AE-249 - AEROELASTICIDADE

Aerodinâmica Não Estacionária

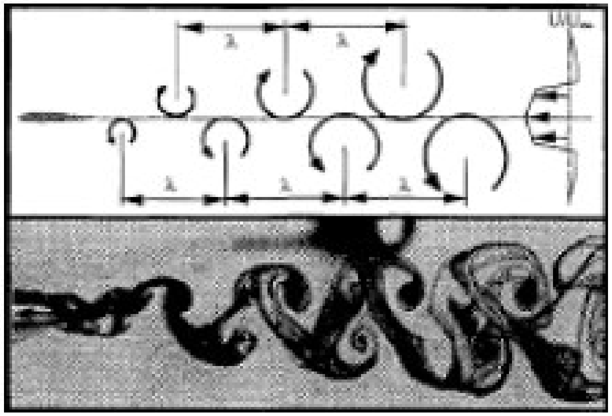
Movimentos arbitrários e resposta aerodinâmica

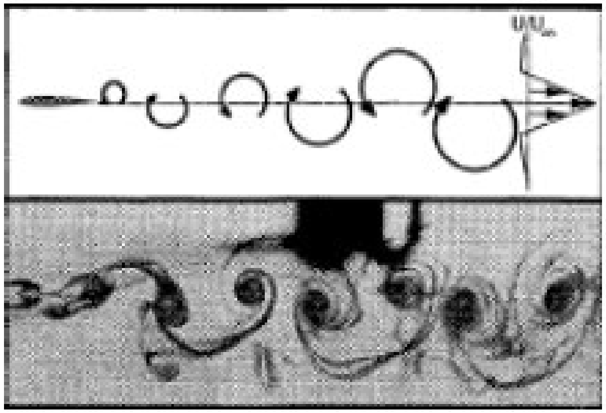
Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Modelo de Wagner

Wagner, Herbert: Über die Entstehung des Dynamischen Auftriebes von TragFlügeln, fev. 1925

- Assume-se como um primeiro exemplo um aerofólio bidimensional movimentando-se em arfagem;
- Este aerofólio oscilante gera uma esteira de vórtices alternados cujo potencial a eles associado modifica o carregamento aerodinâmico sobre o perfil;
- As forças aerodinâmicas portanto não dependem somente da posição instantânea do aerofólio, mas também da posição e intensidade deste esteira de vórtices;
- Ou seja, isto significa que as forças não dependem exclusivamente do movimento instantâneo, mas também de uma história do movimento desde o seu início.



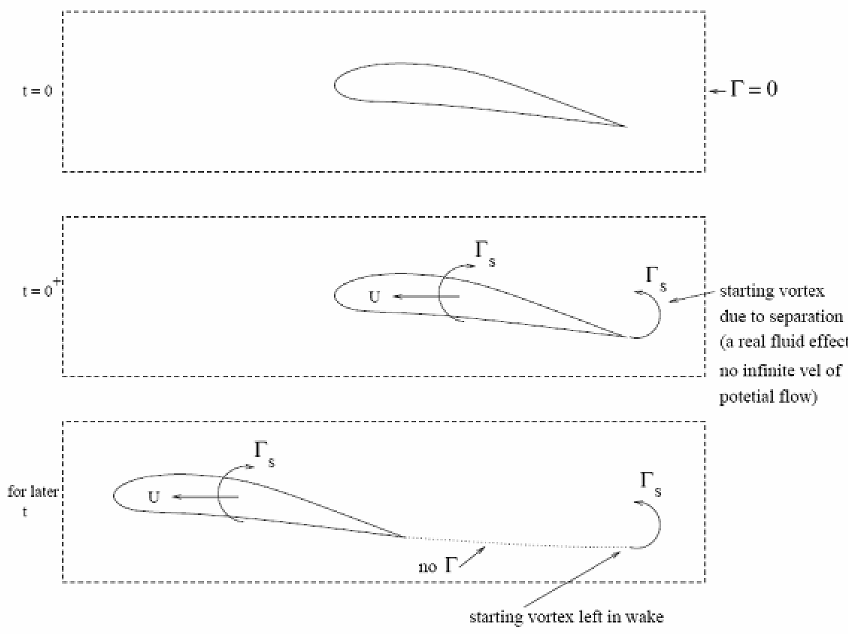


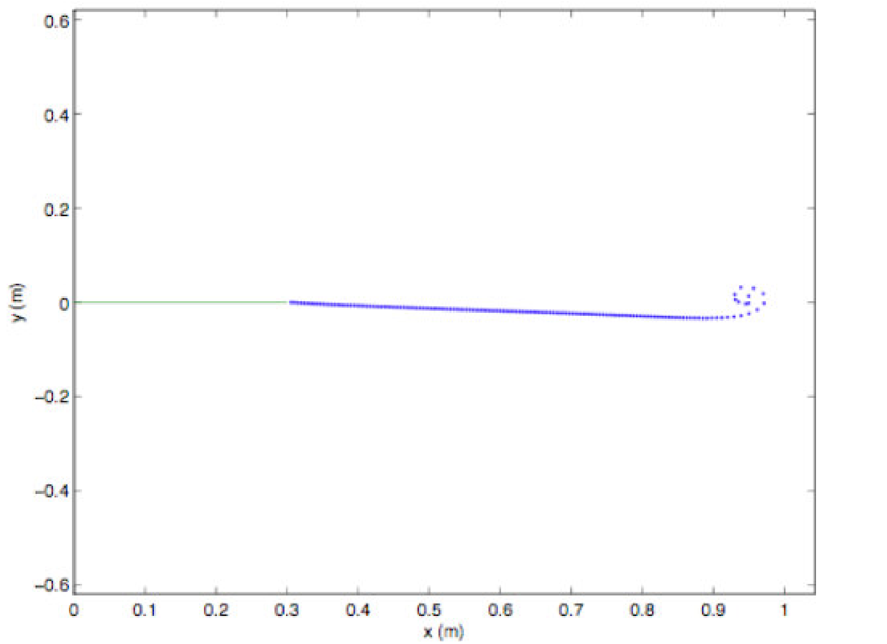
Modelo de Wagner I

- O efeito da esteira pode ser significativo ponto de reduzir a magnitude das forças atuantes no aerofólio;
- Vórtice de partida – é o modelo aerodinâmico não estacionário mais simples;
- Supõem-se que uma placa plana que idealiza um aerofólio é submetida a uma variação súbita (impulsiva) em ângulo de ataque, quando a mesma encontra-se sujeita a um escoamento previamente estabelecido;
- Esta variação súbita no carregamento aerodinâmico gera um vórtice de partida suficientemente forte, a ponto de reduzir em 50% o carregamento instantâneo no aerofólio.
- Após um curto espaço de tempo, o seu efeito deixa de ser significativo uma vez que ele é **convectado** ao longo da esteira e seu potencial torna-se desprezível para o aerofólio.

Vórtice de partida

O conceito de vórtice de partida vem da aerodinâmica estacionária. Ele surge no início do movimento do aerofólio no sentido da direção de vôo. De forma análoga, quando o escoamento já está estabelecido ao variarmos o ângulo de ataque subitamente aparecerá um vórtice de partida.





Modelo de Wagner II

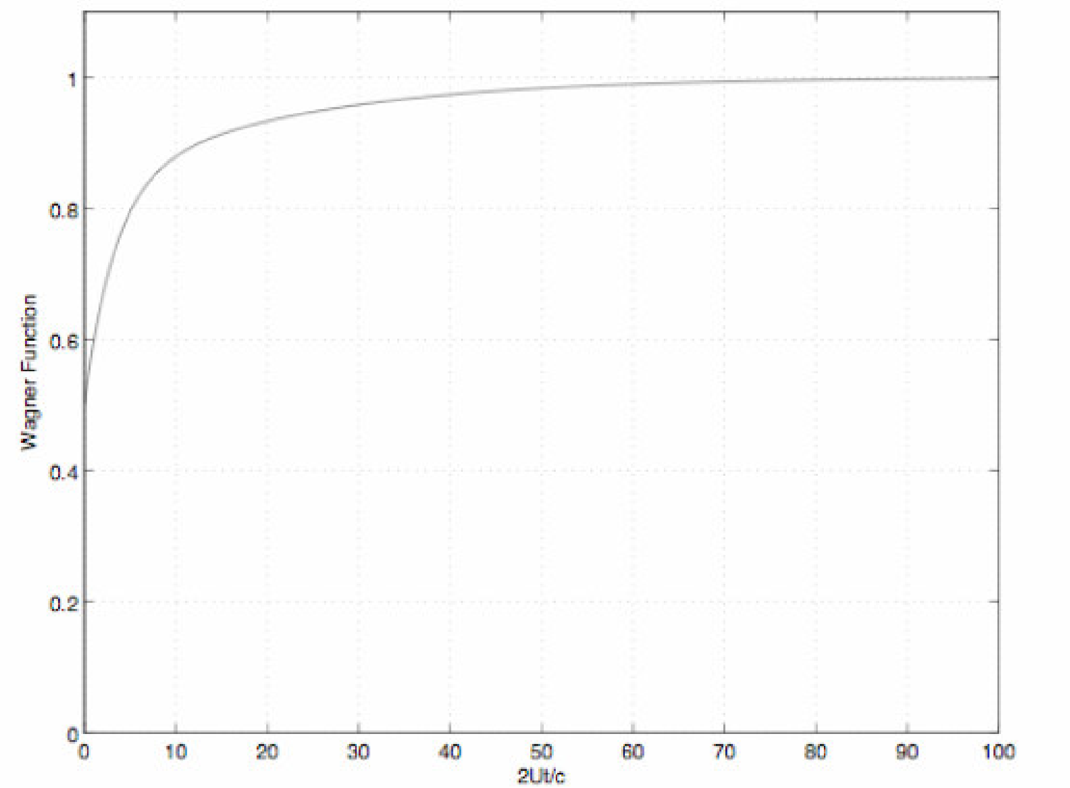
- O efeito do vórtice de partida na sustentação de um aerofólio em escoamento estabelecido é modelado pela função de Wagner;

- Esta função indica que o carregamento aerodinâmico no início do movimento é metade do carregamento aerodinâmico e regime permanente;

- Este carregamento instantâneo cresce suavemente até alcançar o valor de regime permanente para o ângulo de ataque associado à entrada impulsiva.

Resposta indicial

- Função de Wagner:
- Resposta a uma variação súbita em ângulo de ataque do aerofólio.
- A função de Wagner é igual a 0,5 quando t=0 e cresce assintoticamente para 1.0.
- Esta resposta é também conhecida como resposta indicial do sistema.



Sustentação

- (ref. BAH e I.E.Garrick)
- A Função de Wagner $\phi(s)$ fornece o histórico de variação no tempo da sustentação, dada uma entrada degrau em ângulo de ataque do aerofólio;
- Ela é normalmente representada em função do tempo adimensionalizado definido como tempo reduzido e dado por:

$$s = V_0 t / b$$

- Este tempo reduzido pode ser entendido como uma distância em semi cordas.
- Sustentação:

$$L_C(s) = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha}\alpha_{ef} \cdot 2b \cdot \phi(s) = 2\pi\rho b V_0 \phi(s) Q$$

que é função do ângulo de ataque efetivo obtido da razão do downwash a ¾ da corda pela velocidade V_0.

Ângulo de Ataque Efetivo

- No caso não estacionário, rerranjamos os termos circulatórios colocando a velocidade do escoamento não perturbado em evidência, chegando-se claramente à expressão para um ângulo de ataque efetivo:

$$\alpha_{ef} = \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V_0} + \frac{b}{V_0}\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} \right] = \frac{Q}{V_0}$$

- Este ângulo de ataque representa bem como o carregamento de origem circulatória (responsável pela sustentação em escoamento não perturbado) é dependente de todos velocidades e deslocamentos associados aos graus de liberdade.
- E a ação da função de deficiência de sustentação age sobre o ângulo de ataque efetivo, causando a diminuição proporcional da sustentação.

Generalização do Movimento

- A função de Wagner.e uma resposta a uma entrada degraus, pode assim ser entendida como admitância indicial para o escoamento circulatório associado esta variação tipo degrau no downwash a ¾ da corda - Vamos entender esta definição por partes:

  - Ao se aplicar uma entrada degrau a um sistema dinâmico, a resposta do sistema quando o mesmo é linear, é conhecida como a admitância indicial – A(t).

  - Ou seja, a forma da função A(t) depende do sistema linear considerado; e a resposta do sistema uma força arbitrária f(t) pode ser obtida uma vez que se conheça esta função.

Admitância Indicial

- A resposta no tempo a uma entrada degrau na força $\Delta f(t)$ aplicada em um instante de tempo $t+\Delta t$ é:

$$\Delta x(t,\tau+\Delta\tau) = \Delta f(\tau+\Delta\tau)\,A(t-\tau+\Delta\tau)$$

- Somando para todo o intervalo temporal, chega-se a integral de Duhamel:

$$x(t) \cong f(0)\,A(t) + \sum_{\tau=0}^{t-\Delta\tau} \Delta x(t,\tau+\Delta\tau)$$

$$x(t) = f(0)\,A(t) + \sum_{\tau=0}^{t-\Delta\tau} \frac{\Delta f(\tau+\Delta\tau)}{\Delta\tau} A\big(t-(\tau+\Delta\tau)\big)\Delta\tau$$

$$\Delta\tau \to 0 \Rightarrow x(t) = f(0)\,A(t) + \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} A(t-\tau)\,d\tau$$

Integral de Duhamel

- Que pode ser reescrita também na forma:

$$x(t) = f(0)A(t) + \int_0^t f(\tau)\frac{dA(t-\tau)}{d\tau}d\tau$$

- Chegou-se na forma acima após um rearranjo resolvendo a integral por partes.
- Note que se A(t) é um degrau, a sua derivada no tempo será a função impulso [A'(t)], e f(t) é o termo forçante, que na realidade é a entrada do sistema dinâmico (no nosso caso será o downwash).
- Note que a equação acima é uma integral de convolução, também conhecida como chamamos anteriormente de integral de Duhamel.
- E do que se trata exatamente o conceito de convolução e por qual motivo se consegue obter a resposta de um sistema dinâmico dada uma entrada impulsiva?

Conceito de Convolução

- É uma operação matemática formal, assim como a soma.
- Soma: toma dois números e gera um terceiro.
- Convolução: toma dois sinais (funções) para gerar um terceiro(a).
- O sinal de saída é o resultado da convolução do sinal de entrada com a resposta a impulso do sistema.

Conceito de Convolução

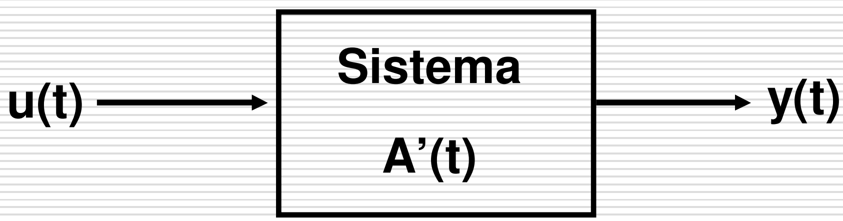
- Podemos estudar a convolução sob dois pontos de vista distintos:
  - do sinal de entrada: como cada ponto do sinal de entrada contribui para vários pontos do sinal de saída.
  - do sinal de saída: como cada ponto do sinal de saída recebeu contribuições de vários pontos do sinal de entrada.

- Estas duas perspectivas são formas diferentes de analisar a mesma operação matemática, e portanto são equivalentes:

- A primeira fornece uma idéia conceitual da convolução, enquanto que a segunda descreve a matemática da convolução.

Conceito de Convolução

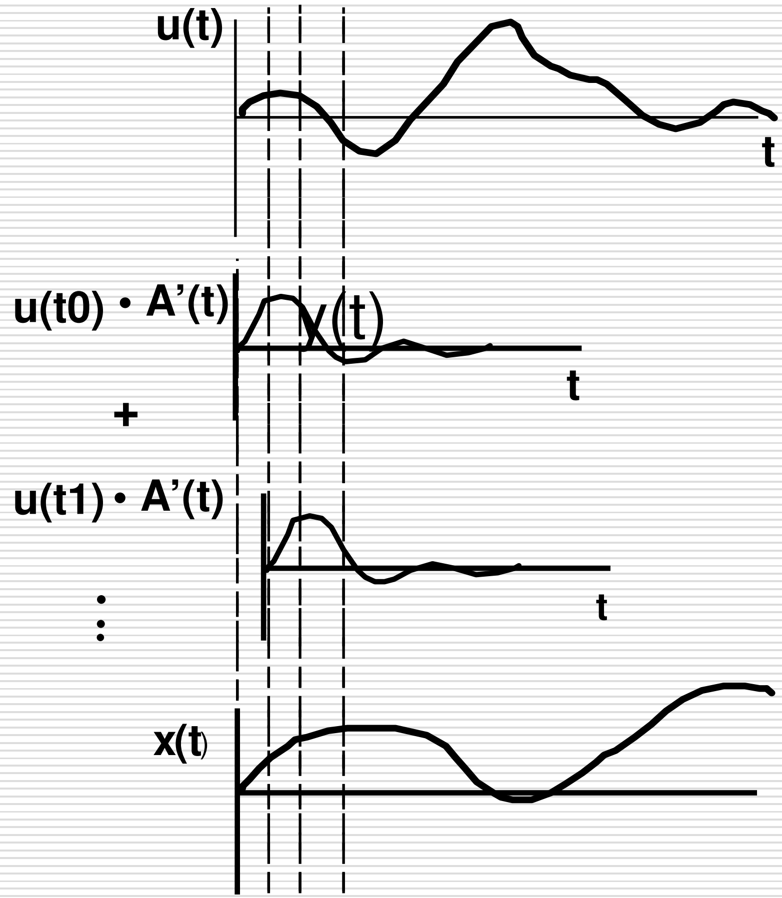
- **Convolução:**



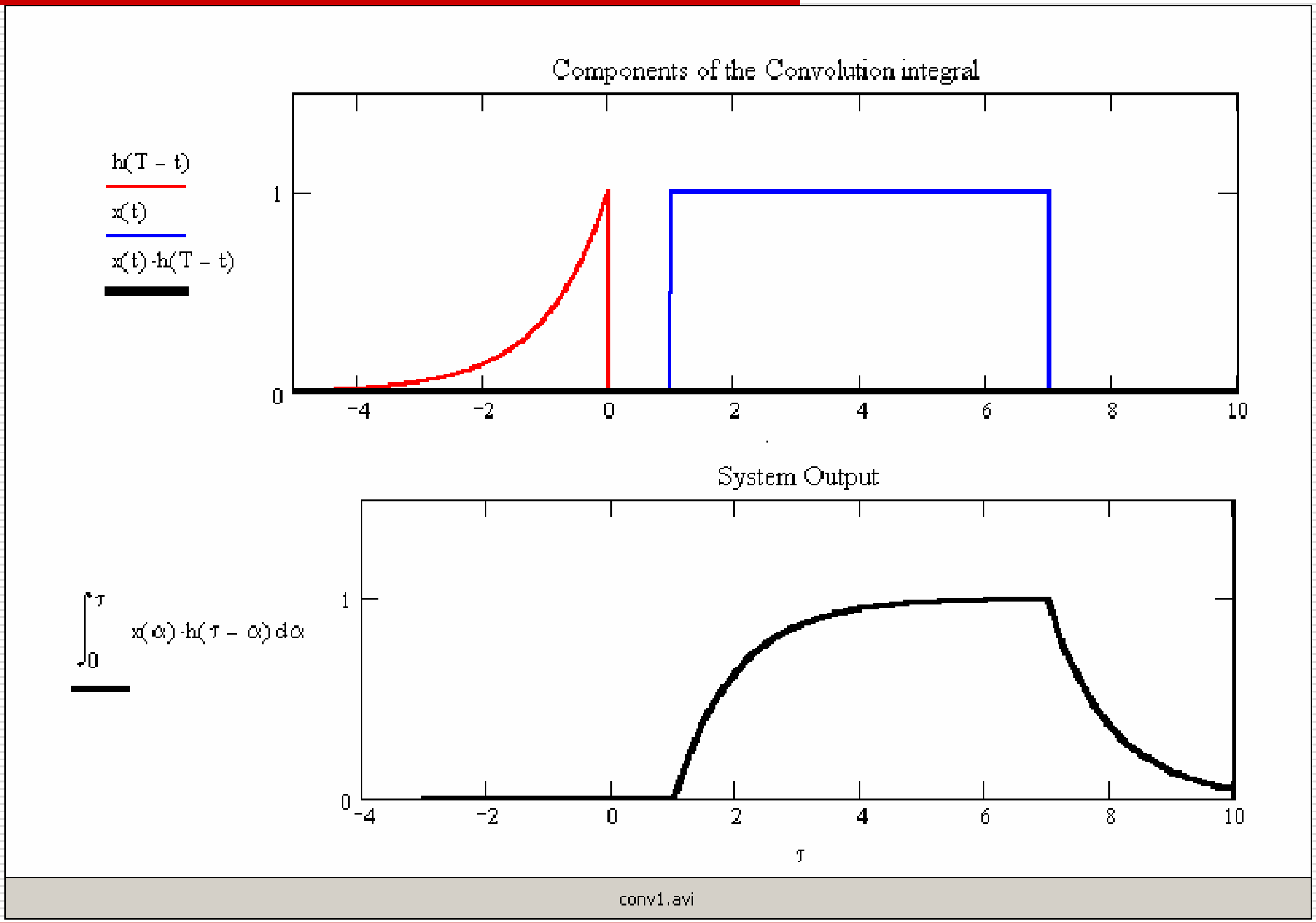
$$x(t) = \int_0^t A'(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

A' = impulso; A = degrau



Convolução de dois sinais



A Função de Wagner I

- E como é a função de Wagner?

- Em 1925, Wagner derivou uma função que modela a resposta do carregamento de natureza circulatória a uma variação súbita em ângulo de ataque, supondo escoamento incompressível, e função do tempo reduzido dado por:

$$\phi(s) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma s}}{\sigma^2\left[\left(K_0 - K_1\right)^2 + \pi^2\left(I_0 - I_1\right)^2\right]} d\sigma$$

$$s = V_0 t / b$$

Tempo reduzido

- O tempo reduzido é uma grandeza muito comum em aerodinâmica não estacionária e representa a distância percorrida pelo aerofólio penetrando no escoamento, em termos de semi-cordas.

- A aplicação da função de Wagner a uma simulação de um movimento arbitrário no domínio do tempo pode ser compreendida como uma sucessão de variações tipo degrau em ângulo de ataque e sua derivada no tempo.

A Função de Wagner II

- É uma função que não possui uma transformada de Laplace;
- É função do tempo, ou ainda um tempo reduzido, grandeza muito comum em aerodinâmica não estacionária que representa a distância percorrida pelo aerofólio penetrando no escoamento, em termos de semi-cordas;
- Generalização para movimento arbitrários: A aplicação da função de Wagner a uma simulação de um movimento arbitrário no domínio do tempo pode ser compreendida como uma sucessão de variações tipo degrau em ângulo de ataque e sua derivada no tempo.
- A aplicação da integral de Duhamel permitirá o cálculo do carregamento aerodinâmico, para um dado movimento arbitrário conhecido.

Carregamento para movimentos arbitrários

- A linearidade do escoamento não estacionário a pequenas perturbações, permite calcular uma resposta transiente através da integral de convolução:

$$L_C(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[Q(0)\phi(s) + \int_0^s \frac{dQ}{d\sigma}\phi(s-\sigma)\,d\sigma \right]$$

$$L_C(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[Q(s)\phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds} Q(\sigma)\,d\sigma \right]$$

- Esta equação é a base da aerodinâmica não estacionária

- Inclui o efeito de toda a história do movimento no cálculo da força de sustentação de natureza circulatória.

Movimento Arbitrário

- Portanto, vamos nos basear na generalização do movimento fazendo uso da expressão que representa o downwash a ¾ da corda:

$$w(t)=\left[\dot{h}+V_0\alpha+b\left(\frac{1}{2}-a\right)\dot{\alpha}\right]=Q(t)$$

$$\boxed{L_C(s)=2\pi\rho V_0 b\,\phi(s)\,Q(t)}$$

$$w(s)=\left[\frac{V_0}{b}\frac{dh}{ds}+V_0\alpha(s)+\left(\frac{1}{2}-a\right)V_0\frac{d\alpha}{ds}\right]=Q(s)$$

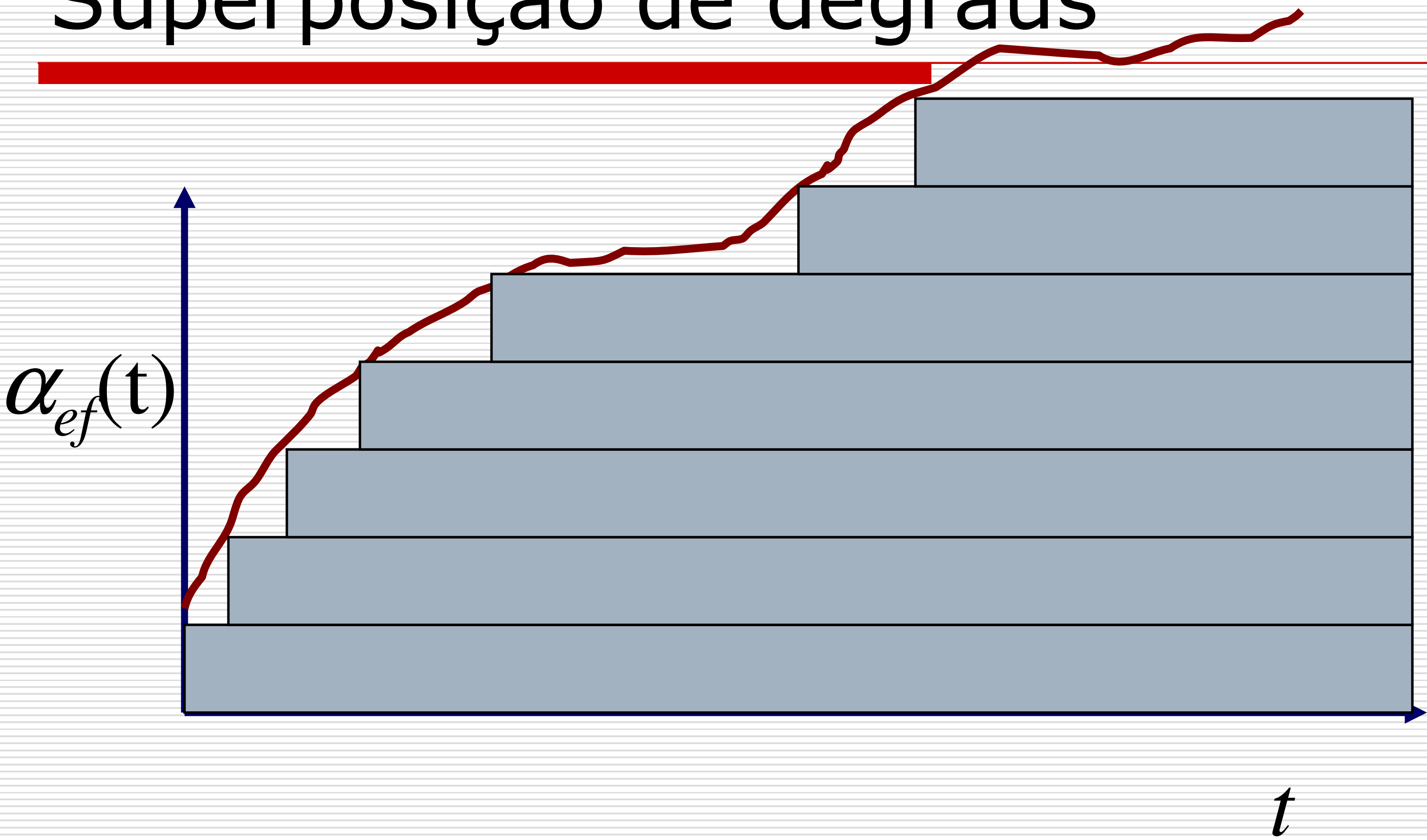
função do tempo reduzido

que será integrada no sentido de Duhamel fornecendo a sustentação da seção típica correspondente representada por:

$$l=\pi\rho b^2\left[\ddot{h}+V_0\dot{\alpha}-ba\ddot{\alpha}\right]+2\pi\rho V_0 b\left[Q(0)\phi(s)+\int_0^s\frac{dQ}{d\sigma}\phi(s-\sigma)\,d\sigma\right]$$

para representar o movimento arbitrário.

Superposição de degraus



A altura de cada degrau é $(d\alpha_{ef}/dt)dt$

Aproximação de Jones

- A integral de Duhamel sugere o uso de uma transformada de Laplace, note é uma integral de convolução;

- Porém para que a função de Wagner seja Laplace-transformável, R.T.Jones (NACA Rept 681) apresentou uma aproximação para esta função no domínio do tempo (reduzido):

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.355e^{-0.3s}$$

  lembrando que s é o tempo reduzido dado por:

$$s = V_0 t / b$$

- Esta função permite agora a aplicação da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

- A transformada de Laplace de (versão mais adequada, resposta ao impulso – note que a função de Wagner está derivada no tempo)

$$l = \pi\rho b^2\left[\ddot{h} + V_0\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right] + 2\pi\rho b V_0\left[Q(s)\phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds}Q(\sigma)\,d\sigma\right]$$

é:

$$\phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$s = V_0 t/b$$

$$\bar{s} = \tilde{s}b/V_0 \Rightarrow$$ Variável de Laplace adimens.

$$L_C(\tilde{s}) = 2\pi\rho b V_0\left[\frac{1}{2} + L\left(\frac{d\phi(s)}{ds}\right)\right]Q(\tilde{s})$$

$$L_C(\tilde{s}) = 2\pi\rho b V_0\left[\frac{1}{2} + \tilde{s}\phi(\tilde{s}) - \phi(0)\right]Q(\tilde{s}) = 2\pi\rho b V_0 \tilde{s}\phi(\tilde{s})Q(\tilde{s})$$

Função de transferência aerodinâmica

- Lembrando que a aproximação de Jones dada por:

$$L\left(\phi_{ap}\left(s\right)\right) \qquad \phi\left(\tilde{s}\right) \cong \frac{1}{\tilde{s}} - \frac{0.165}{\tilde{s}+0.0455} - \frac{0.355}{\tilde{s}+0.3}$$

- Tem-se a função de transferência relacionando a entrada Q (downwash) com a saída l (carregamento):

$$\frac{L_C\left(\tilde{s}\right)}{Q\left(\tilde{s}\right)} = 2\pi\rho b V_0 \left[\frac{0.5\overline{s}^2 + 0.2808\overline{s} + 0.01365}{\overline{s}^2 + 0.3455\overline{s} + 0.01365}\right]$$

- Note que é semelhante ao que temos da teoria de sistemas dinâmicos, é a função de transferência só que de natureza aerodinâmica!

Domínio do tempo

- Resposta aerodinâmica no espaço de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = Q(t) - 0.3455\left(\frac{V_0}{b}\right)x_2 - 0.01365\left(\frac{V_0}{b}\right)^2 x_1$$

$$L_C(t) = 2\pi\rho b V_0\left[0.5Q(t) + 0.10805\left(\frac{V_0}{b}\right)x_2 - 0.0.006825\left(\frac{V_0}{b}\right)^2 x_1\right]$$

onde pode-se observar os estados aumentados!

- Quando tratarmos de aproximações por funções racionais revisitaremos este assunto bem como veremos como aparecem os estados aumentados.

Movimentos Arbitrários: Relação com Theodorsen

- Método baseado na superposição de integrais de Fourier, associados a resultados obtidos para movimentos harmônicos simples, tal como a solução apresentada por Theodorsen;
- Pode-se assumir que C(k) seria aplicável para oscilações divergentes, proporcionais a $e^{\lambda t}$ onde $\lambda = \mu + i\omega$, $\mu > 0$.

  Ou seja:

$$k = \frac{\omega b}{V_0} - i\frac{\mu b}{V_0}$$

- No entanto esta generalização não é válida para movimentos convergentes, pois se $\mu < 0$, as integrais que definem C(k) divergem;

Movimentos Arbitrários

- A parte não circulatória permanece inalterada, pois independe na natureza do movimento para ser definida, tal como se assumiu para a parte circulatória, um MHS para se associar a solução a funções analíticas especiais (Bessel).
- Pode-se estabelecer a partir do princípio da superposição, que um movimento qualquer, pode ser composto pela soma de infinitas componentes de movimentos harmônicos;
- Esta soma infinita é representada na realidade por uma integral, a <u>integral de Fourier</u>.
- A função de deficiência de sustentação de Theodorsen C(k) pondera a velocidade normal induzida a ¾ da corda (downwash). Esta velocidade normal, pode por sua vez, ser representada por integrais de Fourier:

$$w_{3c/4}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

De Theodorsen para Wagner

- Assim, podemos obter a resposta aerodinâmica para movimentos arbitrários através da transformada de Fourier da resposta a movimento harmônico simples, que depende da função de Theodorsen. (ref BAH). Vamos verificar!
- Lembrando que o downwash é : $w(t)_{3c/4} = -\left[\dot{h} + V_0\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}\right]$
- Pode-se representar o carregamento para movimentos quaisquer através da integral de Fourier dada por:

$$l(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{l}(\omega)_h \bar{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{l}(\omega)_\alpha \bar{\alpha}(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{-\pi\rho b^2 \omega^2 + 2\pi\rho V_0 b C(k)(i\omega)\right\} \bar{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\pi\rho b^2 \left(i\omega V_0 + ba\omega^2\right) + 2\pi\rho V_0 b C(k)(i\omega)\left(V_0 + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\right)\right\} \bar{\alpha}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

De Theodorsen para Wagner

- Onde: $\bar{h}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t}d\omega \quad , \quad \bar{\alpha}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)e^{i\omega t}d\omega$
- Sabendo que: $\dfrac{d^n(\bullet)}{dt^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega)^n(\bullet)e^{i\omega t}d\omega$
- Temos:

$$L(t)=\pi\rho b^2\left[\frac{d^2h}{dt^2}+V_0\frac{d\alpha}{dt}-ba\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]+\rho V_0 b\int_{-\infty}^{\infty}C(k)f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$f(\omega)=i\omega\bar{h}(\omega)+V_0\bar{\alpha}(\omega)+b\left(\frac{1}{2}-a\right)i\omega\bar{\alpha}(\omega)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dot{h}+V_0\alpha+b\left(\frac{1}{2}-a\right)\dot{\alpha}\right]e^{i\omega t}dt$$

Note que f é o downwash a ¾ da corda

De Theodorsen para Wagner

- Supondo que o downwash é uma função degrau unitário (lembre que Wagner definiu a sua função para este tipo de movimento):

$$w(t)_{3c/4} = -\left[\dot{h} + V_0\alpha + b\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha}\right] = V_0\alpha_0$$

$$f(\omega) = V_0\alpha_0 \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt = \frac{V_0\alpha_0}{i\omega}$$

- O carregamento circulatório é dada por:

$$L_C(t) = \rho V_o^2 b\alpha_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

note que: $s = V_0 t/b$

De Theodorsen para Wagner

- Substituindo a tempo reduzido na integral:

$$L_C\left(t\right)=\rho V_o^2 b\alpha_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C\left(k\right)}{ik}e^{iks}dk$$

- Ficando o carregamento circulatório como:

$$L\left(t\right)=\pi\rho b^2\left[\frac{d^2h}{dt^2}+V_0\frac{d\alpha}{dt}-ba\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]-2\pi\rho V_o^2 b\alpha_0\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C\left(k\right)}{ik}e^{iks}dk\right]}_{\Downarrow}$$

$$L_C\left(s\right)=\frac{1}{2}\rho V_0^2 2\pi\alpha\cdot 2b\cdot\phi\left(s\right)=2\pi\rho V_0^2 b\alpha_0\phi\left(s\right)\quad\Leftarrow$$ **Função de Wagner**

De Theodorsen para Wagner

- Portanto, a função de Wagner é a transformada de Fourier da função de Theodorsen:

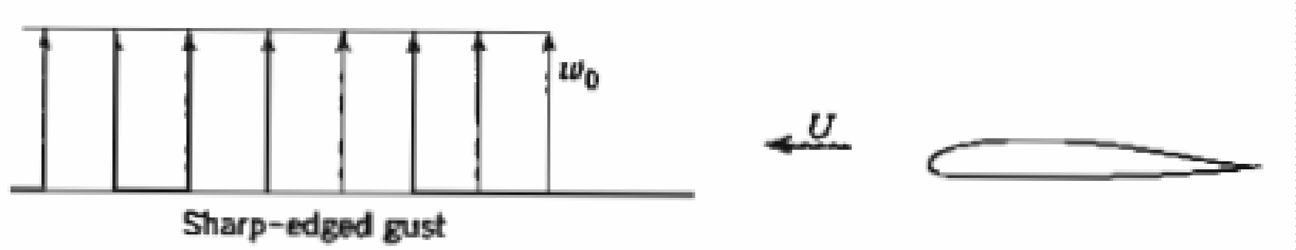
$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{ik} e^{iks} dk$$

- Este resultado é importante e será útil para se fazer uma analogia com o problema do aerofólio movendo-se arbitrariamente.

O problema da rajada

- Küssner descreve o problema da entrada de um corpo (aerofólio) em uma rajada de canto vivo de intensidade w_0 , que representa a velocidade vertical da rajada;
- O encontro do aerofólio com a rajada pode ser representado através da condição de contorno a pequenas perturbações, onde no caso, ao invés de uma velocidade nula sobre o aerofólio, existirá a velocidade $w_0 = w_g$ que está relacionada a condição de contorno que descreve o aerofólio como:

$$\frac{\partial z_a}{\partial t} + V\frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a\left(x,t\right) = -w_g\left(x,t\right)$$



Funções de Küssner e Sears

- Küssner e Schwartz (NACA-TM-991) tratam o problema do aerofólio em movimento, separando a velocidade normal induzida (downwash) em duas partes, uma devido a uma rajada de forma senoidal e a outra associada a uma rajada de canto vivo. (Na realidade este problema é conhecido como a solução geral de Küssner-Schwartz).
- Desta separação surgem duas funções, uma denominada $k_2(s)$ que corresponde à resposta indicial devido a uma onda unitária dada por:

$$H\left(\frac{V_0 t}{b} - x\right)$$

  a qual representa a penetração em uma rajada de canto vivo.
- A outra função corresponde a uma onda associada à velocidade normal senoidal que se desloca do bordo de ataque ao bordo de fuga:

$$w_g = w_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

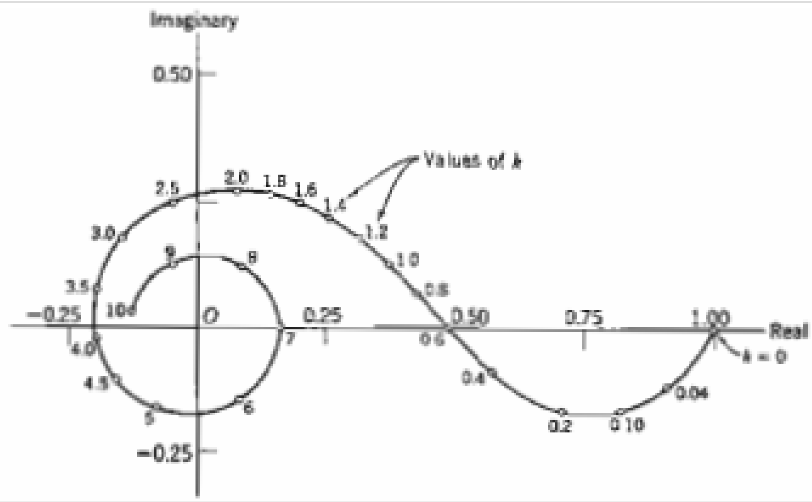
Funções de Küssner e Sears

- A sustentação resultante desta velocidade normal senoidal à qual o aerofólio está submetido dada por: (solução de Schwartz)

$$L_S = 2\pi\rho V_0 w_0 e^{i(\omega t)} \left\{ C\left(k_g\right)\left[J_0\left(k_g\right) - iJ_1\left(k_g\right)\right] + J_1\left(k_g\right)\right\}$$

- Esta função ficou conhecida como função de Sears, pois a mesma foi tabelada no trabalho de Sears "*Some Aspects of Non-stationary Airfoil Theory and its Pratical Applications*", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 8,1941, pp. 104-108.

$$S\left(k_g\right) = C\left(k_g\right)\left[J_0\left(k_g\right) - iJ_1\left(k_g\right)\right] + J_1\left(k_g\right)$$



O livro "*The Theory of Aeroelasticity*" de Y. C. Fung, páginas 407-412 é uma boa referência para conhecer as derivações de Kussner-Schwartz e Sears

Relação entre Küssner e Sears

- O problema da rajada harmônica está relacionado ao problema da rajada de canto vivo, assim como o problema de Theodorsen está relacionado ao problema de Wagner, isto é, através de uma transformada de Fourier.
- Vamos supor que excita uma rajada com velocidade vertical w_g, que:

$$w_g = \begin{cases} 0 & , \quad x' > 0 \\ w_0 & , \quad x' < 0 \end{cases}$$

- Fazendo a transformação entre os sistema fixo na atmosfera e o sistema fixo no corpo temos:

$$x' = x + b - V_0 t \qquad x + b = x' + V_0 t$$

$$t = t' \qquad\qquad t = t'$$

Relação entre Küssner e Sears

- O encontro entre o bordo de ataque da rajada ocorre em t=t'=0, ou seja, quando x' = x+b. Assim, no sistema de coordenadas fixo no aerofólio temos:

$$w_g = \begin{cases} 0 \quad , & \dfrac{x+b}{V_0} > t \\ w_0 \quad , & \dfrac{x+b}{V_0} < t \end{cases}$$

$$w_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w_g(x,t) e^{-i\omega t} dt$$

- Portanto, se quisermos obter a transformada de Fourier da função que descreve a rajada temos:

$$= w_0 \int_{(x+b)/V_0}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{w_0}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{(x+b)/V_0}^{\infty} =$$

$$= \frac{w_0}{i\omega} e^{-i\omega\left[(x+b)/V_0\right]} = \frac{w_0}{i\omega} e^{-ik} e^{-ik\,x/b}$$

Relação entre Küssner e Sears

- Mas lembre-se, o downwash responsável pelo carregamento aerodinâmico a ¼ da corda é função da velocidade de rajada por:

$$\frac{\partial z_a}{\partial t} + V\frac{\partial z_a}{\partial x} = w_a(x,t) = -w_g(x,t)$$

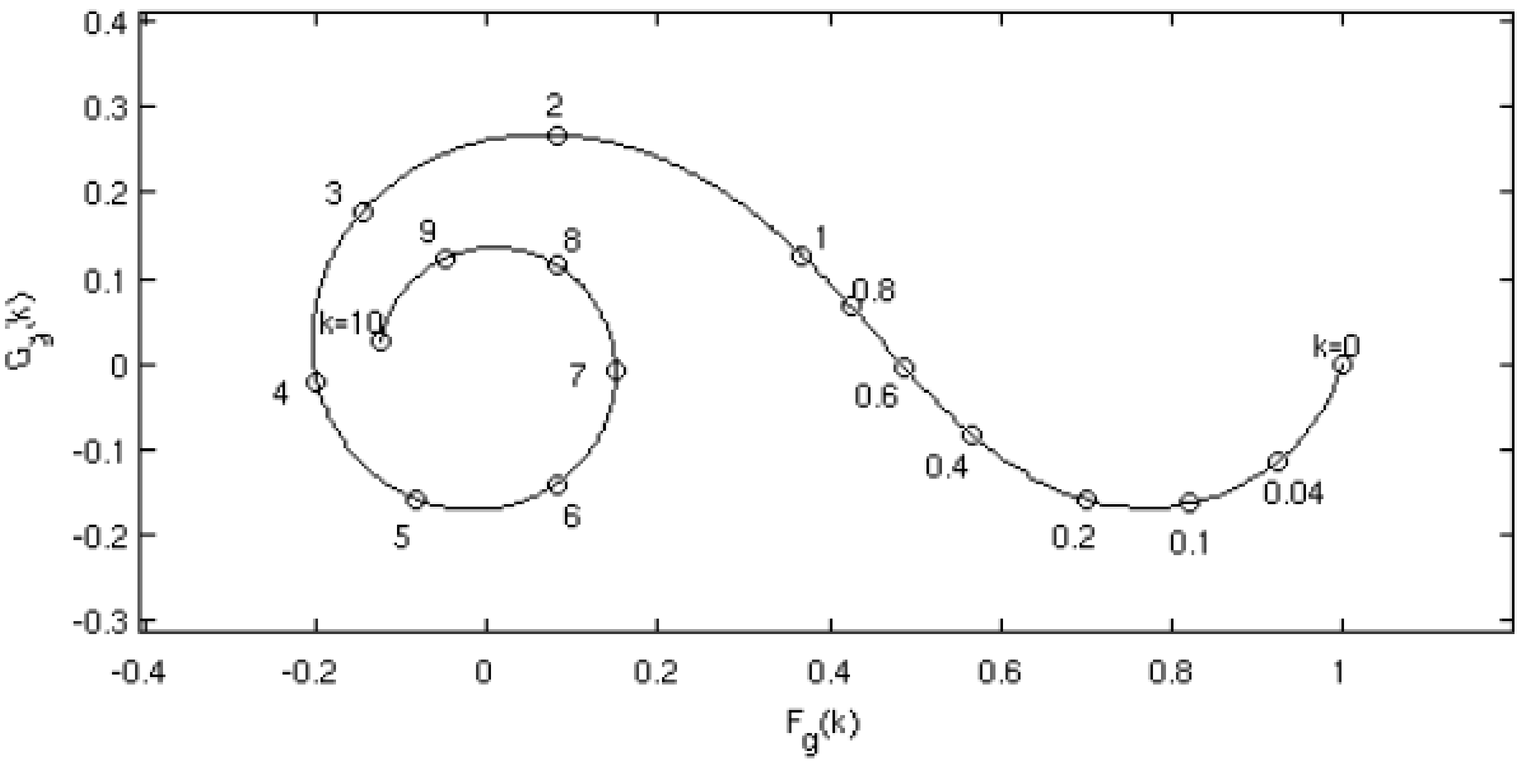
- E neste caso:

$$\bar{w}_a = -\frac{w_0}{i\omega} e^{-ik} e^{-ik\,x/b} \qquad , \qquad \bar{w}_a = -i\omega\bar{h} - i\omega\bar{\alpha}(x - ba) - V_0\bar{\alpha}$$

- Todavia, existe uma solução para o carregamento devido a uma rajada harmônica, conhecida como função de Sears, já apresentada anteriormente:

$$L_S = 2\pi\rho V_0 w_0 e^{i(\omega t)} \left\{ C(k_g)\left[J_0(k_g) - iJ_1(k_g) \right] + J_1(k_g) \right\}$$

Função de Sears



Relação entre Küssner e Sears

- O carregamento, reescrita no domínio da frequência é dada por:

$$\bar{L}_S = -2\pi\rho V_0 \frac{w_0}{i\omega} e^{-ik} e^{-ik\,x/b} \left\{ C\left(k_g\right)\left[J_0\left(k_g\right) - iJ_1\left(k_g\right)\right] + J_1\left(k_g\right)\right\}$$

- Realizando agora transformada para o domínio do tempo teremos L(t) :

$$L_S\left(t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}\left(\omega\right)e^{i\omega t}\,d\omega =$$

$$= \rho V_0 b w_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ C\left(k_g\right)\left[J_0\left(k_g\right) - iJ_1\left(k_g\right)\right] + J_1\left(k_g\right)\right\}}{ik} e^{-ik} e^{-iks} dk$$

$$= 2\pi\rho V_0 b w_0 \psi\left(s\right) = 2\pi\rho V_0 b w_0 k_2\left(s\right)$$

Relação entre Küssner e Sears

- Onde

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{C(k_g)\left[J_0(k_g) - iJ_1(k_g)\right] + J_1(k_g)\right\}}{ik} e^{ik(s-1)} dk$$

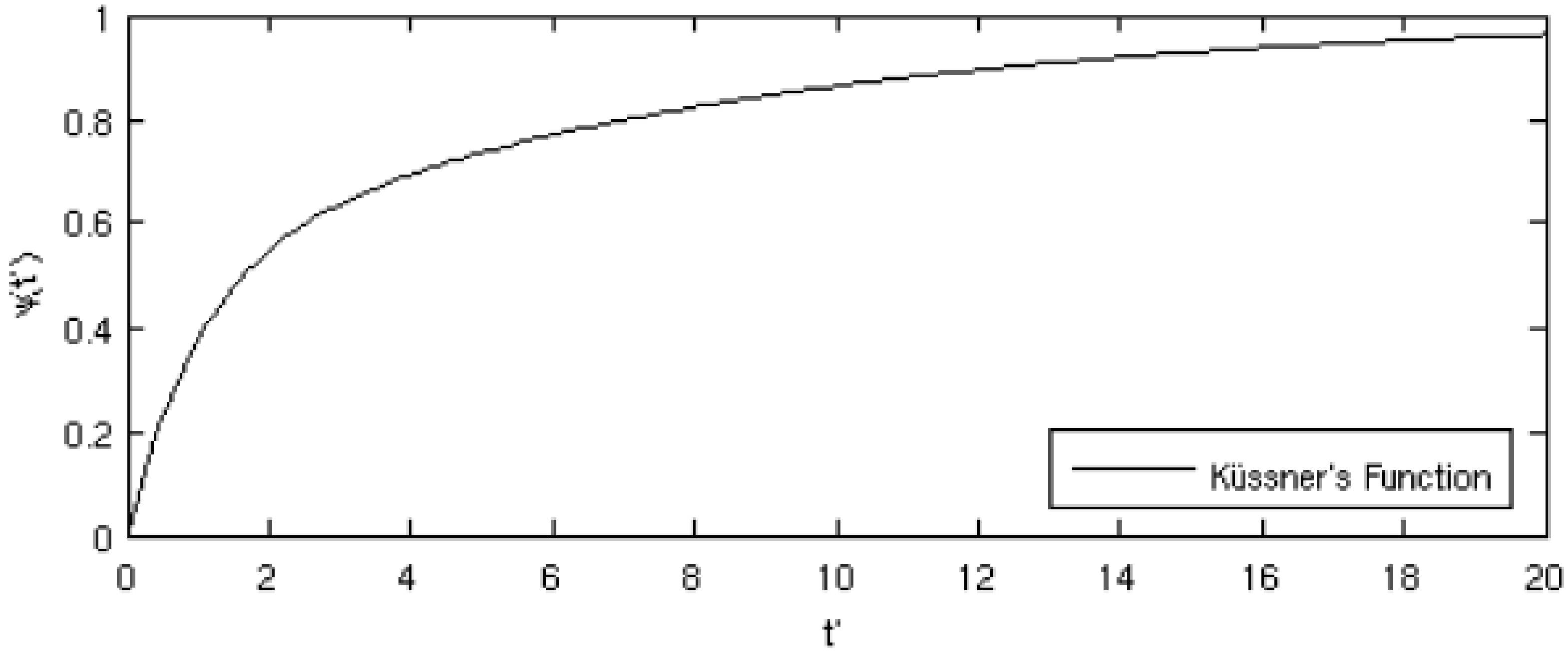
- É a função de Küssner, que pode ser escrita também como:

$$\boxed{\psi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k_g)}{ik} e^{ik(s-1)} dk}$$

- Análoga à expressão ara a função de Wagner:

$$\boxed{\phi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(k)}{ik} e^{iks} dk}$$

Função de Küssner



Funções de Küssner e Sears

- Enquanto que a dedução para a parcela referente a rajada de canto vivo é apresentada por Küssner em 1936, e a sustentação resultante é dada por:

$$L_S = 2\pi\rho V_0 w_0 k_2(s) \qquad s = \frac{V_0 t}{b} \rightarrow$$

Representa o quanto a rajada penetra no aerofólio

- Da mesma forma que a função de Wagner, a função de Küssner não pode ser escrita atrás de uma forma algébrica explícita. Portanto, ele também pode ser aproximada por:

$$k_2(s) = 1 - 0.500e^{-0.130s} - 0.500e^{-s}$$

- Novamente, as transformadas de Laplace das funções de Küssner e Sears, estão relacionas entre si da mesma forma que as funções de Wagner e de Theodorsen estão.

Funções de Küssner e Sears

- Também se pode obter uma resposta geral ao carregamento devido a uma rajada arbitrária, através de uma integral de Duhamel:

$$L(s) = \pi\rho b V_0 \left[w_g(0)\psi(s) + \int_0^s \frac{dw_g(\sigma)}{d\sigma}\psi(s-\sigma)\,d\sigma \right]$$

- De onde se pode obter a resposta a uma turbulência, por exemplo, construída através da superposição de rajadas do tipo canto vivo (degraus).

Resumo (mudamos de s -> t’)

- Movimentos arbitrários:

$$l=\pi\rho b^2\left[\ddot{h}+V_0\dot{\alpha}-ba\ddot{\alpha}\right]+2\pi\rho bV_0\left[Q(t')\phi(0)+\int_0^{t'}\frac{d\phi(t'-\sigma)}{dt'}Q(\sigma)\,d\sigma\right],\qquad \phi(0)=\frac{1}{2}$$

$$l(\tilde{s})=2\pi\rho bV_0\left[\frac{1}{2}+L\left(\frac{d\phi(t')}{dt'}\right)\right]Q(\tilde{s})\qquad\qquad t'=V_0t/b$$

$$\overline{s}=\tilde{s}b/V_0$$

$$l(\tilde{s})=2\pi\rho bV_0\left[\frac{1}{2}+\tilde{s}\phi(\tilde{s})-\phi(0)\right]Q(\tilde{s})=2\pi\rho bV_0\tilde{s}\phi(\tilde{s})Q(\tilde{s})$$

$$\boxed{\phi(\tilde{s})\cong\frac{1}{\tilde{s}}-\frac{0.165}{\tilde{s}+0.0455}-\frac{0.355}{\tilde{s}+0.3}}\qquad \boxed{\frac{l(\tilde{s})}{Q(\tilde{s})}=2\pi\rho bV_0\left[\frac{0.5\overline{s}^2+0.2808\overline{s}+0.01365}{\overline{s}^2+0.3455\overline{s}+0.01365}\right]}$$

Significado físico:

- De uma sucessão de degraus unitários pode-se construir a resposta a uma movimento arbitrário, usando a integral de Duhamel, que representa a soma de vários degraus de amplitude infinitesimal e são somados ao longo do tempo.

E quanto as rajadas:

- Küssner e Sears:

$$L(t') = \pi\rho b V_0 \left[w_g(0)\psi(t') + \int_0^s \frac{dw_g(\sigma)}{d\sigma}\psi(t'-\sigma)\,d\sigma \right]$$

$$\boxed{\psi(\tilde{s}) \cong \frac{0.5}{\tilde{s}+1} + \frac{0.5}{\tilde{s}+0.13}} \qquad \boxed{\psi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k_g)}{ik} e^{ik(s-1)}\,dk}$$

$$S_g(k_g) = C(k_g)\left[J_0(k_g) - iJ_1(k_g)\right] + J_1(k_g)$$

- De onde se obtêm a resposta a uma rajada qualquer.

Significado físico:

- Não é o aerofólio que se move, mas sim ocorre uma perturbação no escoamento médio de forma conhecida:
  - Sears - senóide
  - Küssner – degrau
- Podemos generalizar da mesma forma que fizemos com Wagner, usando uma integral de Duhamel