AE-712 - AEROELASTICIDADE

Aeroelasticidade Dinâmica

Métodos de Cálculo de Flutter

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Aerodinâmica não estacionária

- A proposta é estudar o problema da seção típica com dois graus de liberdade, considerando a teoria aerodinâmica não-estacionária de Theodorsen;
- Este modelo inclui os efeitos não estacionários importantes, que tem papel fundamental da solução do problema de flutter.

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \qquad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k} \qquad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$

Flutter do Aerofólio

Vimos que a equação do sistema aeroelástico do domínio da frequência ere representada como:

$$[M]\omega^2 + [K]\{\bar{x}\} = \{\bar{P}\} = \pi\rho b^4\omega^2\left[A(k)\right]\{\bar{x}\}$$

$$-\left\{\left[[M] + \pi\rho b^4\omega^2\left[A(k)\right]\right]\omega^2 + [K]\right\}\{\bar{x}\} = 0$$

Note que já conhecemos as equações de movimento da seção típica (lado esquerdo) e os termos forçantes (lado direito) que podem ser Agrupados em uma equação homogênea (segunda equação) para assim estudar um problema de estabilidade sujeito a variação de parâmetros.

Análise de flutter

- A análise de flutter é uma técnica muito especializada que não possui relação com métodos convencionais como Root Locus, Nyquist, entre outros, normalmente empregados para estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos.
- Dentre as técnicas de solução do problema de flutter podemos listar os métodos:
  - Theodorsen (antigo)
  - K
  - P-k
  - G
  - P
- A peculiaridade da solução deve-se a necessidade de se resolver um problema de autovalor, supondo movimento harmônico simples, embora em determinadas condições isto não ocorra.

Sistema com 2 GDL

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ M \end{Bmatrix}$$

O sinal de L é trocado pois uma sustentação positiva age para cima enquanto que h é positivo para baixo

Dividimos por m, massa do aerofólio: , r_θ = raio de giração = $r_\theta^2 = \dfrac{I_\theta}{m}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m \\ M/m \end{Bmatrix}$$

Adimensionalizando...

1/b

1/b²

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_h^2 = K_h / m\,,\ \omega_\theta^2 = K_T / I_\theta\,,\ \bar{x}_\theta = x_\theta / b\,,\ \bar{r}_\theta = r_\theta / b\,.$$

Assumindo movimento harmônico simples temos:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

Mudamos a notação do grau de liberdade em arfagem de θ para α!

Carregamento aerodinâmico Sustentação:

- Usando as relações dos carregamentos aerodinâmicos da formulação de Theodorsen:

$$L = \pi\rho b^2\left[\ddot{h} + V_0\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}\right] + 2\pi\rho V_0 bC(k)\left[\dot{h} + V_0\alpha + b(0.5-a)\dot{\alpha}\right]$$

No domínio da frequência, e rearranjando alguns termos:

$$= \pi\rho b^3\omega^2\left[\frac{h}{b}\left(1 - i2C(k)\frac{1}{k}\right) + \alpha\left(-a - i\frac{1}{k} - 2C(k)\frac{1}{k^2} - i2\left(\frac{1}{2} - a\right)\frac{C(k)}{k}\right)\right]$$

$$= \pi\rho b^3\omega^2\left[\frac{h}{b}L_h + \alpha\left(L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h\right)\right]$$

$$k = \frac{\omega b}{V}, \text{ and } L_h = 1 - i2C\frac{1}{k},\ L_\alpha = \frac{1}{2} - i\frac{1+2C}{k} - \frac{2C}{k^2}.$$

Carregamento aerodinâmico Momento:

- E o momento:

$$M = \pi\rho b^2\left[ba\ddot{h} + V_0 b\left(0.5 - a\right)\dot{\alpha} - b^2\left(1/8 + a^2\right)\ddot{\alpha}\right] +$$

$$+2\pi\rho V_0 b^2\left(0.5 + a\right)C\left(k\right)\left[\dot{h} + V_0\alpha + b\left(0.5 - a\right)\dot{\alpha}\right]$$

No domínio da frequência:

$$M = \pi\rho b^4\omega^2\left[\left\{M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h\right\}\frac{h}{b} + \left\{M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)\left(L_\alpha + M_h\right) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h\right\}\alpha\right]$$

$$M_h = \frac{1}{2}, M_\alpha = \frac{3}{8} - i\frac{1}{k}$$

Nova notação

- Smilg e Wasserman (Application of three dimensional flutter theory to aircrfat structures – AAF Tech Rept 4798, 1942) introduziram a notação onde o carregamento aerodinâmico não estacionário, segundo a formulação de Theodorsen, é escrito com função de coeficientes $L\alpha$, Lh, $M\alpha$,e Mh.

- A formulação dos autores acima foi muito utilizada na indústria, e era encontrada na forma de tabelas de coeficientes em função da frequência reduzida.

- Esta forma de apresentar carregamento aerodinâmico também é apresentada no livro "Introdution to the Study of Aircraft Vibration and Flutter", de Scanlan e Rosembaum, 1951.

Equações Aeroelásticas

- Igualando o carregamento aerodinâmico às equações do movimento:

$$-\omega^2\begin{bmatrix}1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^{\,2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2\bar{r}_\theta^{\,2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\omega^2}{\mu}\begin{bmatrix}L_h & L_\alpha-\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h \\ M_h-\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h & M_\alpha-\left(\frac{1}{2}+a\right)(L_\alpha+M_h)+\left(\frac{1}{2}+a\right)^2 L_h\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}$$

Com: $\mu=\dfrac{m}{\pi\rho b^2 l}$

Notação consistente com de Smilg e Wasserman.

Associando a parâmetros de similaridade….

$$-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{\Omega^2}{\mu}\begin{bmatrix}L_h & L_\alpha-\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h \\ M_h-\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h & M_\alpha-\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha+M_h\right)+\left(\frac{1}{2}+a\right)^2 L_h\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h/b \\ \alpha\end{Bmatrix}$$

$$R^2=\frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\bar{x}_\theta=\frac{x_\theta}{b}$$

$$\bar{r}_\theta=\frac{r_\theta}{b}$$

$$\Omega=\frac{\omega}{\omega_\theta}$$

$$\mu=\frac{m}{\pi\rho b^2 l}$$

Método de Theodorsen

- Agora que temos um sistema de equações homogêneo, pode-se associar a este um determinante a ser resolvido para se conhecer a estabilidade do sistema
- Vamos empregar um método dedicado para encontrar a condição de estabilidade neutra, uma vez que este determinante é função da frequência reduzida.
- Portanto requer-se uma técnica peculiar de solução do problema de estabilidade à variação de um parâmetro, no caso a própria frequência reduzida.
- Note que de acordo com a definição desta frequência adimensional, pode-se obter uma velocidade e frequência associadas à condição de estabilidade neutra.
- Estas condições definem os limites de estabilidade aeroelástica em termos de velocidade, e por sua vez o envelope de vôo de uma aeronave.

Método de Theodorsen

- O método de Theodorsen baseia-se na solução do determinante do sistema aeroelástico representado por:

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} \mu\left(\dfrac{R^2}{\Omega^2}-1\right)-L_h & -\mu\bar{x}_\theta - L_\alpha + \left(\dfrac{1}{2}+a\right)L_h \\ -\mu\bar{x}_\theta - M_h + \left(\dfrac{1}{2}+a\right)L_h & \mu\left(\dfrac{\bar{r}_\theta^2}{\Omega^2}-\bar{r}_\theta^2\right)-M_\alpha+\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha+M_h\right)-\left(\dfrac{1}{2}+a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mu\left(\dfrac{R^2}{\Omega^2}-1\right)-L_h & -\mu\bar{x}_\theta - L_\alpha + \left(\dfrac{1}{2}+a\right)L_h \\ -\mu\bar{x}_\theta - M_h + \left(\dfrac{1}{2}+a\right)L_h & \mu\left(\dfrac{\bar{r}_\theta^2}{\Omega^2}-\bar{r}_\theta^2\right)-M_\alpha+\left(\dfrac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha+M_h\right)-\left(\dfrac{1}{2}+a\right)^2 L_h \end{vmatrix} = 0$$

Determinante de flutter

- Para que o flutter exista o determinante de flutter deve ser nulo.
- Resolvendo-se o determinante, chega-se a uma equação complexa que pode ser dividida em uma parte real e outra imaginária;

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \Delta_R + i\Delta_I = 0 \quad , \qquad A = \mu\left(\frac{R^2}{\Omega^2} - 1\right) - L_h$$

$$\mu = \frac{m}{\pi\rho b^2 l}$$

$$r_\theta^2 = \frac{I_\theta}{mb^2}$$

$$B = -\mu\overline{x}_\theta - L_\alpha + \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h \; , \qquad C = -\mu\overline{x}_\theta - M_h + \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h$$

$$D = \mu\left(\frac{\overline{r}_\theta^2}{\Omega^2} - \overline{r}_\theta^2\right) - M_\alpha + \left(\frac{1}{2} + a\right)\left(L_\alpha + M_h\right) - \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h$$

Solução do determinante

- A técnica de solução do problema de flutter através do método de Theodorsen é apresentada seguir:
  - Calcula-se coeficientes A, B C e D que são função da geometria, parâmetros adimensionais que caracterizam a dinâmica da seção típica, por exemplo, e da função e Theodorsen para valores de frequência reduzida pré- estabelecidos .
  - Cada um dos coeficientes A, B C e D serão função de $1/\Omega^2$, o qual será chamado de X;
  - A equação característica portanto será função de X, resultante de Δ=AD-BC;
  - Separa-se esta equação em uma parte real e outra imaginária:

$$\Delta=\Delta_R+i\Delta_I$$

  - Iguala-se a parte real e a imaginária isoladamente a zero e resolve-se uma equação do segundo grau em X.

Solução do determinante

- Este procedimento é repetido para vários valores de frequência reduzida;
- Como a equação resolvida para as raízes X_R e X_I serão de segundo grau, teremos dois valores para a parte real e dois para a parte imaginária;
- Portanto gera-se uma tabela to tipo:

$1/k$	X_R1	X_R2	X_I1	X_I2

- A partir da qual pode-se plotar curvas de evolução das duas partes reais e das duas partes imaginárias.

Cálculo do Flutter

- Deve-se obedecer a condição que para a evolução de cada raiz X_R1, X_R2, X_I1 e X_I2 seja plotada uma única curva;
- Da interseção entre uma curva relativa a uma raiz imaginária e uma real obtêm-se a velocidade de flutter da frequência reduzida correspondente ao ponto de interseção.
- Esta interseção representa a igualdade entre as partes real e imaginária, e de onde pode-se obter o valor de X correspondente. Lembre que X é o inverso do quadrado da frequência adimensional Ω.
- É um método gráfico que permite com poucos valores de frequência reduzida escolhidos estimar a velocidade de flutter.

$$X = \frac{1}{\Omega^2} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{1}{X}} \;,\; \Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta} \quad \therefore \quad k = \frac{\omega b}{U} \Rightarrow U = \frac{\omega b}{k} = \frac{\omega_\theta b}{k}\sqrt{\frac{1}{X}} = U_{flutter}$$

O Método V-g

- O método V-g, também conhecido como método “k” é, or sua vez uma técnica mais elaborada de solução do probelma da estabilidade aeroelástica.
- Neste caso, associa-se a equação homogênea:

$$-\Omega^2\begin{bmatrix} \mu\left(\frac{R^2}{\Omega^2}-1\right)-L_h & -\mu\bar{x}_\theta-L_\alpha+\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h \\ -\mu\bar{x}_\theta-M_h+\left(\frac{1}{2}+a\right)L_h & \mu\left(\frac{\bar{r}_\theta^2}{\Omega^2}-\bar{r}_\theta^2\right)-M_\alpha+\left(\frac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha+M_h\right)-\left(\frac{1}{2}+a\right)^2 L_h \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}=0$$

- A uma forma diferente, que permite associa-la a uma problema de autovalor.
- Da mesma forma que o método de Theodorsen, este peobela de autovalor será função de um parâmetro, a frequência reduzida.

Método V-g (ou Método K)

- O método V-g é baseado na solução da mesma equação que representa o sistema aeroelástico apresentada anteriormente:

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{\Omega^2}{\mu} \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2}+a\right) L_h \\ M_h - \left(\frac{1}{2}+a\right) L_h & M_\alpha - \left(\frac{1}{2}+a\right)\left(L_\alpha + M_h\right) + \left(\frac{1}{2}+a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- Porém adotando a seguinte forma:

$$\left[K_{ij}\right] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \Omega^2 \left[A_{ij} + M_{ij}\right] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Método V-g

- Onde as matrizes Mij, Kij e Aij são as matrizes de massa, rigidez e aerodinâmica respectivamente, sendo a última, função da frequência reduzida.
- O método V-g assume que existe um amortecimento artificial g:

$$\left[K_{ij}\right] = \left(1 + ig\right)\left[K_{ij}\right]$$

- Necessário para se garantir um movimento harmônico simples.
- Note que a forma do sistema a ser resolvido é de um **problema de autovalor** similar a um sistema que representa um movimento harmônico simples:

$$\left[K_{ij}\right]\begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \Omega^2\left[A_{ij} + M_{ij}\right]\begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Método V-g

- Entretanto, os coeficientes de Aij são complexos, o que resulta em um problema de autovalor complexo, portanto, os auto-valores serão números complexos, cuja parte real representa o amortecimento artificial e a parte imaginária a frequência associada.
- Quando se assume o amortecimento estrutural g, a sistema é representado por:

$$\frac{1+ig}{\Omega^2}\left[K_{ij}\right]\begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \left[A_{ij} + M_{ij}\right]\begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1+ig}{\Omega^2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Autovalor}$$

para uma dada frequência reduzida k=ωb/U.

Autovalores aeroelásticos

- O processo de extração dos autovalores é realizado para um conjunto de frequências reduzidas tabeladas, do maior para o menor valor.
- A i-ésima frequência, ou seja associada à i-ésima frequência reduzida e o correspondente amortecimento artificial são obtidos de:

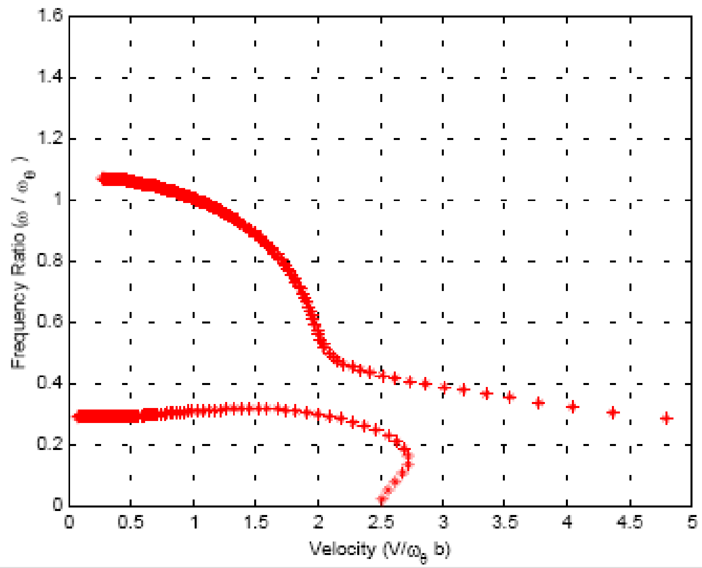
$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{Re}}} = \frac{\omega_i^2}{\omega_\theta^2} \quad , \quad g = \frac{\lambda_{\mathrm{Im}}}{\lambda_{\mathrm{Re}}}$$

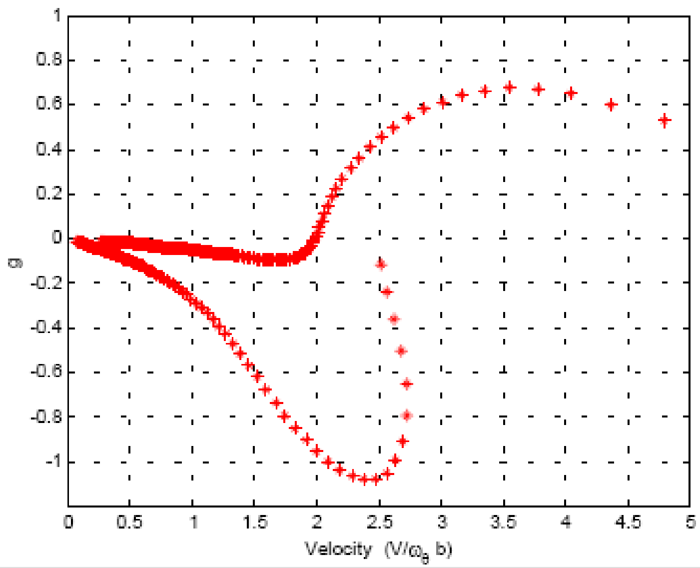
$$\Omega = \frac{\omega_i}{\omega_\theta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\mathrm{Re}}}} \quad , \quad \lambda = \frac{1+ig}{\Omega^2}$$

- Esta forma de se obter a frequência e o amortecimento a partir do autovalor é associada a hipótese de se assumir que existe um amortecimento artificial, necessário para atender a condição que os autovalores do sistema aeroelástico deverão ser complexos.

Curvas V-g

- E as curvas que representam a evolução da frequência e amortecimento são representadas graficamente como:

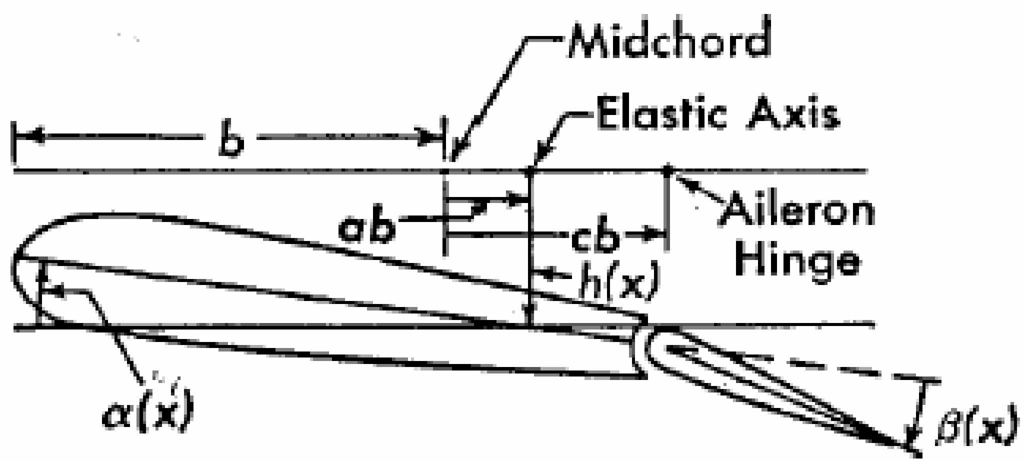




- Onde a velocidade reduzida é obtida da relação para a frequência reduzida.

Exemplo – Aerofólio com 3 GDL

- Vamos estudar o exemplo de um aerofólio com três graus de liberdade, empregando o método V-g (ou método K) para a solução do problema de flutter.



Movimento do Aerofólio

- O movimento do aerofólio com superfície de controle é representado pela seguinte equação:

$$z = h + \alpha(x - ab) + \beta\,(x - bc)U(x - bc)$$

- Onde $U(x\text{-}bc)$ é uma sinal de controle do tipo degrau unitário. O downwash, por sua vez terá termos adicionais:

$$\begin{aligned} w_a(x,t) &= -\left(\frac{\partial z}{\partial t} + V\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &= -[\dot{h} + \dot{\alpha}(x - ab)] - V\alpha - \dot{\beta}(x - bc)U(x - bc) - V\beta U(x - bc) \end{aligned}$$

Forças e momentos

- E de um desenvolvimento similar ao que foi visto para a seção típica com 2 GDL, pode-se obter as equações de Theodorsen para esta caso de três graus de liberdade:

$$F = -\pi\rho b^2\left[\ddot{h} + V\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha} - \frac{V}{\pi}T_4\dot{\beta} - \frac{b}{\pi}T_1\ddot{\beta}\right] - 2\pi\rho VbQC(k)$$

$$M = \pi\rho b^2\left[ba\ddot{h} - Vb\left(\frac{1}{2} - a\right)\dot{\alpha} - b^2\left(\frac{1}{8} + a^2\right)\ddot{\alpha} - \frac{V^2}{\pi}(T_4 + T_{10})\beta\right.$$
$$\left. + \frac{Vb}{\pi}\left\{-T_1 + T_8 + (c-a)T_4 - \frac{1}{2}T_{11}\right\}\dot{\beta} + \frac{b^2}{\pi}\{T_7 + (c-a)T_1\}\ddot{\beta}\right]$$
$$+ 2\pi\rho Vb^2\left(a + \frac{1}{2}\right)QC(k)$$

$$M_\beta = \pi\rho b^2\left[\frac{b}{\pi}T_1\ddot{h} + \frac{Vb}{\pi}\left\{2T_9 + T_1 - (a - \frac{1}{2})T_4\right\}\dot{\alpha}\right.$$
$$- \frac{2b^2}{\pi}T_{13}\ddot{\alpha} - \left(\frac{V}{\pi}\right)^2(T_5 - T_4T_{10})\beta$$
$$\left. + \frac{Vb}{2\pi^2}T_4T_{11}\dot{\beta} + \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 T_3\ddot{\beta}\right] - \rho Vb^2T_{12}QC(k)$$

- Com: $$Q = V\alpha + \dot{h} + \dot{\alpha}b\left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{V}{\pi}T_{10}\beta + \frac{b}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}$$

  o downwash induzido em um ponto a ¾ da corda do perfil

Funções "T"

- As funções "T" são definidas como:

$$T_1 = -\frac{2+c^2}{3}\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c$$

$$T_3 = -\frac{1-c^2}{8}(5c^2+4) + \frac{1}{4}c(7+2c^2)\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)(\cos^{-1}c)^2$$

$$T_4 = c\sqrt{1-c^2} - \cos^{-1}c$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1}c)^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c$$

$$T_7 = c\frac{7+2c^2}{8}\sqrt{1-c^2} - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)\cos^{-1}c$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}(1+2c^2)\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c$$

Funções "T" (cont)

- Mais funções "T", para assim defineirmo o modelo completo:

$$T_9 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}\,(1\text{-}c^2)}{3} + aT_4\right]$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1} c$$

$$T_{11} = (2\text{-}c)\sqrt{1-c^2} + (1\text{-}2c)\cos^{-1} c$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2}\text{-}(1+2c)\cos^{-1} c$$

$$T_{13} = \text{-}\frac{1}{2}\left[T_7 + (c\text{-}a)T_1\right]$$

$$T_{15} = T_4 + T_{10}$$

$$T_{16} = T_1\text{-}T_8\text{-}(c\text{-}a)T_4 + \frac{1}{2}T_{11}$$

$$T_{17} = \text{-}2T_9\text{-}T_1 + (a\text{-}\frac{1}{2})T_4$$

$$T_{18} = T_5\text{-}T_4T_{10}$$

$$T_{19} = \text{-}\frac{1}{2}T_4T_{11}$$

para escrever as equações de Theodorsen para o caso de três graus de liberdade.

Modelo dinâmico

- Equações do movimento: (obtidas por Lagrange, por exemplo)

$$\begin{bmatrix} m & mx_\alpha & mx_\beta \\ mx_\alpha & mr_\alpha^2 & mr_\alpha^2+mx_\beta\left(bc-ba\right) \\ mx_\beta & mr_\alpha^2+mx_\beta\left(bc-ba\right) & mr_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Adimensionalizando de forma análoga ao caso de 2 GDL:

$$\begin{bmatrix} 1 & \overline{x}_\alpha & \overline{x}_\beta \\ \overline{x}_\alpha & m\overline{r}_\alpha^2 & \overline{r}_\alpha^2+\overline{x}_\beta\left(c-a\right) \\ \overline{x}_\beta & \overline{r}_\alpha^2+\overline{x}_\beta\left(c-a\right) & \overline{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\ddot{h}}{b} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2\overline{r}_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\beta^2\overline{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{h}{b} \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelo de Theodorsen

- As equações de Theodorsen para o caso do aerofólio com três graus de liberdade são modificadas com a inclusão da superfície de controle.

- Pode-se recorrer ao BAH ou mesmo ao NACA Report 496 de Theodorsen para se verificar os termos que compõem as matrizes, definidos anteriormente:

$$\left[\bar{M}\right]\{\ddot{x}\}+\left[\bar{K}\right]\{x\}=2b^2q_D\left\{[M_{nc}]\{\ddot{x}\}\left(\frac{b}{V_0}\right)^2+\left([B_{nc}]+C(k)\{R\}[S_2]\right)\{\dot{x}\}\left(\frac{b}{V_0}\right)+C(k)\left([K_c]+\{R\}[S_1]\right)\{x\}\right\}$$

$$q_D=\frac{1}{2}\rho V_0^2 \quad , \quad S_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dfrac{T_{10}}{\pi}\end{bmatrix} \quad , \quad S_2=\begin{bmatrix}0 & (0.5-a) & \dfrac{T_{11}}{2\pi}\end{bmatrix} \quad , \quad R=\begin{Bmatrix}-2\pi \\ 2\pi(a+0.5) \\ -T_{12}\end{Bmatrix}$$

Modelo de Theodorsen

- E as matrizes que compõem a equação anterior:

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi\left(\frac{1}{8}+a^2\right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix} \qquad K_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & \frac{-T_{18}}{\pi} \end{bmatrix}$$

$$B_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & -T_4 \\ 0 & \pi\left(a-\frac{1}{2}\right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & \frac{-T_{19}}{\pi} \end{bmatrix}$$

Aplicação do método V-g

- Pressupõem-se que nosso modelo aeroelástico possa ser escrito no domínio da frequência, assumindo um movimento harmônico simples:

$$-\omega^2[\bar{M}]\{x_s\}+[\bar{K}]\{x_s\}=\frac{q}{m}\left(2C(k)\{R\}\lfloor S_1\rfloor\{x_s\}+(i\omega)\frac{2b}{V}C(k)\{R\}\lfloor S_2\rfloor\{x_s\}\right.$$
$$\left.+(-\omega^2)\frac{2b^2}{V^2}[M_{nc}]\{x_s\}+(i\omega)\frac{2b}{V}[B_{nc}]\{x_s\}+2[K_{nc}]\{x_s\}\right)$$

$$\frac{1}{\omega^2}[\bar{K}]\{x_s\}=[\bar{M}]\{x_s\}+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{k^2}C(k)\{R\}\lfloor S_1\rfloor\{x_s\}+i\frac{1}{k}C(k)\{R\}\lfloor S_2\rfloor\{x_s\}\right.$$
$$\left.-[M_{nc}]\{x_s\}+i\frac{1}{k}[B_{nc}]\{x_s\}+\frac{1}{k^2}[K_{nc}]\{x_s\}\right)$$

Amortecimento Artificial

- Também se pode assumir um amortecimento estrutural artificial:

$$\frac{1+ig}{\omega^2}[\overline{K}]\{x_s\} = [\overline{M}]\{x_s\} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{k^2}C(k)\{R\}\lfloor S_1 \rfloor\{x_s\} + i\frac{1}{k}C(k)\{R\}\lfloor S_2 \rfloor\{x_s\}\right.$$
$$\left. -[M_{nc}]\{x_s\} + i\frac{1}{k}[B_{nc}]\{x_s\} + \frac{1}{k^2}[K_{nc}]\{x_s\}\right)$$

- Solução do problema de flutter – solução do problema de autovalor associado:

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{Re}}} = \omega_i^2 \qquad , \quad g = \frac{\lambda_{\mathrm{Im}}}{\lambda_{\mathrm{Re}}}$$

Codificando o método I:

```
% 3 dof system
wh=50.0; wa=100.0; wb=300.0;
a=-0.4; c=0.6; b=1;
xa=0.2; xb=0.0125;
ra=sqrt(0.25); rb=sqrt(0.00625);
mu=40;
nn=3;i=sqrt(-1);rho=0.002378;
mas=pi*rho*mu*b*b; damb=0.0;
sqr=sqrt(1-c*c);
arc=acos(c);
%%
% final version of t function generating the aero matrix
t1=-(2+c*c)/3*sqr+c*arc;
t3=-(1-c*c)/8*(5.*c*c+4)+.25*c*(7+2*c*c)*sqr*arc-
        (1./8.+c*c)*arc*arc;
t4=c*sqr-arc;
t5=-(1-c*c)-arc*arc+2*c*sqr*arc;
t7=c*(7+2*c*c)/8*sqr-(1/8+c*c)*arc;
t8=-1/3*(1+2*c*c)*sqr+c*arc;
t9=.5*(sqr*(1-c*c)/3+a*t4);
t10=sqr+arc;
t11=(2-c)*sqr+(1-2*c)*arc;
t12=(2+c)*sqr-(1+2*c)*arc;
t13=-.5*(t7+(c-a)*t1);
t15=t4+t10;
t16=t1-t8-(c-a)*t4+0.5*t11;
t17=-2*t9-t1+(a-.5)*t4;
t18=t5-t4*t10;
t19=-.5*t4*t11;
%
```

```
iden=zeros(nn,nn);ks=zeros(nn,nn);knc=zeros(nn,nn);bs=zeros(n
        n,nn);
for ii=1:nn
iden(ii,ii)=1.0;
end
% mass matrix
ms(1,1)=1; ms(1,2)=xa; ms(1,3)=xb;
ms(2,1)=xa; ms(2,2)=ra*ra; ms(2,3)=rb*rb+xb*(c-a);
ms(3,1)=xb; ms(3,2)=rb*rb+xb*(c-a); ms(3,3)=rb*rb;
%%
mnc(1,1)=-pi; mnc(1,2)=pi*a; mnc(1,3)=t1;
mnc(2,1)=pi*a; mnc(2,2)=-pi*(1./8.+a*a); mnc(2,3)=-2*t13;
mnc(3,1)=t1; mnc(3,2)=-2*t13; mnc(3,3)=t3/pi;
%
% stiffness matrix
ks(1,1)=wh*wh;
ks(2,2)=ra*ra*wa*wa;
ks(3,3)=rb*rb*wb*wb;
%%
knc(2,3)=-t15;
knc(3,3)=-t18/pi;
%%%
bnc(1,1)=0; bnc(1,2)=-pi; bnc(1,3)=t4;
bnc(2,1)=0; bnc(2,2)=pi*(a-.5); bnc(2,3)=-t16;
bnc(3,1)=0; bnc(3,2)=-t17; bnc(3,3)=-t19/pi;
%%%
r1=[ -2.*pi 2*pi*(a+0.5)-t12];
%
s1=[0 1 t10/pi]; s2=[1 (.5-a) t11/(2*pi)];
```

Codificando o método II:

```
% v-g method
m=200;
rst1=zeros(3,m); rst2=zeros(3,m); vel=zeros(3,m);
for kk=m:-1:1;
rk=kk*0.02;
[f,g]=faero(rk,b,mnc,bnc,knc,r1,s1,s2,mu);
aero=f+i*g;
ddd=eig(inv(ks)*(ms+aero));
rrr=abs(real(ddd)); iii= imag(ddd);
rst1(:,kk)=sqrt(1./rrr); rst2(:,kk)=iii./rrr;
vel(:,kk)=sqrt(1./rrr)*b/rk;
end
xxx=[vel(1,:); rst1(1,:); rst2(1,:); vel(2,:); rst1(2,:); rst2(2,:);
vel(3,:); rst1(3,:); rst2(3,:)]';
figure(1);
plot(vel(1,:),rst1(1,:),'*r',vel(2,:),rst1(2,:),'*r',vel(3,:),rst1(3,:),'*r'),
axis([0.0 500 0 500]),xlabel('Velocity'),ylabel('Frequency'),grid;
figure(2);
plot(vel(1,:),rst2(1,:),'*r',vel(2,:),rst2(2,:),'*r',vel(3,:),rst2(3,:),'*r'),
axis([0.0 500 -0.5 0.5]),xlabel('Velocity'),ylabel('g'),grid;
```

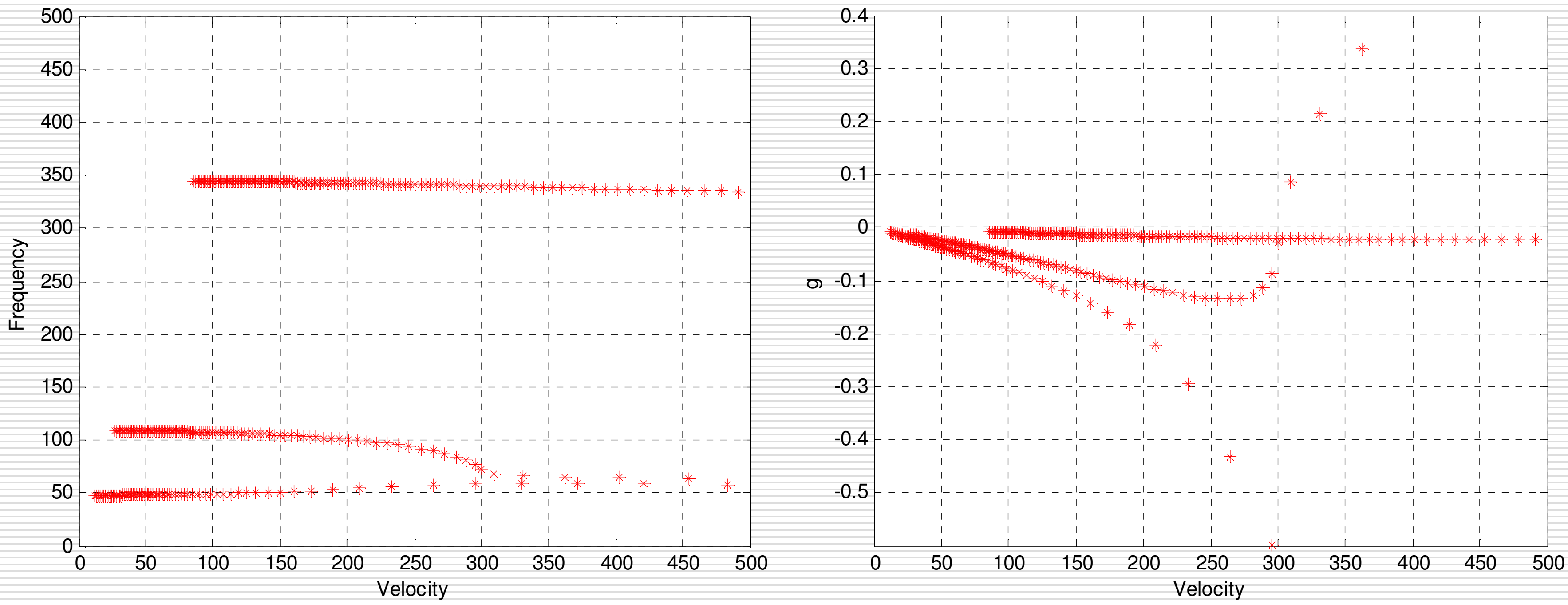
Caso de estudo : seção típica com 3 GDL, e as características dinâmicas e geométricas apresentadas abaixo

$$\omega_h = 50.0\ rad/\sec,\quad \omega_\theta = 100.0\ rad/\sec,\quad \omega_\beta = 300.0 rad/\sec$$

$$a = -0.4,\ c = 0.6, b = 1, \bar{x}_\theta = 0.2,\ \bar{x}_\beta = 0.0125, \bar{r}_\theta^2 = 0.25,\ \bar{r}_\beta^2 = 0.00625, \mu = 40$$

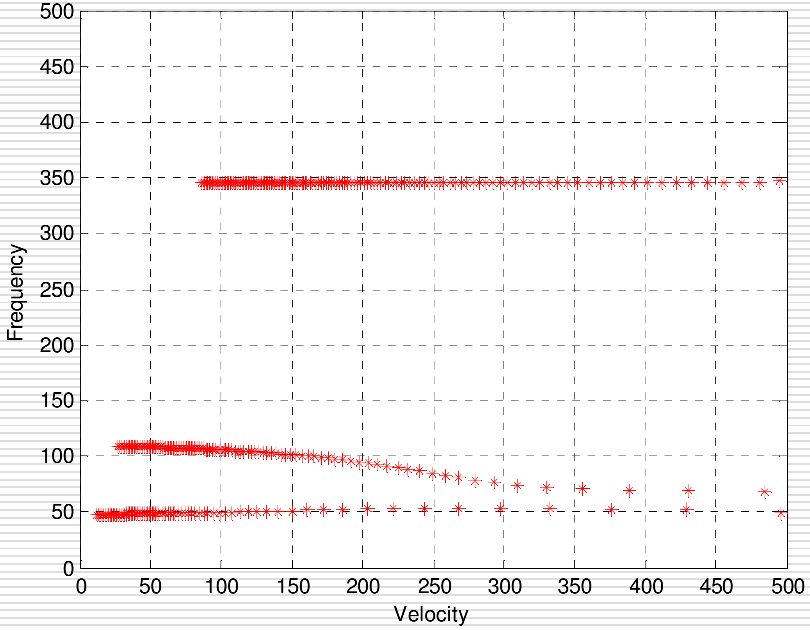
Resultados para o exemplo

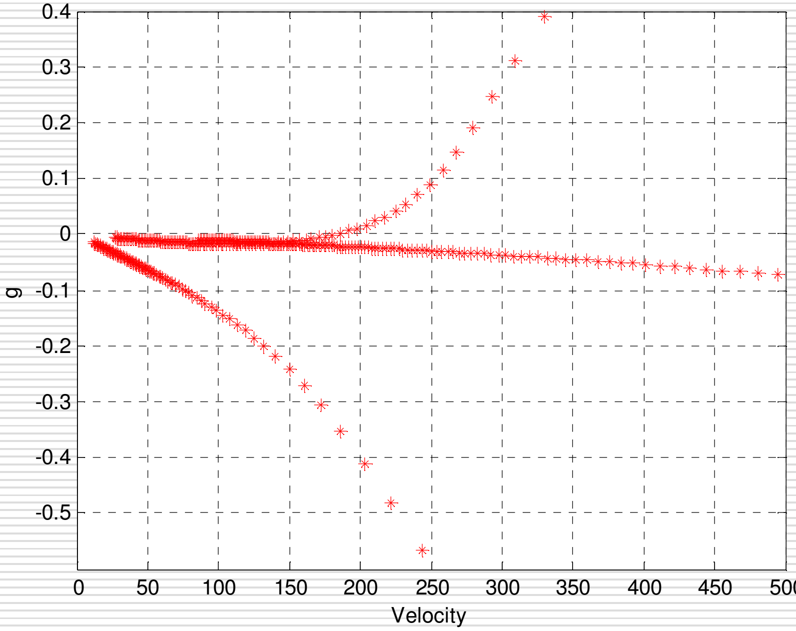
- Curvas V-g: Observe o acoplamento dos modos de flexão (plunge) e torção (pitch)



Caso quasi-estacionário

- C(k) = 1.0, representa a ausência de efeito da esteira. Note como o acoplamento é alterado, em como o amortecimento aerodinâmico fica menor. Um amortecimento aerodinâmico menor facilita o flutter.





Considerações adicionais

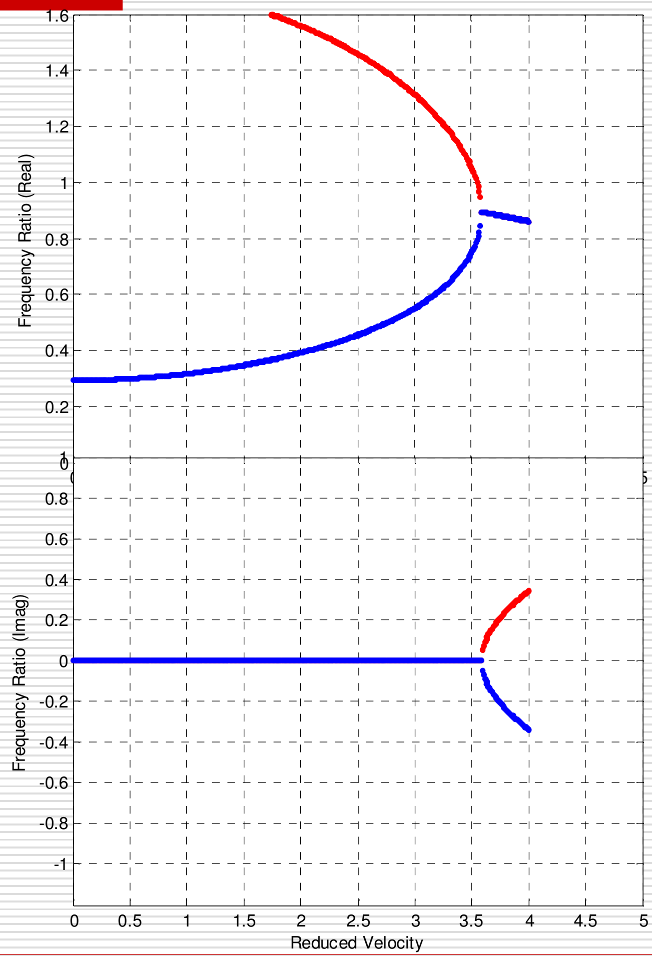
- Este exemplo mostra bem como o amortecimento aerodinâmico é importante na promoção do acoplamento de dois modos;

- Um modelo quase-estacionário pode ser mais conservativa, porém o acoplamento aeroelástico fica mais evidente quando consideramos o efeito da esteira;

- Em sistemas com vários graus de liberdade, o efeito causado pela esteira (atraso no carregamento aerodinâmico) pode promover acoplamentos entre modos inesperados.

Paralelo com a solução de Pines

- Lembremo-nos que a solução de Pines também apresentava a evolução de autovalores, que não deixam de ser as raízes de uma equação característica, como função da velocidade. A aerodinâmica é estacionária, ou seja k=0.
- Verificou-se que o flutter acontecia quando as raízes tornavam-se complexas;
- No caso do método V-g, as raízes da equação característica (autovalores) serão sempre complexos, pois o nosso problema de autovalor é complexo.



Paralelo com Pines

- Entretanto, de acordo como foi definido o nosso autovalo do sistema, a condição de instabilidade é identificada quando o amortecimento artificial é nulo, o que implica no fato da frequência de flutter ser obtida da parte real deste autovalor.

$$\lambda_{Flutter} = \frac{1 + i\left(g = 0\right)}{\Omega^2} \Rightarrow \Omega_{Flutter} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\mathrm{Re}}}} ,$$

- Portanto não se deve confundir as duas formas de resolver o problema de flutter, pois segundo a teoria de Pines, os autovalores são reais e tornam-se complexos no flutter. Por outro lado, de acordo como foi concebido o método V-g, os autovalores são semplre complexos, e no flutter ele é real pois a parcela imaginária se anula pois o amortecimento artificial é nulo nesta condição. <u>Entretanto pode-se afirmar que o flutter está associado à mudança da natureza do autovalor</u>.