

## Aula 4

26 Mar 2019

# Resumo da aula passada

- DMC: Sintonia de parâmetros (Período de amostragem,  $M$ ,  $N$ ,  $\rho$ )
- Implementação em Matlab/Simulink
- Exemplo 1: Aquecedor de água
- Exemplo 2: Pêndulo de haste rígida (modelo de simulação não linear)
- Considerações sobre as constantes de polarização na malha de controle

**Importante:** A abordagem DMC é aplicável a planta **estáveis** em malha aberta.

# Tópicos da aula de hoje

- Uso de funções de transferência
- Implementação em Matlab
- Exemplo com planta instável em malha aberta

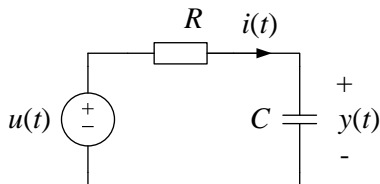
# Modelo auto-regressivo



$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

- Modelo Auto-Regressivo com entrada eXógena (ARX)
- Equação a diferenças relacionando a sequência de entrada  $u$  com a sequência de saída  $y$ .

## Exemplo (Circuito RC)



$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t) - y(t)}{R}$$

$$C\dot{y}(t) = \frac{u(t) - y(t)}{R} \Rightarrow \dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

## Exemplo: Função de Transferência

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os lados da equação e assumindo condições iniciais nulas:

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) Y(s) = \frac{1}{RC} U(s) \Rightarrow H_c(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

- $H_c(s)$  denota a função de transferência entre a entrada (tensão da fonte) e a saída (tensão do capacitor) do circuito.
- $H_c(s)$  também corresponde à Transformada de Laplace da resposta a impulso (delta de Dirac) do circuito.
- O índice  $c$  é usado para indicar que se trata de uma função de transferência associada a um modelo de tempo contínuo.

## Exemplo: Discretização aproximada

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t) \quad (1)$$

Pode-se aproximar a derivada por uma diferença finita:

$$\dot{y}(t) \simeq \frac{1}{T} [y(t+T) - y(t)] \quad (2)$$

sendo  $T$  o tamanho do passo empregado.

Substituindo (2) em (1), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} [y(t+T) - y(t)] + \frac{1}{RC}y(t) &= \frac{1}{RC}u(t) \\ \Rightarrow y(t+T) + \left(\frac{T}{RC} - 1\right)y(t) &= \frac{T}{RC}u(t) \end{aligned}$$

$$y(t + T) + \left( \frac{T}{RC} - 1 \right) y(t) = \frac{T}{RC} u(t) \quad (3)$$

Se  $T$  for um período de amostragem, os instantes de amostragem serão dados por  $t = kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Substituindo  $t = kT$  em (3), tem-se

$$y((k + 1)T) + \left( \frac{T}{RC} - 1 \right) y(kT) = \frac{T}{RC} u(kT)$$

ou, fazendo  $k = k - 1$ ,

$$y(kT) + \left( \frac{T}{RC} - 1 \right) y((k - 1)T) = \frac{T}{RC} u((k - 1)T)$$



Finalmente, denotando  $y(kT)$  e  $u(kT)$  simplesmente por  $y(k)$  e  $u(k)$ , chega-se a uma expressão da forma

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u(k-1)$$

em que

$$a_1 = \left( \frac{T}{RC} - 1 \right), \quad b_1 = \frac{T}{RC}$$

## Exemplo: Discretização exata

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Se a entrada  $u(t)$  for constante entre os instantes de amostragem, isto é,

$$u(t) = u(kT), \forall t \in [kT, (k+1)T)$$

pode-se obter uma equação a diferenças que relaciona as sequências  $\{u(kT), k \in \mathbb{Z}\}$  e  $\{y(kT), k \in \mathbb{Z}\}$  de maneira exata.

Com efeito, seja uma equação diferencial da forma

$$\dot{y}(t) + a_c y(t) = b_c u(t) \quad (4)$$

que corresponde à equação anterior com  $a_c = \frac{1}{RC}$  e  $b_c = \frac{1}{RC}$ .

A solução de (4) partindo de uma condição inicial  $y(t_0)$  é dada por

$$y(t) = e^{-a_c(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a_c(t-\tau)} b_c u(\tau) d\tau$$

Logo, fazendo  $t_0 = kT$ ,  $t = (k+1)T$  e supondo  $u(\tau) = u(kT)$ ,  $\forall \tau \in [kT, (k+1)T)$ , tem-se

$$y((k+1)T) = e^{-a_c T} y(kT) + \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-a_c((k+1)T-\tau)} b_c d\tau \right] u(kT)$$

$$y((k+1)T) = e^{-a_c T} y(kT) + \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-a_c((k+1)T-\tau)} b_c d\tau \right] u(kT) \quad (5)$$

Fazendo  $(k+1)T - \tau = \xi$ , tem-se

- $\tau = kT \Rightarrow \xi = T$
- $\tau = (k+1)T \Rightarrow \xi = 0$
- $d\tau = -d\xi$

Logo, (5) pode ser re-escrita como

$$y((k+1)T) = e^{-a_c T} y(kT) + \left[ \int_0^T e^{-a_c \xi} b_c d\xi \right] u(kT)$$

$$y((k+1)T) = e^{-a_c T} y(kT) + \left[ \int_0^T e^{-a_c \xi} b_c d\xi \right] u(kT)$$

Por fim, fazendo  $k = k - 1$  e denotando  $y(kT)$  e  $u(kT)$  simplesmente por  $y(k)$  e  $u(k)$ , chega-se a

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_1 u(k-1)$$

sendo

$$a_1 = -e^{-a_c T}, \quad b_1 = \int_0^T e^{-a_c \xi} b_c d\xi$$

# Observações sobre a discretização exata

- A premissa de  $u$  constante entre os instantes de amostragem será válida, por exemplo, se o sinal  $u$  for gerado por um conversor D/A dotado de segurador de ordem zero (*zero-order-hold*, ZOH)
- Pode-se efetuar a discretização exata com a função `c2d` do Matlab Control Systems Toolbox (opção `'zoh'`).

- Se o período de amostragem  $T$  for pequeno, resultados similares são obtidos ao se fazer a discretização de forma exata ou aproximada. Por exemplo:

$$\dot{y}(t) + a_c y(t) = b_c u(t)$$

Discretização aproximada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} [y((k+1)T) - y(kT)] + a_c y(kT) &= b_c u(kT) \\ y((k+1)T) + \underbrace{(-1 + a_c T)}_{a_{1, \text{aprox}}} y(kT) &= \underbrace{b_c T}_{b_{1, \text{aprox}}} u(kT) \end{aligned}$$

Discretização exata (ZOH):

$$\begin{aligned} a_{1, \text{zoh}} &= -e^{-a_c T} \stackrel{T \downarrow}{\simeq} -(1 - a_c T) \\ b_{1, \text{zoh}} &= \int_0^T e^{-a_c \xi} b_c d\xi \stackrel{T \downarrow}{\simeq} b_c T \end{aligned}$$

## Escolha do período de amostragem

- Se a planta for estável, a escolha do período de amostragem  $T$  pode ser feita com base na resposta a degrau, seguindo as regras vistas para o DMC.
- Alternativamente, pode-se escolher  $T$  supondo a existência de um filtro *anti-aliasing* com frequência de corte  $f_c$  igual à metade da frequência de amostragem, isto é  $f_c = 1/(2T)$ . Seleciona-se então o maior valor de  $T$  para o qual a presença do filtro não entre em conflito com os requisitos de desempenho para o sistema de controle.
- Considerações gerais sobre a escolha do período de amostragem podem ser encontradas em FRANKLIN, G.F. Rational rate. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 27, n. 4, p. 19, Aug. 2007.



# Uso da Transformada $Z$

Um modelo no formato de equação a diferenças pode ser convertido para a forma de função de transferência utilizando a transformada  $Z$ .

A Transformada  $Z$  de uma sequência  $y(k)$ ,  $k \geq 0$  é definida como

$$Z[y(k)] = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

Duas propriedades a destacar são:

- Linearidade:  $Z[\alpha y_1(k) + \beta y_2(k)] = \alpha Y_1(z) + \beta Y_2(z)$ .
- Atraso no tempo:  $Z[y(k - n)] = z^{-n}Y(z)$ ,  $n > 0$ .

## Relação entre equação a diferenças e função de transferência

$$\begin{aligned}y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \cdots + a_ny(k-n) &= \\ &= b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \cdots + b_nu(k-n)\end{aligned}$$

Aplicando a Transformada  $Z$  a ambos os lados desta equação, tem-se

$$H(z) \triangleq \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n}}$$

- $H(z)$  denota a função de transferência entre as sequências de entrada e saída do modelo.
- $H(z)$  também corresponde à Transformada  $Z$  da resposta a impulso (delta de Kronecker) do modelo.

## Função de transferência: Observações

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- Se  $b_1$  for igual a 0,  $H(z)$  pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \\ &= z^{-1} \left( \frac{b_2 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n+1} + 0z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \right) \end{aligned}$$

Nesse caso, o modelo descreverá um sistema com atraso de transporte de um período de amostragem.

- Se  $b_1 = b_2 = \dots = b_d = 0$ , o modelo descreverá um sistema com atraso de transporte de  $d$  períodos de amostragem.

## Função de transferência: Observações

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- Multiplicando o numerador e o denominador por  $z^n$ , a função de transferência também pode ser expressa como

$$H(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Número de polos = Grau do denominador = Ordem do modelo =  $n$

## Predição um passo à frente

Seja um modelo da forma

$$\begin{aligned}y(k) + a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \cdots + a_ny(k-n) &= \\ &= b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \cdots + b_nu(k-n)\end{aligned}$$

Fazendo  $k = k + 1$  tem-se

$$\begin{aligned}y(k+1) + a_1y(k) + a_2y(k-1) + \cdots + a_ny(k-n+1) &= \\ &= b_1u(k) + b_2u(k-1) + \cdots + b_nu(k-n+1)\end{aligned}$$

Em termos de valores preditos:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1|k) + a_1y(k) + a_2y(k-1) + \cdots + a_ny(k-n+1) &= \\ &= b_1\hat{u}(k|k) + b_2u(k-1) + \cdots + b_nu(k-n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1|k) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n+1) = \\ = b_1 \hat{u}(k|k) + b_2 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n+1)\end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+1|k) + [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix} = \\ = b_1 \hat{u}(k|k) + [b_2 \ b_3 \ \cdots \ b_n] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n+1) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## Predição dois passos à frente

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+2|k) + a_1\hat{y}(k+1|k) + a_2y(k) + \cdots + a_ny(k-n+2) &= \\ &= b_1\hat{u}(k+1|k) + b_2\hat{u}(k|k) + \cdots + b_nu(k-n+2)\end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{aligned}&[a_1 \ 1] \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \end{bmatrix} + [a_2 \ a_3 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix} = \\ &= [b_2 \ b_1] \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \end{bmatrix} + [b_3 \ b_4 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n+1) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Predições até  $N$  passos à frente ( $N > n$ )



$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &+ a_1 y(k) + \cdots + a_n y(k-n+1) \\
&= b_1 \hat{u}(k|k) + b_2 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n+1) \\
\hat{y}(k+2|k) &+ a_1 \hat{y}(k+1|k) + \cdots + a_n y(k-n+2) \\
&= b_1 \hat{u}(k+1|k) + b_2 \hat{u}(k|k) + \cdots + b_n u(k-n+2) \\
\hat{y}(k+3|k) &+ a_1 \hat{y}(k+2|k) + \cdots + a_n y(k-n+3) \\
&= b_1 \hat{u}(k+2|k) + b_2 \hat{u}(k+1|k) + \cdots + b_n u(k-n+3) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+n|k) &+ a_1 \hat{y}(k+n-1|k) + \cdots + a_n y(k) \\
&= b_1 \hat{u}(k+n-1|k) + \cdots + b_n \hat{u}(k|k) \\
\hat{y}(k+n+1|k) &+ a_1 \hat{y}(k+n|k) + \cdots + a_n \hat{y}(k+1|k) \\
&= b_1 \hat{u}(k+n|k) + \cdots + b_n \hat{u}(k+1|k) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+N|k) &+ a_1 \hat{y}(k+N-1|k) + \cdots + a_n \hat{y}(k-n+N|k) \\
&= b_1 \hat{u}(k+N-1|k) + \cdots + b_n \hat{u}(k-n+N|k)
\end{aligned}$$

# Equação de predição

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Formato Toeplitz}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+n|k) \\ \hat{y}(k+n+1|k) \\ \hat{y}(k+n+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N-1|k) \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\hat{y}(N \times 1)} +$$

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{S_a(N \times n)} \\
 + \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Formato Hankel}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix}}^{y_p(n \times 1)} =
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_1 \end{bmatrix}}^{\mathcal{T}_b(N \times N)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}(N \times 1)} + \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Formato Toeplitz}}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ b_4 & b_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{S_b[N \times (n-1)]} \\
 + \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ b_4 & b_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Formato Hankel}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n+1) \end{bmatrix}}^{u_p[(n-1) \times 1]}
 \end{array}$$

$$\mathcal{T}_a \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{S}_a \mathbf{y}_p = \mathcal{T}_b \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{S}_b \mathbf{u}_p$$

## Equação de predição: Exemplo

$$H(z) = \frac{8z + 3}{z^2 + 4z + 5} = \frac{8z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$y(k) + 4y(k-1) + 5y(k-2) = 8u(k-1) + 3u(k-2)$$

$$n = 2$$

- Coeficientes do numerador:  $b_1 = 8, b_2 = 3$
- Coeficientes do denominador:  $a_1 = 4, a_2 = 5$

Escrever a equação de predição para  $N = 4$ .

Equação de predição:

$$\underbrace{\mathcal{T}_a}_{N \times N} \underbrace{\hat{\mathbf{y}}}_{N \times 1} + \underbrace{\mathcal{S}_a}_{N \times n} \underbrace{\mathbf{y}_p}_{n \times 1} = \underbrace{\mathcal{T}_b}_{N \times N} \underbrace{\hat{\mathbf{u}}}_{N \times 1} + \underbrace{\mathcal{S}_b}_{N \times (n-1)} \underbrace{\mathbf{u}_p}_{(n-1) \times 1}$$

Neste exemplo:  $n = 2$  e  $N = 4$ . Logo,

$$\mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \hat{y}(k+3|k) \\ \hat{y}(k+4|k) \end{bmatrix}, \mathcal{S}_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_b = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \hat{u}(k+3|k) \end{bmatrix}, \mathcal{S}_b = \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_p = u(k-1)$$



## Equação de predição na forma usual

$$\mathcal{T}_a \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{S}_a \mathbf{y}_p = \mathcal{T}_b \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{S}_b \mathbf{u}_p$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{y}} = \mathcal{T}_a^{-1} (\mathcal{T}_b \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{S}_b \mathbf{u}_p - \mathcal{S}_a \mathbf{y}_p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{y}} = H \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_u}$$

$$\text{em que } \boxed{H = \mathcal{T}_a^{-1} \mathcal{T}_b} \text{ e } \boxed{\mathbf{f}_u = \mathcal{T}_a^{-1} (\mathcal{S}_b \mathbf{u}_p - \mathcal{S}_a \mathbf{y}_p)}.$$

## Cálculo de $\mathcal{T}_a^{-1}$

$$\mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

- Matriz Toeplitz construída com os coeficientes de

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}$$

Propriedade:  $\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{a^{-1}} \triangleq$  Matriz Toeplitz construída com os coeficientes de

$$A^{-1}(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Com efeito, seja

$$Q(z) = 1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n}$$

Por definição, tem-se  $A(z)Q(z) = 1$ , isto é

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n)(1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots) = 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a \mathcal{T}_q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & q_{n-1} & q_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Cálculo de $\mathcal{T}_a^{-1}$ : Exemplo

$$A(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$A^{-1}(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}} = 1 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3} + \dots$$

- Para um horizonte de predição  $N = 3$ :

$$\mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_{a^{-1}} = \mathcal{T}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema: Determinar  $q_1$  e  $q_2$ .

- Determinação de  $q_1$  e  $q_2$ :

$$\frac{1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}} = 1 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3} + \dots$$

$$\Rightarrow (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2})(1 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + q_3z^{-3} + \dots) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^{-1} : q_1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = -2} \\ z^{-2} : q_2 + 2q_1 + 3 = 0 \Rightarrow q_2 = -2q_1 - 3 \Rightarrow \boxed{q_2 = 1} \end{cases}$$

$$\mathcal{T}_{a^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & 0 \\ q_2 & q_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Cálculo de $\mathcal{T}_a^{-1}$ : Exemplo (Verificação)

$$\mathcal{T}_a \mathcal{T}_{a^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Alternativa: Divisão longa de  $1/A(z)$ .

## Formulação em termos de incrementos da entrada $\Delta u$

$$\begin{aligned} & + \left\{ \begin{array}{l} y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ \quad = b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \end{array} \right. \\ & - \left\{ \begin{array}{l} y(k-1) + a_1 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n-1) \\ \quad = b_1 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n-1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} y(k) & + (a_1 - 1)y(k-1) + (a_2 - a_1)y(k-2) + \cdots + \\ & + (a_n - a_{n-1})y(k-n) - a_n y(k-n-1) = \\ & = b_1 \Delta u(k-1) + \cdots + b_n \Delta u(k-n) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y(k) &+ a'_1 y(k-1) + \cdots + a'_n y(k-n) + a'_{n+1} y(k-n-1) \\
 &= b_1 \Delta u(k-1) + \cdots + b_n \Delta u(k-n)
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= a_1 - 1 \\
 a'_2 &= a_2 - a_1 \\
 &\vdots \\
 a'_n &= a_n - a_{n-1} \\
 a'_{n+1} &= -a_n
 \end{aligned}$$

Vale salientar que o modelo passa a ser de ordem  $n + 1$ , devido à inclusão implícita de um integrador a tempo discreto.

- Interpretação alternativa: Seja  $\Delta(z) = 1 - z^{-1}$

$$A(z)Y(z) = B(z)U(z)$$

$$\Rightarrow \Delta(z)A(z)Y(z) = B(z)\Delta(z)U(z)$$

$$\Rightarrow A'(z)Y(z) = B(z)\Delta U(z)$$

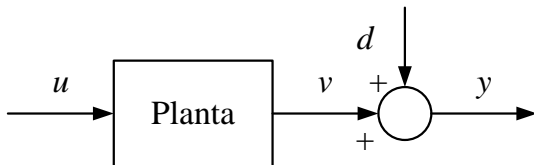
em que

$$\begin{aligned} A'(z) &= (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) = \\ &= 1 + (a_1 - 1)z^{-1} + (a_2 - a_1)z^{-2} + \dots + \\ &+ (a_n - a_{n-1})z^{-n} - a_n z^{-n-1} \end{aligned}$$

Como se pode observar, o novo modelo possui um pólo em  $z = 1$ , que está associado à presença de um integrador a tempo discreto.

## Correção implícita de perturbações

O uso do modelo reformulado em termos de  $\Delta u$  permite efetuar uma correção implícita de perturbações constantes:



$$\begin{aligned} v(k) + a_1 v(k-1) + a_2 v(k-2) + \cdots + a_n v(k-n) &= \\ &= b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

$$y(k) = v(k) + d \Rightarrow v(k) = y(k) - d$$

$$\begin{aligned} v(k) + a_1 v(k-1) + a_2 v(k-2) + \cdots + a_n v(k-n) = \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned} \quad (6)$$

$$v(k) = y(k) - d \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6), tem-se

$$\begin{aligned} [y(k) - d] + a_1 [y(k-1) - d] + a_2 [y(k-2) - d] + \cdots + a_n [y(k-n) - d] \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &[y(k) - d] + a_1[y(k-1) - d] + a_2[y(k-2) - d] + \cdots + a_n[y(k-n) - d] \\
 &= b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n)
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 &[y(k-1) - d] + a_1[y(k-2) - d] + a_2[y(k-3) - d] + \cdots + a_n[y(k-n-1) - d] \\
 &= b_1 u(k-2) + b_2 u(k-3) + \cdots + b_n u(k-n-1)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Subtraindo (9) de (8), chega-se a

$$\begin{aligned}
 y(k) &+ (a_1 - 1)y(k-1) + (a_2 - a_1)y(k-2) + \cdots + \\
 &+ (a_n - a_{n-1})y(k-n) - a_n y(k-n-1) = \\
 &= b_1 \Delta u(k-1) + \cdots + b_n \Delta u(k-n)
 \end{aligned}$$

Portanto, a relação entre  $\Delta u$  e  $y$  continua sendo válida mesmo na presença de perturbações constantes na saída da planta.

## Equação de Predição em termos de $\Delta u$

$$\begin{aligned}y(k) &+ a'_1 y(k-1) + \cdots + a'_n y(k-n) + a'_{n+1} y(k-n-1) \\&= b_1 \Delta u(k-1) + \cdots + b_n \Delta u(k-n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{a'} \hat{\mathbf{y}} + \mathcal{S}_{a'} \mathbf{y}_p &= \mathcal{T}_b \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{S}_b \Delta \mathbf{u}_p \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{y}} &= G \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}G &= \mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{T}_b \\ \mathbf{f} &= \mathcal{T}_{a'}^{-1} (\mathcal{S}_b \Delta \mathbf{u}_p - \mathcal{S}_{a'} \mathbf{y}_p)\end{aligned}$$

Se  $M < N$ , basta usar somente as  $M$  primeiras colunas de  $\mathcal{T}_b$ .

## Resposta livre $\mathbf{f}$ : Observação

$$\mathbf{f} = \mathcal{T}_{a'}^{-1}(\mathcal{S}_b \Delta \mathbf{u}_p - \mathcal{S}_{a'} \mathbf{y}_p)$$

Por conveniência de implementação, será empregada a seguinte notação:

$$\mathbf{f} = K_{\Delta u} \Delta \mathbf{u}_p + K_y \mathbf{y}_p$$

em que

$$K_{\Delta u} = \mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{S}_b, \quad K_y = -\mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{S}_{a'}$$

# MPC empregando modelo ARX: Resumo

## Informação requerida sobre a planta:

- Função de transferência:  $H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$

## Parâmetros de projeto:

- Peso do controle  $\rho$
- Horizonte de predição  $N$
- Horizonte de controle  $M$

## Inicialização:

- Montar as matrizes  $\mathcal{T}_{a'}^{-1}$ ,  $\mathcal{S}_{a'}$ ,  $\mathcal{T}_b$ ,  $\mathcal{S}_b$
- Calcular  $G = \mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{T}_b$ ,  $K_{\Delta u} = \mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{S}_b$ ,  $K_y = -\mathcal{T}_{a'}^{-1} \mathcal{S}_{a'}$
- Calcular  $K_{MPC} = [1 \ 0 \ \dots \ 0](G^T G + \rho I_M)^{-1} G^T$
- Fazer  $k = 0$ ,  $y(-1) = y(-2) = \dots = y(-n) = 0$  e  $\Delta u(-1) = \Delta u(-2) = \dots = \Delta u(-n+1) = 0$  (supondo que a planta esteja inicialmente em repouso).



## Rotina principal:

- 1 Ler  $y(k)$  (saída da planta) e  $y_{ref}$  (valor de referência)
- 2 Fazer  $\mathbf{r} = [y_{ref}]_N$
- 3 Fazer

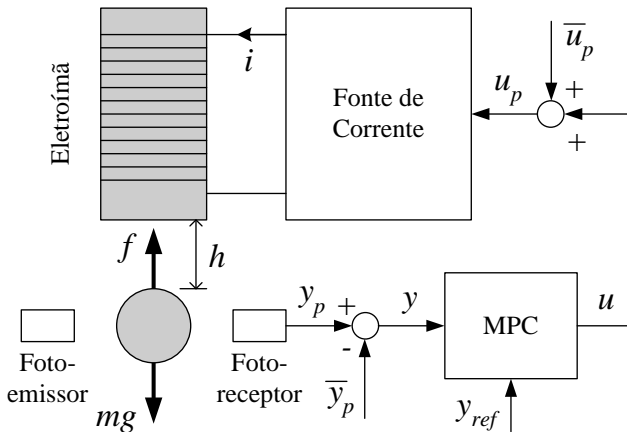
$$\Delta \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u(k-n+1) \end{bmatrix}, \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix}$$

- 4 Calcular  $\mathbf{f} = K_{\Delta u} \Delta \mathbf{u}_p + K_y \mathbf{y}_p$
- 5 Calcular o incremento no controle  $\Delta u(k) = K_{MPC}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$
- 6 Atualizar o controle aplicado à planta:  $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$
- 7 Fazer  $k = k + 1$
- 8 Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

# Implementação em Matlab

- long\_division.m: Obtém os coeficientes de  $Q(z) = A^{-1}(z)$
- matrizes\_arx\_du.m: Monta as matrizes  $\mathcal{T}_{a'}^{-1}, \mathcal{S}_{a'}, \mathcal{T}_b, \mathcal{S}_b$
- mpc\_arx\_du.m: S-function que implementa o controlador

## Exemplo: Sistema de levitação magnética



$$f = K_f \frac{i^2}{h^2}, \quad i = i_0 + ru_p$$

$$y_p = y_0 + \gamma h \Rightarrow h = \frac{y_p - y_0}{\gamma}$$

$$m\ddot{h} = mg - K_f \frac{i^2}{h^2} \Rightarrow \ddot{h} = g - \frac{K_f}{m} \frac{i^2}{h^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{y}_p}{\gamma} = g - \frac{K_f}{m} \frac{(i_0 + ru_p)^2 \gamma^2}{(y_p - y_0)^2} \Rightarrow \ddot{y}_p = \gamma g - \frac{K_f}{m} \frac{(i_0 + ru_p)^2 \gamma^3}{(y_p - y_0)^2}$$

Dinâmica não-linear

$$\ddot{y}_p = \gamma g - \frac{K_f (i_0 + r u_p)^2 \gamma^3}{m (y_p - y_0)^2}$$

Em equilíbrio:

$$\frac{K_f (i_0 + r \bar{u}_p)^2 \gamma^3}{m (\bar{y}_p - y_0)^2} = \gamma g \Rightarrow K_f (i_0 + r \bar{u}_p)^2 \gamma^2 = mg (\bar{y}_p - y_0)^2$$

$$i_0 + r \bar{u}_p = \frac{\bar{y}_p - y_0}{\gamma} \sqrt{\frac{mg}{K_f}}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_p = \frac{1}{r} \left( \frac{\bar{y}_p - y_0}{\gamma} \sqrt{\frac{mg}{K_f}} - i_0 \right)$$

$$\ddot{y}_p = f(y_p, u_p) = \gamma g - \frac{K_f (i_0 + r u_p)^2 \gamma^3}{m (y_p - y_0)^2}$$

Seja  $y = y_p - \bar{y}_p$  e  $u = u_p - \bar{u}_p$ , isto é:

$$y_p = \bar{y}_p + y, \quad u_p = \bar{u}_p + u$$

Tem-se então que

$$\ddot{y}_p = \ddot{y} = f(\bar{y}_p + y, \bar{u}_p + u) \simeq \underbrace{f(\bar{y}_p, \bar{u}_p)}_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial y_p} \right|_{(\bar{y}_p, \bar{u}_p)} y + \left. \frac{\partial f}{\partial u_p} \right|_{(\bar{y}_p, \bar{u}_p)} u$$

$$f(y_p, u_p) = \gamma g - \frac{K_f (i_0 + r u_p)^2 \gamma^3}{m (y_p - y_0)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_p} = \frac{2K_f(i_0 + r\bar{u}_p)^2 \gamma^3}{m(\bar{y}_p - y_0)^3} = \frac{2K_f(\bar{y}_p - y_0)^2 \gamma^{-2} \frac{mg}{K_f} \gamma^3}{m(\bar{y}_p - y_0)^3} = \frac{2\gamma g}{\bar{y}_p - y_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_p} &= -\frac{2K_f(i_0 + r\bar{u}_p)^2 r \gamma^3}{m(\bar{y}_p - y_0)^2} = -\frac{2K_f(\bar{y}_p - y_0)^2 \gamma^{-1} \sqrt{\frac{mg}{K_f}} r \gamma^3}{m(\bar{y}_p - y_0)^2} = \\ &\quad -\frac{2r\gamma^2}{\bar{y}_p - y_0} \sqrt{\frac{K_f g}{m}} \end{aligned}$$

- Modelo linearizado:

$$\ddot{y} = \eta y - \beta u$$

$$\eta = \frac{2\gamma g}{\bar{y}_p - y_0}, \quad \beta = \frac{2r\gamma^2}{\bar{y}_p - y_0} \sqrt{\frac{K_f g}{m}}$$

- Função de transferência em  $s$ :

$$H_c(s) = -\frac{\beta}{s^2 - \eta}$$

- Função de transferência em  $z$ :

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



# Parâmetros do modelo

Parâmetros físicos levantados experimentalmente:

- $m = 2,12 \times 10^{-2} \text{ kg}$
- $y_0 = -7,47 \text{ V}$
- $\gamma = 328 \text{ V/m}$
- $i_0 = 0,514 \text{ A}$
- $r = 0,166 \text{ A/V}$
- $K_f = 1,2 \times 10^{-4} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$
- Faixa de trabalho:  $y_p \in [-2 \text{ V}, +2 \text{ V}]$
- Assume-se ainda  $g = 9,8 \text{ m/s}^{-2}$

Ponto de equilíbrio considerado:  $\bar{y}_p = 0 \text{ V}$  (centro da faixa de trabalho)

Período de amostragem adotado:  $T = 5 \text{ ms}$

---

Referência: GRIMM, C. Um Controlador Digitalmente Assistido para um Sistema de Levitação Magnética. Tese de Mestrado, ITA, 2002.

- `parametros_maglev.m`: Define os parâmetros do levitador magnético
- `levitador_mpc.mdl`: Diagrama de simulação

Observar o resultado obtido com horizontes de predição muito longos ( $N = 200$ , por exemplo)  $\rightarrow$  Mau condicionamento da matriz dinâmica  $G$ .

# Resumo da aula de hoje

- Uso de funções de transferência (modelos ARX)
- Implementação em Matlab
- Exemplo com planta instável em malha aberta (levitador magnético)

# Tópicos da próxima aula

- Uso de modelos no espaço de estados
- Implementação em Matlab
- Uso de observador de estados
- Considerações sobre ação integral de controle