Aula 7

30 Abril 2019

Resumo da aula passada

- Estimação de perturbações empregando observador de estados
- Determinação de valores de equilíbrio para o estado e o controle

Tópicos da aula de hoje

- Tratamento de restrições - caso SISO

Restrições a serem consideradas

Três tipos básicos de restrições serão considerados:

- Incrementos no controle Δu
- Excursão do controle u
- Excursão da saída y

Como se verá, todas essas restrições podem ser expressas em termos de restrições sobre $\Delta \hat{\mathbf{u}}$.

Restrições sobre os incrementos no controle Δu

$$\boxed{\Delta u_{min} \leq \Delta\hat{u}(k+i-1|k) \leq \Delta u_{max},\ \ i = 1, 2, \ldots, M}$$

Vale ressaltar que Δu_{min} e Δu_{max} são limitantes para o incremento no controle **por período de amostragem**.

Ex: Suponha que o controle u corresponda a uma deflexão medida em graus e que a taxa de variação de u esteja limitada a $\pm 10^{\circ}/$ s.

Se o período de amostragem for $T = 10$ ms, quais serão os valores de Δu_{min} e Δu_{max} ?

Resp: $\Delta u_{min} = -0{,}1^{\circ}$ e $\Delta u_{max} = +0{,}1^{\circ}$.

Notação alternativa:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}^{1_M} \Delta u_{min} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}^{1_M} \Delta u_{max}$$

$$1_M \Delta u_{min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq 1_M \Delta u_{max}$$

Vale ressaltar que o símbolo $\leq$ é aqui empregado para denotar uma desigualdade **elemento a elemento**.

$$1_M \Delta u_{min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq 1_M \Delta u_{max}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \Delta \hat{\mathbf{u}} & \leq & 1_M \Delta u_{max} \\ -\Delta \hat{\mathbf{u}} & \leq & -1_M \Delta u_{min} \end{array} \right.$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_M \\ -I_M \end{bmatrix}}^{2M \times M} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} 1_M \Delta u_{max} \\ -1_M \Delta u_{min} \end{bmatrix}}^{2M \times 1}$$

Restrições sobre a excursão do controle u

$$\boxed{u_{min} \leq \hat{u}(k+i-1|k) \leq u_{max}, \;\; i = 1, 2, \ldots, M}$$

Obs: Se o modelo tiver sido linearizado em torno de um valor de equilíbrio $\bar{u}_p$ para o controle (vide Aula 3), os limitantes u_{max} e u_{min} corresponderão a diferenças com respeito a $\bar{u}_p$.

Ex: Suponha que o controle seja gerado por uma fonte de tensão que satura em $u_{p,min} = -5$ V e $u_{p,max} = +5$ V.

Se a operação se der em torno de um valor de equilíbrio $\bar{u}_p = +3$ V, quais serão os valores de u_{min} e u_{max} a serem empregados nas restrições ?

Resp: $u_{min} = u_{p,min} - \bar{u}_p = -8$ V e $u_{max} = u_{p,max} - \bar{u}_p = +2$ V.

- Notação alternativa:

$$1_M u_{min} \leq \hat{\mathbf{u}} \leq 1_M u_{max}$$

- Para expressar estas restrições em termos de $\Delta\hat{\mathbf{u}}$, deve-se obter uma relação entre $\hat{\mathbf{u}}$ e $\Delta\hat{\mathbf{u}}$.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(k|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) \\
\hat{u}(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\
&= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\
&\vdots \\
\hat{u}(k+M-1|k) &= u(k-1) + \Delta\hat{u}(k|k) + \cdots + \Delta\hat{u}(k+M-1|k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \cdots + \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}
$$

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(M\times 1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{1_M u(k-1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{T_M(M\times M)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta\hat{\mathbf{u}}(M\times 1)}
$$

$$
\boxed{\hat{\mathbf{u}} = 1_M u(k-1) + T_M \Delta\hat{\mathbf{u}}}
$$

$$1_M u_{min} \leq \hat{\mathbf{u}} \leq 1_M u_{max}$$

$$\boxed{1_M u_{min} \leq 1_M u(k-1) + T_M \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq 1_M u_{max}}$$

$$1_M[u_{min} - u(k-1)] \leq T_M \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq 1_M[u_{max} - u(k-1)]$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_M \Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & 1_M[u_{max} - u(k-1)] \\ -T_M \Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & 1_M[u(k-1) - u_{min}] \end{array} \right.$$

$$\overbrace{\left[\begin{array}{c} T_M \\ -T_M \end{array} \right]}^{2M \times M} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\left[\begin{array}{c} 1_M[u_{max} - u(k-1)] \\ 1_M[u(k-1) - u_{min}] \end{array} \right]}^{2M \times 1}$$

Equívoco a ser evitado

Uma restrição da forma

$$T_M \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq 1_M[u_{max} - u(k-1)]$$

não é equivalente a

$$\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq T_M^{-1} 1_M[u_{max} - u(k-1)]$$

Exemplo: $M = 2$, $u(k-1) = 0$, $u_{max} = 1$

$$T_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma **correta** de se escrever a restrição:

$$T_M \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq 1_M [u_{max} - u(k-1)]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}(k|k) \leq 1 \\ \Delta \hat{u}(k|k) + \Delta \hat{u}(k+1|k) \leq 1 \end{cases}$$

Exemplo: $M = 2$, $u(k-1) = 0$, $u_{max} = 1$

Forma **correta** de se escrever a restrição:

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}(k|k) \leq 1 \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \leq 1 \end{cases}$$

Forma **incorreta** de se escrever a restrição:

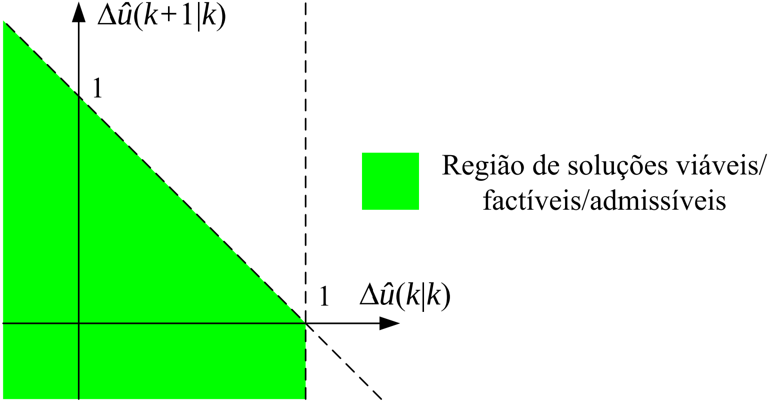
$$\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq T_M^{-1} 1_M [u_{max} - u(k-1)]$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}(k|k) \leq 1 \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \leq 0 \end{cases}$$

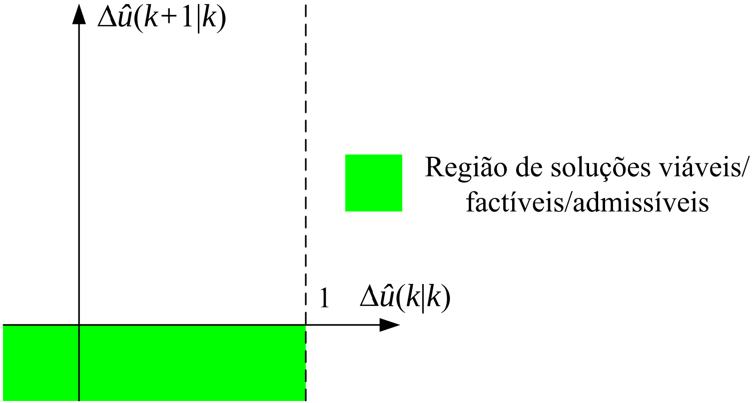
Forma **correta** de se escrever a restrição:

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}(k|k) \leq 1 \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \leq 1 \end{cases}$$



Forma **incorreta** de se escrever a restrição:

$$\begin{cases} \Delta\hat{u}(k|k) \leq 1 \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \leq 0 \end{cases}$$



Restrições sobre a excursão da saída y

$$\boxed{y_{min} \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{max}, \ i = 1, 2, \ldots, N}$$

Obs: Se o modelo tiver sido linearizado em torno de um valor de equilíbrio $\bar{y}_p$ para a saída (vide Aula 3), os limitantes y_{max} e y_{min} corresponderão a diferenças com respeito a $\bar{y}_p$, isto é

$$y_{min} = y_{p,min} - \bar{y}_p$$
$$y_{max} = y_{p,max} - \bar{y}_p$$

Notação alternativa:

$$1_N y_{min} \leq \hat{\mathbf{y}} \leq 1_N y_{max}$$

Lembrando que $\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$, a restrição pode ser reescrita como

$$1_N y_{min} \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \leq 1_N y_{max}$$

$$1_N y_{min} - \mathbf{f} \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq 1_N y_{max} - \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} G\Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & 1_N y_{max} - \mathbf{f} \\ -G\Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & \mathbf{f} - 1_N y_{min} \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix}}^{2N \times M} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} 1_N y_{max} - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - 1_N y_{min} \end{bmatrix}}^{2N \times 1}$$

Resumo das restrições

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_M \\ -I_M \\ T_M \\ -T_M \\ G \\ -G \end{bmatrix}}^{S[(4M+2N)\times M]} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} 1_M \Delta u_{max} \\ -1_M \Delta u_{min} \\ 1_M[u_{max} - u(k-1)] \\ 1_M[u(k-1) - u_{min}] \\ 1_N y_{max} - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - 1_N y_{min} \end{bmatrix}}^{b[(4M+2N)\times 1]}$$

$$\boxed{S\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b}$$

Formulação do problema de otimização com restrições

O problema de otimização na presença das restrições consideradas pode ser formulado como

$$\min_{\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M} J(\Delta\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta\hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathrm{cte}$$

sujeito a

$$S\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b$$

- Função de custo quadrática com $\mathcal{H} > 0$
- Restrições lineares

$$\boxed{\text{Problema de Programação Quadrática}}$$

Pode-se mostrar que este é um problema de otimização **convexo**.

Convexidade

Para mais detalhes, vide Capítulos 2, 3 e 4 da seguinte referência:

Boyd, S.; Vandenberghe, L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

Conjuntos convexos

Um conjunto $\mathcal{C}$ é dito ser **convexo** se, para quaisquer $x, y \in \mathcal{C}$ e qualquer escalar λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, tem-se

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{C}$$

Conjunto definido por intersecção de semiespaços

Pode-se mostrar que um conjunto $\mathcal{C}$ não vazio definido como

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^M \;\middle|\; Sx \leq b \right\}$$

é convexo.

Com efeito, dados $x, y \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se

$$S\left[\lambda x + (1-\lambda)y\right] = \lambda Sx + (1-\lambda)Sy \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

Portanto $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}$.

Funções convexas

Uma função $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ é dita ser **convexa** se $\mathcal{C}$ for um conjunto convexo e

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in [0,1]$.

A função f é dita ser **estritamente convexa** se

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

sempre que $x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$.

Função quadrática

Pode-se mostrar que uma função $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = x^T Qx + c^T x + d \ , \quad Q = Q^T > 0$$

é estritamente convexa. Com efeito, sejam $x, y \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$ e $0 < \lambda < 1$. Tem-se, então:

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) =$$

$$\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)^T Q\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) + c^T\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) + d$$

$$= \lambda^2 x^T Qx + \lambda(1-\lambda)x^T Qy + \lambda(1-\lambda)y^T Qx + (1-\lambda)^2 y^T Qy$$

$$+\lambda c^T x + (1-\lambda)c^T y + d$$

Por outro lado:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) =$$

$$\lambda\left(x^T Q x + c^T x + d\right) + (1-\lambda)\left(y^T Q y + c^T y + d\right) =$$

$$\lambda x^T Q x + (1-\lambda) y^T Q y + \lambda c^T x + (1-\lambda) c^T y + d$$

Logo:

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) - \left[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\right] =$$

$$\lambda^2 x^T Qx + \lambda(1-\lambda)x^T Qy + \lambda(1-\lambda)y^T Qx + (1-\lambda)^2 y^T Qy$$

$$\cancel{+ \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T y + d}$$

$$-\lambda x^T Qx - (1-\lambda)y^T Qy \cancel{- \lambda c^T x - (1-\lambda)c^T y - d}$$

$$= \lambda(\lambda-1)x^T Qx - \lambda(\lambda-1)x^T Qy - \lambda(\lambda-1)y^T Qx + (1-\lambda)(-\lambda)y^T Qy$$

$$= \lambda(\lambda-1)\Big[(x-y)^T Q(x-y)\Big] \overset{*}{<} 0$$

$*Q > 0, x \neq y, 0 < \lambda < 1$

Mínimo local de uma função convexa

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto convexo e $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que $x' \in \mathcal{C}$ seja um ponto de mínimo local de f, isto é:

$$f(x') = \min_{x \in \mathcal{C},\, ||x - x'|| \leq r} f(x)$$

para algum $r > 0$. Então, pode-se mostrar que x' também é um ponto de mínimo global.

$$f(x') = \min_{x \in \mathcal{C},\, ||x - x'|| \leq r} f(x) \tag{1}$$

Por absurdo, suponha que exista $x'' \in \mathcal{C}$ tal que

$$f(x'') < f(x')$$

Nesse caso, em vista de (1), tem-se

$$||x'' - x'|| > r > 0 \tag{2}$$

Seja agora $y = (1 - \lambda)x' + \lambda x''$ com

$$\lambda = \frac{r}{2||x'' - x'||} \tag{3}$$

De (2) e (3), segue que $0 < \lambda < 1$.

$$y = (1 - \lambda)x' + \lambda x''$$

$$\lambda = \frac{r}{2||x'' - x'||}$$

Como $\mathcal{C}$ é convexo e $0 < \lambda < 1$, tem-se que $y \in \mathcal{C}$. Adicionalmente:

$$||y - x'|| = || - \lambda x' + \lambda x''|| = \lambda ||x'' - x'|| = \frac{r}{2} < r$$

$$f(x') = \min_{x \in \mathcal{C},\, ||x - x'|| \leq r} f(x) \tag{1}$$

$$||y - x'|| < r \tag{4}$$

Como $y = (1-\lambda)x' + \lambda x''$, com $0 < \lambda < 1$, e a função f é convexa, tem-se que

$$f(y) \leq (1-\lambda) f(x') + \lambda \underbrace{f(x'')}_{< f(x')} < f(x')$$

o que contradiz (1) e (4).

Mínimo local de uma função estritamente convexa

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto convexo e $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa. Suponha que $x' \in \mathcal{C}$ seja um ponto de mínimo local de f, isto é:

$$f(x') = \min_{x \in \mathcal{C},\, ||x - x'|| \leq r} f(x)$$

para algum $r > 0$. Então, se $x \in \mathcal{C}$ e $f(x) = f(x')$, pode-se mostrar que $x = x'$.

Se $x \in \mathcal{C}$ e $f(x) = f(x')$, pode-se mostrar que $x = x'$.

Por absurdo, suponha que $x \neq x'$. Seja então

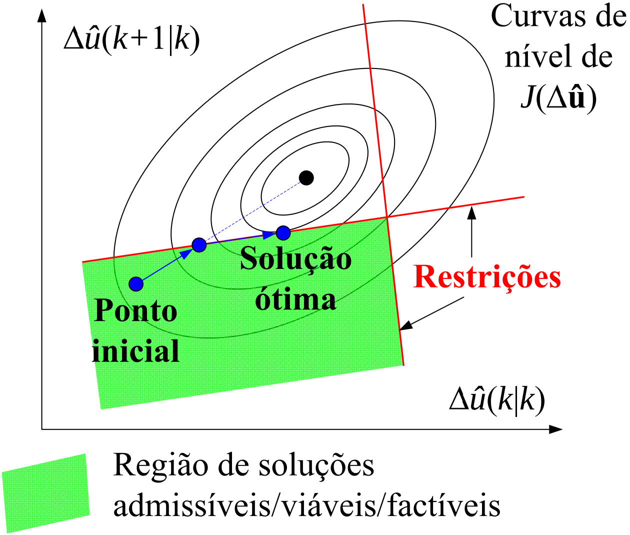
$$y = \lambda x + (1 - \lambda)x'$$

com $0 < \lambda < 1$. Da convexidade de $\mathcal{C}$, tem-se que $y \in \mathcal{C}$. Sabendo que f é estritamente convexa, conclui-se que

$$f(y) < \lambda \underbrace{f(x)}_{f(x')} + (1 - \lambda)f(x') = f(x')$$

o que contradiz a hipótese de que x' é mínimo local (e, portanto, global) da função f.

Programação Quadrática (Ex: $M = 2$)



Programação Quadrática no Matlab

Função `QUADPROG` (Optimization Toolbox):

```
x = quadprog(H,f,A,b)
```
minimiza `0.5*x'*H*x + f'*x`
sujeito a `A*x <= b`

Em nosso caso:

$$
\begin{aligned}
&x_{qp} = \Delta \hat{\mathbf{u}} \\
&H_{qp} = \mathcal{H} = 2(G^T G + \rho I_M) \\
&f_{qp} = c = 2G^T(\mathbf{f} - \mathbf{r}) \\
&A_{qp} = S \\
&b_{qp} = b
\end{aligned}
$$

podendo ser omitido o fator 2 em $\mathcal{H}$ e $\mathbf{f}$.

Argumentos adicionais da função QUADPROG

```
X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,options)
```

- `X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while additionally satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.`
- `X = QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper bounds on the design variables, X, so that the solution is in the range LB <= X <= UB. Use empty matrices for LB and UB if no bounds exist. Set LB(i) = -Inf if X(i) is unbounded below; set UB(i) = Inf if X(i) is unbounded above.`
- `X0`: `starting point.`
- `options`: opções de otimização, incluindo algoritmo a ser usado e critérios de parada.

Opções de algoritmos:

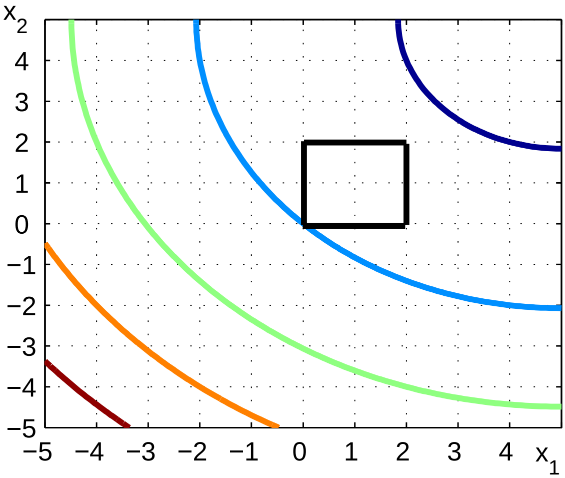
- trust-region-reflective (formerly LargeScale = 'on'): default
- active-set (formerly LargeScale = 'off')
- interior-point-convex

Programação Quadrática no Matlab: Exemplo

$$\min_{x_1, x_2} J = \frac{1}{2}\left[(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2\right]$$

s.a.

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & x_1 & \leq 2 \\ 0 \leq \quad & x_2 & \leq 2 \end{aligned}$$



x2
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
x1

Custo:

$$J = \frac{1}{2}\left[(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 - 10x_1 + 25 + x_2^2 - 10x_2 + 25)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 - 5x_2 + 25$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_{qp}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -5 \end{bmatrix}}_{{f_{qp}}^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 25$$

Restrições:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \quad x_1 \quad \leq 2 \\
0 \leq \quad x_2 \quad \leq 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 2 \\
x_2 &\leq 2 \\
-x_1 &\leq 0 \\
-x_2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_{qp}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_{qp}}
$$

```
>> H = eye(2);
>> f = [-5;-5];
>> b = [2*ones(2,1);0*ones(2,1)];
>> A = [eye(2);-eye(2)];
>> x = quadprog(H,f,A,b);
```

Resultado: `x = [2;2]`.

Para especificar o algoritmo a ser empregado:

```
>> options = optimset('Algorithm','active-set');
>> quadprog(H,f,A,b,[],[],[],[],[],options);
```

Programação Quadrática: Alguns pacotes computacionais

- CVX (Matlab software for disciplined convex programming): cvxr.com/cvx
- CVXGEN (Geração de código em C): cvxgen.com
- IPOPT (Código em C++ empregando método de pontos interiores): www.coin-or.org/Ipopt
- QL (Código original em Fortran, traduzido posteriormente para C): www.ai7.uni-bayreuth.de/software.htm
- CPLEX (IBM): www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/
- GUROBI: www.gurobi.com

MPC no espaço de estados com restrições

Informação requerida sobre a planta:

- Matrizes A, B, C do modelo no espaço de estados
- Limitantes sobre os incrementos no controle: $\Delta u_{min}, \Delta u_{max}$
- Limitantes sobre a excursão do controle: u_{min}, u_{max}
- Limitantes sobre a excursão da saída: y_{min}, y_{max}

Parâmetros de projeto:

- Peso do controle ρ
- Horizonte de predição N
- Horizonte de controle M

Inicialização:

- Fazer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0]$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}, \; \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}$$

- Fazer $H_{qp} = 2(G^T G + \rho I)$, $A_{qp} = \begin{bmatrix} I_M \\ -I_M \\ T_M \\ -T_M \\ G \\ -G \end{bmatrix}$
- Fazer $k = 0$, $u(-1) = 0$

Rotina principal:

1. Ler $x(k)$ (estado da planta) e y_{ref} (valor de referência para a saída)
2. Fazer $\mathbf{r} = [y_{ref}]_N$
3. Fazer

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

4. Calcular $\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k)$ e $f_{qp} = 2G^T(\mathbf{f} - \mathbf{r})$
5. Fazer $b_{qp} = \begin{bmatrix} 1_M \Delta u_{max} \\ -1_M \Delta u_{min} \\ 1_M[u_{max} - u(k-1)] \\ 1_M[u(k-1) - u_{min}] \\ 1_N y_{max} - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - 1_N y_{min} \end{bmatrix}$

6. Resolver o problema de otimização

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}^* = \arg \min_{\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^M} \frac{1}{2} \Delta\hat{\mathbf{u}}^T H_{qp} \Delta\hat{\mathbf{u}} + f_{qp}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad \text{s.a.} \quad A_{qp} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b_{qp}$$

7. Obter o incremento no controle:

$$\Delta u(k) = \Delta\hat{u}^*(k|k) = [\,1\ 0\ \cdots\ 0\,]\, \Delta\hat{\mathbf{u}}^*$$

8. Atualizar o controle aplicado à planta: $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$
9. Fazer $k = k + 1$
10. Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

Implementação em Matlab

- `matrizes_ss_du_restricoes.m`: Monta as matrizes Φ,G,H_{qp},A_{qp}.
- `mpc_ss_du_restricoes.m`: S-function que implementa o controlador

Exemplo: Sistema de levitação magnética

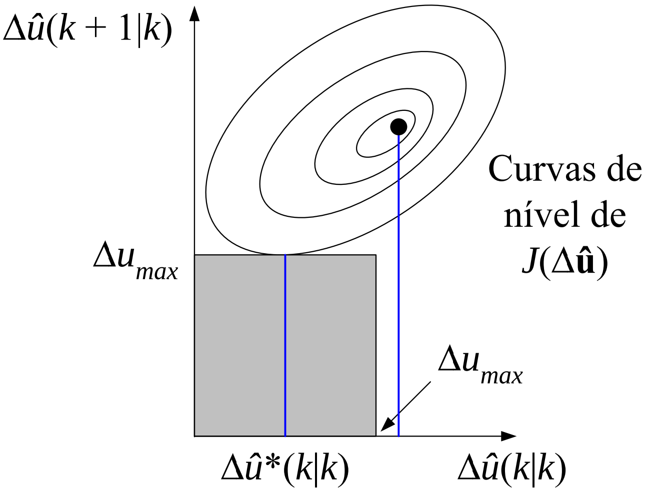
Arquivos Matlab:

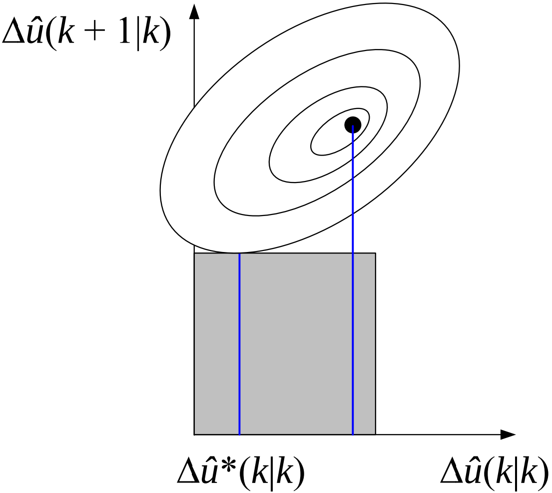
- `parametros_maglev_ss.m`: Define os parâmetros do levitador magnético
- `levitador_mpc_ss_du_restricoes.mdl`: Diagrama de simulação
- `levitador_mpc_ss_du_restricoes_pert.mdl`: Diagrama de simulação com estimação de perturbações

Importância do tratamento de restrições no controle

A importância de tratar restrições na saída y está usualmente relacionada a imposições de segurança ou requisitos de qualidade para o produto final.

- Qual a necessidade de tratar restrições sobre a entrada (em termos de excursão e/ou incrementos) ?
- Por que não calcular a sequência de controle (ou incrementos de controle) ótima e saturá-la nos limitantes inferior e superior, se necessário ?


$\Delta\hat{u}(k+1|k)$
Curvas de
nível de
$J(\Delta\hat{\mathbf{u}})$
Δu_{max}
Δu_{max}
$\Delta\hat{u}^*(k|k)$
$\Delta\hat{u}(k|k)$


$\Delta\hat{u}(k+1|k)$
$\Delta\hat{u}^*(k|k)$
$\Delta\hat{u}(k|k)$

Restrições no controle: Acomodação de falhas

- Em particular, a possibilidade de tratar restrições no controle pode ser útil para acomodação de falhas de atuadores.
- Nesse contexto, um sistema de monitoramento de falhas informaria ao controlador preditivo os novos limitantes para a excursão e/ou incrementos do sinal de controle.

Exemplo: `levitador_mpc_ss_du_restricoes_falha.mdl`

Resumo da aula de hoje

Tratamento de restrições - Caso SISO:

- Incrementos no controle Δu
- Excursão do controle u
- Excursão da saída y

Programação quadrática

Convexidade

Implementação em Matlab

Tópico da próxima aula

- Extensão ao caso MIMO