

ITAndroids Small Size

Relatório do Modelamento da Dinâmica do Robô

Marcos R. O. A. Maximo

Laboratório de Sistemas Computacionais Autônomos (LAB-SCA)
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
São José dos Campos, São Paulo, Brazil
mmaximo@ita.br
itandroids-small@googlegroups.com
<http://www.itandroids.com.br>

Abstract. Este relatório tem o objetivo de determinar as equações cinemáticas e dinâmicas que regem o movimento do robô omnidirecional da equipe ITAndroids Small Size (SS). Inicialmente, apresenta-se as restrições cinemáticas que devem ser respeitadas para evitar deslizamento das rodas. Então, deduz-se as equações do sistema dinâmico do robô restrito às condições de não deslizamento. Ademais, os efeitos do motor e da roda são incluídos na dinâmica para obtenção de um sistema dinâmico completo do robô. Finalmente, faz-se considerações sobre o sistema de controle para a dinâmica obtida.

1 Introdução

Este relatório tem o objetivo de determinar as equações cinemáticas e dinâmicas que regem o movimento do robô omnidirecional da equipe ITAndroids Small Size (SS). Embora este modelo matemático seja naturalmente associado ao sistema de controle, estas equações também mostram *trade-offs* cujas análises são interessantes para outras áreas do projeto, especialmente para o projeto mecânico.

O restante do relatório se organiza da seguinte forma. A Seção 2 apresenta convenções adotadas para o modelamento. Na Seção 3, as restrições cinemáticas presentes no robô ITAndroids SS são explicadas. A Seção 4 deduz as equações dinâmicas do robô. A Seção 5 inclui os efeitos do motor e da roda no modelo. Na Seção 6, são feitas algumas considerações sobre projeto de sistema de controle para a dinâmica levantada. Finalmente, a Seção 7 conclui o relatório e apresenta direções de investigação futura.

2 Convenções

Considera-se que no sistema de coordenadas global $\{x_g, y_g\}$, o robô é adequadamente representado pelo vetor de estados $\mathbf{x} = [x \ y \ \psi]^T$, em que x e y são coordenadas cartesianas de um ponto de referência do robô (tipicamente, o ponto de encontro dos eixos das rodas, quando estas se encontram em um ponto) e ψ é a

orientação tomando-se como referência a frente do robô. Para demarcar a frente do robô, considera-se o lado onde estão os dispositivos *kicker*, *chipper* e *dribbler*.

Ademais, adota-se um sistema de coordenadas $\{x_r, y_r\}$ solidário ao robô com origem no ponto de referência e rotacionado de forma que o eixo x_r esteja alinhado com a frente. Com isso, denota-se por v , v_n e ω as velocidades frontal, lateral e angular, respectivamente. As convenções descritas até então estão ilustradas na Fig. 1.

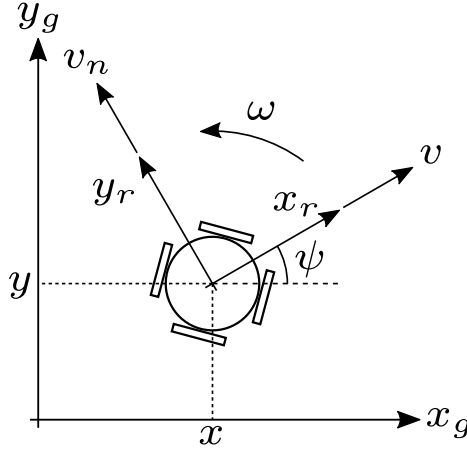


Fig. 1. Convenções relativas a sistemas de coordenadas cartesianos.

Em relação às rodas, adota-se a convenção mostrada na Fig. 2: numera-se as rodas em sentido anti-horário, começando-se a partir do eixo x_r e atribuindo-se número 1 para a primeira roda. A convenção de velocidades lineares das rodas segue este mesmo sentido anti-horário. Finalmente, destaca-se que a convenção do sentido da velocidade angular da roda é feita de modo a manter consistência com a respectiva velocidade linear, i.e. $v_i = \omega_i r_i$ para a i -ésima roda, em que v_i , ω_i e r_i representam a velocidade linear, a velocidade angular e o raio da i -ésima roda, respectivamente.

3 Restrições Cinemáticas

É interessante que o robô não esteja deslizando. Como a roda do SS é omnidirecional, ela não impõe nenhuma restrição na direção normal, em que os *rollers* estão livres para girar. Já na direção tangencial, para não haver deslizamento, não deve haver velocidade relativa entre a roda e o chão no ponto de contato. Para isso, a velocidade de translação da roda deve ser a mesma linear devido a rotação da roda.

Considere uma roda omnidirecional genérica a uma distância l do ponto de referência e posicionada conforme os ângulos α e β , como mostrado na Fig. 3.

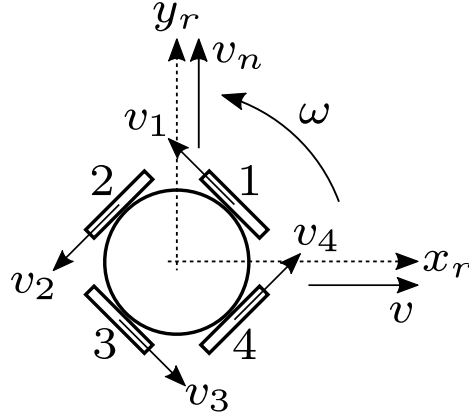


Fig. 2. Convenções relativas às rodas.

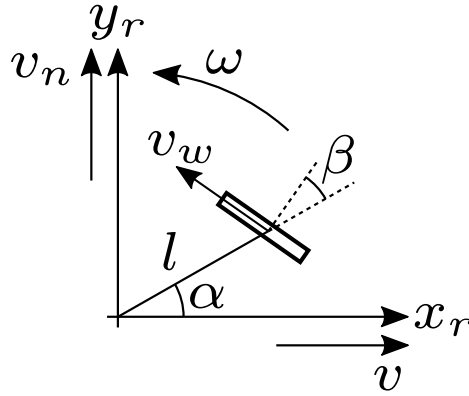


Fig. 3. Condição de não deslizamento para uma roda omnidirecional.

No caso, se o ponto de referência é o ponto de encontro dos eixos das rodas (se existir), tem-se $\beta = 0$ para qualquer roda. Seja v e v_n as velocidades lineares na origem do sistema de coordenadas, nas direções x_r e y_r , respectivamente, a condição para que não haja deslizamento na roda da Fig. 3 pode ser escrita como [2]:

$$v_w = \omega_w r = -\sin(\alpha + \beta) v + \cos(\alpha + \beta) v_n + l \cos(\beta) \omega \quad (1)$$

em que v_w e ω_w são a velocidade linear e angular da roda, respectivamente. No caso do nosso robô, tem-se 4 rodas, logo pode-se coletar todas as restrições de não deslizamento da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 r_1 \\ \omega_2 r_2 \\ \omega_3 r_3 \\ \omega_4 r_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \beta_1) & \cos(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \cos(\beta_1) \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) & \cos(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \cos(\beta_2) \\ -\sin(\alpha_3 + \beta_3) & \cos(\alpha_3 + \beta_3) & l_3 \cos(\beta_3) \\ -\sin(\alpha_4 + \beta_4) & \cos(\alpha_4 + \beta_4) & l_4 \cos(\beta_4) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_r} \quad (2)$$

em que a matriz \mathbf{M} mapeia a velocidade (omnidirecional) do robô nas velocidades das rodas. Perceba que em muitos casos, deseja-se o mapeamento inverso, porém a matriz \mathbf{M} não é quadrada, portanto não admite inversa. Nesse caso, o mapeamento inverso pode ser calculado através da pseudoinversa de Moore-Penrose:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{M}^+ \mathbf{v}_w \quad (3)$$

Calma, na prática você pode pensar que essa inversão foi feita da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_w = \mathbf{M} \mathbf{v}_r \Rightarrow \mathbf{M}^T \mathbf{v}_w = \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \Rightarrow \mathbf{v}_r = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{v}_w \quad (4)$$

de onde percebe-se que:

$$\mathbf{M}^+ = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \quad (5)$$

Portanto, percebe-se que independente da disposição das rodas, sempre é possível determinar os mapeamentos entre velocidade do robô e velocidades das rodas. No caso do robô da ITAndroids, os eixos das rodas encontram-se num mesmo ponto, de modo que este é adotado como ponto de referência. Ademais, todas as rodas tem o mesmo raio r e estão a uma mesma distância l do ponto de encontro dos eixos. Finalmente, as rodas estão dispostas uniformemente ao redor do ponto de referência. Assim, a Tab. 1 mostra os parâmetros de ângulo das rodas do robô ITAndroids SS.

Table 1. Parâmetros de ângulo das rodas do robô ITAndroids SS.

| Wheel | α | β | $\sin(\alpha + \beta)$ | $\cos(\alpha + \beta)$ | $\cos \beta$ |
|-------|-------------|---------|------------------------|------------------------|--------------|
| 1 | 45° | 0 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 0 |
| 2 | 135° | 0 | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | 0 |
| 3 | 225° | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | 0 |
| 4 | 315° | 0 | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 0 |

Desse modo, os mapeamentos para o robô ITAndroids SS são:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v \\ v_n \\ \omega \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} & \frac{1}{4l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

4 Equações Dinâmicas

Para dedução das equações dinâmicas, utilizar-se-á a formulação de Mecânica Lagrangeana. Na dedução considerada, assume-se que as condições de não deslizamento apresentas na Seção 3. As coordenadas generalizadas escolhidas são os ângulos de rotação das rodas, i.e. $\mathbf{q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$. Da formulação de Mecânica Lagrangeana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (8)$$

em que L é o lagrangeana do sistema e $\boldsymbol{\tau}$ é o vetor de forças generalizadas (no caso, torques aplicados pelas rodas). A lagrangeana é dada por:

$$L = T - V \quad (9)$$

em que T e V são as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente. Nesse caso, a única energia potencial é devido a gravidade, mas como o robô se move no plano, pode-se escolher o referencial do potencial gravitacional de modo que $V = 0$. Já a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{cm}^T \mathbf{v}_{cm} + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \quad (10)$$

em que m é a massa do robô, I_{cm} é o momento de inércia em relação ao centro de massa (CM) do robô e \mathbf{v}_{cm} é a velocidade linear do CM do robô. Perceba que na Eq. (10), optou-se por não incluir as energias cinéticas de rotação do motor e da roda. Essa escolha é arbitrária, pois pode-se adicionar posteriormente os efeitos dos torques “gastos” para acelerar o motor e a roda.

Porém, perceba que a escolha de incluir ou não essas energias altera a interpretação de $\boldsymbol{\tau}$. Se essas energias não são incluídas, $\boldsymbol{\tau}$ representa torques aplicados pela roda no chão, i.e. depois de já ter sido descontados os torques para acelerar

o motor e a roda. Se as energias são incluídas, $\boldsymbol{\tau}$ passa a representar os torques gerados pelos motores.

Para facilitar, pode-se escrever \mathbf{v}_{cm} projetado nos eixos $\{x_r, y_r\}$. Considerando um deslocamento de $\mathbf{r}_{cm} = [x_{cm} \ y_{cm} \ z_{cm}]^T$ do CM em relação ao ponto de referência, tem-se:

$$\mathbf{v}_{cm} = \begin{bmatrix} v \\ v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \omega \hat{k} \times \begin{bmatrix} x_{cm} \\ y_{cm} \\ z_{cm} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_{cm} = \begin{bmatrix} v - \omega y_{cm} \\ v_n + \omega x_{cm} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Todavia, ainda tem-se variáveis na expressão de T em coordenadas que não fazem parte de \mathbf{q} , a saber: v , v_n e ω . Para resolver esse problema, basta utilizar a Eq. (7) para mapear a velocidade do robô nas velocidades das rodas:

$$\begin{cases} v = \frac{r\sqrt{2}}{4} (\omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2) \\ v_n = \frac{r\sqrt{2}}{4} (\omega_1 + \omega_4 - \omega_2 - \omega_3) \\ \omega = \frac{r}{4l} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \end{cases} \quad (12)$$

Substituindo-se as expressões da Eq. (12) na Eq. (10), obtém-se uma expressão para a lagrangeana, que então deve ser substituída na Eq. (8). Na prática, esse procedimento foi realizado através do mecanismo de manipulação de equações simbólicas do MATLAB. A função que implementa esse procedimento chama-se `deriveRobotDynamicEquations.m` no repositório do Bitbucket `itandroids-small`, no seguinte caminho:

`source/tools/motor_control`

Para ilustrar, são mostradas as equações para o caso em que o CM coincide com o ponto de referência ($x_{cm} = y_{cm} = 0$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_d & I_{wc} & I_{sc} & I_{wc} \\ I_{wc} & I_d & I_{wc} & I_{sc} \\ I_{sc} & I_{wc} & I_d & I_{wc} \\ I_{wc} & I_{sc} & I_{wc} & I_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_r} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}_w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}} \quad (13)$$

em que:

$$I_d = \frac{mr^2}{4} + \frac{I_{cm}r^2}{16l^2} \quad (14)$$

$$I_{wc} = \frac{I_{cm}r^2}{16l^2} \quad (15)$$

$$I_{sc} = \frac{I_{cm}r^2}{16l^2} - \frac{mr^2}{4} \quad (16)$$

Para avaliar o efeito do deslocamento do CM, verifique a função de MATLAB.

5 Inclusão de Motor e Roda

Como optou-se na Seção 4 por não incluir as energias cinéticas do motor e da roda no lagrangeano, precisa-se descontar de τ os torques necessários para acelerar o motor e a roda. Por simplicidade, far-se-á a análise para a i -ésima roda para então generalizar para as demais. O torque gerado no motor i é usado para acelerar o próprio motor, acelerar a respectiva roda e fornecer τ , logo usando-se equações de modelamento de motor elétrico:

$$\tau_e = J_w \dot{\omega}_i + B_w \omega_i + \tau_i \quad (17)$$

$$\tau_e = N\eta\tau_g \quad (18)$$

$$\tau_g = Kj_i - J_m N \dot{\omega}_i - B_m N \omega_i \quad (19)$$

em que τ_g e τ_e são os torques antes e depois da redução, respectivamente; J_m e J_w são as inércias do motor e da roda, respectivamente; B_m e B_w são os coeficientes de atrito viscoso do motor e da roda, respectivamente; K é a constante de torque do motor; N é o fator de redução; e η é a eficiência do sistema de redução. Isolando τ_i em função dos demais termos:

$$\begin{aligned} \tau_i &= N\eta(Kj_i - J_m N \dot{\omega}_i - B_m N \omega_i) - J_w \dot{\omega}_i - B_w \omega_i \Rightarrow \\ \tau_i &= N\eta Kj_i - \underbrace{(N^2 \eta J_m + J_w)}_{J_{eq}} \dot{\omega}_i - \underbrace{(N^2 \eta B_m + B_w)}_{B_{eq}} \omega_i \Rightarrow \\ \tau_i &= N\eta Kj_i - J_{eq} \dot{\omega}_i - B_{eq} \omega_i \end{aligned} \quad (20)$$

Substituindo-se a Eq. (20) na Eq. (13), obtém-se:

$$\underbrace{(\mathbf{H}_\tau + J_{eq} \mathbf{I}_4)}_{\mathbf{H}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}_w} + \underbrace{B_{eq} \mathbf{I}_4}_{\mathbf{C}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_w} = \underbrace{N\eta K}_{k_j} \underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{j}} \quad (21)$$

Nesse caso, é interessante observar que, desprezando-se os acoplamentos, a inércia “total” (vista do lado da saída) que o motor deve acelerar é:

$$I'_d = \frac{mr^2}{4} + \frac{I_{cm}r^2}{16l^2} + N^2\eta J_m + J_w \quad (22)$$

A Eq. 21 representa o sistema dinâmico do robô tendo as correntes dos motores como entrada. Como pretende-se implementar malhas de corrente nos motores do robô, esse sistema dinâmico é interessante. Pode-se ainda obter o sistema dinâmico tendo as voltagens dos motores como entrada:

$$j_i = \frac{V_i - V_{backemf}}{R} = \frac{V_i - K\omega_i}{R} \quad (23)$$

em que $V_{backemf}$ e R são a força contra-eletromotriz induzida e a resistência do motor, respectivamente. Substituindo-se a Eq. (23) na Eq. 21:

$$\mathbf{H}_j \dot{\mathbf{v}}_w + \mathbf{C}_j \mathbf{v}_w = \frac{N\eta K}{R} \begin{bmatrix} V_1 - K\omega_1 \\ V_2 - K\omega_2 \\ V_3 - K\omega_3 \\ V_4 - K\omega_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Reagrupando os termos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_j \\ \mathbf{H}_v \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}_w} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\left(B_{eq} + \frac{N\eta K^2}{R} \right) \mathbf{I}_4}_{\mathbf{C}_v} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_w} = \underbrace{\frac{N\eta K}{R}}_{k_v} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \quad (25)$$

Finalmente, para obter o sistema dinâmico na forma usual de controle, basta fazer:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \dot{\mathbf{v}}_w + \mathbf{C} \mathbf{v}_w = k \mathbf{u} &\Rightarrow \mathbf{H} \dot{\mathbf{v}}_w = -\mathbf{C} \mathbf{v}_w + k \mathbf{u} \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{v}}_w = \underbrace{-\mathbf{H}^{-1} \mathbf{C}}_{\mathbf{A}} \mathbf{v}_w + \underbrace{k \mathbf{H}^{-1}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} &\Rightarrow \dot{\mathbf{v}}_w = \mathbf{A} \mathbf{v}_w + \mathbf{B} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (26)$$

6 Considerações sobre o Sistema de Controle

O sistema de controle projetado para a roda assume que não há acoplamento entre as rodas, i.e. que a roda é um sistema SISO. Essa parece ser a abordagem usada pelos os times na RoboCup [3, 1]. Porém, os sistemas dinâmicos das equações (13), (21) e (25) são MIMO e de modo geral há de fato acoplamento entre as rodas.

Desse modo, uma técnica de controle capaz de lidar com sistemas MIMO, como alocação de pólos ou LQR, deve ser capaz de obter um desempenho superior do que técnicas clássicas que assumem que o sistema é SISO. Por outro lado, além de serem mais complicadas e menos intuitivas, a implementação dessas técnicas na FPGA é mais difícil e requer maior custo computacional.

Recomenda-se então a obtenção de valores confiáveis para os parâmetros encontrados nos sistemas dinâmicos acima a fim de se avaliar a influência do acoplamento. No caso de ser constatado um baixo acoplamento, recomenda-se o uso de controle clássico SISO, porém com correção da inércia acelerada pelo motor para levar em conta a massa e a inércia do robô. No caso do acoplamento ser muito forte a ponto de atrapalhar muito o movimento do robô, sugere-se

avaliar o uso de técnicas modernas para sistemas MIMO. Recomenda-se também a criação de um simulador da dinâmica completa em malha fechada para uma melhor avaliação do efeito do acoplamento.

7 Conclusão

Nesse relatório, deduziu-se a dinâmica de movimento do robô omnidirecional ITAndroids SS. Inicialmente, foram apresentadas as restrições cinemáticas que devem ser respeitadas para evitar deslizamento das rodas. Então, considerando o robô em condição de não deslizamento, as equações do sistema dinâmico do robô foram deduzidas. Com isso, os efeitos do motor e da roda foram incluídos na dinâmica para obtenção de um sistema dinâmico completo do robô. Finalmente, apontou-se algumas considerações sobre o projeto de um sistema de controle para o modelo obtido.

Para trabalho futuro, recomenda-se as seguintes direções:

- Determinação dos parâmetros considerados para o caso do robô ITAndroids SS.
- Desenvolvimento de um simulador de dinâmica completa em malha fechada.
- Avaliar o atual projeto do robô ITAndroids SS.
- Avaliar a influência dos parâmetros de projeto no desempenho do robô ITAndroids SS.
- Avaliar os limites de aceleração impostos pelos limites de atrito com o solo.
- Inclusão de atritos secos no modelo deduzido.
- Integração do modelo dinâmico com o simulador `grSim`.

References

1. Helder P. Oliveira, Armando J. Sousa, A. Paulo Moreira, and Paulo J. Costa. Dynamical models for omni-directional robots with 3 and 4 wheels. In *Proceedings of the 5th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, pages 189–196, 2008.
2. Roland Siegwart, Illah R. Nourbakhsh, and Davide Scaramuzza. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press, 2nd edition, 2011.
3. Piyamate Wasuntapichaikul, Kanjanapan Sukvichai, and Yodyium Tipsuwan. Implementation of torque controller for brushless motors on the omni-directional wheeled mobile robot. *CoRR*, abs/1708.02271, 2017.