Aula 5

02 Abril 2019

Resumo da aula passada

- Uso de funções de transferência (modelos ARX).
- Implementação em Matlab.
- Exemplo com planta instável em malha aberta (levitador magnético).

Tópicos da aula de hoje

- Uso de modelos no espaço de estados.
- Implementação em Matlab.
- Uso de observador de estados.
- Considerações sobre ação integral de controle

Modelos no espaço de estados: Tempo contínuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad \text{(Equação de Estado)} \\ \\ y(t) = Cx(t) \quad \text{(Equação de Saída)} \end{cases}$$

Para um sistema de ordem n com uma entrada e uma saída:

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R},\ y(t) \in \mathbb{R}$$

$$A_c \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B_c \in \mathbb{R}^{n \times 1},\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Modelos no espaço de estados: Exemplo

Modelo linearizado do levitador magnético:

$$\ddot{y} = \eta y - \beta u$$

Escolha de variáveis de estado: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = \eta y - \beta u = \eta x_1 - \beta u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \eta x_1 - \beta u$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} u$$

ou $\dot{x} = A_c x + B_c u$, sendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{bmatrix}, \; B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix}$$

Equação de estado: Discretização aproximada

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \tag{1}$$

Aproximação por uma diferença finita:

$$\dot{x}(t) \simeq \frac{1}{T}\left[x(t+T) - x(t)\right] \tag{2}$$

sendo T o tamanho do passo empregado.

Usando a aproximação (2) em (1), tem-se

$$\frac{1}{T}\left[x(t+T) - x(t)\right] = A_c x(t) + B_c u(t)$$

$$\Rightarrow x(t+T) = (I + A_c T)x(t) + B_c T u(t)$$

Relação aproximada obtida:

$$x(t+T) = (I + A_c T)x(t) + B_c T u(t)$$

Considerando que T seja um período de amostragem, e denotando $x(kT)$ e $u(kT)$ simplesmente por $x(k)$ e $u(k)$, chega-se a

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

em que

$$A_d = I + A_c T, \quad B_d = B_c T$$

Como a equação de saída é válida para todos os instantes de tempo t (em particular para $t = kT$), tem-se ainda

$$y(k) = Cx(k)$$

Equação de estado: Discretização exata

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

A solução da equação de estado partindo de uma condição inicial $x(t_0)$ é dada por

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_c(t-\tau)} B_c u(\tau) d\tau$$

Logo, fazendo $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$, tem-se

$$x((k+1)T) = e^{A_c T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c[(k+1)T-\tau]} B_c u(\tau) d\tau$$

$$x((k+1)T) = e^{A_c T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c[(k+1)T - \tau]} B_c u(\tau) d\tau$$

Se a entrada $u(t)$ for constante entre os instantes de amostragem, isto é,

$$u(\tau) = u(kT), \; \forall \tau \in [kT, (k+1)T)$$

pode-se escrever

$$x((k+1)T) = e^{A_c T} x(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c[(k+1)T - \tau]} B_c d\tau \right] u(kT)$$

Por fim, fazendo $(k+1)T - \tau = \xi$ chega-se a

$$x((k+1)T) = e^{A_c T} x(kT) + \left[\int_0^T e^{A_c \xi} B_c d\xi \right] u(kT)$$

ou, denotando $x(kT)$ e $u(kT)$ simplesmente por $x(k)$ e $u(k)$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

sendo

$$A = e^{A_c T}, \quad B = \int_0^T e^{A_c \xi} B_c d\xi$$

Discretização aproximada *vs* Discretização exata

$$A = e^{A_c T} = I + A_c T + \frac{1}{2!}(A_c T)^2 + \frac{1}{3!}(A_c T)^3 + \cdots \overset{T \text{ pequeno}}{\simeq} \underbrace{I + A_c T}_{A_d}$$

$$B = \int_0^T e^{A_c \xi} B_c d\xi \overset{T \text{ pequeno}}{\simeq} e^{A_c \xi} B_c \Big|_{\xi=0} T = \underbrace{B_c T}_{B_d}$$

Observação: Atraso de transporte

Atrasos de transporte podem ser incluídos no modelo através do uso de variáveis de estado adicionais.

Por exemplo, seja um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d), \quad y(k) = Cx(k)$$

sendo $d \in \mathbb{N}$ o atraso de transporte (expresso em número de períodos de amostragem).

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d), \quad y(k) = Cx(k)$$

Um novo vetor de variáveis de estado $x_a \in \mathbb{R}^{n+d}$ pode ser definido como

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-d+1) \\ u(k-d) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-d)$$

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-d+1) \\ u(k-d) \end{bmatrix} \Rightarrow x_a(k+1) = \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k-d) \\ u(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-d+2) \\ u(k-d+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-d+1) \\ u(k-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Adicionalmente:

$$y(k) = Cx(k) = [C\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-d+1) \\ u(k-d) \end{bmatrix} = [C\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0]\, x_a(k)$$

$$x_a(k+1) = A_a x_a(k) + B_a u(k), \quad y(k) = C_a x_a(k)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n+d)\times(n+d)} \qquad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(n+d)\times 1}$$

$$C_a = [C\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0]_{1\times(n+d)}$$

$$A_a = \left[\begin{array}{c|ccccc} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \\ \hline 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0_n^T & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right]_{(n+d)\times(n+d)}$$

Os autovalores de A_a correspondem aos da matriz A e mais d autovalores na origem.

Modelo a ser empregado

Doravante, será adotado um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

com

$$x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R},\ y(k) \in \mathbb{R}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times 1},\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Predição um passo à frente

- Para o estado:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Empregando a notação de valores preditos:

$$\hat{x}(k+1|k) = Ax(k) + B\hat{u}(k|k)$$

supondo que o estado atual $x(k)$ seja conhecido.

- Para a saída:

$$y(k) = Cx(k)$$

Logo:

$$\hat{y}(k+1|k) = C\hat{x}(k+1|k) = CAx(k) + CB\hat{u}(k|k)$$

Predições para o estado até N passos à frente

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|k) &= Ax(k) + B\hat{u}(k|k) \\
\\
\hat{x}(k+2|k) &= A\hat{x}(k+1|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\
&= A[Ax(k) + B\hat{u}(k|k)] + B\hat{u}(k+1|k) \\
&= A^2x(k) + AB\hat{u}(k|k) + B\hat{u}(k+1|k) \\
\\
\hat{x}(k+3|k) &= A^3x(k) + A^2B\hat{u}(k|k) + AB\hat{u}(k+1|k) + B\hat{u}(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{x}(k+N|k) &= A^Nx(k) + A^{N-1}B\hat{u}(k|k) + A^{N-2}B\hat{u}(k+1|k) + \cdots \\
&\quad + AB\hat{u}(k+N-2|k) + B\hat{u}(k+N-1|k)
\end{aligned}
$$

Predições para a saída até N passos à frente

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &= CAx(k) + CB\hat{u}(k|k) \\
\hat{y}(k+2|k) &= CA^2x(k) + CAB\hat{u}(k|k) + CB\hat{u}(k+1|k) \\
\hat{y}(k+3|k) &= CA^3x(k) + CA^2B\hat{u}(k|k) + CAB\hat{u}(k+1|k) + CB\hat{u}(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{y}(k+N|k) &= CA^Nx(k) + CA^{N-1}B\hat{u}(k|k) + CA^{N-2}B\hat{u}(k+1|k) + \cdots \\
&\quad + CAB\hat{u}(k+N-2|k) + CB\hat{u}(k+N-1|k)
\end{aligned}
$$

Equação de predição

$$
\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \hat{y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}}^{H(N\times N)} \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}
$$

$$
+ \underbrace{\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{f_u}(N\times 1)} x(k) \Rightarrow \boxed{\hat{\mathbf{y}} = H\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f_u}}
$$

$$\hat{\mathbf{y}} = H\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f_u}$$

$$H = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$\mathbf{f_u} = \Phi_u\, x(k), \quad \Phi_u = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^N \end{bmatrix}_{N\times n}$$

Obs: Relação com a resposta a impulso

$$H = \begin{bmatrix} CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(1) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N) & h(N-1) & \cdots & h(1) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{h(i) = CA^{i-1}B}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, N$$

Pode-se mostrar que os termos $h(1), h(2), \cdots, h(N)$ correspondem à **resposta a impulso** do modelo a tempo discreto.

Com efeito, seja $x(0) = 0$ (sistema inicialmente em repouso) e

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

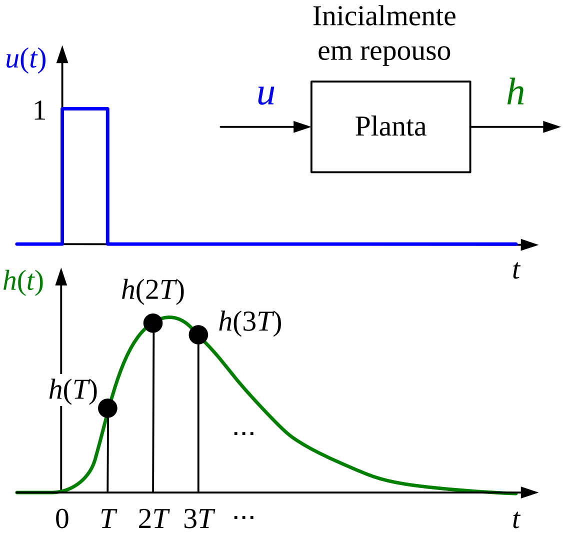
(**Delta de Kronecker**)

Tem-se, então:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = B \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = AB \\ &\vdots \\ x(i) &= A^{i-1}B \end{aligned}$$

Logo, $y(i) = CA^{i-1}B = h(i)$.

Ilustração (tempo contínuo)



Formulação em termos de Δu

Existem diferentes formas de se reformular a equação de predição em termos de Δu.

Uma possibilidade consiste em utilizar um vetor de estado $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ definido como:

$$\xi(k) = \left[\begin{array}{c} x(k) \\ u(k-1) \end{array} \right]$$

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Lembrando que

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \; , \quad u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$

pode-se escrever:

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \\ u(k-1) + \Delta u(k) \end{bmatrix}$$

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \\ u(k-1) + \Delta u(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

Quanto à equação de saída, tem-se:

$$y(k) = Cx(k) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Portanto, o novo modelo a ser empregado é da forma

$$\xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta u(k), \quad y(k) = \tilde{C}\xi(k)$$

sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0]$$

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{B} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k), \quad \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}$$

Obs: Caso $M < N$, basta suprimir as últimas $N - M$ colunas da matriz G.

Obs: Relação com a resposta a degrau

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(1) & 0 & \cdots & 0 \\ g(2) & g(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(N) & g(N-1) & \cdots & g(1) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{g(i) = \tilde{C}\tilde{A}^{i-1}\tilde{B}}\,,\ i = 1, 2, \ldots, N$$

Pode-se mostrar que os termos $g(1), g(2), \cdots, g(N)$ de fato correspondem à **resposta a degrau** do modelo a tempo discreto.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & AB + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^3 = \begin{bmatrix} A^2 & AB + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^3 & A^2B + AB + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$$

Por indução finita, pode-se mostrar que

$$\tilde{A}^i = \begin{bmatrix} A^i & A^{i-1}B + A^{i-2}B + \cdots + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^i = \begin{bmatrix} A^i & A^{i-1}B + A^{i-2}B + \cdots + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\tilde{C}\tilde{A}^{i-1}\tilde{B} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} A^{i-1} & A^{i-2}B + A^{i-3}B + \cdots + B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} CA^{i-1} & CA^{i-2}B + CA^{i-3}B + \cdots + CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= CA^{i-1}B + CA^{i-2}B + CA^{i-3}B + \cdots + CB$$

Por outro lado, seja $x(0) = 0$ (sistema inicialmente em repouso) e

$$u(k) = 1, \; k \geq 0$$

(**Degrau unitário**)

Tem-se, então:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = B \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = AB + B \\ &\vdots \\ x(i) &= A^{i-1}B + A^{i-2}B + \cdots + B \end{aligned}$$

Logo, $y(i) = CA^{i-1}B + CA^{i-2}B + \cdots + CB = g(i)$.

Obs: Relação entre as respostas a impulso e a degrau

$$h(i) = CA^{i-1}B, \;\; i \geq 1$$

$$g(i) = CA^{i-1}B + CA^{i-2}B + \cdots + CB, \;\; i \geq 1$$

Vale notar que

$$g(i) = h(i) + h(i-1) + \cdots + h(1)$$

MPC empregando modelo no espaço de estados: Resumo

Informação requerida sobre a planta:

- Matrizes A, B, C do modelo no espaço de estados

Parâmetros de projeto:

- Peso do controle ρ
- Horizonte de predição N
- Horizonte de controle M

Obs: Considera-se que a função de custo esteja na mesma forma empregada na formulação DMC, isto é:

$$J(\hat{\mathbf{y}}, \Delta\hat{\mathbf{u}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + \rho\Delta\hat{\mathbf{u}}^T\Delta\hat{\mathbf{u}}$$

com

$$\hat{\mathbf{y}} = G\Delta\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$$

Inicialização:

- Fazer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_n^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C \quad 0]$$

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}, \ \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}$$

- Calcular $K_{MPC} = [\, 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \,](G^T G + \rho I_M)^{-1} G^T$

- Fazer $k = 0, \ u(-1) = 0$

Rotina principal:

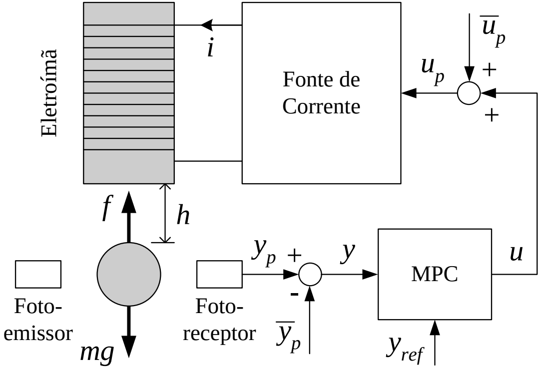
1. Ler $x(k)$ (estado da planta) e y_{ref} (valor de referência para a saída)
2. Fazer $\mathbf{r} = [y_{ref}]_N$
3. Fazer
$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$
4. Calcular $\mathbf{f} = \Phi\,\xi(k)$
5. Calcular o incremento no controle $\Delta u(k) = K_{MPC}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$
6. Atualizar o controle aplicado à planta: $u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$
7. Fazer $k = k + 1$
8. Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

Obs: Se $x(k)$ não for medido diretamente, pode-se usar um **observador de estados**.

Implementação em Matlab

- `matrizes_ss_du.m`: Monta as matrizes K_{MPC}, Φ.
- `mpc_ss_du.m`: S-function que implementa o controlador

Exemplo: Sistema de levitação magnética



Arquivos Matlab:

- `parametros_maglev_ss.m`: Define os parâmetros do levitador magnético
- `levitador_mpc_ss_du.mdl`: Diagrama de simulação

Uso de Observador de Estados

Modelo da planta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

Supõe-se que $y(k)$ seja medido.

Problema: Obter uma estimativa $x(k|k)$ para o estado $x(k)$.

Equações do Observador de Estados:

$$x(k|k) = x(k|k-1) + L'[y(k) - y(k|k-1)] \tag{3}$$

$$y(k|k-1) = Cx(k|k-1) \tag{4}$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k) \tag{5}$$

Pergunta: É possível escolher a matriz de ganhos $L' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de modo a ter $x(k|k) - x(k) \xrightarrow{k \to \infty} 0$?

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{6}$$

$$y(k) = Cx(k) \tag{7}$$

$$x(k|k) = x(k|k-1) + L'[y(k) - y(k|k-1)] \tag{8}$$

$$y(k|k-1) = Cx(k|k-1) \tag{9}$$

$$x(k+1|k) = Ax(k|k) + Bu(k) \tag{10}$$

Fazendo $k = k + 1$ em (8), tem-se

$$x(k+1|k+1) = x(k+1|k) + L'[y(k+1) - y(k+1|k)]$$

$$\overset{(7),(9),(10)}{=} Ax(k|k) + Bu(k) + L'C[x(k+1) - x(k+1|k)]$$

$$\overset{(6),(10)}{=} Ax(k|k) + Bu(k) + L'C[Ax(k) + Bu(k) - Ax(k|k) - Bu(k)]$$

$$x(k+1|k+1) = Ax(k|k) + Bu(k) + L'CA[x(k) - x(k|k)] \tag{11}$$

Seja $\tilde{x}(k|k) = x(k) - x(k|k)$ o erro de estimação de estado. Tem-se, então:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = x(k+1) - x(k+1|k+1)$$

$$\overset{(6),(11)}{=} Ax(k) + Bu(k) - Ax(k|k) - Bu(k) - L'CA[x(k) - x(k|k)]$$

$$= (A - L'CA)[x(k) - x(k|k)]$$

ou seja

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - L'CA)\tilde{x}(k|k)$$

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (A - L'CA)\tilde{x}(k|k)$$

Se os autovalores de $A - L'CA$ estiverem no interior do círculo unitário, então $\tilde{x}(k|k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pergunta: Como escolher L' de modo a alocar os autovalores de $A - L'CA$ em posições adequadas ?

Alocação dos autovalores de $A - L'CA$

Suponha inicialmente que A seja inversível, isto é, que não haja autovalores de A na origem (ausência de atraso de transporte). Pode-se então escrever:

$$A - L'CA = A^{-1}AA - A^{-1}\underbrace{AL'}_{L}CA = A^{-1}(A - LC)A$$

sendo $L = AL'$.

Vale notar que os autovalores de $A^{-1}(A - LC)A$ são os mesmos de $A - LC$. Com efeito:

$$\det[\lambda I - A^{-1}(A - LC)A] = \det A^{-1} \det[\lambda I - (A - LC)] \det A$$

e portanto $\det[\lambda I - A^{-1}(A - LC)A] = 0 \Leftrightarrow \det[\lambda I - (A - LC)] = 0$.

Basta, portanto, escolher L de modo a alocar os autovalores de $A - LC$ em posições convenientes e então fazer

$$L' = A^{-1}L$$

- Se o par (A, C) for observável, isto é, se a matriz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

  tiver posto igual a n, então os autovalores de $A - LC$ podem ser alocados em quaisquer posições do plano complexo mediante escolha de L.
- A alocação dos autovalores de $A - LC$ pode ser feita no Matlab empregando a função `place`.

- Se A tiver autovalores na origem, torna-se necessário re-escrever o modelo em uma forma apropriada para uso do observador. Por exemplo, se tais autovalores estiverem associados a um atraso de d períodos de amostragem na entrada do sistema, a equação de estado pode ser reformulada como

$$\xi(k+1) = A_\xi \xi(k) + B_\xi u(k-d)$$

sendo A_ξ uma matriz sem autovalores na origem.

Exemplo de uso de observador de estados: Sistema de levitação magnética

Arquivos Matlab:

- `parametros_maglev_ss.m`: Define os parâmetros do levitador magnético
- `levitador_mpc_ss_du_observador.mdl`: Diagrama de simulação

Rejeição de perturbações

Ao contrário das abordagens vistas em aulas anteriores, a formulação de controle preditivo apresentada hoje não corrige o efeito de perturbações constantes em regime estacionário.

Vide simulação no Matlab.

Resumo da aula de hoje

- Uso de modelos no espaço de estados.
- Implementação em Matlab.
- Uso de observador de estados.
- Considerações sobre erro de regime na presença de perturbações constantes.

Tópicos da próxima aula

Inclusão de ação integral de controle empregando modelos no espaço de estados:

- Estimação de perturbações empregando observador de estados.
- Inclusão da perturbação estimada na equação de predição.
- Formulação alternativa: Determinação de valores de equilíbrio para o estado e o controle.