



# AE-249 - AEROELASTICIDADE

---

## **Aeroelasticidade no Espaço de Estados**

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA**

# Aproximação Aerodinâmica por Funções Racionais

---

- ❑ Podemos observar que a aproximação de Jones para a função de Wagner permitiu obter uma função de transferência aerodinâmica, válida para movimentos quaisquer.
  - ❑ A idéia agora é empregar polinômios de Padé (NASA-CR-2779 "Finite State Modeling of Aeroelastic Systems", de Ranjan Vepa), os quais são funções racionais, em variáveis complexas (variável de Laplace " $s$ "), de forma que a sua transformação inversa para o domínio do tempo permite reconstruir um sistema aeroelástico no espaço de estados, ou seja domínio do tempo.
  - ❑ Esta forma de representar o nosso modelo aeroelástico no Espaço de Estados é extremamente adequada para se estudar a resposta aerodinâmica a entradas quaisquer, bem como integrar modelos matemáticos que representam sistemas de controle.
-

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Esta forma racional de representar a aerodinâmica não é estranha para nós, pois R.T. Jones representou a função de Wagner por uma função exponencial no tempo cuja transformada de Laplace é uma função racional.
- E note que, como verificamos, uma vez que a função de Theodorsen pode ser generalizada, e é relacionada à Função de Wagner por:

$$C(\bar{s}) = \bar{s} \phi(\bar{s})$$

- Portanto, podemos também representar as equações de Theodorsen generalizadas no espaço de estados.
-

# Exemplo para a Seção Típica

---

□ Sendo :

$$C(\bar{s}) = \bar{s} \phi(\bar{s}) = \frac{0.5\bar{s}^2 + 0.2808\bar{s} + 0.01365}{\bar{s}^2 + 0.3455\bar{s} + 0.01365}$$

□ O carregamento aerodinâmico generalizado é dado por:

$$\begin{aligned} \{P(s)\} &= \rho b^4 [M_{nc}] s^2 \{x(s)\} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) [B_{nc}] s \{x(s)\} \\ &+ \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) C(\bar{s}) \left\{ s [B_c] + \left(\frac{V_0}{b}\right) [K_c] \right\} \{x(s)\} = \end{aligned}$$

---

# Exemplo para a Seção Típica

---

- Como vimos antes, a transformada inversa de Laplace do sistema de equações resultará em estados adicionais, nomeados como estados de atraso ( $x_p$ ), a partir do momento que se resolve transformada inversa em vermelho:

$$\begin{aligned}\{P(t)\} &= \rho b^4 [M_{nc}] \{\ddot{x}(t)\} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) [B_{nc}] \{\dot{x}(s)\} \\ &+ \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) \textcolor{red}{L^{-1}} \left\{ \textcolor{red}{C}(\bar{s}) \left\{ s \textcolor{red}{[B_c]} + \left(\frac{V_0}{b}\right) \textcolor{red}{[K_c]} \right\} \textcolor{red}{\{x(s)\}} \right\}\end{aligned}$$

- E o resultado final deverá ser uma sistema na forma:

$$\{\dot{x}_p(t)\} = [F_p] \{x_p(t)\} + [E_1] \{x(t)\} + [E_2] \{\dot{x}(t)\}$$

---

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Quanto estudamos o problema de Theodorsen, escrevemos as equações de forma que a formulação só dependesse da frequência, uma vez que o nosso operador aerodinâmico representado pela matriz "A" é função da frequência reduzida.

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} = \{\bar{P}\} = \pi \rho b^4 \omega^2 [A(k)] \{\bar{x}\}$$

$$m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$


---

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Esta idéia foi inicialmente fundamentada do problema de solução de flutter, através da solução do problema de autovalor associado ao sistema de equações aeroelásticas.
- Entretanto os movimentos são restrito ao do tipo harmônico simples

$$\{\bar{P}\} = \pi \rho b^2 V_0^2 \underbrace{k^2 [A(k)]}_{\bar{A}(k)} \{\bar{x}\}$$

- E para generalizarmos os movimento, podemos reescrever:

$$\{P(s)\} = \pi \rho b^2 V_0^2 \left[ \bar{A}\left(\frac{sb}{V_0}\right) \right] \{x(s)\} = \pi \rho b^2 V_0^2 [\bar{A}(\bar{s})] \{x(s)\}$$

---

# Aproximação por Funções Racionais

---

- O problema é que a matriz de coeficientes de influência  $[A(k)]$  é definida somente sob a luz da hipótese que as condições de contorno movem-se segundo movimento harmônico simples.
- Para que a matriz  $[A(k)]$  seja Laplace-transformável (inversão), devemos aproximar os coeficientes generalizados por polinômios de Padé:

$$[\bar{A}_{ap}(\bar{s})] = [\bar{A}_0] + [\bar{A}_1]s\left(\frac{b}{V_0}\right) + [\bar{A}_2]s^2\left(\frac{b}{V_0}\right)^2 + \sum_{n=1}^{nlag} \frac{s[\bar{A}_{n+2}]}{s + \left(\frac{V_o}{b}\right)\beta_{n+2}}$$

- É uma função contínua representando a aerodinâmica não estacionária, pode-se transformar para o domínio do tempo.
- Note que :  $sb/V_0 = ik = \bar{s}$

sendo "s" a variável complexa de Laplace.

---



# Aproximação por Funções Racionais

---

- ❑ Observe que o polinômio de Padé é de segundo grau, ou seja, implicitamente os termos de massa, amortecimento e rigidez aerodinâmicas são bem representados por esta função.
  - ❑ E ainda mais, o atraso aerodinâmico é representado pela série de termos de atraso
  - ❑ E esta representação é válida para movimentos quaisquer.
  - ❑ O único problema é que a inversão por Laplace do domínio da frequência para o tempo também implicará no surgimento de estados adicionais, associados a inversão da série de termos de atraso.
-

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Substituindo a forma aproximada na expressão para o carregamento generalizado:

$$\{P(s)\} = \pi \rho b^2 V_0^2 \left[ [\bar{A}_0] + [\bar{A}_1] s \left( \frac{b}{V_0} \right) + [\bar{A}_2] s^2 \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + \sum_{n=1}^{nlag} \frac{s [\bar{A}_{n+2}]}{s + \left( \frac{V_0}{b} \right) \beta_{n+2}} \right] \{x(s)\}$$

- Podemos obter o carregamento no domínio do tempo:

$$\{P(t)\} = \pi \rho b^2 V_0^2 \left[ [\bar{A}_0] \{x(t)\} + [\bar{A}_1] \{\dot{x}(t)\} \left( \frac{b}{V_0} \right) + [\bar{A}_2] \{\ddot{x}(t)\} \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + \sum_{n=1}^{nlag} [\bar{A}_{n+2}] \{x_A(t)\} \right]$$

---

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Onde os estados aumentados  $\{x_A(t)\}$  são oriundos do produto de convolução entre:

$$\frac{[\bar{A}_{n+2}]}{s + \left(\frac{V_o}{b}\right)\beta_{n+2}} s \{x(s)\}$$

- Neste ponto devemos observar que os estados aumentados estão associados à série de termos racionais que representam, na forma de funções de transferência um atraso temporal introduzido no sistema. Este novos estados são associados aos graus de liberdade da seção típica por:
-

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Aplicando finalmente a transformada inversa de Laplace temos:

$$L^{-1}\left[s\{x(s)\}\right] = \{\dot{x}(t)\}, \quad L^{-1}\left[\frac{[\bar{A}_{n+2}]}{s + \left(\frac{v_o}{b}\right)\beta_{n+2}}\right] = [\bar{A}_{n+2}]e^{-t\left(\frac{v_o}{b}\right)\beta_{n+2}}$$

- Chegando finalmente às relações entre os estados aumentados e os estado associados aos modos de movimento:

$$\{x_A^n(t)\} = \int_0^t \{\dot{x}(t)\} e^{-(t-\tau)\left(\frac{v_o}{b}\right)\beta_{n+2}} d\tau \Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\{\dot{x}_A^n(t)\} = \{\dot{x}(t)\} - \left(\frac{v_o}{b}\right)\beta_{n+2} \{x_A^n(t)\}$$

---

# Aproximação por Funções Racionais

---

- Retornando a nossa relação para o carregamento aerodinâmico

$$\{P(t)\} = \pi \rho b^2 V_0^2 \left[ [\bar{A}_0] \{x(t)\} + [\bar{A}_1] \{\dot{x}(t)\} \left( \frac{b}{V_0} \right) + [\bar{A}_2] \{\ddot{x}(t)\} \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + \sum_{n=1}^{nlag} [\bar{A}_{n+2}] \{x_A(t)\} \right]$$

$$\{\dot{x}_A^n(t)\} = \{\dot{x}(t)\} - \left( \frac{V_o}{b} \right) \beta_{n+2} \{x_A^n(t)\}$$

o qual pode ser escrito na forma de um sistema no espaço de estados

---

# Método de Roger

---

- ❑ E como obtemos os coeficientes A ?
- ❑ Pode-se obter as matrizes A para um conjunto de frequências reduzidas.
- ❑ Pode-se portanto aplicar a aproximação de Roger, a qual não deixa de ser um ajuste através do método dos mínimos quadrados para obter os coeficientes do polinômio ajustado
- ❑ Este método dos mínimos quadrados é aplicado para aproximar cada elemento da matriz A individualmente, vejamos:

$$\left[ \bar{A}_{ap} (k) \right] = \left[ \bar{A}_0 \right] + \left[ \bar{A}_1 \right] ik - \left[ \bar{A}_2 \right] k^2 + \sum_{n=1}^{nlag} \frac{ik \left[ \bar{A}_{n+2} \right]}{ik + \beta_{n+2}}$$

# Método de Roger

---

- Pode-se escrever o polinômio em função de  $k$ . Vamos escrever a mesma equação considerando cada coeficiente escalar individualmente:

$$a_{ap}^{ij}(ik_m) = a_0^{ij} + a_1^{ij}ik_m - a_2^{ij}k_m^2 + \sum_{n=1}^{nlag} \frac{ik_m a_{n+2}^{ij}}{ik_m + \beta_{n+2}}$$

- Ou na forma vetorial:

$$a_{ap}^{ij}(ik_m) = [R(ik_m)] \{a^{ij}\}, \quad \{a^{ij}\} = \{a_0^{ij} \quad a_1^{ij} \quad \dots \quad a_{nlag+2}^{ij}\}$$

$$[R(ik_m)] = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & ik_m & -k_m^2 & \frac{ik_m}{ik_m + \beta_3} & \dots & \frac{ik_m}{ik_m + \beta_{nlag}} \end{array} \right\}$$

---

# Método de Roger

---

- Uma forma para representar o erro entre os valores :

tabelados  $\{a_t^{ij}(ik_m)\}$   
e os valores aproximados  $\{a_{ap}^{ij}(ik_m)\}$

é dada pela somatória das diferenças entre o tabelado e o aproximado para os "m" valores de frequências reduzidas.

$$\mathcal{E}(i, j) = \sum_{m=1}^{m_k} \left| a_{ap}^{ij}(ik_m) - a_t^{ij}(ik_m) \right|^2$$

- Tratando de números complexos, pode-se escrever:

$$\mathcal{E}(i, j) = \sum_{m=1}^{m_k} \left| a_{ap}^{ij}(ik_m) - a_t^{ij}(ik_m) \right| \left| \bar{a}_{ap}^{ij}(ik_m) - \bar{a}_t^{ij}(ik_m) \right|$$

---



# Método de Roger

---

- Da condição de minimização do erro entre os valores aproximados e tabelados dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon(i, j)}{\partial a_n^{ij}} = 0$$

com  $n = 0, 1, \dots, n_{lag} + 2$

- O passo seguinte é derivar parcialmente a função erro atendendo a condição de mínimo:
-

# Método de Roger

---

$$\frac{\partial \varepsilon(i, j)}{\partial (a_n^{(i, j)})} = \{p_n\}^T \left( \left\{ \overline{a_{ap}^{(i, j)}} \right\} - \left\{ \overline{a_t^{(i, j)}} \right\} \right) + \{\bar{p}_n\}^T \left( \left\{ a_{ap}^{(i, j)} \right\} - \left\{ a_t^{(i, j)} \right\} \right) = 0$$

ou

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon_{i, j}}{\partial (a_n^{(i, j)})} \right\}_n = [F]^T \left( \left\{ \overline{a_{ap}^{(i, j)}} \right\} - \left\{ \overline{a_t^{(i, j)}} \right\} \right) + [\bar{F}]^T \left( \left\{ a_{ap}^{(i, j)} \right\} - \left\{ a_t^{(i, j)} \right\} \right) = 0$$

chegando-se a:

$$[F]^T \left( \left\{ \overline{a_{ap}^{(i, j)}} \right\} - \left\{ \overline{a_t^{(i, j)}} \right\} \right) + [\bar{F}]^T \left( \left\{ a_{ap}^{(i, j)} \right\} - \left\{ a_t^{(i, j)} \right\} \right) = \{0\} \ .$$

---

# Método de Roger

- A forma final para a determinação dos coeficientes  $a_n^{ij}$  é dada por:

$$\{a^{ij}\} = \left( [F]^T [\bar{F}] + [\bar{F}]^T [F] \right)^{-1} \left( [\bar{F}]^T \{ \bar{A}_T^{ij} \} + [F]^T \{ \bar{A}_T^{ij} \} \right)$$
$$[F] = \begin{Bmatrix} [R(ik_1)] \\ [R(ik_2)] \\ \vdots \\ [R(ik_{mk})] \end{Bmatrix}, \quad \{A_T^{ij}\} = \begin{Bmatrix} a_t(ik_1) \\ a_t(ik_2) \\ \vdots \\ a_t(ik_{mk}) \end{Bmatrix}$$

onde,  $k_1 \dots k_{mk}$  são as frequências reduzidas usadas para gerar  $a_t$ .

Com os coeficientes  $a^{ij}$  calculados, constrói-se a matriz  $A_{ap}$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- Exemplo de uma seção típica: Equações de movimento -

$$\begin{bmatrix} m & mx_\alpha \\ mx_\alpha & mr_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Fazendo:  $\left. \begin{aligned} \bar{x}_\alpha &= \frac{x_\alpha}{b} \\ \bar{r}_\alpha &= \frac{r_\alpha}{b} \\ \omega_\alpha^2 &= \frac{K_\alpha}{I_\alpha} \\ \omega_h^2 &= \frac{K_h}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\alpha \\ \bar{x}_\alpha & \bar{r}_\alpha^2 \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 \bar{r}_\alpha^2 \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- Ou seja, escrevendo no espaço de estados:

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = \{0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{\xi_1\} = \{\dot{x}\} \\ \{\xi_2\} = \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \{\dot{\xi}_1\} = -[\bar{K}][\bar{M}]^{-1}\{\xi_2\} \\ \{\dot{\xi}_2\} = \{\xi_1\} \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\dot{\xi}_1\} \\ \{\dot{\xi}_2\} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & [\bar{K}][\bar{M}]^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{\xi_1\} \\ \{\xi_2\} \end{array} \right\}$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} h \\ \frac{h}{b} \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- Introduzindo a parcela aerodinâmica:

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = \{P(t)\}$$

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = \underbrace{\pi \rho b^2 V_0^2}_{\mu} \left[ [\bar{A}_0]\{x\} + [\bar{A}_1]\{\dot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right) + [\bar{A}_2]\{\ddot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + \sum_{n=1}^{nlag} [\bar{A}_{n+2}]\{x_a^{n+2}\} \right]$$

$$\underbrace{\left[ [\bar{M}] - \mu [\bar{A}_2] \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 \right]}_{\tilde{M}} \{\ddot{x}\} + \underbrace{\left[ -\mu [\bar{A}_1] \left( \frac{b}{V_0} \right) \right]}_{\tilde{B}} \{\dot{x}\} + \underbrace{\left[ [\bar{K}] - \mu [\bar{A}_0] \right]}_{\tilde{K}} \{x\} - \underbrace{\left[ \sum_{n=1}^{nlag} \mu [\bar{A}_{n+2}] \right]}_{\sum_{n=1}^{nlag} \tilde{A}_{n+2}} \{x_a^{n+2}\} = 0$$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

□ O sistema de equações fica:

$$\dot{\xi}_1 = \tilde{M}^{-1} \tilde{B} \cdot \xi_1 + \tilde{M}^{-1} \tilde{K} \cdot \xi_2 - \sum_{n=1}^{nlag} \tilde{M}^{-1} \tilde{A}_{n+2} \cdot \xi_n$$

$$\dot{\xi}_2 = I \cdot \xi_1$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_1 - \left( \frac{V_0}{b} \right) \beta_3 I \cdot \xi_3$$

⋮

$$\dot{\xi}_{nlag} = \xi_1 - \left( \frac{V_0}{b} \right) \beta_{nlag} I \cdot \xi_{nlag}$$

$$\xi_1 = \dot{x}$$

$$\dot{\xi}_1 = \ddot{x}$$

$$\xi_2 = x$$

$$\dot{\xi}_2 = \dot{x}$$

$$\xi_3 = x_a^3$$

$$\dot{\xi}_3 = \dot{x}_a^3$$

⋮

$$\xi_{nlag} = x_a^{nlag}$$

$$\dot{\xi}_{nlag} = \dot{x}_a^{nlag}$$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- E na forma matricial tem-se o sistema aeroelástico no espaço de estados:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{nlag} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}^{-1}\tilde{B} & \tilde{M}^{-1}\tilde{K} & \tilde{M}^{-1}\bar{A}_3 & \cdots & \tilde{M}^{-1}\bar{A}_{nlag} \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\beta_3 I & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ I & 0 & & & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\beta_{nlag} I \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{nlag} \end{Bmatrix}$$



# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

---

- Ou seja, a representação no espaço de estado possui a forma:

$$\{\dot{\xi}\} = [\mathcal{A}]\{\xi\}$$

- Com as matrizes que compõem  $\mathcal{A}$  definidas como:

$$\tilde{M} = \bar{M} - \mu \bar{A}_2 \left( \frac{b}{V_0} \right)^2$$

$$\tilde{B} = -\mu \bar{A}_1 \left( \frac{b}{V_0} \right)$$

$$\tilde{K} = \bar{K} - \mu \bar{A}_0$$

$$\tilde{A}_{n+2} = \mu \bar{A}_{n+2}$$

---

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

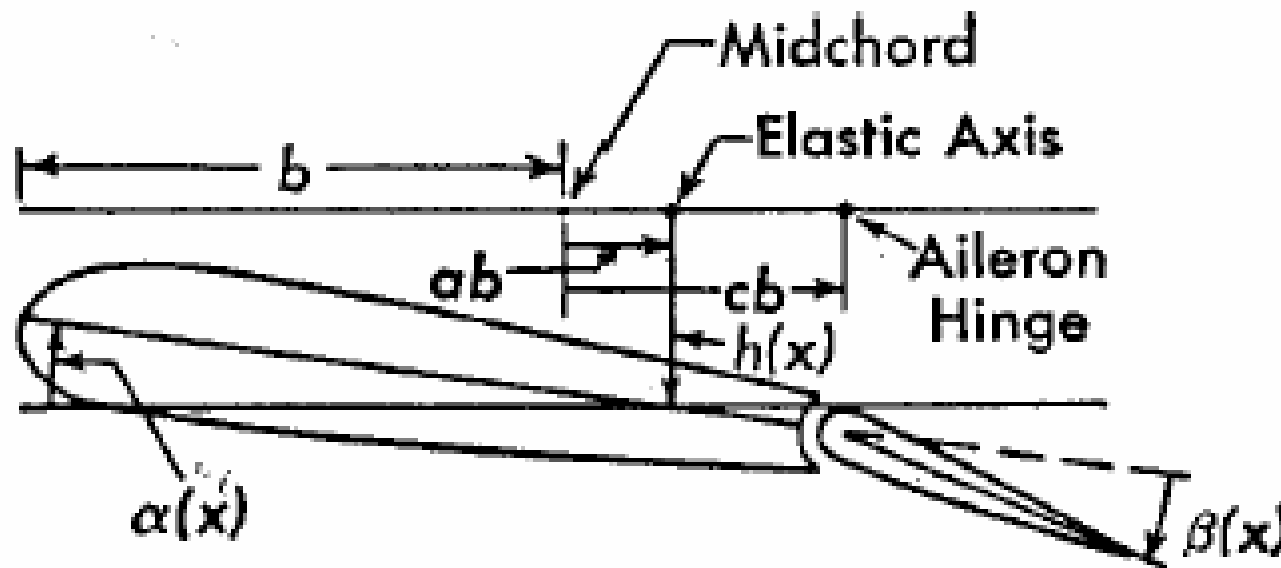
---

- Com o problema aeroelástico agora escrito no espaço de estados, pode-se estudar a estabilidade deste sistema através da solução do problema de autovalores associado à matriz
  - Esta matriz representa a "planta" aeroelástica, em linguagem de sistemas de controle e pode-se notar que é função da velocidade e densidade do escoamento não perturbado.
  - Portanto, pode-se plotar o "Lugar das Raízes" tendo como parâmetro a variar a velocidade ou a densidade.
  - Lembre-se que agora esta solução representa o cálculo de frequências e amortecimentos quaisquer, portanto se desejar plotar um gráfico no formato v-g-f basta extrair as frequências e os amortecimento associados aos autovalores.
-

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- Seção Típica com três graus de liberdade:



# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

---

□ Equações do movimento:

$$\begin{bmatrix} m & mx_\alpha & mx_\beta \\ mx_\alpha & mr_\alpha^2 & mr_\alpha^2 + mx_\beta(bc - ba) \\ mx_\beta & mr_\alpha^2 + mx_\beta(bc - ba) & mr_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

□ Adimensionalizando:

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\alpha & \bar{x}_\beta \\ \bar{x}_\alpha & m\bar{r}_\alpha^2 & \bar{r}_\alpha^2 + \bar{x}_\beta(c - a) \\ \bar{x}_\beta & \bar{r}_\alpha^2 + \bar{x}_\beta(c - a) & \bar{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\ddot{h}}{\bar{b}} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 \bar{r}_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\beta^2 \bar{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h}{\bar{b}} \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$


---

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

- As equações de Theodorsen para o caso do aerofólio com três graus de liberdade são modificadas com a inclusão da superfície de controle.

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = 2b^2 q_D \left\{ [M_{nc}]\{\ddot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + ([B_{nc}] + C(k)\{R\}[S_2])\{\dot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right) + C(k)([K_c] + \{R\}[S_1])\{x\} \right\}$$

$$q_D = \frac{1}{2} \rho V_0^2$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{T_{10}}{\pi} \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & (0.5 - a) & \frac{T_{11}}{2\pi} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{Bmatrix} -2\pi \\ 2\pi(a + 0.5) \\ -T_{12} \end{Bmatrix}$$

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix}$$

$$B_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & -T_4 \\ 0 & \pi \left( a - \frac{1}{2} \right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & \frac{-T_{19}}{\pi} \end{bmatrix}$$

$$K_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & \frac{-T_{18}}{\pi} \end{bmatrix}$$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

---

- Entretanto o nosso modelo permite que o sistema aeroelástico seja controlado através do aileron:

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = 2b^2 q_D \left\{ [M_{nc}]\{\ddot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right)^2 + ([B_{nc}] + C(k)\{R\}[S_2])\{\dot{x}\} \left( \frac{b}{V_0} \right) + C(k)([K_c] + \{R\}[S_1])\{x\} \right\} + [B_A]\{\delta\}$$

- Para se obter o sistema aeroelástico no espaço de estados, devemos também reescrever a equação acima no domínio da frequência sob a hipótese de movimento harmônico simples.
- Repete-se os mesmos passos empregados, incluindo a aproximação por funções racionais, e a aplicação da transformada inversa de Laplace para se em uma nova forma para o sistema:

$$\{\dot{\xi}\} = [\mathcal{A}]\{\xi\} + [B]\{u\}$$


---

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

□ Entretanto o nosso modelo permite que o sistema aeroelástico

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{nlag} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}^{-1}\tilde{B} & \tilde{M}^{-1}\tilde{K} & \tilde{M}^{-1}\bar{A}_3 & \cdots & \tilde{M}^{-1}\bar{A}_{nlag} \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\beta_3 I & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ I & 0 & & -\left(\frac{V_0}{b}\right)\beta_{nlag} I & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{nlag} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{M}^{-1}B_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \{\delta\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde:  $\{\delta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_c \end{Bmatrix}$        $\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{\delta\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$        $[B_A] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta^2 \bar{r}_\beta^2 \end{bmatrix}$

# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

---

- A matriz  $[B_a]$  representa a rigidez associada ao grau de liberdade associado ao controle da seção típica  $\beta_c$  o qual representa a rotação do aileron. Note que  $\delta$  é um vetor de estados associado ao controle.
- Pode-se estudar resposta aeroelástica dada uma entrada em  $\beta_c$ , ou seja, atuando a superfície de controle e por exemplo, e estudar a resposta temporal do sistema aeroelástico a esta entrada.
- Da mesma forma, pode-se integrar um sistema de controle realimentado com idêia de controlar a instabilidade do sistema - controle ativo de flutter:

$$\{\dot{\xi}\} = [A]\{\xi\} + [B]\{u\}$$

$$\{y\} = [C]\{\xi\}$$

---



# Modelo Aeroelástico

## Espaço de Estados

---

- Uma alternativa para se representar um modelo aeroelástico é através de uma forma simplificada pressupondo que a aerodinâmica pode ser obtida de um método de marcha no tempo, tal como um método aerodinâmico computacional

$$\{\dot{\xi}\} = [\mathcal{A}]\{\xi\} + [B]\{u\}$$

$$\{y\} = [C]\{\xi\}$$

onde:

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} 0 & [\bar{K}][\bar{M}]^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \{\xi\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}$$
$$[B] = \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} L(t)^{CFD} \\ M(t)^{CFD} \end{Bmatrix}$$

---

# Exemplo:

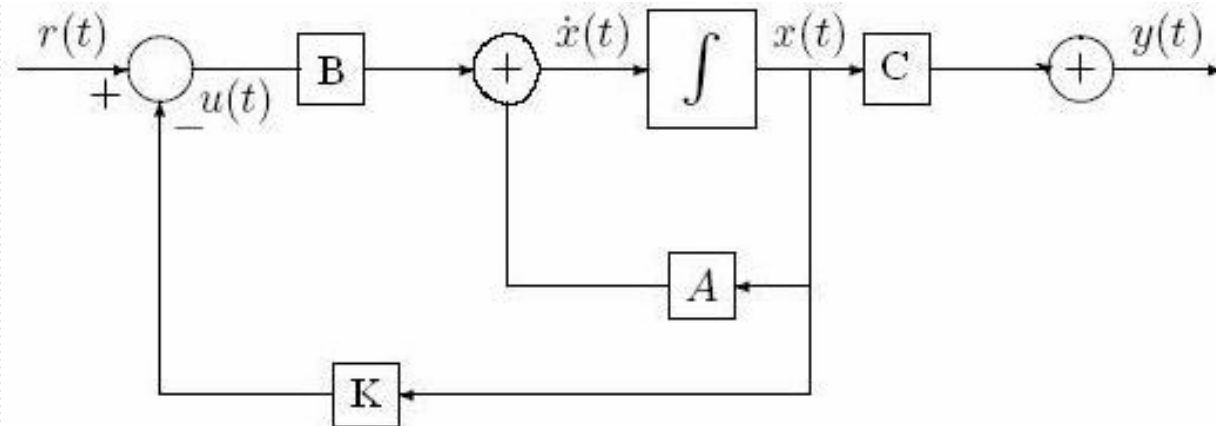
## Controle Ativo de Flutter

---

- Pode-se notar que o nosso sistema aeroelástico no espaço de estados pressupondo que ele seja realimentado. pode ser representado de forma geral como:

$$\begin{aligned}\dot{\{x\}} &= [\mathcal{A}]\{x\} + [\mathcal{B}]\{u\} \\ \{y\} &= [\mathcal{C}]\{x\}\end{aligned}\qquad \{u\} = [\mathcal{K}]\{x\}$$

E como um diagrama de blocos:



# Exemplo:

## Controle Ativo de Flutter

---

- "r(t)" representa uma referência , por exemplo  $\beta_c=0$ .
- Este tipo de realimentação :

$$\{u\} = [K]\{x\}$$

- É conhecida como "realimentação de estados", e pode-se empregar técnicas de controle para obter a matriz de realimentação K.
  - Desta forma fica claro como é conveniente a representação do sistema aeroelástico no espaço de estados, pois permite a inclusão do sistema de equações que representa um controlador ( [K] ) usualmente definido como função dos estados do sistema.
-

# Exemplo: Resposta Aeroelástica

---

- O estudo da resposta aeroelástica também pode ser feito sob ótica de representarmos o sistema aeroelástico no espaço de estados, onde agora o vetor de entrada pode ser velocidades associadas a perturbações atmosféricas como rajadas.

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{w_g\}$$

- E para o estudo da resposta aeroelástica usualmente emprega-se dois modelos de rajadas, o discreto e o contínuo.
  - O modelo contínuo é baseado na recomendação de se empregar uma função específica para a densidade espectral de potência associada a fonte excitadora, no caso turbulência atmosférica
-

# Exemplo: Rajada Discreta

- O estudo de comportamento da seção típica a rajadas discretas também pode ser feito empregando a formulação no espaço de estado.

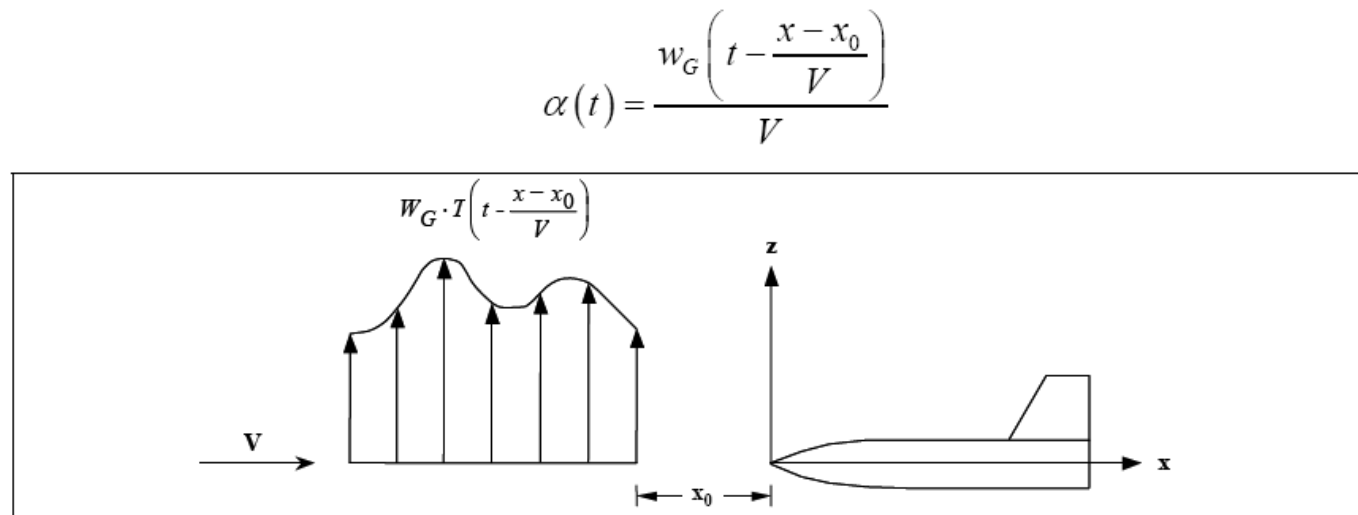


Figure 12.1: Traveling Excitation Caused by the Discrete Gust Profile

- Note que a rajada pode ser entendida como uma variação do ângulo de ataque percebido pelo aerofólio.

# Exemplo: Rajada Discreta

---

- Usualmente é estabelecida uma função conhecida, recomenda pelas normas, para se obter a resposta aeroelástica e por sua vez os esforços resultantes da estrutura da aeronave.
- Pode-se, por exemplo estudar a resposta aeroelástica da seção típica sujeita a uma rajada conhecida como "um menos cosseno" dada por:

$$w_g = \frac{1}{2} \bar{w}_g [1 - \cos(2\pi ft)]$$

$$f = \text{frequência (Hz)}$$

$$\bar{w}_g = \text{amplitude}$$

---

# Exemplo: Rajada Discreta

