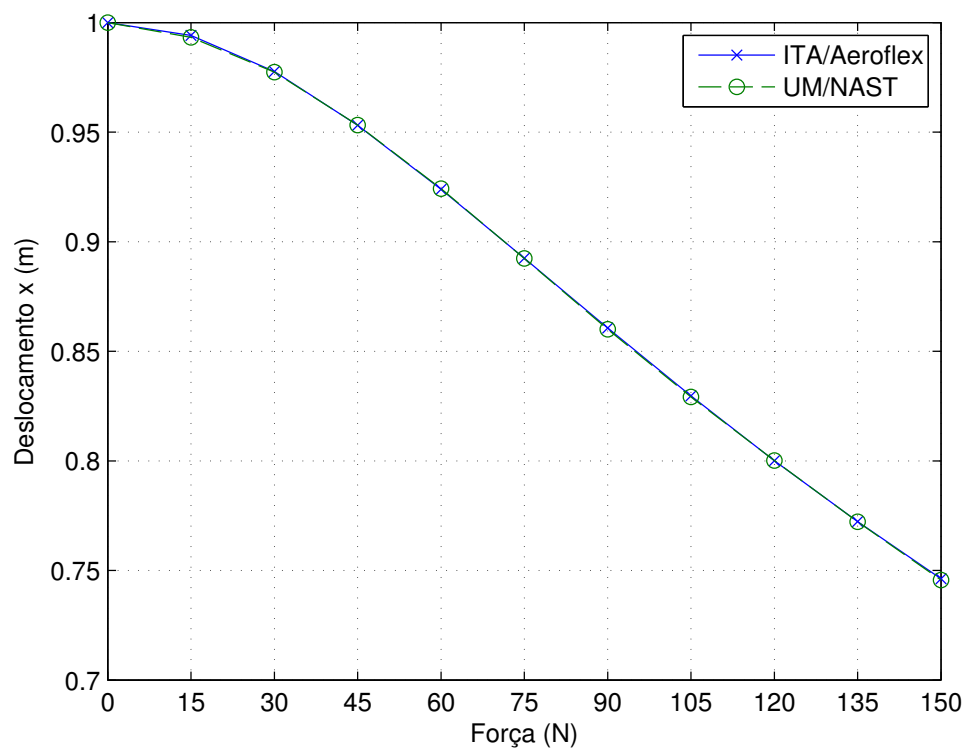


FIGURA 5.2 – Deslocamento da ponta da asa no eixo  $x$  para aplicação de uma força concentrada

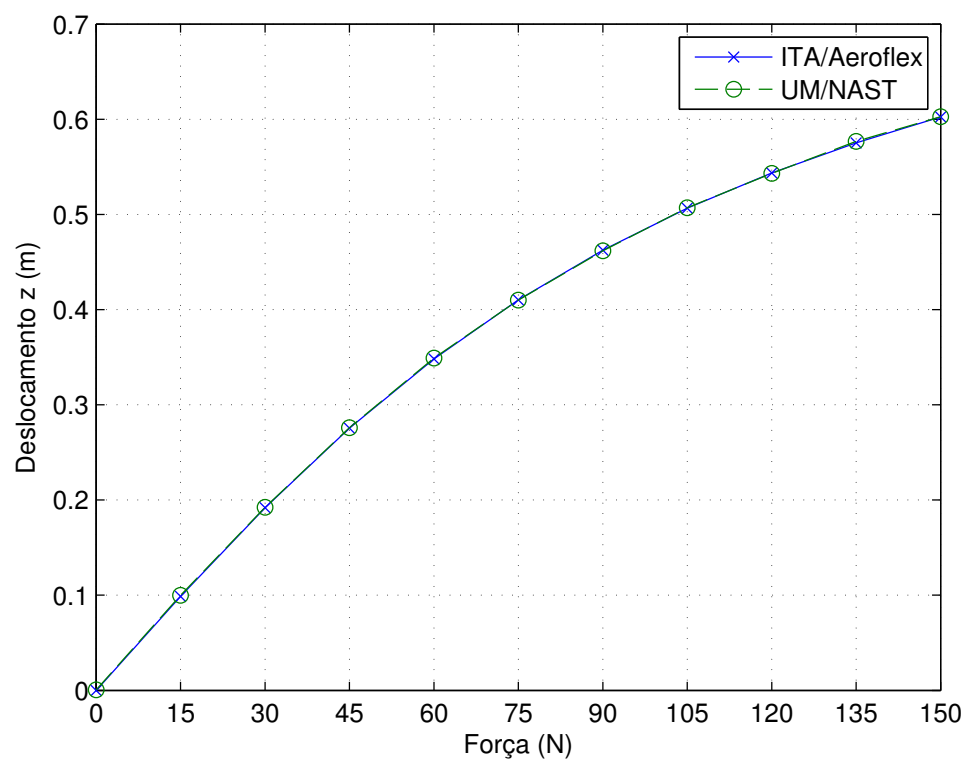


FIGURA 5.3 – Deslocamento da ponta da asa no eixo  $z$  para aplicação de uma força concentrada

### 5.1.2 Viga engastada sujeita a momento concentrado

O segundo caso de teste consiste na aplicação de momento pontual na extremidade livre da viga (Figura 5.4). Calcula-se então a condição de equilíbrio não linear devido à esse momento. As Figuras 5.5 e 5.6 apresentam as deflexões de equilíbrio da ponta da viga em função do momento aplicado.

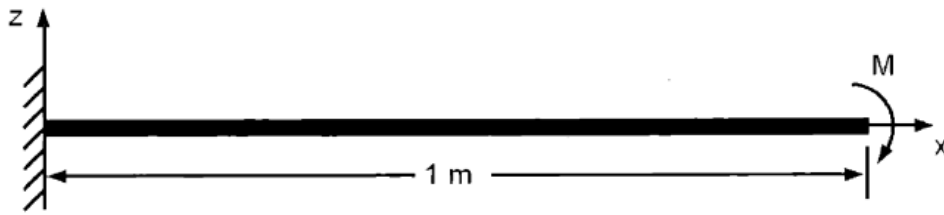


FIGURA 5.4 – Viga modelada com momento  $M$  aplicado na ponta - (BROWN, 2003)

### 5.1.3 Viga engastada sujeita a duas forças concentradas

O último caso estático de estruturas analisado consiste na aplicação de duas forças pontuais  $F_1$  e  $F_2$ , conforme Figura 5.7. A força  $F_1$  é aplicada no centro da estrutura e é constante (-120 N). A força  $F_2$  é variada e os resultados das deflexões do equilíbrio em função da força aplicada são apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9.

## 5.2 Validação da Estrutura - Problemas Dinâmicos

Para validar a dinâmica estrutural, foram feitas diversas simulações para comparação com resultados da literatura. Utilizou-se a mesma viga da seção anterior, mas aplicando uma força dependente do tempo na extremidade, conforme Figura 5.10.

Foram feitas simulações utilizando três funções de força:

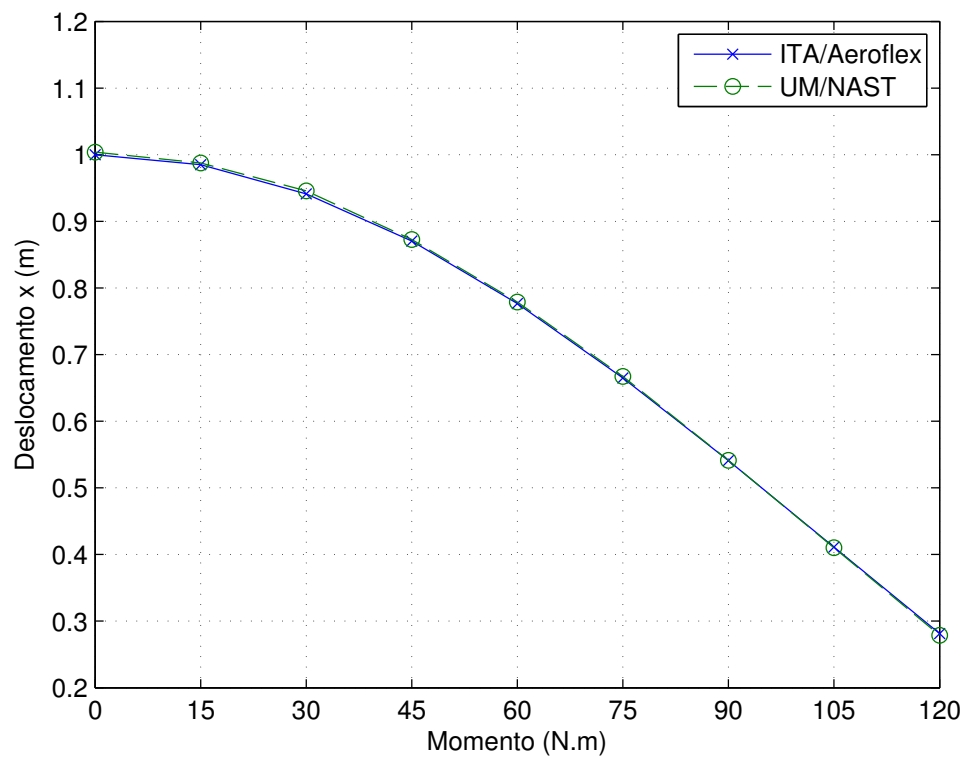


FIGURA 5.5 – Deslocamento da ponta da asa no eixo x para aplicação de um momento concentrado

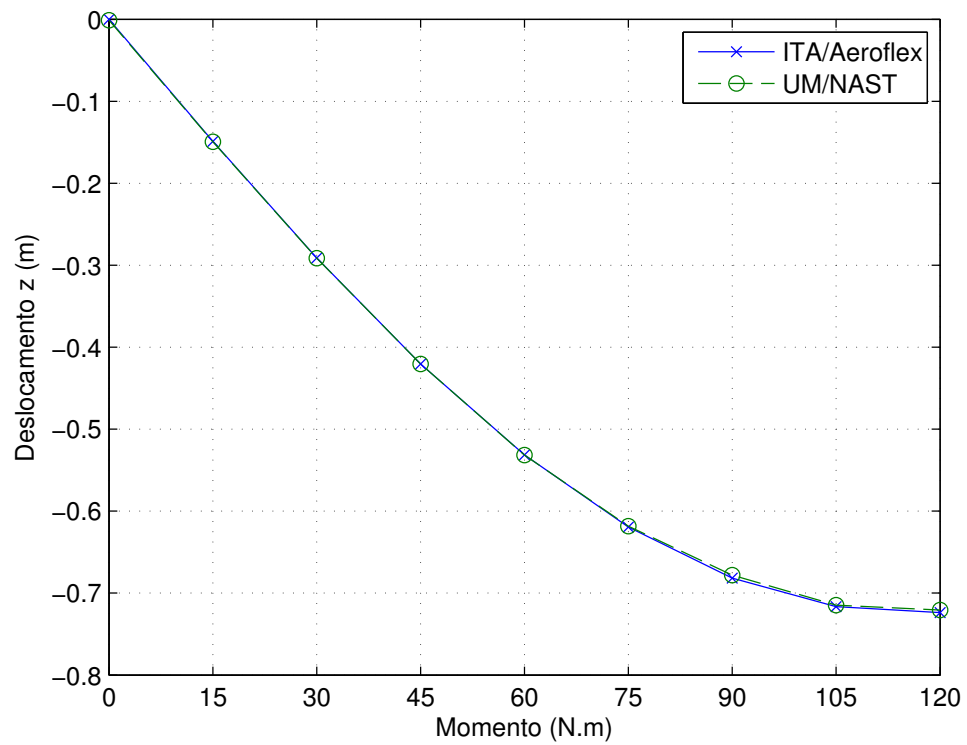


FIGURA 5.6 – Deslocamento da ponta da asa no eixo z para aplicação de um momento concentrado

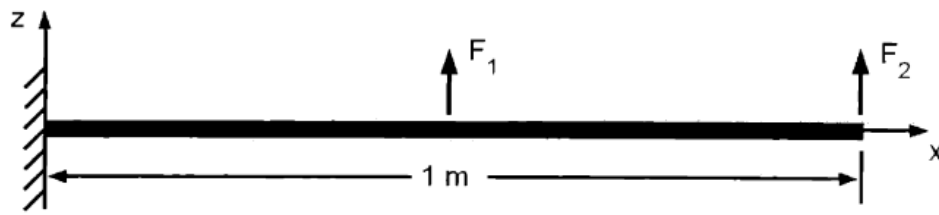


FIGURA 5.7 – Viga modelada com duas forças concentradas aplicadas - (BROWN, 2003)

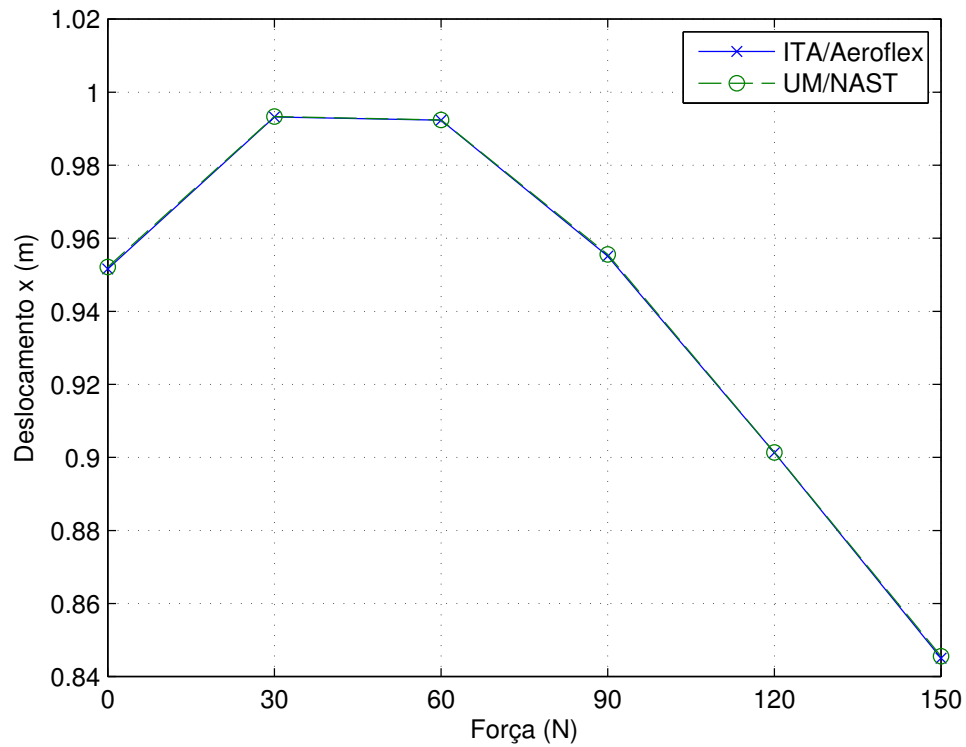


FIGURA 5.8 – Deslocamento da ponta da asa no eixo x para aplicação de duas forças concentradas

- $F(t) = 10 \sin(20t)$
- $F(t) = 10 \sin(50t)$
- $F(t) = 10 \sin(55.6t)$

É possível obter as frequências naturais de oscilação da estrutura, para isso, basta analisar os autovalores da seguinte matriz estrutural:



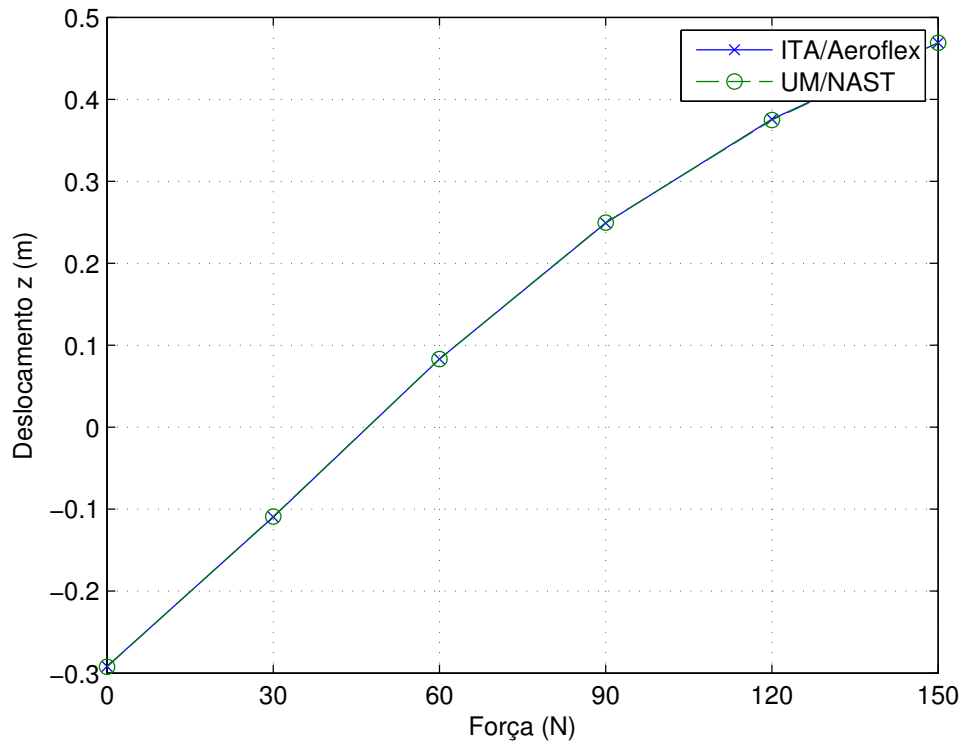


FIGURA 5.9 – Deslocamento da ponta da asa no eixo z para aplicação de duas forças concentradas

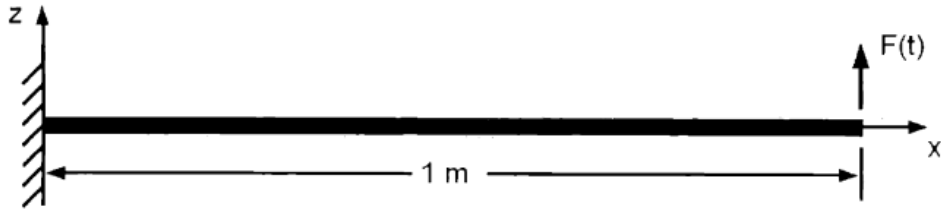
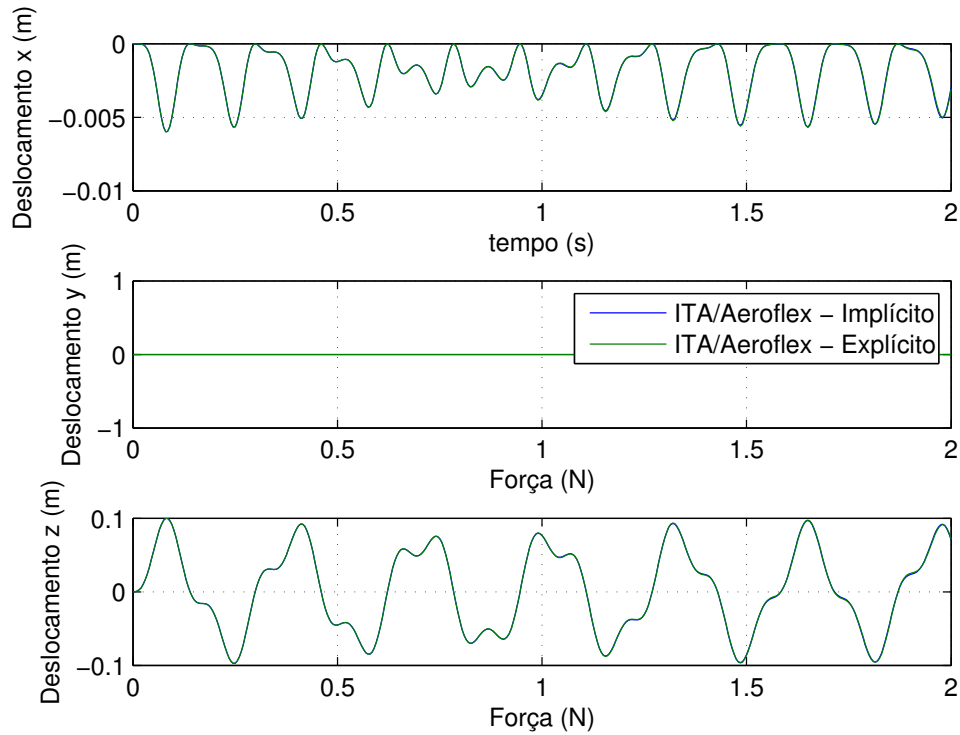


FIGURA 5.10 – Viga modelada com força dependente do tempo aplicada na ponta - (BROWN, 2003)

$$M_{FF}^{-1}K_{FF} \quad (5.1)$$

Para a viga em questão, a primeira frequência natural obtida é de aproximadamente 55.6 (valor também obtido por Brown (2003)). Ao aplicar uma força oscilatória de frequência próxima à frequência natural, podemos perceber a ocorrência de um fenômeno de ressonância. Os resultados das simulações para os três casos são apresentados nas Figuras

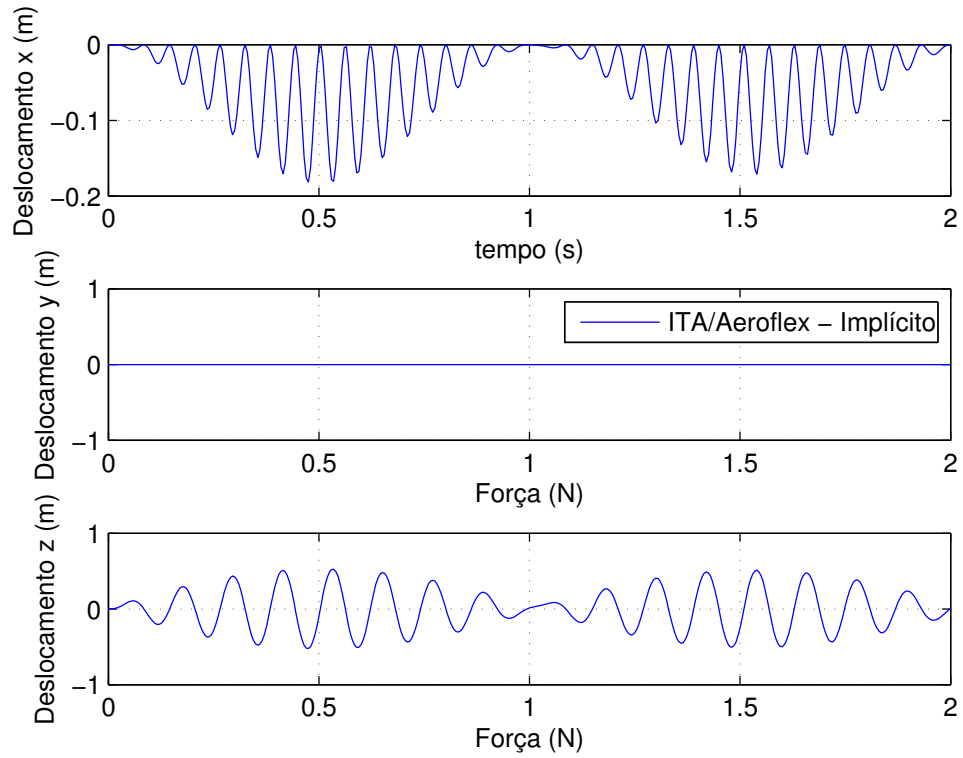
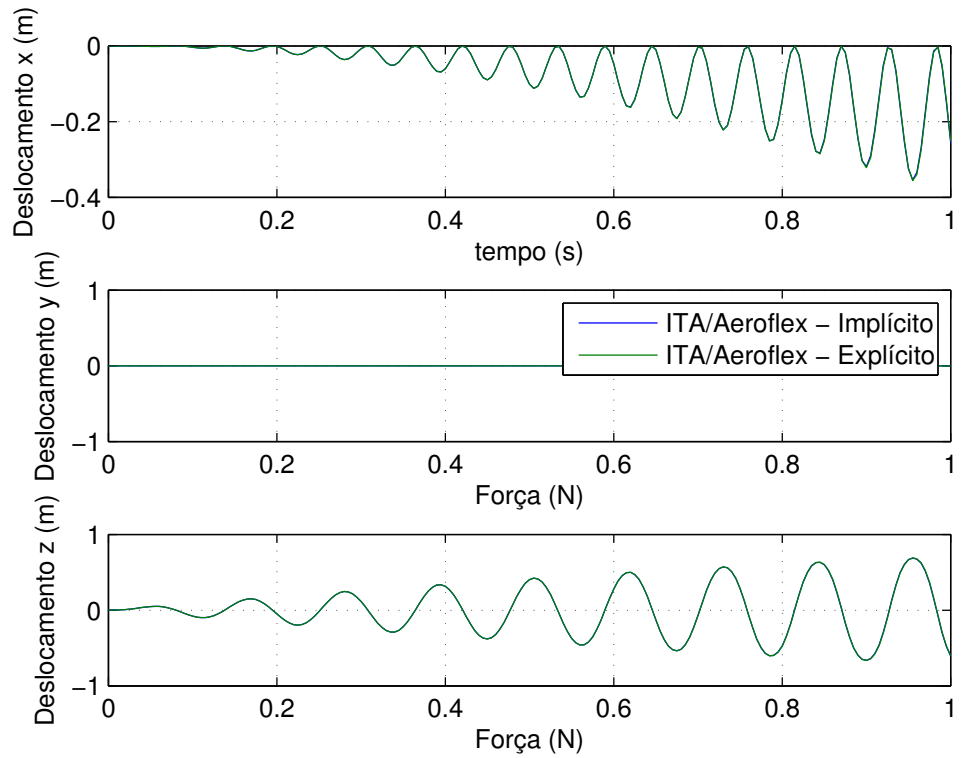
FIGURA 5.11 – Deslocamento da ponta da asa para força  $F(t) = 10 \sin 20t$ 

5.11, 5.12 e 5.13. Note que são apresentados dois resultados obtidos utilizando o código AeroFlex: com integração implícita e explícita. A diferença entre as duas metodologias de integração é apresentada na Seção 2.4. Nota-se coerência entre os resultados. Adicionalmente, os resultados estão muito parecidos com o que é apresentado na Ref. (BROWN, 2003).

### 5.3 Validação da interação Estrutura-Aerodinâmica

#### - Problemas de Aeroelasticidade

Para avaliar a consistência da interação entre a dinâmica de estruturas e o modelo aerodinâmico, o código implementado foi utilizado para estudos de aeroelasticidade, buscando determinar a velocidade e frequência de flutter e comparação com resultados da literatura.

FIGURA 5.12 – Deslocamento da ponta da asa para força  $F(t) = 10 \sin 50t$ FIGURA 5.13 – Deslocamento da ponta da asa para força  $F(t) = 5 \sin 55.6t$

### 5.3.1 Asa de Goland

A asa de Goland é bastante utilizada para fins de validação de softwares de aeroelasticidade (HADDADPOUR; FIROUZ-ABADI, 2006; BROWN, 2003; GOLAND, 1945). Trata-se de uma asa engastada de planta retangular, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 5.2.

TABELA 5.2 – Propriedades da asa de Goland - (BROWN, 2003)

Comprimento	20 ft
Corda	6 ft
Massa por unidade de comprimento	0.746 slug/ft
Posição do eixo elástico (em relação ao bordo de ataque)	33% da corda
Posição do centro de gravidade (em relação ao bordo de ataque)	44% da corda
Inércia de massa $I_{11}$ <sup>1</sup>	1.943 slug.ft <sup>2</sup> /ft
Inércia de massa $I_{33}$	1.943 slug.ft <sup>2</sup> /ft
Rigidez torcional $K_{22} = GJ$	$2.39 \times 10^6$ lb.ft <sup>2</sup>
Rigidez flexional $K_{33} = EI_{yy}$	$23.65 \times 10^6$ lb.ft <sup>2</sup>
Coefficiente de amortecimento $\alpha$	0

Variando a velocidade aerodinâmica, linearizando as equações do movimento e determinando os autovalores, pode-se estudar a estabilidade do sistema (conforme explicações nas Seções 2.4 e 3.5.3). A Figura 5.14 apresenta a variação da maior parte real entre os autovalores da matriz  $A$  do sistema em função da velocidade aerodinâmica. Para velocidades em que algum dos autovalores possui parte real positiva, temos uma situação de instabilidade. A parte imaginária desse mesmo autovalor permite determinar a frequência de oscilação associada ao modo instável. A figura apresenta a velocidade a partir da qual o sistema torna-se instável, bem como a frequência.

<sup>1</sup>Considera-se que a inércia de massa  $I_{22}$  é pequena em relação à  $I_{33}$ , sendo por esse motivo desprezada. A rigidez extensional e de flexão em torno do eixo  $z$  são consideradas muito grandes ( $K_{11}$  e  $K_{44}$ ).

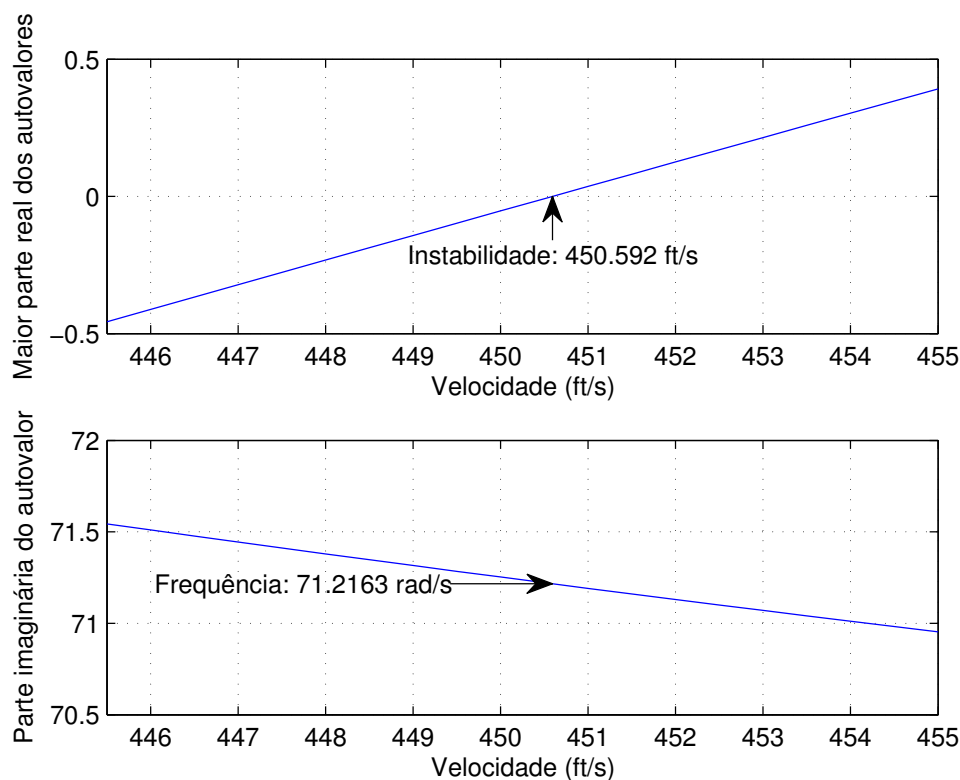


FIGURA 5.14 – Determinação da velocidade de flutter para a asa de Golang utilizando aerodinâmica não estacionária (nível do mar)

Na Figura 5.14, utilizou-se o modelo aerodinâmico não estacionário (Seção 2.3.1.3). No Capítulo 2, foram apresentados outros modelos aerodinâmicos: quase estacionário e quase estacionário com massa aparente. Haddadpour e Firouz-Abadi (2006) comparam a velocidade de flutter da asa de Golang utilizando essas três diferentes abordagens para o modelo aerodinâmico. Brown (2003) também utiliza a asa de Golang para validação, obtendo a velocidade de flutter para diferentes altitudes. Os resultados da literatura foram repetidos utilizando o AeroFlex e são apresentados na Tabela 5.3. Nota-se que os resultados aqui obtidos estão coerentes.

### 5.3.2 Asa muito flexível

A asa de Golang possui rigidez moderada. Dessa forma, as deflexões estruturais não lineares não afetam de maneira muito relevante as características de estabilidade do sis-

TABELA 5.3 – Velocidade e frequência de flutter para a asa de Goland

Altitude	Modelo Aerodinâmico	Resultados					
		AeroFlex		Haddadpour e Firouz-Abadi		Brown	
		$V$ (ft/s)	$f$ (rad/s)	$V$ (ft/s)	$f$ (rad/s)	$V$ (ft/s)	$f$ (rad/s)
0 ft	QE1 <sup>a</sup>	116	94	110	93	-	-
	QE2	214	88	203	88	-	-
	NE	451	71.2	451	71	447	69.7
$20 \times 10^3$ ft	NE	581	69.7	-	-	574	68.1

<sup>a</sup>QE1: Quase estacionário sem termos de massa aparente; QE2: Quase estacionário com termos de massa aparente; NE: Não estacionário

tema aeroelástico. Com o objetivo de fazer um estudo aeroelástico de asas muito flexíveis, Patil (1999) sugeriu uma asa de grande alongamento e muito flexível, típica de aeronaves HALE, cujas propriedades são apresentadas na tabela 5.4.

Em asas de grande flexibilidade como essa, as deflexões estruturais de equilíbrio afetam consideravelmente a velocidade de instabilidade. Para cada velocidade, deve-se calcular o equilíbrio não linear estrutural e, em seguida, linearizar as equações do movimento. As Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam os resultados de velocidade e frequência de flutter obtidos para essa asa muito flexível considerando duas situações: primeiramente, a velocidade de flutter é calculada sem considerar as deformações estruturais; em seguida, para cada velocidade, calcula-se o equilíbrio não linear.

Nota-se uma diferença extremamente relevante na velocidade de flutter, que passa de 32.6 m/s na análise usual para 23.4 m/s quando se faz a linearização em torno de um ponto de equilíbrio estrutural não linear. Para o caso aqui testado, o ângulo de ataque da asa na raiz é nulo: dessa forma, as deformações estruturais de equilíbrio devem-se apenas à gravidade. A deformação da asa em relação ao equilíbrio para a condição de flutter calculada é apresentada na Figura 5.15.

TABELA 5.4 – Propriedades da asa Muito Flexível - (PATIL, 1999)

Comprimento	16 m
Corda	1 m
Massa por unidade de comprimento	0.75 kg/m
Posição do eixo elástico (em relação ao bordo de ataque)	50% da corda
Posição do centro de gravidade (em relação ao bordo de ataque)	50% da corda
Inércia rotacional $I_{11}$	$0.1 \text{ kg.m}^2/\text{m}$
Inércia $I_{33}$	$0.1 \text{ kg.m}^2/\text{m}$
Rigidez torcional $K_{22} = GJ$	$1 \times 10^4 \text{ N.m}^2$
Rigidez flexional $K_{33} = EI_{yy}$	$2 \times 10^4 \text{ N.m}^2$
Rigidez flexional $K_{44} = EI_{zz}$	$4 \times 10^6 \text{ N.m}^2$
Coefficiente de amortecimento $\alpha$	0.01%
Altitude de voo utilizada	20 km ( $\rho = 0.0889 \text{ kg/m}^3$ )

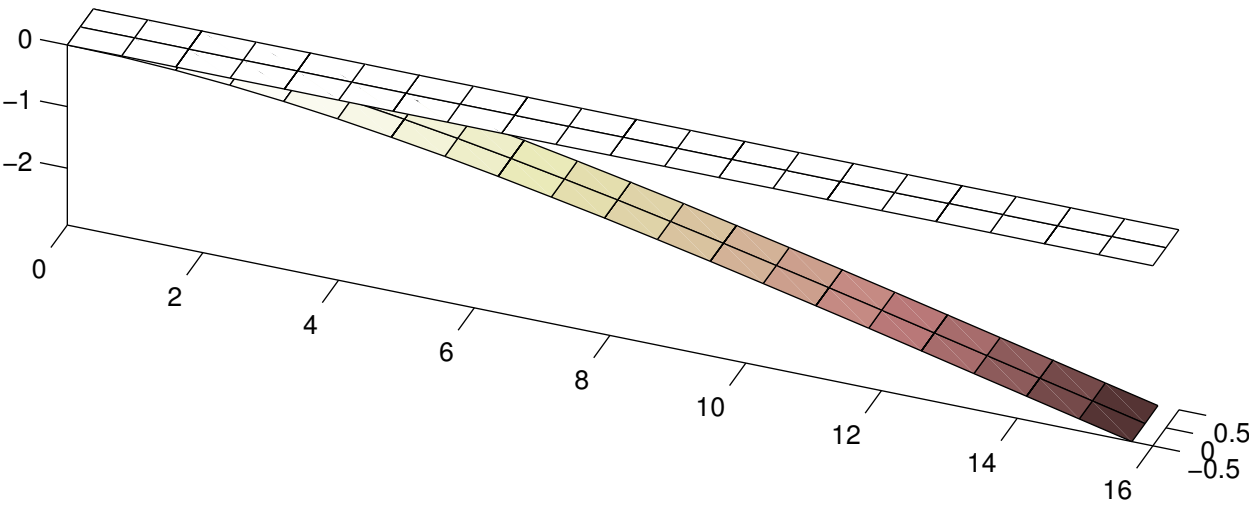


FIGURA 5.15 – Asa muito flexível deformada (devido à gravidade) e não deformada

TABELA 5.5 – Velocidade e frequência de flutter para a asa muito flexível - asa sem deformações

	AeroFlex	Patil, Brown e Su
Velocidade (m/s)	32.6	32.2
Frequência (rad/s)	22.6	22.6

TABELA 5.6 – Velocidade e frequência de flutter para a asa muito flexível - asa deformada (equilíbrio não linear)

	AeroFlex	Su
Velocidade (m/s)	23.4	23.2
Frequência (rad/s)	12.2	10.3

## 5.4 Validação do modelo de aeronave completa

Com o objetivo de validar a interação entre as forças externas (que são calculadas pelo AeroFlex como forças distribuídas ao longo da estrutura flexível ou forças pontuais nos nós) com o movimento de corpo rígido, um modelo de aeronave foi proposto. Para essa aeronave, foram calculados os coeficientes aerodinâmicos de corpo rígido, permitindo implementar uma dinâmica de corpo rígido baseada na formulação clássica de dinâmica de voo (STEVENS; LEWIS, 2003). Utilizando uma estrutura com rigidez elevada, espera-se que a dinâmica de voo implementada no AeroFlex seja idêntica à obtida a partir da simulação rígida. Com isso, confirma-se que a passagem dos cálculos aerodinâmicos feito pela teoria das faixas para forças e momentos no sistema de coordenadas do corpo está coerente.

A aeronave empregada utiliza como semi-asa a estrutura muito flexível apresentada na seção anterior. Em relação aos dados apresentados na Tabela 5.4, a única diferença é que a posição do centro de gravidade foi modificado, para garantir a estabilidade estática longitudinal da aeronave. A nova posição do centro de gravidade é em 20% da corda



(medida a partir do bordo de ataque). Além disso, uma massa concentrada de 10 kg foi posicionada no sistema de coordenadas do corpo (que, particularmente nesse caso, para uma condição de deformação nula, coincide com o centro de gravidade da aeronave<sup>1</sup>).

Um motor com tração inversamente proporcional à velocidade de voo ( $n_V = -1$ ) é adicionado preso ao sistema de coordenadas do corpo (nó central). Para as simulações aqui apresentadas, foram utilizadas semi-asas com 3 elementos estruturais cada.

Os dados aerodinâmicos dos perfis da asa são apresentados na Tabela 5.7.

TABELA 5.7 – Propriedades aerodinâmicas do perfil utilizado na asa voadora

$C_{l_\alpha}$	$2\pi$ /rad
$\alpha_0$	$-5^\circ$
$C_{d0}$	0.02
$C_{l_\delta}$	0.01 /°
$C_{m_\delta}$	-0.1 /°

O modelo de aeronave rígida foi obtido através da integração das propriedades distribuídas ao longo da aeronave. Para o cálculo das forças de sustentação, arrasto e momento, por exemplo, foram empregadas as mesmas expressões apresentadas na Seção 2.3.1.1, exceto pela multiplicação das equações pela envergadura da asa (obtendo então as forças totais). As propriedades de inércia de massa apresentadas na Tabela 5.4 são dadas por unidade de comprimento: para obter o valor total em relação ao CG, basta multiplicá-los pela envergadura da asa e utilizar o teorema dos eixos paralelos.

A Tabela 5.8 apresenta os resultados da determinação do equilíbrio. São apresentados resultados para duas aeronaves distintas modeladas no AeroFlex: uma cujas propriedades de rigidez são exatamente as da Tabela 5.4 ( $K=1$ ) e outra cujas propriedades de rigidez foram multiplicadas por 1000 ( $K=1000$ ). Nota-se que a aeronave de rigidez elevada

<sup>1</sup>O sistema de coordenadas do corpo foi posicionado de tal forma a coincidir com o centro de gravidade da seção central da asa.

apresenta resultados muito próximos aos obtidos na dinâmica de corpo rígido.

TABELA 5.8 – Equilíbrio

	Rígida	AeroFlex K=1000	AeroFlex K=1
Tração (N)	6.1480	6.1480	6.1458
Deflexão do profundor (graus)	-0.5401	-0.5401	-0.5440
Ângulo de ataque (graus)	4.8186	4.8186	4.4404

Para os três modelos diferentes, os autovalores obtidos a partir da linearização das equações e associados ao movimento de corpo rígido são apresentados na Tabela 5.9. Novamente, como esperado, nota-se que para uma rigidez elevada, os resultados do AeroFlex são muito próximos dos resultados da dinâmica de corpo rígido.

TABELA 5.9 – Autovalores

	Dinâmica Rígida	AeroFlex K=1000	AeroFlex K=1
Período curto	$-7.4988 \pm 8.1802i$	$-7.4986 \pm 8.1827i$	$-7.8820 \pm 8.4566i$
Período longo	$-0.0111 \pm 0.8080i$	$-0.0111 \pm 0.8080i$	$-0.0131 \pm 0.7904i$

As figuras 5.16, 5.17, 5.18 e 5.19 mostram a resposta de uma simulação do movimento da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio. São apresentados resultados obtidos através do AeroFlex para os dois modelos de aeronave, bem como para a dinâmica de corpo rígido.

As figuras 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 mostram as respostas de uma simulação para uma entrada doublet no profundor da aeronave. Novamente, são apresentados os resultados obtidos no AeroFlex e da dinâmica de corpo rígido.

Mais dois testes de validação foram feitos, dessa vez visando estudar o movimento de rolamento da aeronave. Os momentos de rolamento de corpo rígido podem ser estimados facilmente, bastando considerar que a velocidade de rolamento induz um ângulo de ataque aparente em cada seção da asa. Obviamente, a contribuição de sustentação devido ao

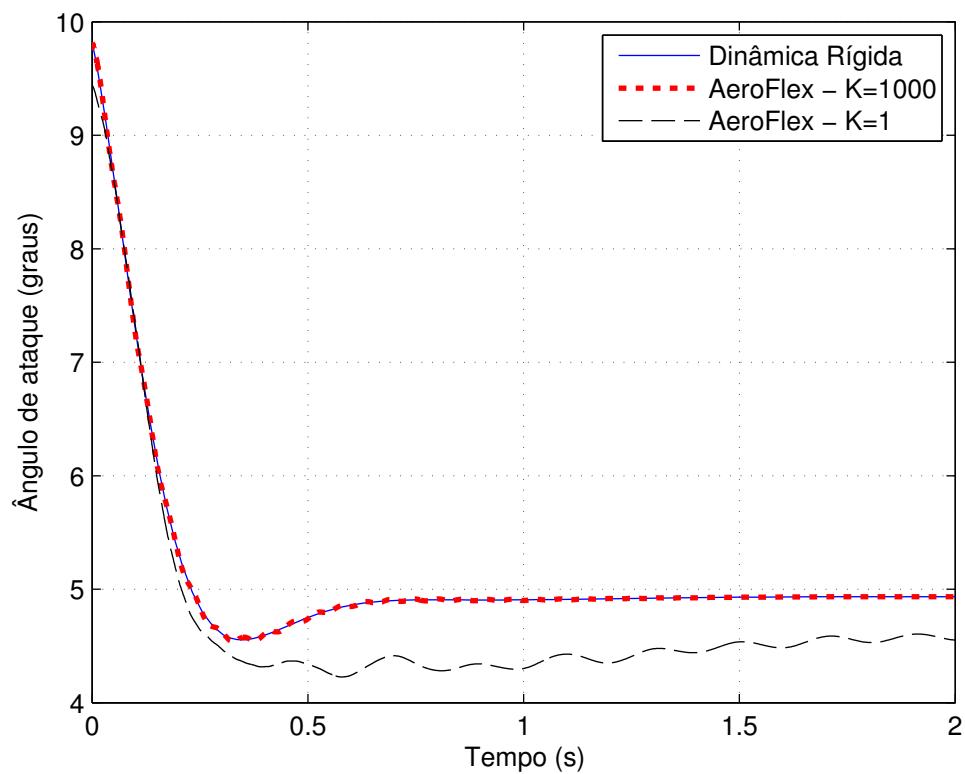


FIGURA 5.16 – Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio

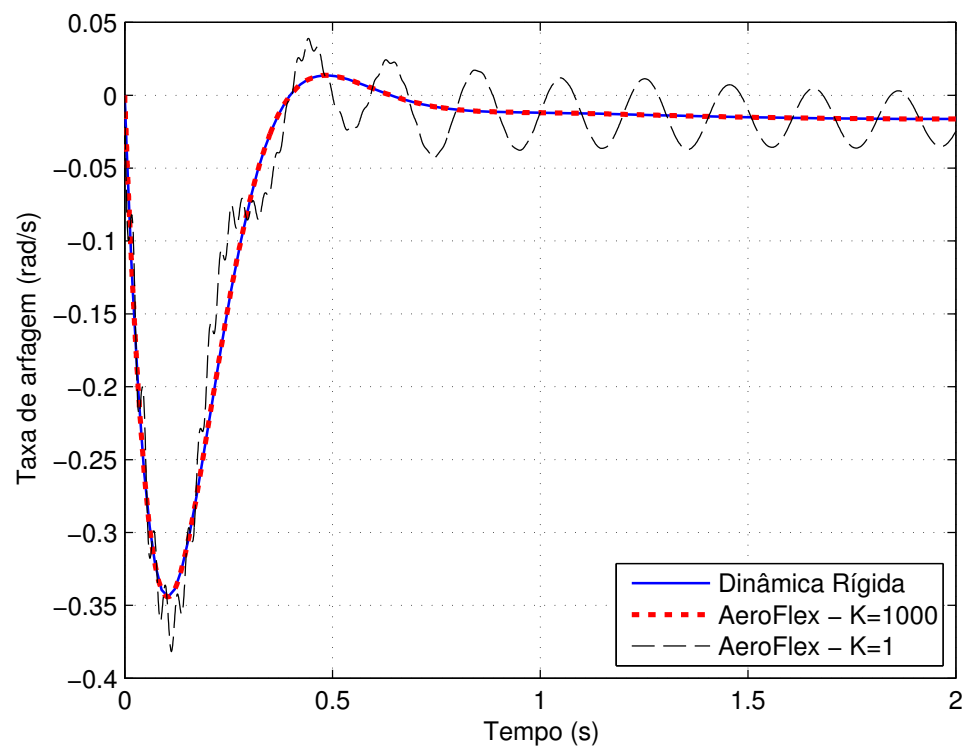


FIGURA 5.17 – Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio

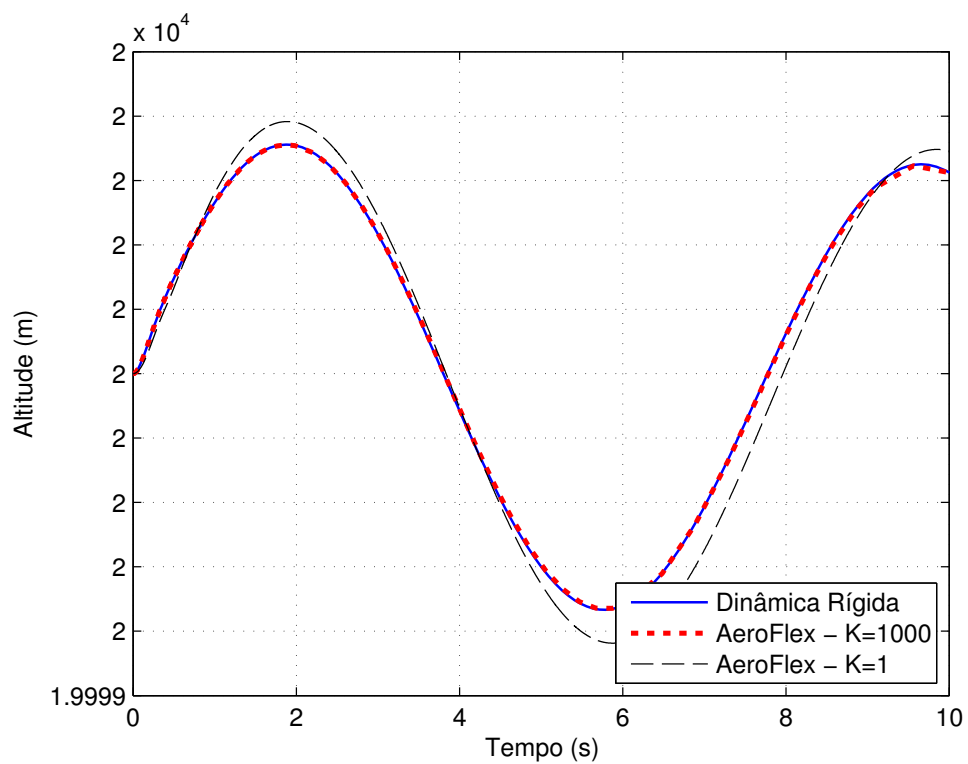


FIGURA 5.18 – Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio

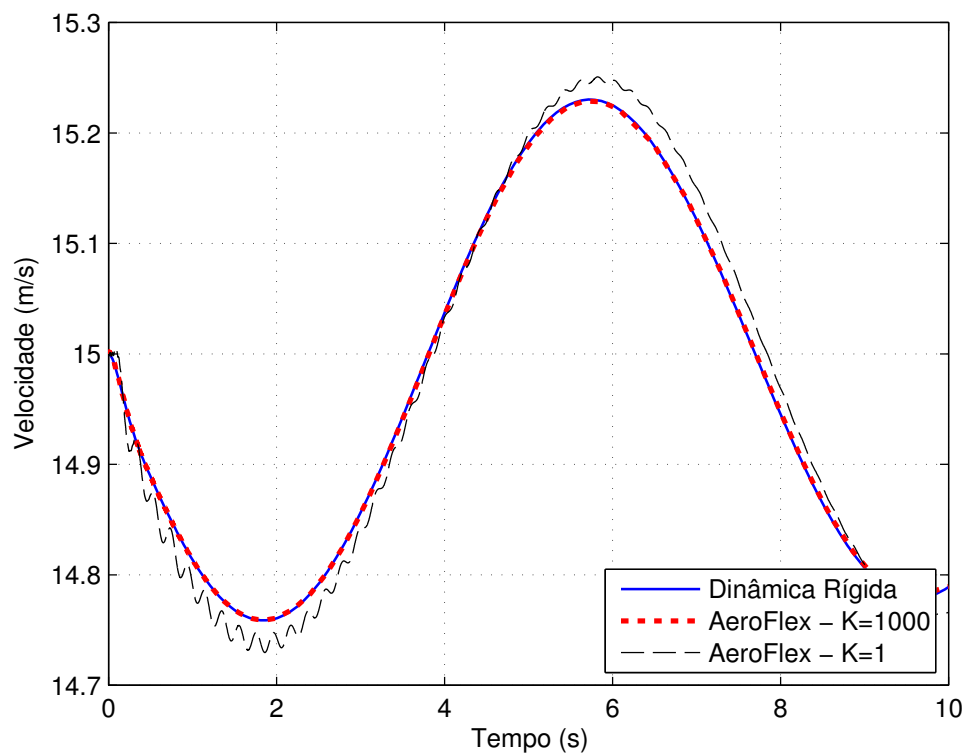


FIGURA 5.19 – Simulação da resposta da aeronave para um ângulo de ataque inicial perturbado em relação ao equilíbrio

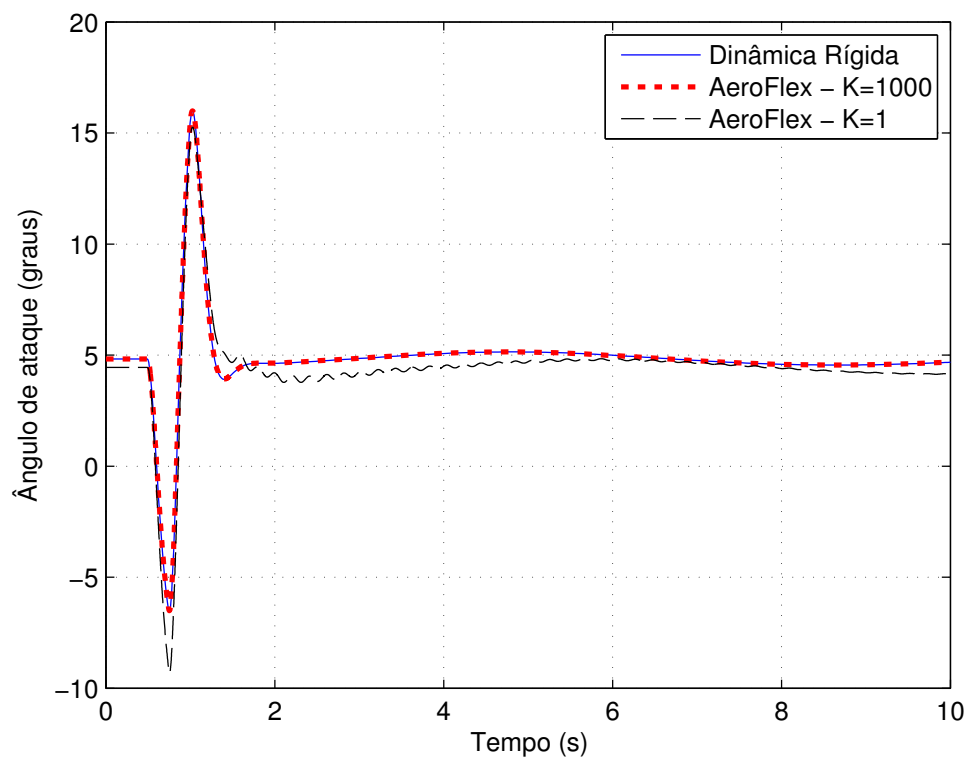


FIGURA 5.20 – Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundor

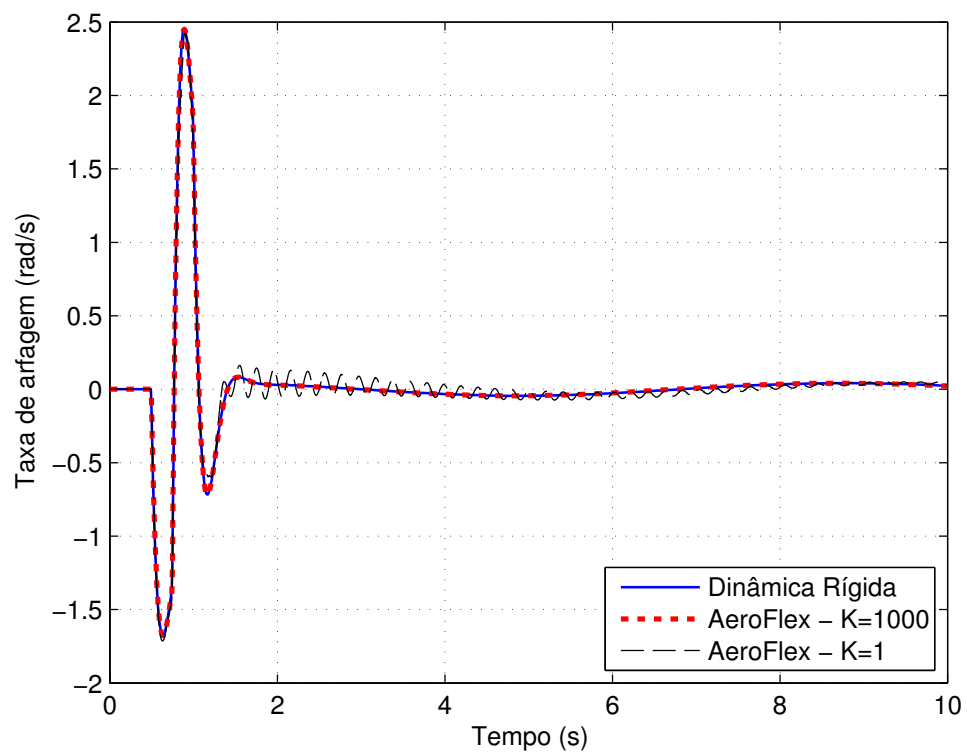


FIGURA 5.21 – Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundor

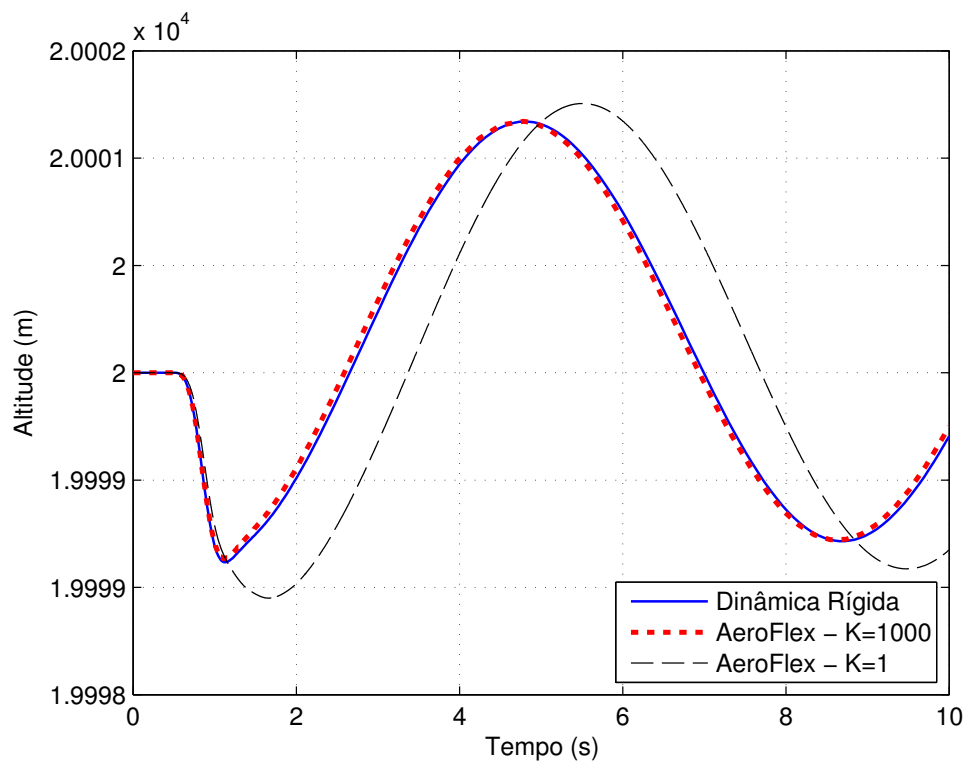


FIGURA 5.22 – Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundor

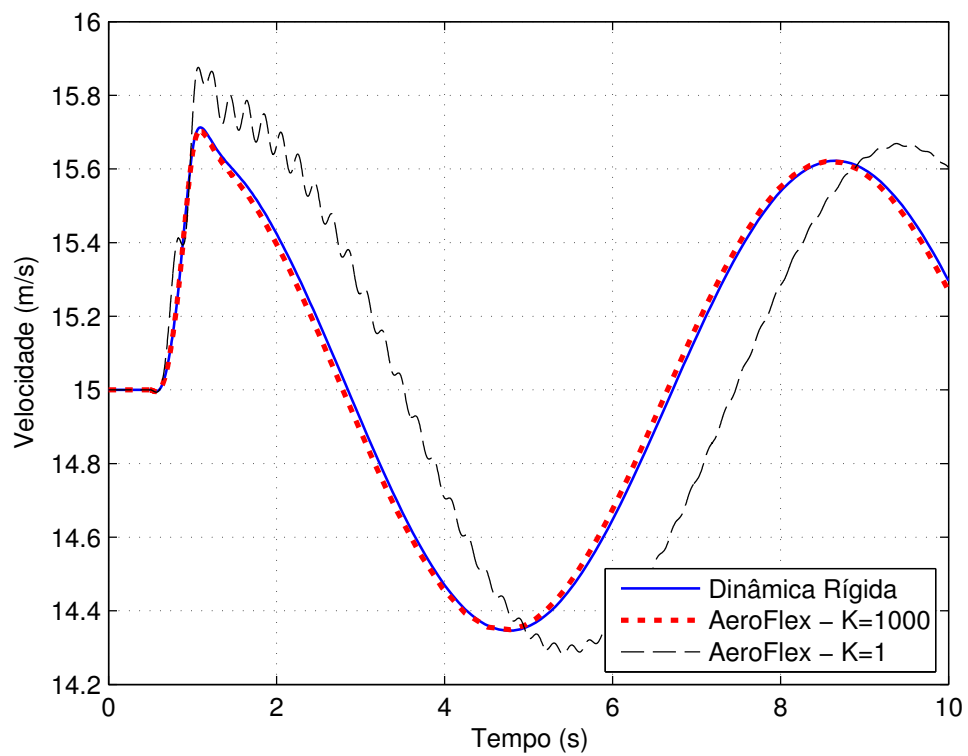


FIGURA 5.23 – Simulação da resposta da aeronave para uma entrada doublet no profundor

movimento de rolamento é nula; entretanto, integrando as contribuições de momento em relação ao CG para cada ponto da asa, pode-se determinar o momento de rolamento devido à taxas de rolamento da aeronave. De maneira análoga, é possível determinar o momento de rolamento devido à deflexões assimétricas das superfícies de controle do avião.

A figura 5.24 apresenta os resultados de simulações da resposta autônoma da aeronave para uma condição inicial de taxa de rolamento igual à 10 graus/s. Nota-se que os resultados obtidos através do AeroFlex para uma aeronave de grande rigidez são bastante consistentes com o previsto para aeronaves rígidas.

A figura 5.25 apresenta os resultados de simulações da resposta da aeronave inicialmente em condição de equilíbrio, perturbada por uma deflexão assimétrica das superfícies de controle do avião. Novamente, os resultados obtidos através do AeroFlex coincidem com o esperado.

Note que não é apresentado o resultado da aeronave flexível ( $K=1$ ). Isso porque ao utilizar a aeronave flexível, a resposta dinâmica torna-se muito diferente, dificultando o objetivo principal que é a validação do AeroFlex com o modelo rígido. Resultados dos efeitos da flexibilidade nas deflexões de aileron para essa aeronave são apresentados no próximo capítulo (Seção 6.5).

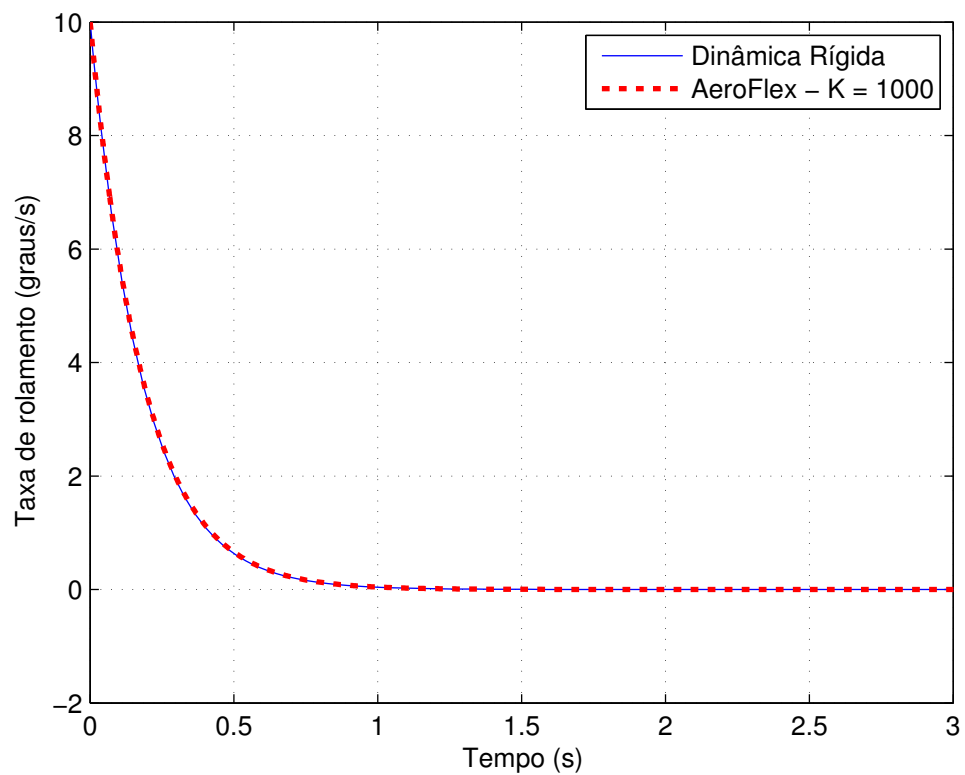


FIGURA 5.24 – Resposta da aeronave para uma condição inicial de taxa de rolamento

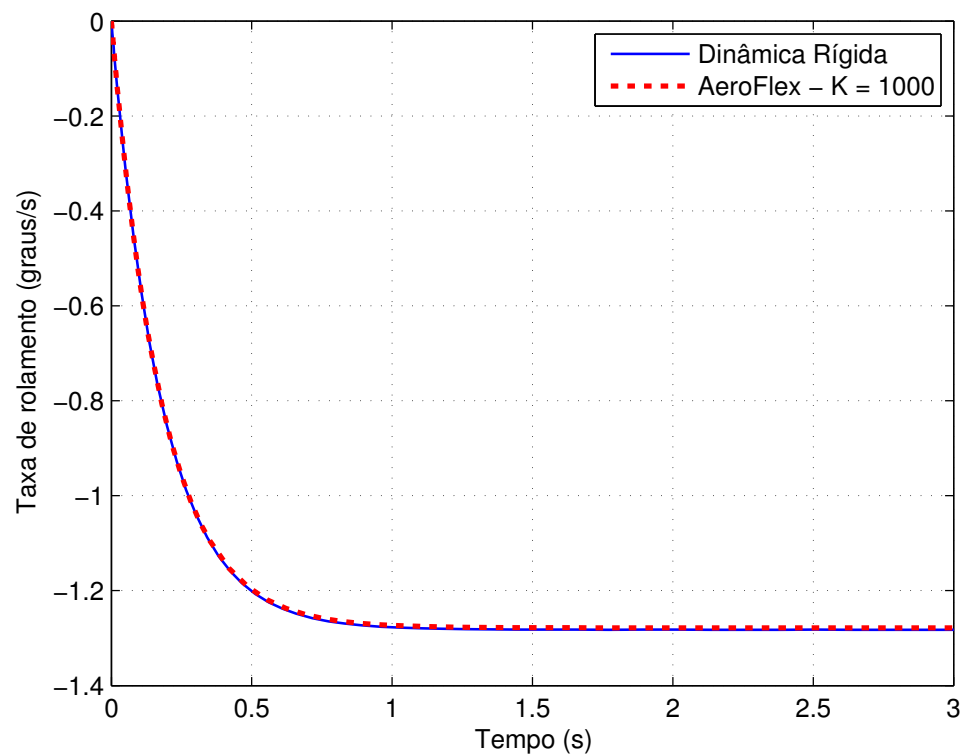


FIGURA 5.25 – Resposta da aeronave para uma deflexão degrau de aileron



## 6 Resultados

Este capítulo tem dois objetivos principais. O primeiro é analisar como os resultados de cálculo de equilíbrio e da resposta dinâmica no estudo de aeronaves muito flexíveis são afetados pelos seguintes aspectos:

- Número de elementos estruturais;
- Modelo aerodinâmico empregado;
- Utilização de matrizes Jacobianas estruturais constantes ou variáveis.

Em seguida, deseja-se verificar como os estados de corpo rígido influenciam a estabilidade aeroelástica da aeronave. Nota-se que pode haver instabilidade de baixa frequência mesmo antes da velocidade de flutter clássico.

Adicionalmente, é apresentado um breve estudo de reversão de comandos de aileron. A aeronave em estudo, por ser muito flexível, apresenta o fenômeno de reversão de comandos. Verificou-se numericamente como esse fenômeno é afetado pela velocidade e rigidez da aeronave.

A aeronave-modelo empregada neste capítulo consiste em uma asa voadora de grande alongamento. Os dados da semi-asa foram apresentados anteriormente na Tabela 5.4. Uma massa concentrada foi posicionada na seção central da asa, a frente do bordo de

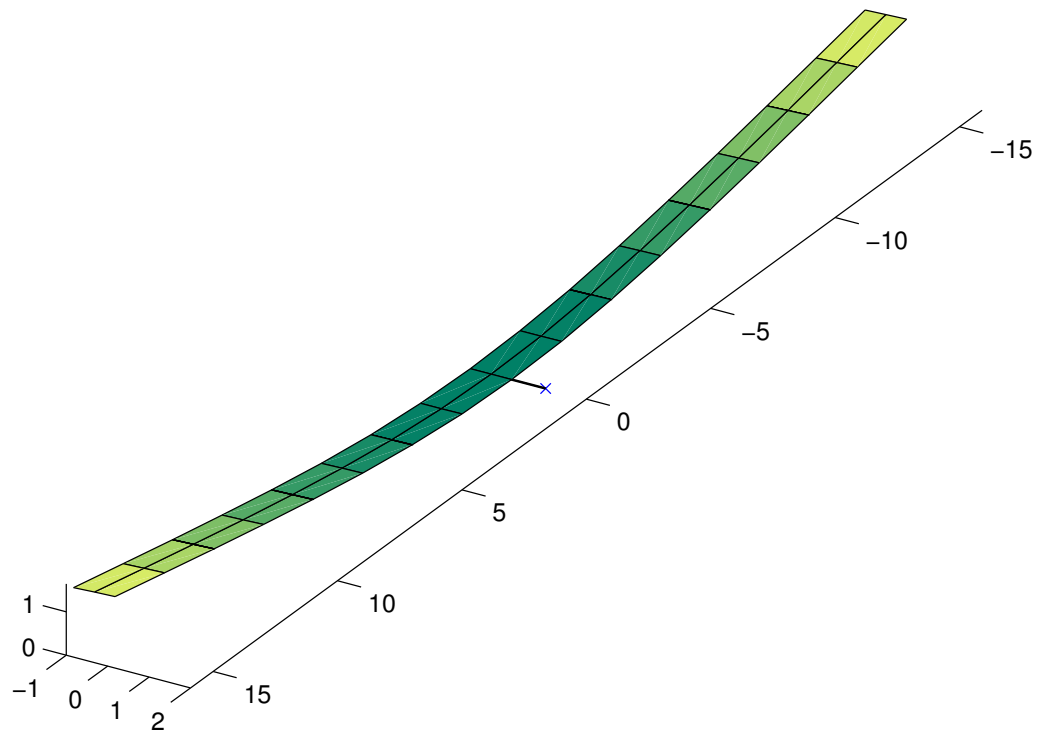


FIGURA 6.1 – Aeronave-modelo: Asa voadora

ataque, de tal forma que o centro de gravidade tenha ficado na posição 20% da corda em relação ao bordo de ataque (garantindo assim a estabilidade estática da aeronave). A massa concentrada representa o motor e carga útil da aeronave.

Ao longo do Capítulo, foram utilizadas configurações de aeronave baseadas nesse modelo, com suas matrizes de rigidez multiplicadas por fatores que visam simular configurações de maior e menor rigidez em relação à aeronave base. Nas Seções 6.1, 6.2 e 6.3, utilizou-se uma configuração com massa concentrada de 10 kg. Na Seção 6.4 foram feitos estudos para diferentes valores de massa concentrada.

A Figura 6.1 apresenta o modelo de aeronave utilizada em sua condição de equilíbrio.

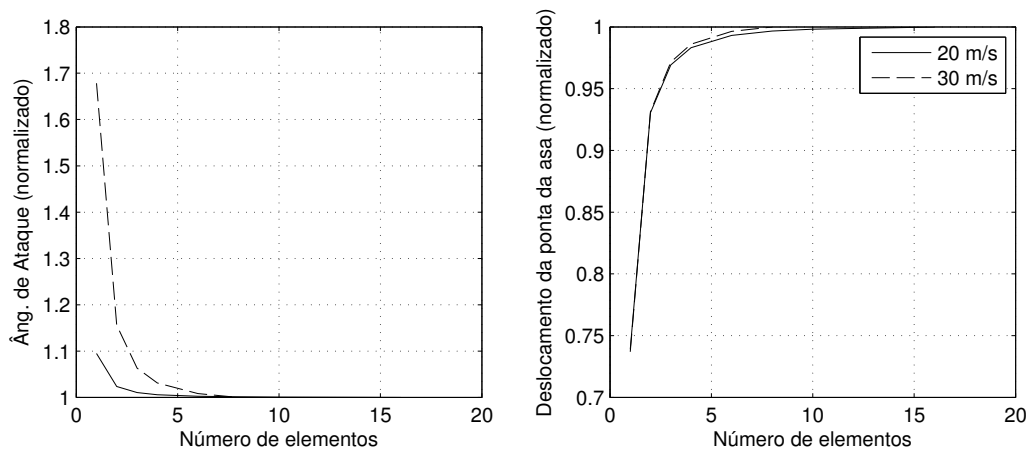


FIGURA 6.2 – Ângulo de ataque e deflexão da ponta da asa de equilíbrio em função do número de elementos (valores normalizados)

## 6.1 Variação do número de elementos

O primeiro estudo realizado foi a verificação de como a escolha do número de elementos estruturais afeta os resultados obtidos. Esse estudo é importante, uma vez que a utilização de muitos elementos torna o procedimento muito lento; por outro lado, a escolha de um número muito pequeno de elementos pode levar a resultados inconsistentes. Além disso, deve-se verificar se os resultados convergem para uma grande quantidade de elementos - caso isso não aconteça, deve haver erro no código.

São apresentados diversos resultados em função do número de elementos de uma semi-asa (ou seja, o número total de elementos do avião é o dobro do valor dos gráficos).

A Figura 6.2 apresenta os resultados de ângulo de ataque e deflexão da ponta da asa de equilíbrio em função do número de elementos. Em seguida, as Figuras 6.3 e 6.4 apresentam os autovalores associados aos movimentos de período longo e período curto, respectivamente. Em todos os casos, observa-se uma clara convergência dos resultados.

As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam a resposta de uma simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado em relação ao equilíbrio. Em seguida, as Figuras 6.5 e 6.6

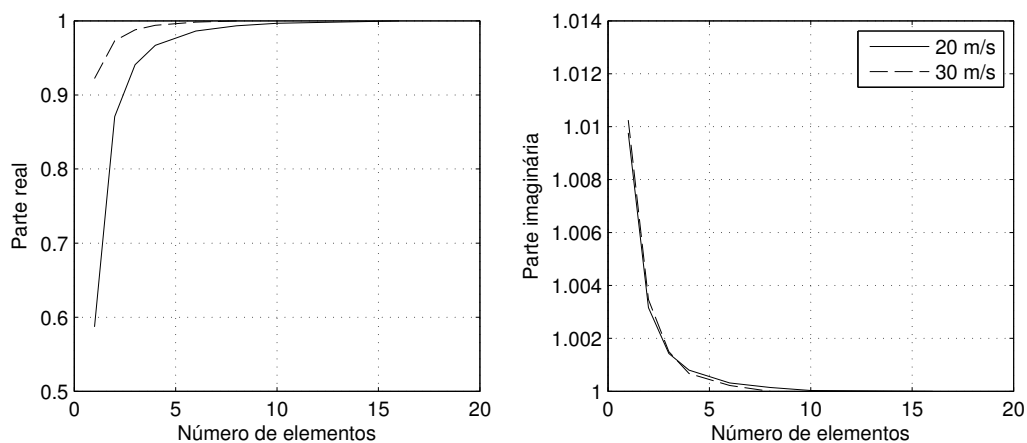


FIGURA 6.3 – Autovalores de período longo em função do número de elementos (valores normalizados)

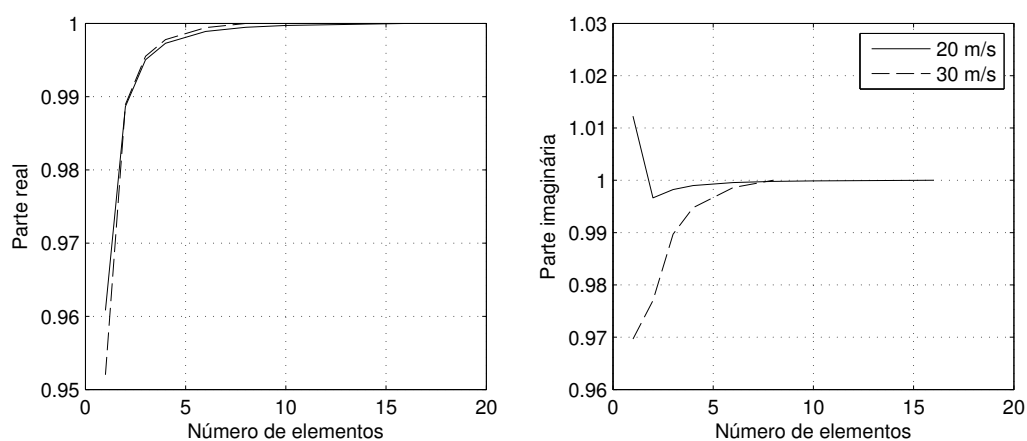


FIGURA 6.4 – Autovalores de período curto em função do número de elementos (valores normalizados)

mostram uma simulação na qual uma entrada do tipo doublet foi aplicada ao profundor da aeronave. São apresentados resultados de deflexão da ponta da asa e taxa de arfagem em função do tempo. Novamente, nota-se convergência dos resultados conforme o número de elementos é incrementado.

A Figura 6.9 mostra o tempo necessário para obter cada um dos resultados desta Seção: equilibrar a aeronave, linearizar as equações do movimento, e fazer as simulações não lineares. Observou-se um grande aumento do tempo de processamento com o número de elementos: para um elemento, o tempo necessário para calcular o equilíbrio é de 21 segundos, 1.13 segundos para a linearização e quase 20 segundos para a simulação não linear. Para 16 elementos, o tempo de cálculo de equilíbrio foi de quase 2 horas e 35 minutos para a linearização numérica. A ferramenta ODE15i foi incapaz de integrar as equações do movimento ao utilizar 16 elementos.

Note que, ao utilizar 16 elementos em cada semi-asa, estamos tratando de 32 elementos estruturais, cada um deles corresponde a 4 estados de deformação. Incluindo os estados aerodinâmicos e de corpo rígido, temos um total de 620 estados. A Seção 7.4.1.1 apresenta várias sugestões para melhorar o tempo de processamento e a robustez dos cálculos.

## **6.2 Modelo aerodinâmico Quase estacionário x Não estacionário**

No Capítulo 5 (Seção 5.3.1) mostrou-se que a velocidade de instabilidade aeroelástica varia muito com o modelo aerodinâmico utilizado. Esta seção tem por objetivo verificar como a escolha do modelo aerodinâmico afeta a resposta dinâmica da aeronave flexível.

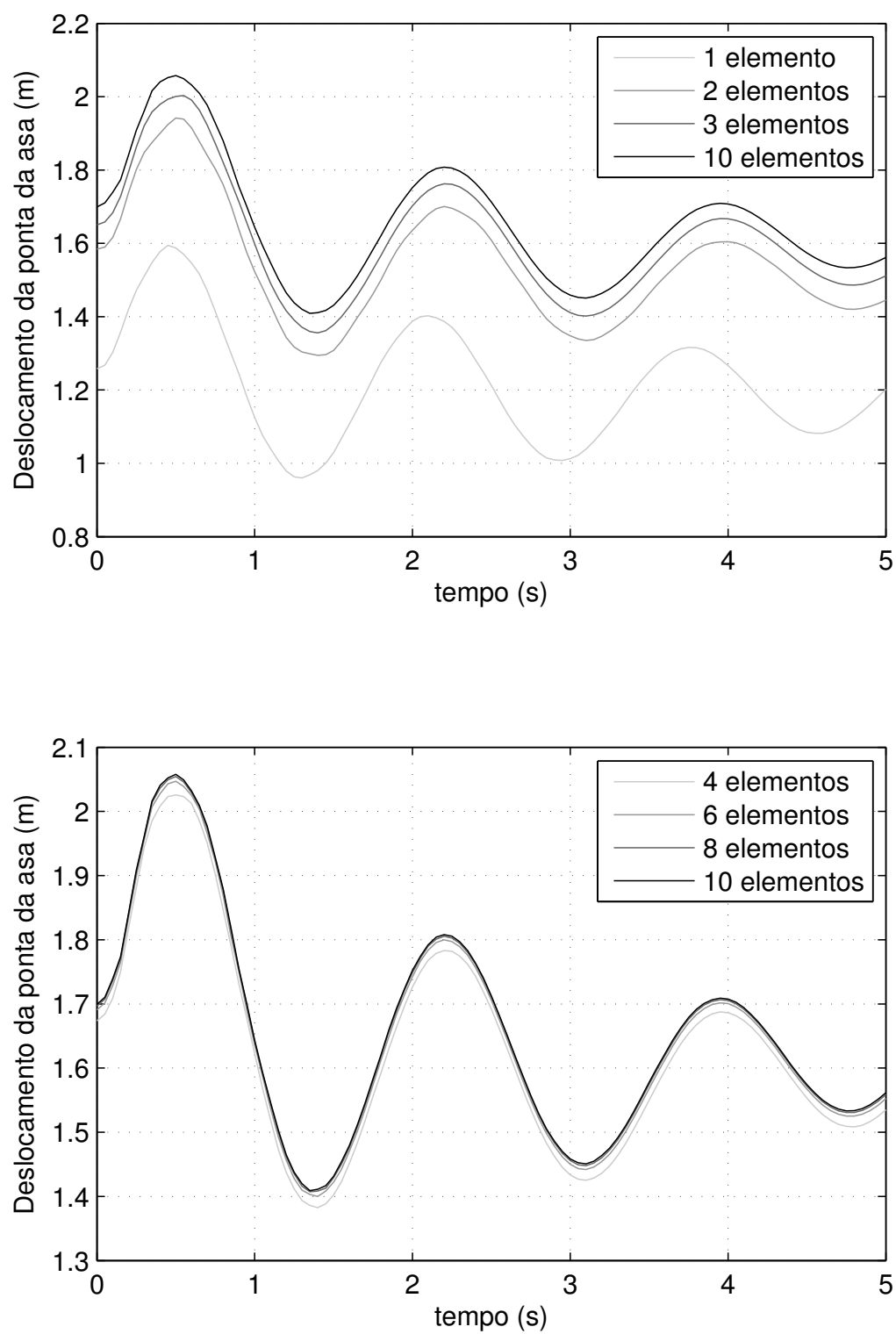


FIGURA 6.5 – Resultados da simulação de ângulo de ataque inicial perturbado para diferentes números de elementos estruturais

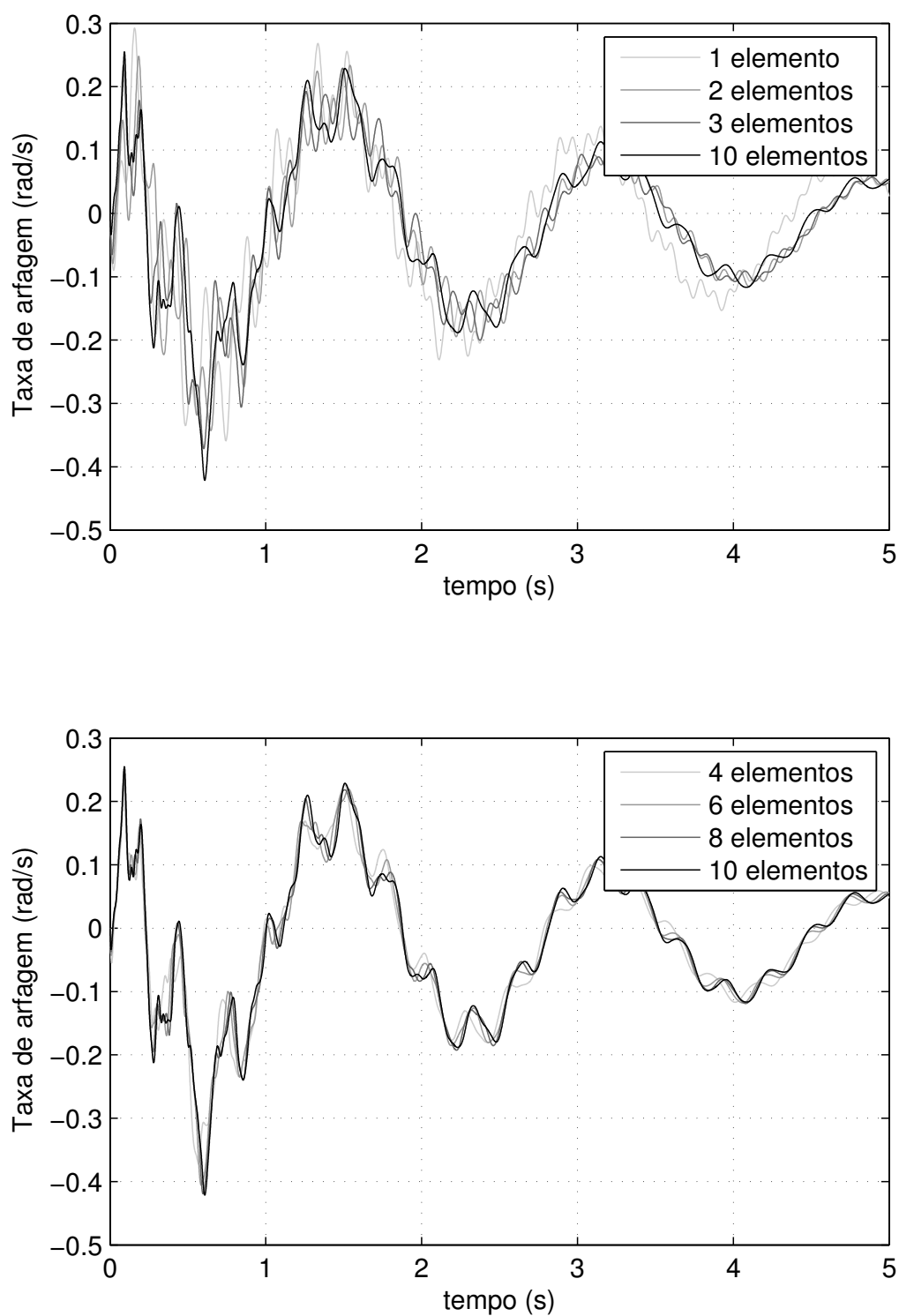


FIGURA 6.6 – Resultados da simulação de ângulo de ataque inicial perturbado para diferentes números de elementos estruturais

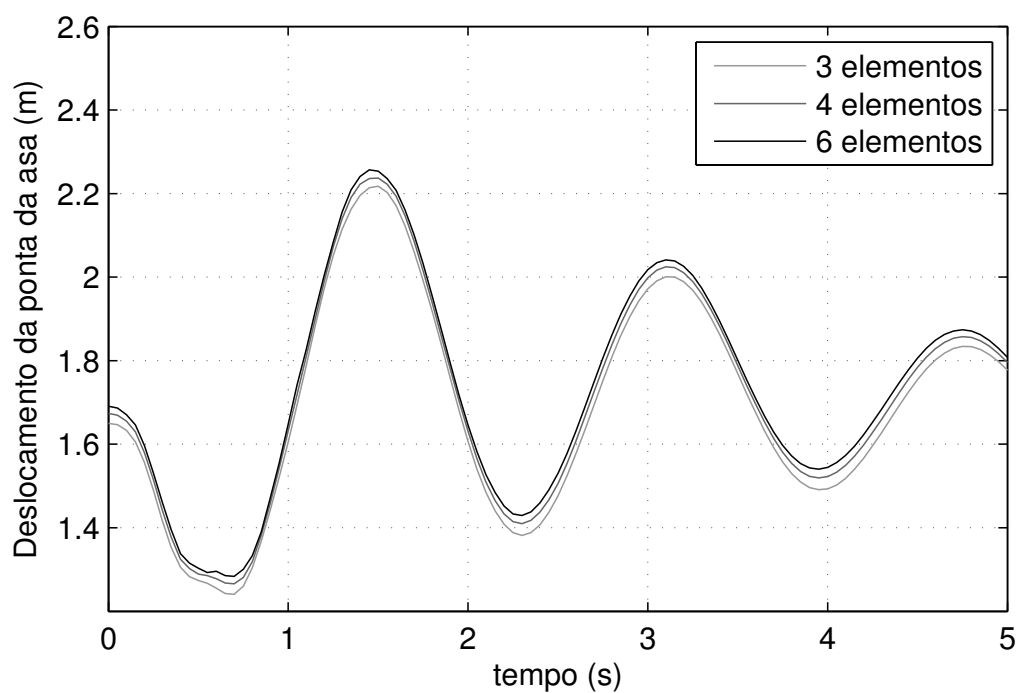
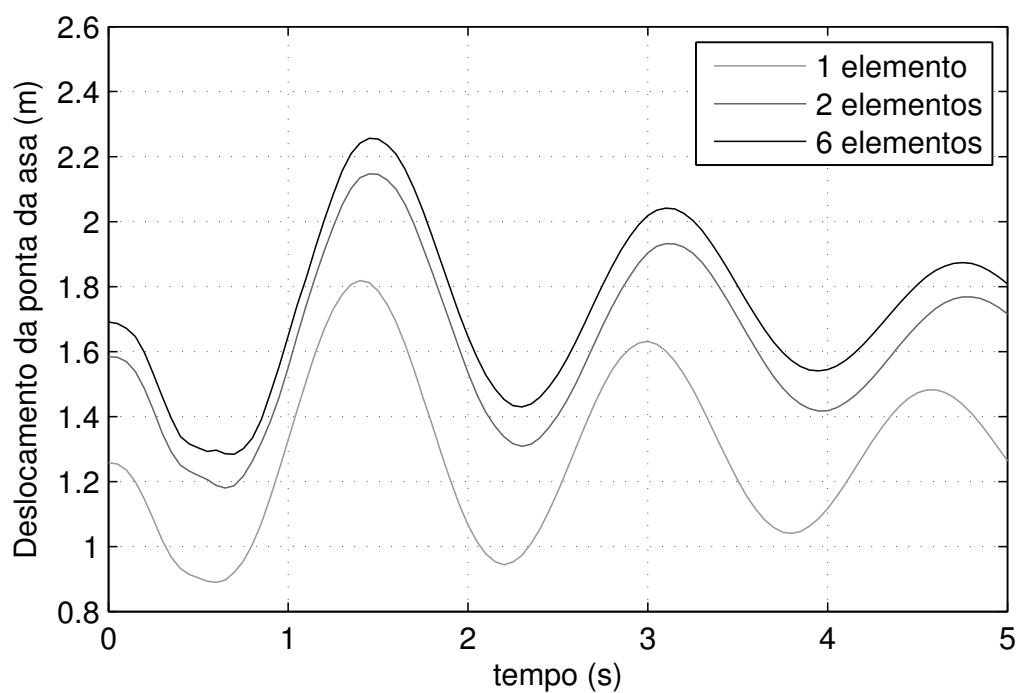


FIGURA 6.7 – Resultados da simulação para entrada doublet no profundor para diferentes números de elementos estruturais



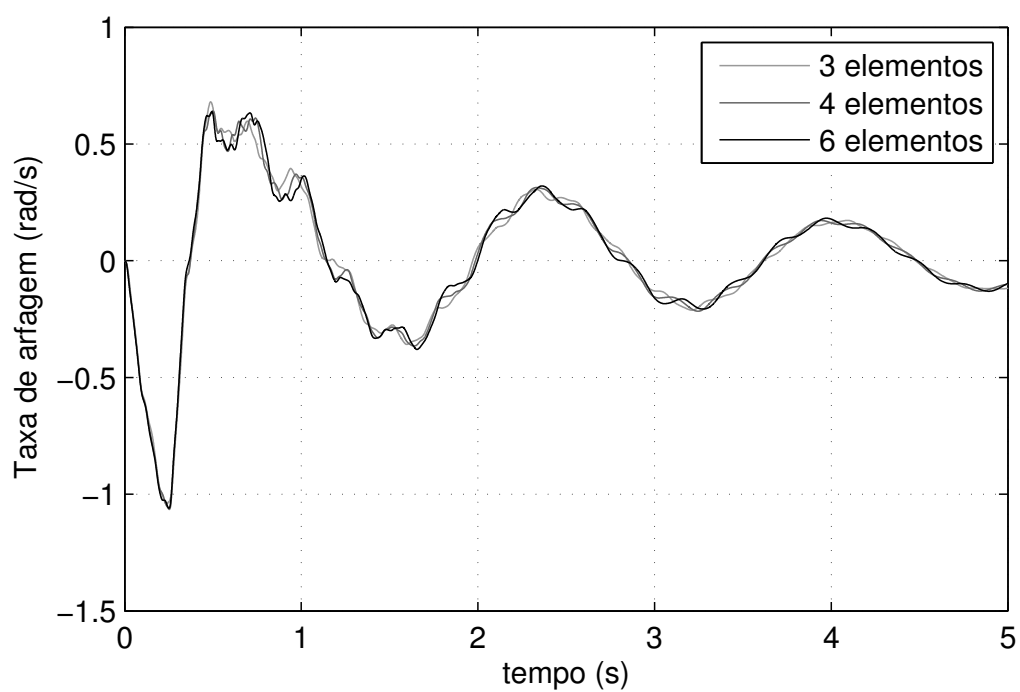
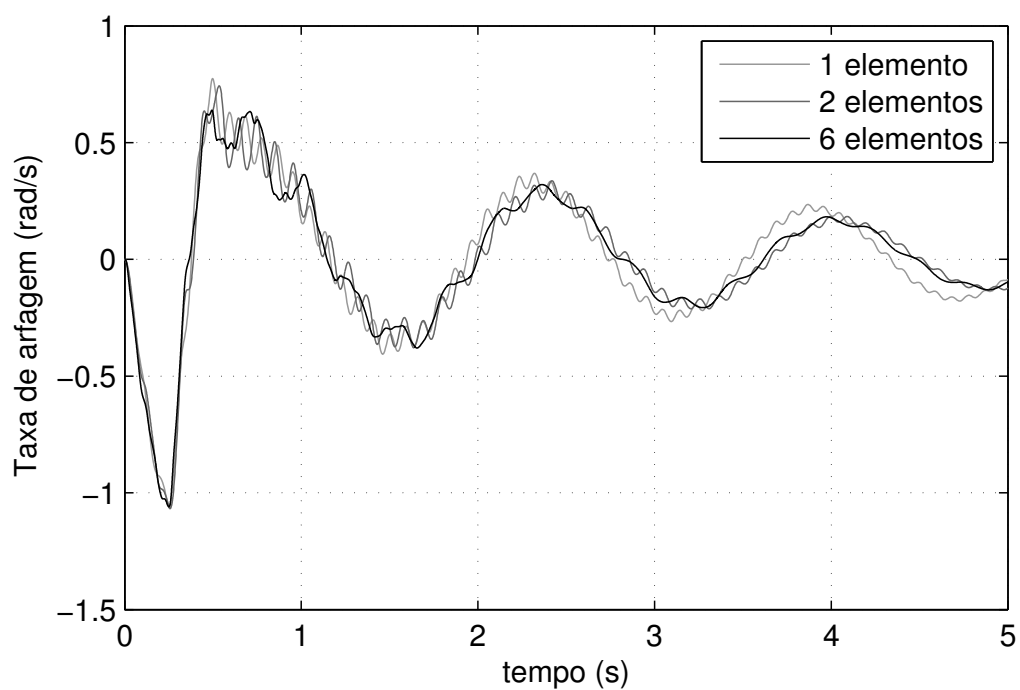


FIGURA 6.8 – Resultados da simulação para entrada doublet no profundor para diferentes números de elementos estruturais

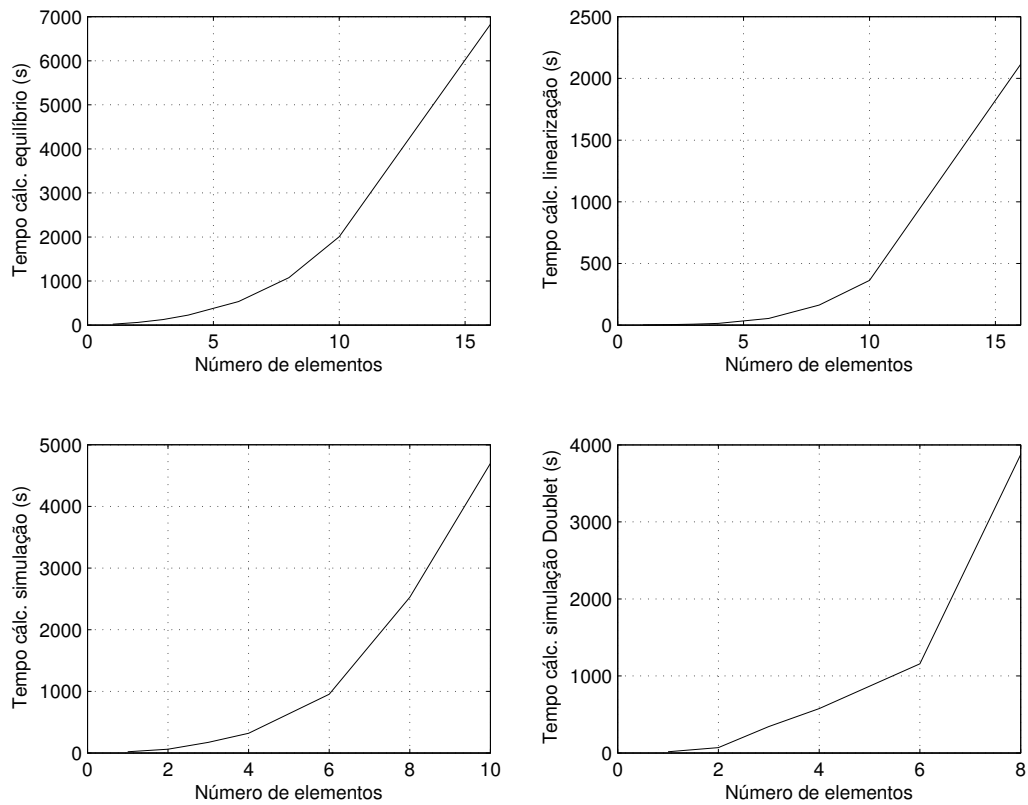


FIGURA 6.9 – Tempo de processamento em função do número de elementos por semi-asa

Foram feitas simulações utilizando 4 modelos, todas baseadas na aeronave apresentada no início deste capítulo, mas com valores de rigidez modificados. Utilizou-se uma aeronave de elevada rigidez (RB); e três flexíveis, nas quais a matriz de rigidez da configuração base foi multiplicada por 3, 1 e 0.6 ( $k_3$ ,  $k_1$  e  $k_{0.6}$ ).

Dois modelos aerodinâmicos foram empregados: quase estacionário com massa aparente (QE) e não estacionário (NE).

As Figuras 6.10, 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 apresentam os resultados das simulações para uma situação de ângulo de ataque inicial perturbado em 5 graus. Em seguida, as Figuras 6.15, 6.16, 6.17, 6.18 e 6.19 apresentam os resultados para uma entrada doublet no profundo.

Nota-se uma forte influência do modelo aerodinâmico escolhido, especialmente para as aeronaves flexíveis (as respostas dinâmicas da aeronave rígida não são afetadas tão

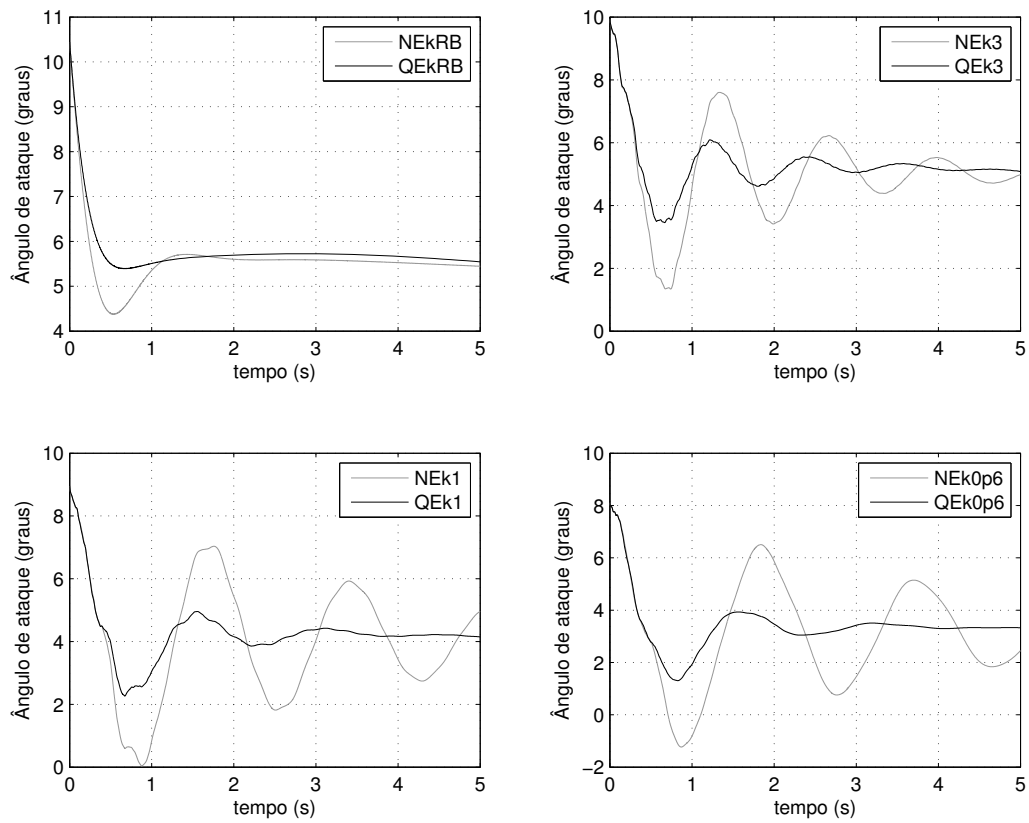


FIGURA 6.10 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

significativamente). A utilização do modelo aerodinâmico não estacionário leva a respostas oscilatórias de amplitude maior do que o quase estacionário. Em geral, um aumento da flexibilidade leva a um aprofundamento na diferença entre as duas respostas.

Como o modelo aerodinâmico não estacionário é o mais completo, conclui-se que sua utilização é recomendada para a obtenção de um modelo mais representativo da dinâmica de voo de aeronaves flexíveis.

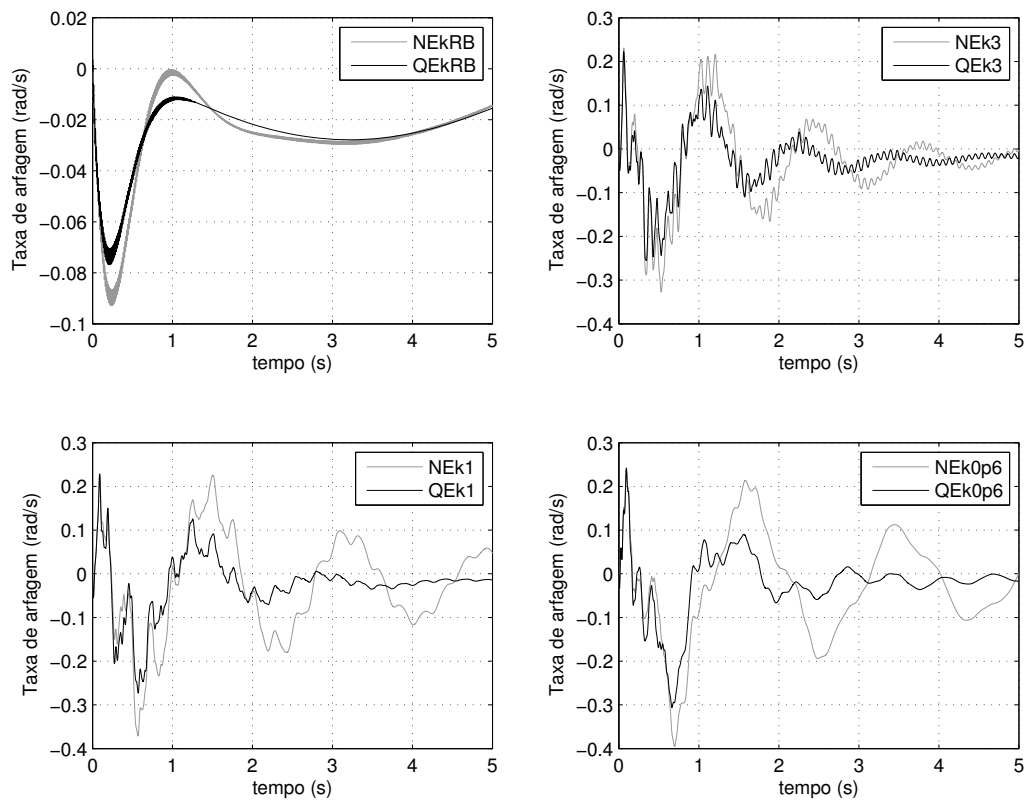


FIGURA 6.11 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

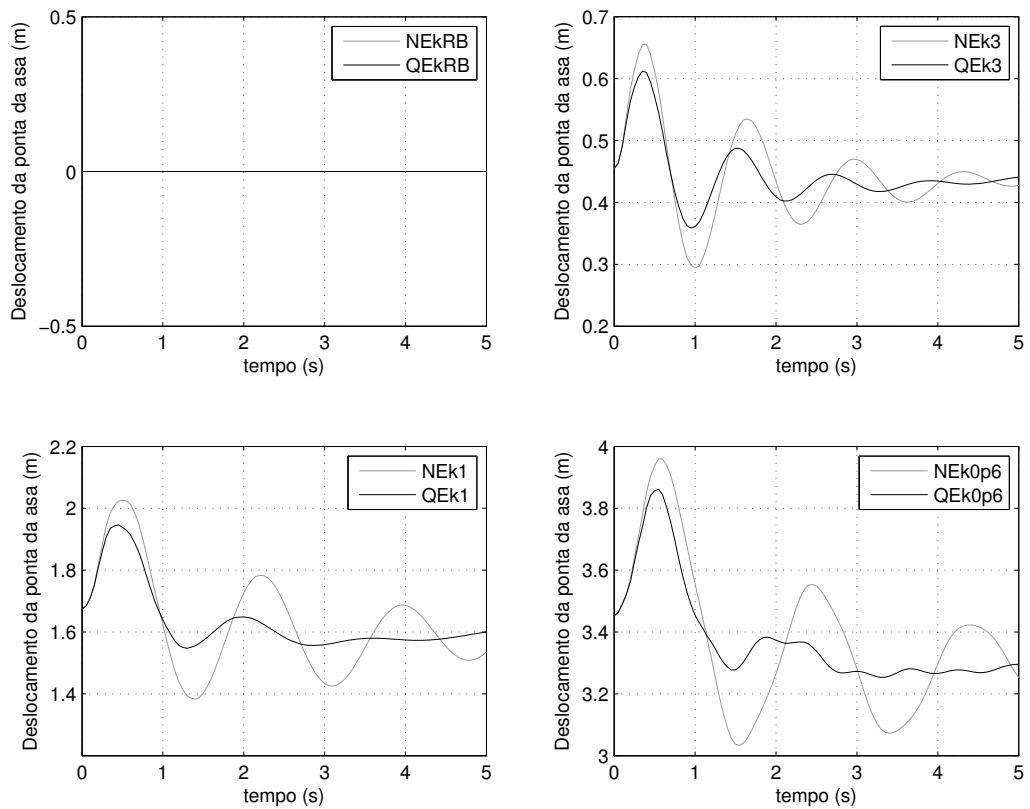


FIGURA 6.12 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

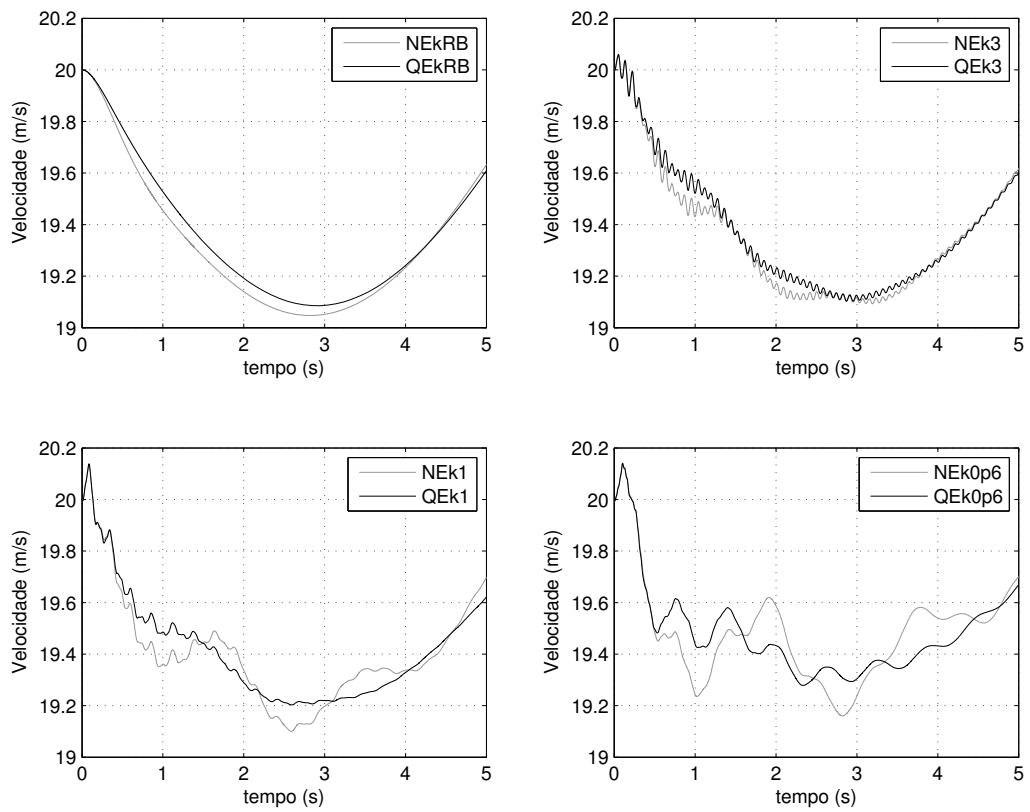


FIGURA 6.13 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

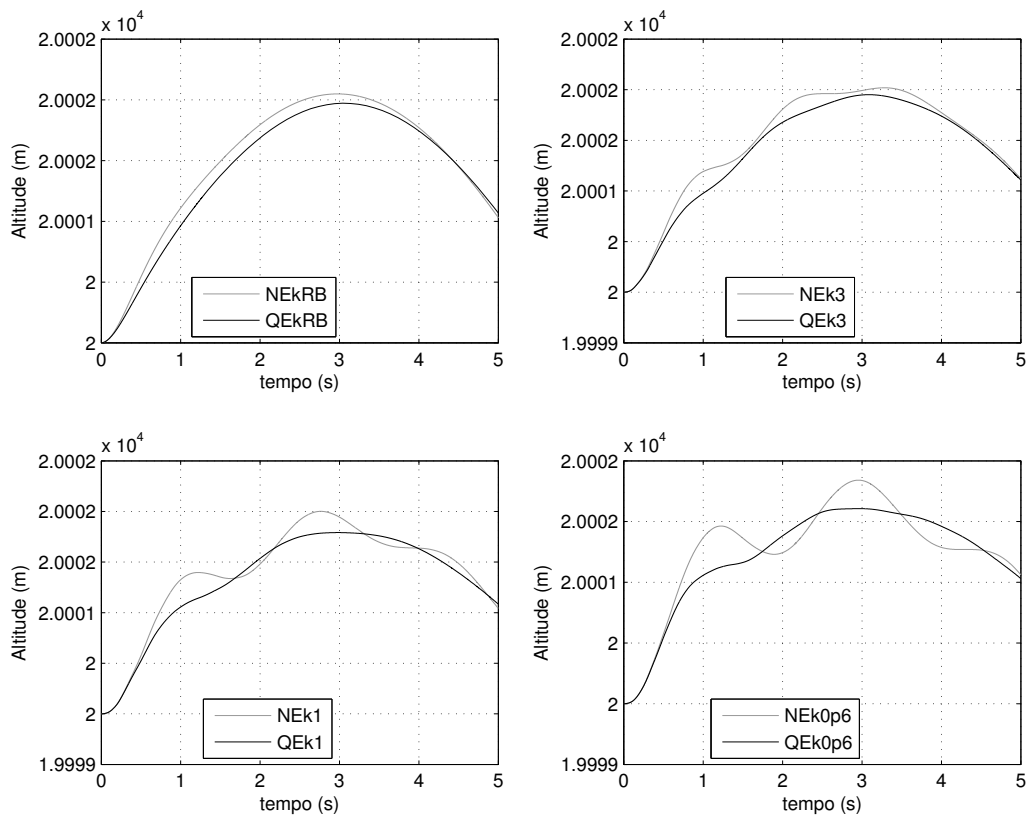


FIGURA 6.14 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

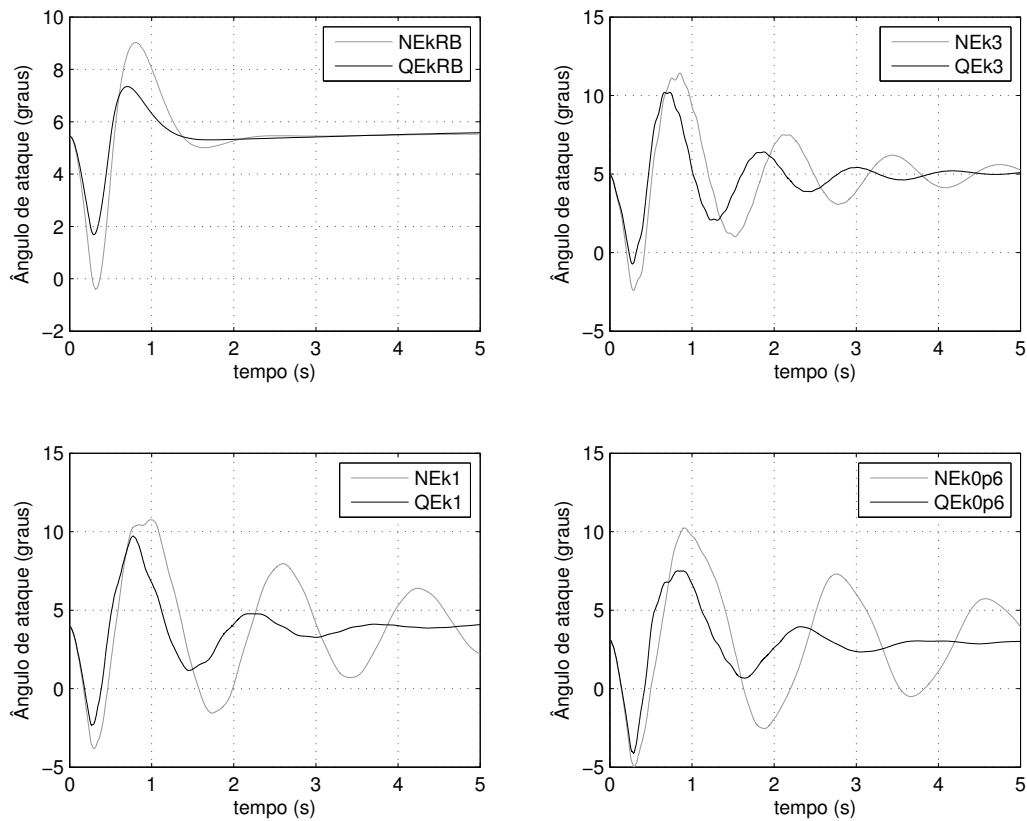


FIGURA 6.15 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

### 6.3 Utilização de matrizes estruturais constantes ou variáveis

O cálculo das matrizes Jacobianas estruturais corresponde a uma parte significativa do tempo de processamento durante as simulações. Brown (2003) comenta que eventualmente é possível manter as Jacobianas constantes durante a maior parte do tempo sem perdas significativas na resposta, permitindo grandes ganhos de processamento. Com o objetivo de verificar o efeito dessa consideração, foram feitas simulações considerando as matrizes constantes ( $J_{cte}$ ) e variáveis ( $J_{var}$ ) comparando a resposta dinâmica de aeronaves de diferentes valores de rigidez.

Novamente, foram estudadas aeronaves com três valores de rigidez em relação à aero-

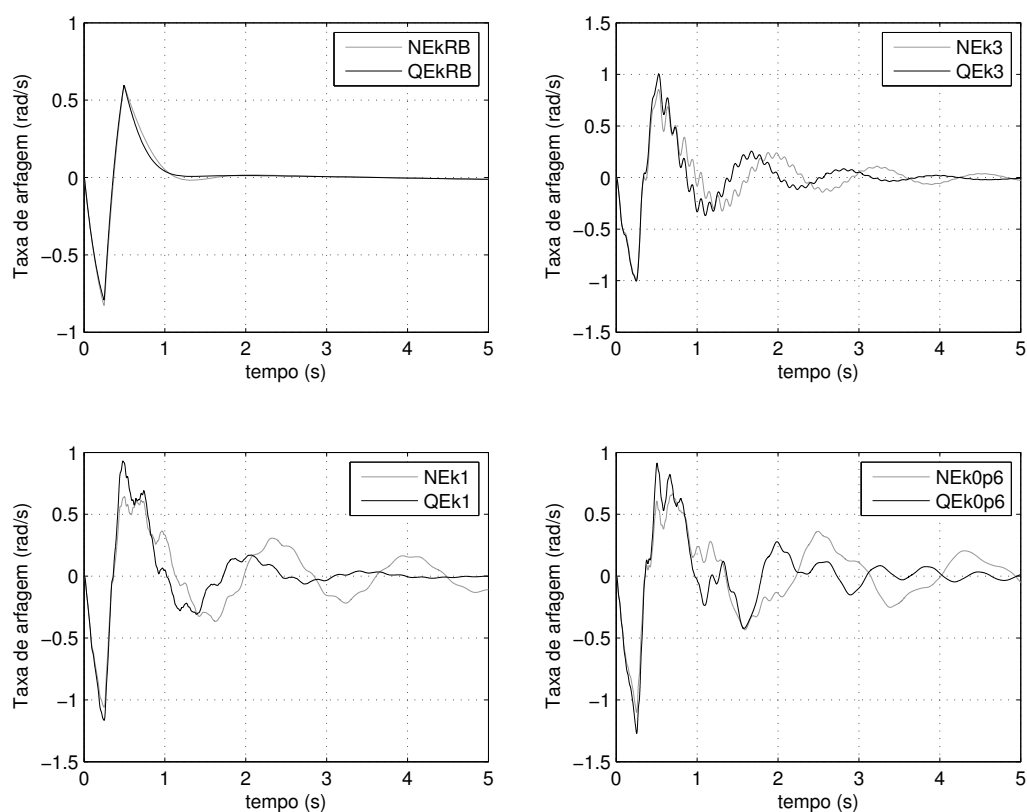


FIGURA 6.16 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

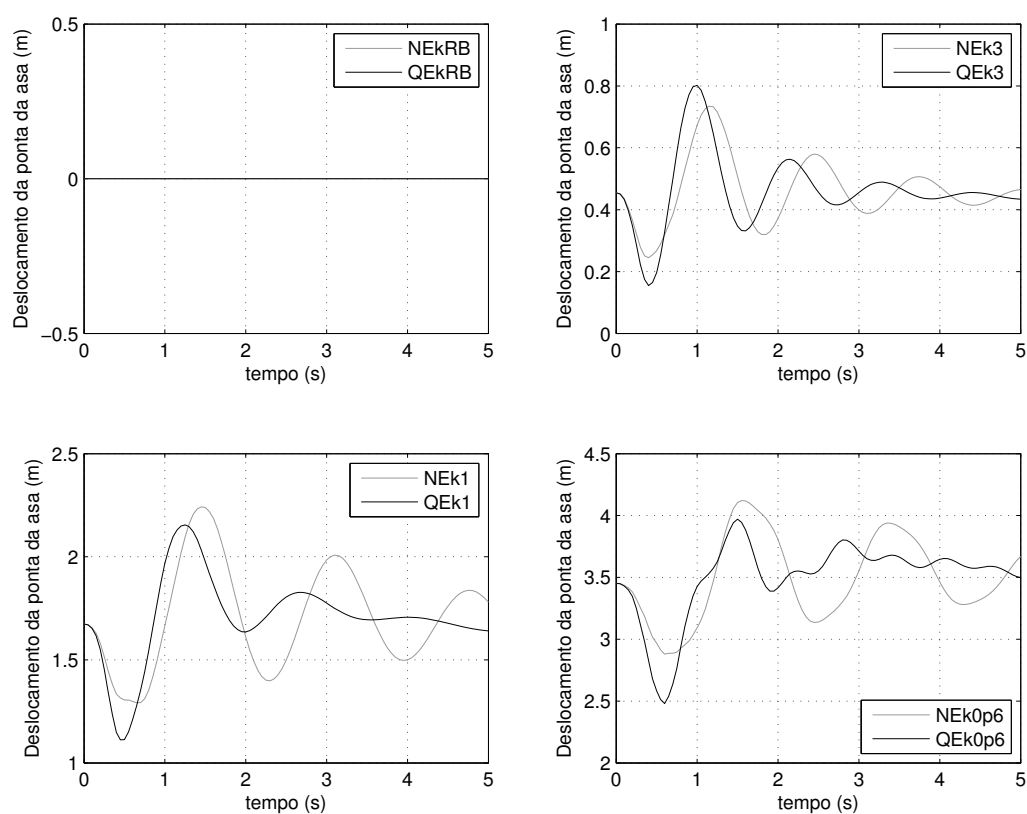


FIGURA 6.17 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

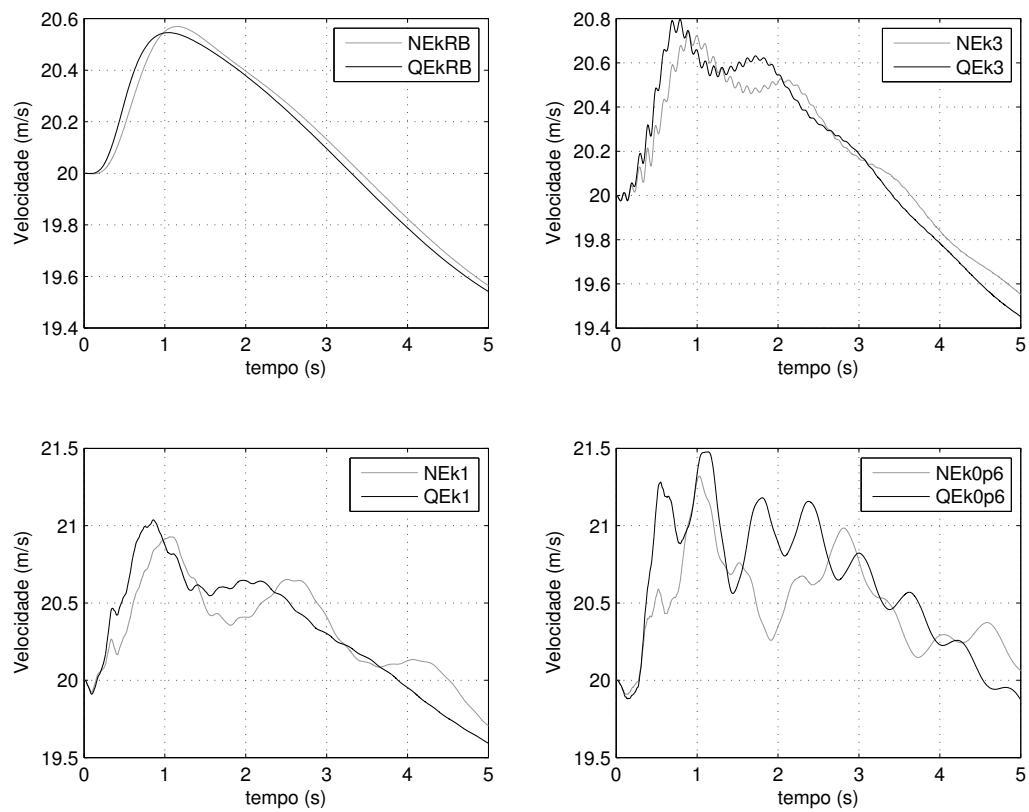


FIGURA 6.18 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos

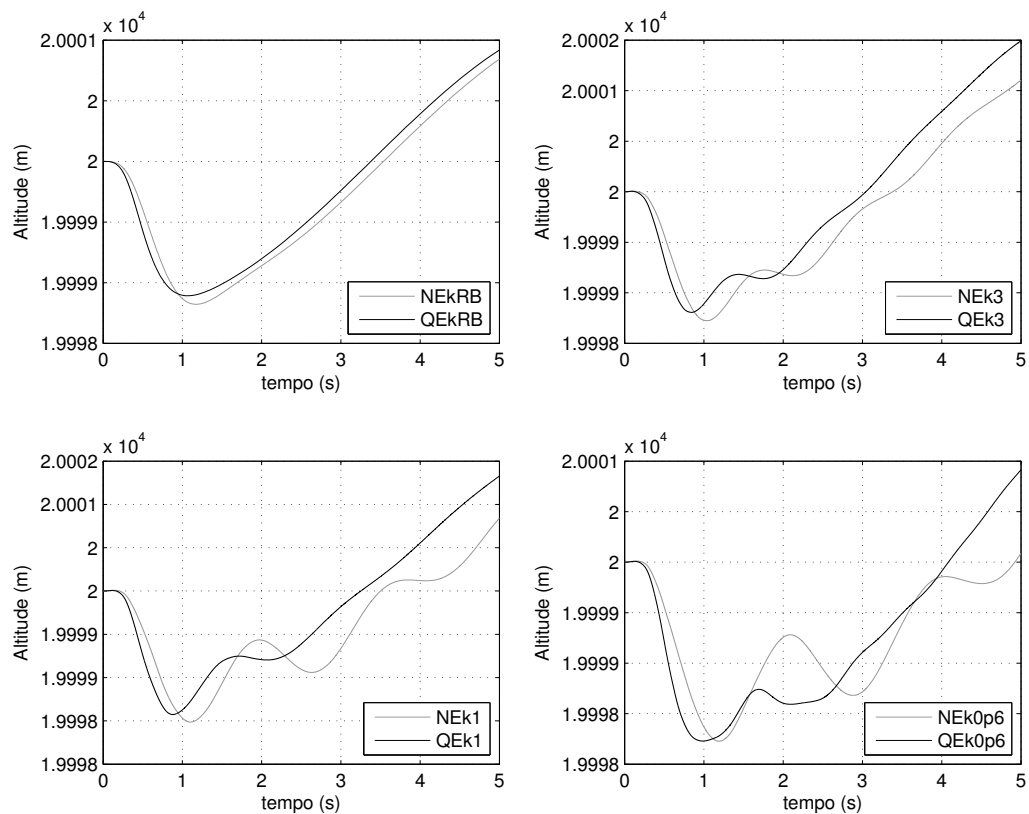


FIGURA 6.19 – Simulação de entrada doublet no profundor para diferentes valores de rigidez estrutural e modelos aerodinâmicos



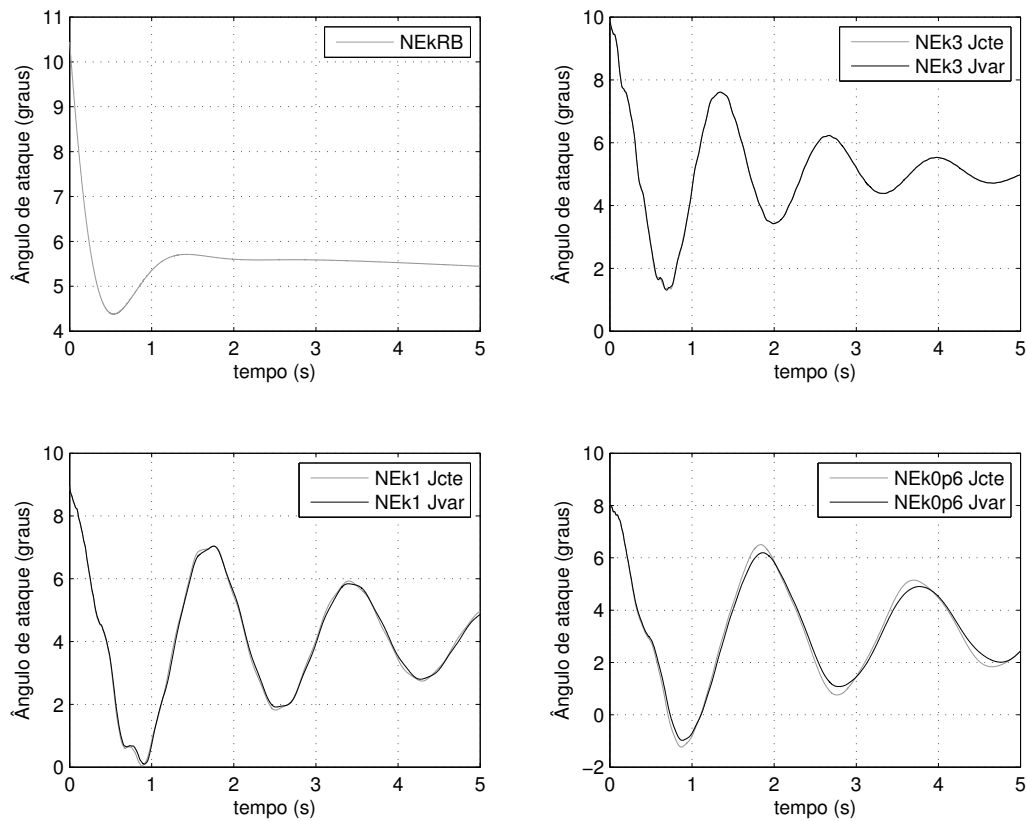


FIGURA 6.20 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis

nave base (multiplicando a matriz de rigidez por 3, 1 e 0.3 -  $k_3$ ,  $k_1$  e  $k_0.3$ ). Os resultados da simulação para a aeronave rígida (RB) são apresentados como referência.

As Figuras 6.24, 6.23, 6.22, 6.21 e 6.20 apresentam os resultados das simulações para uma situação de ângulo de ataque inicial perturbado em 5 graus. Em seguida, as Figuras 6.29, 6.28, 6.27, 6.26 e 6.25 mostram os resultados das simulações para uma entrada doublet na deflexão do profundor.

Como esperado, quanto mais flexível a aeronave, maiores as discrepâncias obtidas com a utilização das Jacobianas constantes. Entretanto, mesmo para o modelo mais flexível, a diferença entre as duas respostas é pequena e a utilização de matrizes constantes é razoável. Isso indica que, para os casos estudados, as deflexões em relação ao equilíbrio não foram suficientes para modificar significativamente as propriedades de inércia do avião.

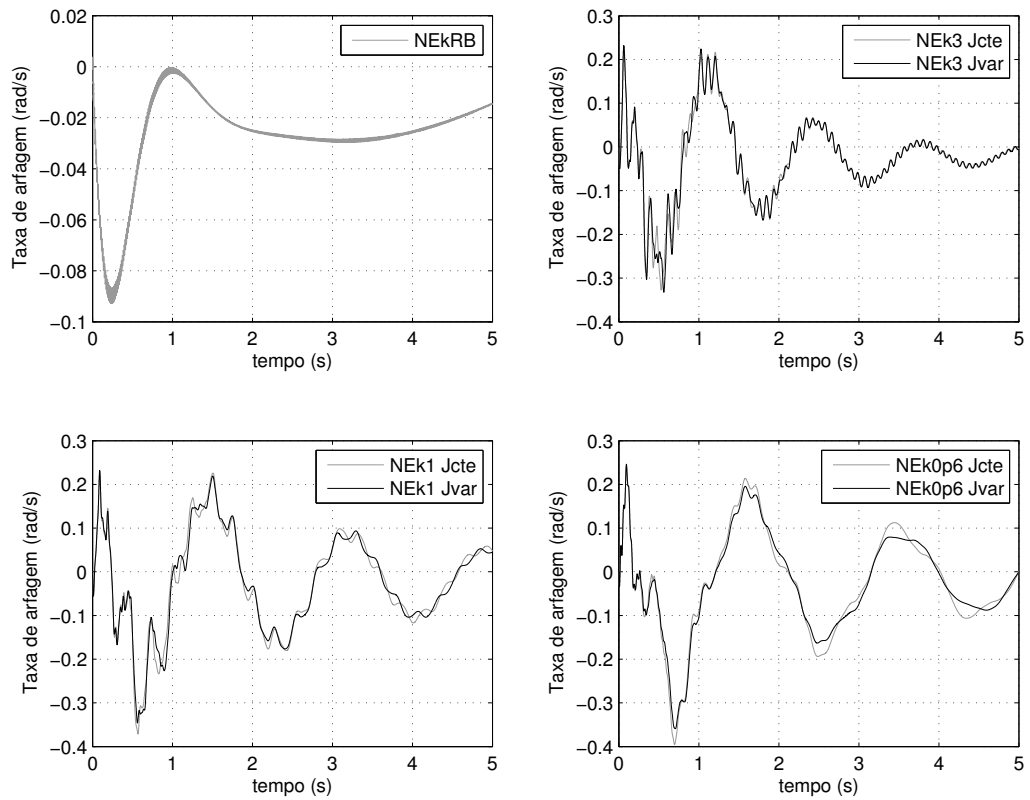


FIGURA 6.21 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis

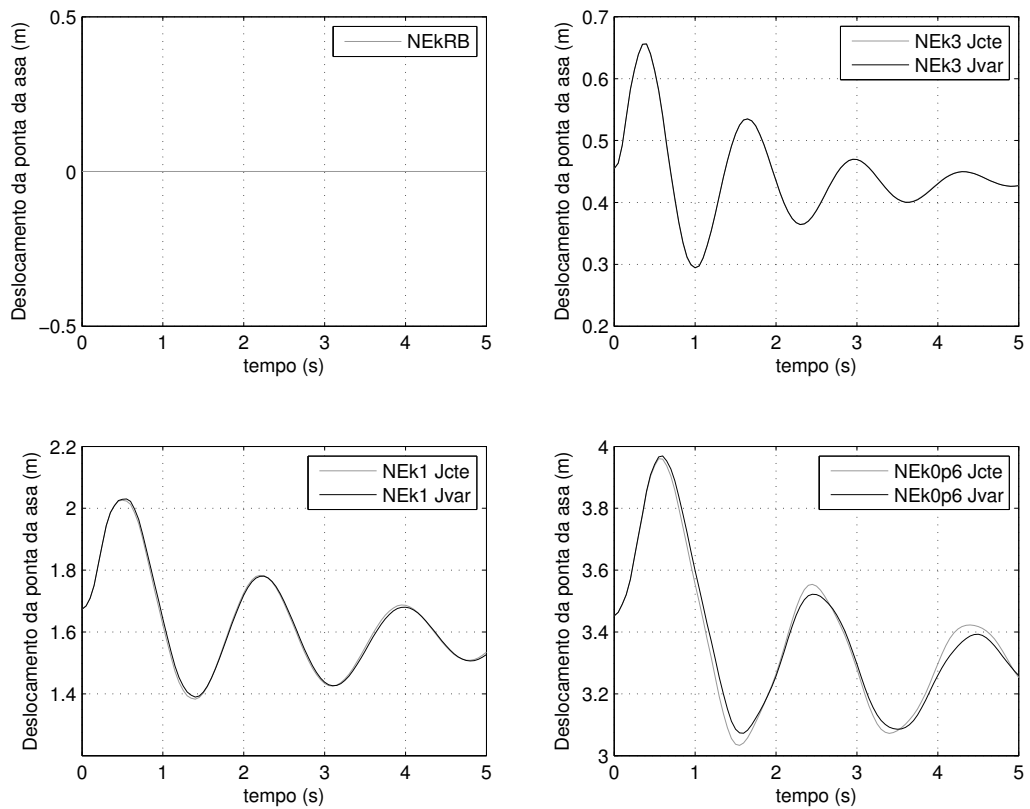


FIGURA 6.22 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis

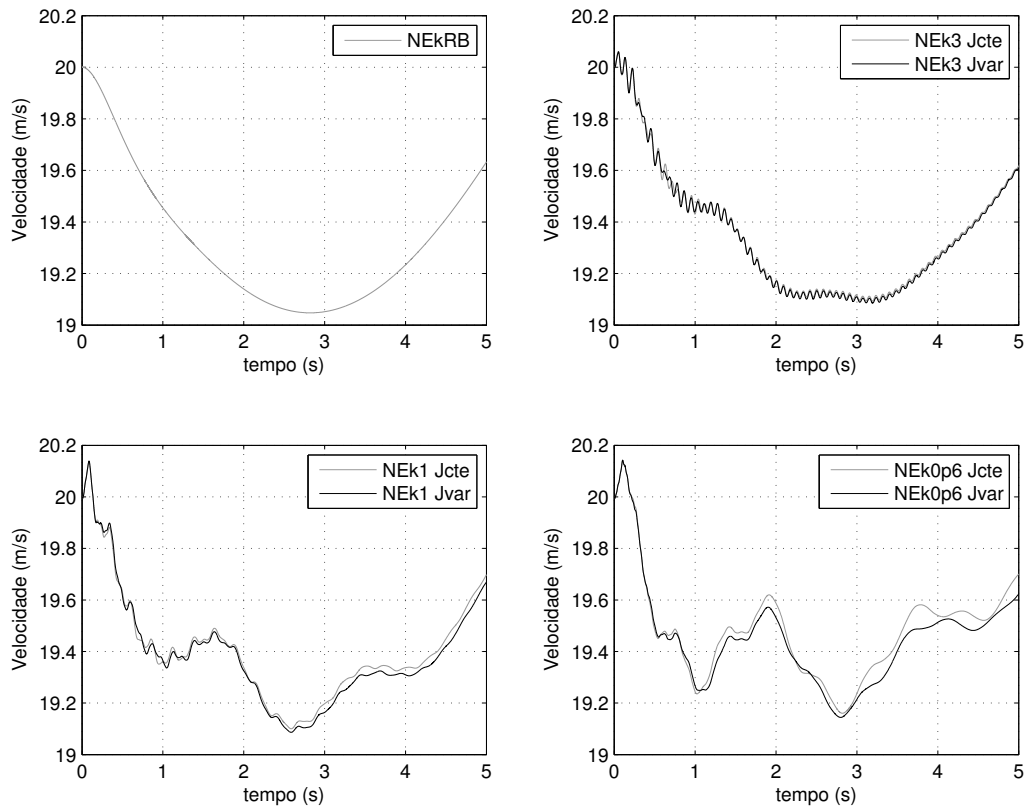


FIGURA 6.23 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis

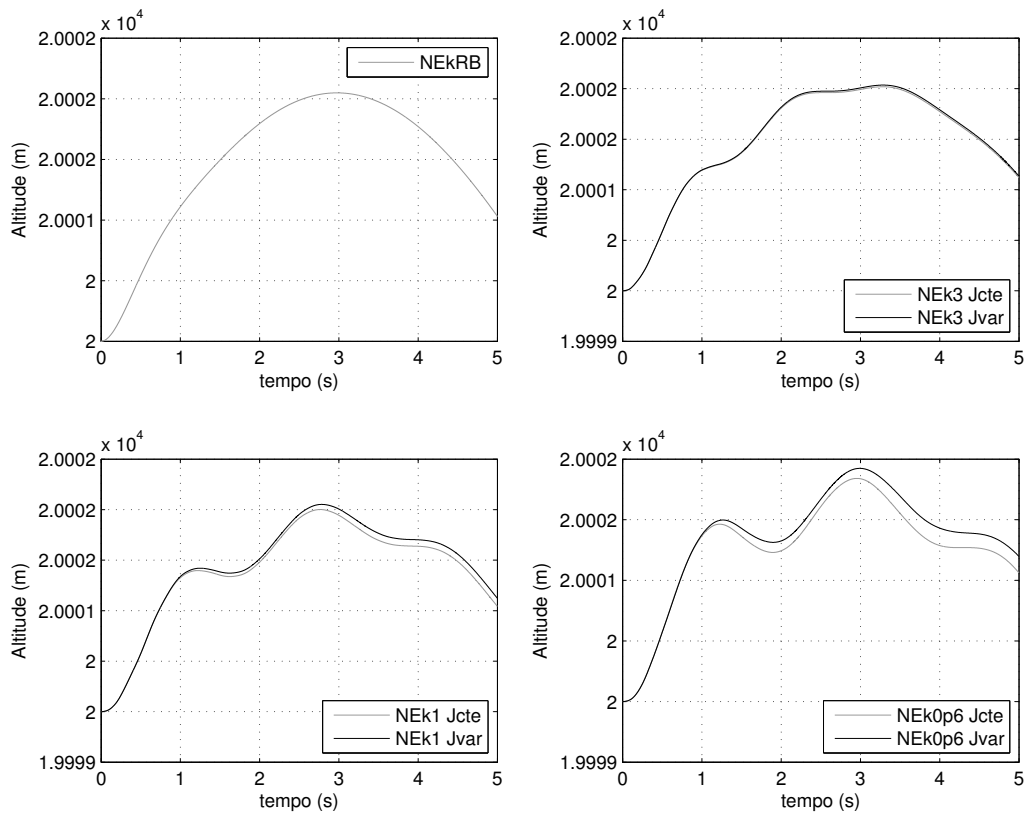


FIGURA 6.24 – Simulação para uma condição inicial de ângulo de ataque perturbado para matrizes estruturais constantes ou variáveis

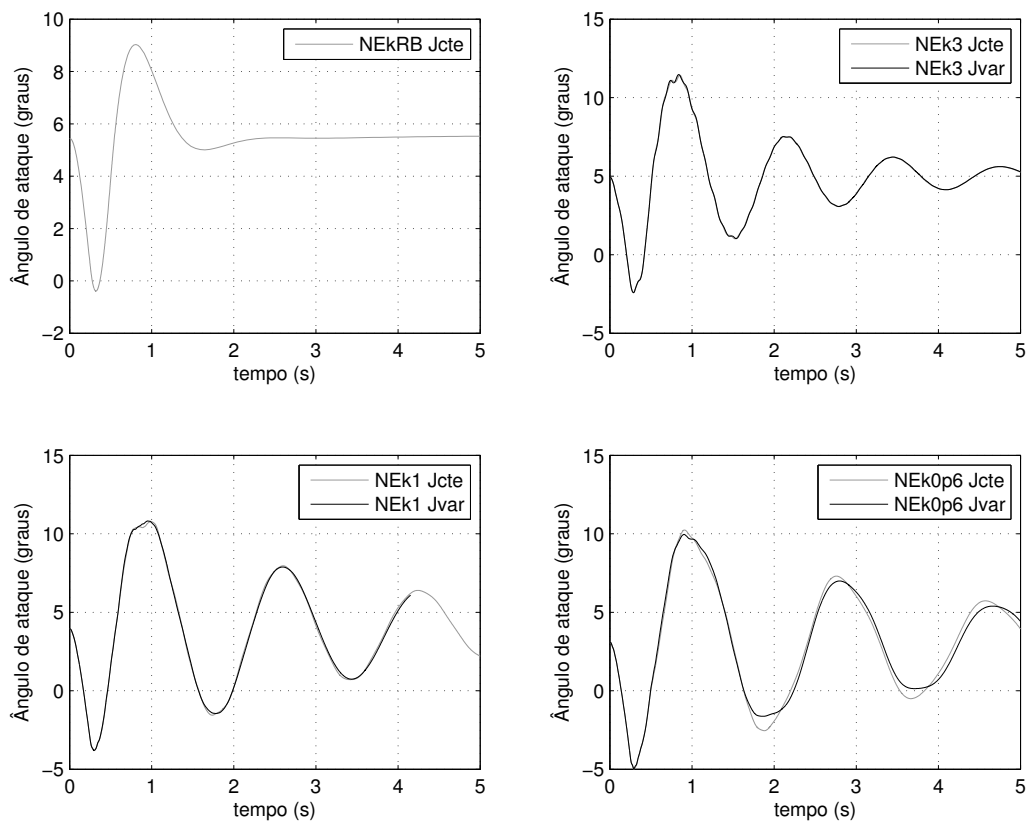


FIGURA 6.25 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis

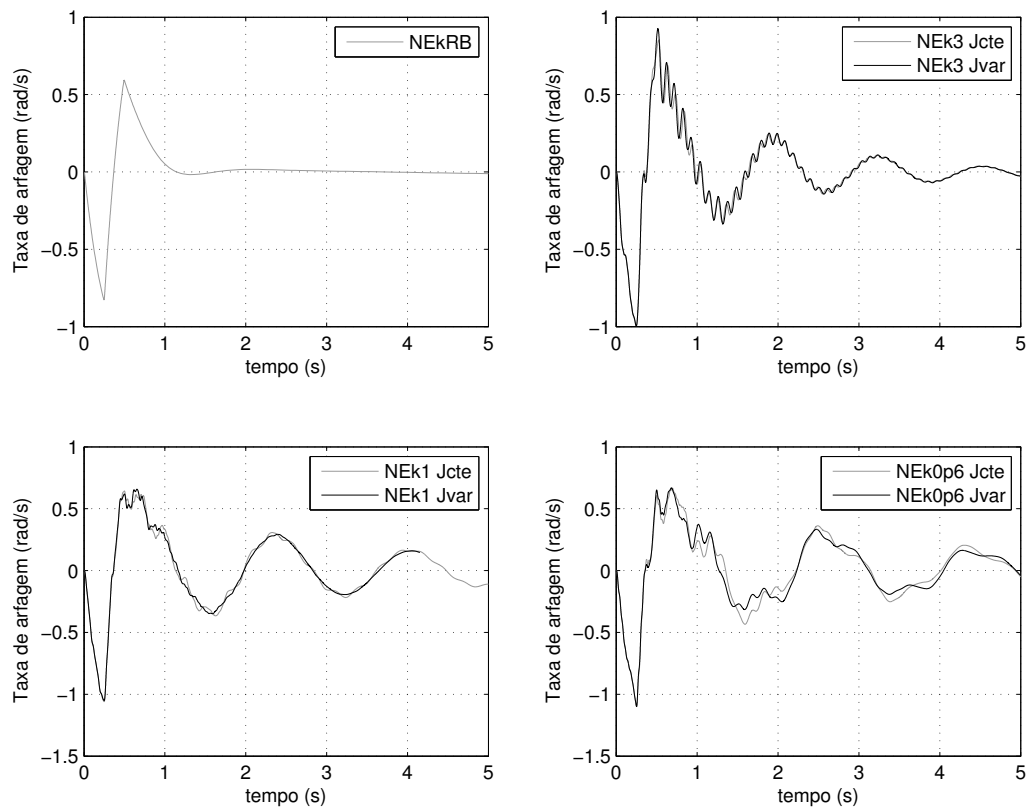


FIGURA 6.26 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis

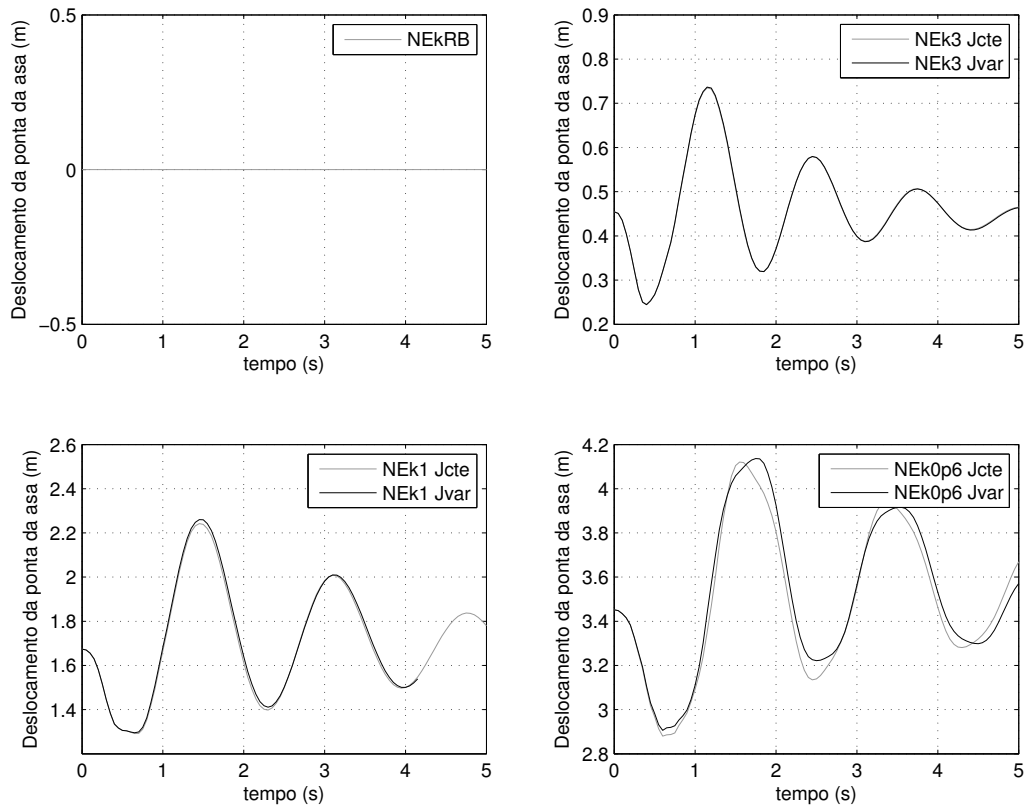


FIGURA 6.27 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis

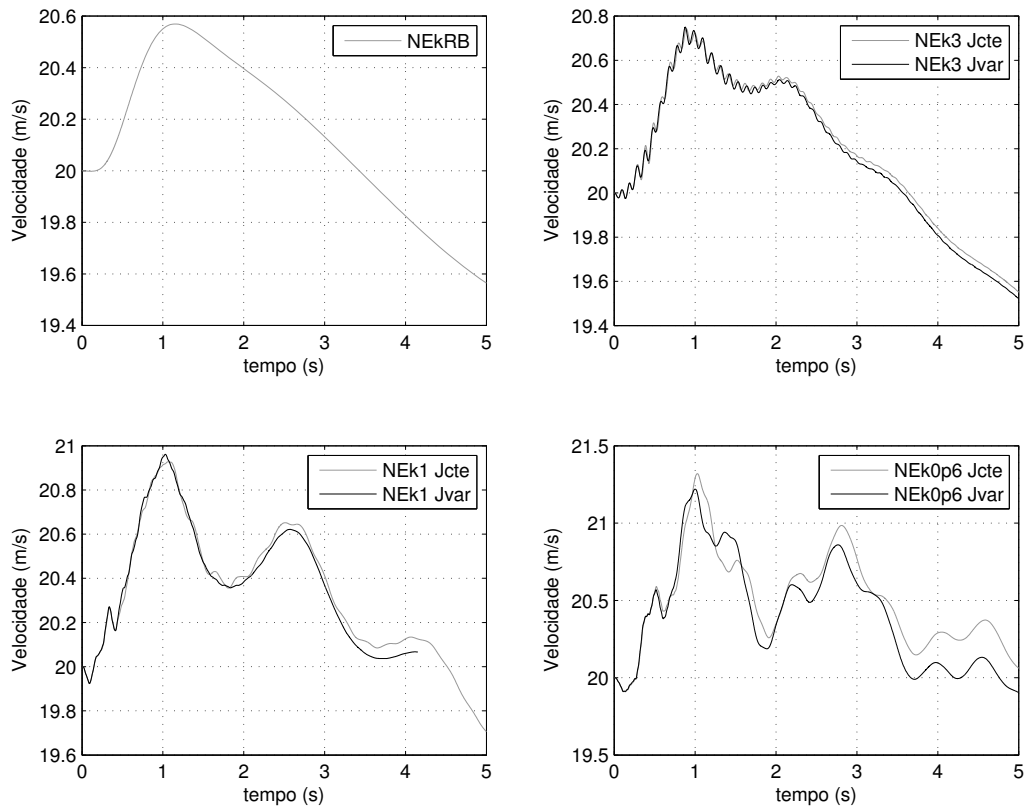


FIGURA 6.28 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis

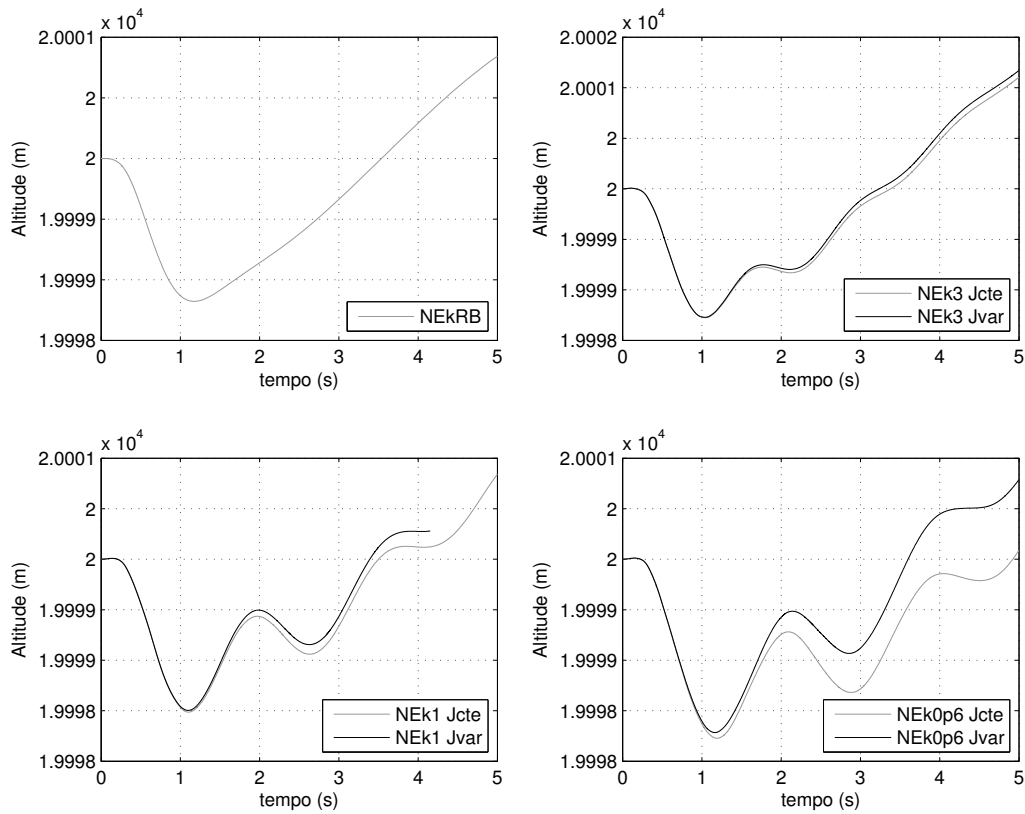


FIGURA 6.29 – Simulação para uma entrada doublet no profundor para matrizes estruturais constantes ou variáveis

## 6.4 Estudos de estabilidade aeroelástica

Os resultados apresentados no Capítulo 5 (Seção 5.3.2) mostraram uma grande diferença entre a velocidade de flutter calculada para a asa engastada não deformada, e a mesma velocidade considerando deflexões não lineares devido à gravidade. Como a deformação de equilíbrio em voo certamente será diferente da deformação da asa engastada, espera-se que a velocidade de instabilidade seja diferente. Além disso, os graus de liberdade de corpo rígido devem influenciar na condição de instabilidade: podem causar uma instabilidade diretamente, como em casos em que o movimento fugoidal é instável; ou pode haver uma instabilidade do movimento de corpo rígido acoplado aos movimentos aeroelásticos.

Esta seção tem por objetivo estudar a estabilidade do movimento livre da asa voadora.

Para isso, foram analisados os autovalores da matriz de estados para um intervalo de velocidades. Três aeronaves foram utilizadas, baseadas no modelo já apresentado: com fuselagem rígida de 10 kg, 12 kg e 15 kg.

As Figuras 6.31, 6.32 e 6.33 apresentam a maior parte real entre os autovalores de três matrizes de estado:

- Matriz completa (voo livre): incluindo estados da dinâmica de estrutura, de atraso aerodinâmico e estados de corpo rígido;
- Matriz aeroelástica: incluindo apenas estados de dinâmica de estruturas e atraso aerodinâmico (estados de corpo rígido excluídos);
- Matriz de corpo rígido: apenas estados de corpo rígido (dinâmica de estruturas e aerodinâmicos excluídos).

Note que as três matrizes consistem em linearizações em torno de um ponto de equilíbrio de voo da aeronave flexível. Estudar os autovalores da matriz de aeroelasticidade equivale a estudar uma asa engastada, mas com deflexões de equilíbrio para uma situação de voo. Estudar os autovalores de corpo rígido equivale a desprezar os modos aeroelásticos, mas considerar a linearização de corpo rígido em torno de uma situação de voo com a asa deformada.

Observando a Figura 6.31, nota-se que, para a configuração de massa de fuselagem igual à 10 kg, para baixas velocidades, o movimento completo da aeronave é instável devido ao movimento fugoidal (essa instabilidade já aparece nos autovalores de corpo rígido). Para velocidades elevadas, aparece a instabilidade aeroelástica. Nesta aeronave, as instabilidades da matriz completa são muito parecidas com as observadas diretamente nas sub-matrizes (de estados aeroelásticos e do corpo).

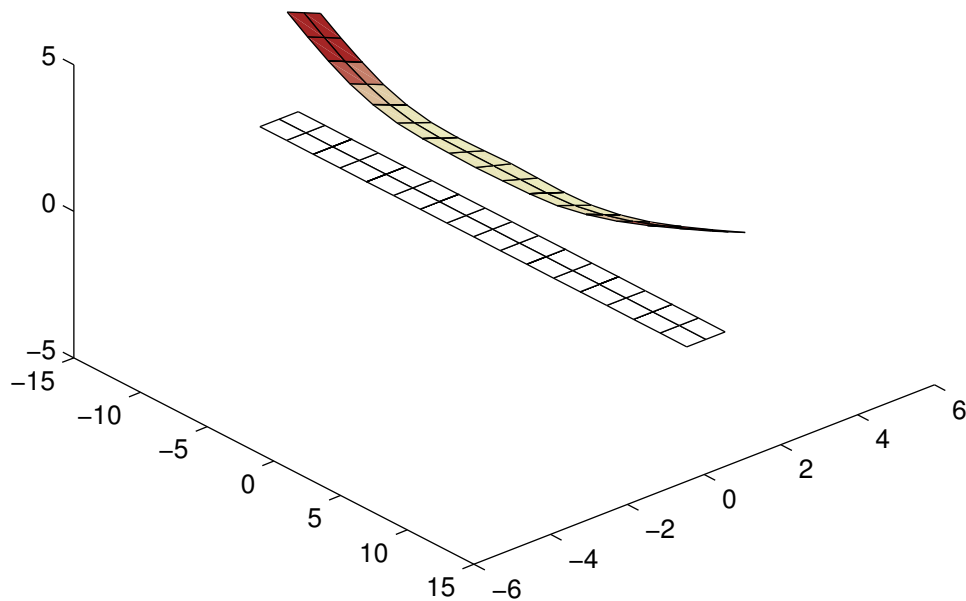


FIGURA 6.30 – Forma modal da aeronave associada ao modo instável

Para fuselagens de massa maior, nota-se um comportamento bastante distinto. Com massa de fuselagem de 12 kg (Figura 6.32), por exemplo, a instabilidade da matriz completa acontece em velocidades bem abaixo da instabilidade aeroelástica. Trata-se de uma instabilidade relacionada com o acoplamento entre os movimentos de corpo rígido e dinâmica aeroelástica. Esse acoplamento pode ser observado ao analisar a forma modal da asa voadora relacionada com o modo instável (Figura 6.30). Nota-se que, além de ter sua estrutura deformada, o modo apresenta deslocamentos de corpo rígido (translação no eixo  $z$  e rotação no eixo  $x$ ).

Para uma fuselagem de 15 kg (Figura 6.33), tal instabilidade aparece em velocidades ainda mais baixas e distintas da instabilidade aeroelástica clássica.

A Tabela 6.1 apresenta os resultados de velocidade e frequência de instabilidade para as três configurações de aeronave. Nota-se que para as duas configurações mais pesadas, a frequência de instabilidade do movimento completo é bem menor do que a frequência



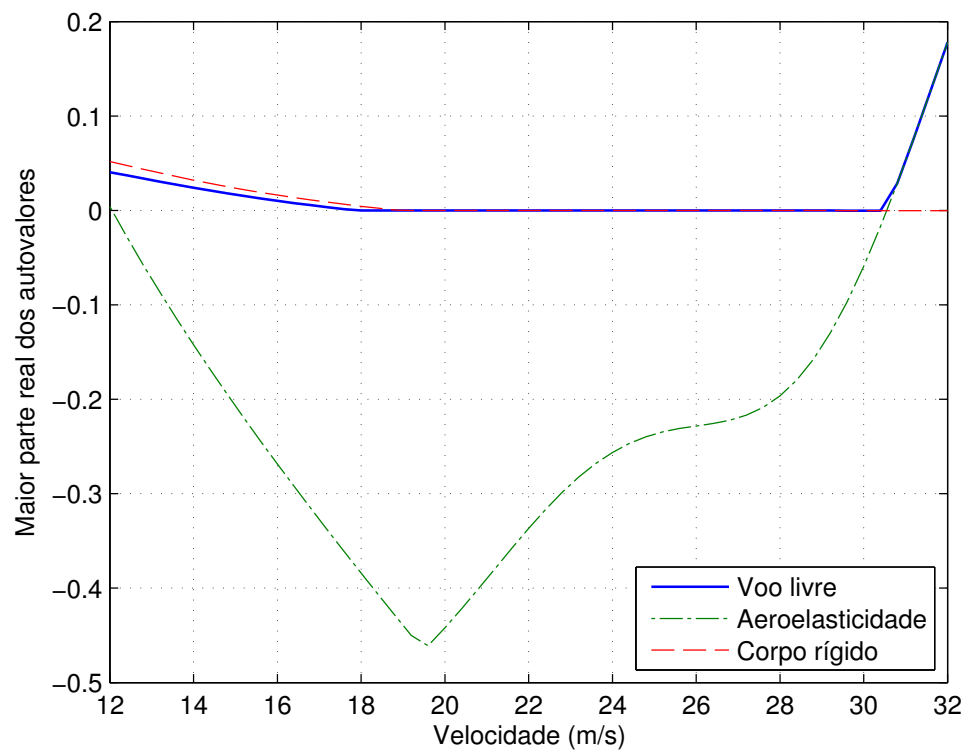


FIGURA 6.31 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 10 kg)

de instabilidade aeroelástica.

As Figuras 6.34 e 6.35 apresentam resultados da resposta dinâmica, para a configuração de 12 kg, em duas velocidades distintas: 25 m/s e 28 m/s. Nota-se a ocorrência de instabilidade para a velocidade de 28 m/s.

TABELA 6.1 – Velocidade e frequências de instabilidade para a asa voadora

Massa da fuselagem	Voo livre		Aeroelasticidade	
	$V$ (m/s)	$f$ (rad/s)	$V$ (m/s)	$f$ (rad/s)
10 kg	30.5	12.8	30.5	12.8
12 kg	26.9	4.8	30.9	11.5
15 kg	15.0	3.0	31.4	9.9

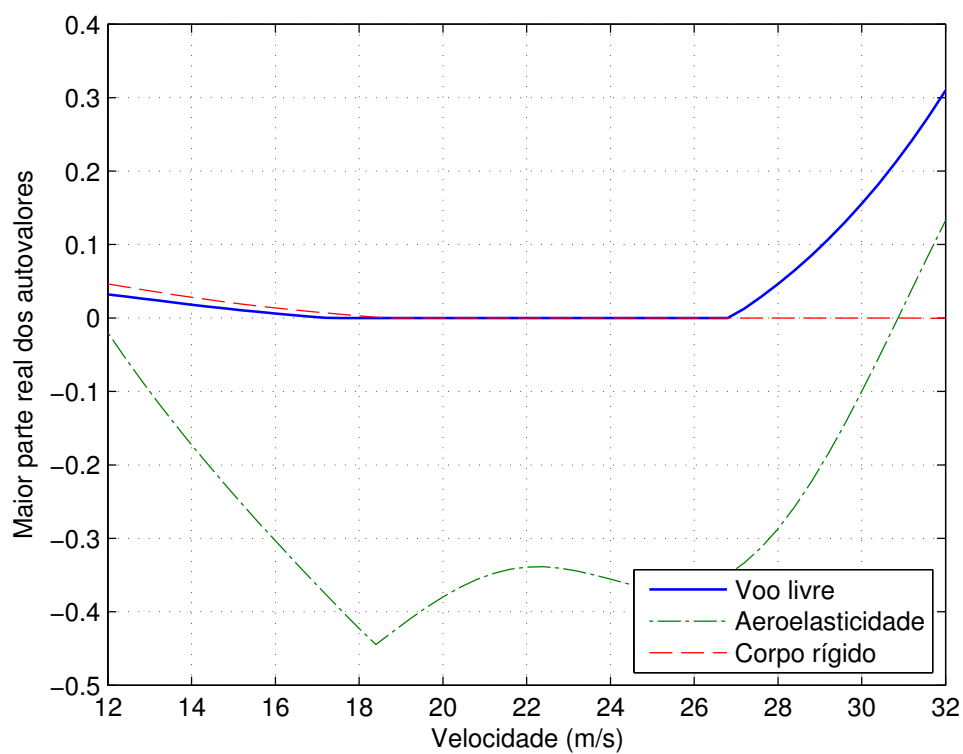


FIGURA 6.32 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 12 kg)

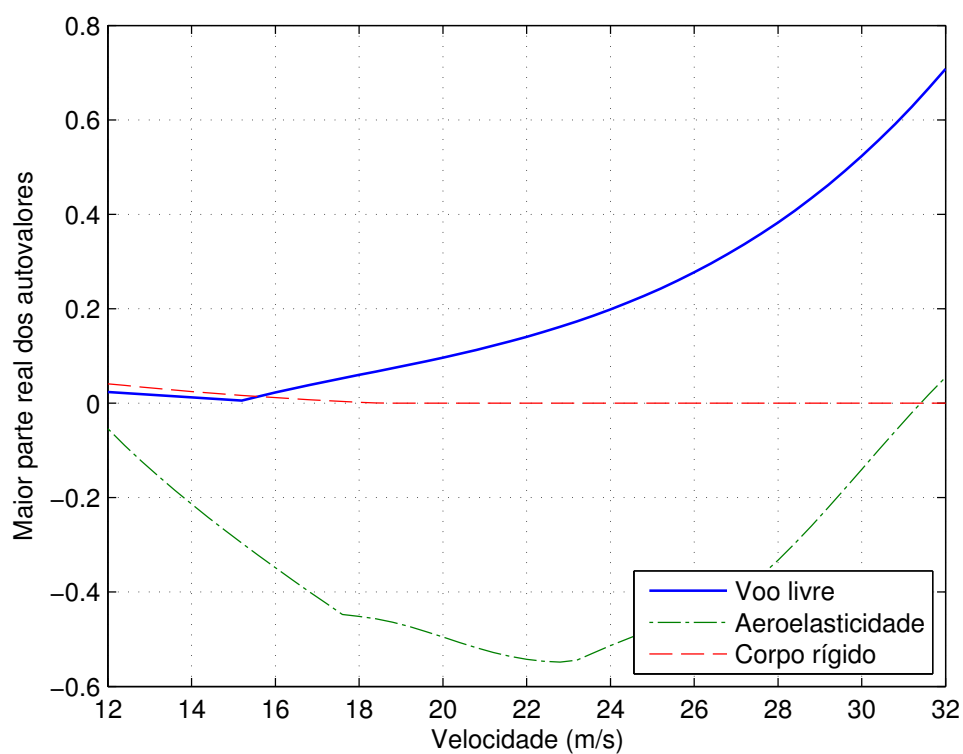


FIGURA 6.33 – Variação da maior parte real dos auto-valores em função da velocidade de voo (para aeronave com massa concentrada de 15 kg)

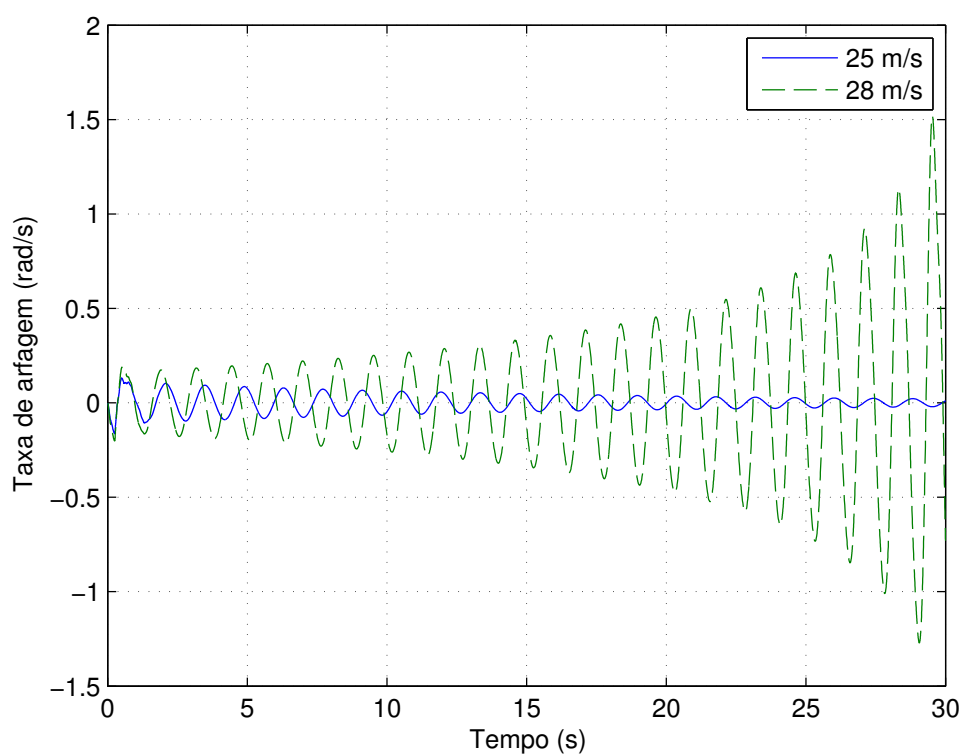


FIGURA 6.34 – Simulação da resposta dinâmica para uma entrada doublet de profundor com velocidade acima e abaixo da instabilidade

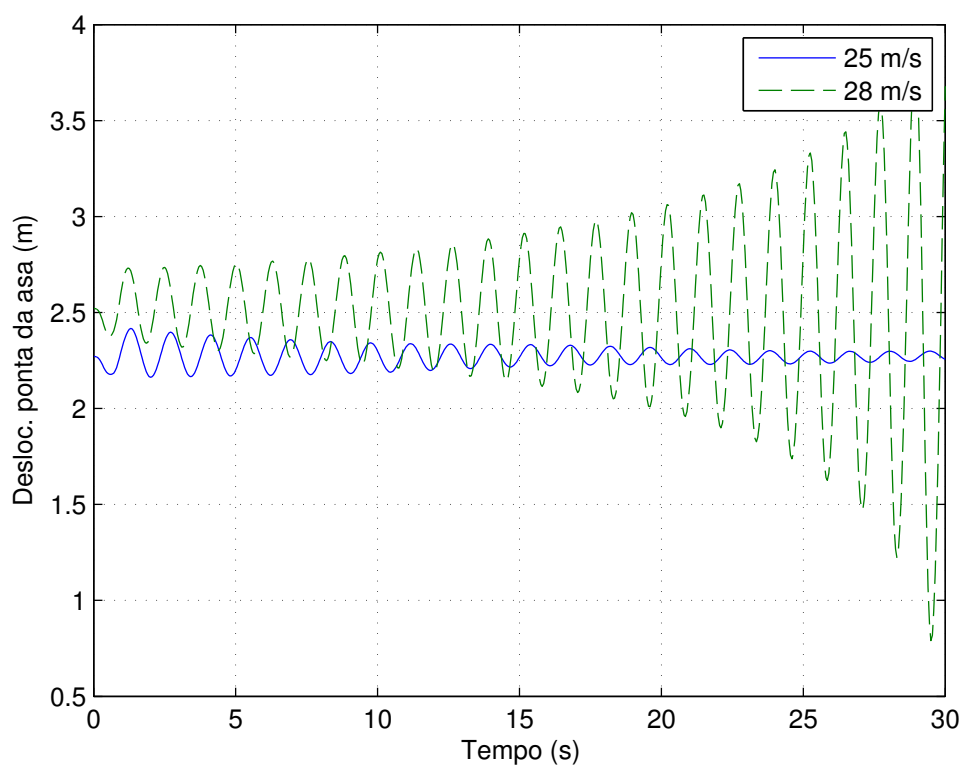


FIGURA 6.35 – Simulação da resposta dinâmica para uma entrada doublet de profundor com velocidade acima e abaixo da instabilidade

## 6.5 Reversão de comandos de aileron

Ao acionar a deflexão do bordo de fuga buscando aumentar a sustentação, o efeito em um perfil é aparecer um momento cuja tendência é torcer a estrutura, reduzindo o ângulo de ataque local. A aeronave empregada neste capítulo é muito flexível. Dessa forma, quando o bordo de fuga de cada semi-asa é acionado assimetricamente, pode haver reversão de comandos devido a esse efeito de torção da asa.

Esse fenômeno é apresentado nas Figuras 6.36 e 6.37. São apresentados os resultados de várias simulações para uma entrada degrau de aileron (ou seja, deflexão assimétrica do bordo de fuga). Uma deflexão positiva de aileron deve provocar um rolamento negativo da aeronave rígida. Nota-se que, para esta aeronave, mesmo em velocidades baixas, o controle lateral da aeronave é provocado não pelo aumento direto de sustentação devido à deflexão do aileron, mas pela torção da asa.

A Figura 6.37 mostra como esse efeito varia para diferentes valores de rigidez, considerando uma velocidade de 15 m/s. Nota-se que o comportamento das aeronaves muito flexíveis é bastante distinto da aeronave rígida ( $K=1000$ ).

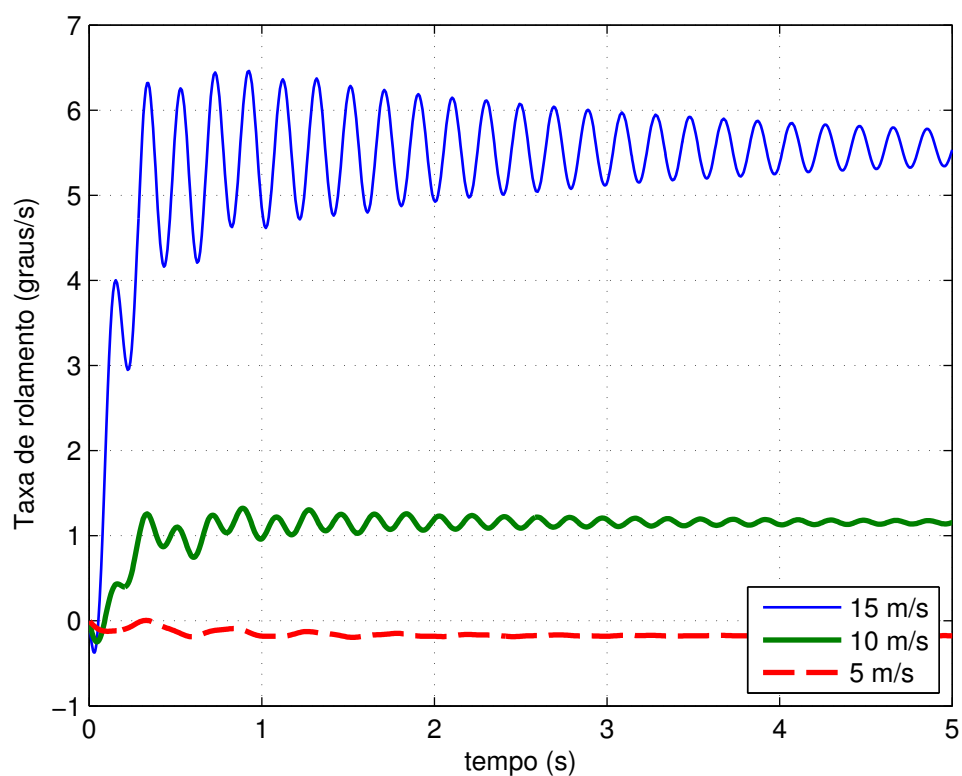


FIGURA 6.36 – Taxa de rolamento da aeronave para uma entrada degrau de aileron para diferentes velocidades de voo

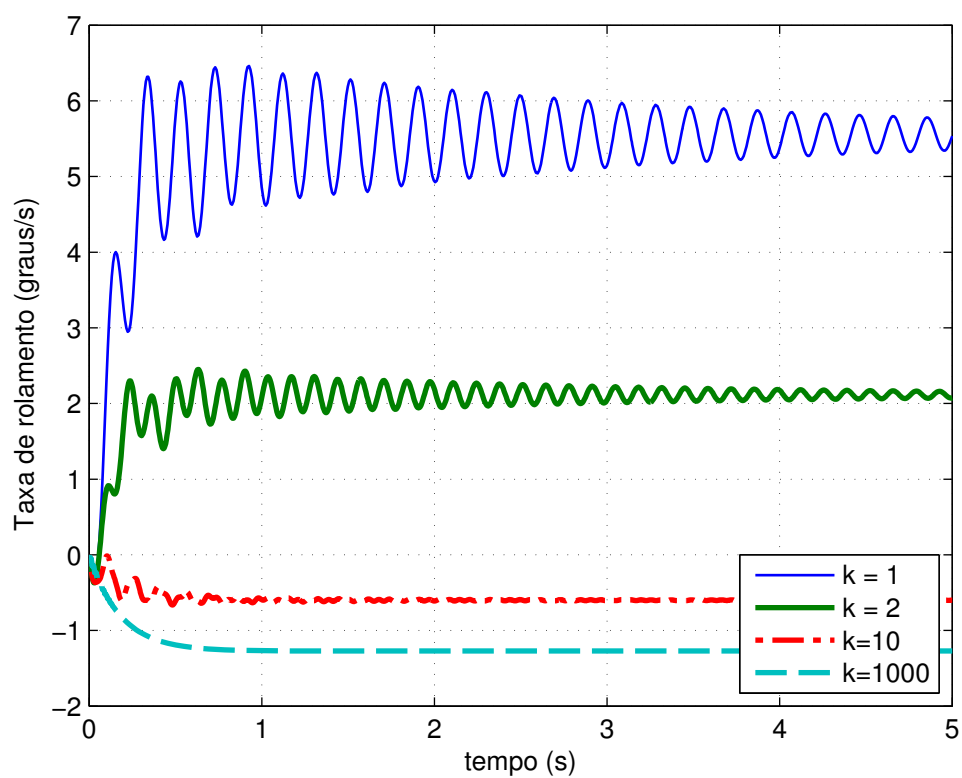


FIGURA 6.37 – Taxa de rolamento da aeronave para uma entrada degrau de aileron para diferentes valores de rigidez

# 7 Conclusões

Este capítulo tem por objetivo resumir as principais realizações deste trabalho. São apresentadas as principais conclusões, resultados, limitações da abordagem empregada e sugestões para trabalhos futuros.

## 7.1 Implementação e validação do modelo dinâmico de aeronaves muito flexíveis

O objetivo principal deste trabalho consistiu na descrição de um modelo dinâmico de aeronaves muito flexíveis, baseada nas formulações dos trabalhos de Brown (2003), Shearer (2006) e Su (2008). Em trabalhos anteriores (WASZAK; SCHMIDT, 1988; POGORZELSKI, 2010; SILVESTRE, 2007; NETO, 2008), a dinâmica de estruturas é tratada através de um modelo linearizado. Para grandes deflexões estruturais, entretanto, tal aproximação pode se tornar inadequada.

Uma ferramenta, batizada de AeroFlex, foi desenvolvida. A estrutura das superfícies sustentadoras é considerada como uma viga capaz de sofrer grandes deflexões. Para efetuar os cálculos aerodinâmicos, é utilizada a Teoria das Faixas. Diferentes modelos aerodinâmicos bi-dimensionais foram implementados (quase estacionário, quase estacionário

com massa aparente e não estacionário utilizando a teoria de Peters, Karunamoorthy e Cao (1995)).

Na metodologia utilizada por Waszak e Schmidt (1988), Silvestre (2007), Neto (2008) e Pogorzelski (2010), os dados de entrada estruturais consistem nos modos de vibração, obtidos de um software de análise estrutural. A metodologia utilizada neste trabalho, por outro lado, resolve as equações da dinâmica estrutural durante a simulação. Os dados de entrada, dessa forma, consistem nas matrizes de rigidez e amortecimento de cada elemento estrutural. Essas matrizes podem ser obtidas de um software de análise de seção transversal (ou calculadas analiticamente, no caso de seções de geometria simples).

Além dos dados de rigidez, a metodologia precisa dos valores de massas e inércias distribuídas ao longo da estrutura. Podem ser incluídas massas e inércias concentradas presas aos nós estruturais (permitindo a inclusão da inércia de corpos rígidos como tanques externos e motores). Vários membros flexíveis (asas e empenagens), múltiplas superfícies de controle e motores podem ser especificados.

O código desenvolvido é bastante geral, podendo ser utilizado para diversas finalidades, que vão do estudo de aeroelasticidade de asas engastadas até análises de qualidade de voo de aeronaves muito flexíveis. Por necessitar de poucas informações sobre a aeronave (geometria e estimativa das propriedades de massa, inércia e rigidez), o código pode ser utilizado em etapas iniciais de projeto.

No Capítulo 5, o AeroFlex foi validado para diversos casos de equilíbrio estrutural, dinâmica de estruturas e aeroelasticidade. Os resultados obtidos são muito próximos da literatura, inclusive para os casos de aeroelasticidade de asas muito flexíveis, onde o cálculo da condição de equilíbrio não linear mostrou afetar significativamente a velocidade e frequência de flutter.

## 7.2 Resultados numéricos

No Capítulo 6, foram apresentadas diversas análises feitas com o AeroFlex, procurando verificar como o número de elementos, a escolha do modelo aerodinâmico e o cálculo das matrizes estruturais afetam os resultados da ferramenta. Utilizou-se como aeronave-modelo uma asa voadora com alongamento elevado.

As análises de convergência mostraram que a escolha do número de elementos estruturais afeta significativamente tanto os resultados de equilíbrio quanto a resposta dinâmica. Mostrou-se claramente haver convergência dos resultados, ao aumentar a discretização da viga. Entretanto, a utilização de uma quantidade moderada de elementos já leva a custos computacionais proibitivos. Deve-se buscar, portanto, uma solução de compromisso entre a precisão dos resultados e o custo computacional. Na Seção 7.4.1.1 são apresentadas sugestões para melhorar a velocidade de processamento do programa.

A utilização de modelo aerodinâmico não estacionário mostrou-se necessária para aeronaves com grande flexibilidade. A divergência entre as respostas obtidas a partir de modelos quase estacionários é bem mais significativa para aeronaves flexíveis do que para um modelo rígido.

Adicionalmente, foi possível verificar que, para os casos estudados, é possível simplificar o modelo estrutural, mantendo as matrizes Jacobianas estruturais constantes. Mesmo para aeronaves com grande flexibilidade, as diferenças entre as duas respostas não são muito significativa. Isso permite uma considerável redução no tempo computacional durante simulações não lineares.

Finalmente, estudos de estabilidade da asa voadora mostraram que os graus de liberdade de corpo rígido acoplados aos modos aeroelásticos podem levar a fenômenos de



instabilidade em frequências mais baixas e velocidades menores do que a instabilidade aeroelástica clássica.

### 7.3 Limitações da formulação empregada

#### **Modelo aerodinâmico:**

- A teoria das faixas só representa bem asas com grande alongamento; em asas de baixo alongamento, a interferência entre as faixas e os efeitos relacionados com a ponta da asa passam a ser relevantes.
- Não foram considerados efeitos não lineares na aerodinâmica. Dessa forma, o modelo só é válido para pequenos ângulos de ataque.

**Dinâmica estrutural:** O modelo estrutural empregado é de viga. Esse modelo representa bem estruturas esbeltas ou estruturas na qual a maior parte da rigidez está associada a uma longarina.

Com essas limitações, aerodinâmicas e estruturais, o modelo empregado deve ser utilizado com cuidado redobrado para aeronaves com asas de baixo alongamento. Sugestões para melhorias do modelo são apresentadas na Seção 7.4.2.

## 7.4 Sugestões para trabalhos futuros

### 7.4.1 Melhorias no AeroFlex

#### 7.4.1.1 Tempo de processamento

Conforme apresentado na Seção 6.1, o tempo de processamento depende do número de elementos utilizados. Para uma aeronave com 16 elementos no total, por exemplo, o tempo para fazer uma simulação de apenas 5 segundos já pode ultrapassar uma hora. Entretanto, várias melhorias podem ser implementadas visando agilizar os cálculos e tornar o código mais rápido:

- **Otimizar o código:** As etapas mais lentas do código consistem no cálculo das matrizes estruturais e montagem das matrizes globais da aeronave. Deve-se buscar formas de otimizar o código, através de algoritmos mais eficientes. Na versão do código utilizada para a apresentação dos resultados desta dissertação, muitas das matrizes globais eram montadas através de alocação de memória dentro de um laço iterativo. A utilização de alocação de memória prévia é um dos esforços que pode levar a menor uso de processamento.
- **Implementar a linearização analítica das equações:** A linearização das equações do movimento é feita numericamente. Isso exige um grande esforço computacional, uma vez que é necessário acessar  $2N$  vezes a dinâmica da aeronave para completar a linearização (onde  $N$  é o número total de estados <sup>1</sup>). A utilização de um modelo linear analítico (tal como apresentado por Su (2008) deve levar a uma considerável melhora no custo computacional. Além disso, a utilização de um modelo

---

<sup>1</sup>Supondo uma aeronave com 16 elementos estruturais, por exemplo. Utilizando 6 estados aerodinâmicos por nó. O número total de estados dessa aeronave é 364!

linearizado analítico deve melhorar muito o custo computacional e a robustez das ferramentas utilizadas para encontrar o equilíbrio (FSOLVE) e integrar as equações do movimento (ODE15i e ODE15s). Deve-se lembrar que essas ferramentas precisam do gradiente da função, e caso não seja fornecido, fazem o cálculo numericamente.

- **Utilização de técnicas de processamento paralelo:** Após o devido cuidado com os dois itens anteriores, o autor sugere que seja feito um estudo envolvendo a utilização de processamento paralelo. Diversos cálculos realizados dentro de laços podem ser facilmente distribuídos em vários processadores, resultando em aumento da velocidade de processamento.

#### 7.4.1.2 Funcionalidades que faltam ser implementadas

Além da linearização analítica, comentada no item anterior, algumas funcionalidades já apresentadas nas Refs. (SHEARER, 2006; SU, 2008) ainda não foram implementadas no AeroFlex. Entre elas, destacam-se:

- Fuselagens flexíveis e membros estruturais ramificados;
- Inclusão de restrições de deslocamento, permitindo o estudo de aeronaves de configuração “Joined-Wing” (ou seja, duas asas com extremidades conectadas);
- Acoplar o programa a um software de cálculo estrutural de seção transversal. Isso permitirá que sejam utilizados como dados de entrada apenas dados geométricos e de materiais. Dessa forma, o programa poderá ser utilizado, por exemplo, em etapas iniciais de projeto utilizando técnicas de otimização multidisciplinar.

### 7.4.2 Sugestões de estudos para contribuições para o estado da arte

Apesar de mais de 40 anos terem se passado desde a primeira publicação sobre o assunto, o estudo da dinâmica de voo de aeronaves flexíveis ainda apresenta muitas lacunas e aspectos que precisam ser melhor explorados e compreendidos. As abordagens que utilizam modelos estruturais linearizados pecam para o caso de grandes deflexões. A abordagem apresentada neste trabalho possui outras limitações, como estar restrita a membros estruturais alongados e cuja dinâmica estrutural possa ser adequadamente aproximada como uma viga de propriedades unidimensionais.

O assunto é complexo e de natureza multidisciplinar, sendo totalmente dependente do grau de detalhamento dos modelos aerodinâmicos e estruturais utilizados.

A literatura carece de um estudo aprofundado que compare as diferentes metodologias de modelagem já existentes, procurando evidenciar suas limitações e capacidades.

Para melhorar a modelagem aerodinâmica, algumas sugestões são apresentadas:

- Correções aerodinâmicas não lineares a partir de dados experimentais de perfis (ou calculados através de algum software de análise aerodinâmica de perfis);
- Inclusão de efeitos de interferência entre faixas e de ponta de asa ou utilização de um método aerodinâmico para asas finitas;
- Utilização de um modelo de estol dinâmico;
- Inclusão de efeitos de interferência entre as superfícies aerodinâmicas.

Outros aspectos ainda merecem ser melhor explorados, entre eles:

- A inclusão de momento angular do sistema propulsivo e o estudo de sua interação com o sistema aeroelástico, incluindo graus de liberdade de corpo rígido;
- Utilização de um modelo de dinâmica de estruturas mais geral (em substituição ao modelo de viga);
- Estudos aprofundados sobre a integração das equações do movimento, melhorando a eficiência da integração;
- Validação com ensaios experimentais.

# Referências

- BALVEDI, E. A. **Linear and Nonlinear Aeroelastic Analyses of a Typical Airfoil Section With Control Surface Freeplay**. 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- BISPLINGHOFF, R.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. **Aeroelasticity**. Cambridge, MA: Addison Wesley, 1955.
- BROWN, E. L. **Integrated Strain Actuation In Aircraft With Highly Flexible Composite Wings**. 205 f. Tese (Dissertation for a Doctoral Degree) — Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- CESNIK, C.; BROWN, E. Modeling of high aspect ratio active flexible wings for roll control. In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, STRUCTURAL DYNAMICS, AND MATERIALS CONFERENCE AND EXHIBIT, 43., 2002, Denver, CO. **Proceedings...** Reston, VA: AIAA, 2002.
- ETKIN, B. **Dynamics of atmospheric flight**. New York: Wiley, 1972.
- ETKIN, B.; REID, L.; DUFF, L. **Dynamics of flight: stability and control**. New York: Wiley, 1996.
- GOLAND, M. The flutter of a uniform cantilever wing. **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, n. 4, p. A197–A208, Dez. 1945.
- HADDADPOUR, H.; FIROUZ-ABADI, R. D. Evaluation of quasi-steady aerodynamic modeling for flutter prediction in subsonic flow. **Journal of Thin-Walled Structures**, v. 44, n. 9, p. 931–936, Set. 2006.
- HODGES, D. A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 26, n. 11, p. 1253–1273, 1990.
- MATTOS, B. Short history of brazilian aeronautics. In: AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, 44., 2006, Reno, Nevada. **Proceedings...** Reston, VA: AIAA, 2006.
- MILNE, R. **Dynamics of the deformable aeroplane**. London: HMSO, 1964.
- NELSON, R. **Flight stability and automatic control**. New York: McGraw-Hill, 1989.

- NETO, A. B. G. **Dinâmica e controle de aeronaves flexíveis com modelagem aerodinâmica pelo método Doublet-Lattice**. 2008. 176 f. Dissertação (Trabalho de Graduação) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- NOLL, T.; BROWN, J.; PEREZ-DAVIS, M.; ISHMAEL, S.; TIFFANY, G.; GAIER, M. **Investigation of the helios prototype aircraft mishap**. Washington,DC: NASA. Disponível em: <[http://www.nasa.gov/pdf/64317main\\_helios.pdf](http://www.nasa.gov/pdf/64317main_helios.pdf)>. Acesso em: 29.10.2011, 2004.
- PATIL, M.; HODGES, D.; CESNIK, C. Characterizing the effects of geometrical nonlinearities on aeroelastic behavior of high-aspect-ratio wings. In: INTERNATIONAL FORUM ON AEROELASTICITY AND STRUCTURAL DYNAMICS, 1999, Williamsburg,VA. **Proceedings...** [S.l.], 1999.
- PATIL, M. J. **Nonlinear Aeroelastic Analysis, Flight Dynamics, and Control of a Complete Aircraft**. 1999. 130 f. Tese (Dissertation for a Doctoral Degree) — Georgia Institute of Technology.
- PERKINS, C.; COURTLAND, D. Development of airplane stability and control technology. **AIAA Journal of Aircraft**, v. 7, n. 4, p. 290–301, 1970.
- PETERS, D.; KARUNAMOORTHY, S.; CAO, W. Finite state induced flow models. i: Two-dimensional thin airfoil. **Journal of Aircraft**, v. 32, n. 2, p. 313–322, 1995.
- PETERS, D. A.; HSIEH, M.-c. A.; TORRERO, A. A state-space airloads theory for flexible airfoils. **JOURNAL OF THE AMERICAN HELICOPTER SOCIETY**, v. 52, n. 4, p. 329–342, 2007.
- POGORZELSKI, G. **Dinâmica de Aeronaves Flexíveis Empregando Teoria das Faixas Não-Estacionária**. 2010. 325 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- ROSKAM, J. **Airplane flight dynamics and automatic flight controls**. Lawrence,Kansas: DAR Corporation, 1995.
- SHEARER, C. M. **Coupled Nonlinear Flight Dynamics, Aeroelasticity and Control of Very Flexible Aircraft**. 2006. 217 f. Tese (Dissertation for a Doctoral Degree) — The University of Michigan, Ann Arbor.
- SILVA, A. L. da. **Nonlinear optimum model following control of flexible aircraft**. 2010. 222 f. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.
- SILVA, A. L. da; PAGLIONE, P.; YONEYAMA, T. Conceptual flexible aircraft model for modeling, analysis and control studies. In: ATMOSPHERIC FLIGHT MECHANICS CONFERENCE, 2010, Toronto. **Proceedings...** Reston, VA: AIAA, 2010.
- SILVESTRE, F.; PAGLIONE, P. Dynamics and control of a flexible aircraft. In: ATMOSPHERIC FLIGHT MECHANICS CONFERENCE AND EXHIBIT, 2008, Honolulu,Hawaii. **Proceedings...** Reston, VA: AIAA, 2008.

SILVESTRE, F. J. **Modelagem da mecânica do voo de aeronaves flexíveis e aplicações de controle**. 2007. 119 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

STEVENS, B.; LEWIS, F. **Aircraft control and simulation**. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2003.

SU, W. **Coupled Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Fully Flexible Aircraft**. 2008. 237 f. Tese (Dissertation for a Doctoral Degree) — The University of Michigan, Ann Arbor.

SU, W.; CESNIK, C. Nonlinear aeroelasticity of a very flexible blended-wing-body aircraft. **Journal of Aircraft**, v. 47, n. 5, p. 1539–1553, 2010.

WASZAK, M. R.; DAVIDSON, J. B.; SCHMIDT, D. K. **A Simulation Study of the Flight Dynamics of Elastic Aircraft**. Washington,DC: NASA, 1987 (NASA–CR4102).

WASZAK, M. R.; SCHMIDT, D. K. Flight dynamics of aeroelastic vehicles. **Journal of Aircraft**, v. 25, n. 6, 1988.

WEISSHAAR, T. A. **Aircraft Aeroelastic Design And Analysis**. West Lafayette, Indiana: School of Aeronautics and Astronautics. Purdue University - Notas de Aula, 1995.

YATES, E. **Calculation of flutter characteristics for finite-span swept or unswept wings at subsonic and supersonic speeds by a modified strip analysis**. Washington,DC: NACA, 1958 (NACA–RM5710).



# Apêndice A - Cálculo das deflexões estruturais

No Capítulo 3 é definido o vetor  $\vec{h}_r$ , que representa as deflexões estruturais, em relação ao sistema de coordenadas do corpo:

$$\vec{h}(s) = \begin{bmatrix} \vec{p}_w(s) & \vec{w}_x^T & \vec{w}_y^T & \vec{w}_z^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.1})$$

onde  $\vec{p}_w$  consiste no vetor posição do nó, e os vetores  $\vec{w}_i$  representam a orientação desse nó.

Entretanto, as coordenadas generalizadas da formulação estrutural utilizada são as deformações estruturais ( $\vec{\epsilon}$ ). Dessa forma, são necessárias relações matemáticas que permitam obter as deflexões estruturais em função das deformações.

As seguintes equações diferenciais representam as deflexões em função das deformações

da viga (BROWN, 2003):

$$\frac{\partial \vec{p}_w}{\partial s} = [1 + \epsilon_x] \vec{w}_x(s) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \vec{w}_x}{\partial s} = k_z \vec{w}_y(s) - k_y \vec{w}_z(s) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \vec{w}_y}{\partial s} = k_x \vec{w}_z(s) - k_z \vec{w}_x(s) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \vec{w}_z}{\partial s} = k_y \vec{w}_x(s) - k_x \vec{w}_y(s) \quad (\text{A.5})$$

Essas equações podem ser representadas de forma compacta como:

$$\frac{\partial \vec{h}_r}{\partial s} = A(s) \vec{h}_r \quad (\text{A.6})$$

onde:

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \epsilon_x(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z(s) & -k_y(s) \\ 0 & -k_z(s) & 0 & k_x(s) \\ 0 & k_y(s) & -k_x(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A solução para a Eq. A.6, considerando deformações constantes, é dada por:

$$h_r(s) = e^{A(s-s_0)} \vec{h}_{r0} = e^{G(s)} \vec{h}_{r0} \quad (\text{A.8})$$

onde  $e^{A(s-s_0)}$  é um exponencial matricial.

Dessa forma, dada a posição e orientação ( $\vec{h}_{n1}$ ) do primeiro nó de um elemento, é possível calcular as posições e orientações dos dois nós seguintes ( $\vec{h}_{n2}$  e  $\vec{h}_{n3}$ ):

$$\vec{h}_{n2} = e^{0.5A_n\Delta s}\vec{h}_{n1} = e^{Gn}\vec{h}_{n1} \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{h}_{n3} = e^{0.5A_n\Delta s}\vec{h}_{n2} = e^{Gn}\vec{h}_{n2} \quad (\text{A.10})$$

onde  $Gn = 0.5A_n\Delta s$ ;  $\Delta s$  é o comprimento do elemento.

Note que em uma situação não deformada, todo elemento consiste em uma linha reta. Para representar membros estruturais com formas arbitrárias, é necessário rotacionar um elemento em relação ao outro. Com esse objetivo, a matriz de rotação  $D^{nm}$  é definida:

$$\vec{h}_{n1} = D^{nm}\vec{h}_{(n-1)3} \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$D^{nm} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} & 0_{3x3} \\ 0_{3x3} & c_{xx}I_{3x3} & c_{xy}I_{3x3} & c_{xz}I_{3x3} \\ 0_{3x3} & c_{yx}I_{3x3} & c_{yy}I_{3x3} & c_{yz}I_{3x3} \\ 0_{3x3} & c_{zx}I_{3x3} & c_{zy}I_{3x3} & c_{zz}I_{3x3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Os elementos  $c_{ij}$  são obtidos da seguinte matriz de rotação:

$$c = \begin{bmatrix} \cos \delta_d & 0 & \sin \delta_d \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta_d & 0 & \cos \delta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta_e & -\sin \delta_e & 0 \\ \sin \delta_e & \cos \delta_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_t & -\sin \delta_t \\ 0 & \sin \delta_t & \cos \delta_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

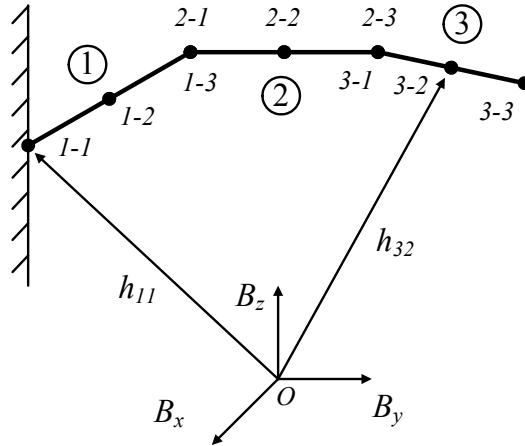


FIGURA A.1 – Viga (membro estrutural incluindo três elementos) - (SU, 2008)

onde  $\delta_t$ ,  $\delta_e$  e  $\delta_d$  são os ângulos de rotação de torção, enflechamento e diedro de um elemento em relação ao outro.

Podemos agora, a partir das deformações estruturais de cada elemento, das rotações entre um elemento e o subsequente, e da posição e orientação do nó inicial, calcular as posições e orientações de todos os demais nós do membro em questão.

A Figura A.1 apresenta uma viga com 3 elementos. Os vetores de deflexão de cada nó podem ser obtidos:

$$\vec{h}_{11} = \vec{h}_0 \quad \vec{h}_{12} = e^{G_1} \vec{h}_{11} \quad \vec{h}_{13} = e^{G_1} \vec{h}_{12} \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{h}_{21} = D^{21} \vec{h}_{13} \quad \vec{h}_{22} = e^{G_2} \vec{h}_{21} \quad \vec{h}_{23} = e^{G_2} \vec{h}_{22} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{h}_{31} = D^{32} \vec{h}_{23} \quad \vec{h}_{32} = e^{G_3} \vec{h}_{31} \quad \vec{h}_{33} = e^{G_3} \vec{h}_{32} \quad (\text{A.16})$$

Deve-se reforçar que a obtenção das deflexões a partir das expressões acima exige o cálculo de uma exponencial matricial. Pode-se resolver através de métodos numéricos, como fez Brown (2003). Shearer (2006), por outro lado, apresentou uma solução analítica.

O presente trabalho utilizou as expressões sugeridas por Shearer. Para detalhes sobre os cálculos, sugere-se a leitura dos apêndices B e C de (SHEARER, 2006).

## FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO

1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO  DM	2. DATA  08 de dezembro de 2011	3. REGISTRO N°  DCTA/ITA/DM-062/2011	4. N° DE PÁGINAS  157
5. TÍTULO E SUBTÍTULO:  Dinâmica de voo de aeronaves muito flexíveis			
6. AUTOR(ES):  <b>Flávio Luiz Cardoso Ribeiro</b>			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES):  Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR:  Aeronaves muito flexíveis, estruturas não lineares, aeroelasticidade, aerodinâmica não estacionária.			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO:  Estruturas de aeronaves; Corpos flexíveis; Aeroelasticidade; Dinâmica de voo; Aerodinâmica não estacionária; Engenharia aeronáutica.			
10. APRESENTAÇÃO: <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <span><b>X Nacional</b></span> <span><b>Internacional</b></span> </div> ITA, São José dos Campos. Curso de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica. Área de Mecânica de Voo. Orientador: Pedro Paglione; coorientador: Roberto Gil Annes da Silva. Defesa em 18/11/2011. Publicada em 2011.			
11. RESUMO:  <p>Este trabalho apresenta uma formulação matemática para a modelagem de aeronaves de grande flexibilidade. Uma ferramenta computacional foi implementada e utilizada para analisar como a flexibilidade afeta as características de dinâmica de voo.</p> <p>Um modelo de viga não linear, ou seja considerando grandes deslocamentos, foi aplicado para a dinâmica de estruturas. Para os cálculos aerodinâmicos, utilizou-se a teoria das faixas incluindo três modelos bi-dimensionais: quase estacionário, quase estacionário com massa aparente e não estacionário.</p> <p>Uma asa voadora de grande alongamento foi considerada como caso de estudo. Uma investigação de sensibilidade foi desempenhada para verificar como os modelos aerodinâmicos empregados e a discretização da dinâmica estrutural afetam os resultados da ferramenta computacional.</p> <p>As equações elásticas do movimento foram linearizadas, permitindo estudo de estabilidade aeroelástica. Os resultados obtidos baseados no modelo de aeronave proposto mostraram que a instabilidade aeroelástica é fortemente afetada pelos graus de liberdade de corpo rígido, bem como pelas grandes deflexões estruturais da asa em equilíbrio.</p>			
12. GRAU DE SIGILO:  <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <span><b>(X) OSTENSIVO</b></span> <span><b>( ) RESERVADO</b></span> <span><b>( ) CONFIDENCIAL</b></span> <span><b>( ) SECRETO</b></span> </div>			