Aula 8

07 Maio 2019

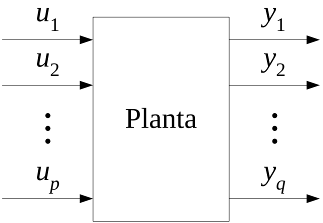
Resumo da aula passada

- Tratamento de restrições - Caso SISO (“Single Input, Single Output”)

Aula de hoje

- Extensão ao caso MIMO ("Multiple Inputs, Multiple Outputs")

Extensão ao caso MIMO



- p variáveis manipuladas $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$
- q variáveis controladas $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$

Notação

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix}_{p\times 1} \qquad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix}_{q\times 1}$$

- Incrementos no controle:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = \begin{bmatrix} u_1(k) - u_1(k-1) \\ u_2(k) - u_2(k-1) \\ \vdots \\ u_p(k) - u_p(k-1) \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

- Referências:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} y_{ref,1} \\ y_{ref,2} \\ \vdots \\ y_{ref,q} \end{bmatrix}_{q \times 1}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}_{qN\times 1} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} y_{ref} \\ y_{ref} \\ \vdots \\ y_{ref} \end{bmatrix}_{qN\times 1} = [y_{ref}]_N$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{pM\times 1} \qquad \Delta\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{pM\times 1}$$

Função de custo

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{N} [\hat{y}(k+i|k) - y_{ref}]^T Q [\hat{y}(k+i|k) - y_{ref}] + \sum_{i=1}^{M} \Delta\hat{u}^T(k+i-1|k) R \Delta\hat{u}(k+i-1|k)$$

$Q \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ matrizes de peso simétricas, com $Q > 0$ e $R > 0$.

Caso particular: $Q = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q)$, $R = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p)$

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{q} \mu_j [\hat{y}_j(k+i|k) - y_{ref,j}]^2 + \sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{p} \rho_l [\Delta\hat{u}_l(k+i-1|k)]^2$$

Orientações para sintonia dos parâmetros (plantas estáveis)

Referências:

1. SHRIDHAR, R.; COOPER, D.J. A tuning strategy for unconstrained multivariable model predictive control. Industrial and Engineering Chemistry Research, v. 37, n. 10, p. 4003 - 4016, 1998.
2. DOUGHERTY, D.; COOPER, D.J. Tuning guidelines of a dynamic matrix controller for integrating (non-self-regulating) processes. Industrial and Engineering Chemistry Research, v. 42, n. 8, p. 1739 - 1752, 2003.

Supondo que a dinâmica entre a l-ésima entrada e a j-ésima saída da planta possa ser aproximada pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{jl} e^{-\theta_{jl} s}}{\tau_{jl} s + 1}$$

recomenda-se tomar:

- Período de amostragem: $T = \min\limits_{j=1,2,\ldots,q;\, l=1,2,\ldots,p} \max(0{,}1\tau_{jl}; 0{,}5\theta_{jl})$
- Horizonte de predição:

$$N = \max_{j=1,2,\ldots,q;\, l=1,2,\ldots,p} \text{round}\left[\frac{5\tau_{jl} + \theta_{jl}}{T} + 1\right]$$

- Horizonte de controle:

$$M = \max_{j=1,2,\ldots,q;\, l=1,2,\ldots,p} \text{round}\left[\frac{\tau_{jl} + \theta_{jl}}{T} + 1\right]$$

“Regra de Bryson” para escolha dos pesos

$$
\begin{aligned}
J(\hat{\mathbf{y}},\Delta\hat{\mathbf{u}}) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\mu_j[\hat{y}_j(k+i|k)-y_{ref,j}]^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{l=1}^{p}\rho_l[\Delta\hat{u}_l(k+i-1|k)]^2
\end{aligned}
$$

Sejam θ_j e η_l as amplitudes de $[y_j(k)-y_{ref,j}]$ e $\Delta u_l(k)$ esperadas durante a operação da planta.

Os pesos μ_j e ρ_l podem ser escolhidos como:

$$
\mu_j = \frac{1}{N\,\theta_j^2}\,, \quad \rho_l = \frac{1}{M\,\eta_l^2}
$$

Função de custo: Observações

Obs. 1: Podem ser usados horizontes de predição e controle diferentes para cada canal de entrada e saída da planta. Contudo, essa possibilidade não será aqui explorada.

Obs. 2: Também seria possível empregar pesos diferentes para cada instante de tempo ao longo dos horizontes de predição e controle.

Função de custo: Notação Matricial

Seja

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{qN \times qN} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{pM \times pM}$$

Se $Q > 0$, $R > 0$, tem-se $\mathbf{Q} > 0$, $\mathbf{R} > 0$.

$$
\begin{aligned}
J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) &= \sum_{i=1}^{N} [\hat{y}(k+i|k) - y_{ref}]^T Q [\hat{y}(k+i|k) - y_{ref}] \\
&+ \sum_{i=1}^{M} \Delta\hat{u}^T(k+i-1|k) R \Delta\hat{u}(k+i-1|k)
\end{aligned}
$$

$$
J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta\hat{\mathbf{u}}
$$

Obtenção da equação de predição empregando modelo no espaço de estados

Modelo adotado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

com

$$x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R}^p,\ y(k) \in \mathbb{R}^q$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times p},\ C \in \mathbb{R}^{q \times n}$$

Equação de predição em $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{y}} = H\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f_u}$$

$$H = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}_{qN \times pN}$$

$$\mathbf{f_u} = \Phi_u x(k), \quad \Phi_u = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}_{qN \times n}$$

Modelo com entrada incremental

Uso do estado aumentado $\xi \in \mathbb{R}^{n+p}$ com o último valor de controle aplicado à planta:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix} \xi(k) + \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y(k) = [C \quad 0_{q\times p}]\, \xi(k)$$

Novo modelo a ser empregado:

$$\xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta u(k), \quad y(k) = \tilde{C}\xi(k)$$

com

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0_{q\times p}]$$

Equação de predição em $\Delta\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{B} \end{bmatrix}_{qN\times pN}$$

$$\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k), \quad \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}_{qN\times n}$$

Obs: Caso $M < N$, suprimem-se as últimas $(N-M)p$ colunas de G.

Solução na ausência de restrições

Problema de otimização a ser resolvido no instante k: Minimizar

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \Delta\hat{\mathbf{u}}$$

s.a.

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$$

Substituindo a expressão de $\hat{\mathbf{y}}$ na função de custo, obtém-se:

$$J = (G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R}\Delta\hat{\mathbf{u}} =$$

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}^T G^T \mathbf{Q} G\Delta\hat{\mathbf{u}} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(G\Delta\hat{\mathbf{u}}) + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R}\Delta\hat{\mathbf{u}}$$

$$= \Delta\hat{\mathbf{u}}^T \underbrace{(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})}_{(1/2)\mathcal{H}} \Delta\hat{\mathbf{u}} + \underbrace{2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q} G}_{c^T} \Delta\hat{\mathbf{u}} + \underbrace{(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r})}_{\text{cte}}$$

$$J = \frac{1}{2}\Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H}\Delta\hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta\hat{\mathbf{u}} + \text{cte}$$

$$\mathcal{H} = 2(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R}), \; c = 2G^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r})$$

Vale notar que $\mathbf{R} > 0 \Rightarrow \mathcal{H} > 0$.

$$J(\Delta\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta\hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta\hat{\mathbf{u}} + \text{cte}$$

$$\mathcal{H} > 0$$

Como visto anteriormente para o caso SISO, a solução deste problema de otimização é dada por

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}^* = -\mathcal{H}^{-1} c$$

com

$$\mathcal{H} = 2(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R}),\ c = 2G^T \mathbf{Q}(\mathbf{f} - \mathbf{r})$$

Logo:

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}^* = (G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^* = (G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

No instante atual, a variação de controle a ser aplicada corresponde aos primeiros p elementos do vetor $\Delta \hat{\mathbf{u}}^*$, isto é:

$$\Delta u(k) = \Delta \hat{u}^*(k|k) = K_{MPC}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

sendo K_{MPC} uma matriz $(p \times qN)$ formada pelas primeiras p linhas de $(G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q}$, ou seja:

$$K_{MPC} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times p(M-1)} \end{bmatrix} (G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q}$$

com I_p denotando uma matriz identidade de dimensões $(p \times p)$.

MPC empregando modelo no espaço de estados: Resumo

Informação requerida sobre a planta:

- Matrizes A, B, C do modelo no espaço de estados

Parâmetros de projeto:

- Pesos das saídas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q > 0$
- Pesos dos controles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p > 0$
- Horizonte de predição N
- Horizonte de controle M

Inicialização:

- Fazer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0_{q \times p}]$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}$$

- Fazer

$$Q = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q), \; R = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{qN \times qN}, \; \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{pM \times pM}$$

- Calcular $K_{MPC} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times p(M-1)} \end{bmatrix} (G^T \mathbf{Q} G + \mathbf{R})^{-1} G^T \mathbf{Q}$
- Fazer $k = 0$, $u(-1) = 0$.

Rotina principal:

1. Ler $x(k)$ (estado da planta) e y_{ref} (vetor de referências para as saídas)
2. Fazer $\mathbf{r} = [y_{ref}]_N$
3. Fazer
$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$
4. Calcular $\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k)$
5. Calcular o incremento no controle $\Delta u(k) = K_{MPC}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$
6. Atualizar o controle aplicado à planta: $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$
7. Fazer $k = k + 1$
8. Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

Implementação em Matlab

- `matrizes_ss_du_mimo.m`: Monta as matrizes K_{MPC}, Φ.
- `mpc_ss_du_mimo.m`: S-function que implementa o controlador

Controle da dinâmica longitudinal de uma aeronave 747

- Condição de voo considerada:
  - Altitude: $h = 40000ft$
  - Velocidade: $V = 774ft/s$ (Mach 0.80)

Modelo linear adotado

Estados:

- $x_1 = u =$ velocidade no eixo longitudinal $[ft/s]$
- $x_2 = w =$ velocidade no eixo vertical (positiva para baixo)$[ft/s]$
- $x_3 = q =$ velocidade de arfagem $[crad/s]$
- $x_4 = \theta =$ ângulo de atitude $[crad]$

Variáveis manipuladas:

- $u_1 = \delta_e =$ deflexão do profundor $[crad]$
- $u_2 = \delta_t =$ tração específica $[ft/s^2]$

Variáveis controladas:

- $y_1 = u = x_1$
- $y_2 = \dot{h} = -w + 7{,}74\theta = -x_2 + 7{,}74x_4$ (taxa de subida)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}003 & 0{,}039 & 0 & -0{,}322 \\ -0{,}065 & -0{,}319 & 7{,}74 & 0 \\ 0{,}0201 & -0{,}101 & -0{,}429 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0{,}01 & 1 \\ -0{,}18 & -0{,}04 \\ -1{,}16 & 0{,}598 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7{,}74 \end{bmatrix} x$$

Referência: BRYSON, A. E. *Control of Spacecraft and Aircraft*, Princeton University Press, 1994.

Modelo discretizado

- Período de amostragem $T = 0{,}3s$.
- Sinal de controle constante entre os instantes de amostragem.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}999 & 1{,}12 \times 10^{-2} & -1{,}27 \times 10^{-3} & -9{,}66 \times 10^{-2} \\ -1{,}19 \times 10^{-2} & 0{,}877 & 2{,}05 & 6{,}95 \times 10^{-4} \\ 5{,}86 \times 10^{-3} & -2{,}67 \times 10^{-2} & 0{,}848 & -2{,}86 \times 10^{-4} \\ 8{,}90 \times 10^{-4} & -4{,}19 \times 10^{-3} & 0{,}278 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2{,}83 \times 10^{-3} & 0{,}300 \\ -0{,}424 & 0{,}179 \\ -0{,}322 & 0{,}167 \\ -4{,}97 \times 10^{-2} & 2{,}58 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7{,}74 \end{bmatrix}$$

Arquivos Matlab

- `parametros_B747.m`: Define os parâmetros do modelo
- `B747_mpc_ss_du.mdl`: Diagrama de simulação

Parâmetros utilizados na simulação

- Comando de $+10ft/s$ na taxa de subida com manutenção da velocidade
- Horizonte de Predição: $N = 10$
- Horizonte de Controle: $M = 5$
- Pesos de saída: $\mu = [1,\ 1]$
- Pesos de controle: $\rho = [1,\ 1]$

Estimação de perturbações empregando observador de estados

Vamos supor que a dinâmica da planta seja descrita por um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ed(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$z(k) = C_z x(k)$$

sendo $d(k) \in \mathbb{R}^{n_d}$ um vetor de perturbações e $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de variáveis medidas.

Obs. 1: Casos particulares são

- $E = B$ (perturbação aditiva nas variáveis manipuladas)
- $C_z = I_n$ (realimentação de estado completo)

Obs. 2: Alternativamente, poderiam ser adotados modelos com perturbação de saída.

Estado aumentado:

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

Sob a hipótese de perturbação constante, tem-se

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k) + Ed(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_d \times p} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) = [C \quad 0_{q \times n_d}] \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

$$z(k) = C_z x(k) = [C_z \quad 0_{n_z \times n_d}] \begin{bmatrix} x(k) \\ d(k) \end{bmatrix}$$

Assim, o modelo torna-se

$$\chi(k+1) = \bar{A}\chi(k) + \bar{B}u(k)$$

$$y(k) = \bar{C}\chi(k), \quad z(k) = \bar{C}_z\chi(k)$$

sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0_{n_d \times n} & I_{n_d} \end{bmatrix}, \ \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_d \times p} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{q \times n_d} \end{bmatrix}, \ \bar{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & 0_{n_z \times n_d} \end{bmatrix}$$

Pode-se então projetar um observador de estados com base em $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}_z)$ para obter uma estimativa $\chi(k|k)$ do estado aumentado $\chi(k)$, que inclui a perturbação.

Como visto no caso SISO, a equação de predição deve incluir a perturbação estimada. Para isso, pode-se redefinir o estado aumentado como

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \chi(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, basta usar $\chi(k)$ e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ em lugar de $x(k)$ e (A, B, C) na formulação de controle preditivo.

Exemplo

- `parametros_B747.m`: Define os parâmetros do modelo
- `B747_mpc_ss_du_pert.mdl`: Diagrama de simulação incluindo estimador de perturbação de entrada

Tratamento de restrições

Assim como no caso SISO, três tipos básicos de restrições serão consideradas:

- Incrementos nos controles Δu
- Excursão dos controles u
- Excursão das saídas y

Essas restrições serão expressas em termos de desigualdades lineares envolvendo $\Delta \hat{\mathbf{u}}$.

Restrições sobre os incrementos nos controles Δu

$$\boxed{\Delta u_{min} \leq \Delta \hat{u}(k+i-1|k) \leq \Delta u_{max}, \;\; i = 1, 2, \ldots, M}$$

$$\Delta u_{min}, \; \Delta u_{max} \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{min} \\ \Delta u_{min} \\ \vdots \\ \Delta u_{min} \end{bmatrix} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(k|k) \\ \Delta \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\Delta \hat{\mathbf{u}}} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ \Delta u_{max} \\ \vdots \\ \Delta u_{max} \end{bmatrix}$$

$$[\Delta u_{min}]_M \leq \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [\Delta u_{max}]_M$$

$$[\Delta u_{min}]_M = \underbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}_{pM \times p} \Delta u_{min} \quad , \quad [\Delta u_{max}]_M = \underbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ I_p \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix}}_{pM \times p} \Delta u_{max}$$

$$[\Delta u_{min}]_M \leq \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [\Delta u_{max}]_M$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & [\Delta u_{max}]_M \\ -\Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & -[\Delta u_{min}]_M \end{array} \right.$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \end{bmatrix}}^{2pM \times pM} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_M \\ -[\Delta u_{min}]_M \end{bmatrix}}^{2pM \times 1}$$

Restrições sobre a excursão dos controles u

$$\boxed{u_{min} \leq \hat{u}(k+i-1|k) \leq u_{max}, \ i = 1, 2, \ldots, M}$$

$$u_{min}, \ u_{max} \in \mathbb{R}^p$$

$$[u_{min}]_M \leq \hat{\mathbf{u}} \leq [u_{max}]_M$$

- Para expressar estas restrições em termos de $\Delta\hat{\mathbf{u}}$, deve-se obter uma relação entre $\hat{\mathbf{u}}$ e $\Delta\hat{\mathbf{u}}$.

$$
\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k|k) + \Delta\hat{u}(k+1|k) + \cdots + \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}
$$

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}^{\hat{\mathbf{u}}(pM\times 1)} = \overbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}}^{[u(k-1)]_M(pM\times 1)}
$$

$$
+ \underbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times p} & \cdots & 0_{p\times p} \\ I_p & I_p & \cdots & 0_{p\times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_p & I_p & \cdots & I_p \end{bmatrix}}_{T_M^{I_p}(pM\times pM)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\hat{u}(k|k) \\ \Delta\hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta\hat{u}(k+M-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta\hat{\mathbf{u}}(pM\times 1)}
$$

$$
\boxed{\hat{\mathbf{u}} = [u(k-1)]_M + T_M^{I_p}\Delta\hat{\mathbf{u}}}
$$

$$[u_{min}]_M \leq \hat{\mathbf{u}} \leq [u_{max}]_M$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [u(k-1)]_M + T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}}$$

Logo:

$$[u_{min}]_M \leq [u(k-1)]_M + T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [u_{max}]_M$$

$$[u_{min} - u(k-1)]_M \leq T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq [u_{max} - u(k-1)]_M$$

$$\begin{cases} T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} & \leq & [u_{max} - u(k-1)]_M \\ -T_M^{I_p} \Delta \hat{\mathbf{u}} & \leq & [u(k-1) - u_{min}]_M \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} T_M^{I_p} \\ -T_M^{I_p} \end{bmatrix}}^{2pM \times pM} \Delta \hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [u_{max} - u(k-1)]_M \\ [u(k-1) - u_{min}]_M \end{bmatrix}}^{2pM \times 1}$$

Restrições sobre a excursão das saídas y

$$\boxed{y_{min} \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{max}, \; i = 1, \ldots, N}$$

$$\Delta y_{min}, \; \Delta y_{max} \in \mathbb{R}^q$$

$$[y_{min}]_N \leq \hat{\mathbf{y}} \leq [y_{max}]_N$$

Lembrando que $\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$, a restrição pode ser reescrita como

$$[y_{min}]_N \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \leq [y_{max}]_N$$

$$[y_{min}]_N - \mathbf{f} \leq G\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq [y_{max}]_N - \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} G\Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & [y_{max}]_N - \mathbf{f} \\ -G\Delta\hat{\mathbf{u}} & \leq & \mathbf{f} - [y_{min}]_N \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} G \\ -G \end{bmatrix}}^{2qN\times M} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq \overbrace{\begin{bmatrix} [y_{max}]_N - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - [y_{min}]_N \end{bmatrix}}^{2qN\times 1}$$

Restrições sobre a excursão das saídas y: Observação

De modo mais geral, pode haver variáveis de saída sujeitas a restrições, mas que não estejam incluídas na função de custo.

Nesse caso, pode-se utilizar na formulação das restrições uma equação de predição que considere especificamente as variáveis de saída sujeitas a restrições.

Resumo das restrições

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \\ T_M^{I_p} \\ -T_M^{I_p} \\ G \\ -G \end{bmatrix}}^{S[(4pM+2qN)\times pM]} \Delta\hat{\mathbf{u}} \;\leq\; \overbrace{\begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_M \\ -[\Delta u_{min}]_M \\ [u_{max} - u(k-1)]_M \\ [u(k-1) - u_{min}]_M \\ [y_{max}]_N - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - [y_{min}]_N \end{bmatrix}}^{b[(4pM+2qN)\times 1]}$$

$$\boxed{S\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b}$$

Formulação do problema de otimização com restrições

Assim como no caso SISO, o problema de otimização na presença das restrições consideradas pode ser colocado na forma de Programação Quadrática:

$$\min_{\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{pM}} J(\Delta\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\Delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathcal{H} \Delta\hat{\mathbf{u}} + c^T \Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathrm{cte}$$

sujeito a

$$S\Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b$$

Implementação da lei de controle

Informação requerida sobre a planta:

- Matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ do modelo
- Limitantes sobre os incrementos nos controles: $\Delta u_{min}, \Delta u_{max} \in \mathbb{R}^p$
- Limitantes sobre a excursão dos controles: $u_{min}, u_{max} \in \mathbb{R}^p$
- Limitantes sobre a excursão das saídas: $y_{min}, y_{max} \in \mathbb{R}^q$

Parâmetros de projeto:

- Pesos das saídas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q > 0$
- Pesos dos controles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p > 0$
- Horizonte de predição N
- Horizonte de controle M

Inicialização:

- Fazer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ I_p \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0_{q\times p}]$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}, \ \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}$$

- Fazer

$$Q = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q), \;\; R = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{qN \times qN} , \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{pM \times pM}$$

- Fazer

$$G_n = \mathbf{Q}G\ , \quad H_{qp} = 2(G^T\mathbf{Q}G + \mathbf{R})$$

$$A_{qp} = \begin{bmatrix} I_{pM} \\ -I_{pM} \\ T_M^{I_p} \\ -T_M^{I_p} \\ G \\ -G \end{bmatrix}$$

- Fazer $k = 0$, $u(-1) = 0$.

Rotina principal:

1. Ler $x(k)$ (estado da planta) e y_{ref} (vetor de referências para as saídas)
2. Fazer $\mathbf{r} = [y_{ref}]_N$
3. Fazer
$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$
4. Calcular $\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k)$ e $f_{qp} = 2G_n^T(\mathbf{f} - \mathbf{r})$
5. Fazer $b_{qp} = \begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_M \\ -[\Delta u_{min}]_M \\ [u_{max} - u(k-1)]_M \\ [u(k-1) - u_{min}]_M \\ [y_{max}]_N - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} - [y_{min}]_N \end{bmatrix}$

6. Resolver o problema de otimização:

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}^* = \arg \min_{\Delta\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{pM}} \frac{1}{2} \Delta\hat{\mathbf{u}}^T H_{qp} \Delta\hat{\mathbf{u}} + f_{qp}^T \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad \text{s.a.} \quad A_{qp} \Delta\hat{\mathbf{u}} \leq b_{qp}$$

7. Obter o incremento nos controles:

$$\Delta u(k) = \Delta\hat{u}^*(k|k) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times p(M-1)} \end{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}}^*$$

8. Atualizar os controles aplicados à planta: $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$
9. Fazer $k = k + 1$
10. Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

Implementação em Matlab

- `matrizes_ss_du_mimo_restricoes.m`: Monta as matrizes $\Phi, G_n, H_{qp}, A_{qp}$.
- `mpc_ss_du_mimo_restricoes.m`: S-function que implementa o controlador

Exemplo

- `parametros_B747.m`: Define os parâmetros do modelo
- `B747_mpc_ss_du_restricoes.mdl`: Diagrama de simulação

Parâmetros utilizados na simulação

- Comando de $+10ft/s$ na taxa de subida com manutenção da velocidade.
- Horizonte de Predição: $N = 20$
- Horizonte de Controle: $M = 10$
- Pesos de saída: $\mu = [1,\ 1]$,
- Pesos de controle: $\rho = [1,\ 1]$

Resumo da aula de hoje

Caso MIMO:

- Notação adotada
- Função de custo
- Equação de predição
- Solução na ausência de restrições
- Inclusão de restrições

Tópico da próxima aula

- Estabilidade