# AE-249- AEROELASTICIDADE

**Aerodinâmica Não Estacionária**

**Introdução e conceitos básicos da teoria**

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA**

# AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA

- Das equações de Navier-Stokes  para a equação potencial linearizada:
  - Escoamentos aerodinâmicos não estacionários são aqueles que ocorrem ao redor de corpos que se movem no tempo, induzindo também um movimento do fluido.
  - Estes movimentos podem ser decompostos como em uma parcela estacionária e uma não estacionaria. A primeira ocorre em torno da forma aerodinâmica do corpo, enquanto que a segunda podem ser consideradas como pequenos movimentos ao redor da condição de estado estacionário, ex., um aerofólio com a corda alinhada com um escoamento não perturbado, oscilando a pequenos movimentos em arfagem.

# O modelo matemático

- O modelo matemático que descreve o escoamento de um fluido contínuo, considerando a viscosidade, compressibilidade e admitindo condução de calor, em um contexto não estacionário é representado pelas as equações de Navier-Stokes.
- Estas equações representam o comportamento de um fluido a através da derivada substancial das grandezas que caracterizam o escoamento, tais como da massa, velocidade e sua energia.
- A derivada substancial representa a variação de uma determinada propriedade de um elemento de fluido no tempo simultaneamente com a variação de sua posição no espaço.
- A derivada substancial é fisicamente diferente da derivada da propriedade no tempo na forma convencional, pois esta última derivada não leva em conta mudança de posição dos elementos de fluido no espaço. As equações de Navier-Stokes são apresentadas a seguir:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{u} = 0 \qquad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \bar{\bar{\tau}} \qquad \rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \left[ \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{u} - \vec{q} \right]$$

# Navier-Stokes

- Onde $\overline{\overline{\tau}}$ é o tensor da tensões viscosas, *H* é entalpia total, $\vec{u}$ é vetor velocidade, *p* é a pressão e $\rho$ é a densidade, e $\vec{q}$ é um fluxo de calor. A derivada: $D(*)/Dt = \partial(*)/\partial t + \vec{u}\nabla(*)$ representa a deriva da substancial de uma determinada quantidade. Um fato é ser observado é que tem-se 5 equações para 15 incógnitas,

# Relações constitutivas

- Desta forma faz-se necessário usar relações constitutivas para resolver o problema. Estas relações constitutivas são para a pressão:

$$p = \rho RT = (\gamma - 1) ei \qquad\qquad ei = CvT$$

onde, $e_i$ é a energia interna, *T* a temperatura e *Cv* a calor específico volume constante. A entalpia é relacionada a estas grandezas por:

$$H = h + 1/2 |\vec{u}|^2 = ei + p/\rho + 1/2 |\vec{u}|^2$$

As tensões viscosas e o fluxo de calor são dados por:

$$\vec{q} = -K \nabla T \qquad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu (\nabla \vec{u}) \delta_{ij}$$

# Equações de Euler

- Prandtl em 1904 concluiu que para número de Reynolds suficientemente grandes, os efeitos importantes relacionados à viscosidade permaneciam confinados em uma camada fina junto ao corpo, ou seja, na camada limite. Esta hipótese é válida para casos onde o comprimento característico dos corpo é bem maior que a espessura desta camada. Desta forma as equações da Navier-Stokes podem ser representadas por uma forma mais simples, onde os efeitos de viscosidade podem ser desconsiderados:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p \qquad \rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{u} = 0$$

Esta forma é conhecida como as equações de Euler. Os termos de tensões viscosas e de fluxo de calor foram desconsiderados, uma vez que a condutividade térmica é uma função da viscosidade.

# Modelo Isentrópico

- Assumindo a hipótese que o escoamento é isentrópico, isto é reversível e adiabático, pode-se resolver o sistema de equações que representa este tipo de escoamento apenas considerando as conservação da massa e da quantidade de movimento, mas uma relação entre a pressão e a densidade dada pela cadeia isentrópica:

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}$$

  onde $p_0$ e $\rho_0$ são valores de referência para a pressão e densidade respectivamente. Fluido pode ser considerado barotrópico (densidade é função apenas da pressão ou de uma constante), e o sistema de equações agora possui cinco equações escalares e cinco incógnitas, que são as três componentes de velocidade $u$, $v$, $w$, a densidade e a pressão.

# Escoamento Potencial

- Assume que o escoamento é irrotacional (Teorema de Crocco)
- Escoamento irrotacional é aquele onde as partículas do fluido não rotacionam em torno de um eixo.
- A relação matemática -> rotacional do campo de velocidades. Ou seja :

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

- Para uma determinada função escalar $\phi$, tem-se, que a igualdade:

$$\nabla \times \left( \nabla \phi \right) = 0$$

  é verdadeira.
- conclui-se portanto que existe esta função escalar, cujo gradiente representa um campo de velocidades, ou seja,

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

- E esta função é conhecida como o potencial de velocidades.

**Ver Karamcheti, p 244**

# Potencial de velocidades

- O potencial de velocidades $\phi$ é uma função das coordenadas espaciais, onde cada uma das componentes de velocidade do vetor velocidade total são as derivadas do potencial em cada uma das direções do sistemas de coordenadas:

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} = \nabla \phi$$

- Com a definição do potencial de velocidade pode-se reduzir ainda mais o problema de cinco equações a cinco incógnitas para três equações e três incógnitas.

# Equação de Kelvin I

- Conhecida também como Bernoulli não estacionária. Vamos derivar este equação pois ele será empregada na dedução de uma equação função do potencial de velocidades.
- Momentum na forma vetorial:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\nabla p\Rightarrow\frac{D\vec{u}}{Dt}=\frac{-\nabla p}{\rho}\Rightarrow\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}=\frac{-\nabla p}{\rho}$$

substituindo : $\vec{u}=\nabla\phi$

temos:

$$\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}+\left(\nabla\phi\cdot\nabla\right)\nabla\phi=\frac{-\nabla p}{\rho}$$

# Equação de Kelvin II

- Uma vez que:

$$\nabla\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)=2\left(\nabla\phi\cdot\nabla\right)\nabla\phi+2\nabla\phi\times\left(\nabla\times\nabla\phi\right)$$

e como o escoamento é irrotacional, temos:

$$\nabla\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)=2\left(\nabla\phi\cdot\nabla\right)\nabla\phi$$

portanto,

$$\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}+\frac{\nabla\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}=\frac{-\nabla p}{\rho}$$

# Equação de Kelvin III

- O lado direito da não está expresso em termos de um gradiente puro do potencial
- Usamos o Teorema de Liebnitz: (Ver Hildebrandt)

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} f(x,\lambda)d\lambda = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial x}d\lambda + f(x,B)\frac{dB}{dx} + f(x,A)\frac{dA}{dx}$$

Sabendo que: $\rho = \rho(p)$

- Portanto, aplicando o teorema temos:

$$\nabla\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)} = \underbrace{\int_{p_0}^{p}\nabla\left(\frac{1}{\rho(\lambda)}\right)d\lambda}_{0} + \frac{\nabla p}{\rho} - \underbrace{\frac{\nabla p_0}{\rho}}_{0} = \frac{\nabla p}{\rho}$$

**O gradiente da função densidade é uma função explícita somente da pressão, isto é independe de x, y e z, portanto o seu gradiente será nulo.**

# Equação de Kelvin IV

- Substituindo: $$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{\nabla\left(\nabla \phi \cdot \nabla \phi\right)}{2} = \nabla \int_{p_0}^{p} \frac{d\lambda}{\rho\left(\lambda\right)} \Rightarrow$$

$$\nabla\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\left(\nabla \phi \cdot \nabla \phi\right)}{2} - \int_{p_0}^{p} \frac{d\lambda}{\rho\left(\lambda\right)}\right] = 0$$

Equação vetorial a três componentes, uma para cada coordenada cartesiana (x, y e z). Desta forma ao se integrar estas equações espera-se que uma única constante resulte do processo de integração, uma vez que é possível também representa-las na forma gradiente.

# Equação de Kelvin V

- No entanto, a única variável que é comum às três equações é o tempo, ou seja a constante resultante deverá ser pelo menos uma função desta variável.
- O resultado da integração da **Equação de Kelvin**, que não deixa de ser a versão não estacionária da equação de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\left(\nabla \phi \cdot \nabla \phi\right)}{2} + \int_{p_0}^{p} \frac{d\lambda}{\rho\left(\lambda\right)} = F\left(t\right)$$

- Onde *F(t)* é a constante de integração. Para avaliar o seu valor, toma-se como referência as condições de contorno de escoamento não perturbado dadas por:

$$\vec{u} = U_{\infty}\vec{i} \qquad \phi = U_{\infty}x \qquad p = p_0$$

# Equação de Kelvin VI

- Com as condições de contorno:

$$0+\frac{\left(U_{\infty}^{2}\right)}{2}+\underbrace{\int_{p_0}^{p_0}\frac{d\lambda}{\rho\left(\lambda\right)}}_{0}=F\left(t\right)\Rightarrow F\left(t\right)=\frac{\left(U_{\infty}^{2}\right)}{2}$$

- ou seja, nota-se que a constante de integração não é só independente do espaço, mas também independe do tempo;
- O valor prático da equação de Kelvin é que ele permite relacionar o potencial à pressão, quando se considera a relação isentrópica;
- Todavia ainda sim é necessário mais uma relação para se obter uma equação única em termos do potencial de velocidade.

# Equação do Potencial Completo I

- Para se obter uma equação única em termos do potencial de velocidade, vamos recorrer novamente à equação da continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)=0$$

que pode ser reescrita como:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{f(\phi)}+\frac{\vec{u}\nabla\rho}{\rho}+\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\nabla\phi\nabla\rho}{\rho}+\left(\nabla\cdot\nabla\phi\right)=0$$

$$f(\phi)\quad\rightarrow\quad\frac{dp}{d\rho}=a^2\quad+\quad\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

estamos usando a relação isentrópica mais a relação para a velocidade do som para obtê-lo como função do potencial de velocidade.

# Equação do Potencial Completo II

- Multiplicando o primeiro termo de (15) pela velocidade do som, tem-se:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}a^2 = \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}$$

derivando a equação de Kelvin com relação ao tempo tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2} + \int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{U_\infty^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)} = 0$$

# Equação do Potencial Completo III

- Usando novamente a regra de Liebnitz, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}=\int_{p_0}^{p}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho(\lambda)}\right)d\lambda+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}-\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial t}}_{0}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Substituindo na Equação de Kelvin derivada no tempo:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)=-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]$$

e assim temos o primeiro termo escrito como uma função do potencial e da velocidade do som.

# Equação do Potencial Completo IV

- O segundo termo da equação de Kelvin pode ser representado em termos do potencial a partir da forma gradiente desta equação:

$$\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}-\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}\right]=\underbrace{\nabla\left(\frac{U_\infty^2}{2}\right)}_{0}\Rightarrow-\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}\right]=\nabla\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}$$

Sabendo que:

$$\nabla\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}=\frac{\nabla p}{\rho} \qquad \frac{dp}{d\rho}=a^2 \quad , \qquad \frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

Temos:

$$-\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}\right]=\frac{\nabla p}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\nabla\rho=\frac{a^2}{\rho}\nabla\rho$$

$$\frac{\nabla\rho}{\rho}=-\left(\frac{1}{a^2}\right)\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}\right]$$

# Equação do Potencial Completo V

- Finalmente, de pois de fazer um produto escalar entre a relação anterior e o gradiente do potencial de velocidade temos:

$$\frac{\nabla\phi\nabla\rho}{\rho} = -\left(\frac{1}{a^2}\right)\nabla\phi\cdot\nabla\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{a^2}\right)\left\{\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi\right) + \nabla\phi\cdot\nabla\left[\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]\right\}$$

- A equação do potencial completo é finalmente obtida substituindo a relação acima, mais a seguinte relação:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right] \cdots$$

# Equação do Potencial Completo VI

- ...na equação da continuidade: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\nabla\phi\nabla\rho}{\rho}+\left(\nabla\cdot\nabla\phi\right)=0$
  para se obter:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\nabla\phi\nabla\rho}{\rho}+\left(\nabla\cdot\nabla\phi\right)=0\Rightarrow$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi-\frac{1}{a^2}\left\{\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]+\left\{\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi\right)+\nabla\phi\cdot\nabla\left[\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]\right\}\right\}=0$$

***<u>Equação do Potencial Completo</u>***

$$\boxed{\nabla^2\phi-\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)+\nabla\phi\cdot\nabla\left[\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]\right\}=0}$$

# Equação do Potencial Completo VII

- A equação do potencial completo é dependente do potencial e da velocidade do som. A forma de relacionar a velocidade do som ao potencial pode ser feita empregando a equação de Kelvin, em conjunto com a relação isentrópica:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}=-\int_{p_0}^{p}\frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}=-\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{(\gamma-2)}d\rho=\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\left[\frac{-\gamma}{\gamma-1}\right]\left[\rho^{(\gamma-2)}\right]_{\rho_0}^{\rho}$$

Página 18 notas a mão, derivar no quadro

Considere:

$$a^2=\gamma\left[\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right]\rho^{(\gamma-1)}$$

Chegando a:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)}{2}=-\left(\frac{a^2-a_0^2}{\gamma-1}\right)$$

relação entre o potencial e a velocidade do som do esc. não perturbado

# Equação do Potencial Completo VIII

- Equação de Kelvin modificada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi \cdot \nabla \phi)}{2} = -\left( \frac{a^2 - a_0^2}{\gamma - 1} \right)$$

- Com esta relação pode-se escrever a equação do potencial completo como uma função exclusivamente do potencial;
- É um processo complexo, e no momento não é necessário, uma vez que o próximo passo será a linearização da Equação do Potencial Completo.

# Equação do Potencial Completo IX

- A equação do potencial completo, na forma apresentada anteriormente é não linear, ou seja poderia representar fenômenos não lineares;
- Entretanto, o potencial é uma função harmônica, ou seja tem derivadas contínuas dentro de um domínio;
- Porém uma não linearidade tal como o choque pode ser considerado uma descontinuidade no domínio, e a priori a teoria do potencial aerodinâmico falharia.
- Este assunto ainda é motivo de discussão; pode-se usar o potencial para modelar um problema transônico, onde eu tenho a presença de descontinuidades tal como as ondas de choque?

# Condições de contorno I

- Para se resolver uma equação diferencial parcial, tal como a equação do potencial completo, é necessário estabelecer condições iniciais e condições de contorno:
  - Condições iniciais: são condições que devem ser satisfeitas no instante inicial do movimento, em todos os pontos ocupado pelo fluido no espaço;
  - Condições de contorno: Devem ser satisfeitas nas fronteiras entre o fluido e o corpo, a cada instante de tempo.
- A unicidade da solução de uma EDP é obtida através do estabelecimento das condições de contorno.

# Condições de contorno II

- A unicidade da solução da equação parcial diferencial do potencial completo é obtida uma vez que se estabelece condições de contorno.
- As condições de contorno estabelecem o potencial ou a sua derivada com relação a uma determinada direção sobre a superfície que define o corpo sujeito ao escoamento aerodinâmico. O gradiente do potencial de velocidade fornece as componentes de velocidade sobre a superfície do corpo.

# Condições de contorno III

- Sobre um corpo sujeito a um escoamento definem-se domínios computacionais que delimitam o interior do corpo por uma superfície, uma esteira e o exterior sendo este último caracterizado por condições de escoamento não perturbado.
- Assume-se para este caso que o sistema de referência é fixo no corpo. A condição de contorno de corpo estabelece que a velocidade normal do fluido na superfície do corpo é igual a velocidade normal do corpo.
- Ou ainda, esta condições de contorno implicam no fato de que a velocidade do fluido é tangencial ao corpo, quando o contexto for exclusivamente estacionário.

# Condições de contorno IV

- Uma superfície que delimita um corpo imerso em um escoamento de fluido pode ser descrito pela seguinte equação:

$$F\left(x, y, z, t\right) = 0$$

- E decorrido um instante de tempo $t+\Delta t$ a equação acima é reescrita como:

$$F\left(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t\right) = 0$$

ou seja, a variação na função que descreve a superfície do corpo pode ser representada por:

$$\Delta F = F\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}, t+\Delta t\right) - F\left(\vec{r}, t\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t$$

$$\Delta F = \nabla F \cdot \Delta\vec{r} + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t = 0$$

# Condições de contorno V

- A normal e a velocidade do corpo podem ser definidos como:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \qquad \vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \vec{V} \longrightarrow \text{velocidade do corpo}$$

- Assim, a velocidade normal é dada pelo produto escalar do vetor velocidade e a normal ao corpo:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{1}{|\nabla F|}$$

Para se satisfazer a condição de escoamento normal ao corpo, emprega-se as relações velocidade normal do fluido:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = -\frac{\partial F}{\partial t} \frac{1}{|\nabla F|}$$

# Condições de contorno VI

- Problema de valor de contorno de Von Neumann, onde as derivadas do potencial no sentido normal ao corpo estão associadas ás velocidades induzidas pelo seu movimento.
- Consequentemente, a condição de contorno que especifica que um escoamento é tangencial no caso estacionário, ou solidário ao movimento do corpo na direção normal à superfície pode ser traduzida matematicamente através da seguinte relação:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0}$$

Regime permanente:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \nabla F = 0}$$

Ou: $$\boxed{\frac{DF}{Dt} = 0}$$ “derivada substancial”

# Linearização da Equação do Potencial Completo I

- Processo de linearização: assume-se que existe uma solução de estado estacionário assumindo que as derivadas temporais são nulas.

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{a^2}\left\{\nabla\phi\cdot\nabla\left[\frac{\left(\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right)}{2}\right]\right\} = 0$$

O potencial de velocidade, assim como as pressões e densidade podem ser representados em um contexto de pequenas perturbações em torno de um escoamento não perturbado alinhado com a direção x como:

$$\phi(x,y,z,t) = U_\infty x + \tilde{\phi}(x,y,z,t)$$

$$p(x,y,z,t) = p_0 + \tilde{p}(x,y,z,t)$$

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x,y,z,t)$$

$$\vec{u}(x,y,z,t) = U_\infty \vec{i} + \nabla\tilde{\phi}$$

$$a(x,y,z,t) = a_0 + \tilde{a}(x,y,z,t)$$

# Linearização da Equação do Potencial Completo II

- A linearização é realizada com relação às condições de contorno de escoamento não perturbado.
- Substituindo na equação do potencial completo o potencial de perturbação:

$$\phi(x,y,z,t) = U_\infty x + \tilde{\phi}(x,y,z,t)$$

- e assumindo uma condição de velocidade do som constante, tem-se em termos do potencial de perturbação , a equação do potencial completo:

$$\nabla^2\tilde{\phi} - \frac{1}{a_0^2}\left\{2\left(U_\infty\vec{i} + \nabla\tilde{\phi}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(U_\infty\vec{i} + \nabla\tilde{\phi}\right)\right\} +$$

$$+\frac{1}{a_0^2}\left\{\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} + \left(U_\infty\vec{i} + \nabla\tilde{\phi}\right)\cdot\nabla\left[\frac{U_\infty^2}{2} + U_\infty\vec{i}\cdot\nabla\tilde{\phi} + \frac{1}{2}\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla\tilde{\phi}\right]\right\} = 0$$

# Linearização da Equação do Potencial Completo III

- Excluindo os termos não lineares em termos do potencial de perturbação, a equação do potencial completo é reescrita como:

$$\nabla^2\tilde{\phi} - \frac{1}{a_0^2}\left\{\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x \partial t} + U_\infty^2 \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x^2}\right\} = 0$$

(demonstração no quadro, páginas a 26 a 28 notas a mão)

- Esta equação é conhecida como a equação do potencial linearizado a pequenas perturbações.
- velocidade do som local -> velocidade do som do escoamento não perturbado. (O Mach também o será)
- Escrevendo esta equação em termos do número de Mach do escoamento não perturbado, tem-se

$$\boxed{\left(1 - M_\infty^2\right)\nabla^2\tilde{\phi} - \frac{M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t^2} - 2\frac{M_\infty^2}{U_\infty}\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x \partial t} = 0}$$

# Condições de contorno linearizadas

- A relação matemática que permite estabelecer uma condição de contorno também pode ser linearizada da mesma maneira que foi linearizada a equação do potencial completo.
- Ou seja admite-se que a linearização é feita a partir de uma condição de escoamento não perturbando.
- Cabe lembrar que esta restrição limita a aplicação a corpos esbeltos ou superfícies de sustentação finas.
- Para o caso de uma superfície de sustentação fina, assume-se que a superfície da asa pode ser descrita por uma função dada por:

$$F = F_w\left(x, y, z, t\right)$$

- Esta função pode ser decomposta em duas parcelas independentes, a espessura $h_t$ e a deformação do plano médio da superfície $h_m$, normalmente designado como plano z=0.

# Condições de contorno linearizadas

$$F_w(x,y,z,t) = z - h_m(x,y,t) \pm h_t(x,y,t) = 0$$

- Considerando a linearização a partir do escoamento não perturbado o vetor velocidade é dado por:

$$\vec{u} = (U_\infty + u)\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

- Denotando a soma da parcela referente a espessura com a deformação do plano médio da superfície de sustentação como h, tem-se, ao aplicar na relação da condição de contorno:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0 \quad , \quad \vec{u} \parallel U_\infty \Rightarrow \frac{\partial F_w}{\partial t} + U_\infty \cdot \nabla F_w = 0$$

$$h = h_m \pm h_t \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial h}{\partial t} - (U_\infty + u)\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y} + w = 0$$

# Condições de contorno linearizadas

- Eliminando os termos não lineares da relação anterior, tem-se a forma final para a condição de contorno linearizada:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}+U_\infty\frac{\partial h}{\partial x}=w}$$

- Pode-se notar que as componentes de h podem ser tratadas independentemente. Este fato é importante quando se considera o problema de resposta dinâmica da superfície de sustentação. Assume-se que o efeito de espessura é independente to tempo (o perfil de uma asa normalmente não se deforma), ou seja:

$$h(x,y,t)=h_m(x,y,t)\pm h_t(x,y)$$

# Condições de contorno linearizadas

- Outras condições de contorno:
  - **<u>Escoamento não perturbado</u>: considera-se que a fronteira externa do domínio de análise está suficientemente longe do corpo. Devemos tomar cuidado com as condições de contorno a jusante, pois existe a região da esteira, onde devemos tomar um cuidado especial.**
  - **A condição de escoamento não perturbado é intuitiva, veja o exemplo do potencial que emana de uma fonte:**

$$\phi_s = \frac{1}{4\pi r}$$

**Ou seja, o potencial diminui com o aumento de r.**

# Condições de contorno linearizadas

- Condição de contorno na esteira:
  - **Pelo princípio da sustentação estacionária, deve haver viscosidade para haver sustentação;**
  - **Porém o modelo a ser empregado para a solução dos nossos problemas não estacionários é invíscido e irrotacional;**
  - **Condição de Kutta: pressupões que não existe salto de pressão e velocidade no ponto que define o bordo de fuga;**
- Teorema Kelvin: "se as forças de campo derivam de um potencial, e o fluido for ideal e barotrópico, a circulação de velocidade em torno de um circuito fechado e arbitrário permanece constante ao longo do movimento do fluido"

**O teorema de Kelvin vale para os casos de escoamento compressível e incompressível.**

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

Reproduzir a figura da página 25 das notas a mão.

# Linearização da pressão I

- A solução do problema de valor de contorno, baseado na equação do potencial linearizado, resulta no potencial de velocidade dadas condições de contorno às quais este problema está sujeito.
- Porém , o que nos interessa é a pressão que age sobre uma superfície de sustentação.
- A forma de calcular esta pressão será baseada na equação de Kelvin, para que se possa derivar uma expressão linear para a pressão como uma função do potencial de perturbação
- A partir da relação isentrópica, pode-se relacionar pressão à densidade por uma função explícita:

$$p = \left( \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \right) \rho^{\gamma}$$

# Linearização da pressão II

- Parcela integral da equação de Kelvin:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{d\lambda}{\rho(\lambda)} = \frac{\gamma p}{\rho_0^{\gamma}} \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{\gamma-2} d\rho = \left(\frac{-\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\right) p^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$$

- Esta expressão para a integral da equação de Kelvin pode ser substituída na Equação de Kelvin gerando uma expressão algébrica não linear para pressão em termos do potencial.
- Porém, uma vez que se empregou a teoria da pequenas perturbações para obter a equação do potencial linearizado, ou seja, a densidade e a pressão podem ser aproximados por os correspondentes valores de escoamento não perturbado, uma vez que o processo de linearização ocorreu em torno desta condição.
- Como o contexto de análise é linear, pode-se re-apresentar a relação como uma expansão em termos de uma série de Taylor

# Linearização da pressão III

- Como o contexto de análise é linear, pode-se re-apresentar a relação como uma expansão em termos de uma série de Taylor

$$\int_{p_0}^{p} \frac{d\lambda}{\rho(\lambda)} = F[p] = F(p_0) + F(p_0)(p - p_0) + O^2$$

$$= \frac{1}{\rho_0}(p - p_0) = \tilde{p}\left(\frac{1}{\rho_0}\right)$$

Linearização da Equação de Kelvin: Os demais termos constantes na equação de Kelvin (11) podem facilmente ser linearizados considerando as hipótese de pequenas perturbações em torno de um escoamento alinhado com a direção *x*.

# Linearização da pressão IV

- Ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$$

$$\frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{2} = \frac{|\vec{u}|^2}{2} = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$

Novamente expandindo em termos de uma série de Taylor a componente total da velocidade tem-se:

$$\frac{|\vec{u}|^2}{2} \approx \frac{1}{2}U_\infty^2 + \left(u - U_\infty\right) = \frac{1}{2}U_\infty^2 + U_\infty\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right)$$

# Linearização da pressão V

- Substituindo as três relações anteriores temos:

$$(p - p_0) = -\rho_0 \left[ \frac{1}{2} U_\infty^2 + U_\infty \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right]$$

$$(p - p_0) = -\rho_0 \frac{1}{2} U_\infty^2 - \rho_0 U_\infty \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) - \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$$

$$\underbrace{p - \overbrace{p_0 + \rho_0 \frac{1}{2} U_\infty^2}^{p_0}}_{0} = -\rho_0 \left[ U_\infty \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right]$$

$$p = -\rho_0 \left[ U_\infty \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right]$$ <- Pressão linearizada

# O Potencial de aceleração I

- Lembrando que a pressão relaciona-se ao potencial a pequenas perturbações por uma relação linear:

$$p = \rho_0 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) = \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)$$

pode-se: transformar a equação para o potencial aerodinâmico linearizado:

$$\beta^2 \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} - \left( \frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) \tilde{\phi}_{xt} - \left( \frac{1}{a_0^2} \right) \tilde{\phi}_{tt} = 0 \qquad \boxed{\beta^2 = \left(1 - M^2\right)}$$

para:

$$\beta^2 \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)_{xx} + \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)_{yy} + \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)_{zz}$$

$$- \left( \frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)_{xt} - \left( \frac{1}{a_0^2} \right) \rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right)_{tt} = 0$$

# O Potencial de aceleração II

- A última relação foi obtida diferenciando adequadamente a equação do potencial aerodinâmico linearizado no espaço e no tempo. Assim, tem-se:

$$\beta^2 p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - \left( \frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) p_{xt} - \left( \frac{1}{a_0^2} \right) p_{tt} = 0$$

uma equação para o potencial de pressão.

Note que a pressão linearizada é dada por:

$$p = -\rho_0 \left( \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x \right) = -\rho_0 \frac{D\tilde{\phi}}{Dt}$$

que não deixa de ser a derivada substancial do potencial de velocidade:

# O Potencial de aceleração III

- Define-se o potencial de aceleração como:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{p}{\rho_0} = -\left(\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x\right) = -\psi \\ &\psi = \tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x\end{aligned}}$$

- <u>Vantagens de se empregar o potencial de pressão</u>: simplifica a maneira de estabelecermos condições de contorno, uma vez que não seria mais necessário estabelecer condições de contorno na esteira, uma vez que não há salto de pressão.

# Modelos Clássicos
# Regime incompressível

- Para um primeiro estudo da aerodinâmica não estacionária aplicada a aeroelasticidade, vamos estudar modelos clássicos tais como os modelos de:
  - Wagner
  - Theodorsen
  - Küssner
  - Sears
- Estes modelos são fundamentados em soluções elementares da equação para o potencial aerodinâmico linearizado, em regime de escoamento incompressível (Mach = 0), conhecida também como Equação de Laplace.

# Equação de Laplace I

- Caso particular da equação do potencial aerodinâmico linearizado:

$$\boxed{\left(1-M_{\infty}^{2}\right)\nabla^{2}\tilde{\phi}-\frac{M_{\infty}^{2}}{U_{\infty}}\frac{\partial^{2}\tilde{\phi}}{\partial t^{2}}-2\frac{M_{\infty}^{2}}{U_{\infty}}\frac{\partial^{2}\tilde{\phi}}{\partial x\partial t}=0}$$

ou

$$\boxed{\beta^{2}\tilde{\phi}_{xx}+\tilde{\phi}_{yy}+\tilde{\phi}_{zz}-\left(\frac{2U_{\infty}}{a_{0}^{2}}\right)\tilde{\phi}_{xt}-\left(\frac{1}{a_{0}^{2}}\right)\tilde{\phi}_{tt}=0}$$

- Regime incompressível Mach = 0:

$$\boxed{\tilde{\phi}_{xx}+\tilde{\phi}_{yy}+\tilde{\phi}_{zz}=0}$$

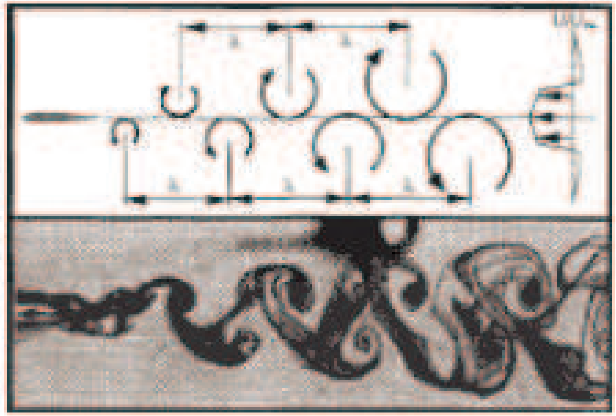
# Equação de Laplace II

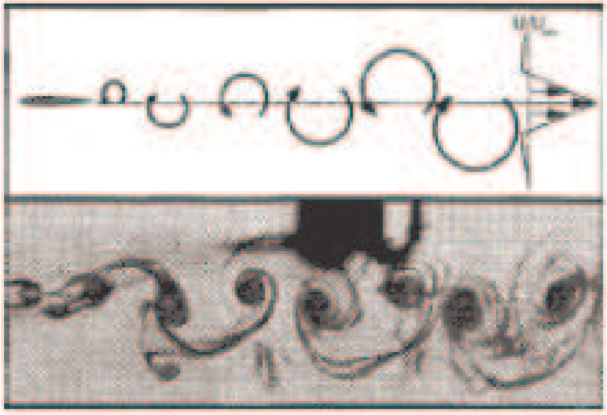
- Note que a simplificação foi realizada apenas aplicando a condição M = 0.
- Este equação é válida para problemas não estacionários, os quais são tratados cinematicamente.
- Uma primeira solução da equação de Laplace são os modelos aerodinâmicos não estacionários de Wagner, Theodorsen,, Küssner, e Sears por exemplo;
- Note que estes modelos foram desenvolvidos para regime incompressível, e sua extensão para o caso compressível é essencialmente feita através de correções.

# Modelo de Wagner I

**Wagner, Herbert: Über die Entstehung des Dynamischen Auftriebes von TragFlügeln, fev. 1925**

- Assume-se como um primeiro exemplo um aerofólio bidimensional movimentando-se em arfagem;
- Este aerofólio oscilante gera uma esteira de vórtices alternados cujo potencial a eles associado modifica o carregamento aerodinâmico sobre o perfil;
- As forças aerodinâmicas portanto não dependem somente da posição instantânea do aerofólio, mas também da posição e intensidade deste esteira de vórtices;
- Ou seja, is significa que as forças não dependem exclusivamente do movimento instantâneo, mas também de uma história do movimento desde o seu início.



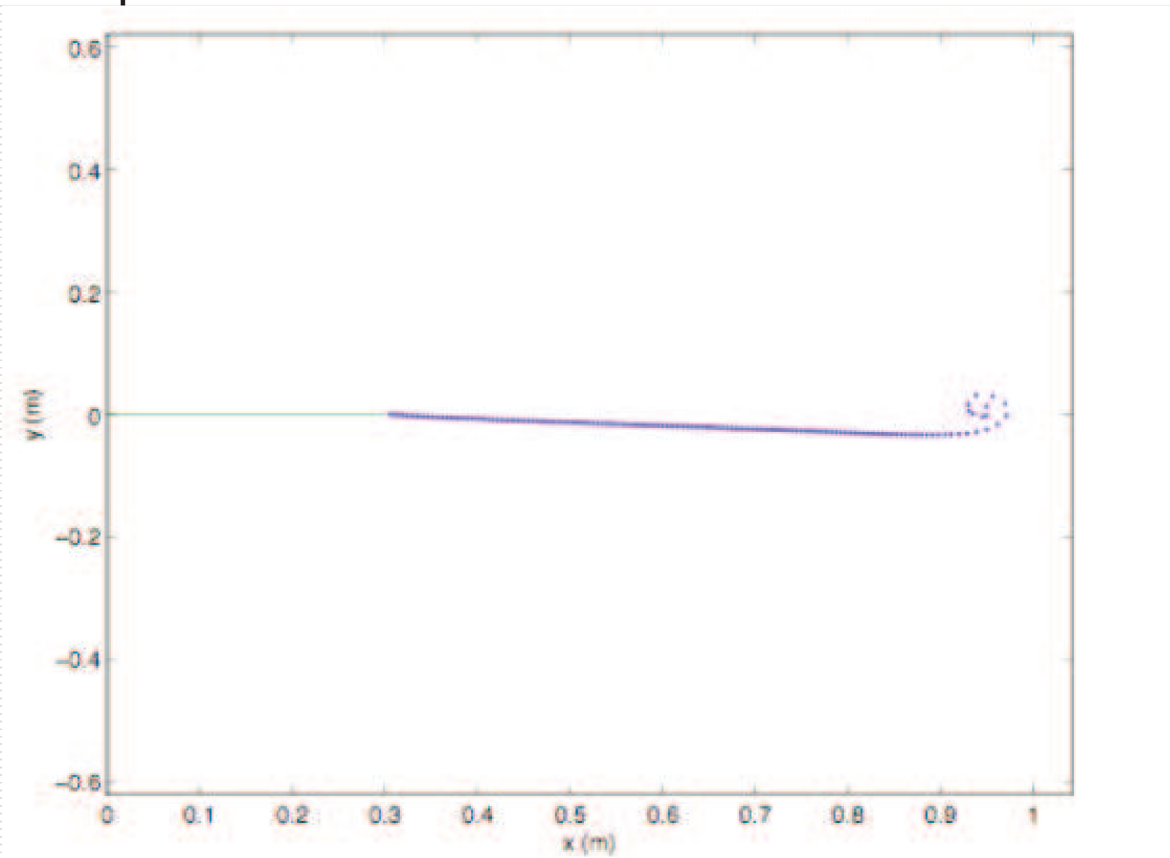


# Modelo de Wagner II

- O efeito da esteira pode ser significativo  ponto de reduzir a magnitude das forças atuantes no aerofólio;
- Esta alteração causada pela esteira de vortices podem mudar significativamente as características aeroelásticas de um sistema
- Vórtice de partida – é o modelo aerodinâmico não estacionário mais simples.
- Supõem-se que uma placa plana que idealiza um aerofólio é submetida a uma variação súbita (impulsiva) em ângulo de ataque
- Esta variação sútida no carregamento aerodinâmico decorrente, gera um vórtice de partida suficientemente forte, a ponto de reduzir em 50% o carregamento instantâneo no aerofólio.
- Após um curto espaço de tempo, o seu efeito deixa de ser significativo uma vez que ele é **convectado** ao longo da esteira e seu potencial torna-se desprezível para o aerofólio.

# Modelo de Wagner III

- Vórtice de partida:

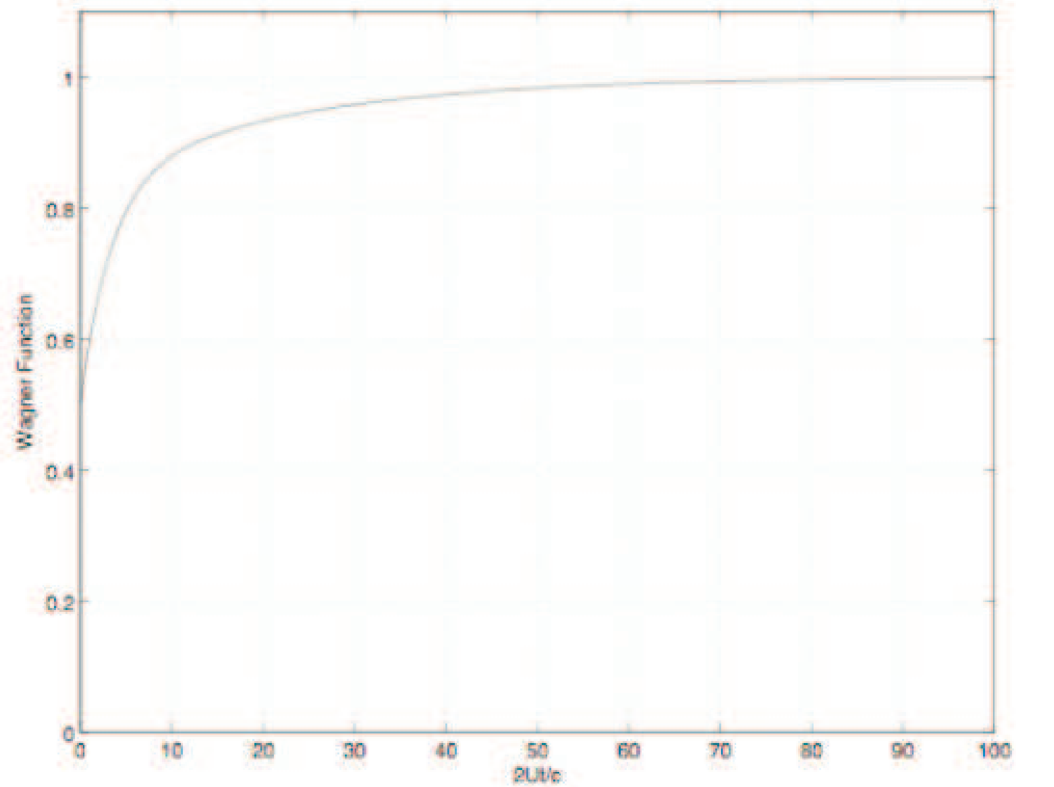


# Modelo de Wagner IV

- O efeito do vórtice de partida na sustentação pode ser modelado pela função de Wagner;
- Esta função estabelece que o carregamento aerodinâmico no início do movimento é metade do carregamento aerodin6amico e regime permanente
- Este carregamento instantâneo cresce suavemente até alcançar o valor de regime permanente para o ângulo de ataque final, após a entrada impulsiva e ângulo de ataque.

# Modelo de Wagner V

- Função de Wagner:
- Resposta a uma variação súbita em ângulo de ataque do aerofólio.
- A função de Wagner é igual a 0,5 quando t=0 e cresce assintoticamente para 1.0.



# A Função de Wagner I

- (ref. BAH e I.E.Garrick)
- A Função de Wagner $\phi(s)$ fornece o histórico de variação no tempo da sustentação, dada uma entrada degrau em ângulo de ataque do aerofólio;
- Ela é normalmente representada em função do tempo admensionalizado por: $s = V_0 t/b$
- Este tempo adimensional ou (tempo reduzido)pode ser entendido como uma distância em semi cordas.
- Sustentação: $L_1(s) = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha}\alpha \cdot 2b \cdot \phi(s)$

# A Função de Wagner II

- E como é a função de Wagner?
- Em 1925, Wagner derivou uma função que modela a resposta do carregamento de natureza circulatória a uma variação súbita em ângulo de ataque, supondo escoamento incompressível, e função do tempo reduzido dado por:

$$\phi(s) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma s}}{\sigma^2\left[(K_0 - K_1)^2 + \pi^2 (I_0 - I_1)^2\right]} d\sigma$$

$$s = V_0 t / b$$

# A Função de Wagner III

- O tempo reduzido é uma grandeza muito comum em aerodinâmica não estacionária e representa a distância percorrida pelo aerofólio penetrando no escoamento, em termos de semi-cordas.

- A aplicação da função de Wagner a uma simulação de um movimento arbitrário no domínio do tempo pode ser compreendida como uma sucessão de variações tipo degrau em ângulo de ataque e sua derivada no tempo.

# A Função de Wagner IV

- E o correspondente efeito da esteira de vórtices que se forma a jusante pode ser capturada através da superposição das respostas indiciais no sentido de uma integração de Duhamel:

$$y(s) = f(0)\phi(s) - \int_0^s \frac{df}{dt}\phi(s-\sigma)\,d\sigma$$

onde y(t) é a saída do sistema, f(t) é a função forçante, e $\phi$ é a resposta ao degrau do sistema. No caso do aerofólio:

$$\alpha(s) = \alpha_{eq}(0)\phi(s) - \int_0^s \frac{d\alpha_{eq}}{dt}\phi(s-\sigma)\,d\sigma$$

# A Função de Wagner V

- Pode-se escrever  velocidade normal induzida (downwash) em um ponto no aerofólio como: (teoria do aerofólio fino)

$$w(t) = \left[ \dot{h} + V_0\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] = Q(t)$$

$$w(s) = \left[ \frac{V_0}{b}\frac{dh}{ds} + V_0\alpha(s) + \left(\frac{1}{2} - a\right)V_0\frac{d\alpha}{ds} \right] = Q(s)$$

- O ângulo da ataque equivalente (eq) é representado pela razão entre o downwash a ¾ da corda e a velocidade do escoamento não perturbado.
- R.T.Jones (NACA Rept 681) apresentou uma aproximação para a função de Wagner  onde:

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.355e^{-0.3s}$$

# A Função de Wagner VI

- Garrick observou que dada a linearidade do escoamento não estacionário a pequenas perturbações, a era possível calcular uma resposta transiente através da integral de convolução:

$$P(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[ Q(0)\phi(s) + \int_0^s \frac{dQ}{d\sigma}\phi(s-\sigma)\,d\sigma \right]$$

$$P(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[ Q(s)\phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds} Q(\sigma)\,d\sigma \right]$$

- Esta equação é a base da aerodinâmica não estacionária
- Inclui o efeito de toda a história do movimento no cálcula da força de