

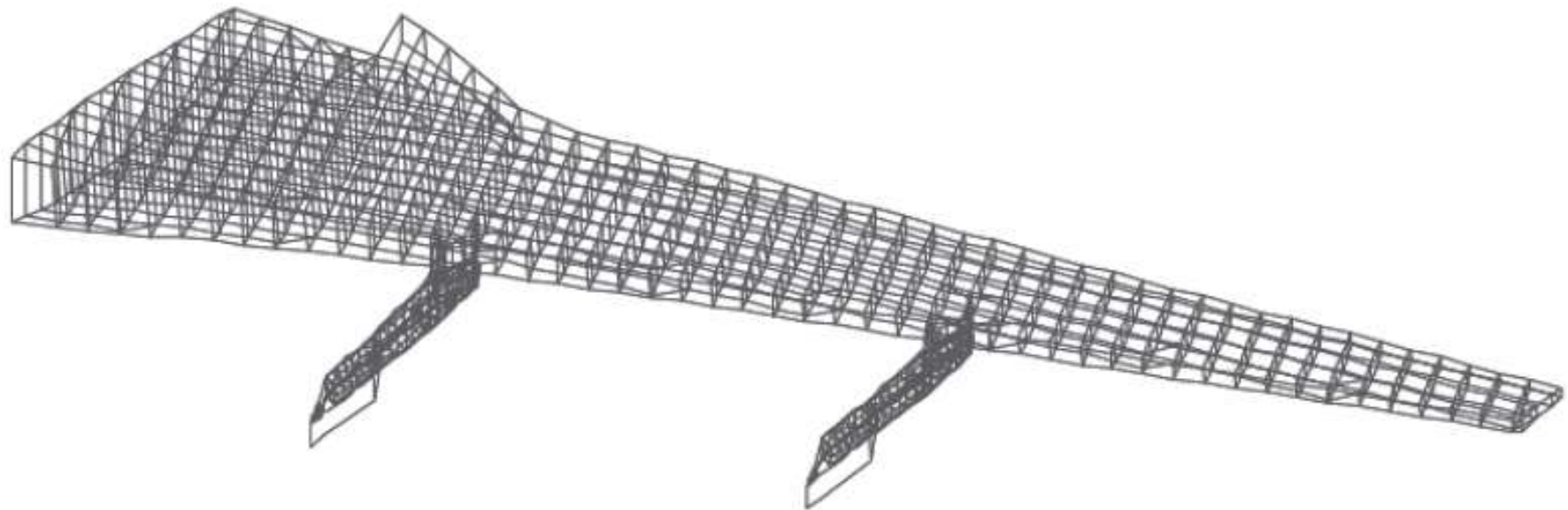
Introdução a **AEROELASTICIDADE**

Roberto Gil Annes da Silva

Modelo Aeroelástico na Base Modal

Modelos Aeroelásticos na Base Modal

- Problema geral: Estruturas com múltiplos graus de liberdade



Exemplo: Modelo em elementos finitos de uma semi-asa de aeronave comercial

Modelo Aeroelástico

- Equações de movimento de um sistema aeroelástico geral:

$$\begin{aligned} & [M] \left\{ \ddot{u}(x_s, y_s, z_s, t) \right\} + [K] \left\{ u(x_s, y_s, z_s, t) \right\} = \\ & = \left\{ L \left(u(x_s, y_s, z_s, t), \dot{u}(x_s, y_s, z_s, t) \right) \right\} \end{aligned}$$

onde $\left\{ u(x_s, y_s, z_s, t) \right\}$ é um vetor de deslocamentos físicos estruturais. M e K matrizes de massa e rigidez, respectivamente e L representa o carregamento aerodinâmico.

- As matrizes de massa e rigidez são usualmente obtidas de modelos de elementos finitos da estrutura sob análise.
- Este tipo de modelo matemático prevê que a estrutura é subdividida em elementos conectados por nós, onde se calculam deslocamentos em resposta a uma força aplicada a estrutura. Neste caso as cargas aplicadas são de natureza aerodinâmica.

Carregamento Aerodinâmico

- O carregamento aerodinâmico pode ser subdividido em uma parcela devido a forças externas ($L_e(t)$) e outra incremental, dependente dos deslocamento estruturais ($L_a(u(t), \dots)$)
- As cargas externas podem ser devido a rajadas, ação de sistemas de controle, por exemplo. São consideradas em estudos de resposta aeroelástica.
- As cargas incrementais, dependentes dos deformações da estrutura, são obtidas de uma teoria aerodinâmica não estacionária tal como o DLM.
- A modelagem destas cargas em conjunto com a modelagem da estrutura definem o modelo aeroelástico:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} - \{L_a(u(t), \dot{u}(t))\} = \{L_e(t)\}$$

Estabilidade Aeroelástica

- A versão homogênea da equação do sistema aeroelástico:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} - \{L_a(u(t), \dot{u}(t))\} = \{0\}$$

na maior parte dos casos em estudo será linear

- Pode-se, da mesma forma como foi feito para o caso da seção típica, estudar a estabilidade do sistema, para se identificar condições de flutter ou divergência aeroelástica.
- Esta investigação também é realizada variando um parâmetro de interesse do sistema, tal como a velocidade do escoamento.
- Quando se estuda a estabilidade, é desejável transformar a formulação no domínio do tempo (acima), para o domínio da frequência (Laplace).
- Entretanto, para tal deveremos transformar as cargas aerodinâmicas para este novo domínio.

Cargas Aerodinâmicas no Domínio de Laplace

- A transformação das cargas aerodinâmicas do domínio do tempo para o domínio a frequência (Laplace) pode ser realizada aplicando a definição de transformada de Laplace
- Imagina-se que a força aerodinâmica é uma saída devido à entrada associada aos estados, o vetor $\mathbf{u}(t)$ e suas derivadas temporais.
- Ou seja um carregamento qualquer pode ser representado por uma integral de Duhamel onde a função de resposta indicial do sistema é a função de transferência aerodinâmica \mathbf{H} , ou seja, uma integral de convolução resultando em:

$$L_a \left(u(t), \dot{u}(t) \right) = \int_0^t q_\infty \left[H \left(\frac{U_\infty}{b} (t - \tau) \right) \right] \{ u(\tau) \} d\tau$$

Cargas Aerodinâmicas no Domínio de Laplace

- Cujas transformadas de Laplace são:

$$\{L_a(u(s))\} = q_\infty \left[\bar{H} \left(\frac{sb}{U_\infty} \right) \right] \{u(s)\}$$

onde $\bar{H} \left(\frac{sb}{U_\infty} \right)$ é a função de transferência aerodinâmica,

transformada de Laplace de $H \left(\frac{U_\infty t}{b} \right)$, com sb/U_∞ sendo a

variável de Laplace adimensional.

Problema de Autovalor

- O problema de autovalor associado ao sistema aeroelástico no domínio da frequência fica:

$$\left[s^2 [M] + [K] - q_\infty \left[\bar{H} \left(\frac{sb}{U_\infty} \right) \right] \right] \{u(s)\} = 0$$

- Esta é uma solução geral, onde pode-se pressupor carregamentos aerodinâmicos quaisquer, desde que se conheça a função de transferência aerodinâmica.
- Este sistema pode ser particularizado para movimentos harmônicos simples, uma vez que temos soluções matemáticas que considera movimentos associados aos corpos de natureza harmônica, tal como o DLM.

Transformação para a Base Modal

- Normalmente modelos dinâmicos representado por elementos finitos implicam em um número muito elevado de graus de liberdade.
- O que implica também em matrizes de massa e rigidez de dimensões elevadas.
- A aproximação mais adequada para a redução da dimensão, ou da ordem do sistema é transformar o modelo dinâmico estrutural para uma base modal.
- Esta transformação é realizada através da solução do problema de autovalor associado, de onde se pode obter autovalores e autovetores. Estes autovetores são conhecidos também como modos naturais, ou modos de vibração, e representam um operador que transforma coordenadas de uma base física (ex. Sistema cartesiano) para uma base modal.

Representação modal

- Desta forma, a representação dos deslocamento físicos estruturais na base modal é feita através da seguinte transformação:

$$\{u(t)\} = [\Phi]\{q(t)\}$$

- O que representa fisicamente que um deslocamento físico pode ser escrito como uma combinação linear de coordenadas generalizadas, isto é, coordenadas que representam uma participação modal em um movimento qualquer da estrutura.
- A matriz $[\Phi]$ é conhecida como matriz modal e é composta por vetores modais $\{\phi\}_i$, que são os autovetores associados ao sistema dinâmico representado pelas equações de movimento sob análise.

Aplicação em aeroelasticidade

- Usualmente modos críticos de flutter estão associados às frequências naturais mais baixas do sistema.
- Note que o número de graus de liberdade de um sistema discreto será igual ao número de graus de liberdade associados deslocamento de pontos que discretizam este sistema.
- Sendo assim pode-se eleger um subconjuntos dos modos naturais da estrutura para representar o sistema dinâmico na base modal, para o estudo de estabilidade aeroelástica por exemplo.
- Esta redução de ordem é muito praticada e é uma boa aproximação para se resolver um sistema menos sujeito a instabilidades numéricas.

Modelo Aeroelástico na Base Modal

- Aplicando a transformação modal ao sistema aeroelástico temos:

onde:
$$\left[s^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_\infty \left[Q\left(\frac{sb}{U_\infty}\right) \right] \right] \{q(s)\} = 0$$

$$[\bar{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \qquad [\bar{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi]$$

$$\left[Q\left(\frac{sb}{U_\infty}\right) \right] = [\Phi]^T \left[\bar{H}\left(\frac{sb}{U_\infty}\right) \right] [\Phi]$$

$$\{u(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \Rightarrow \{u(s)\} = [\Phi] \{q(s)\}$$

Modelo Aeroelástico na Base Modal - MHS

- Assumindo Movimento Harmônico Simples:

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_\infty [Q(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

$$\{u(i\omega)\} = [\Phi] \{q(i\omega)\}$$

- Pode-se estudar o problema de estabilidade resolvendo o problema do autovalor associado a este sistema.
- Observe que esta consideração é pertinente uma vez que a nossa aerodinâmica não estacionária assume movimento harmônico simples associado às condições de contorno.

Movimentos Harmônicos Simples

- A equação do sistema aeroelástico, obtida assumindo a hipótese Movimento Harmônico Simples é por sua vez dada como:

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_D [Q(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

$$\{u(i\omega)\} = [\Phi] \{q(i\omega)\}$$

- Pode-se estudar o problema de estabilidade resolvendo o problema do autovalor associado a este sistema de forma absolutamente análoga ao caso da seção típica.
- Note que a aerodinâmica não estacionária também deve estar associada a um movimento harmônico simples associado às condições de contorno. Vamos tratar este assunto na sequência.

E como calculamos a parcela Aerodinâmica?

- Duas abordagens serão apresentadas:
 - extensão da teoria bidimensional para uma teoria tridimensional por faixas;
 - teoria aerodinâmica tridimensional

Coeficientes de Influência

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

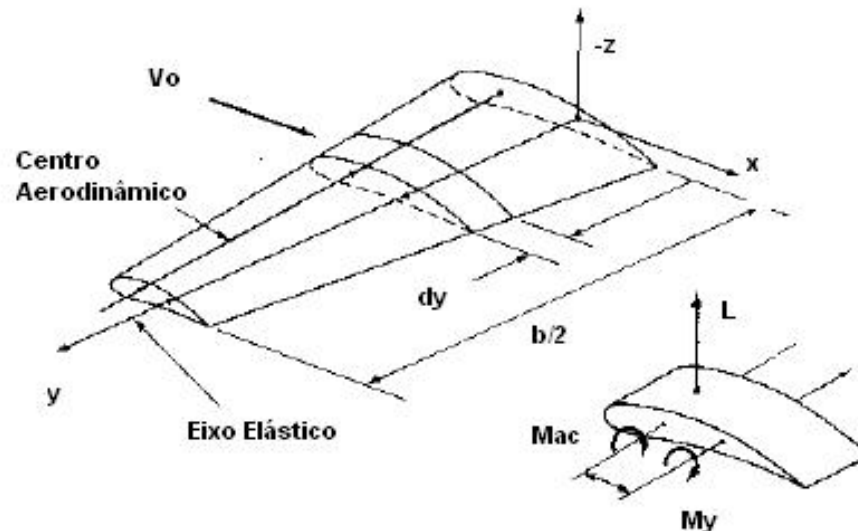
$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k} \quad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$

- A matriz na relação, é a matriz de coeficientes de influência da seção típica;
- Relaciona as "influências" entre os movimentos associados aos graus de liberdade e os esforços atuantes.

Teoria das Faixas I

- Técnica para resolver um problema tridimensional empregando soluções bidimensionais conhecidas;
- Não é restrito apenas ao cálculo de carregamento não estacionário para aeroelasticidade;
- A idéia é subdividir uma dada superfície de sustentação em faixas dispostas ao longo da envergadura:



Teoria das Faixas II

- Esta teoria é limitada a casos de asas onde os efeitos tridimensionais do escoamento podem ser desprezados, por exemplo, asas de grande alongamento;
- Não são considerados efeitos de influência aerodinâmica entre as faixas, lembre que a solução empregada para cada faixa é uma solução bidimensional
- As faixas devem estar preferencialmente alinhadas com o escoamento, porém é bastante usual adotar-se faixas perpendiculares ao eixo elástico.
- Neste caso, deve-se decompor o escoamento para um sistema de coordenadas local da asa onde para a envergadura, o eixo "y" deve coincidir com o eixo elástico.

Teoria das Faixas III

- Cada faixa possui uma largura finita, a partir da qual pode-se calcular o carregamento por faixa multiplicando:

$$L_i = \bar{l} \cdot dy_i$$

Note que o carregamento obtido através da teoria de Theodorsen, é por unidade de comprimento de envergadura.

- Para o cálculo do carregamento, emprega-se os movimentos referentes aos graus de liberdade de uma determinada faixa.
- Por exemplo, sendo as equações para uma dada faixa representadas por:

$$\begin{Bmatrix} -(\bar{l} \cdot b)_i \\ (\bar{m}_y)_i \end{Bmatrix} = \pi \rho b_i^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} (\bar{h}/b)_i \\ (\bar{\alpha})_i \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{P}_i\} = [A(ik)]_i \{\bar{x}_i\}$$

Teoria das Faixas IV

- Supondo N o número total de faixas:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{P}_1\} \\ \{\bar{P}_2\} \\ \{\bar{P}_3\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\bar{P}_N\} \end{Bmatrix} = \pi\rho \begin{bmatrix} b_1^4 [A(ik)]_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2^4 [A(ik)]_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & b_3^4 [A(ik)]_3 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_N^4 [A(ik)]_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{x}_1\} \\ \{\bar{x}_2\} \\ \{\bar{x}_3\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{\bar{x}_N\} \end{Bmatrix}$$

- Onde a distribuição do carregamento sobre a asa pode ser representada pela multiplicação do vetor dos deslocamentos das faixas pela matriz de coeficientes de influência
- Note que a matriz de coeficientes de influencia total é diagonal por blocos o que representa a ausência de interferência aerodinâmica entre as faixas.

Teoria das Faixas V

- Devemos tomar o cuidado de levar em conta o comprimento de referência de cada faixa como sendo o valor da semi-corda de cada seção. No caso de asa afilada este valor varia;
- Por outro lado, deve-se também tomar o cuidado de empregar a frequência reduzida para o cálculo dos elementos das matrizes de coeficientes de influência de cada faixa;
- Conceito de frequência reduzida local - assume-se que a asa toda oscile a uma frequência reduzida de referência k_{ref} ;
- Para que as seções típicas que descreve o nosso modelo de asa oscilem na mesma frequência reduzida k_{ref} ;
- A escolha da frequência reduzida de referência é feita levando em conta o comprimento de referência como sendo a semi corda na raiz;

$$k_{ref} = \frac{\omega b_{ref}}{V_0} \Rightarrow k_i = k_{ref} \left(\frac{b_i}{b_{ref}} \right)$$

Teoria das Faixas VI

- Desta forma garante-se que a frequência reduzida será igual ao longo de toda a envergadura.

$$\frac{k_1 V_0}{b_1} = \frac{k_2 V_0}{b_2} = \frac{k_3 V_0}{b_3} = \dots = \frac{k_N V_0}{b_N} = \omega$$

- Cada faixa deverá ter uma frequência reduzida local, garantindo que a frequência circular (ω) do movimento seja a mesma.
- Além da semi-corda, e consequentemente a frequência reduzida, outros parâmetro, tais como a distância do eixo elástico a bem como a envergadura da faixa devem ser levadas em conta supondo a geometria do modelo e a estratégia de discretização
- E finalmente, cabe lembrar que as componentes do vetor do carregamento aerodinâmico $\{P\}$ são quantias por unidade de envergadura. Para o cálculo do esforço total por faixa, devemos multiplicar cada um dos vetores por dy_i que é a largura da faixa.

Métodos de elementos discretos em aeroelasticidade

- Uma classe de modelos aerodinâmicos não-estacionários, bastante utilizado em estudos de aeroelasticidade, são aqueles baseados em métodos de elementos discretos conhecidos também como métodos de painéis.
- A modelagem de aerodinâmica não estacionária pode realizada com base em métodos de elementos discretos tais como métodos baseados em funções Kernel.
- Apresenta-se aqui uma breve revisão de métodos baseados na solução elementar das equações do potencial aerodinâmico linearizado, supondo pequenas perturbações que ocorrem em torno de uma condição média de escoamento não perturbado.

Modelo Potencial Adotado

- A equação básica a partir da qual os métodos de elementos discretos foram desenvolvidos é a equação do potencial aerodinâmico linearizado (EPAL) dada por:

$$\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - 2 \left(M^2 / U \right) \phi_{xt} - \left(M^2 / U^2 \right) \phi_{tt} = 0$$

- Assumindo que o potencial varie no tempo harmonicamente, isto é a sua intensidade pode-se associar uma frequência, pode-se escrever:

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, k) e^{ikt}$$

o que implica em escrever a equação do potencial aerodinâmico linearizado no domínio da frequência como:

$$\boxed{\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - 2ikM^2 \varphi_x + k^2 M^2 \varphi = 0}$$

- onde (x, y, z) coordenadas cartesianas, k é a frequência reduzida, M o número de Mach e b um comprimento de referência.

Método Doublet Lattice

A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows

EDWARD ALBRANO* and WILLIAM P. RODEN†
Northrop Corporation, Norair Division, Hawthorne, Calif.

Approximate solutions from the linearized formulation are obtained by idealizing the surface as a set of lifting elements which are short line segments of acceleration-potential doublets. The normal velocity induced by an element of unit strength is given by an integral of the subsonic kernel function. The load on each element is determined by satisfying normal velocity boundary conditions at a set of points on the surface. It is seen a posteriori that the lifting elements and collocation stations can be located such that the Kutta condition is satisfied. The method obviates the prescription of singularities in lift distribution along lines where normal velocity is discontinuous, and is readily adapted for problems of complex geometries. Results compare closely with those from methods that prescribe lifting pressure modal series, and from pressure measurements. The technique constitutes an extension of a method developed by S. G. Hedran for steady flow.†

AIAA Journal, Vol. 7, No. 2,
February 1969, pp. 279-285

Nomenclature

AR	= aspect ratio
b	= semichord
c	= chord
K	= kernel function
\tilde{K}	= numerator of singular kernel
k	= reduced frequency, $k = \omega b/U$
M	= freestream Mach number
NC	= number of boxes on chord
NS	= number of boxes on semispan
P	= lifting pressure
p	= dimensionless lifting pressure coefficient, $p = P/\frac{1}{2}\rho U^2$
W	= normal velocity at surface
w	= dimensionless normal velocity (normalwash), $w = W/U$
t	= time
s, σ	= curvilinear spanwise coordinates on the surface; s also denotes span of planar surface
U	= freestream velocity
x, y, z	= Cartesian coordinates
ξ, η, ζ	= Cartesian coordinates
γ	= dihedral angle
ω	= frequency of oscillation
ρ	= freestream density
(\cdot)	= complex amplitude

Introduction

THE linearized formulation of the oscillatory, subsonic, lifting surface theory relates the normal velocity at the surface

$$W(x, s, t) = U R l [\tilde{w}(x, s) \exp(i\omega t)]$$

to the pressure difference across the surface

$$P(x, s, t) = \frac{1}{2} \rho U^2 R l [\tilde{p}(x, s) \exp(i\omega t)]$$

by a singular integral equation and the Kutta condition at

Presented as Paper 68-73 at the AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 22-24, 1968; submitted February 13, 1968; revision received August 20, 1968. This research was sponsored by the Northrop Corporation Overhead Technical Activity Program.

* Senior Engineer, Structures and Dynamics Research Branch, Research and Technology Section. Associate Member AIAA.

† Consulting Engineer. Associate Fellow AIAA.

‡ At the time of writing, the authors learned that a singular extension had been developed independently by Stark,²¹ which has been reported in Ref. 23.

the trailing edge (TE):

$$\tilde{w}(x, s) = \frac{1}{2} \pi \oint_S \int K(x, \xi; s, \sigma; \omega, M) \tilde{p}(\xi, \sigma) d\xi d\sigma \quad (1)$$

$$\tilde{p}[x_{TE}(s), s] = 0$$

where (x, s) are orthogonal coordinates on the surface S such that the undisturbed stream is directed parallel to the x axis.

Rodenhil¹ has derived an expression for the kernel function for a nonplanar surface in the form

$$K = e^{-(i\omega r/L)} (K_1 T_1 + K_2 T_2) / r_1^2 \quad (2)$$

where

$$T_1 = \cos[\gamma(s) - \gamma(\sigma)]$$

$$T_2 = \left\{ \frac{z_0}{r_1} \cos[\gamma(s)] - \frac{y_0}{r_1} \sin[\gamma(s)] \right\} \times$$

$$\left\{ \frac{z_0}{r_1} \cos[\gamma(\sigma)] - \frac{y_0}{r_1} \sin[\gamma(\sigma)] \right\}$$

$$r_1 = (y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$$

$$x_1 = x - \xi \quad y_1 = y - \eta \quad z_1 = z - \zeta$$

and Landahl² has simplified the forms of K_1 and K_2 to read

$$K_1 = I_1 + [M r_1 / R] [e^{-i k_1 u_1} / (1 + u_1^2)^{1/2}]$$

$$K_2 = -3I_2 - \frac{i k_1 M^2 r_1^2}{R^2} \frac{e^{-i k_1 u_1}}{(1 + u_1^2)^{1/2}} -$$

$$\frac{M r_1}{R} \left[(1 + u_1^2) \frac{\beta^2 r_1^2}{R^2} + 2 + \frac{M r_1 u_1}{R} \right] \frac{e^{-i k_1 u_1}}{(1 + u_1^2)^{3/2}}$$

where

$$I_1 = \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{-i k_1 u}}{(1 + u^2)^{3/2}} du \quad (3)$$

$$I_2 = \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{-i k_1 u}}{(1 + u^2)^{5/2}} du \quad (4)$$

$$u_1 = (M R - x_0) / \beta^2 r_1$$

$$k_1 = \omega r_1 / U \quad \beta = (1 - M^2)^{1/2}$$

$$R = (x_0^2 + \beta^2 r_1^2)^{1/2}$$

Método Doublet Lattice

DOUBLET-L



- ❑ Todas as superfícies de sustentação são consideradas paralelas ao fluxo - teoria aerodinâmica linear de pequenas perturbações é usada
- ❑ Cada superfície sustentadora é dividida em pequenos elementos trapezoidais (“painéis”)
- ❑ As caixas são organizadas para formar faixas paralelas ao escoamento não perturbado
- ❑ Linhas de dobra e linhas de articulação devem estar nos limites dos painéis
- ❑ Opções de simetria estão disponíveis para permitir tamanho de problema reduzido

Método Doublet Lattice

DOUBLET-L



□ Pressão desconhecida no painel representada por uma linha de dipolos distribuídos no quarto da corda do painel

Condição conhecida de downwash especificada na a três quartos da corda do painel, no meio de sua envergadura

A formulação linear da teoria da superfície de sustentação em regime subsônico e oscilatório relaciona a velocidade normal na superfície com a diferença de pressão através da superfície por uma equação integral singular e a condição de Kutta no bordo de fuga. Na forma de equação, o que se expressou anteriormente é:

$$w(x, s, t) = V_{\infty} \operatorname{Re} \left\{ w(x, s) e^{i\omega t} \right\}$$

$$p(x, s, t) = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \operatorname{Re} \left\{ p(x, s) e^{i\omega t} \right\}$$

$$w(x, s) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} K(x, \xi; s, \sigma; \omega, M) p(\xi, \sigma) d\xi d\sigma$$

Definições básicas DLM

$$w(x, s, t) = V_\infty \operatorname{Re} \left\{ w(x, s) e^{i\omega t} \right\} \quad (\text{normalwash})$$

$$p(x, s, t) = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \operatorname{Re} \left\{ p(x, s) e^{i\omega t} \right\} \quad \text{Diferença de pressão}$$

$$w(x, s) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} K(x, \xi; s, \sigma; \omega, M) p(\xi, \sigma) d\xi d\sigma$$

(Equação Integral)

$$p[x_{TE}(s), s] = 0 \quad (\text{condição de Kutta})$$

s, σ = Curvilinear spanwise coordinates on the surface

x, y, z = Cartesian coordinates

ξ, η, ζ = Cartesian coordinates

ω = Frequency of oscillation

$\operatorname{Re}\{\dots\}$ = Real part of

S_n = n-th surface element

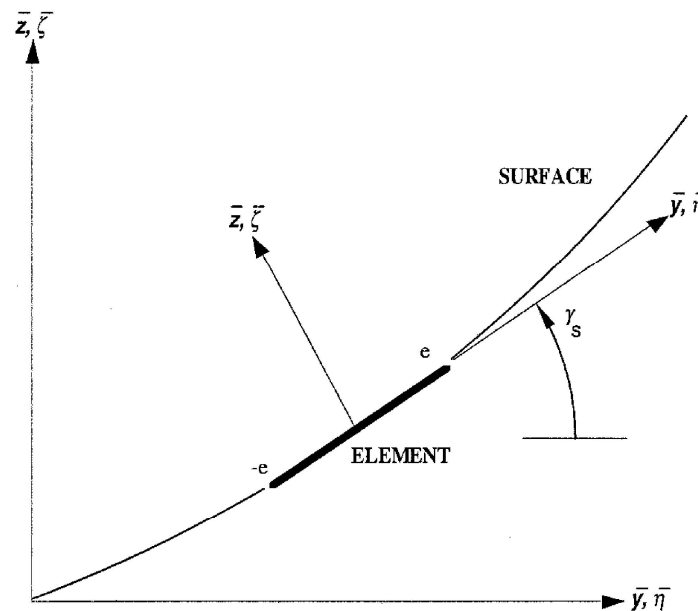
K = Complex acceleration potential Kernel function for oscillatory subsonic flow

Forma matricial

Condição de contorno linearizada para escoamento tangencial:

$$w(x, y, z) = \frac{d}{dx} h(x, y, z) + i \frac{k}{l} h(x, y, z)$$

Onde $h(x, y, z)$ é a deflexão do modo da superfície. Prescrevendo $h(x, y, z)$ e relacionando a velocidade normal induzida a relação integral pode-se identificar as pressões não estacionárias associadas a este movimento.



Forma matricial

Na forma matricial

$$\{w\} = [A] \{C_p\}$$

Matrizes aerodinâmicas

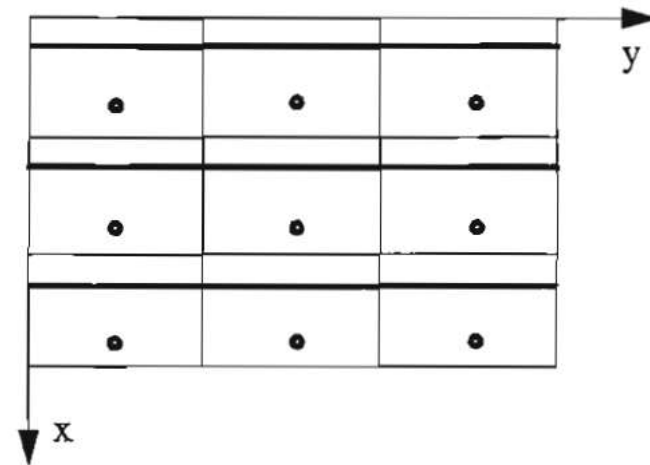
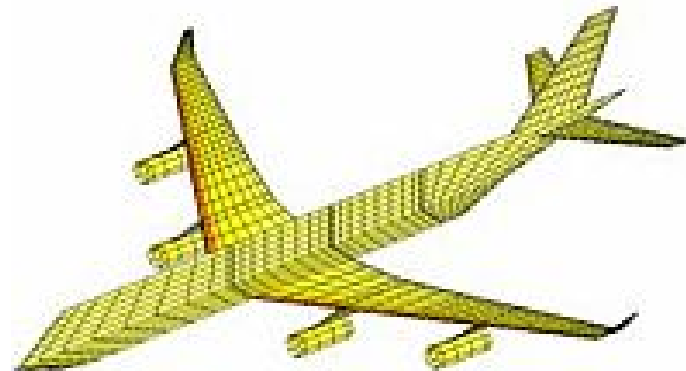
$[A(k, M)]$	=	Matriz de coeficiente de influência aerodinâmicos que relaciona o downwash às pressões $\{w\} = [A] \{C_p\}$
$[D]$	=	Matriz das derivadas substanciais que calcula a velocidade normal induzida dos deslocamentos $h(x, y, z)$ $\{w\} = [D_1 + ikD_2] \{u\}$
$[S]$	=	Matriz de interação que calcula esforços a partir das pressões $\{F\} = \bar{q} [S] \{C_p\}$

Portanto

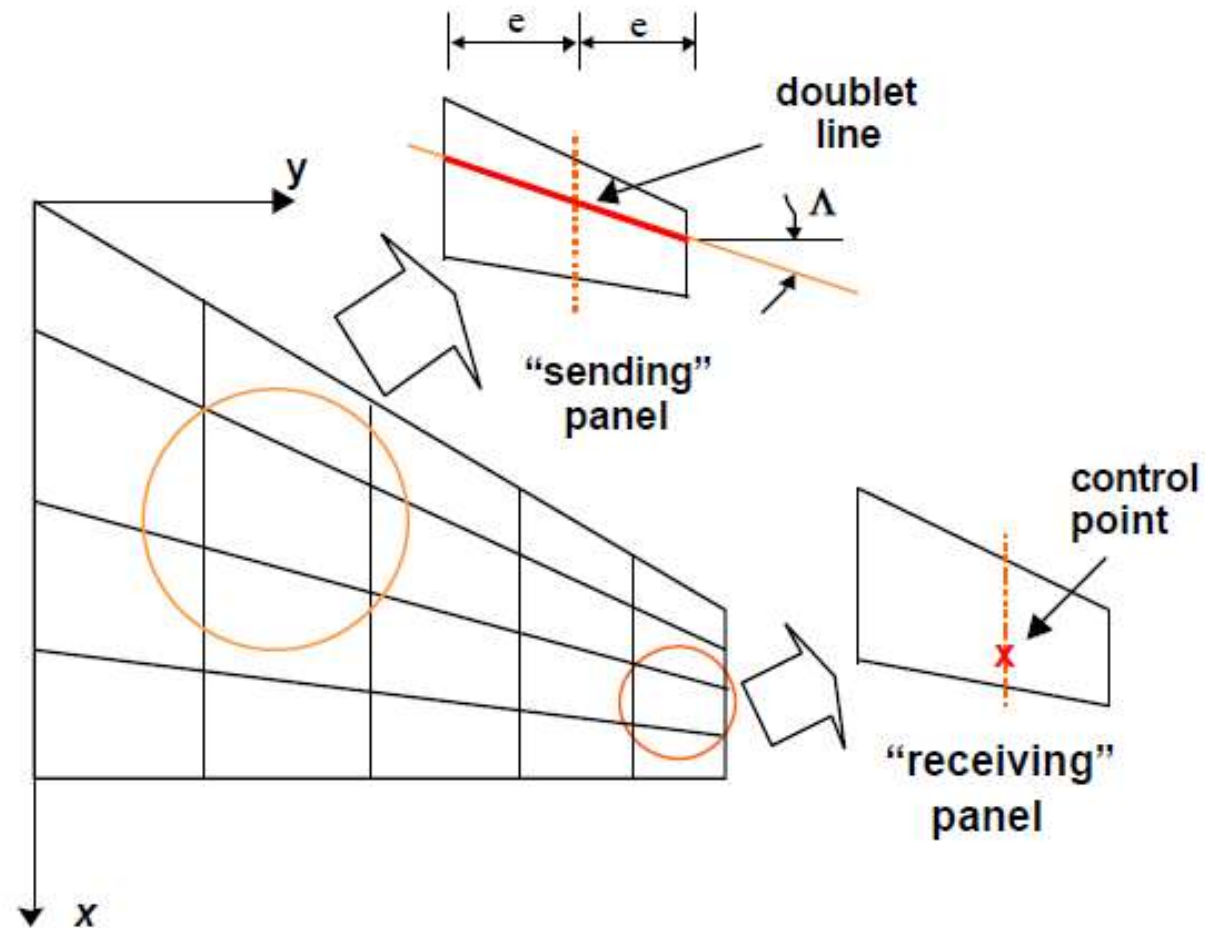
$$\{F\} = \bar{q} [S] [A]^{-1} [D] \{u\} = \bar{q} [Q_{kk}] \{u\}$$

O método “Doublet Lattice”

- A diferença básica entre eles é como as singularidades são distribuídas sobre os elementos usados para discretizar a geometria.
- As integrais também são resolvidas de forma diferente.
- Por exemplo o DLM assume que os dipolos são distribuídos ao longo de uma linha a $\frac{1}{4}$ da corda de cada painel, bem como a escolha de um ponto a $\frac{3}{4}$ da corda onde se mede o downwash induzido pelos demais painéis que discretizam o corpo.



O Método Doublet Lattice



Coeficientes de influência

- O conceito básico dos métodos de elementos discretos é assumir que o corpo é subdividido em elementos, conhecidos como painéis
- Cada painel possui um ponto conhecido como ponto de controle onde se impõe a condição de contorno (e se associa ao downwash induzido pelo movimento).
- A equação integral é aproximada pela soma de integrais elementares associada a cada painel.
- As integrais elementares que representam as influências de um painel nele mesmo, assim como a interferência mútua entre os painéis implica em um sistema de equações que relacionam pressões ao downwash.
 - Como resultado tem-se um sistema de equações algébricas que pode ser representado na forma matricial.

Matriz AIC

- $i \rightarrow$ painel que percebe o downwash, $j \rightarrow$ painel ao qual está associado o salto de pressão

$$\varphi_z^i = w_i = D_{ij} \Delta C_{p j}$$

onde D é a matriz de coeficientes de influência. E D é dado por:

$$D_{ij} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\bar{\xi}_{j-1}}^{\bar{\xi}_j} \int_{\bar{\eta}_{j-1}}^{\bar{\eta}_j} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial z} K_{\psi} \left(x_i - \bar{\xi}_n, y_i - \bar{\eta}_n, 0, M_{\infty}, k \right) \right] \right\} d\bar{\xi}_n d\bar{\eta}_n$$

uma função exclusivamente do Mach, geometria e frequência reduzida.

Condição de Contorno

- A forma de se resolver o problema de calcular o carregamento aerodinâmico não estacionário empregando este método consiste em estabelecer primeiramente condições de contorno que caracterizam o movimento da superfície a ser modelada:

$$w_i = w_{(3c/4)} = \frac{dh}{dt} + U \frac{dh}{dx} \Rightarrow \bar{w}_{(3c/4)} = \frac{w_{(3c/4)}}{U} = \frac{\dot{h}}{U} + \frac{dh}{dx}$$

onde h é um vetor de deslocamentos físicos associados um modo “i”, por exemplo

$$\alpha_{efetivo} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{d\phi_i^b}{dx} \right) q_i + \left(\frac{1}{U} \right) \phi_i^b \dot{q}_i \right] \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{dh_i}{dx} \right) + \left(\frac{\dot{h}_i}{U} \right) \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_i^b \dot{q}_i = \dot{h}_i \\ \phi_i^b q_i = h_i \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Componentes da relação da condição de contorno}$$

Fechando o problema

- Como se conhece o vetor de downwash pois o mesmo está associado a condição de contorno, bem como as informações necessárias para se obter o Kernel (geometria, frequência reduzida e número de Mach) teremos como incógnitas as pressões (ou o potencial de aceleração).

- Para tal, inverte-se a matriz D chegando a:

$$\{\Delta C_p(ik)\} = [D(ik)]^{-1} \{w(ik)\} \Rightarrow \{\Delta C_p(ik)\} = [AIC(ik)] \{w(ik)\}$$

- Como estamos no domínio da frequência, temos o downwash representado por:

$$\{w(x, y, 0, ik)\} = \frac{\partial h(x, y, 0)}{\partial x} + ikh(x, y, 0) = [F(ik)] \{h(x, y, 0)\}$$

Carregamento Aerodinâmico

- Ou seja, fechamos a nosso problema com a possibilidade de obter uma distribuição de pressão nos painéis, a qual pode ser relacionada a uma força aerodinâmica por:

$$\{L_a(ik)\} = q_\infty [S][AIC(ik)][F(ik)]\{h\}$$

onde S é uma matriz que representa as áreas dos painéis e $F(ik)$:

$$[F(ik)](\cdot) = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + ik(\cdot) \right]$$

é um operador que representa a derivada substancial do modo de movimento, responsável por gerar as pressões.

Carregamentos Generalizados

- Lembrando que :

$$\{\phi^b\} \{\dot{q}\} = \{\dot{h}\}$$

$$\{\phi^b\} \{q\} = \{h\}$$

$$\bar{w}(ik) = \frac{w(ik)}{U} \Rightarrow w(ik) = U \cdot \bar{w}(ik)$$

- E o vetor de forças generalizadas, para um modo "i"

$$\{P_{q_i}(ik)\} = \{\phi_i^B\}^T \{L_a(ik)\}$$

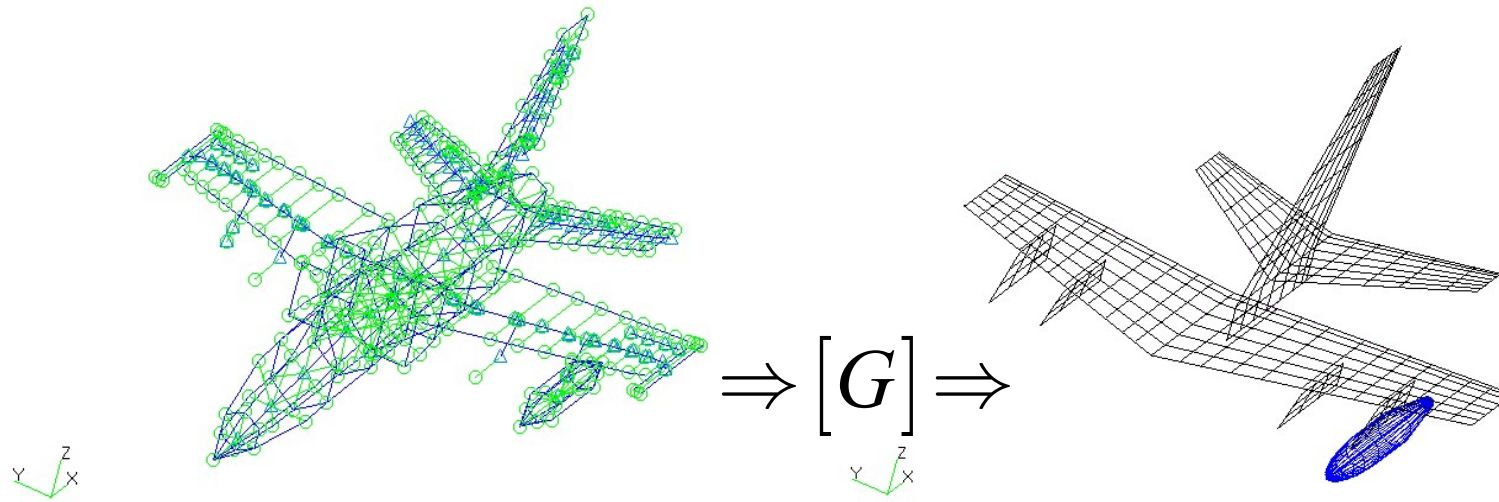
$$\{P_{q_i}(ik)\} = \frac{1}{2} \rho U^2 \{\phi_i^B\}^T \underbrace{[S][AIC(ik)][F(ik)]}_{\bar{Q}} \{\phi_i^B\} \{q_i\}$$

$$\{P_{q_i}(ik)\} = \frac{1}{2} \rho U^2 \underbrace{\{\phi_i^B\}^T [\bar{Q}(ik)] \{\phi_i^B\}}_{\bar{Q}} \{q_i\} = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \underbrace{[\bar{Q}(ik)]}_{MAIC} \{q_i\}$$

Problema !

- Malhas de elementos finitos usualmente são diferentes da malha aerodinâmica.
- Precisamos de informações (normalwash induzido pelo movimento da superfícies de sustentação) exatamente nos pontos de controle adotados pelo método.
- No caso do DLM, a $\frac{3}{4}$ da corda do painel no centro do mesmo.
- Busca de uma forma de representar (projetar) os modos estruturais nos pontos de controle aerodinâmicos

Interconexão Fluido-Estrutura



Modelo em elementos finitos

Modelo em painéis (DLM)

$$\{h(x, y, 0)\}_{aero} = [G] \cdot \{u(x_s, y_s, z_s)\}_{strut}$$

$$\{h(x, y, 0)\} = \text{Deslocamentos dos painéis}$$

$$\{u(x_s, y_s, z_s)\} = \text{Deslocamentos dos nós}$$

Interconexão Fluido-Estrutura

- Assume-se que existe um operador $[G]$ que representa a transformação dos deslocamentos por ora definidos nos nós do modelo em elemento finitos para os pontos de controle dos painéis aerodinâmicos:

$$\{h(x, y, 0)\} = [G] \{u(x_s, y_s, z_s)\}$$

- Este processo de transformação pode se feito através de uma interpolação dos deslocamentos estruturais em pontos de interessa na malha aerodinâmica. Vale a mesma transformação para os modos de forma:

$$\{\phi_i^s\} = [G] \{\phi_i^a\}$$

- Lembrando que eles são os mesmos, só mudam as coordenadas onde as amplitudes modais são observadas

Interconexão Fluido-Estrutura

- Não só os deslocamentos, mas os carregamentos devem ser transformados de um sistema para o outro.
- Para tal recorre-se ao princípio dos trabalhos virtuais, uma vez que o trabalho realizado pelas forças aerodinâmicas tanto em pontos da estrutura como em pontos distintos associados à geometria da malha aerodinâmica deve ser o mesmo:

$$\left\{ \delta h(x, y, 0) \right\}^T \left\{ L_a^{aero}(x, y, 0) \right\} = \left\{ \delta u(x_s, y_s, z_s) \right\}^T \left\{ L_a^{str}(x_s, y_s, z_s) \right\}$$

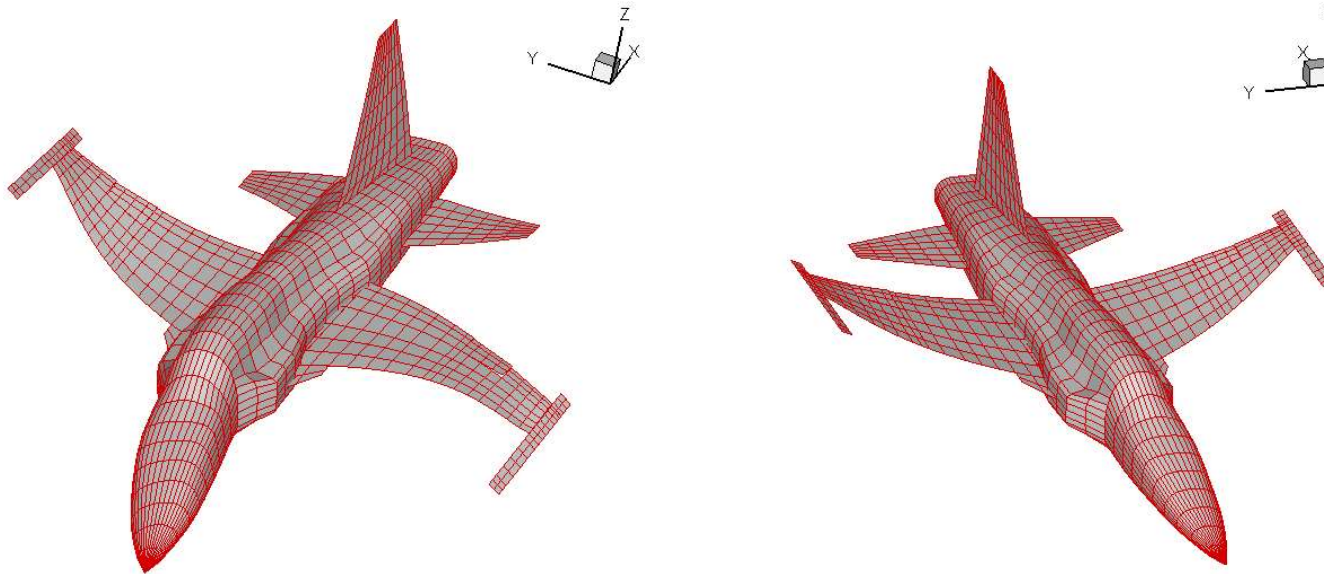
E esta igualdade implica em:

$$\left\{ L_a^{str}(x_s, y_s, z_s) \right\} = [G]^T \left\{ L_a^{aero}(x, y, 0) \right\}$$

uma vez que temos a transposta do vetor de deslocamentos virtuais empregados para calcular o trabalho realizado pela força.

Interpoladores dos modos

- O interpolador mais adequado para esta transformação são aproximações por ajuste de uma função do tipo spline.
- A matriz G resultante da seleção da interpolação adequada, é conhecida normalmente como matriz de splines, cujos coeficientes são obtidos de funções de interpolação.



Carregamento aerodinâmico transformado

- O carregamento aerodinâmico que, a priori, era calculado em pontos definidos por uma malha aerodinâmica pode ser representado nos pontos que definem a malha estrutural por:

$$\left\{ L_a^{str} (x_s, y_s, z_s, ik) \right\} = q_\infty [G]^T [S] [AIC(ik)] [F(ik)] [G] \left\{ u(x_s, y_s, z_s) \right\}$$

e da mesma forma, o carregamento aerodinâmico generalizado (carregamento na base modal) é dado por:

$$[Q(ik)] = [\Phi_a]^T [G]^T [S] [AIC(ik)] [F(ik)] [G] [\Phi_a]$$

onde: $[F(ik)](\cdot) = \left[\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + ik(\cdot) \right]$ é o operador que representa

a derivada substancial associado a relação para a condição de contorno.

Modelo Aeroelástico Completo na Base Modal

- Podemos representar o sistema aeroelástico na base modal como:

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_\infty [\bar{Q}(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

com:

$$[\bar{Q}(ik)] = [\Phi_a]^T [G]^T [S] [AIC(ik)] [F(ik)] [G] [\Phi_a]$$

Métodos de solução de Flutter

- E como podemos aproveitar a relação que representa o sistema aeroelástico na base modal para o estudo do flutter?
- Note que temos o mesmo problema identificado quanto estudamos a estabilidade aeroelástica da seção típica:

$$\left[-\omega^2 [M] + [K] - \pi \rho b^4 \omega^2 [A(k)] \right] \{\bar{x}\} = \{0\}$$

ou seja, temos como argumento a frequência de movimento circular e a frequência reduzida, que é dependente da velocidade.

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_\infty [\bar{Q}(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

Método K

- Deve-se notar que ao assumir amortecimento artificial, o valor deste amortecimento fora da condição de flutter não tem significado físico.
- Este é um artifício usado para compor uma curva de evolução do amortecimento necessário para sustentar um movimento harmônico simples, pois é o que a equação

$$\left[-\omega^2 \left[\bar{M} \right] + (1 + i g_s) \left[\bar{K} \right] - q_\infty \left[Q(ik) \right] \right] \{ q(i\omega) \} = 0$$

representa.

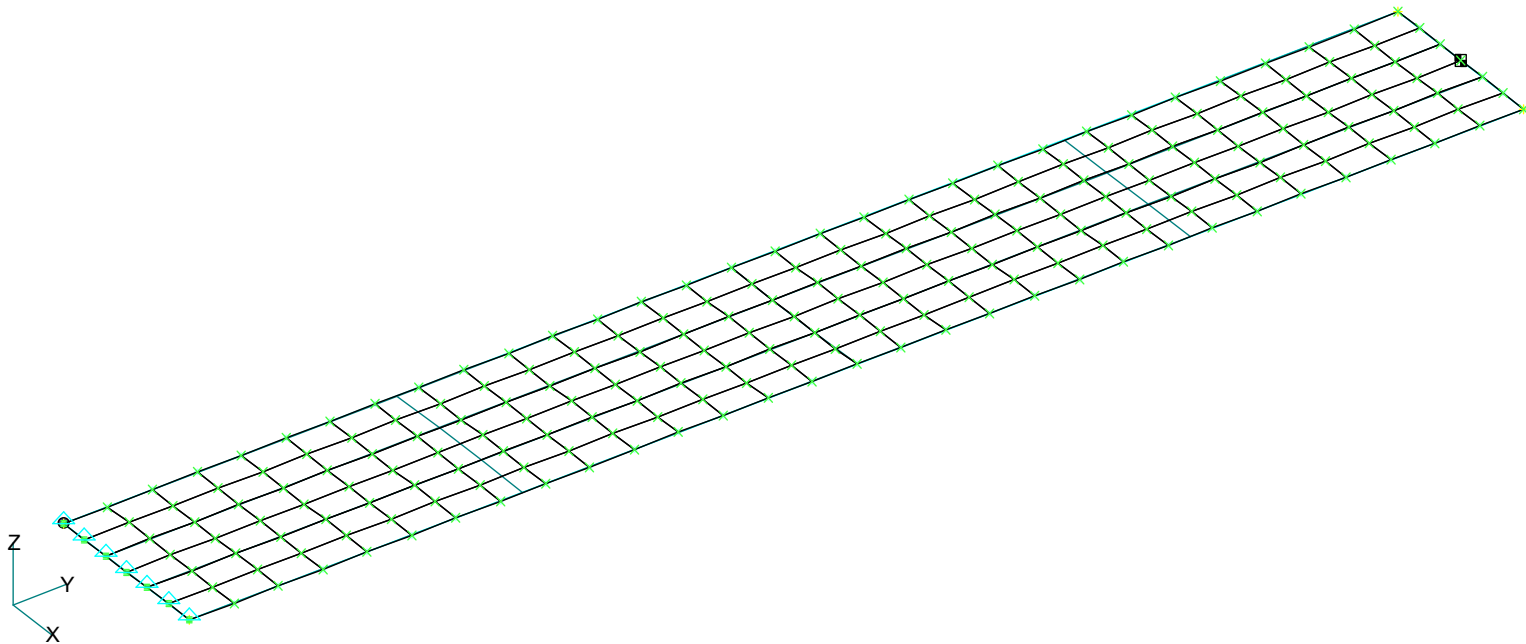
- Somente na condição de flutter este amortecimento tem significado físico, ou seja, quando $g_s=0$.
- O procedimento empregado para resolver a estabilidade do sistema pelo método k é exatamente o mesmo empregado quando estudamos a seção típica.

Cálculo de flutter de uma asa

- Compreender o processo de cálculo de flutter usando uma ferramenta computacional comercial.
- Softwares ZAERO e NASTRAN:
 - Ferramentas computacionais que permitem a modelagem do ponto de vista aeroelástico;
 - O NASTRAN é um software que permite a modelagem da estrutura e da aerodinâmica não estacionária, bem como possui implementado métodos de solução de flutter;
 - O ZAERO por sua vez, permite a modelagem aerodinâmica não estacionária, possui implementado métodos de solução de flutter e o tratamento da aeroelasticidade integrada a sistemas de controle

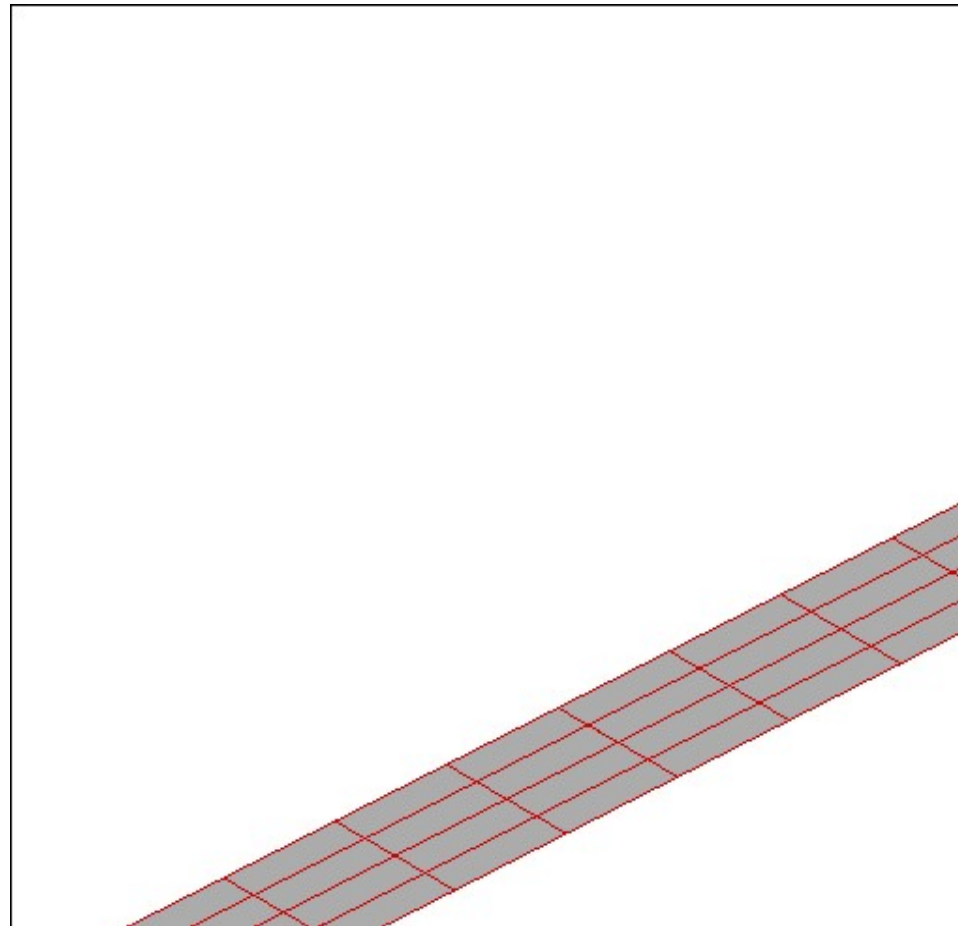
Caso de estudo - exemplo

- Asa Aeroelástica simplificada
 - Modelo consiste em uma placa de alumínio com uma massa na sua ponta.



Modelo Aerodinâmico

- Emprego de um método de elementos discretos tal como o Doublet Lattice ou o ZONA 6



Arquivo de entrada do ZAERO

- Cabeçalho: exemplo **HA145E.INP**
- ```
$*****$
```
- ```
$
```
- ```
$ Z A E R O I N P U T (HA145E.INP) $
```
- ```
$
```
- ```
$*****$
```
- ```
$
```
- ```
$ THIS CASE DEMONSTRATES A SINGLE WING, SUBSONIC FLUTTER
```
- ```
$ CASE USING K AND G FLUTTER SOLUTION METHODS.
```
- ```
$
```
- ```
$Begin Executive Control Section
```
- ```
ASSIGN FEM=asaest56-1.f06, PRINT=0,FORM=MSC,BOUND=ASYM
```
- ```
DIAG 1
```
- ```
CEND
```
- ```
$Begin Case Control Section
```
- ```
TITLE= SUBSONIC FLUTTER ANALYSIS (HIGH ASPECT RATIO WING)
```
- ```
ECHO = SORT
```
- ```
SUBCASE = 1
```
- ```
    SUBTITLE=ZONA6 METHOD
```
- ```
 LABEL=MACH NUMBER = 0.10, NON-MATCH POINT FLUTTER ANALYSIS
```
- ```
    FLUTTER=100
```

O cabeçalho permite que se caracterize o problema quanto ao método de solução, arquivo de entrada com a **informação dinâmica**, e outros comandos de controle e diagnóstico do modelo em estudo.

Modelo Dinâmico na Base Modal:

- Resultado da análise modal feita através do software NASTRAN;
- Apresenta um arquivo de saída o qual consiste em um relatório onde se apresenta as **massas**, **rigidezes** generalizadas, **modos de vibração** e informação geométricas do modelo.
- É gerada de forma completa para servir como entrada para o **ZAERO** estabelecendo que os dados de entrada devem ser replicados no relatório de saída:

$$\{u(i\omega)\} = [\Phi] \{q(i\omega)\}$$

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_D [Q(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

Modelo Aerodinâmico

- BEGIN BULK
- \$
- \$ * AERO PARAMETERS / FLIGHT CONDITIONS *
- \$
- \$...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10..|\$
- \$
- \$ ACSID XZSYM FLIP FMMUNIT FMLUNIT REFC
- AEROZ 0 NO NO KG M 0.040
- \$
- \$ IDMK MACH METHOD IDFLT SAVE <--FILENAME--> PRINT \$
- MKAEROZ 80 .10 0 0 SAVE ASA56.AIC 0 +MK1
- \$ FREQ1 FREQ2 ETC
- +MK1 0.05 0.08 0.10 0.11 0.12 0.14 0.16 0.18 +MK2
- +MK2 0.20 0.25 0.50 0.75 1.00 1.20 1.40 2.00

MKAEROZ por sua vez é a tabela de **frequências reduzidas** empregada para a geração das matrizes de Coeficientes de influência **$Q(ik)$**

AEROZ define um comprimento de referência para se obter a velocidade da frequência reduzida para o método k, por exemplo a matriz **$Q(ik)$** é armazenada em um arquivo binário para análises posteriores

Modelo Aerodinâmico: Geometria

```

• $ * WING MACROELEMENT * $
• $ $
• $ WID LABEL ACOORD NSPAN NCHORD LSPAN ZTAIC PAFOIL7 $
• CAERO7 101 WING 0 11 5 +CA101
• $ XRL YRL ZRL RCH LRCHD ATTCHR $
• +CA101 .0 .0 .0 0.04000 0 0 +CA102
• $ XTL YTL ZTL TCH LTCHD ATTCHT $
• +CA102 .0 0.35 0.0 0.040 0

```

CAERO7 é o comando de entrada que permite estabelecer as propriedades da geometria a ser discretizada por painéis. No programa é conhecido como uma estrutura do tipo **MACROELEMENTO**. É composto pelas coordenadas do bordo de ataque da raiz, **XRL**, **YRL**, **ZRL**, e as coordenadas do bordo de ataque da ponta da asa; acompanhadas pelas cordas da raiz **RCH** e da ponta **TCH**. **NSPAN** e **NCHORD** são os Números de divisões ao longo da envergadura e corda respectivamente.

Modelo Aerodinâmico: Geometria

- Por exemplo **NSPAN** = 11 e **NCHORD** = 5 representa 10 painéis ao longo da corda e 4 painéis ao longo da envergadura respectivamente.
- Os demais campos do comando **CAERO7** podem ser visto no manual do usuário do ZAERO e não se aplicam para o presente modelo.
- As superfícies de sustentação de uma aeronave, por exemplo pode ser representado por vários macroelementos, cada um representando por painéis as superfícies de sustentação.

Interconexão entre as malhas

- Note que até o presente momento, modelo-se a asa com **40 painéis**, associados a **40 pontos** de controle.
- E o nosso modelo estrutural é composto por **180 elementos** de placa, separados por **217 nós**

1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	127	134	141	148	155	162	169	176	183	190	197	204	211
2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	107	114	121	128	135	142	149	156	163	170	177	184	191	198	205	212
3	10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87	94	101	108	115	122	129	136	143	150	157	164	171	178	185	192	199	206	213
4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95	102	109	116	123	130	137	144	151	158	165	172	179	186	193	200	207	214
5	12	19	26	33	40	47	54	61	68	75	82	89	96	103	110	117	124	131	138	145	152	159	166	173	180	187	194	201	208	215
6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	97	104	111	118	125	132	139	146	153	160	167	174	181	188	195	202	209	216
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217

Interpolação dos deslocamentos

```

• $          * SURFACE SPLINE FIT ON THE WING *
• $
• $          EID   MODEL   CP   SETK   SETG   DZ   EPS
• SPLINE1 100   WING           101   100   0.0
• $
• $          SETID  MACROID BOX1  BOX2  ETC
• PANLST2 101    101      101  THRU 140
• $
• $          SID   G1   G2   ETC
• SET1  100   1   THRU 216
    
```

A sequência de comandos acima representa a operação de interpolação abaixo através de splines de superfície

$$\{h(x, y, 0)\}_{aero} = [G] \cdot \{u(x_s, y_s, z_s)\}_{strut}$$

SPLINE1 relaciona logicamente as coordenadas dos pontos de controle **(101)** dos painéis, calculadas internamente, e a as coordenadas dos nós estruturais **(100)** importadas.

PANLST2 define um conjunto de painéis pertencente ao macroelemento 101, discriminado como macroid, e relacionado ao CAERO7 101. Note que a numeração começa pelo valor do ID do CAERO7 e termina com a quantidade de painéis somada ao número do primeiro painel. **SET1** contém a numeração dos nós cujas coordenadas são importadas do relatório que contém a solução dinâmica na base modal.

Conclusão do Modelo Aeroelástico

- O modelo aeroelástico na base modal está concluído, ou seja temos a equação:

$$\left[-\omega^2 [\bar{M}] + [\bar{K}] - q_\infty [\bar{Q}(ik)] \right] \{q(i\omega)\} = 0$$

$$[\bar{Q}(ik)] = [\Phi_a]^T [G]^T [S] [AIC(ik)] [F(ik)] [G] [\Phi_a]$$

e, desta forma, pode-se aplicar um método de solução de flutter na equação acima, como por exemplo o Método K e o **Método G**.

Método G

- Este método consiste em resolver o problema de flutter de forma paramétrica, onde ao invés de se estabelecer uma tabela de frequências reduzidas para proceder com a análise, é estabelecido um conjunto de velocidades.
- Deste conjunto de velocidades, emprega-se um procedimento iterativo de onde se obtém a frequência reduzida para o cálculo da matriz de coeficientes de influência.
- No entanto, como se empregou uma tabela de frequências reduzidas para gerar as matrizes de coeficientes de influência, as matrizes correspondentes aos valores intermediários de frequências reduzidas são obtidas de um processo de interpolação;
- Assumindo que existe um amortecimento artificial necessário para garantir que a solução do problema de autovalor da equação acima represente um movimento harmônico simples.
- Esta idéia de amortecimento artificial foi originalmente introduzida por Theodorsen.

Método G

- A vantagem deste método é que o mesmo resulta em amortecimento subcríticos com significado físico, baseado em uma hipótese de pequenas perturbações em amortecimento podem vir a representar com propriedade o amortecimento nestas condições.
- A equação a ser resolvida pelo método G é a mesma do método K, ou seja:

$$\left[-\omega^2 \left[\bar{M} \right] + (1 + i g_s) \left[\bar{K} \right] - q_\infty \left[\bar{Q}(ik) \right] \right] \{ q(i\omega) \} = 0$$

onde da mesma forma, pode-se estabelecer que existe um amortecimento estrutural que pode se prescrito (g_s), que contribuirá com o amortecimento total, ou seja aerodinâmico mais estrutural.

Amortecimento estrutural

- A forma de se prescrever o amortecimento estrutural pode ser feita através do ZAERO incluindo uma tabela de amortecimento estrutural como função da frequência associada ao problema de autovalor associado ao método G ou K:
- \$
- **TABDMP1 10 G** **+TAB1**
- **+TAB1 0.0 0.01 1000. 0.01**

onde se representa através desta tabela, por exemplo uma independência do amortecimento estrutural em um intervalo de frequência de 0 a 1000 Hz

Solução do problema de Flutter

```

• $          * NON-MATCHED POINT FLUTTER ANALYSIS *
• $
• $          SETID  SYM   FIX   NMODE  TABDAMP  MLIST  CONMLST
• FLUTTER  100   ASYM  100           10
• $
• $...1...|...2...|...3...|...4...|...5...|...6...|...7...|...8...|...9...|...10$
• $          SETID  IDMK  DEN   FTMUNIT  FTLUNIT   VREF  FLUTTF  PRINT   $
• FIXMDEN 100    80    1.225  KG      M        0      +FL1
• $          V1    V2    V3    ETC           $
• +FL1   0.50  1.00  2.00  3.00  4.00  5.00  6.00  8.00      +FL2
• +FL2  10.00 12.00 14.00 16.00 18.00 20.00 22.00 24.00      +FL3
• +FL3  26.00 28.00 30.00 32.00 34.00 36.00 38.00 40.00

```

Esta sequência de comandos representa o método de solução do problema de estabilidade aeroelástica, estabelecendo uma faixa de velocidade de interesse para a análise de flutter. **FIXMDEN** representa uma análise ao nível do mar (1.225 kg/m³) Assumindo que o sistema de unidades é [SI], empregando as Matrizes de coeficientes de influência definidas em **MKAEROZ** 80. Aqui é exemplificada uma variação de 0.5 a 40 m/s.

Controle de processo de solução

- Para acompanhar os passos intermediários, pode-se estabelecer comando tais como **PLTAERO** e **PLTMODE**, onde os mesmos permitem a visualização da malha aerodinâmica antes e depois da interpolação, respectivamente.
- **PLTFLUT** permite visualizar de forma animada o modo de flutter, ou seja um modo natural que será complexo e resultante do calculo do problema de autovalor do sistema aeroelástico:

```
• $          * PLOT AERO MODEL BY PLTAERO *          $
• PLTAERO 11  YES  0  TECPLOT AERO1.PLT
• $
• $          * PLOT FLUTTER MODE BY PLTFLUT *          $
• PLTFLUT 10  100  1  8  .3  TECPLOT FLUT1.PLT
• PLTMODE 10  SYM  1  .3  TECPLOT MODE1.PLT
• $
• $          * V-G PLOT *          $
• $
• PLTVG 11  100  V  VG1.PLT
```

Solução final

- O resultado da análise é apresentado portanto na forma de diagramas V-g-f, através do comando:

- \$ * V-G PLOT * \$
- \$
- **PLTVG** 11 100 V **VG1.PLT**

o qual vai gerar um arquivo de saída com as evoluções modais (vg1.plt)

- O ZAERO fornece um resultado da análise aeroelástica na forma de um arquivo ASCii, tal como a saída F06 do NASTRAN de onde pode-se obter um sumário da análise as velocidades de flutter calculadas assumindo alguns valores de amortecimento estruturais, por exemplo, na sequência:

Sáida do ZAERO

- ```

• FLUTTER SPEED (M /SEC) /
• FREQUENCY (HERTZ) AS A FUNCTION OF THE ASSUMED STRUCTURAL DAMPING

• MODE G = 0.0% 0.5% 1.0% 1.5% 2.0% 2.5% 3.0% 3.5% 4.0%
• -----
• 4 19.2/ 19.4/ 19.5/ 19.6/ 19.8/ 19.9/ 20.1/ 20.2/ 20.4/
• 25.137 25.051 24.966 24.917 24.908 24.899 24.890 24.881 24.872

• END OF K-METHOD FLUTTER EVALUATION

•
• *****
• *** ***
• *** ZAERO TERMINATED ***
• *** ***
• *** NORMALLY ***
• *** ***
• *** 16:37:20 11/06/2009 ***
• *** ***
• *****

```

# Saída do ZAERO

- Da saída do ZAERO pode-se obter as velocidade de flutter, bem como as curvas de evolução modal, tanto para o método K, quanto para o método G, pois ambos são resolvidos simultaneamente no processo de análise aeroelástica.
- Referência para o Método G:
  - ZAERO\_THEORETICAL\_MANUAL\_8.2.pdf