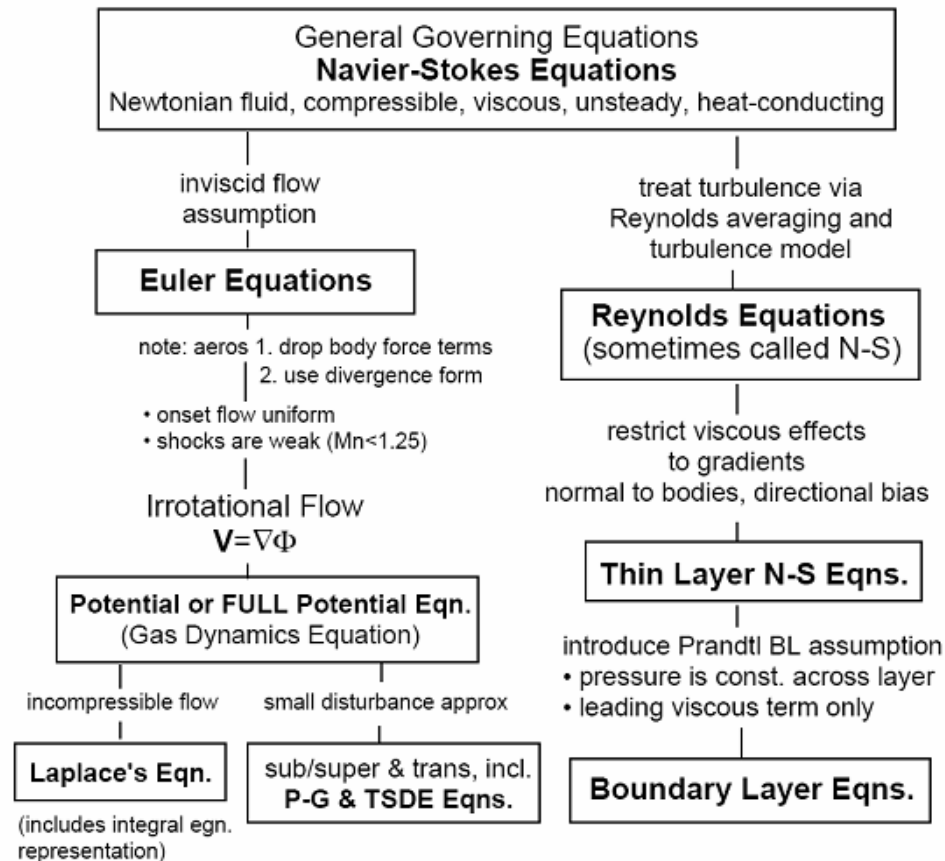




AE-249 - AEROELASTICIDADE

Aerodinâmica Não Estacionária
Introdução e conceitos básicos da teoria

Hierarquia das Equações de dinâmica dos fluidos



Aerodinâmica não linear

Equações de Navier-Stokes (NS)

Direct Numerical
Simulation (DNS)

Large Eddy
Simulation (LES)

Reynolds-Averaged
Navier-Stokes (RANS)

Thin-Layer
Approximation

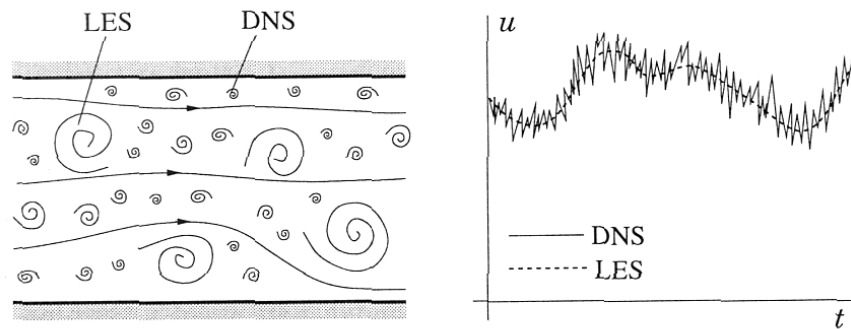
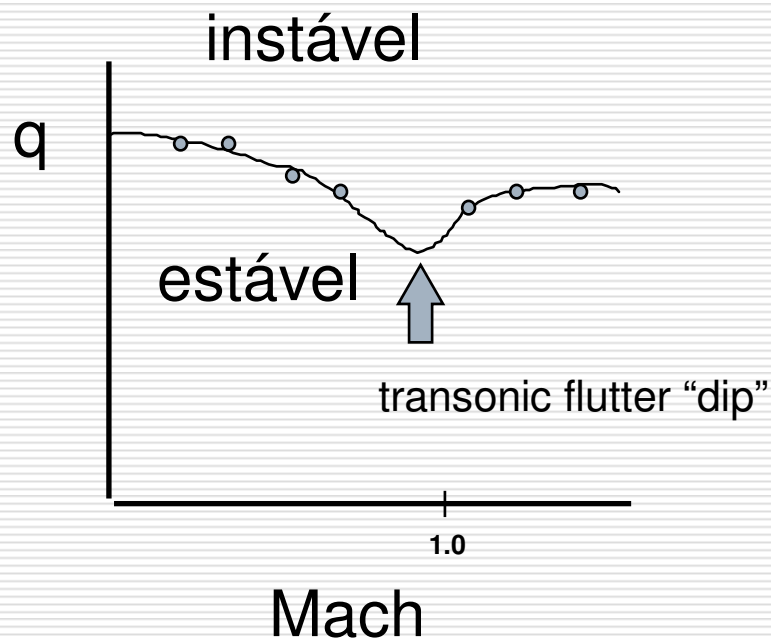


Fig. 9.3. Schematic representation of turbulent motion (left) and the time dependence of a velocity component at a point (right)

Aerodinâmica não linear



Tipicamente são necessários termos não lineares para determinar transonic flutter "dip".



Aproximações em aerodinâmica não linear

Não-Linear
Invíscido com
espessura



Os choques tendem a ser mais fortes e mais para trás quando comparados com experimentos (Ex. Euler, Potencial Completo)

A fronteiras de flutter tendem mostrar um “transonic dip” mais evidente

Efeitos
viscosos



Reduz a força do choque quando comparado com o caso invíscido, move o choque para a frente devido à interação com a camada limite. (Ex. N-S, TL N-S)

O “transonic dip” é atenuado quando comparado com o caso invíscido

Modelos Aerodinâmicos para a Aeroelasticidade Linear

- Caso particular da equação do potencial aerodinâmico linearizado, de velocidades:

$$\left(1 - M_{\infty}^2\right) \nabla^2 \tilde{\phi} - \frac{M_{\infty}^2}{U_{\infty}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} - 2 \frac{M_{\infty}^2}{U_{\infty}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} = 0$$

ou

$$\beta^2 \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} - \left(\frac{2U_{\infty}}{a_0^2} \right) \psi_{xt} - \left(\frac{1}{a_0^2} \right) \psi_{tt} = 0 \quad \text{Pot. de aceleração}$$

- Regime incompressível Mach = 0:

$$\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = 0 \quad \text{Equação de Laplace}$$

Condições de contorno linearizadas

- Condição de contorno linearizada:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} = w$$

- Condição de contorno na esteira, somente para potencial de velocidade:
 - **Pelo princípio da sustentação estacionária, deve haver viscosidade para haver sustentação;**
 - **Porém o modelo a ser empregado para a solução dos nossos problemas não estacionários é invíscido e irrotacional;**
 - **Condição de Kutta: pressupõem que não existe salto de pressão e velocidade no ponto que define o bordo de fuga;**
 - **Teoremas de Kelvin: formação de uma esteira de vórtices que se forma a partir do BF; circulação total é nula.**

Modelos Clássicos

Escoamento Incompressível

- Para um primeiro estudo da aerodinâmica não estacionária aplicada a aeroelasticidade, vamos estudar modelos clássicos tais como os modelos de:

- Theodorsen
- Wagner
- Küssner
- Sears

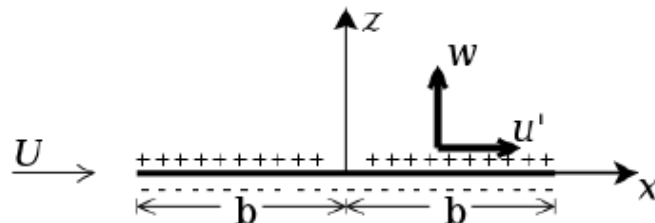
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

- Estes modelos são fundamentados em soluções elementares da equação para o potencial aerodinâmico linearizado, em regime de escoamento incompressível (Mach = 0), conhecida também como Equação de Laplace.

Referência para estes tópicos:
B.A.H., "Aeroelasticity"

Modelo de Theodorsen

- ❑ Theodorsen em 1934 apresenta um modelo aerodinâmico não estacionário de uma seção típica realizando movimento harmônico simples, e assumindo regime incompressível.
- ❑ Assumiu tratar o problema empregando singularidades tipo fonte, sumidouros e vórtices elementares soluções da Equação de Laplace;
- ❑ O efeito de salto de velocidade através de uma placa plana que representa o aerofólio pode ser simulado assumindo uma distribuição de fontes e sumidouros no intradorso e no extradorso do aerofólio;



Singularidades

- Revisão das soluções elementares da Equação de Laplace bidimensional, supondo uma singularidade em x_1, z_1 :

$$V_r = \frac{\sigma}{2\pi r} \quad , \quad V_\theta = 0 \quad , \quad \phi_s = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \quad \text{Fonte}$$

$$V_r = 0 \quad , \quad V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad , \quad \phi_\Gamma = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \text{Vórtice}$$

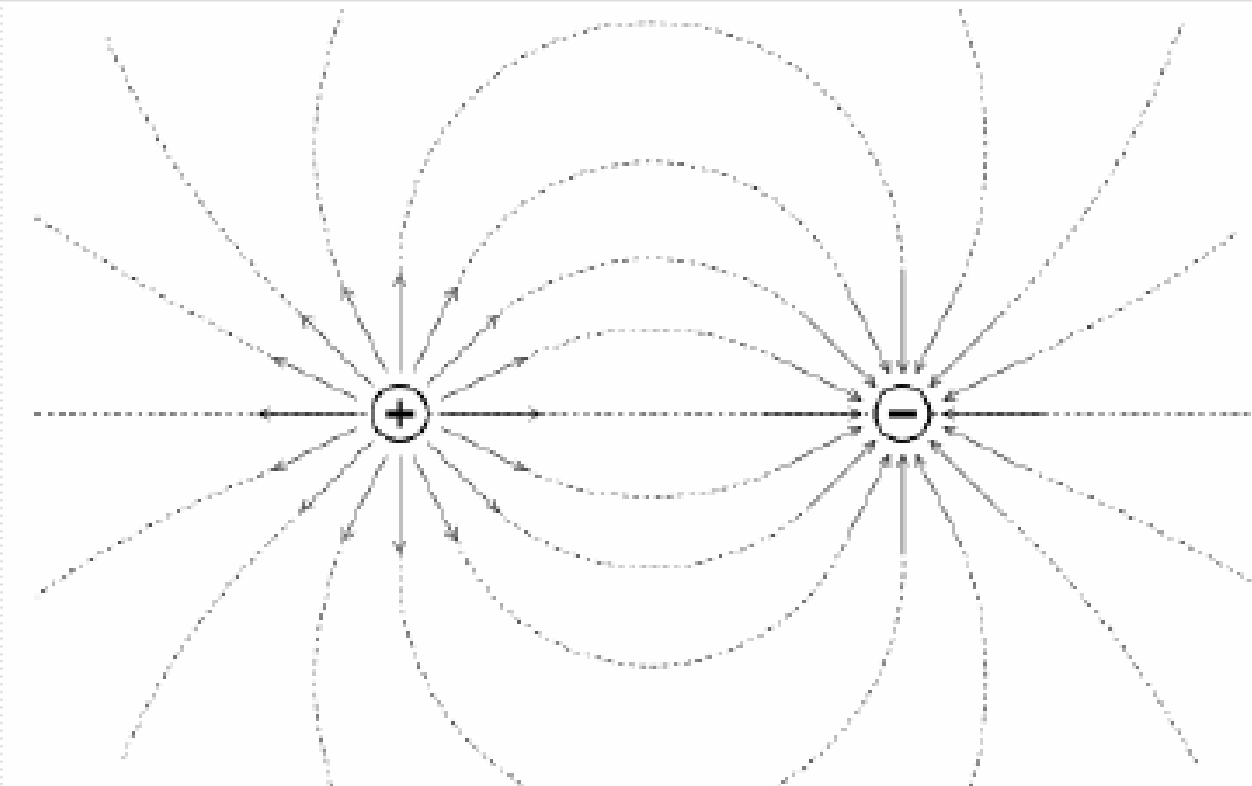
$$V_r = \frac{\mu}{2\pi r} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad , \quad V_\theta = -\frac{\mu}{2\pi r} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad , \quad \phi_D = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad \text{Dipolo}$$

$$r = (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_1}{x - x_1} \right)$$

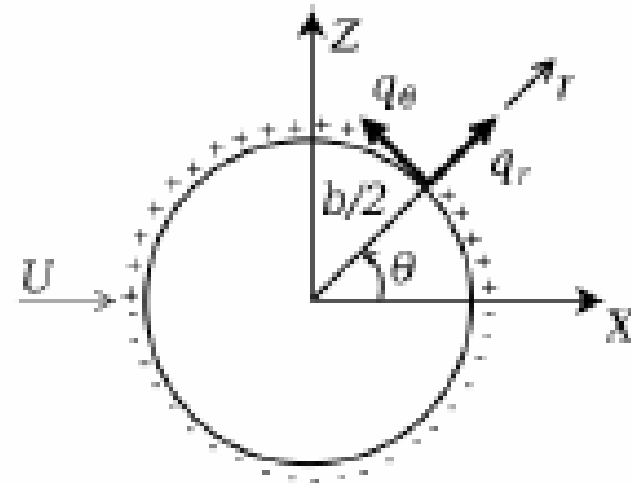
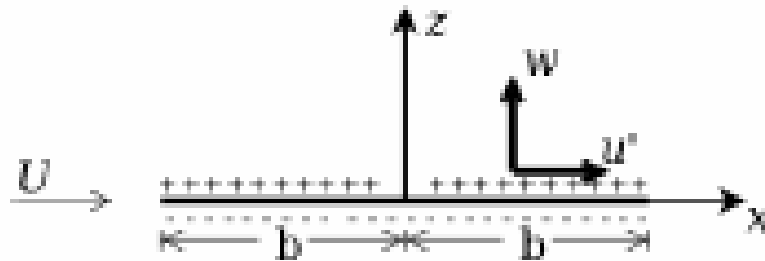
$$\boxed{\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{zz} = 0}$$

Fonte e Sumidouro



Singularidades distribuídas

- Fontes e sumidouros dispostas sobre o extradorso e intradorso, respectivamente



Seção típica

- Theodorsen em seu trabalho assume uma seção típica com três graus de liberdade (3 gdl):

h = Movimento vertical

α = Ângulo de ataque

β = Deflexão do comando

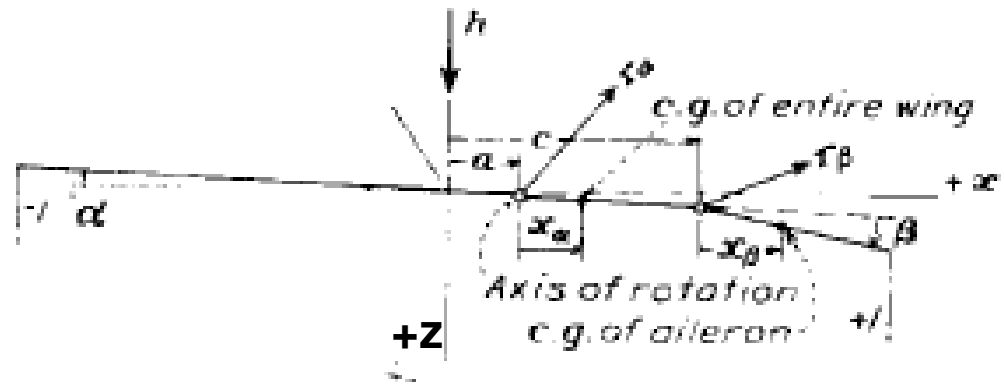


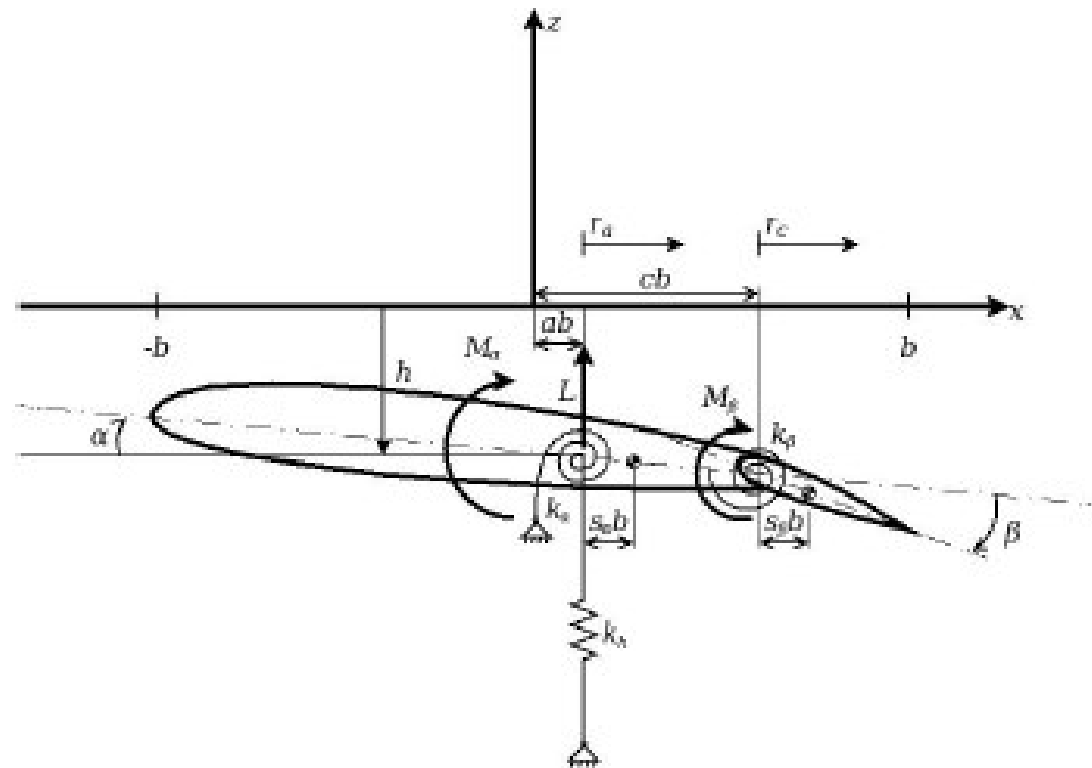
FIGURE 2.—Parameters of the airfoil-aileron combination.

OBS: Devemos tomar cuidado com o sistema de referência adotado por Theodorsen, os eixos "x" e "z" estão em sentido contrário!

Figura originalmente extraída de NACA Rept 496, T. Theodorsen

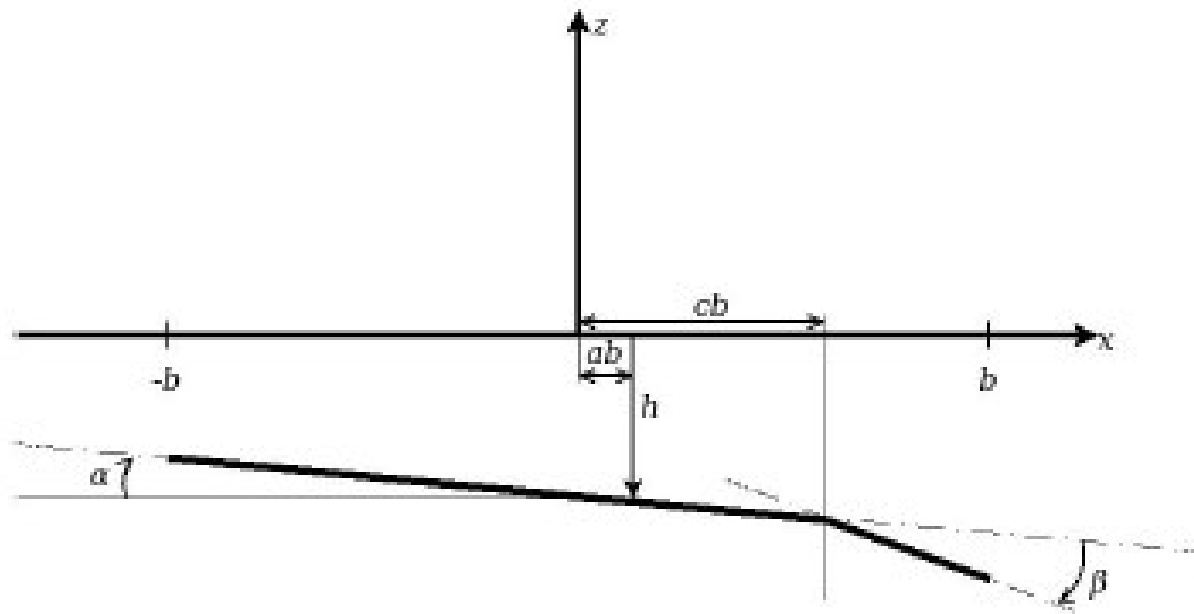
Seção típica com 3 GDL

- ❑ Modelo empregado com as respectivas dimensões:



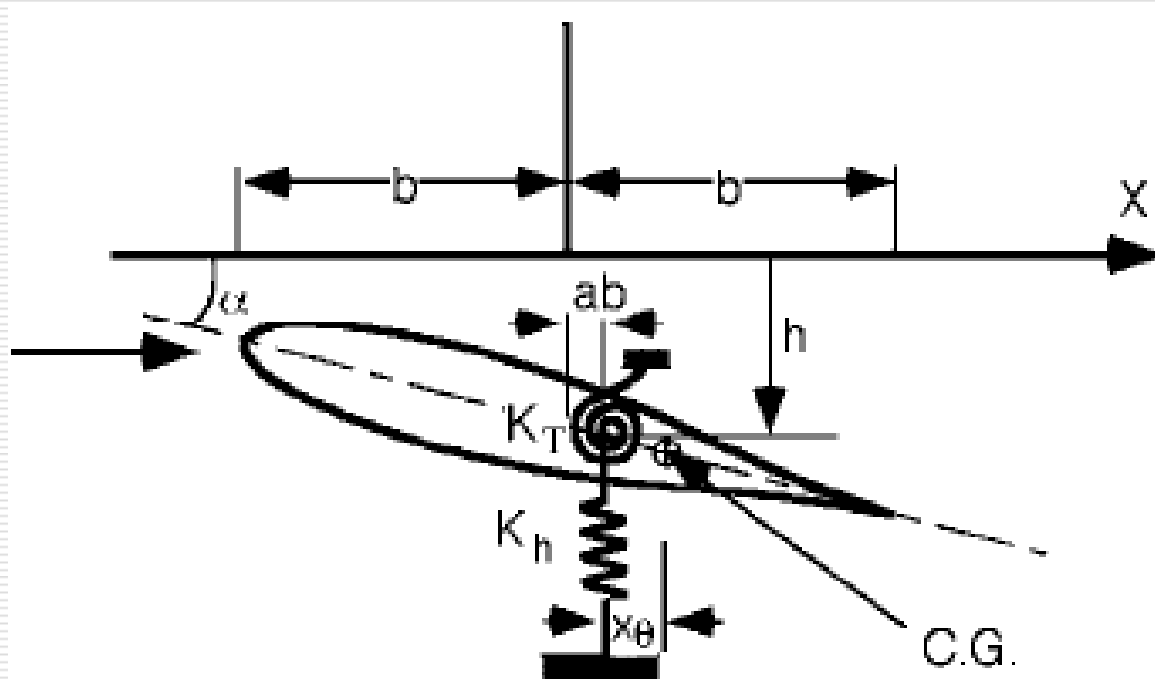
Modelo idealizado

- Modelo empregado com as respectivas dimensões:



Seção típica com 2 GDL

- Entretanto, para o melhor entendimento do problema físico, vamos adotar um modelo de seção típica com dois graus de liberdade:



Forças aerodinâmicas não estacionárias em uma seção típica

- ❑ Emprego da teoria do aerofólio fino;
- ❑ Aproximação de Theodorsen: (Ref: T. Theodorsen, "***General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter***", NACA TR 496, 1934).
- ❑ Assume superfícies aerodinâmicas como placas planas que oscilam em torno do eixo elástico da seção típica que representa esta superfície de sustentação. Também assume que o escoamento é composto por duas componentes:
 - **Não circulatória onde o escoamento pode ser expresso através de fontes e sumidouros;**
 - **Circulatória a qual está relacionada a vorticidade de uma esteira que se estende do bordo de fuga para o infinito.**
- ❑ Para cada componente obteve-se os potenciais de velocidades e calculou-se a pressão através relação para pressão linearizada.

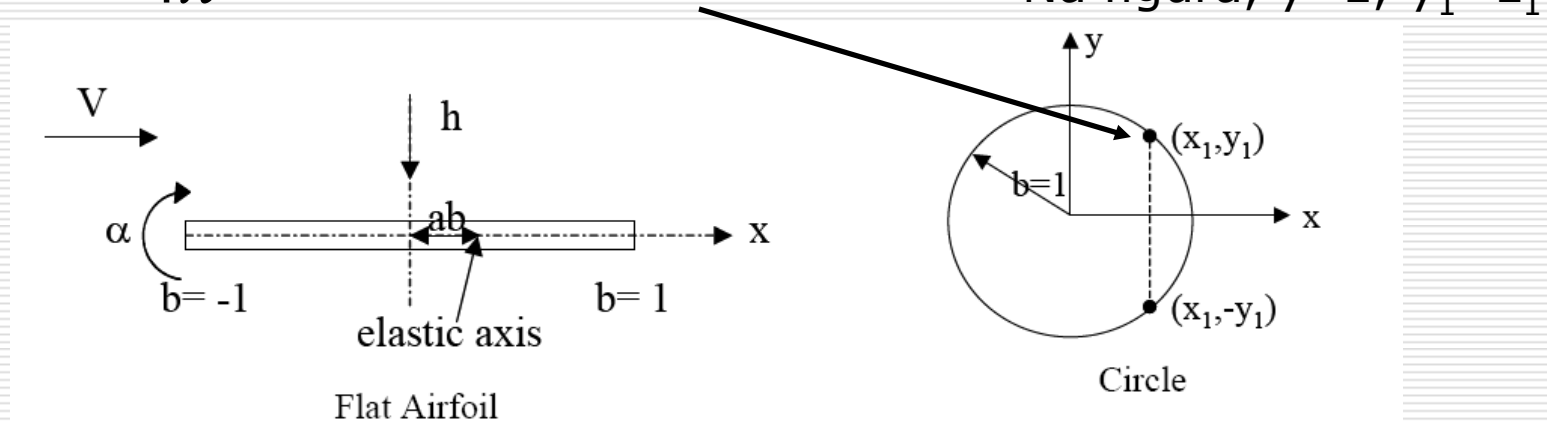
Transformação de Joukowski

- ❑ Usando a transformação de Joukowski, um aerofólio pode ser mapeado em um círculo, e o ângulo entre as tangentes em pontos específicos dos corpos e o vetor velocidade relativo ao movimento dos corpos nos dois planos é preservado.
- ❑ Isto permite considerar que o salto de potencial devido a singularidades dispostas sobre a parte superior e inferior do círculo pode ser associada à velocidade normal induzida pelo movimento do aerofólio, uma vez que os vetores velocidade nos dois planos tem um mesmo ângulo de inclinação com relação à direção tangente aos corpos nos dois planos em um determinado ponto.
- ❑ Ou seja o ângulo de ataque induzido pelo movimento do aerofólio no plano físico será o mesmo que o ângulo entre a velocidade normal induzida pelo salto de potencial entre dois pontos no círculo, e as tangentes ao círculo nestes pontos.

Parcela não circulatória

- O potencial de velocidade em um ponto x, z de uma fonte de intensidade " σ " em um ponto (x_1, z_1) no círculo é dado por:

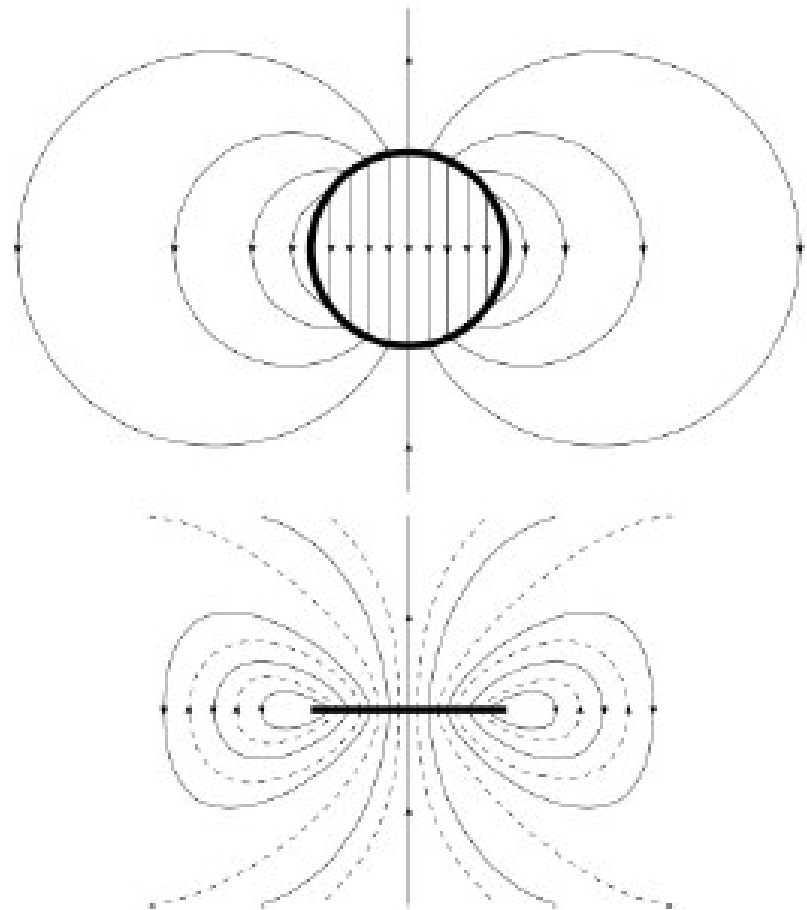
$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \left[(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 \right]$$



O motivo de mapear o aerofólio para um círculo deve-se a necessidade de calcular o salto de potencial, pois ao fazê-lo sem mapear a placa plana este potencial seria nulo ($\ln 1 = 0$).

Linhas de corrente

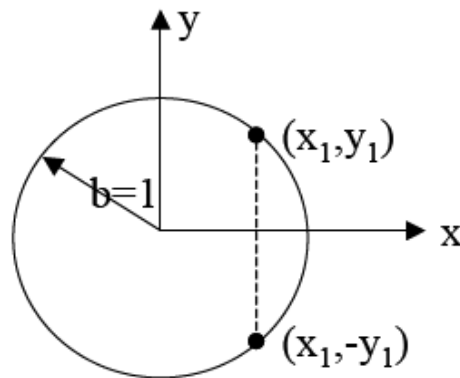
- O escoamento no plano transformado (círculo) comporta-se de forma análoga ao escoamento sobre a placa, linhas de corrente que emanam das fontes do extradorso (parte superior do círculo) e viajam até o intradorso (parte inferior do círculo), onde estão dispostos os sumidouros



Fonte no Círculo

- O salto de potencial de velocidade de uma fonte de intensidade 2σ em uma posição (x_1, z_1) e um sumidouro de intensidade -2σ em $(x_1, -z_1)$ é dado por:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left[\frac{(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2}{(x - x_1)^2 + (z + z_1)^2} \right]$$



Circle

Ou seja, os potenciais
Apresentados são função
De "x" apenas:

$$z = \sqrt{1 - x^2}$$

Equação do círculo!

Na figura, $y=z$; $y_1=z_1$

Movimento do aerofólio

- O deslocamento do aerofólio é descrito como: $z = h + \alpha(x - ab)$
E aplicando a condição de contorno a pequenas perturbações:
(note que $\sin\alpha \approx \alpha$)

$$\frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial x} = w_a(x, t) = -[\dot{h} + \dot{\alpha}(x - ab)] - V\alpha$$

- Pode-se associar a um salto de potencial que ocorre devido a distribuição de fontes e sumidouros, o movimento da seção típica sujeita ao escoamento V_0 .
- Ou seja, a partir da definição do potencial de velocidade:

$$\Delta\varphi = b \cdot w(x, t)$$

a velocidade multiplicada pelo comprimento, podemos obter este salto como função do downwash induzido pelo aerofólio

Salto de Potencial

- Ou seja, deveremos calcular o salto de potencial devido a cada uma das parcelas associados às velocidades que compõem o downwash, devidamente integradas ao longo da corda $2b$:

$$\Delta\varphi_{V_0\alpha}^{2b}, \quad \Delta\varphi_{\dot{\alpha}}^{2b}, \quad \Delta\varphi_{\dot{h}}^{2b}$$

- Por exemplo, o potencial relacionado à velocidade normal do aerofólio em arfagem ($V_0 \alpha$), denotado por “ α ” é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\alpha}^{2b} &= b \int_{-1}^1 \Delta\varphi_{\alpha} dx_1 = b \int_{-1}^1 \frac{-V\alpha}{2\pi} \ln \left[\frac{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2}{(x-x_1)^2 + (z+z_1)^2} \right] dx_1 = \\ &= V\alpha b \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Potenciais de velocidade

- Os potenciais de velocidade devido as velocidade verticais e de arfagem são obtidos de forma análoga e dados por:

$$\Delta\varphi_{\dot{h}}^{2b} = \dot{h}b\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\dot{\alpha}}^{2b} &= \frac{\dot{\alpha}b^2}{2\pi}\pi(x+2)\sqrt{1-x^2} - \dot{\alpha}b^2(1+a)\sqrt{1-x^2} = \\ &= \dot{\alpha}b^2\left(\frac{x}{2} - a\right)\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Potencial não circulatório

- Portanto, potencial de velocidades total devido à parcela não circulatória do escoamento é dado pela soma dos potenciais:

$$\Delta\varphi_{NC}^{2b} = \Delta\varphi_{V_0\alpha}^{2b} + \Delta\varphi_{\dot{\alpha}}^{2b} + \Delta\varphi_{\dot{h}}^{2b}$$

- Note que para cada componente do downwash induzido pelo movimento da seção pode-se obter o correspondente potencial, uma vez que é assumida a distribuição de singularidades no extradorso e no intradorso do aerofólio.
- Finalmente tem-se

$$\Delta\varphi_{NC}^{2b} = V\alpha b\sqrt{1-x^2} + \dot{\alpha}b^2\left(\frac{x}{2} - a\right)\sqrt{1-x^2} + \dot{h}b\sqrt{1-x^2}$$

Carregamento Aerodinâmico não circulatório

- Através do emprego da expressão para a pressão linearizada, :

$$\Delta p = -2\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi_{NC}^{2b}) + V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \varphi_{NC}^{2b}) \right]$$

- pode-se calcular os esforços não circulatórios através da integração das pressões sobre a superfícies de aerofólio:

$$F_{NC} = b \int_{-1}^1 \Delta p dx \quad , \quad M_{NC} = b \int_{-1}^1 \Delta p (x-a) b dx$$

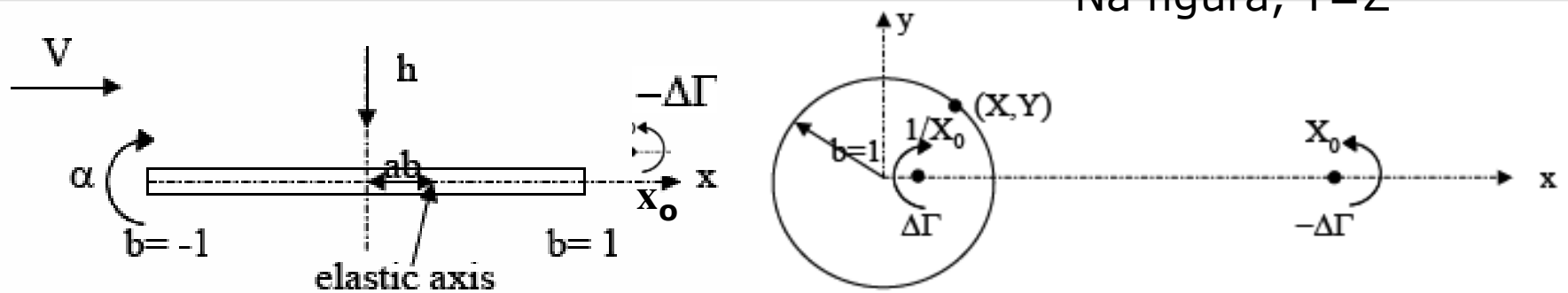
- Aplicando a relação acima ao potencial de natureza não circulatória tem-se os esforços integrados resultando em:

$$F_{NC} = -\pi \rho b^2 \left(\ddot{h} + V \dot{\alpha} + b a \ddot{\alpha} \right)$$

$$M_{NC} = -\pi \rho b^2 \left(V \dot{h} + b a \ddot{h} + V \dot{\alpha}^2 - b^2 \left(a + \frac{1}{8} \right) \ddot{\alpha} \right)$$

Parcela circulatória: Distribuição de vórtices

- Para satisfazer a condição de Kutta, Theodorsen assumiu uma distribuição de vórtices colado no aerofólio a uma correspondente esteira que parte do bordo de fuga para o infinito.



- Para se considerar a esteira, assume-se um vórtice ligado $\Delta\Gamma = \gamma dx$ em $1/X_0$, e um vórtice emitido $-\Delta\Gamma$ em X_0 ;
- No plano físico, x_0 é a posição na esteira do aerofólio.

Potencial associado aos vórtices

- O potencial em um ponto X, Z , devido a um par de vórtices (ligado e emitido) no plano transformado é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\Gamma} &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{Z}{X - X_0} - \tan^{-1} \frac{Z}{X - 1/X_0} \right] = \\ &= -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{(X_0 - 1/X_0)Z}{X^2 - (X_0 - 1/X_0)X + Z^2 + 1} \right]\end{aligned}$$

- Fazendo:

$$(X_0 - 1/X_0) = 2x_0 \quad , \quad X = x \quad , \quad Z = \sqrt{1 - x^2}$$

- Temos:

$$X_0 = x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1} \quad , \quad 1/X_0 = \frac{1}{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}} = x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}$$

Potencial no plano físico

- Agora pode-se escrever o potencial gerado pelo par de vórtices em x , ou seja, sobre o aerofólio, incluindo a variável associada ao movimento do vórtice na esteira x_0 .
- Substituindo as últimas relações de transformação, na relação para o potencial temos:

$$\Delta\varphi_{\Gamma} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x_0^2-1}}{1-x \cdot x_0} \right]$$

$$\underbrace{-1 \leq x \leq 1}_{\text{aerofólio}}, \quad \underbrace{-1 < x_0 < \infty}_{\text{esteira}}$$

Pressão linearizada

- Os passos para obtenção das forças de origem circulatória são similares ao caso não circulatório, integra-se a pressão linearizada que está relacionada ao potencial de velocidades dos vórtices ligados e da esteira para obter os esforços sobre o aerofólio;
- A diferença é que se sabe que o vórtice desloca-se a uma velocidade V_0 e portanto a relação para o cálculo da pressão linearizada é modificada por:

$$\Delta p = -2\rho \left[\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi_\Gamma) + V_0 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_\Gamma) \right] = -2\rho V_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_0}(\Delta\varphi_\Gamma) + \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi_\Gamma) \right] ,$$

$$\text{Pois,} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi_\Gamma) = \frac{\partial}{\partial x_0}(\Delta\varphi_\Gamma) \frac{\partial x_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_0}(\Delta\varphi_\Gamma) V_0$$

Força circulatória

- Após derivar o salto de potencial devido ao vórtice $\Delta\Gamma$, em função de x e x_0 , integramos a pressão sobre o aerofólio fazendo:

$$\Delta F_\Gamma = -b \int_{-1}^1 \Delta p_\Gamma dx = -\rho V_0 b \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \Delta\Gamma$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

- Porém deve-se incluir a integração de uma distribuição de vórtices que ocorre na esteira, assumido:

$$\Delta\Gamma = \gamma dx_0$$

onde γ é uma densidade turbilhonar. Esta integração é realizada de forma a satisfazer o teorema de Kelvin.

Esforços circulatorios

- Assume-se que a esteira se estende ao infinito, portanto, pode-se empregar a mesma relação obtida para o cálculo da força devido ao vórtice ligado, porém substituindo a densidade turbilhonar no lugar da intensidade do vórtice ligado:

$$F_{\Gamma} = -b \int_1^{\infty} \rho V_0 b \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma dx_0 = -\rho V_0 b \int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma dx_0$$

$$M_{\Gamma} = -\rho V_0 b^2 \int_1^{\infty} \left[\frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} - \left(a + \frac{1}{2} \right) \frac{x_0}{x_0^2 - 1} \right] \gamma dx_0$$

$$1 < x < \infty$$

Densidade turbilhonar assumida

- ❑ Resta-nos identificar o termo remanescente, a densidade turbilhonar $\gamma(x_0, t)$.
- ❑ Para tal, assume-se que existe a condição de Kutta no bordo de fuga, o que implica que a soma de todos os potenciais agindo sobre o aerofólio deve implicar em velocidade finitas no bordo de fuga, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\phi^{total}) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\phi_{\Gamma} + \Delta\phi_{\alpha} + \Delta\phi_h + \Delta\phi_{\dot{\alpha}}) = \textit{Valor Finito}$$

$$x=1$$

- ❑ Após derivar o potencial total em relação a x , chega-se a uma condição onde o valor finito se anula para $x=1$

Condição de Kutta

□ Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi^{total}) = \frac{\partial\Delta\varphi_{\Gamma}}{\partial x} - \frac{V_0\alpha bx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\dot{\alpha}b^2\left(\frac{x}{2} - a\right)x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\dot{h}bx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}b^2\sqrt{1-x^2} = VF$$

□ Rearranjando os termos:

$$\left[\frac{\partial\Delta\varphi_{\Gamma}}{\partial x}\sqrt{1-x^2}\right] - V_0\alpha bx - \dot{\alpha}b^2\left(\frac{x}{2} - a\right)x - \dot{h}bx + \frac{1}{2}\dot{\alpha}b^2(1-x^2) = VF\sqrt{1-x^2}, \quad x=1 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial\Delta\varphi_{\Gamma}}{\partial x}\sqrt{1-x^2}\right]_{x=1} - V_0\alpha b - \dot{\alpha}b^2\left(\frac{1}{2} - a\right) - \dot{h}b = 0$$

Expressão para o downwash

- Como queremos obter o valor da densidade turbilhonar, devemos substituir o termo entre colchetes por uma relação que seja função da densidade e da coordenada na esteira x_0 ;
- Portanto substituindo :

$$\Delta\varphi_\Gamma = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1-x^2} \sqrt{x_0^2-1}}{1-x \cdot x_0} \right]$$

na relação anterior temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0^2-1}}{x_0-1} \gamma(x_0, t) dx_0 = V_0 \alpha + \dot{a} b \left(\frac{1}{2} - a \right) + \dot{h} = Q$$

- Note que cancelamos “b”, e que Q representa uma velocidade normal induzida pela circulação total devido a esteira de vórtices.

Esforços em função do downwash

- A idéia de Theodorsen, a partir deste ponto, parte de um artifício para escrever as forças e momentos devido a vorticidade, ou circulatórios, fazendo uso de um rearranjo algébrico de forma que :

$$F_{\Gamma} = -2\pi\rho V_0 b Q \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0} = -2\pi\rho V_0 b \textcolor{red}{Q} C(x_0, t)$$

$$M_{\Gamma} = -2\pi\rho V_0 b \textcolor{red}{Q} \left(\frac{1}{2} - C(x_0, t) \left(a + \frac{1}{2} \right) \right)$$

Função de Theodorsen

- É uma função de deficiência de sustentação, que modifica a circulação sobre o aerofólio pela ponderação da velocidade normal induzida Q .

$$C(x_0, t) = \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}{\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}$$

- Provavelmente Theodorsen buscou esta forma de solução para associar estas integrais a funções especiais, tal como foi feito em estudos similares e anteriores aos de Theodorsen, nos quais se buscou soluções analíticas para problemas similares associando a funções de especiais.

Movimento harmônico simples

- ❑ Flutter – o limite está associado a uma condição de estabilidade neutra, associável a um movimento harmônico simples. Por este motivo Theodorsen elegeu este tipo de movimento para representar o comportamento oscilatório da esteira que convecta a partir do BF do aerofólio.
- ❑ Assumindo que a esteira comporta-se harmonicamente no sentido do movimento, pode-se associar uma frequência.

$$\gamma = \gamma_0 e^{ik\left(\frac{s}{b} - x_0\right)} = \gamma_0 e^{i(\omega t - kx_0 + \theta)}, \quad s = V_0 t, \quad k = \frac{\omega b}{V_0} \Rightarrow \frac{ks}{b} = \omega t$$

- ❑ E ao substituir esta forma de representar a vorticidade harmônica da esteira permite que se possa associar $C(x_0, t)$ a funções de Bessel

Particularização para o MHS

- A função de Theodorsen tem como argumento agora a frequência reduzida k .

$$C(k) = \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0}{\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0} = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)}$$

- Onde J e Y são funções de Bessel, que também podem ser escritas como funções de Hankel

Funções especiais de Bessel

- **Combinação de funções de Bessel de 1º e 2º tipo;**

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)} = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

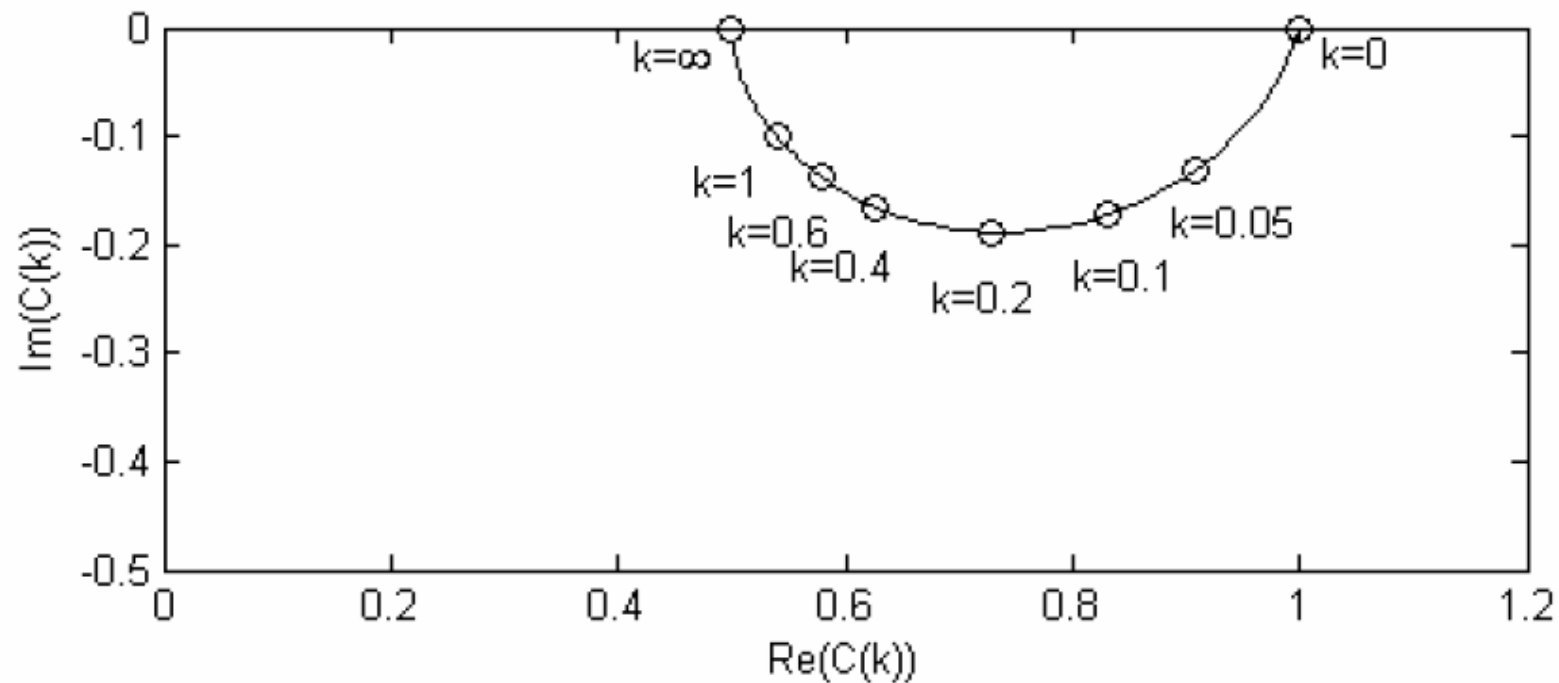
ou também de funções de Hankel.

- **Forma usualmente apresentada:**

$$C(k) = F(k) + iG(k)$$

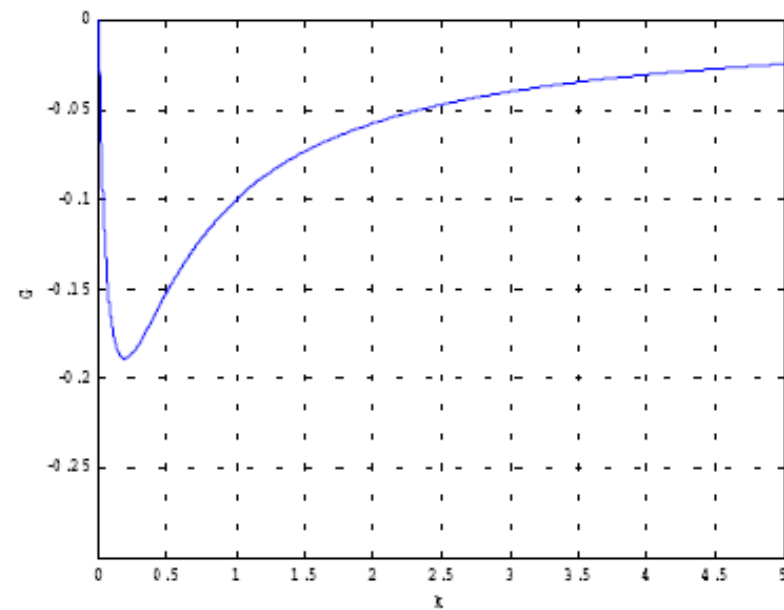
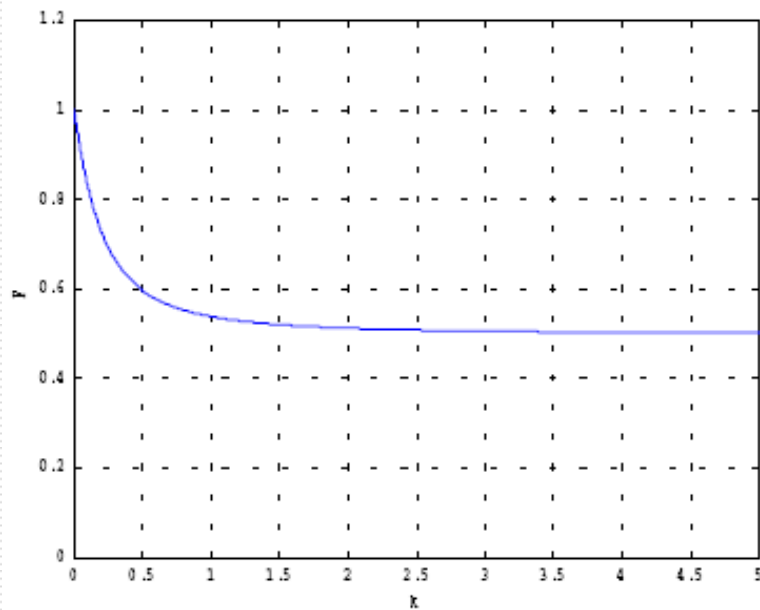
Mapeamento complexo

- Graficamente esta função pode ser representada no plano complexo como:



Parte real e imaginária

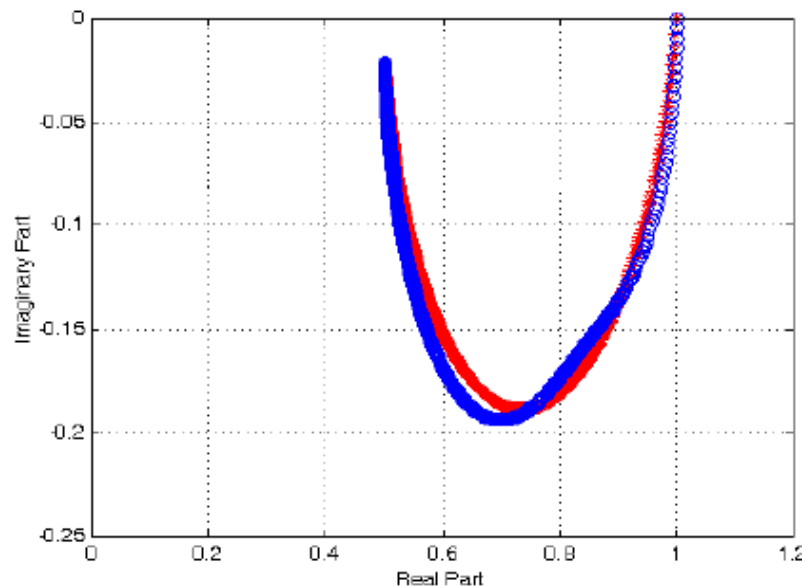
- Parte real e imaginária da função de Theodorsen:



Aproximação de $C(k)$

- Pode-se aproximar a função de Theodorsen por:

$$C(k) = 0.5 + \frac{0.0075}{ik + 0.0455} + \frac{0.10055}{ik + 0.3}$$



Esta aproximação fornece um resultado razoável, conforme se pode verificar no gráfico ao lado.

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

Modelo de Theodorsen (2 gdl)

Agrupando os termos circulatorios e não circulatorios tem-se:

$$l = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$m_y = \pi \rho b^2 \left[ba \ddot{h} + V_0 b(0.5 - a) \dot{\alpha} - b^2 \left(1/8 + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b^2 (0.5 + a) C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 1.0 \\ \dot{h}, \ddot{h}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} = 0.0 \end{array} \right\} \Rightarrow l = 2\pi \rho V_0 b C(k=0) V_0 \alpha \Leftrightarrow l = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha} c \alpha$$

caso estacionário;

onde: $c = 2b$ é a corda da seção típica, ρ é a densidade do fluido, e Cl é a derivada de sustentação da seção típica. No caso da placa plana este resultado deve ser 2π .

Downwash I

- Note que :

$$\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} = w\left(\frac{b}{2}, t\right) = w\left(\frac{3c}{4}, t\right) = Q$$

representa uma velocidade normal induzida em um ponto do aerofólio de cota $b/2$, ou seja a $3/4$ da corda. Esta relação pode ser verificada empregando a equação que descreve o movimento do aerofólio bem como a relação para o downwash.

- Note também que sentido é oposto ao do movimento induzido pelo aerofólio:

$$w(x, t) = -\dot{h} - V_0 \alpha - b\left(\frac{x}{b} - a\right) \dot{\alpha}$$

Downwash II

- O downwash, como observamos, vem do estabelecimento da condição de Kutta;
- Quando estabelecemos esta condição, a velocidade normal induzida a $\frac{3}{4}$ da corda aparece (termo Q), e é igual à integral que representa a distribuição de circulação na esteira:

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0^2 - 1}}{x_0 - 1} \gamma(x_0, t) dx_0 = \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] = Q$$

Downwash III

- Ou seja, a circulação da esteira modifica a circulação sobre o aerofólio sob a forma desta velocidade normal induzida que é responsável pelo atraso no carregamento (circulação) sobre o aerofólio.
- Note que a circulação devido ao movimento do aerofólio, para o caso estacionário é dada por:

$$l = 2\pi\rho V_0 b C(k=0) V_0 \alpha \Leftrightarrow l = \frac{1}{2} \rho V_0^2 (2\pi) c \cdot \alpha$$

$$m_y = 2\pi\rho V_0 b^2 C(k=0) \left(a + \frac{1}{2}\right) V_0 \alpha \Leftrightarrow m_y = \frac{1}{2} \rho V_0^2 c^2 \left[\pi \left(a + \frac{1}{2}\right) \right] \alpha$$

Downwash IV

- No ponto a 1/4 da corda, ou seja b/2 (a = -0.5)

$$m_y(c/4) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 c^2 \left[\pi \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \alpha = 0$$

o que significa que a sustentação de natureza circulatória associada ao movimento do aerofólio está concentrada a 1/4 da corda.

- Pode-se agora entender porque a regra 1/4 - 3/4 da corda é satisfeita para o caso do aerofólio sujeito a escoamento incompressível, ou seja, o carregamento está a 1/4 da corda e a 3/4 da corda observa-se uma velocidade normal induzida pela esteira que se forma a jusante.

Ângulo de Ataque Efetivo

- No caso não estacionário, pode-se rearranjar os termos circulatórios colocando a velocidade do escoamento não perturbado em evidência, chegando-se claramente à expressão para o ângulo de ataque efetivo:

$$\alpha_{ef} = C(k) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{V_0} + \frac{b}{V_0} \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]$$

- Este ângulo de ataque representa bem como o carregamento de origem circulatória (responsável pela sustentação em escoamento não perturbado) é dependente de todas velocidades e deslocamentos associados aos graus de liberdade.
- E a ação da função de deficiência de sustentação é evidente, ou seja, altera a amplitude e a fase do carregamento, que é dependente do ângulo de ataque, pois $C(k)$ é uma função complexa.

Adimensionalizando Theodorsen

- O passo seguinte será o preparo da solução de Theodorsen para resolvermos o problema de flutter, no domínio da frequência de forma que possamos resolver um problema de autovalor, de acordo com o critério de estabilidade de Euler;
- Adimensionalizando baseado na semi-corda de referência

$$l = \pi \rho b^3 \left[\left(\frac{\ddot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \dot{\alpha} - a \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b^2 C(k) \left[\left(\frac{\dot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \alpha + (0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$
$$m_y = \pi \rho b^4 \left[a \left(\frac{\ddot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} (0.5 - a) \dot{\alpha} - (1/8 + a^2) \ddot{\alpha} \right] +$$
$$+ 2\pi \rho V_0 b^3 (0.5 + a) C(k) \left[\left(\frac{\dot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \alpha + (0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

Forma Matricial I

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} l &= l_{nc} + l_c \\ m_y &= m_{nc} + m_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -l_{nc}b - l_cb \\ m_{nc} + m_c \end{aligned} \right\} = \{P\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -l \cdot b \\ m_y \end{aligned} \right\} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\pi\rho b^4 & \pi\rho b^4 a \\ \pi\rho b^4 a & -\pi\rho b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix}}_{M_{nc}} \left\{ \begin{aligned} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{aligned} \right\} \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\pi\rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \\ 0 & -\pi\rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{B_{nc}} \left\{ \begin{aligned} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{aligned} \right\} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2\pi\rho V_0 b^3 C(k) & 2\pi\rho V_0 b^3 C(k) \left(\frac{1}{2} - a \right) \\ 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) & 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{B_c} \left\{ \begin{aligned} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{aligned} \right\} + \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho V_0 b^3 C(k) \left(\frac{V_0}{b} \right) \\ 0 & 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left(\frac{V_0}{b} \right) \end{bmatrix}}_{K_c} \left\{ \begin{aligned} h \\ \alpha \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos para se obter uma representação matricial ...

Forma Matricial II

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} &= \rho b^4 \underbrace{\begin{bmatrix} -\pi & \pi a \\ \pi a & -\pi \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix}}_{Mnc} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & -\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{Bnc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \\
 &+ \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \underbrace{C(k) \begin{bmatrix} -2\pi & -2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \\ 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) & 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{Bc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 \underbrace{C(k) \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix}}_{Kc} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Forma Matricial III

$$\begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = \rho b^4 [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k)[B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 C(k)[K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- $[M_{nc}]$ é a matriz de massa aparente, de natureza não circulatória. Representa a inércia referente ao efeito de bombeamento do fluido ao redor do aerofólio. Indépende a velocidade do escoamento V_o .
- $[B_{nc}]$ é a matriz de amortecimento aerodinâmico de natureza não circulatória, depende de V_o e representa uma resistência ao movimento do aerofólio imerso no fluido. Promove um acoplamento desestabilizante associado à combinação entre a velocidade do escoamento não perturbado e a velocidade normal ao aerofólio.

Forma Matricial IV

$$\begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = \rho b^4 [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k) [B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 C(k) [K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- $[B_c]$ é a matriz de amortecimento aerodinâmico de natureza circulatória. Quantifica os efeitos de atraso aerodinâmico induzidos pela circulação distribuída na esteira. Proporcional ao ângulo e ataque efetivo e ponderado pela função de Theodorsen.
- $[K_c]$ é a matriz de rigidez aerodinâmica. A rigidez (entenda como a sustentação) é exclusivamente de natureza circulatória, e é proporcional aos deslocamentos. É ponderada pela função de Theodorsen que atrasa o carregamento devido a variação de circulação na esteira, induzida pelo próprio movimento do aerofólio.

Forma Matricial V

- ❑ O motivo de se colocar em evidência a razão entre a velocidade e a semi-corda deve-se ao fato que o sistema de equações, quando transformado para o domínio da frequência, poderá ser escrito apenas como função da frequência reduzida k .
- ❑ Os coeficientes das matrizes M_{nc} , B_{nc} , B_c , e K_c são função exclusivamente da geometria e do coeficiente de sustentação da placa plana $C_{l\alpha} = 2\pi$;
- ❑ O próximo passo será transformar as equações de Theodorsen para o domínio da frequência;
- ❑ Esta estratégia é importante quando se quer estudar problemas de estabilidade aeroelástica (flutter), pois pode-se resolver o problema de autovalor associado ao sistema aeroelástico.

Motivação para mudarmos para o domínio da frequência

- ❑ Problema: Equações de Theodorsen definidas no domínio do tempo, sendo que a função de Theodorsen possui como argumento a frequência reduzida.
- ❑ Vamos reescrever a equação de Theodorsen para 2 gdl na forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} &= 2b^2 q_D [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \frac{\dot{h}}{b} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} \left(\frac{b}{V_0} \right)^2 + \boxed{q_D = \frac{1}{2} \rho V_0^2} \\ &+ 2b^2 q_D ([B_{nc}] + C(k)[B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \frac{\dot{h}}{b} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \left(\frac{b}{V_0} \right) + 2b^2 q_D C(k)[K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \frac{h}{b} \\ \alpha \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Domínio da Frequência I

- Assume-se que o movimento é do tipo harmônico simples (MHS) e que os deslocamentos lineares e angulares podem ser escritos na forma:

$$h(t) = \bar{h} \cdot e^{i\omega t} \quad \alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i\omega t}$$

- Este tipo de movimento está de acordo com o que se assumiu para chegar a função de Theodorsen em termos de funções de Bessel.
- E também é de acordo com a condição de estabilidade neutra, associada ao limite de estabilidade aeroelástica dinâmica, ou seja, o flutter.

Domínio da Frequência II

- Uma vez que as equações para os esforços aerodinâmicos não estacionários é linear, pode-se escrever:

$$l(t) = \bar{l} \cdot e^{i\omega t} \quad m_y(t) = \bar{m}_y \cdot e^{i\omega t}$$

- Onde os termos com “barra” são as amplitudes complexas. Assim:

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = 2b^2 q_D \left\{ -[M_{nc}] \underbrace{\omega^2 \left(\frac{b}{V_0} \right)^2}_{k^2} + ([B_{nc}] + C(k)[B_c]) \underbrace{i\omega \left(\frac{b}{V_0} \right)}_{ik} + C(k)[K_c] \right\} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = 2b^2 q_D \left\{ -[M_{nc}]k^2 + ([B_{nc}] + C(k)[B_c])ik + C(k)[K_c] \right\} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix}$$

Coeficientes de Influência

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k} \quad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$

- A matriz na relação, é a matriz de coeficientes de influência da seção típica;
- Relaciona as "influências" entre os movimentos associados aos graus de liberdade e os esforços atuantes.

Exemplo – Flutter do Aerofólio

Equação do sistema aeroelástico:

$$\begin{aligned} [M] \omega^2 + [K] \{\bar{x}\} &= \{\bar{P}\} = \pi \rho b^4 \omega^2 [A(k)] \{\bar{x}\} \\ -\{[M] + \pi \rho b^4 \omega^2 [A(k)]\} \omega^2 + [K] \{\bar{x}\} &= 0 \end{aligned}$$

Solução de um problema de autovalor complexo – Método K

- Escolhe-se um conjunto de frequências reduzidas;
- Calcula-se os autovalores do sistema para cada frequência reduzida;
- A única condição onde a solução tem significado físico é quando o autovalor calculado é um número imaginário puro, ou seja, o “amortecimento” é nulo;
- Durante a solução do problema de autovalor complexo irão aparecer raízes com parte real diferente de zero;

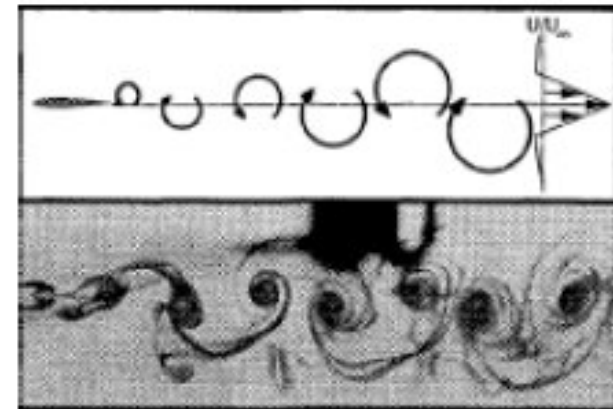
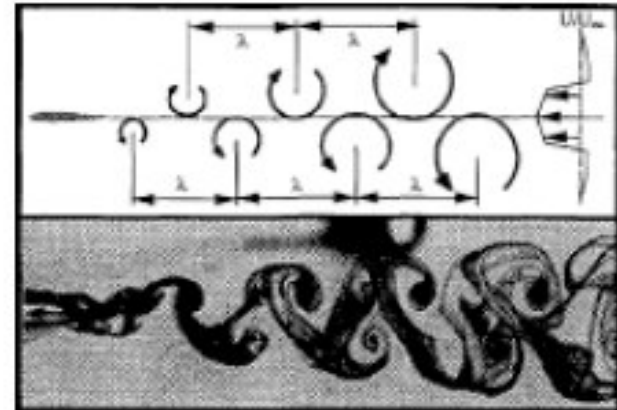
Flutter do Aerofólio

- ❑ Tais raízes não tem significado físico, pois o sistema aeroelástico deve representar um movimento harmônico, mesmo composto por matrizes complexas;
- ❑ Ou seja, pode-se notar que a análise de flutter é uma técnica muito especializada que não possui relação com métodos convencionais como Root Locus, Nyquist, entre outros.
- ❑ O amortecimento artificial é uma forma quantitativa de medir a estabilidade, é uma forma de se procurar o ponto onde ocorre o flutter, e não tem absolutamente relação nenhuma com o amortecimento que seria real e associado a uma resposta subcrítica de flutter.
- ❑ (Considerações retiradas de Rodden, W. P., and Stahl, B. "A Strip Method for Prediction of Damping in Subsonic Wind Tunnel and Flight Tests", Journal of Aircraft, Vol 6, No 1, Jan de 1969, pp.9-17).

Modelo de Wagner

Wagner, Herbert: Über die Entstehung des Dynamischen Auftriebes von TragFlügeln, fev. 1925

- ❑ Assume-se como um primeiro exemplo um aerofólio bidimensional movimentando-se em arfagem;
- ❑ Este aerofólio oscilante gera uma esteira de vórtices alternados cujo potencial a eles associado modifica o carregamento aerodinâmico sobre o perfil;
- ❑ As forças aerodinâmicas portanto não dependem somente da posição instantânea do aerofólio, mas também da posição e intensidade deste esteira de vórtices;
- ❑ Ou seja, isto significa que as forças não dependem exclusivamente do movimento instantâneo, mas também de uma história do movimento desde o seu início.

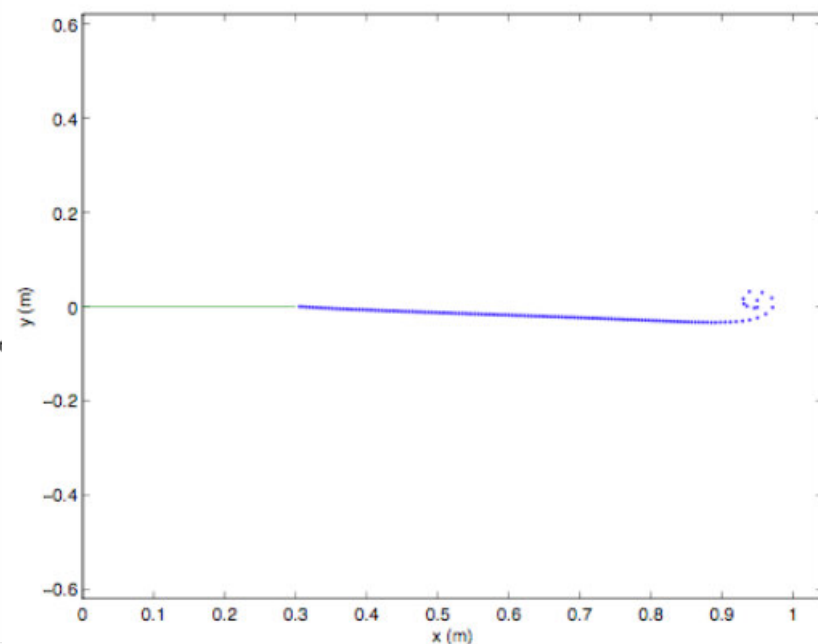
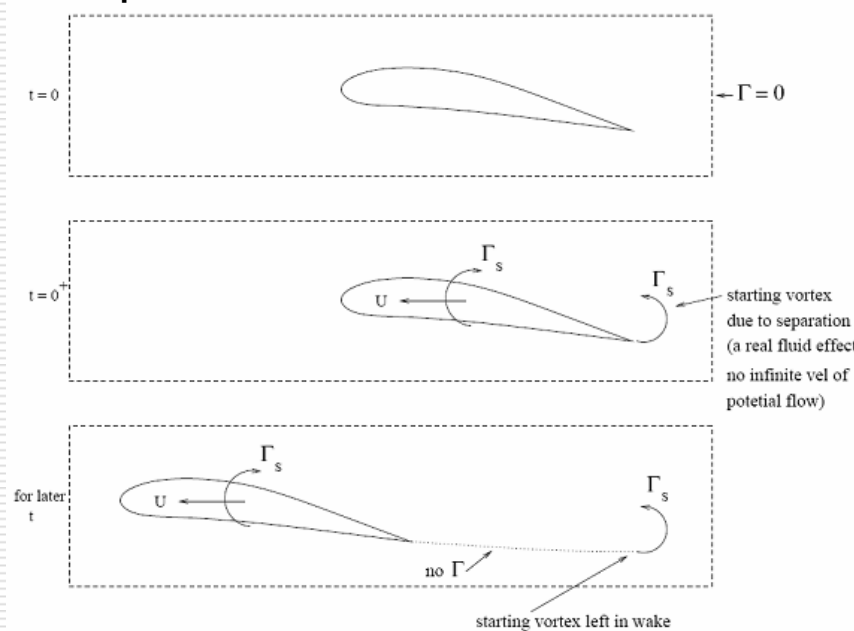


Modelo de Wagner I

- ❑ O efeito da esteira pode ser significativo, ponto de reduzir a magnitude das forças atuantes no aerofólio;
- ❑ Esta alteração causada pela esteira de vórtices podem mudar significativamente as características aeroelásticas de um sistema;
- ❑ Vórtice de partida – é o modelo aerodinâmico não estacionário mais simples;
- ❑ Supõem-se que uma placa plana que idealiza um aerofólio é submetida a uma variação súbita (impulsiva) em ângulo de ataque, quando a mesma encontra-se sujeita a um escoamento previamente estabelecido;
- ❑ Esta variação súbita no carregamento aerodinâmico gera um vórtice de partida suficientemente forte, a ponto de reduzir em 50% o carregamento instantâneo no aerofólio.
- ❑ Após um curto espaço de tempo, o seu efeito deixa de ser significativo uma vez que ele é **convectado** ao longo da esteira e seu potencial torna-se desprezível para o aerofólio.

Vórtice de partida

O conceito de vórtice de partida vem da aerodinâmica estacionária. Ele surge no início do movimento do aerofólio no sentido da direção de vôo. De forma análoga, quando o escoamento já está estabelecido ao variarmos o ângulo de ataque subitamente aparecerá um vórtice de partida.

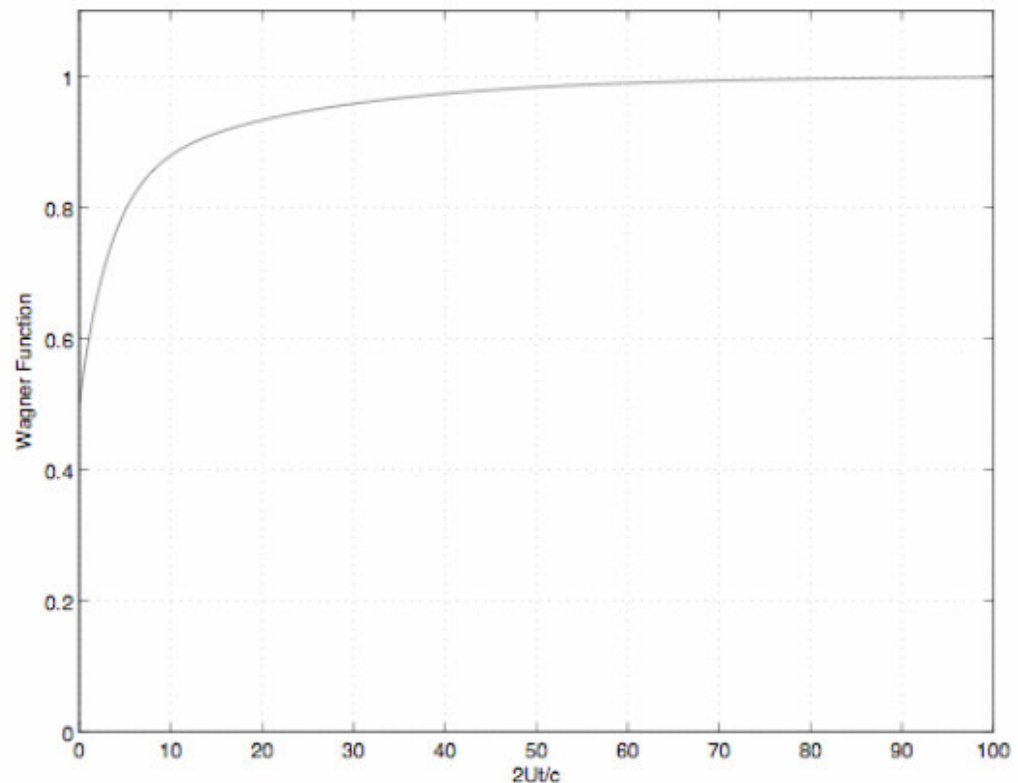


Modelo de Wagner II

- ❑ O efeito do vórtice de partida na sustentação de um aerofólio em escoamento estabelecido é modelado pela função de Wagner;
- ❑ Esta função indica que o carregamento aerodinâmico no início do movimento é metade do carregamento aerodinâmico e regime permanente;
- ❑ Este carregamento instantâneo cresce suavemente até alcançar o valor de regime permanente para o ângulo de ataque associado à entrada impulsiva.

Resposta indicial

- ❑ Função de Wagner:
- ❑ Resposta a uma variação súbita em ângulo de ataque do aerofólio.
- ❑ A função de Wagner é igual a 0,5 quando $t=0$ e cresce assintoticamente para 1.0.
- ❑ Esta resposta é também conhecida como resposta indicial do sistema.



Sustentação

- ❑ (ref. BAH e I.E.Garrick)
- ❑ A Função de Wagner $\phi(s)$ fornece o histórico de variação no tempo da sustentação, dada uma entrada degrau em ângulo de ataque do aerofólio;
- ❑ Ela é normalmente representada em função do tempo adimensionalizado por: $s = V_0 t / b$
- ❑ Este tempo adimensional ou (tempo reduzido) pode ser entendido como uma distância em semi cordas.
- ❑ Sustentação: $L_c(s) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha} \alpha \cdot 2b \cdot \phi(s)$

Generalização do Movimento

- A função de Wagner é a admitância indicial para o escoamento circulatório associado a uma variação tipo degrau no downwash a $\frac{3}{4}$ da corda - Vamos entender esta definição por partes:
 - Ao se aplicar uma entrada degrau a um sistema dinâmico, a resposta do sistema quando o mesmo é linear, é conhecida como a admitância indicial – $A(t)$.
 - Ou seja, a forma da função $A(t)$ depende do sistema linear considerado; e a resposta do sistema uma força arbitrária $f(t)$ pode ser obtida uma vez que se conheça esta função.

Admitância Indicial

- A resposta no tempo a uma entrada degrau na força $\Delta f(t)$ aplicada em um instante de tempo $t+\Delta t$ é:

$$\Delta x(t, \tau + \Delta \tau) = \Delta f(\tau + \Delta \tau) A(t - \tau + \Delta \tau)$$

- Somando para todo o intervalo temporal, chega-se a integral de Duhamel:

$$x(t) \cong f(0) A(t) + \sum_{\tau=0}^{t-\Delta \tau} \Delta x(t, \tau + \Delta \tau)$$

$$x(t) = f(0) A(t) + \sum_{\tau=0}^{t-\Delta \tau} \frac{\Delta f(\tau + \Delta \tau)}{\Delta \tau} A(t - (\tau + \Delta \tau)) \Delta \tau$$

$$\Delta \tau \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) = f(0) A(t) + \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} A(t - \tau) d\tau$$

Integral de Duhamel

- Que pode ser reescrita na forma:

$$x(t) = f(0)A(t) + \int_0^t f(\tau) \frac{dA(t-\tau)}{d\tau} d\tau$$

- Chegou-se na forma acima após um rearranjo resolvendo a integral por partes.
- Note que se $A(t)$ é um degrau, a sua derivada no tempo será a função impulso, e $f(t)$ é o termo forçante, que na realidade é a entrada do sistema dinâmico (no nosso caso será o downwash).
- Note que a equação acima é uma integral de convolução, e por este motivo será conveniente aplicar uma transformada de Laplace para posteriormente chegar a uma representação no tempo.

A Função de Wagner I

- E como é a função de Wagner?
- Em 1925, Wagner derivou uma função que modela a resposta do carregamento de natureza circulatória a uma variação súbita em ângulo de ataque, supondo escoamento incompressível, e função do tempo reduzido dado por:

$$\phi(s) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma s}}{\sigma^2 \left[(K_0 - K_1)^2 + \pi^2 (I_0 - I_1)^2 \right]} d\sigma$$

$$s = V_0 t / b$$

A Função de Wagner II

- ❑ É uma função que não possui uma transformada de Laplace;
- ❑ É função do tempo, ou ainda um tempo reduzido, grandeza muito comum em aerodinâmica não estacionária que representa a distância percorrida pelo aerofólio penetrando no escoamento, em termos de semi-cordas;
- ❑ Generalização para movimento arbitrários: A aplicação da função de Wagner a uma simulação de um movimento arbitrário no domínio do tempo pode ser compreendida como uma sucessão de variações tipo degrau em ângulo de ataque e sua derivada no tempo.
- ❑ A aplicação da integral de Duhamel permitirá o cálculo do carregamento aerodinâmico, para um dado movimento arbitrário conhecido.

Movimento Arbitrário

- Portanto, vamos nos basear na generalização do movimento fazendo uso da expressão que representa o downwash a $\frac{3}{4}$ da corda:

$$w(t) = \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] = Q(t)$$

$$w(s) = \left[\frac{V_0}{b} \frac{dh}{ds} + V_0 \alpha(s) + \left(\frac{1}{2} - a \right) V_0 \frac{d\alpha}{ds} \right] = Q(s)$$

que será integrada no sentido de Duhamel fornecendo a sustentação correspondente representada por:

$$l = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - b a \ddot{\alpha} \right] + 2 \pi \rho V_0 b \left[Q(0) \phi(s) + \int_0^s \frac{dQ}{d\sigma} \phi(s - \sigma) d\sigma \right]$$

Aproximação de Jones

- Porém para que a função de Wagner seja Laplace-transformável, R.T.Jones (NACA Rept 681) apresentou uma aproximação para esta função:

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.355e^{-0.3s}$$

lembrando que s é o tempo reduzido dado por:

$$s = V_0 t / b$$

- Esta função permite agora a aplicação da transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

- A transformada de Laplace de

$$l = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho b V_0 \left[Q(s) \phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds} Q(\sigma) d\sigma \right]$$

é:

$$\phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$s = V_0 t / b$$

$$\bar{s} = \tilde{s} b / V_0 \Rightarrow \text{Variável de Laplace adimens.}$$

$$l(\tilde{s}) = 2\pi \rho b V_0 \left[\frac{1}{2} + L \left(\frac{d\phi(s)}{ds} \right) \right] Q(\tilde{s})$$

$$l(\tilde{s}) = 2\pi \rho b V_0 \left[\frac{1}{2} + \tilde{s} \phi(\tilde{s}) - \phi(0) \right] Q(\tilde{s}) = 2\pi \rho b V_0 \tilde{s} \phi(\tilde{s}) Q(\tilde{s})$$

Função de transferência aerodinâmica

- Lembrando que a aproximação de Jones dada por:

$$\phi(\tilde{s}) \cong \frac{1}{\tilde{s}} - \frac{0.165}{\tilde{s} + 0.0455} - \frac{0.355}{\tilde{s} + 0.3}$$

- Tem-se a função de transferência relacionando a entrada Q (downwash) com a saída l (carregamento):

$$\frac{l(\tilde{s})}{Q(\tilde{s})} = 2\pi\rho b V_0 \left[\frac{0.5\bar{s}^2 + 0.2808\bar{s} + 0.01365}{\bar{s}^2 + 0.3455\bar{s} + 0.01365} \right]$$

- Note que é semelhante ao que temos da teoria de sistemas dinâmicos, é a função de transferência só que de natureza aerodinâmica!

Domínio do tempo

- Resposta aerodinâmica no espaço de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = Q(t) - 0.3455 \left(\frac{V_0}{b} \right) x_2 - 0.01365 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 x_1$$

$$l(t) = 2\pi\rho b V_0 \left[0.5Q(t) + 0.10805 \left(\frac{V_0}{b} \right) x_2 - 0.006825 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 x_1 \right]$$

onde pode-se observar “estados aumentados”.

- Quando tratarmos de aproximações por funções racionais revisitaremos este assunto bem como veremos como aparecem os estados aumentados.