

INTRODUÇÃO A AEROELASTICIDADE

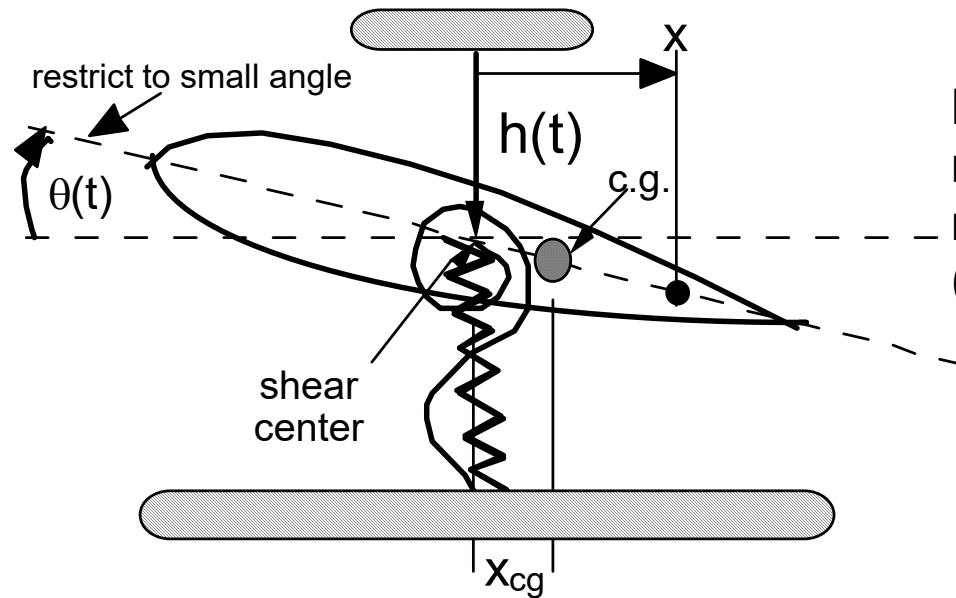
*Roberto **Gil** A. Silva*

(gil@ita.br)

Dinâmica de Estruturas

- Dinâmica das Estruturas: Estudo da física associada ao equilíbrio de forças de inércia, amortecimento e de rigidez presentes em um sistema dinâmico;
- Equações de movimento relacionam forças proporcionais à acelerações, amortecimento e rigidez dependentes de acelerações, velocidade e deslocamentos respectivamente;
- Exemplo simplificado: sistema dinâmico com dois graus de liberdade – seção de asa conhecida como “seção típica”;
 - Derivação da equações de movimento
 - Equação de equilíbrio dinâmico
 - Modos e freqüências naturais de vibração

Modelo dinâmico do seção típica com 2 GDL

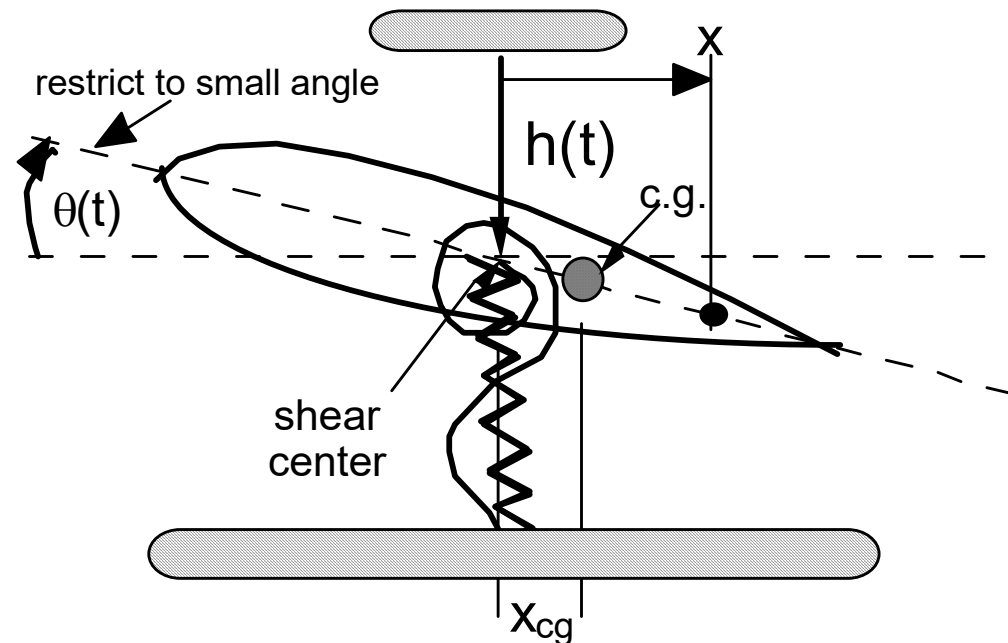


Derivação das equações de movimento empregando métodos de energia (Equações de Lagrange)

É um modelo clássico para dar início a compreensão dos fenômenos aeroelásticos. Assume-se que as molas são lineares e continuamos assumindo pequenas perturbações.

Seção típica com 2 GDL

- a) Convenção de sinais por conveniência:
O "plunge" é positivo para baixo.
- b) O sistema de referência possui origem no centro elástico ($\mathbf{X}_{ce} = 0$)



$h(t)$ = grau de liberdade em "plunge" (flexão)

$\theta(t)$ = grau de liberdade em "pitch" (torção)

Medidos a partir da posição de equilíbrio estático

Expressões de energia

$z(t)$ é o deslocamento para baixo em uma posição x localizada após ao centro elástico

$$\rightarrow z = h + x \sin \theta \cong h + x\theta$$

Energia cinética $T = \frac{1}{2} \int_{x=-x_l}^{x=x_t} (\rho)(\dot{h} + x\dot{\theta})^2 dx$

Energia potencial $U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_T \theta^2$

Equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial(T - U)}{\partial \eta_i} = Q_i}$$

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=-x_l}^{x=x_t} (\rho)(\dot{h} + x\dot{\theta})^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{h}^2 + 2S_\theta \dot{h}\dot{\theta} + I_\theta \dot{\theta}^2)$$

m é a massa total da seção típica

$$m = \int \rho(x) dx$$

I_θ momento de inércia da seção típica, composto por:

$$I_\theta = \int \rho(x) x^2 dx = I_o + mx_\theta^2$$

$\mathbf{X}_\theta = \mathbf{X}_{CG}$ posição do centro de massa com relação ao sistema de coordenadas da seção. No caso representa um desbalanceamento com relação ao eixo elástico

S_θ é o momento estático, ou desbalanceamento estático

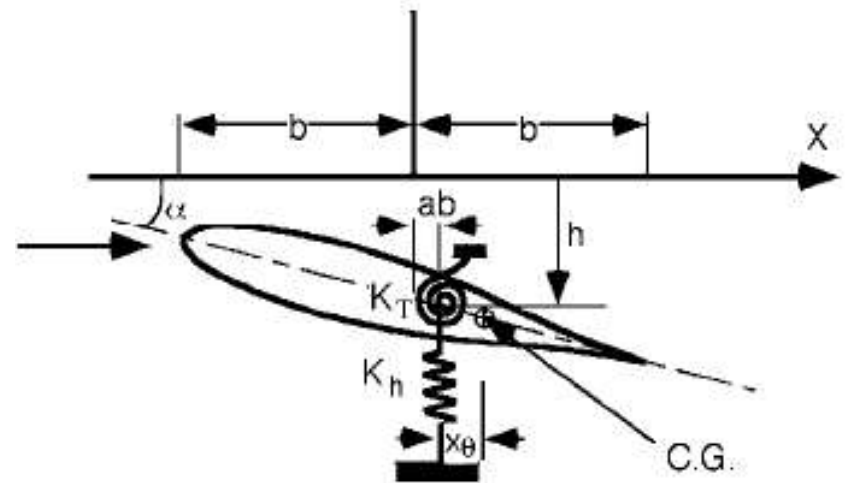
$$S_\theta = mx_\theta = \int \rho(x) x dx$$

Equações do movimento

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} + mx_{\theta}\dot{\theta} \quad \frac{\partial U}{\partial h} = K_h h$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mx_{\theta}\dot{h} + I_{\theta}\dot{\theta} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_T \theta$$

Equações de movimento na forma matricial. Note que o acoplamento ocorre devido a excentricidade x_{θ}



$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Parâmetros dinâmicos

- Definições:

$$r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m} \quad , \quad \omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \quad ,$$

$$\omega_{\theta}^2 = \frac{K_T}{I_{\theta}} = \frac{K_T}{mr_{\theta}^2} \quad , \quad r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m}$$

$$r_{\theta}^2 = r_0^2 + x_{\theta}^2 \quad , \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{\theta}} \quad ,$$

$$R = \frac{\omega_h}{\omega_{\theta}}$$

$r_0 \Rightarrow$ Raio de giração com relação ao cg

Solução elementar

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} \quad \text{Substituímos no sistema acoplado:}$$

$$s^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Divide-se pelo termo exponencial}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Determinante da matriz

$$\begin{vmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 m x_\theta) \\ (s^2 m x_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{vmatrix} = 0$$

$$(s^2 m + K_h)(s^2 I_\theta + K_T) - (s^2 m x_\theta)(s^2 m x_\theta) = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{K_h}{m}\right)\left(s^2 + \frac{K_T}{I_\theta}\right) - \left(s^2\right)\left(s^2 \frac{m x_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

Equação Característica

Parâmetros de frequência desacoplados :

PERGUNTA: O QUE
ACONTECE QUANDO O CG
COINCIDE COM O CE?

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \quad \omega_\theta^2 = \frac{K_T}{I_\theta}$$

$$mx_\theta^2 = I_0$$

$$(s^2 + \omega_h^2)(s^2 + \omega_\theta^2) - \left(s^2 \frac{mx_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

$$\left(s^4 \left(1 - \frac{mx_\theta^2}{I_\theta} \right) + s^2 (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) + \omega_h^2 \omega_\theta^2 \right) = 0$$

Frequências naturais

$$\left(s^4 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right) + s^2 (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) + \omega_h^2 \omega_\theta^2 \right) = 0 \quad , \quad (as^4 + bs^2 + c) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad s^2 = \frac{-(\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{(\omega_h^2 + \omega_\theta^2)^2 - 4 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}}{2 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right)}$$

Finalmente, temos a expressão para s :

$$s^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{I_\theta}{I_o} \right) (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{I_\theta}{I_o} (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \right]^2 - \left(\frac{I_\theta}{I_o} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}$$

Cuidado, as frequências naturais são diferentes das frequências associadas a cada grau de liberdade do sistema desacoplado!

Movimento Harmônico Simples

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assume-se MHS $\rightarrow \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$

O que resulta em:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equações do Movimento: Sistema Livre

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Note que o sistema a dois graus de liberdade é um sistema acoplado dinamicamente, ou seja nas diagonais da matriz de massa temos os momentos estáticos;
- No domínio da frequência, assumindo MHS:

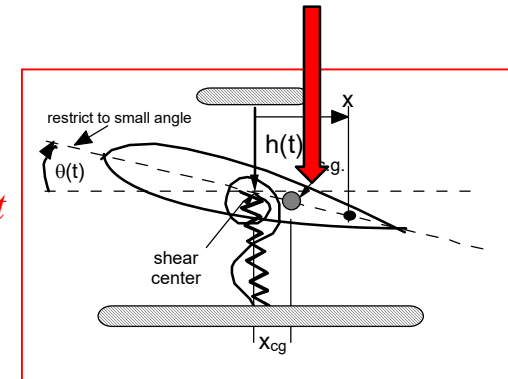
$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modos de Movimento

- Um sistema de múltiplos graus de liberdade possui múltiplos modos de movimento ou modos naturais.
 - **Modo de movimento (naturais)** está associada a uma frequência natural (ou ressonante) com forma modal bem definida.
- Autovetores – outra denominação para os modos de forma – fornece informação sobre os pontos nodais ou linhas nodais;
- A partir de experimentos é possível obter-se linhas nodais bem como as correspondentes frequências naturais para se comparar com as análises
- Problema de autovalor associado: autovalores – frequências naturais; autovetores – modos naturais de vibração.

Excitação harmônica próxima a uma frequência natural

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = F_o \begin{Bmatrix} 1 \\ d \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$



Assumindo a resposta Harmônica tem-se:

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = F_o \begin{Bmatrix} 1 \\ d \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

Excitação harmônica próxima a uma frequência natural

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = F_o \begin{Bmatrix} 1 \\ d \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \frac{F_o}{\Delta} \begin{bmatrix} (-\omega^2 I_\theta + K_T) & (\omega^2 mx_\theta) \\ (\omega^2 mx_\theta) & (-\omega^2 m + K_h) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ d \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = (-\omega^2 m + K_h)(-\omega^2 I_\theta + K_T) - \omega^2 (mx_\theta)^2 \neq 0$$

Próximo ou mesmo na frequência de ressonância, a amplitude do movimento tende ao infinito ($\Delta = 0$), na condição onde não há amortecimento

Padrão de movimento na ressonância

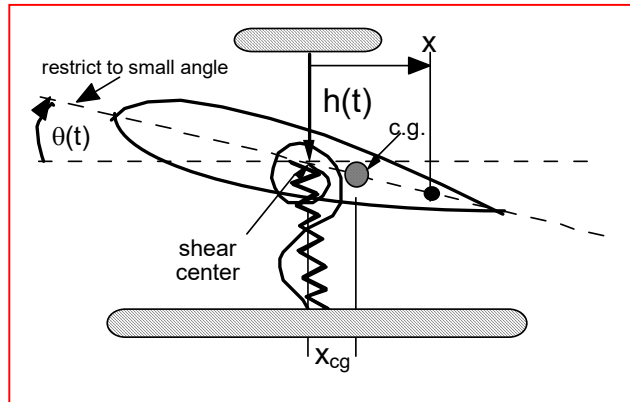
Do problema de autovalor, obtêm-se as frequências naturais e os modos de vibração, os quais na realidade, são padrões de movimento que a seção típica executa quando excitada em uma com força externa harmônica de frequência coincidente a uma frequência natural do sistema

$$\begin{aligned} (1) & \left[\begin{array}{cc} (-\omega_i^2 m + K_h) & (-\omega_i^2 m x_\theta) \\ (-\omega_i^2 m x_\theta) & (-\omega_i^2 I_\theta + K_T) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ (2) & \end{aligned}$$

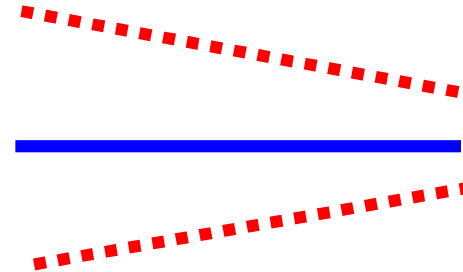
autovalores autovetores

$$\frac{\bar{h}}{\bar{\theta}} = \frac{(\omega_i^2 m x_\theta)}{(-\omega_i^2 m + K_h)} \quad ou \quad \frac{(\omega_i^2 I_\theta + K_T)}{(-\omega_i^2 m x_\theta)}$$

Modos de forma do sistema

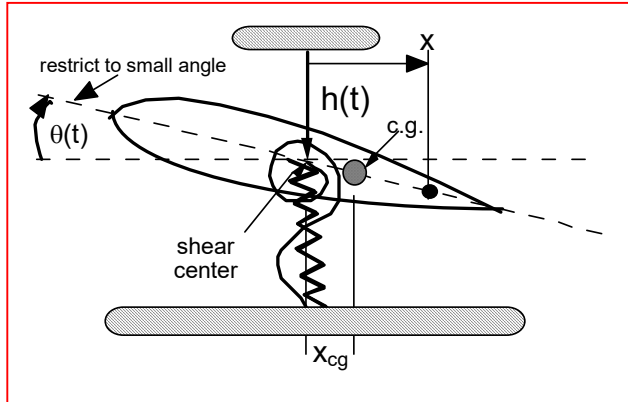


Quanto θ é unitário, quanto é h ?



$$\frac{\bar{h}}{\bar{\theta}} = \frac{b \left(\omega_i^2 \frac{x_{\theta}}{b} \right)}{(-\omega_i^2 + \omega_h^2)} \quad ou \quad \frac{-b(-\omega_i^2 + \omega_{\theta}^2)}{\left(-\omega_i^2 \frac{x_{\theta}}{b} \frac{b^2}{r_{\theta}^2} \right)}$$

Exemplo



$$-\omega_i^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_\theta = 0.10b \quad r_\theta^2 = 0.25b^2$$

$$\omega_h = \frac{K_h}{m} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\omega_\theta = 25 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = 0.3985 \omega_\theta$$

$$\omega_2 = 1.0245 \omega_\theta$$

Exemplo

referência $\omega_h = 10 \text{ rad} / \text{sec}.$

$$\omega_1 = 0.3985 \omega_\theta \quad \text{flexão}$$

referência $\omega_\theta = 25 \text{ rad} / \text{sec}.$

$$\omega_2 = 1.0245 \omega_\theta \quad \text{torção}$$

Modo de vibrar

$$\omega_1 = 0.3985 \omega_\theta \quad \frac{\bar{h}/b}{\bar{\theta}} = \frac{-\left(0.3985^2 \frac{x_\theta}{b}\right)}{\left(0.3985^2 - \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}\right)}$$

$$\frac{\bar{h}/b}{\bar{\theta}} = 13.245$$

fazendo $h/b=1$ obtêm-se o quanto em arfagem θ aparece no modo predominante de flexão

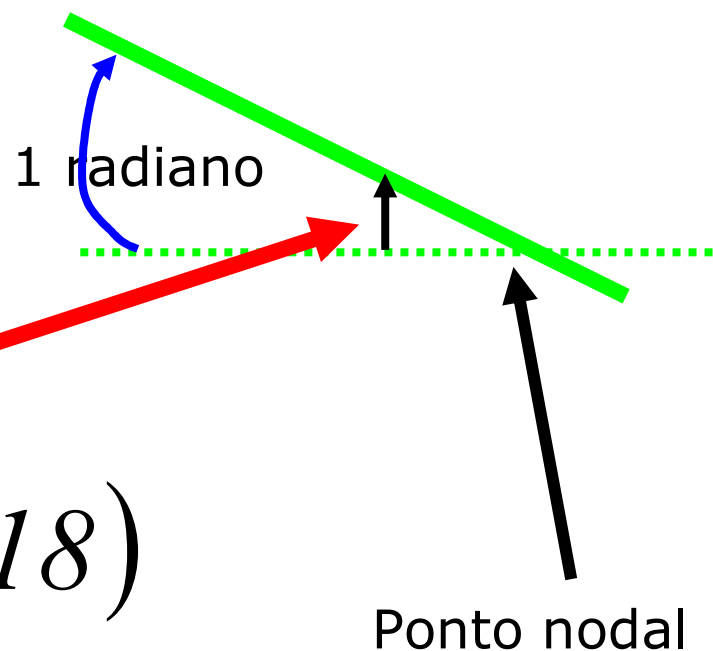
$$\bar{\theta} = \left(\bar{h}/b\right) \frac{1}{13.245}$$



Frequência e modo de vibração em torção

$$\omega_2 = 1.0245 \omega_\theta$$

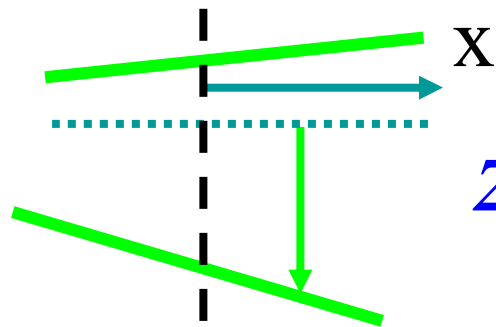
$$\bar{h}/b = -\bar{\theta}(0.118)$$



O que é o ponto nodal?

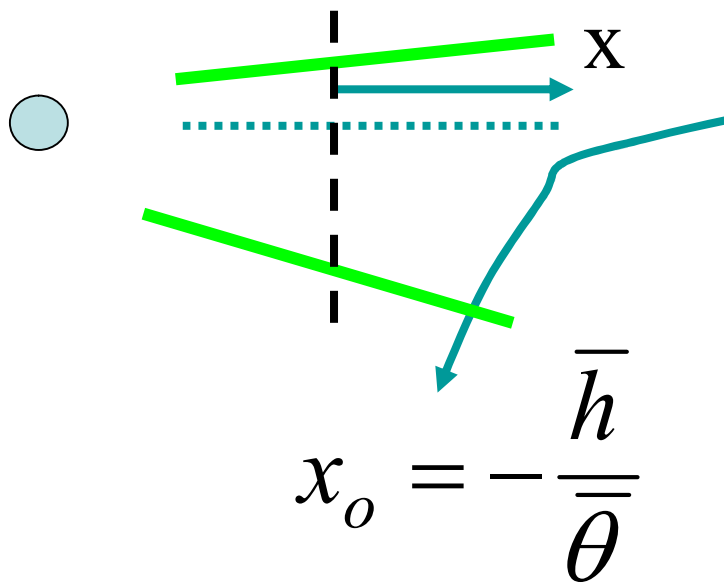
Ponto na estrutura onde não há deslocamento, velocidade ou aceleração quando a estrutura está vibrando em uma frequência natural.

$$z(t) = h(t) + x\theta(t) = (\bar{h} + x\bar{\theta})e^{i\omega t}$$



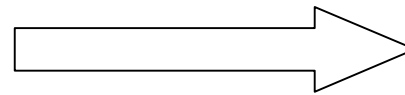
$$z(t) = 0 = (\bar{h} + x_o\bar{\theta})e^{i\omega t}$$

Os pontos nodais dependem dos autovetores



$$(\bar{h} + x_o \bar{\theta}) = 0$$

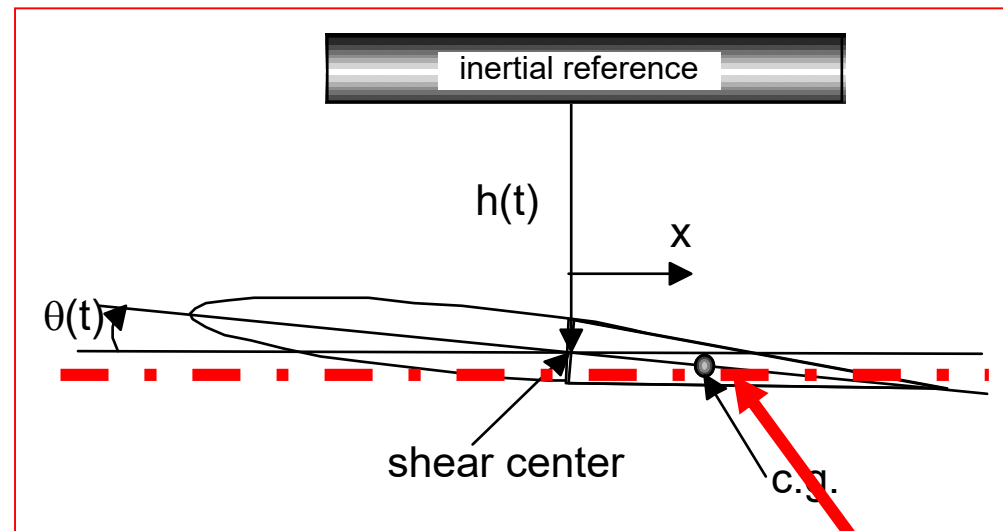
Dividindo por b



$$\frac{x_o}{b} = -\frac{\bar{h}/b}{\bar{\theta}}$$

Primeiro modo: $\frac{\bar{h}/b}{\bar{\theta}} = 13.245 \longrightarrow \frac{x_o}{b} = -13.243$

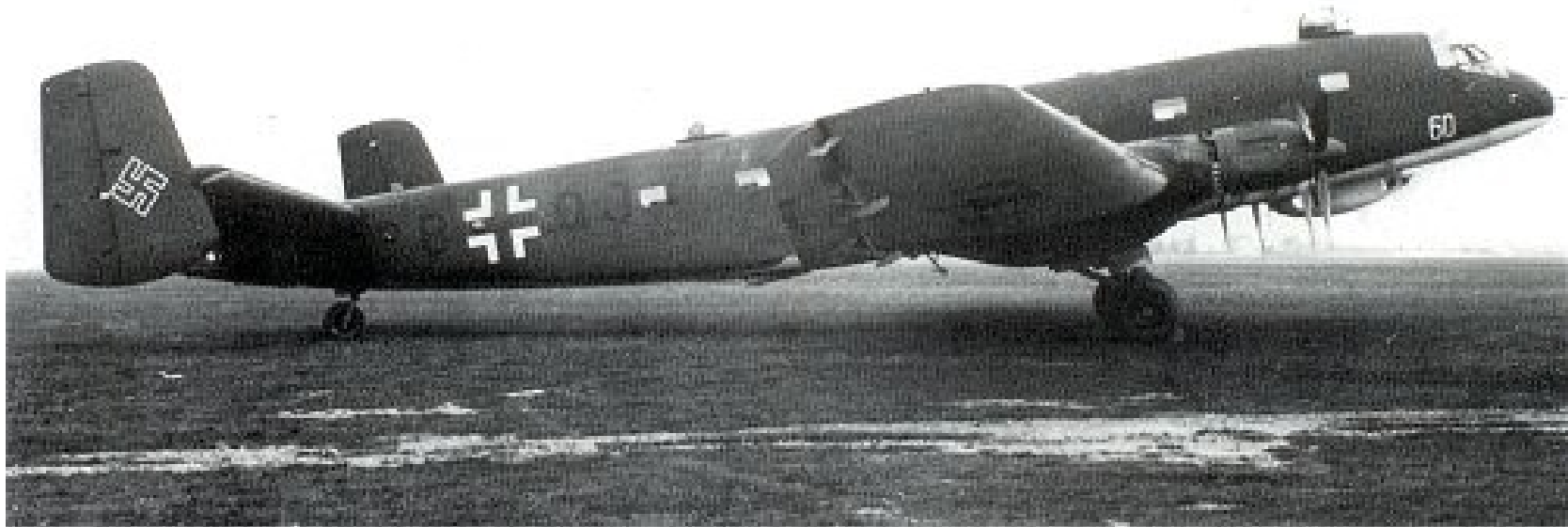
Ponto nodal para a segunda frequência



$$\frac{\bar{h}}{\bar{\theta}} = -0.118$$

$$\frac{x_o}{b} = 0.118$$

Introdução à Aeroelasticidade Dinâmica



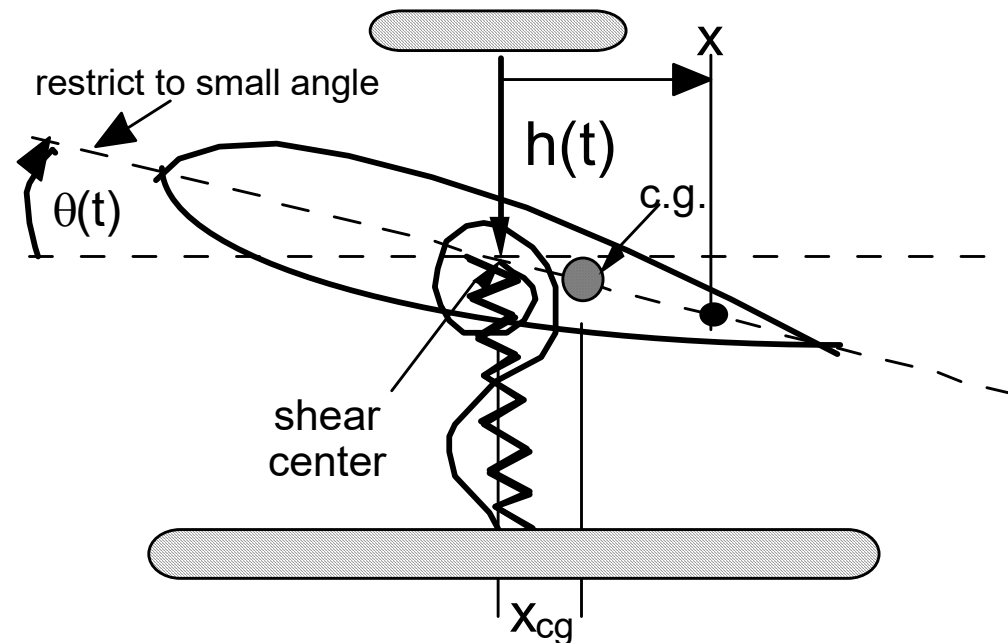
- Junkers Ju-90
Incidente de flutter em 1938 – várias lições aprendidas

Introdução a Aeroelasticidade Dinâmica

- **Primeiro exemplo de fenômeno aeroelástico dinâmico a ser abordado: Flutter** é uma auto-excitação de dois ou mais modos de vibração de um sistema, devidamente alterada e realimentada pelo escoamento de um fluido.
- Pode vir a causar oscilações de amplitude que crescem exponencialmente levando a estrutura a uma falha dinâmica
- Modelo de estudo simplificado
 - Seção típica com 2 graus de liberdade
 - Aerodinâmica simplificada
 - Compreensão do fenômeno

Seção Típica com 2 GDL

- a) Convenção de sinais por conveniência:
O "plunge" é positivo para baixo.
- b) O sistema de referência possui origem no centro elástico ($\mathbf{X}_{ce} = 0$)



$h(t)$ = grau de liberdade em "plunge" (flexão)

$\theta(t)$ = grau de liberdade em "pitch" (torção)

Medidos a partir da posição de equilíbrio estático

Aprox. Aerodinâmica Quase-Estacionária

- A proposta é estudar o problema da seção típica com dois graus de liberdade, considerando a teoria aerodinâmica quase-estacionária;
- Esta teoria pressupõem que as cargas aerodinâmicas são proporcionais aos deslocamentos, velocidades e acelerações associadas a condições de contorno estabelecidas sobre o corpo sujeito a um escoamento.

AN ELEMENTARY EXPLANATION OF THE FLUTTER MECHANISM

**Samuel Pines
Chief Flutter & Computing Engineer
Republic Aviation Corporation**

Flutter Quase-Estacionário

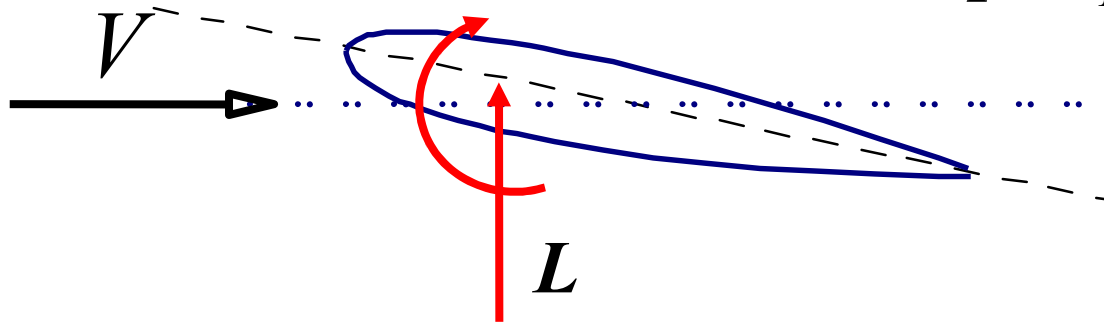
- Flutter é uma instabilidade dinâmica de natureza oscilatória e auto excitada que ocorre devido a interação entre dois modos de movimento distintos e um fornecimento de energia externo (carregamento aerodinâmico).
- Aerodinâmica quase-estacionária **desconsidera** efeitos associados à influência do campo de escoamento aerodinâmico no entorno do aerofólio que é perturbado pelo movimento do corpo, e pode interagir com este;
- Ou seja, o carregamento neste primeiro modelo é função exclusivamente de deslocamentos e velocidades;
- Ângulos de ataque do corpo (ou seção típica) → primeira aproximação assume que a sustentação e o momento é função de um ângulo de ataque associado a variação em θ mais a velocidade de translação (dh/dt) dividida pela velocidade do escoamento não perturbado V .

Sustentação e Momento

e = distância entre o ponto a $\frac{1}{4}$ da corda e o centro elástico CE

(ref. Centro aerodinâmico)

$$L = qSC_{L_\alpha} \left(\theta + \frac{\dot{h}}{V} \right)$$



(ref. eixo elástico)

$$M_Y = L \cdot e = qS \cdot e \cdot C_{L_\alpha} \left(\theta + \frac{\dot{h}}{V} \right)$$

Sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A inclusão do carregamento aerodinâmico é feita adicionando ao lado direito a sustentação L e o momento $L.e$

Inclusão do carregamento aerodinâmico

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ Le \end{Bmatrix}$$

O sinal de L é trocado pois uma sustentação positiva age para cima enquanto que h é positivo para baixo

Dividimos por m , massa do aerofólio: , r_{θ} = raio de giração = $r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m \\ Le/m \end{Bmatrix}$$

Substituindo o carregamento

- Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{V} & 0 \\ \frac{-e}{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Equação de vibração livre o aerofólio sujeito a um escoamento.

Problema estático:

- Derivadas temporais nulas:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Recuperamos o problema estático de onde podemos calcular a velocidade de divergência -> verificar!

Adimensionalizando...

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m\omega_{\theta}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m\omega_{\theta}^2 \\ Le/m\omega_{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m\omega_{\theta}^2 \\ Le/m\omega_{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

Carregamento Aerodinâmico

$$\begin{Bmatrix} -L/m\omega_\theta^2 \\ Le/m\omega_\theta^2 \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} =$$

Fazemos a substituição das relações para a sustentação e o momento, como função dos deslocamentos apenas.

$$= \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_0 + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Aproximação de Pines

Teoria de Pines (1958)

- É uma maneira de chegarmos a solução do problema de estabilidade aeroelástica, através da solução de um sistema de equação homogêneo com variação da rigidez aerodinâmica somente.
- Ou seja, desconsidera-se os efeitos aerodinâmicos associados às velocidades de translação e rotação do aerofólio, uma vez que a sua inclusão implicaria em um amortecimento aerodinâmico o qual impediria tratar o sistema como um problema de vibração livre não amortecida.
- É uma forma conveniente e bastante simplificada para identificar a condição de flutter com ferramenta aerodinâmica simplificada.

Vibração livre com escoamento

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_{\alpha}}}{m\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_{\alpha}}}{m\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solução assumindo MHS

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

Dividindo por $e^{i\omega t}$

$$\frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Associando a parâmetros de similaridade....

$$\frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{\rho V^2 SC_{L\alpha}}{2m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Definindo novos parâmetros

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{\rho V^2 SC_{L_\alpha}}{2m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2, \quad \mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l} = \frac{\text{massa da seção}}{\text{massa do volume de ar}} \Rightarrow \text{Diagrama de uma seção aerodinâmica}$$

$\mu = \text{"massa aparente"}$ $b\omega = [\text{velocidade}]$

$$\frac{q SC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} = \frac{\rho V^2 c l C_{L_\alpha}}{2m\omega_\theta^2} = b \left(\frac{V}{b\omega_\theta} \right)^2 \left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi \mu} \right)$$

Velocidade reduzida = $\frac{V}{b\omega_\theta}$

Parâmetros adimensionais

Estes parâmetros são úteis para caracterizarmos o fenômeno

$$\bar{V} = \frac{V}{b\omega_{\theta}}$$

Velocidade
Reduzida

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\theta}}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2}$$

$$\bar{e} = \frac{e}{b}$$

$$\bar{r}_{\theta} = \frac{r_{\theta}}{b}$$

Adimensionalizando por b

$$\frac{1/b}{1/b^2} \frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\boxed{-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{mb\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Para surgir a massa aparente:

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{mb\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} = b \left(\frac{V}{b\omega_\theta} \right)^2 \left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu} \right)$$

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \\ & + \left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu} \right) \left(\frac{V}{b\omega_\theta} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Sistema aeroelástico

- No domínio da frequência:

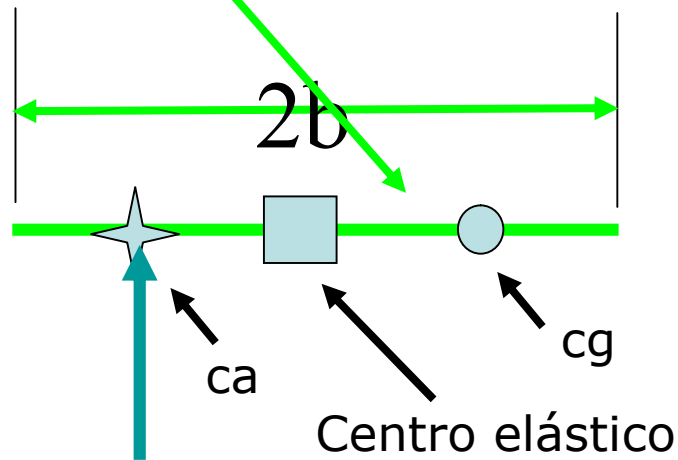
$$-1 \cdot \begin{bmatrix} \Omega^2 - R^2 & \Omega^2 \bar{x}_\theta - \bar{V}^2 \frac{C_{L\alpha}}{\pi\mu} \\ \Omega^2 \bar{x}_\theta & \Omega^2 \bar{r}_\theta^2 - \bar{r}_\theta^2 + \bar{V}^2 \frac{C_{L\alpha} e}{\pi\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- E para estudar a estabilidade deste sistema, posso usar um critério de estabilidade.

Cálculo do Determinante

Para calcularmos a estabilidade, ou seja o flutter, busca-se a Equação característica para obter as suas raízes.

$$(\bar{r}_\theta^2 - \bar{x}_\theta^2)\Omega^4 - \left(\bar{r}_\theta^2[1 + R^2] - \frac{(\bar{e} + \bar{x}_\theta)C_{L\alpha}\bar{V}^2}{\pi\mu} \right)\Omega^2 + \left(\bar{r}_\theta^2 R^2 - R^2 \frac{\bar{V}^2 \bar{e} C_{L\alpha}}{\pi\mu} \right) = 0$$



$$\bar{d} = \bar{e} + \bar{x}_\theta$$

Distância adimensional entre o ca e o cg.

Equação Quártica:

$$A\Omega^4 - B\Omega^2 + C = 0$$

Onde os coeficientes
A, B e C são dados por:

$$A = (\bar{r}_\theta^2 - \bar{x}_\theta^2) = \bar{r}_0^2 > 0 \quad \rightarrow \text{Raio de giração ref. cg}$$

$$B = \left(\bar{r}_\theta^2 [1 + R^2] - \frac{(\bar{e} + \bar{x}_\theta) C_{L\alpha} \bar{V}^2}{\pi \mu} \right)$$

A solução para a eq.
característica possui a forma:

$$C = \left(\bar{r}_\theta^2 R^2 - R^2 \frac{\bar{V}^2 \bar{e} C_{L\alpha}}{\pi \mu} \right)$$

$$\Omega^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Ocorrência de flutter

- Com o acréscimo na velocidade reduzida, o termo dentro do radical decresce, torna-se **negativo** implicando em raízes complexas conjugadas;

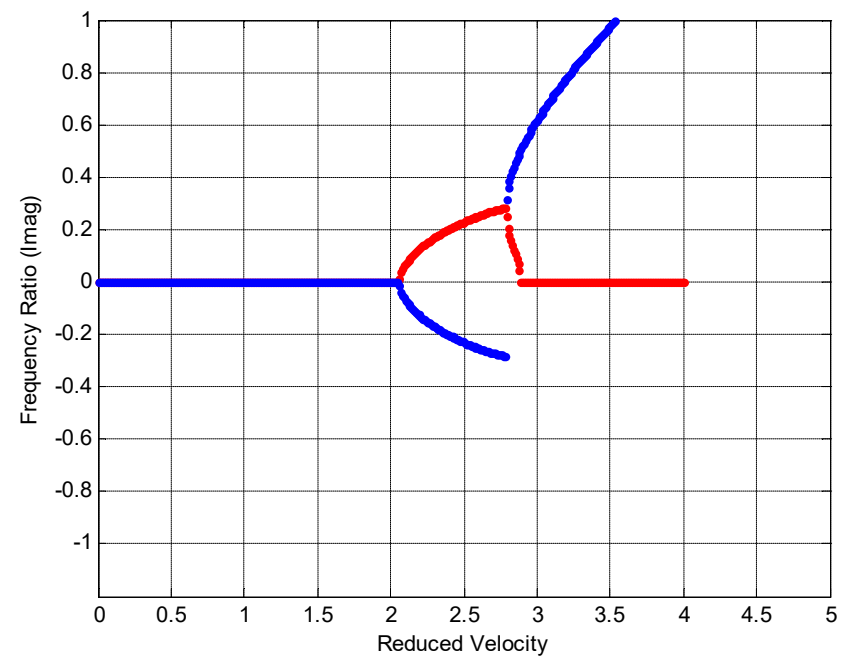
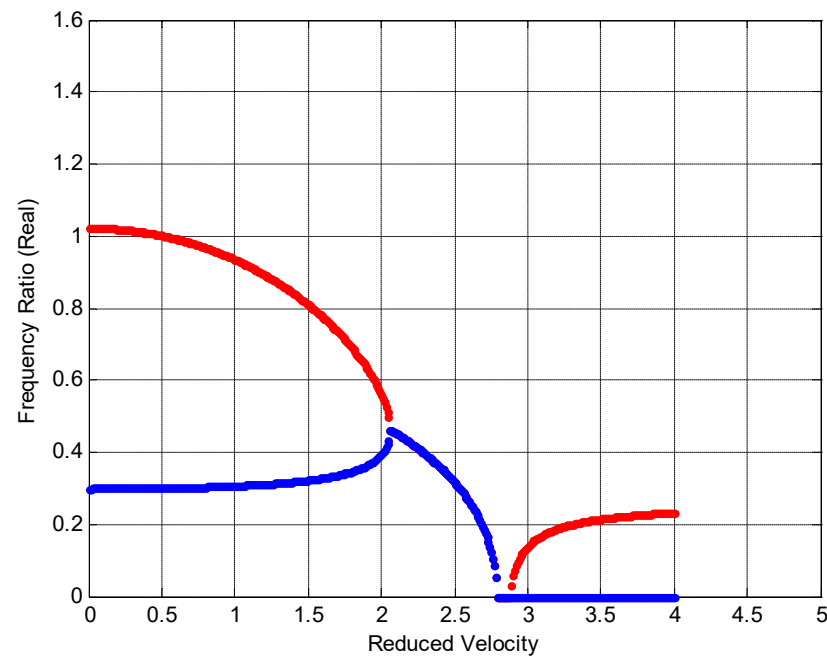
$$\omega = \omega_0 \pm i\sigma, \quad \sigma > 0$$

$$f(t) = a \cdot \begin{cases} e^{(i\omega_0 + \sigma)t} \\ e^{(i\omega_0 - \sigma)t} \end{cases}$$

- Raízes complexas, indicam que o exponencial onde s é positivo indica um movimento divergente!
- Na situação quando $B^2 = 4AC$, temos a **velocidade reduzida** correspondente a **condição de flutter**.

Condições nominais

- Exemplo de um aerofólio com as seguintes características:
- $X_\theta = 0.10$, $e = 0.30$, $R = 0.30$, $\omega_\theta = 25$ rad/s, $\mu = 20.0$



Efeitos dos parâmetros no flutter

- Variação de posição do CG, CE e CA.
- A posição do CG em relação ao CE é dada por x_θ .
- A posição do CA em relação ao CE é dada por “e”.
- E a posição do CA ao CG é denotada por “d”.
- Pode-se analisar a dinâmica da seção típica sujeita à variações paramétricas descritas em termos de posição do CA e do CG com relação ao CE.
- Programa em MATLAB ([pines2gdl.m](#)) ->

Método de Pines codificado:

```
close all
clear all
%
% 2 dof system
% xth ; x _ theta
% rth2 ; ( r _ theta)^2
% R2 ; (omega h /omega alpha)^2
% e -> distncia do CE ao CA - negativa
%      atras do CE, positiva a frente do CE
b=3.0;
S = 1.0;
wth=25.0;
xth =0.10;
e= 0.30;
cla=2*pi;
d=e+xth;
R2 =(0.3)^2;
rth2=(0.5)^2;
mu =20.0 ;
%mu =30.0 ;
%mu =50.0 ;
```

```
for kk=1:400;
    vel(:,kk)=kk*0.01;
%
A=rth2-xth^2;
%
B=rth2*(1+R2)-(vel(:,kk)^2)*(d*cla)/(pi*mu);
%
C=R2*(rth2-(vel(:,kk)^2)*(e*cla)/(pi*mu));
%
rst1(:,kk)=sqrt((B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A));
rst2(:,kk)=sqrt((B-sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A));
end
figure(1);
plot(vel(1,:),real(rst1(1,:)),'.r',vel(1,:),
real(rst2(1,:)),'.b'),
axis([0.0 5.00 0 1.60]),xlabel('Reduced
    Velocity'),
ylabel('Frequency Ratio (Real)'),grid;
figure(2);
plot(vel(1,:),imag(rst1(1,:)),'.r',vel(1,:),
imag(rst2(1,:)),'.b'),
axis([0.0 5.00 -1.2 1.0]),xlabel('Reduced
    Velocity'),
ylabel('Frequency Ratio (Imag)'),grid;
```

A causa do flutter

- O flutter clássico somente ocorre quando a interação de dois modos;
- Vamos supor que existam dois movimentos tais como os associados aos graus de liberdade da seção típica: h e α (ou θ como preferir).
- Ambos obedecem a um movimento harmônico simples, porém apresentam uma defasagem de um ângulo ϕ .
- Defasagem entre movimentos significa que em um determinado instante de tempo um deles atinge o seu máximo enquanto o outro não.
- Esta diferença de fase é essencial para o flutter.

O mecanismo do flutter

- Assume-se que os movimentos de arfagem e vertical são formados de forma que tenham amplitude e fase constantes
- Cálculo do trabalho realizado pelos esforços aerodinâmicos agindo no CA, durante um ciclo de duração T_p .

- Lembre que:

$$\omega T_p = 2\pi \Rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega}$$

- O trabalho realizado pelo escoamento é representado pela força que gera um carregamento (sustentação) a qual é aplicada no CA. O deslocamento resultante neste ponto é dado por:

$$z(t) = h - e \cdot \theta$$

Entendendo o Mecanismo de Flutter

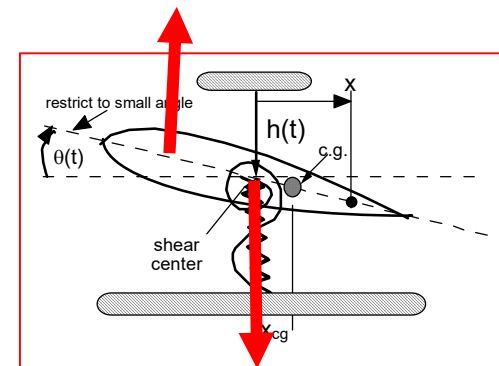
Assume-se um movimento defasado como:

$$\frac{h(t)}{b} = \left(\frac{h}{b} \right)_0 \cos \omega t \qquad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Vamos calcular o trabalho realizado pelo aerofólio em um ciclo de movimento:

$$\omega T_p = 2\pi = 1 \text{ ciclo}$$

$$T_p = 2\pi / \omega$$



Trabalho realizado

- O trabalho realizado é representado pela seguinte relação:

$$W_{aero} = - \int_0^{T_p} L \cdot dz = - \int_0^{T_p} L \cdot \frac{dz}{dt} dt$$

$$\frac{h(t)}{b} = \left(\frac{h}{b} \right)_0 \cos \omega t \quad \text{e} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

- Como:

$$z(t) = h - e \cdot \theta \quad \text{e} \quad L = q S C_{L_\alpha} \theta$$

Trabalho por ciclo:

Temos:

$$L = qSC_{L_\alpha} \theta = qSC_{L_\alpha} \theta_o \cos(\omega t + \phi)$$

$$W_{aero} = -\int_0^{T_p} qSC_{L_\alpha} \theta_o \cos(\omega t + \phi) \cdot (\dot{h} - e\dot{\theta}) dt$$

$$W_{aero} = qSC_{L_\alpha} \theta_o \int_0^{T_p} \cos(\omega t + \phi) \cdot \omega \left(b \left(\frac{h}{b} \right)_o \sin \omega t - e \theta_o \sin(\omega t + \phi) \right) dt$$

$$W_{aero} = -qSC_{L_\alpha} \pi h_o \theta_o \sin \phi$$

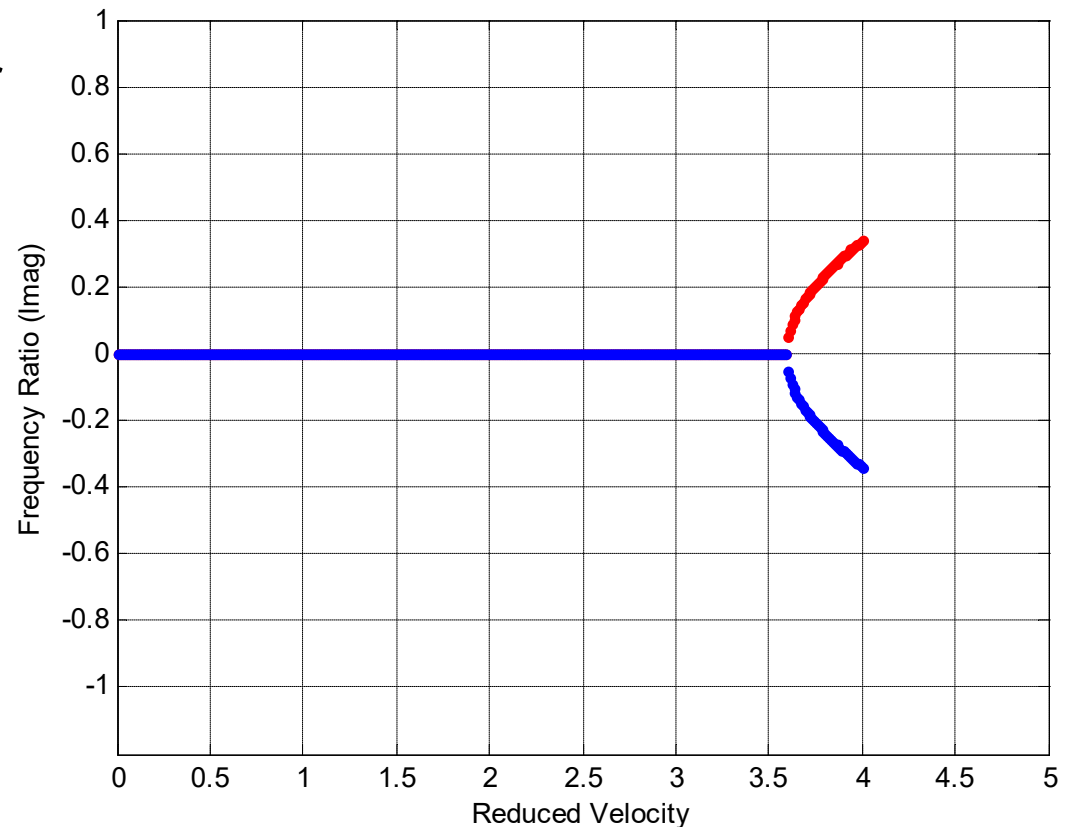
Trabalho por ciclo

$$W_{aero} = -qSC_{L_\alpha} \pi h_o \theta_o \sin \phi$$

- Se $0 < \phi < 180^\circ$, $W_{aero} < 0 \rightarrow$ o aerofólio transfere energia para o escoamento !
- Se $-180^\circ < \phi < 0$, $\sin \phi < 0$, o aerofólio absorve energia do escoamento, $W_{aero} > 0$, a tendência é aumentar a amplitude do movimento \rightarrow Flutter !
- Quando $\phi = 180^\circ$ tem-se o ponto de estabilidade neutra, associado ao limite da condição onde o aerofólio começa a extrair energia do escoamento.

Acoplamento dos modos

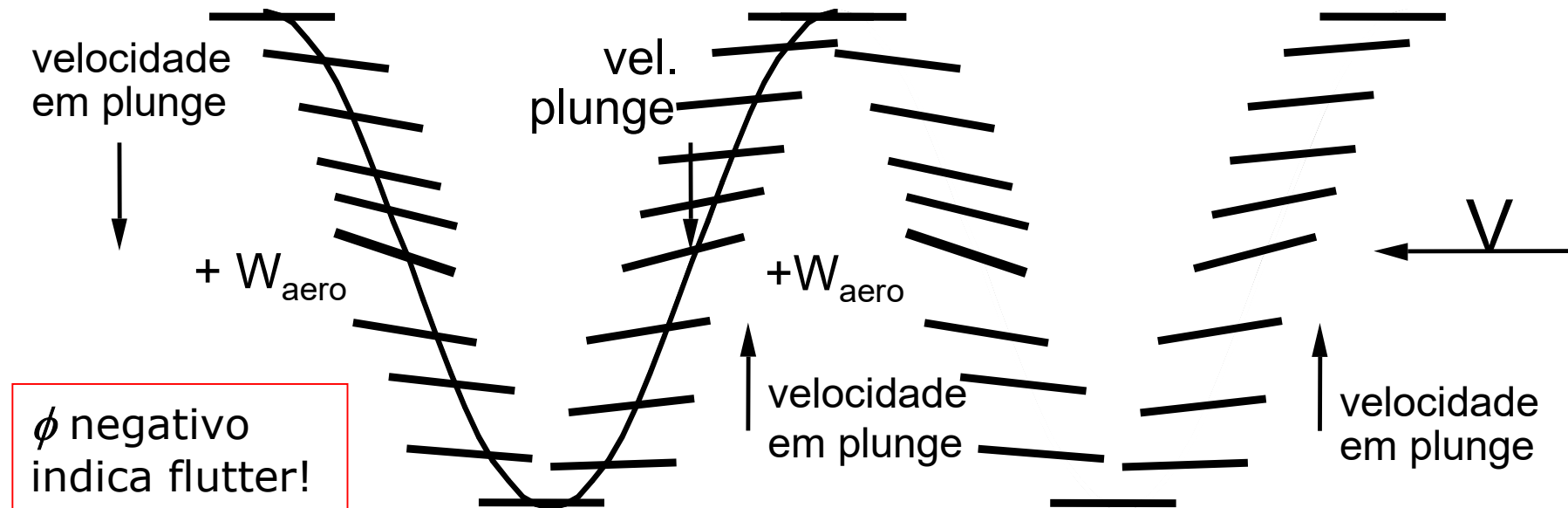
- Os movimentos de “pitch” e “plunge” estão defasados em 180° , o que é representado na solução de flutter pelo par de raízes complexas conjugadas que surgem na condição de flutter, onde ocorre o acoplamento destes dois graus de liberdade.
- Observe que esta interpretação é válida apenas para o caso onde a defasagem do carregamento com relação ao movimento se dá através da rigidez aerodinâmica.
- Esta é a idealização imposta por Pines.



Defasagem entre os movimentos

Fisicamente o que ocorre no caso de um modelo quase-estacionário onde se considera a contribuição da velocidade de flexão do aerofólio, este ângulo de defasagem pode ser no máximo $\phi = -90^\circ$.

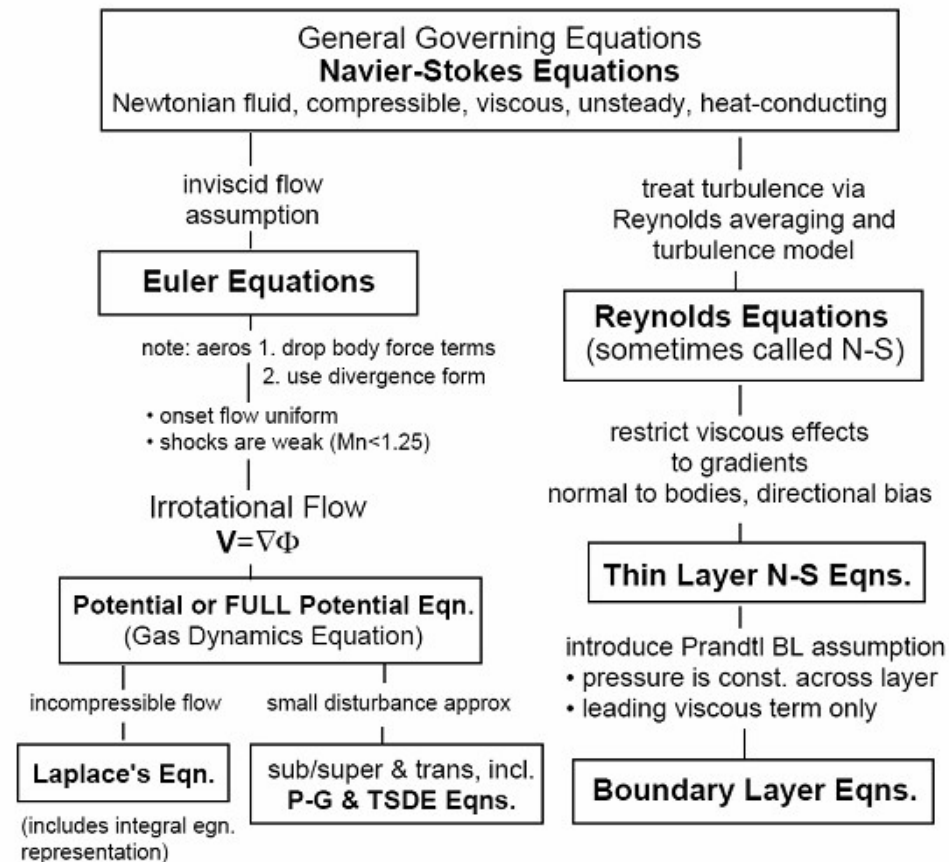
$$W_{air} = -qSC_{L_\alpha} \pi h_o \theta_o \sin \phi \quad L \sim \theta(t) = \theta_o \cos(\omega t + \phi)$$



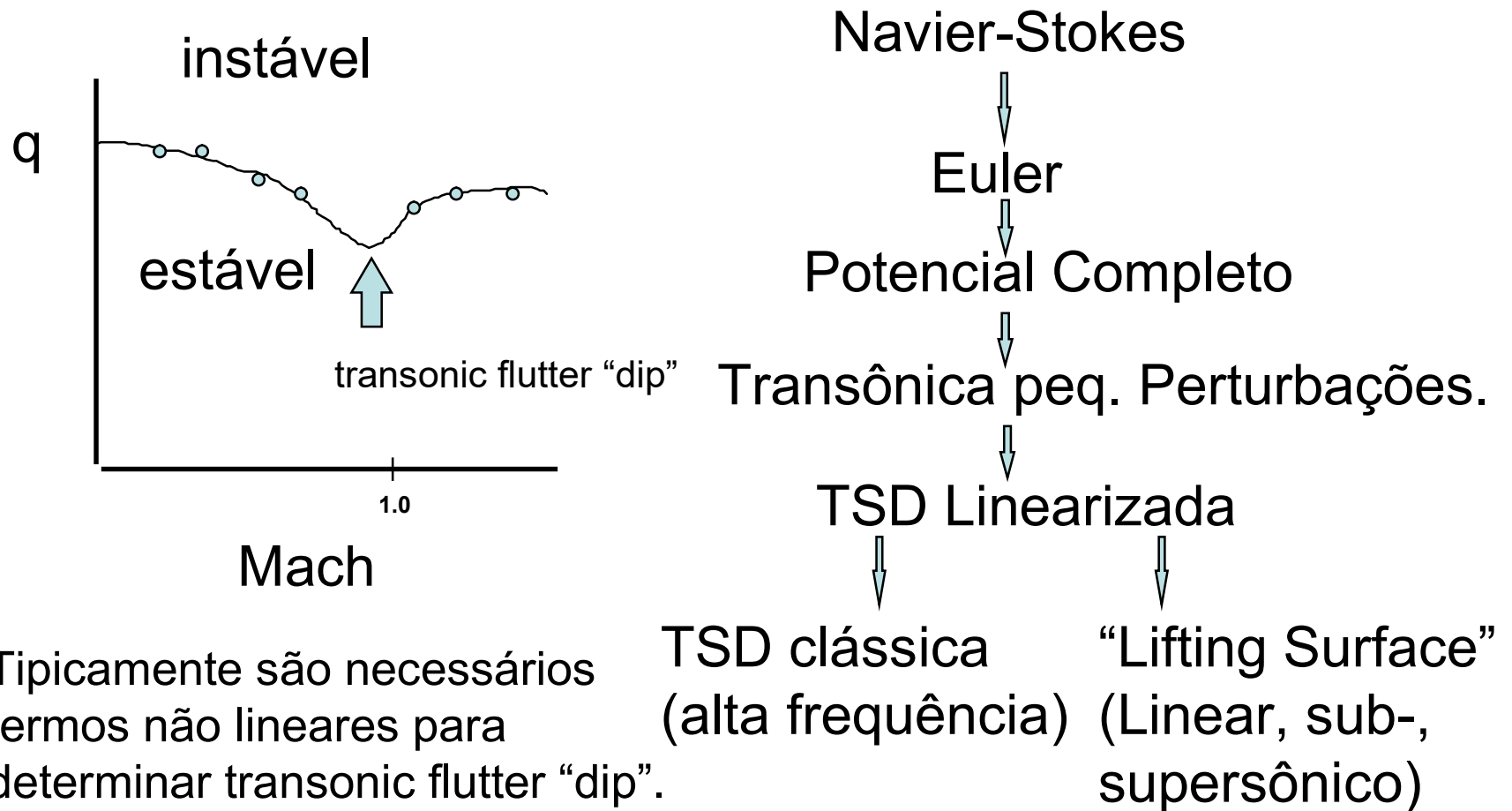
Entendendo o movimento ...

- Analisando o movimento na amplitude mais negativa do movimento em plunge, o ângulo de arfagem é nulo (defasagem). A medida que a velocidade em plunge aumenta, o ângulo em arfagem decresce e a sustentação age na direção do movimento em plunge que aumenta.
- Quando o deslocamento em plunge é nulo, o ângulo em pitch é mais negativo. Aumentando o plunge, o pitch decresce porém sendo ainda negativo, a sustentação continua agindo na direção do movimento em plunge.
- Ao atingir o máximo deslocamento, a velocidade é nula, mas a partir deste ponto o ângulo de pitch aumenta (fica mais positivo) promovendo uma sustentação na direção do movimento restaurador em plunge, ou seja, trabalho positivo é realizado durante todo o ciclo, na condição em que a defasagem do movimento é em um ângulo onde $\sin \phi < 0$.

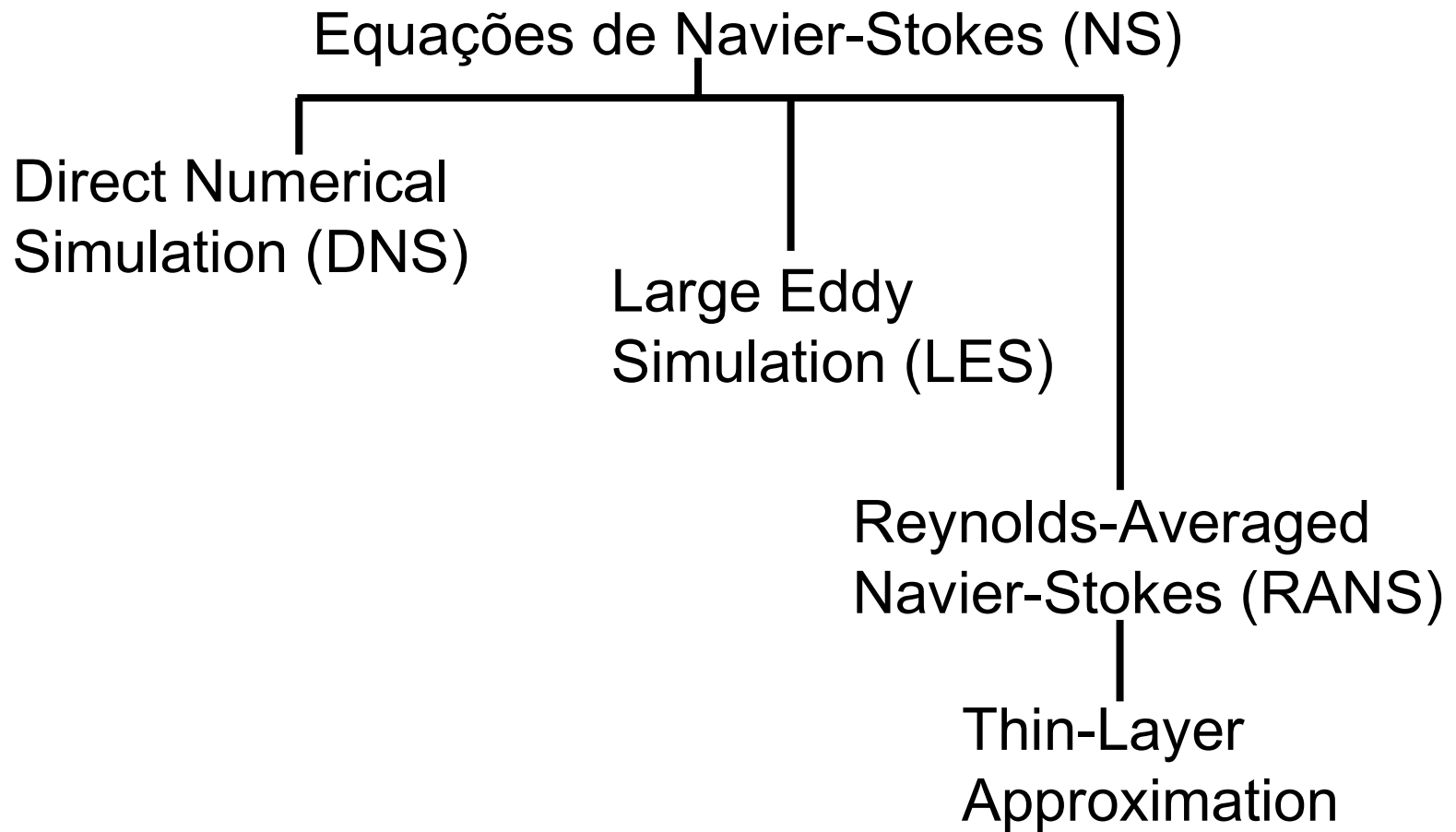
Hierarquia das Equações de dinâmica dos fluidos



Aerodinâmica não linear



Hierarquia das Equações em Aerodinâmica



Hierarquia das Equações em Aerodinâmica

Equações de Navier-Stokes (NS)



Direct Numerical
Simulation (DNS)

- Solução exata das equação de Navier-Stokes, sem nenhuma aproximação por modelos de turbulência
- Requer muito esforço computacional : escoamento em um aerofólio requer exaflop (10^{18} flops)
- A turbulência contem um grande espectro de vórtices – limitada a geometrias simples e baixo Reynolds

Hierarquia das Equações em Aerodinâmica

Equações de Navier-Stokes (NS)



Large Eddy
Simulation (LES)

- Passo seguinte de simplificação, partindo de DNS
- Modela escalas de turbulência mais energéticas
- Escalas menores aproximadas por sub-malhas
- Custo computacional bem menor que DNS

Comparação entre LES e DNS

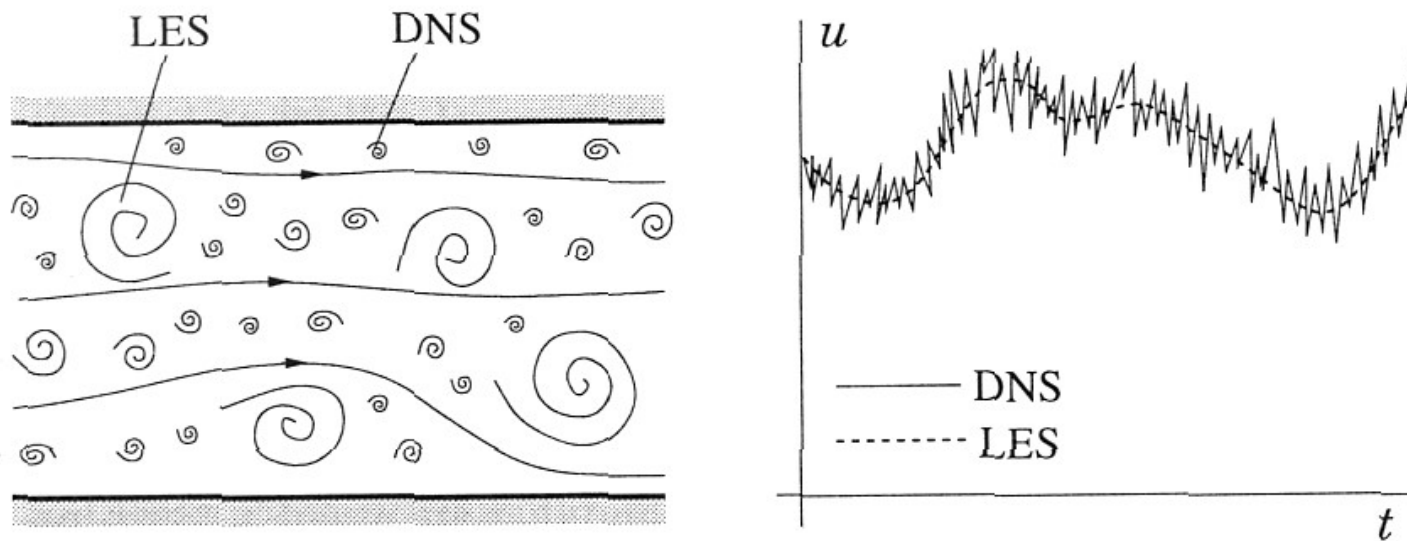


Fig. 9.3. Schematic representation of turbulent motion (left) and the time dependence of a velocity component at a point (right)

Hierarquia das Equações em Aerodinâmica

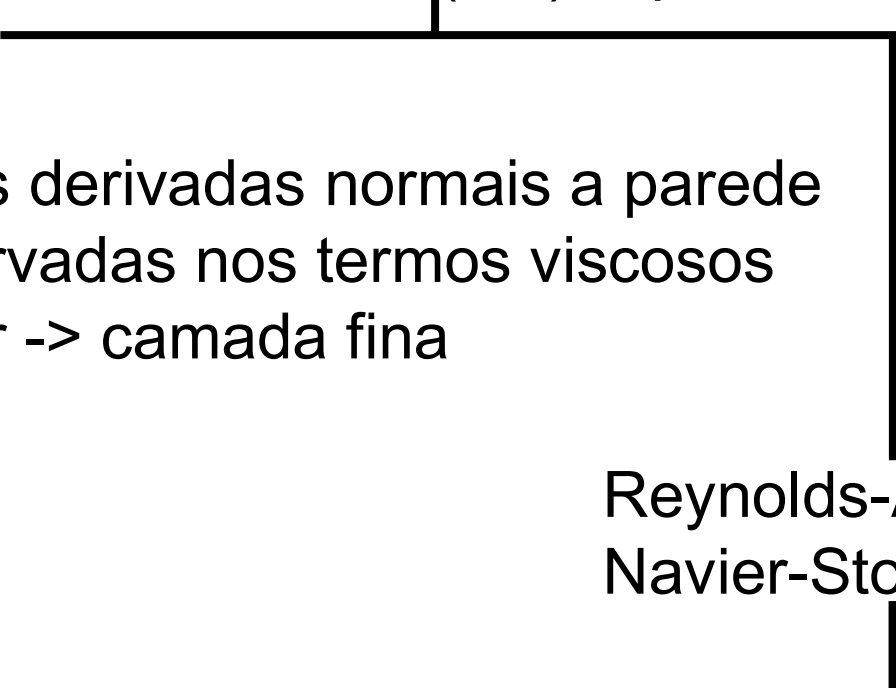
Equações de Navier-Stokes (NS)

- Efeitos “estacionários” turbulentos obtidos por média no tempo
- Esta média no tempo cria mais incógnitas do que equações (fechamento)
- Os modelos de turbulência permitem o fechamento.

Reynolds-Averaged
Navier-Stokes (RANS)

Hierarquia das Equações em Aerodinâmica

Navier-Stokes (NS) Equations



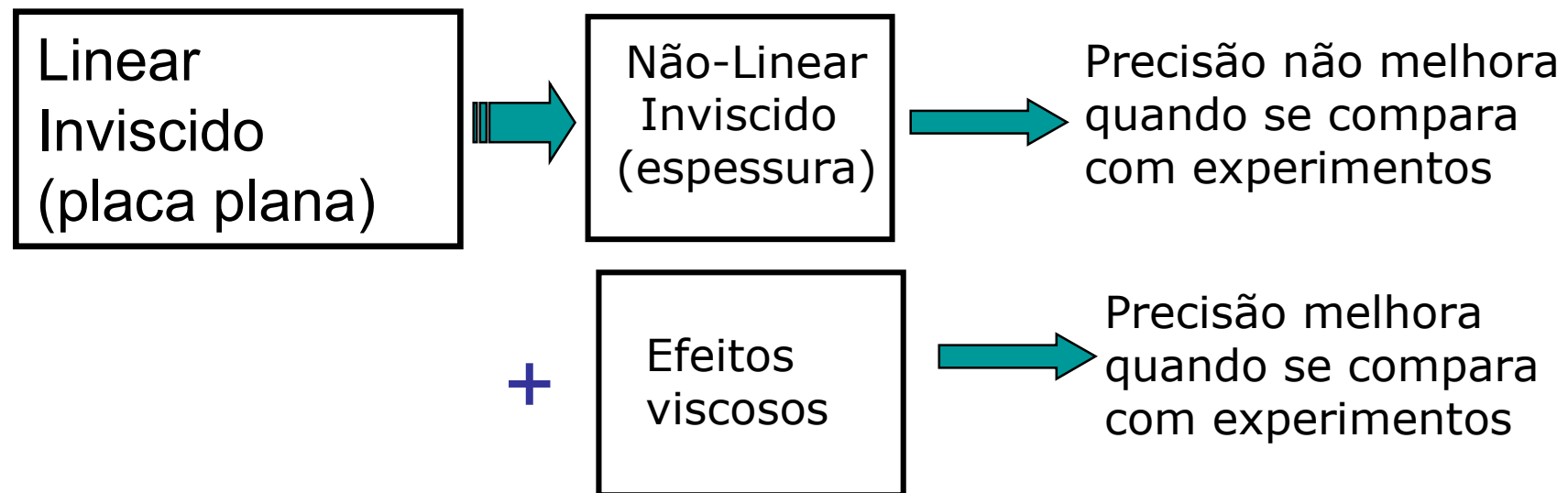
```
graph TD; A[Navier-Stokes (NS) Equations] --- B[• Apenas as derivadas normais a parede são preservadas nos termos viscosos  
Thin Layer -> camada fina]; A --- C[Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)]; C --- D[Thin-Layer Approximation];
```

- Apenas as derivadas normais a parede são preservadas nos termos viscosos
Thin Layer -> camada fina

Reynolds-Averaged
Navier-Stokes (RANS)

Thin-Layer
Approximation

Hierarquia das Equações em Aerodinâmica



Comentário: Os efeitos de espessura e viscosidade se compensam, por este motivo os métodos lineares tem se mostrado tão eficientes.

Hierarquia das Equações em Aerodinâmica

Não-Linear
Inviscido com
espessura



Os choques tendem a ser mais fortes e mais para trás quando comparados com experimentos

A fronteiras de flutter tendem mostrar um “transonic dip” mais evidente

Viscous
effects



Reduz a força do choque quando comparado com o caso invíscido, move o choque para a frente devido à interação com a camada limite.

O “transonic dip” é atenuado quando comparado com o caso invíscido

O modelo matemático geral

- O modelo matemático que descreve o escoamento de um fluido contínuo, considerando a viscosidade, compressibilidade e admitindo condução de calor, em um contexto não estacionário é representado pelas as equações de Navier-Stokes.
- Estas equações representam o comportamento de um fluido a através da derivada substancial das grandezas que caracterizam o escoamento, tais como da massa, velocidade e sua energia.
- A derivada substancial representa a variação de uma determinada propriedade de um elemento de fluido no tempo simultaneamente com a variação de sua posição no espaço.
- A derivada substancial é fisicamente diferente da derivada da propriedade no tempo na forma convencional, pois esta última derivada não leva em conta mudança de posição dos elementos de fluido no espaço. As equações de Navier-Stokes são apresentadas a seguir:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{u} = 0 \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \bar{\bar{\tau}} \quad \rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla [\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{u} - \vec{q}]$$

Relações constitutivas

- Desta forma faz-se necessário usar relações constitutivas para resolver o problema. Estas relações constitutivas são para a pressão:

$$p = \rho RT = (\gamma - 1)ei \qquad ei = CvT$$

onde, e_i é a energia interna, T a temperatura e C_v a calor específico volume constante. A entalpia é relacionada a estas grandezas por:

$$H = h + 1/2|\vec{u}|^2 = ei + p/\rho + 1/2|\vec{u}|^2$$

As tensões viscosas e o fluxo de calor são dados por:

$$\vec{q} = -K\nabla T \qquad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu (\nabla \vec{u}) \delta_{ij}$$

Equações de Euler

- Prandtl em 1904 concluiu que para número de Reynolds suficientemente grandes, os efeitos importantes relacionados à viscosidade permaneciam confinados em uma camada fina junto ao corpo, ou seja, na camada limite. Esta hipótese é válida para casos onde o comprimento característico do corpo é bem maior que a espessura desta camada. Desta forma as equações da Navier-Stokes podem ser representadas por uma forma mais simples, onde os efeitos de viscosidade podem ser desconsiderados:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p \quad \rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Esta forma é conhecida como as equações de Euler. Os termos de tensões viscosas e de fluxo de calor foram desconsiderados, uma vez que a condutividade térmica é uma função da viscosidade.

Modelo Isentrópico

- Assumindo a hipótese que o escoamento é isentrópico, isto é reversível e adiabático, pode-se resolver o sistema de equações que representa este tipo de escoamento apenas considerando as conservação da massa e da quantidade de movimento, mas uma relação entre a pressão e a densidade dada pela cadeia isentrópica:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

onde p_0 e ρ_0 são valores de referência para a pressão e densidade respectivamente. Fluido pode ser considerado barotrópico (densidade é função apenas da pressão ou de uma constante), e o sistema de equações agora possui cinco equações escalares e cinco incógnitas, que são as três componentes de velocidade u , v , w , a densidade e a pressão.

Modelo Aerodinâmico para a Aeroelasticidade

- Escoamento Potencial: Podemos considerar como adequados, modelos aerodinâmicos baseados em teorias aerodinâmicas lineares
- Assume que o escoamento é irrotacional (Teorema de Crocco)
- Escoamento irrotacional é aquele onde as partículas do fluido não rotacionam em torno de um eixo.
- A relação matemática -> rotacional do campo de velocidades. Ou seja :

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

- Para uma determinada função escalar ϕ , tem-se, que a igualdade:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

é verdadeira.

- conclui-se portanto que existe esta função escalar, cujo gradiente representa um campo de velocidades, ou seja,
- E esta função é conhecida como o potencial de velocidades.

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

Ver Karamcheti, p 244

Potencial de velocidades

- O potencial de velocidades ϕ é uma função das coordenadas espaciais, onde cada uma das componentes de velocidade do vetor velocidade total são as derivadas do potencial em cada uma das direções do sistemas de coordenadas:

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} = \nabla\phi$$

- Com a definição do potencial de velocidade pode-se reduzir ainda mais o problema de cinco equações a cinco incógnitas para três equações e três incógnitas.

Linearização da Equação do Potencial Completo I

- Processo de linearização: assume-se que existe uma solução de estado estacionário assumindo que as derivadas temporais são nulas.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a^2} \left\{ \nabla \phi \cdot \nabla \left[\frac{(\nabla \phi \cdot \nabla \phi)}{2} \right] \right\} = 0$$

O potencial de velocidade, assim como as pressões e densidade podem ser representados em um contexto de pequenas perturbações em torno de um escoamento não perturbado alinhado com a direção x como:

$$\phi(x, y, z, t) = U_{\infty} x + \tilde{\phi}(x, y, z, t)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \tilde{p}(x, y, z, t)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, y, z, t)$$

$$\vec{u}(x, y, z, t) = U_{\infty} \vec{i} + \nabla \tilde{\phi}$$

$$a(x, y, z, t) = a_0 + \tilde{a}(x, y, z, t)$$

Equação do Potencial Aerodinâmico Linearizado

- Excluindo os termos não lineares em termos do potencial de perturbação, a equação do potencial completo é reescrita como:

$$\nabla^2 \tilde{\phi} - \frac{1}{a_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + 2U_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} + U_\infty^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} \right\} = 0$$

- Esta equação é conhecida como a equação do potencial linearizado a pequenas perturbações.
- velocidade do som local -> velocidade do som do escoamento não perturbado. (O Mach também o será)
- Escrevendo esta equação em termos do número de Mach do escoamento não perturbado, tem-se

$$\left(1 - M_\infty^2 \right) \nabla^2 \tilde{\phi} - \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} - 2 \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} = 0$$

Condições de contorno a pequenas perturbações

- A relação matemática que permite estabelecer uma condição de contorno também pode ser linearizada da mesma maneira que foi linearizada a equação do potencial completo.
- Ou seja admite-se que a linearização é feita a partir de uma condição de escoamento não perturbando.
- Cabe lembrar que esta restrição limita a aplicação a corpos esbeltos ou superfícies de sustentação finas.
- Para o caso de uma superfície de sustentação fina, assume-se que a superfície da asa pode ser descrita por uma função dada por:

$$F = F_w(x, y, z, t)$$

- Esta função pode ser decomposta em duas parcelas independentes, a espessura h_t e a deformação do plano médio da superfície h_m , normalmente designado como plano $z=0$.

Condições de contorno linearizadas

- Eliminando os termos não lineares da relação anterior, tem-se a forma final para a condição de contorno linearizada:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} = w}$$

- Pode-se notar que as componentes de h podem ser tratadas independentemente. Este fato é importante quando se considera o problema de resposta dinâmica da superfície de sustentação. Assume-se que o efeito de espessura é independente do tempo (o perfil de uma asa normalmente não se deforma), ou seja:

$$h(x, y, t) = h_m(x, y, t) \pm h_t(x, y)$$

Outras condições de contorno

- Condição de contorno na esteira:
 - **Pelo princípio da sustentação estacionária, deve haver viscosidade para haver sustentação;**
 - **Porém o modelo a ser empregado para a solução dos nossos problemas não estacionários é invíscido e irrotacional;**
 - **Condição de Kutta: pressupões que não existe salto de pressão e velocidade no ponto que define o bordo de fuga;**
- Teorema Kelvin: “se as forças de campo derivam de um potencial, e o fluido for ideal e barotrópico, a circulação de velocidade em torno de um circuito fechado e arbitrário permanece constante ao longo do movimento do fluido”

O teorema de Kelvin vale para os casos de escoamento compressível e incompressível.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$$

Reproduzir a figura da página 25 das notas a mão.

Linearização da pressão

- A linearização da equação de Kelvin no fornece: (Ref. BAH)

$$(p - p_0) = -\rho_0 \left[\frac{1}{2} U_\infty^2 + U_\infty \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right]$$

$$(p - p_0) = -\rho_0 \frac{1}{2} U_\infty^2 - \rho_0 U_\infty \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) - \rho_0 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$$

$$\underbrace{p - p_0 + \overbrace{\rho_0 \frac{1}{2} U_\infty^2}^{p_0}}_0 = -\rho_0 \left[U_\infty \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right]$$

$$p = -\rho_0 \left[U_\infty \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \right] \quad \leftarrow \text{Pressão linearizada}$$

O Potencial de aceleração

- Lembrando que a pressão relaciona-se ao potencial a pequenas perturbações por uma relação linear:

$$p = \rho_0 \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right) = \rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)$$

pode-se: transformar a equação para o potencial aerodinâmico linearizado:

$$\beta^2 \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) \tilde{\phi}_{xt} - \left(\frac{1}{a_0^2} \right) \tilde{\phi}_{tt} = 0$$

para:

$$\beta^2 p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} - \left(\frac{2U_\infty}{a_0^2} \right) p_{xt} - \left(\frac{1}{a_0^2} \right) p_{tt} = 0$$

$$\boxed{\beta^2 = (1 - M^2)}$$

$$\boxed{p = -\rho_0 (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x) = -\rho_0 \frac{D\tilde{\phi}}{Dt} \quad , \quad \psi = (\tilde{\phi}_t + U_\infty \tilde{\phi}_x)}$$

Modelos Clássicos

Escoamento Incompressível

- Para um primeiro estudo da aerodinâmica não estacionária aplicada a aeroelasticidade, vamos estudar modelos clássicos tais como os modelos de:
 - Wagner
 - Theodorsen
 - Küssner
 - Sears
- Estes modelos são fundamentados em soluções elementares da equação para o potencial aerodinâmico linearizado, em regime de escoamento incompressível ($Mach = 0$), conhecida também como Equação de Laplace.

Referência para estes tópicos:
B.A.H., "Aeroelasticity"

Equação de Laplace

- Caso particular da equação do potencial aerodinâmico linearizado:

$$\left(1 - M_{\infty}^2\right) \nabla^2 \tilde{\phi} - \frac{M_{\infty}^2}{U_{\infty}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} - 2 \frac{M_{\infty}^2}{U_{\infty}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial t} = 0$$

ou

$$\beta^2 \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} - \left(\frac{2U_{\infty}}{a_0^2}\right) \tilde{\phi}_{xt} - \left(\frac{1}{a_0^2}\right) \tilde{\phi}_{tt} = 0$$

- Regime incompressível Mach = 0:

$$\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = 0$$

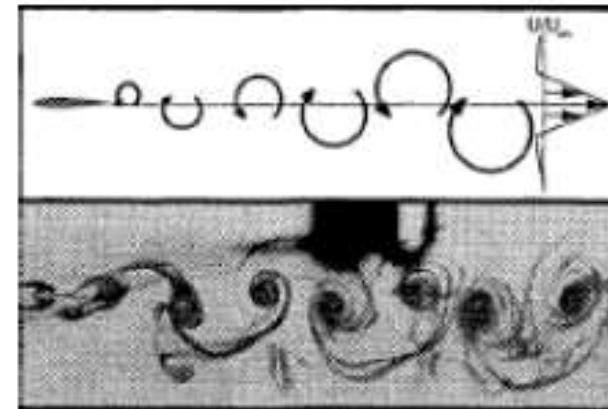
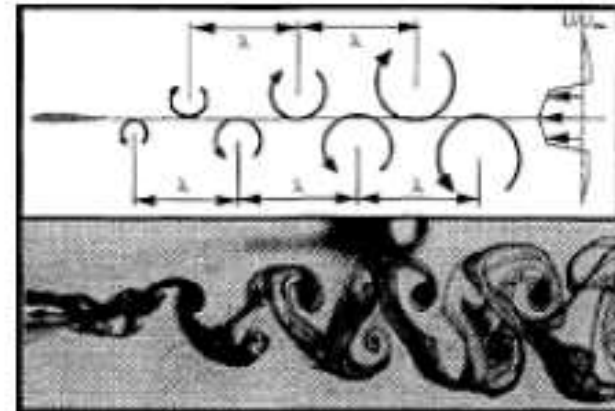
Escoamento incompressível

- Note que a simplificação foi realizada apenas aplicando a condição $M = 0$.
- Esta equação é válida para problemas não estacionários, os quais serão tratados cinematicamente.
- Um primeiro conjunto de modelos, baseado em soluções elementares da equação de Laplace, são os modelos aerodinâmicos não estacionários de Wagner, Theodorsen,, Küssner, e Sears por exemplo;
- Note que estes modelos foram desenvolvidos para regime incompressível, e sua extensão para o caso compressível é essencialmente feita através de correções.

Modelo de Wagner

Wagner, Herbert: Über die Entstehung des Dynamischen Auftriebes von TragFlügeln, fev. 1925

- Assume-se como um primeiro exemplo um aerofólio bidimensional movimentando-se em arfagem;
- Este aerofólio oscilante gera uma esteira de vórtices alternados cujo potencial a eles associado modifica o carregamento aerodinâmico sobre o perfil;
- As forças aerodinâmicas portanto não dependem somente da posição instantânea do aerofólio, mas também da posição e intensidade deste esteira de vórtices;
- Ou seja, isto significa que as forças não dependem exclusivamente do movimento instantâneo, mas também de uma história do movimento desde o seu início.

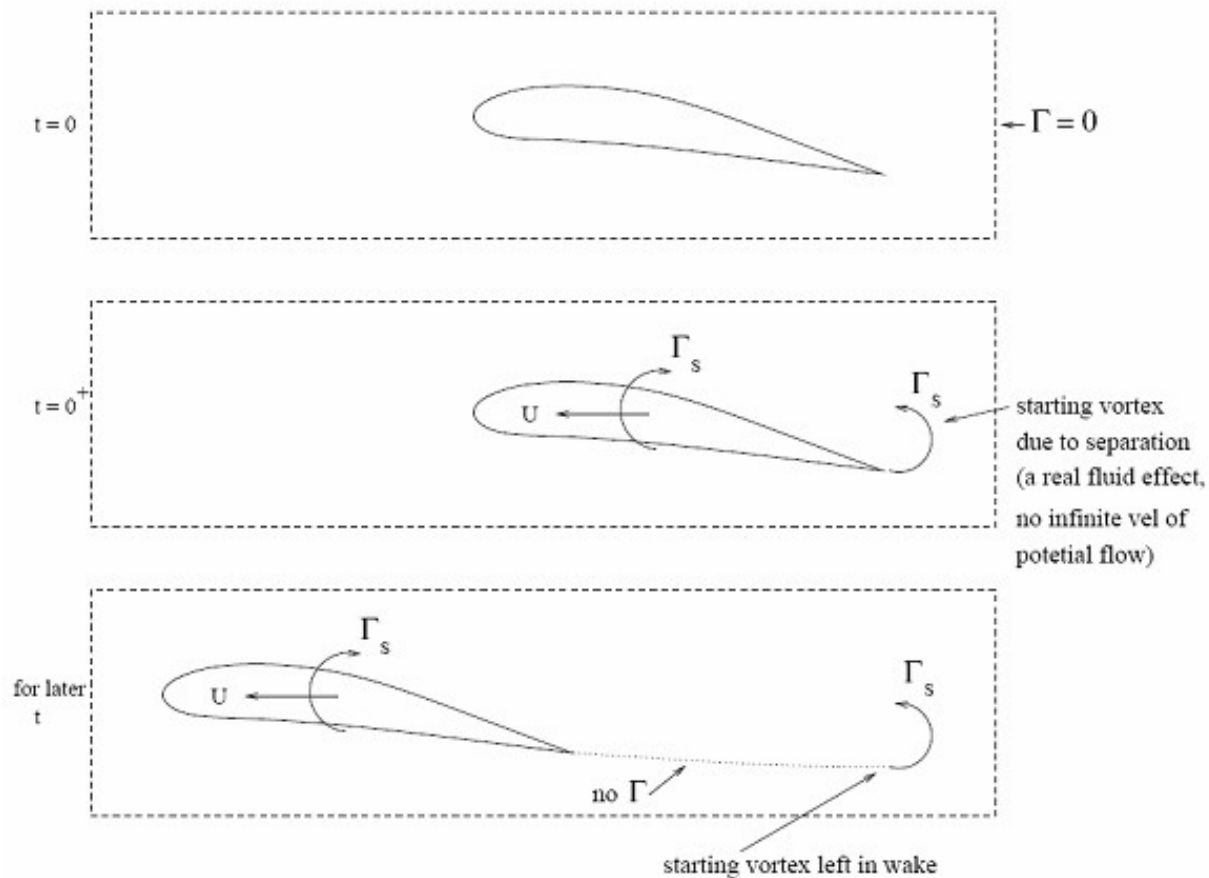


Vórtice de partida

- O efeito da esteira é significativo a ponto de reduzir a magnitude das forças atuantes no aerofólio;
- Esta alteração no carregamento, causada pela esteira de vórtices pode mudar significativamente as características aeroelásticas de um sistema;
- Vórtice de partida – é o modelo aerodinâmico não estacionário mais simples;
- Supõem-se que uma placa plana que idealiza um aerofólio é submetida a uma variação súbita (impulsiva) em ângulo de ataque;
- Esta variação súbita no carregamento aerodinâmico gera o vórtice de partida que é suficientemente forte, a ponto de reduzir em 50% o carregamento instantâneo inicial no aerofólio;
- Após um curto espaço de tempo, o seu efeito deixa de ser significativo uma vez que ele é **convectado** ao longo da esteira e seu potencial torna-se desprezível para o aerofólio.

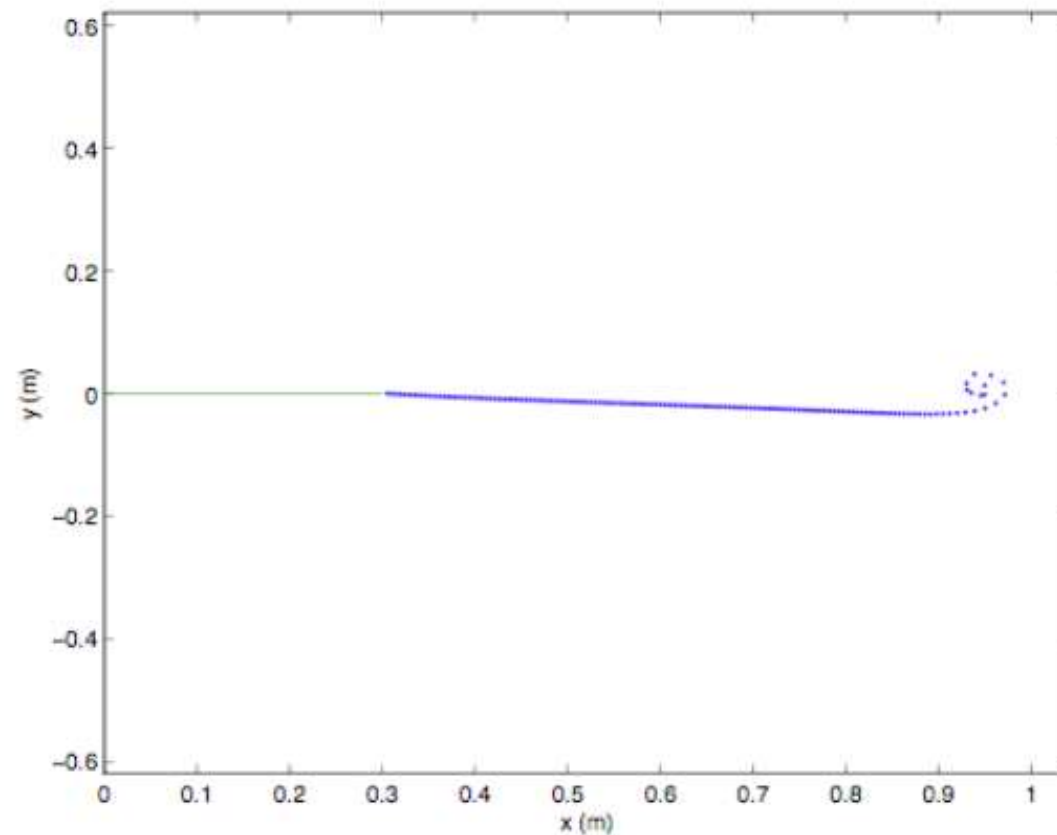
Circulação total

Par de vórtices



Desenvolvimento da esteira

- Vórtice de partida:

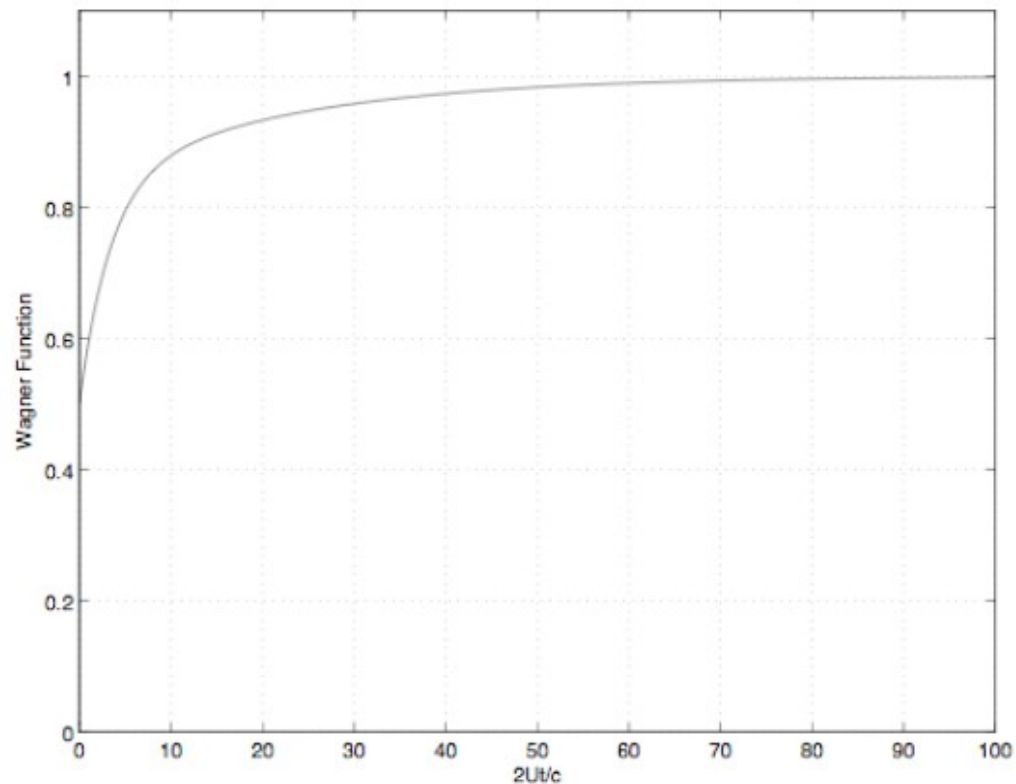


Modelo matemático

- O efeito do vórtice de partida na sustentação pode ser modelado pela função de Wagner;
- Esta função estabelece que o carregamento aerodinâmico no início do movimento é metade do carregamento aerodinâmico e regime permanente;
- Este carregamento instantâneo cresce suavemente até alcançar o valor de regime permanente para o ângulo de ataque final, após a entrada impulsiva e ângulo de ataque.

Resposta indicial

- Função de Wagner:
- Resposta a uma variação súbita em ângulo de ataque do aerofólio.
- A função de Wagner é igual a 0,5 quando $t=0$ e cresce assintoticamente para 1.0.
- Esta resposta é também conhecida como resposta indicial do sistema.



Sustentação

- (ref. BAH e I.E.Garrick)
- A Função de Wagner $\phi(s)$ fornece o histórico de variação no tempo da sustentação, dada uma entrada degrau em ângulo de ataque do aerofólio;
- Ela é normalmente representada em função do tempo adimensionalizado por: $s = V_0 t / b$
- Este tempo adimensional ou (tempo reduzido) pode ser entendido como uma distância em semi cordas.
- Sustentação: $L_C(s) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha} \alpha_0 \cdot 2b \cdot \phi(s)$

Função de Wagner

- E como é a função de Wagner?
- Em 1925, Wagner derivou uma função que modela a resposta do carregamento de natureza circulatória a uma variação súbita em ângulo de ataque, supondo escoamento incompressível, e função do tempo reduzido dado por:

$$\phi(s) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma s}}{\sigma^2 \left[(K_0 - K_1)^2 + \pi^2 (I_0 - I_1)^2 \right]} d\sigma$$

$$s = V_0 t / b$$

Tempo reduzido

- O tempo reduzido é uma grandeza muito comum em aerodinâmica não estacionária e representa a distância percorrida pelo aerofólio penetrando no escoamento, em termos de semi-cordas.
- A aplicação da função de Wagner a uma simulação de um movimento arbitrário no domínio do tempo pode ser compreendida como uma sucessão de variações tipo degrau em ângulo de ataque e sua derivada no tempo.

Integral de Duhamel

- E o correspondente efeito da esteira de vórtices que se forma a jusante pode ser capturada através da superposição das respostas indiciais no sentido de uma integração de Duhamel:

$$y(s) = f(0)\phi(s) - \int_0^s \frac{df}{dt} \phi(s - \sigma) d\sigma$$

onde $y(t)$ é a saída do sistema, $f(t)$ é a função forçante, e ϕ é a resposta ao degrau do sistema. No caso do aerofólio:

$$\alpha(s) = \alpha_{eq}(0)\phi(s) - \int_0^s \frac{d\alpha_{eq}}{dt} \phi(s - \sigma) d\sigma$$

Aproximação de Jones

- Pode-se escrever velocidade normal induzida (downwash) em um ponto no aerofólio como: (teoria do aerofólio fino)

$$w(t) = \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] = Q(t)$$

$$w(s) = \left[\frac{V_0}{b} \frac{dh}{ds} + V_0 \alpha(s) + \left(\frac{1}{2} - a \right) V_0 \frac{d\alpha}{ds} \right] = Q(s)$$

- O ângulo de ataque equivalente (eq) é representado pela razão entre o downwash a $\frac{3}{4}$ da corda e a velocidade do escoamento não perturbado.
- R.T.Jones (NACA Rept 681) apresentou uma aproximação para a função de Wagner onde:

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.355e^{-0.3s}$$

Carregamento para movimentos arbitrários

- Garrick observou que dada a linearidade do escoamento não estacionário a pequenas perturbações, a era possível calcular uma resposta transiente através da integral de convolução:

$$P(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[Q(0)\phi(s) + \int_0^s \frac{dQ}{d\sigma} \phi(s-\sigma) d\sigma \right]$$

$$P(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[Q(s)\phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds} Q(\sigma) d\sigma \right]$$

- Esta equação é a base da aerodinâmica não estacionária
- Inclui o efeito de toda a história do movimento no cálculo da força de sustentação de natureza circulatória.

Transformada de Laplace

- A transformada de Laplace de

$$P(s) = 2\pi\rho b V_0 \left[Q(s)\phi(0) + \int_0^s \frac{d\phi(s-\sigma)}{ds} Q(\sigma) d\sigma \right]$$

é:

$$\phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$s = V_0 t / b$$

$$\bar{s} = \tilde{s} b / V_0 \Rightarrow$$

Variável de
Laplace
adimens.

$$P(\tilde{s}) = 2\pi\rho b V_0 \left[\frac{1}{2} + L\left(\frac{d\phi(s)}{ds}\right) \right] Q(\tilde{s})$$

Função de transferência aerodinâmica

- E considerando a aproximação de Jones dada por:

$$\phi(s) \cong 1 - 0.165e^{-0.0455s} - 0.355e^{-0.3s}$$

- Tem-se a função de transferência relacionando a entrada Q (downwash) com a saída P (carregamento):

$$\frac{P(\tilde{s})}{Q(\tilde{s})} = 2\pi\rho b V_0 \left[\frac{0.5\bar{s}^2 + 0.2808\bar{s} + 0.01365}{\bar{s}^2 + 0.3455\bar{s} + 0.01365} \right] = 2\pi\rho b V_0 H(\bar{s})$$

- Note que é semelhante ao que temos da teoria de sistemas dinâmicos, é a função de transferência aerodinâmica!

Domínio do tempo

- Resposta aerodinâmica no espaço de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = Q(t) - 0.3455 \left(\frac{V_0}{b} \right) x_2 - 0.01365 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 x_1$$

$$P(t) = 2\pi\rho b V_0 \left[0.5Q(t) + 0.10805 \left(\frac{V_0}{b} \right) x_2 - 0.006825 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 x_1 \right]$$

onde pode-se observar os estados aumentados!

- Quando tratarmos de aproximações por funções racionais revisitaremos este assunto bem como veremos como aparecem os estados aumentados.

Modelos Clássicos:

Escoamento Incompressível

- Para um primeiro estudo da aerodinâmica não estacionária aplicada a aeroelasticidade, apresenta-se modelos clássicos tais como os modelos de:

- Theodorsen
 - Wagner
 - Küssner
 - Sears

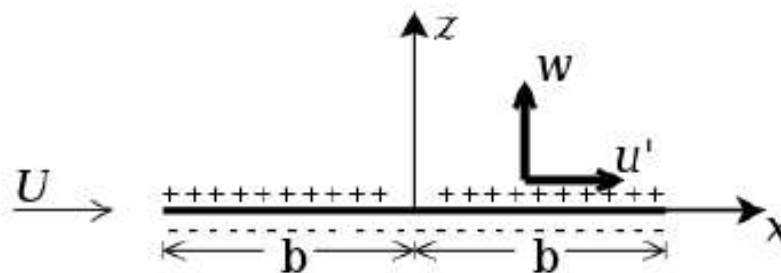
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

- Estes modelos são fundamentados em soluções elementares da equação para o potencial aerodinâmico linearizado, em regime de escoamento incompressível (Mach = 0), conhecida também como Equação de Laplace.

Referência para estes tópicos:
B.A.H., "Aeroelasticity"

Modelo de Theodorsen

- O modelo adequado para o estudo do problema de estabilidade aeroelástica foi desenvolvido por Theodorsen (NACA-Rept. 496)
- Theodorsen em 1934 apresenta um modelo aerodinâmico não estacionário de uma seção típica realizando movimento harmônico simples, e assumindo regime incompressível.
- Assumiu tratar o problema empregando singularidades tipo fonte, sumidouros e vórtices elementares, soluções da Equação de Laplace;
- O efeito de salto de velocidade através de uma placa plana que representa o aerofólio pode ser simulado assumindo uma distribuição de fontes e sumidouros no intradorso e no extradorso do aerofólio;



Singularidades

- Revisão das soluções elementares da Equação de Laplace bidimensional, supondo uma singularidade em x_1, z_1 :

$$V_r = \frac{\sigma}{2\pi r} \quad , \quad V_\theta = 0 \quad , \quad \phi_s = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r$$

Fonte

$$V_r = 0 \quad , \quad V_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad , \quad \phi_\Gamma = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Vórtice

$$V_r = \frac{\mu}{2\pi r} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad , \quad V_\theta = -\frac{\mu}{2\pi r} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad , \quad \phi_D = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

Dipolo

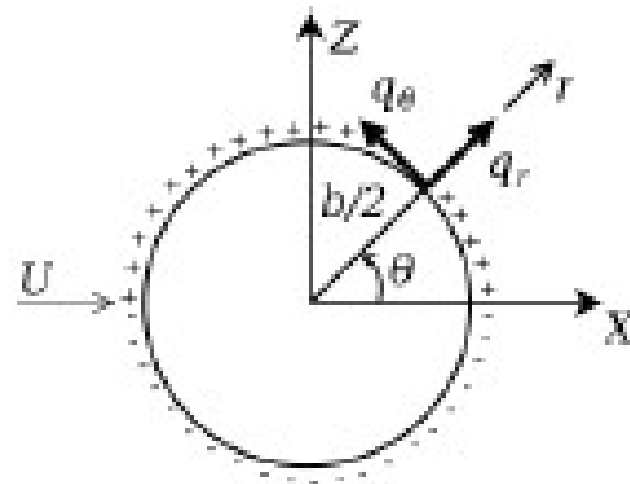
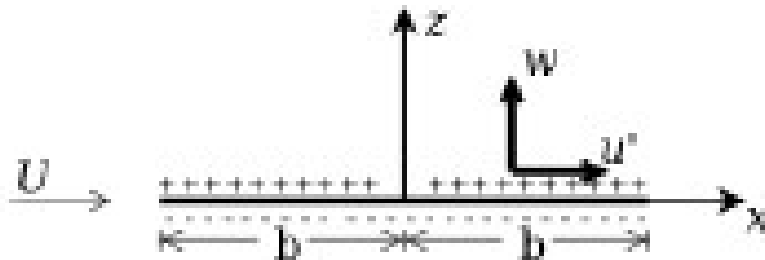
$$r = (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{z - z_1}{x - x_1} \right)$$

$$\boxed{\tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{zz} = 0}$$

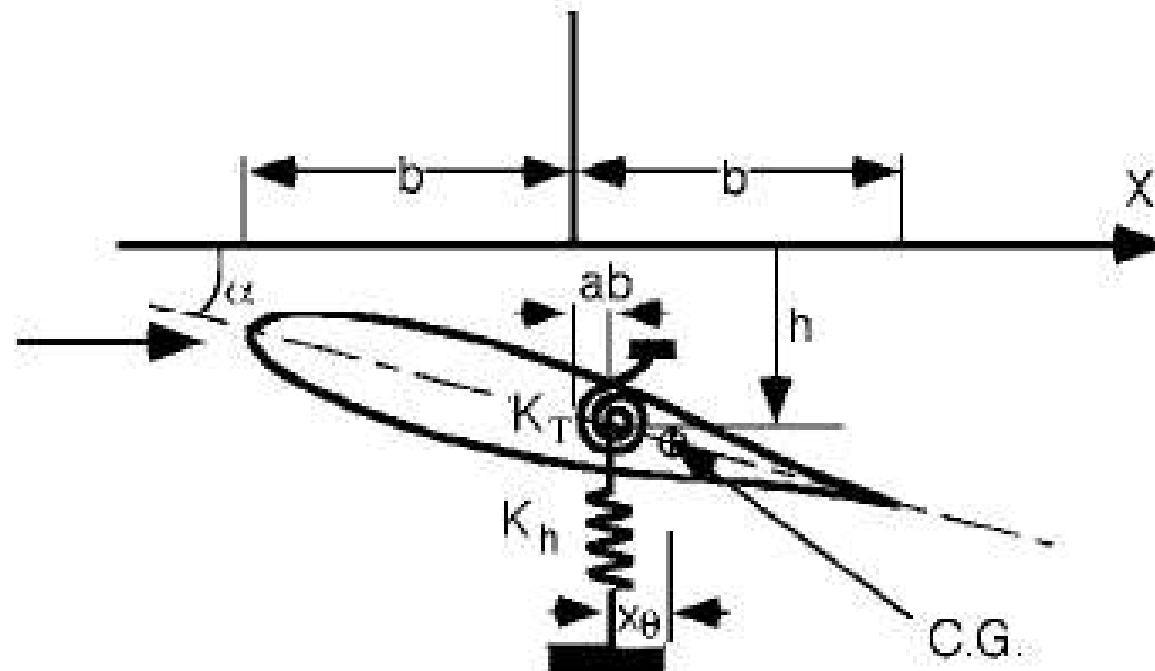
Singularidades distribuídas

- Fontes e sumidouros dispostas sobre o extradorso e intradorso, respectivamente;
- E vórtices serão dispostos ao longo da corda e da esteira de forma a simular os efeitos de natureza circulatória, isto é, sustentação.



Seção típica com 2 GDL

- Adotamos um modelo de seção típica com dois graus de liberdade (originalmente Theodorsen adotou 3 GDL):



Forças aerodinâmicas não estacionárias

- Emprego da teoria do aerofólio fino;
- Aproximação de Theodorsen: (Ref: T. Theodorsen, "***General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter***", NACA TR 496, 1934).
- Assume superfícies aerodinâmicas como placas planas que oscilam em torno do eixo elástico da seção típica que representa esta superfície de sustentação. Também assume que o escoamento é composto por duas componentes:
 - **Não circulatória onde o escoamento pode ser expresso através de fontes e sumidouros;**
 - **Circulatória a qual está relacionada a vorticidade de uma esteira que se estende do bordo de fuga para o infinito.**
- Para cada componente obteve-se os potenciais de velocidades e calculou-se a pressão através relação para pressão linearizada. E com as pressões os esforços aerodinâmicos.

Carregamento não circulatório

- Através do emprego da expressão para a pressão linearizada, :

$$\Delta p = -2\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi_{NC}^{2b}) + V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \varphi_{NC}^{2b}) \right]$$

- pode-se calcular os esforços não circulatórios através da integração das pressões sobre a superfícies de aerofólio:

$$F_{NC} = b \int_{-1}^1 \Delta p dx \quad , \quad M_{NC} = b \int_{-1}^1 \Delta p (x - a) b dx$$

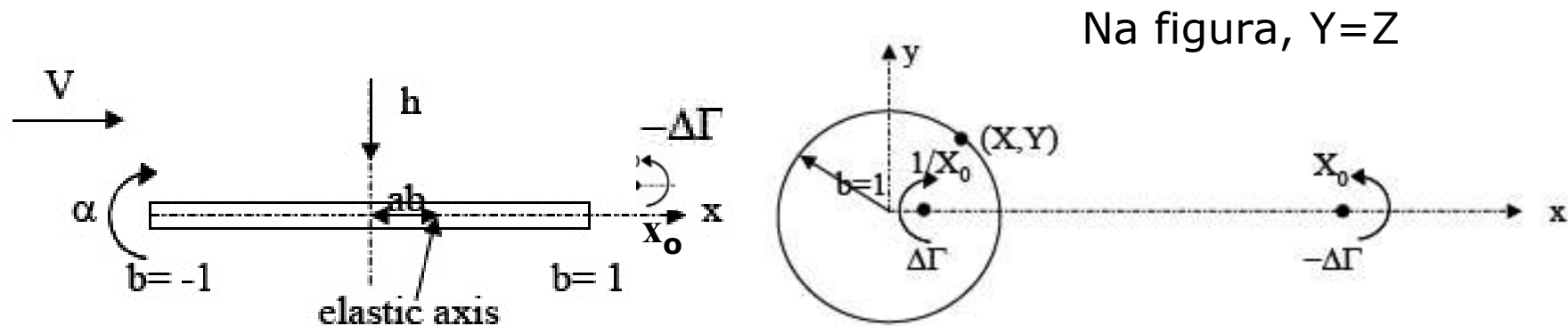
- Aplicando a relação acima ao potencial de natureza não circulatória tem-se os esforços integrados resultando em:

$$F_{NC} = -\pi \rho b^2 \left(\ddot{h} + V \dot{\alpha} + b a \ddot{\alpha} \right)$$

$$M_{NC} = -\pi \rho b^2 \left(V \dot{h} + b a \ddot{h} + V \dot{\alpha}^2 - b^2 \left(a + \frac{1}{8} \right) \ddot{\alpha} \right)$$

Parcela circulatória: Distribuição de vórtices

- Para satisfazer a condição de Kutta, Theodorsen assumiu uma distribuição de vórtices colado no aerofólio a uma correspondente esteira que parte do bordo de fuga para o infinito.



- A idéia, a partir deste ponto, parte de um artifício para escrever as forças e momentos devido a vorticidade, ou circulatórios, assumindo uma distribuição vórtices ligados ao aerofólio (bound vortex) e os correspondentes emitidos ao longo da esteira (shed vortex)

Esforços circulatorios

- Os passos para obtenção das forças de origem circulatoria são similares ao caso não circulatorio, integra-se a pressão linearizada que está relacionada ao potencial de velocidades dos vórtices ligados e da esteira para obter os esforços sobre o aerofólio. Como resultado tem-se os esforços circulatorios:

$$F_{\Gamma} = -2\pi\rho V_0 b Q \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0} = -2\pi\rho V_0 b Q C(x_0, t)$$

$$M_{\Gamma} = -2\pi\rho V_0 b Q \left(\frac{1}{2} - C(x_0, t) \left(a + \frac{1}{2} \right) \right)$$

Função de Theodorsen

- “C” é uma função de deficiência de sustentação, que modifica a circulação sobre o aerofólio pela ponderação da velocidade normal induzida Q.

$$C(x_0, t) = \frac{\int_1^\infty \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}{\int_1^\infty \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} \gamma(x_0, t) dx_0}$$

- Provavelmente Theodorsen buscou esta forma de solução para associar estas integrais a funções especiais, tal como foi feito em estudos similares e anteriores aos de Theodorsen, nos quais se buscou soluções analíticas para problemas similares associando a funções de especiais.

Particularização para o MHS

- A forma imaginada para se resolver as integrais baseia-se na hipótese de movimento harmônico simples;
- Desta forma, a função de Theodorsen terá como argumento a frequência reduzida k :

$$C(k) = \frac{\int_1^{\infty} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0}{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x_0 + 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} e^{-ikx_0} dx_0} = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)}$$

- Onde J e Y são funções de Bessel, que também podem ser escritas como funções de Hankel.

Funções especiais de Bessel

- Combinação de funções de Bessel de 1º e 2º tipo;

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)} = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

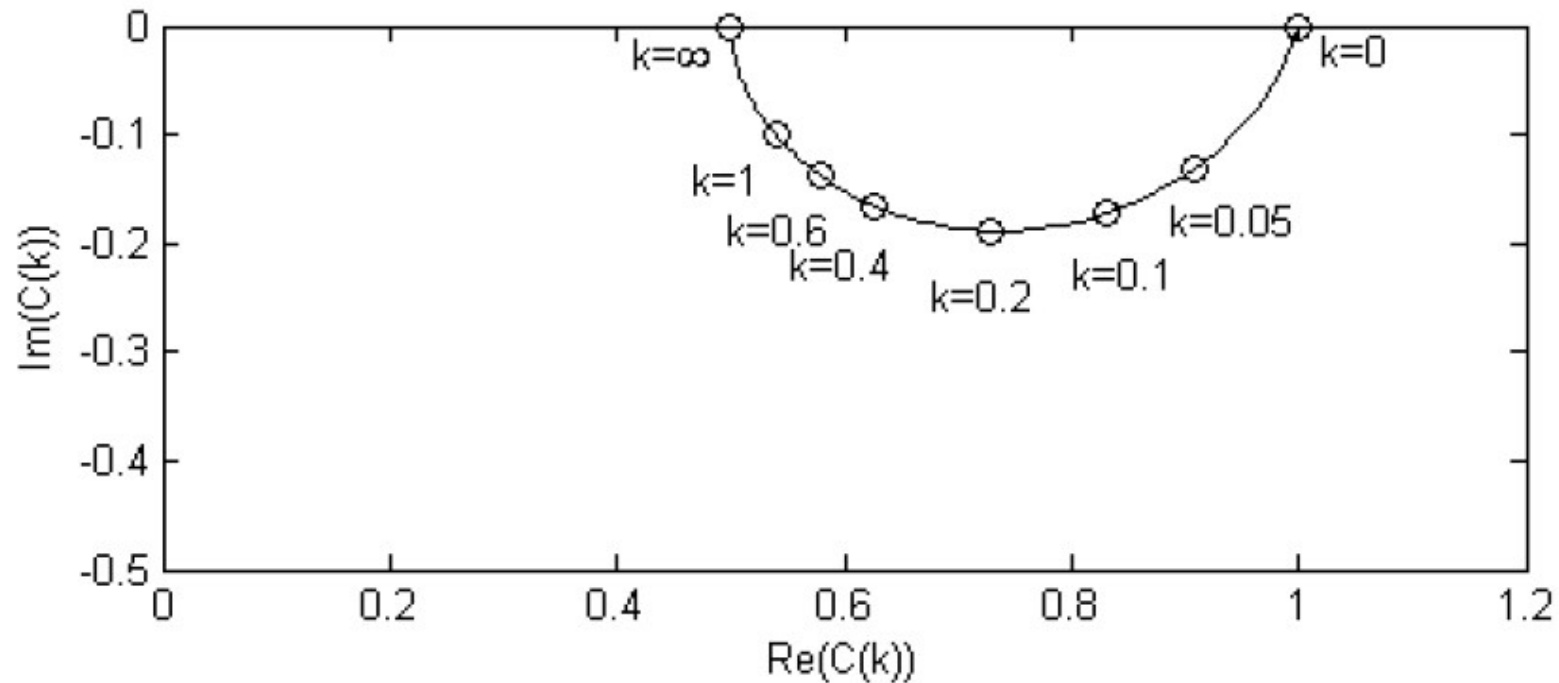
ou também de funções de Hankel.

- Forma usualmente apresentada:

$$C(k) = F(k) + iG(k)$$

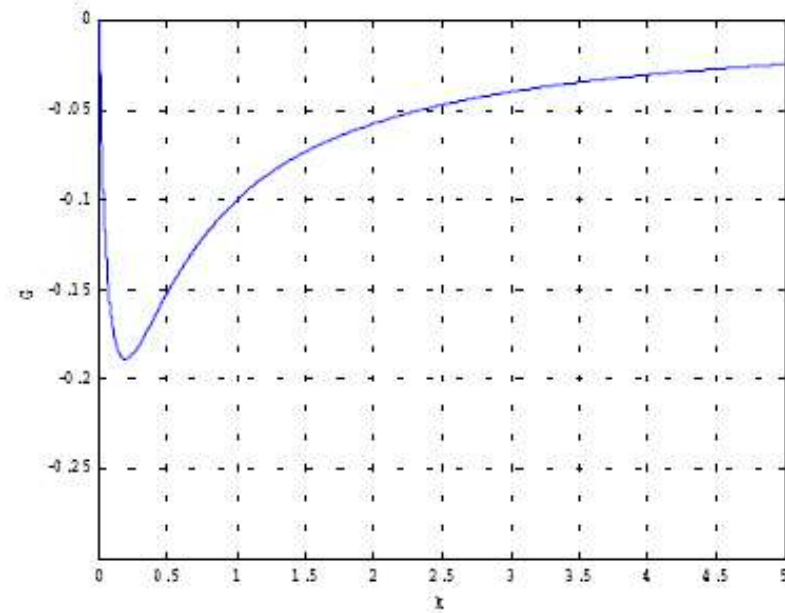
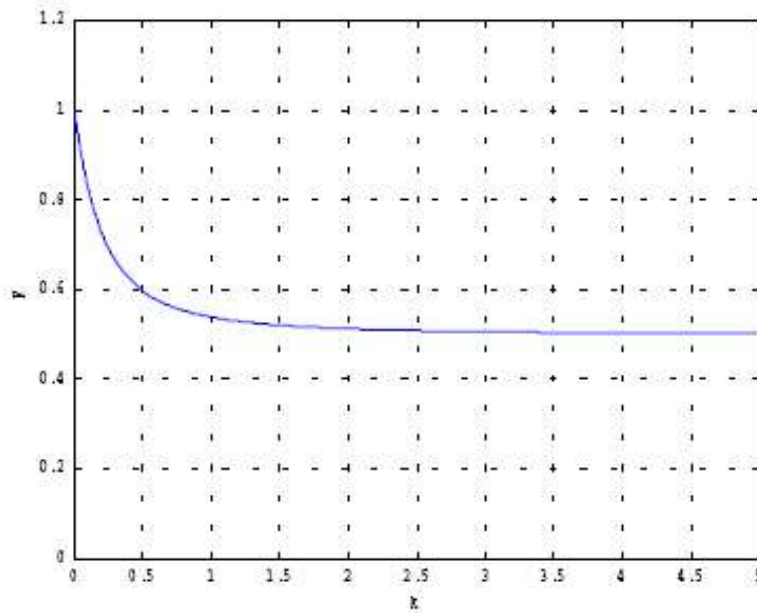
Mapeamento complexo

- Graficamente esta função pode ser representada no plano complexo como:



Parte real e imaginária

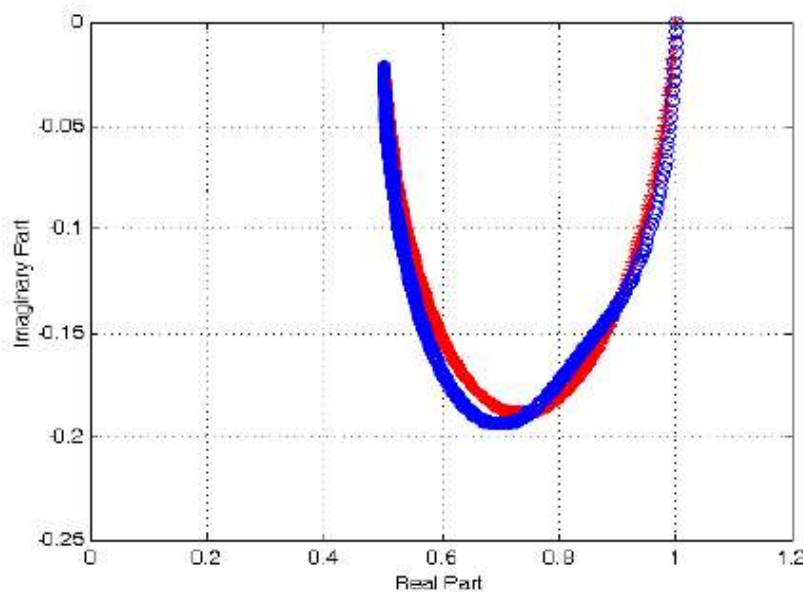
- Parte real e imaginária da função de Theodorsen:



Aproximação de $C(k)$

- Pode-se aproximar a função de Theodorsen por:

$$C(k) = 0.5 + \frac{0.0075}{ik + 0.0455} + \frac{0.10055}{ik + 0.3}$$



Esta aproximação fornece um resultado razoável, conforme se pode verificar no gráfico ao lado.

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

Modelo de Theodorsen (2 gdl)

Agrupando os termos circulatorios e não circulatorios tem-se:

$$l = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$m_y = \pi \rho b^2 \left[ba \ddot{h} + V_0 b(0.5 - a) \dot{\alpha} - b^2 \left(1/8 + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] +$$

$$+ 2\pi \rho V_0 b^2 (0.5 + a) C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 1.0 \\ \dot{h}, \ddot{h}, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} = 0.0 \end{array} \right\} \Rightarrow l = 2\pi \rho V_0 b C(k=0) V_0 \alpha \Leftrightarrow l = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{dCl}{d\alpha} c \alpha$$

caso estacionário;

onde: **$c = 2b$** é a corda da seção típica, ρ é a densidade do fluido, e **Cl** é a derivada de sustentação da seção típica. No caso da placa plana este resultado deve ser **2π** .

Downwash I

- Note que :

$$\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} = w\left(\frac{b}{2}, t\right) = w\left(\frac{3c}{4}, t\right) = \underline{Q}$$

representa uma velocidade normal induzida em um ponto do aerofólio de cota $b/2$, ou seja a $3/4$ da corda. Esta relação pode ser verificada empregando a equação que descreve o movimento do aerofólio bem como a relação para o downwash.

- Note também que sentido é oposto ao do movimento induzido pelo aerofólio:

$$w(x, t) = -\dot{h} - V_0 \alpha - b\left(\frac{x}{b} - a\right) \dot{\alpha}$$

Adimensionalizando Theodorsen

- O passo seguinte será o preparo da solução de Theodorsen para resolvermos o problema de flutter, no domínio da frequência de forma que possamos resolver um problema de autovalor, de acordo com o critério de estabilidade de Euler;
- Adimensionalizando baseado na semi-corda de referência

$$l = \pi \rho b^3 \left[\left(\frac{\ddot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \dot{\alpha} - a \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b^2 C(k) \left[\left(\frac{\dot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \alpha + (0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$
$$m_y = \pi \rho b^4 \left[a \left(\frac{\ddot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} (0.5 - a) \dot{\alpha} - (1/8 + a^2) \ddot{\alpha} \right] +$$
$$+ 2\pi \rho V_0 b^3 (0.5 + a) C(k) \left[\left(\frac{\dot{h}}{b} \right) + \frac{V_0}{b} \alpha + (0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

Forma Matricial I

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} l &= l_{nc} + l_c \\ m_y &= m_{nc} + m_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -l_{nc}b - l_cb \\ m_{nc} + m_c \end{Bmatrix} = \{P\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\pi\rho b^4 & \pi\rho b^4 a \\ \pi\rho b^4 a & -\pi\rho b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \end{bmatrix}}_{Mnc} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\pi\rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) \\ 0 & -\pi\rho b^4 \left(\frac{V_0}{b}\right) \left(\frac{1}{2} - a\right) \end{bmatrix}}_{Bnc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2\pi\rho V_0 b^3 C(k) & 2\pi\rho V_0 b^3 C(k) \left(\frac{1}{2} - a\right) \\ 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2}\right) C(k) & 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2}\right) C(k) \left(\frac{1}{2} - a\right) \end{bmatrix}}_{Bc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \\
 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho V_0 b^3 C(k) \left(\frac{V_0}{b}\right) \\ 0 & 2\pi\rho V_0 b^3 \left(a + \frac{1}{2}\right) C(k) \left(\frac{V_0}{b}\right) \end{bmatrix}}_{Kc} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos para se obter uma representação matricial ...

Forma Matricial II

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} &= \rho b^4 \underbrace{\begin{bmatrix} -\pi & \pi a \\ \pi a & -\pi \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix}}_{Mnc} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \frac{\ddot{h}}{b} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & -\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{Bnc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \frac{\dot{h}}{b} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \\
 &+ \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) \underbrace{C(k) \begin{bmatrix} -2\pi & -2\pi \left(\frac{1}{2} - a \right) \\ 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) & 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix}}_{Bc} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \frac{\dot{h}}{b} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 \underbrace{C(k) \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix}}_{Kc} \begin{Bmatrix} h \\ \frac{h}{b} \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Forma Matricial III

$$\begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = \rho b^4 [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k)[B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 C(k)[K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- $[M_{nc}]$ é a matriz de massa aparente, de natureza não circulatória. Representa a inércia referente ao efeito de bombeamento do fluido ao redor do aerofólio. Independe a velocidade do escoamento V_0 .
- $[B_{nc}]$ é a matriz de amortecimento aerodinâmico de natureza não circulatória, depende de V_0 e representa uma resistência ao movimento do aerofólio imerso no fluido. Promove um acoplamento desestabilizante associado à combinação entre a velocidade do escoamento não perturbado e a velocidade normal ao aerofólio.

Forma Matricial IV

$$\begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = \rho b^4 [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{b} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right) ([B_{nc}] + C(k) [B_c]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{b} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \rho b^4 \left(\frac{V_0}{b} \right)^2 C(k) [K_c] \begin{Bmatrix} h \\ b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

- $[B_c]$ é a matriz de amortecimento aerodinâmico de natureza circulatoria. Quantifica os efeitos de atraso aerodinâmico induzidos pela circulação distribuída na esteira. Proporcional ao ângulo e ataque efetivo e ponderado pela função de Theodorsen.
- $[K_c]$ é a matriz de rigidez aerodinâmica. A rigidez (entenda como a sustentação) é exclusivamente de natureza circulatoria, e é proporcional aos deslocamentos. É ponderada pela função de Theodorsen que atrasa o carregamento devido a variação de circulação na esteira, induzida pelo próprio movimento do aerofólio.

Forma Matricial V

- O motivo de se colocar em evidência a razão entre a velocidade e a semi-corda deve-se ao fato que o sistema de equações, quando transformado para o domínio da frequência, poderá ser escrito apenas como função da frequência reduzida k .
- Os coeficientes das matrizes M_{nc} , B_{nc} , B_c , e K_c são função exclusivamente da geometria e do coeficiente de sustentação da placa plana $C_{l\alpha} = 2\pi$;
- O próximo passo será transformar as equações de Theodorsen para o domínio da frequência;
- Esta estratégia é importante quando se quer estudar problemas de estabilidade aeroelástica (flutter), pois pode-se resolver o problema de autovalor associado ao sistema aeroelástico.

Domínio da frequência

- Problema: Equações de Theodorsen definidas no domínio do tempo, sendo que a função de Theodorsen possui como argumento a frequência reduzida.
- Vamos reescrever a equação de Theodorsen para 2 gdl na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} -l \cdot b \\ m_y \end{Bmatrix} = 2b^2 q_D [M_{nc}] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} \left(\frac{b}{V_0} \right)^2 + \boxed{q_D = \frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

$$+ 2b^2 q_D \left([B_{nc}] + C(k)[B_c] \right) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} \left(\frac{b}{V_0} \right) + 2b^2 q_D C(k)[K_c] \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Domínio da Frequência I

- Assume-se que o movimento é do tipo harmônico simples (MHS) e que os deslocamento lineares e angulares podem ser escritos na forma:

$$h(t) = \bar{h} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i\omega t}$$

- Este tipo de movimento está de acordo com o que se assumiu para chegar a função de Theodorsen em termos de funções de Bessel.
- E também é de acordo com a condição de estabilidade neutra, associada ao limite de estabilidade aeroelástica dinâmica, ou seja, o flutter.

Domínio da Frequência II

- Uma vez que as equações para os esforços aerodinâmicos não estacionários é linear, pode-se escrever:

$$l(t) = \bar{l} \cdot e^{i\omega t} \quad m_y(t) = \bar{m}_y \cdot e^{i\omega t}$$

- Onde os termos com “barra” são as amplitudes complexas.
Assim:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} e^{i\omega t} &= 2b^2 q_D \left\{ \underbrace{-[M_{nc}] \omega^2 \left(\frac{b}{V_0} \right)^2}_{k^2} + \left([B_{nc}] + C(k)[B_c] \right) \underbrace{i\omega \left(\frac{b}{V_0} \right)}_{ik} + C(k)[K_c] \right\} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \\ \begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} &= 2b^2 q_D \left\{ -[M_{nc}] k^2 + \left([B_{nc}] + C(k)[B_c] \right) ik + C(k)[K_c] \right\} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Coeficientes de Influência

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5 - a)}{k} \quad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5 + a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5 - a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5 + a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25 - a^2)}{k}$$

- A matriz na relação, é a matriz de **coeficientes de influência** da seção típica;
- Relaciona as "influências" entre os movimentos associados aos graus de liberdade e os esforços atuantes.

Aerodinâmica Aplicada à Aeroelasticidade

- A proposta é estudar o problema da seção típica com dois graus de liberdade, considerando a teoria aerodinâmica não-estacionária de Theodorsen;
- Este modelo inclui os efeitos não estacionários importantes, que tem papel fundamental da solução do problema de flutter.

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k} \quad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$

Flutter do Aerofólio

Vimos que a equação do sistema aeroelástico do domínio da frequência é representada como:

$$\begin{aligned} \left\{ -[M]\omega^2 + [K] \right\} \{\bar{x}\} &= \{\bar{P}\} = \pi\rho b^4 \omega^2 [A(k)] \{\bar{x}\} \\ -\left\{ \left[[M] + \pi\rho b^4 [A(k)] \right] \omega^2 + [K] \right\} \{\bar{x}\} &= 0 \end{aligned}$$

Note que já conhecemos as equações de movimento da seção típica (lado esquerdo) e os termos forçantes (lado direito) que podem ser agrupados em uma equação homogênea (**segunda equação**) para assim estudar um problema de estabilidade sujeito a variação de parâmetros.

Análise de flutter

- A análise de flutter é uma técnica muito especializada que não possui relação com métodos convencionais como Root Locus, Nyquist, entre outros, normalmente empregados para estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos.
- Dentre as técnicas de solução do problema de flutter podemos listar os métodos:
 - Theodorsen (antigo)
 - **K**
 - P-k
 - G
- A peculiaridade da solução deve-se a necessidade de se resolver um problema de autovalor, supondo movimento harmônico simples, embora em determinadas condições isto não ocorra.

Sistema com 2 GDL

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ M \end{Bmatrix}$$

O sinal de L é trocado pois uma sustentação positiva age para cima enquanto que h é positivo para baixo

Dividimos por m , massa, r_{θ} = raio de giração $= r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m}$
do aerofólio:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m \\ M/m \end{Bmatrix}$$

Adimensionalizando...

$$\frac{1}{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_h^2 = K_h / m, \quad \omega_\theta^2 = K_T / I_\theta, \quad \bar{x}_\theta = x_\theta / b, \quad \bar{r}_\theta = r_\theta / b.$$

Assumindo movimento harmônico simples temos:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/mb \\ M/mb^2 \end{Bmatrix}$$

Mudamos a notação do grau de liberdade em arfagem de θ para α !

Carregamento aerodinâmico: Sustentação

- Usando as relações dos carregamentos aerodinâmicos da formulação de Theodorsen:

$$L = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

No domínio da frequência, e rearranjando alguns termos:

$$\begin{aligned} &= \pi \rho b^3 \omega^2 \left[\frac{h}{b} \left(1 - i2C(k) \frac{1}{k} \right) + \alpha \left(-a - i \frac{1}{k} - 2C(k) \frac{1}{k^2} - i2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{C(k)}{k} \right) \right] \\ &= \pi \rho b^3 \omega^2 \left[\frac{h}{b} L_h + \alpha \left(L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right) \right] \end{aligned}$$

$$k = \frac{\omega b}{V}, \text{ and } L_h = 1 - i2C \frac{1}{k}, \quad L_\alpha = \frac{1}{2} - i \frac{1 + 2C}{k} - \frac{2C}{k^2}.$$

Carregamento aerodinâmico: Momento

- E o momento:

$$M = \pi \rho b^2 \left[ba\ddot{h} + V_0 b(0.5 - a)\dot{\alpha} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + \\ + 2\pi \rho V_0 b^2 (0.5 + a) C(k) \left[\dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a)\dot{\alpha} \right]$$

No domínio da frequência:

$$M = \pi \rho b^4 \omega^2 \left[\left\{ M_h - \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \right\} \frac{h}{b} + \left\{ M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \right\} \alpha \right]$$

$$M_h = \frac{1}{2}, M_\alpha = \frac{3}{8} - i \frac{1}{k}$$

Nova notação

- Smilg e Wasserman (Application of three dimensional flutter theory to aircraft structures – AAF Tech Rept 4798, 1942) introduziram a notação onde o carregamento aerodinâmico não estacionário, segundo a formulação de Theodorsen, é escrito com função de coeficientes L_α , L_h , M_α , e M_h .
- A formulação dos autores acima foi muito utilizada na indústria, e era encontrada na forma de tabelas de coeficientes em função da frequência reduzida.
- Esta forma de apresentar carregamento aerodinâmico também é apresentada no livro “Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter”, de Scanlan e Rosembaum, 1951.

Equações Aeroelásticas

- Igualando o carregamento aerodinâmico às equações do movimento:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 \\ 0 & \omega_\theta^2 \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} \\
 & = \frac{\omega^2}{\mu} \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h \\ M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right)L_h & M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right)(L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Com: $\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l}$

Notação consistente com de Smilg e Wasserman.

Associando a parâmetros de similaridade....

$$\begin{aligned}
 & -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \\
 & = \frac{\Omega^2}{\mu} \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \\ M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h & M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) (L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\bar{x}_\theta = \frac{x_\theta}{b}$$

$$\bar{r}_\theta = \frac{r_\theta}{b}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l}$$

O Método V-g

Referência: Computational Aids in Aeroservoelastic Analysis Using MATLAB

- O método V-g, também conhecido como método “k” é, por sua vez uma técnica mais elaborada de solução do problema da estabilidade aeroelástica.
- Neste caso, associa-se a equação homogênea:

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} \mu \left(\frac{R^2}{\Omega^2} - 1 \right) - L_h & -\mu \bar{x}_\theta - L_\alpha + \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h \\ -\mu \bar{x}_\theta - M_h + \left(\frac{1}{2} + a \right) L_h & \mu \left(\frac{\bar{r}_\theta^2}{\Omega^2} - \bar{r}_\theta^2 \right) - M_\alpha + \left(\frac{1}{2} + a \right) (L_\alpha + M_h) - \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0$$

a uma forma diferente, que permite associa-la a uma problema de autovalor na forma clássica.

- Este problema de autovalor será função de um parâmetro, a frequência reduzida.

Método V-g (ou Método K)

- O método V-g é baseado na solução da mesma equação que representa o sistema aeroelástico apresentada anteriormente:

$$\begin{aligned}
 & -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \\
 & = \frac{\Omega^2}{\mu} \begin{bmatrix} L_h & L_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h \\ M_h - \left(\frac{1}{2} + a\right) L_h & M_\alpha - \left(\frac{1}{2} + a\right) (L_\alpha + M_h) + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 L_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Porém adotando a seguinte forma:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \textcolor{blue}{K}_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} \textcolor{red}{A}_{ij} + \textcolor{red}{M}_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}}$$

Método V-g

- Onde as matrizes M_{ij} , K_{ij} e A_{ij} são as matrizes de massa, rigidez e aerodinâmica respectivamente, sendo a última, função da frequência reduzida.
- O método V-g assume que existe um amortecimento artificial g :

$$\left[\bar{K}_{ij} \right] = (1 + ig) \left[K_{ij} \right]$$

necessário para se garantir um movimento harmônico simples.

- Note que a forma do sistema a ser resolvido é de um **problema de autovalor** similar a um sistema que representa um movimento harmônico simples:

$$\left[\bar{K}_{ij} \right] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = \Omega^2 \left[A_{ij} + M_{ij} \right] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

Método V-g

- Entretanto, os coeficientes de A_{ij} são complexos, o que resulta em um problema de autovalor complexo, portanto, os autovalores serão números complexos, cuja parte real representa o amortecimento artificial e a parte imaginária a frequência associada.
- Quando se assume o amortecimento estrutural g , o sistema é representado por:

$$\frac{1+ig}{\Omega^2} [K_{ij}] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix} = [A_{ij} + M_{ij}] \begin{Bmatrix} h/b \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1+ig}{\Omega^2} = \lambda \Rightarrow \text{Autovalor}$$

para uma dada frequência reduzida $k=\omega b/U$.

Autovalores aeroelásticos

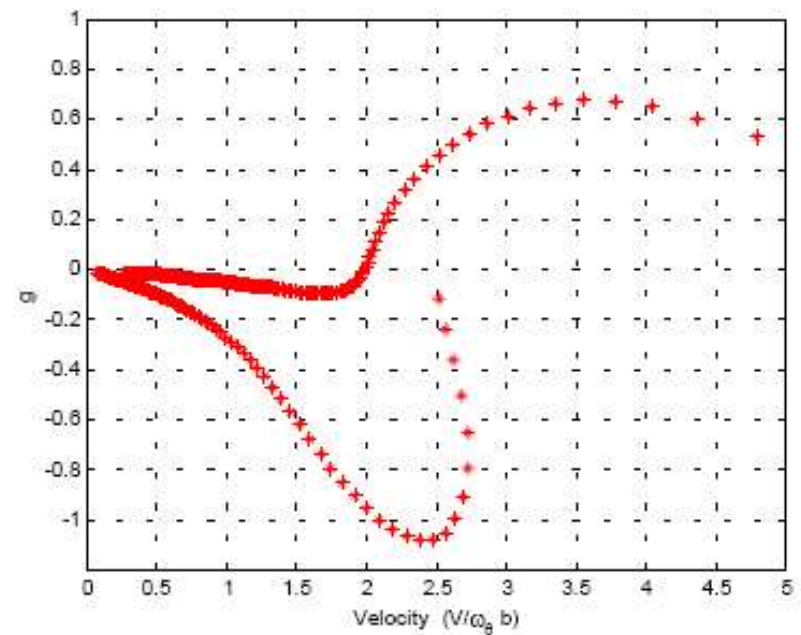
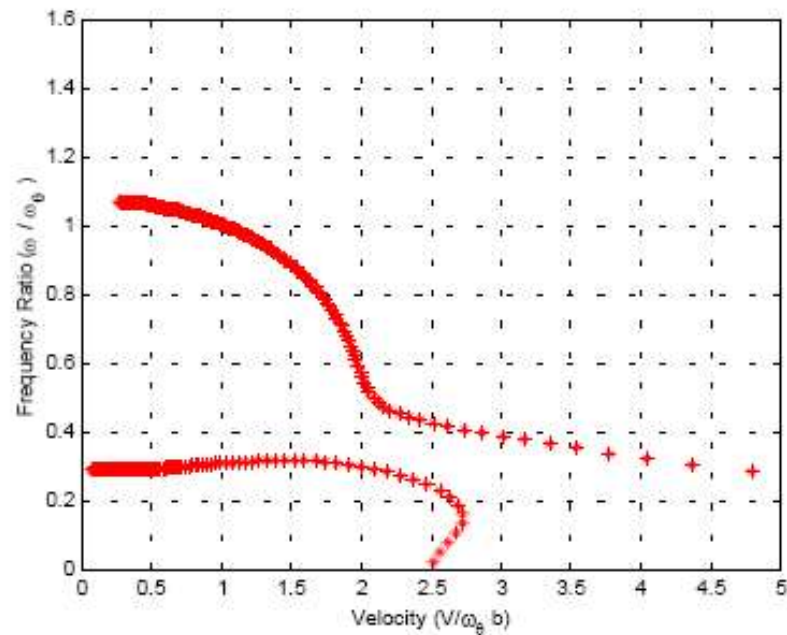
- O processo de extração dos autovalores é realizado para um conjunto de frequências reduzidas tabeladas, do maior para o menor valor.
- A i -ésima frequência, ou seja associada à i -ésima frequência reduzida e o correspondente amortecimento artificial são obtidos de:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Re}}} = \frac{\omega_i^2}{\omega_\theta^2} \quad , \quad g = \frac{\lambda_{\text{Im}}}{\lambda_{\text{Re}}}$$
$$\Omega = \frac{\omega_i}{\omega_\theta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{Re}}}} \quad , \quad \lambda = \frac{1 + ig}{\Omega^2}$$

- Esta forma de se obter a frequência e o amortecimento a partir do autovalor é associada a hipótese de se assumir que existe um amortecimento artificial, necessário para atender a condição que os autovalores do sistema aeroelástico deverão ser complexos.

Curvas V-g

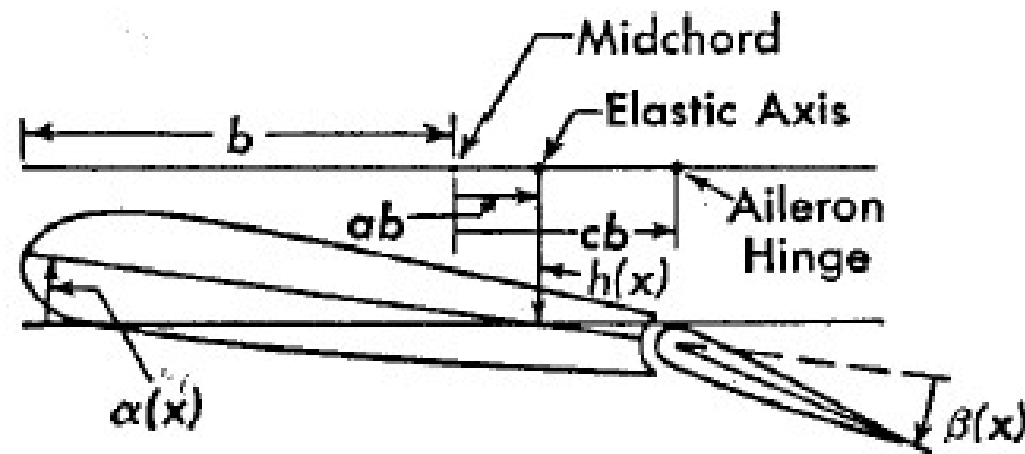
- E as curvas que representam a evolução da frequência e amortecimento são representadas graficamente como:



onde a velocidade reduzida é obtida da relação para a frequência reduzida.

Exemplo – Aerofólio com 3 GDL

- Vamos estudar o exemplo de um aerofólio com três graus de liberdade, empregando o método V-g (ou método K) para a solução do problema de flutter.



Movimento do Aerofólio

- O movimento do aerofólio com superfície de controle é representado pela seguinte equação:

$$z = h + \alpha(x - ab) + \beta(x - bc)U(x - bc)$$

- Onde $U(x-bc)$ é uma sinal de controle do tipo degrau unitário. O downwash, por sua vez terá termos adicionais:

$$\begin{aligned} w_a(x, t) &= -\left(\frac{\partial z}{\partial t} + V \frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &= -[\dot{h} + \dot{\alpha}(x - ab)] - V\alpha - \dot{\beta}(x - bc)U(x - bc) - V\beta U(x - bc) \end{aligned}$$

Forças e momentos

- E de um desenvolvimento similar ao que foi visto para a seção típica com 2 GDL, pode-se obter as equações de Theodorsen para esta caso de três graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
 F &= -\pi\rho b^2 \left[\ddot{h} + V\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha} - \frac{V}{\pi}T_4\dot{\beta} - \frac{b}{\pi}T_1\ddot{\beta} \right] - 2\pi\rho VbQC(k) & M_\beta &= \pi\rho b^2 \left[\frac{b}{\pi}T_1\ddot{h} + \frac{Vb}{\pi} \left\{ 2T_9 + T_1 - \left(a - \frac{1}{2}\right)T_4 \right\} \dot{\alpha} \right. \\
 M &= \pi\rho b^2 \left[ba\ddot{h} - Vb \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{V^2}{\pi} (T_4 + T_{10}) \beta \right. & & - \frac{2b^2}{\pi} T_{13} \ddot{\alpha} - \left(\frac{V}{\pi} \right)^2 (T_5 - T_4 T_{10}) \beta \\
 &+ \frac{Vb}{\pi} \left\{ -T_1 + T_8 + (c-a)T_4 - \frac{1}{2}T_{11} \right\} \dot{\beta} + \frac{b^2}{\pi} \{ T_7 + (c-a)T_1 \} \ddot{\beta} \Big] & & + \frac{Vb}{2\pi^2} T_4 T_{11} \dot{\beta} + \left(\frac{b}{\pi} \right)^2 T_3 \ddot{\beta} \Big] - \rho Vb^2 T_{12} QC(k) \\
 &+ 2\pi\rho Vb^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) QC(k)
 \end{aligned}$$

- Com: $Q = V\alpha + \dot{h} + \dot{\alpha}b \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{V}{\pi}T_{10}\beta + \frac{b}{2\pi}T_{11}\dot{\beta}$
o downwash induzido em um ponto a $\frac{3}{4}$ da corda do perfil

Funções “T”

- As funções “T” são definidas como:

$$T_1 = -\frac{2+c^2}{3}\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c$$

$$T_3 = -\frac{1-c^2}{8}(5c^2+4) + \frac{1}{4}c(7+2c^2)\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)(\cos^{-1}c)^2$$

$$T_4 = c\sqrt{1-c^2} - \cos^{-1}c$$

$$T_5 = -(1-c^2)(\cos^{-1}c)^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c$$

$$T_7 = c\frac{7+2c^2}{8}\sqrt{1-c^2} - \left(\frac{1}{8}+c^2\right)\cos^{-1}c$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}(1+2c^2)\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c$$

Funções “T” (cont.)

- Mais funções “T”, para assim definirmos o modelo completo:

$$T_9 = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{1-c^2}(1-c^2)}{3} + aT_4 \right]$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1} c$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} + (1-2c)\cos^{-1} c$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2} - (1+2c)\cos^{-1} c$$

$$T_{13} = -\frac{1}{2} [T_7 + (c-a)T_1]$$

$$T_{15} = T_4 + T_{10}$$

$$T_{16} = T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{1}{2} T_{11}$$

$$T_{17} = -2T_9 - T_1 + (a - \frac{1}{2})T_4$$

$$T_{18} = T_5 - T_4 T_{10}$$

$$T_{19} = -\frac{1}{2} T_4 T_{11}$$

para escrever as equações de Theodorsen para o caso de três graus de liberdade.

Modelo dinâmico

- Equações do movimento: (obtidas por Lagrange, por exemplo)

$$\begin{bmatrix} m & mx_\alpha & mx_\beta \\ mx_\alpha & mr_\alpha^2 & mr_\alpha^2 + mx_\beta(bc - ba) \\ mx_\beta & mr_\alpha^2 + mx_\beta(bc - ba) & mr_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Adimensionalizando de forma análoga ao caso de 2 GDL:

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\alpha & \bar{x}_\beta \\ \bar{x}_\alpha & m\bar{r}_\alpha^2 & \bar{r}_\alpha^2 + \bar{x}_\beta(c - a) \\ \bar{x}_\beta & \bar{r}_\alpha^2 + \bar{x}_\beta(c - a) & \bar{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{h}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\alpha^2 \bar{r}_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\beta^2 \bar{r}_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Modelo de Theodorsen

- As equações de Theodorsen para o caso do aerofólio com três graus de liberdade são modificadas com a inclusão da superfície de controle.
- Pode-se recorrer ao BAH ou mesmo ao NACA Report 496 de Theodorsen para se verificar os termos que compõem as matrizes, definidos anteriormente:

$$[\bar{M}]\{\ddot{x}\} + [\bar{K}]\{x\} = 2b^2 q_D \left\{ [M_{nc}]\{\ddot{x}\} \left(\frac{b}{V_0} \right)^2 + ([B_{nc}] + C(k)\{R\}[S_2])\{\dot{x}\} \left(\frac{b}{V_0} \right) + C(k)([K_c] + \{R\}[S_1])\{x\} \right\}$$

$$q_D = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad , \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{T_{10}}{\pi} \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & (0.5 - a) & \frac{T_{11}}{2\pi} \end{bmatrix} \quad , \quad R = \begin{bmatrix} -2\pi \\ 2\pi(a + 0.5) \\ -T_{12} \end{bmatrix}$$

Modelo de Theodorsen

- E as matrizes que compõem a equação anterior:

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix}$$
$$K_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & \frac{-T_{18}}{\pi} \end{bmatrix}$$
$$B_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi & -T_4 \\ 0 & \pi \left(a - \frac{1}{2} \right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & \frac{-T_{19}}{\pi} \end{bmatrix}$$

Aplicação do método V-g

- Pressupõem-se que nosso modelo aeroelástico possa ser escrito no domínio da frequência, assumindo um movimento harmônico simples:

$$-\omega^2 [\bar{M}] \{x_s\} + [\bar{K}] \{x_s\} = \frac{q}{m} \left(2C(k) \{R\} [S_1] \{x_s\} + (i\omega) \frac{2b}{V} C(k) \{R\} [S_2] \{x_s\} \right. \\ \left. + (-\omega^2) \frac{2b^2}{V^2} [M_{nc}] \{x_s\} + (i\omega) \frac{2b}{V} [B_{nc}] \{x_s\} + 2[K_{nc}] \{x_s\} \right)$$

$$\frac{1}{\omega^2} [\bar{K}] \{x_s\} = [\bar{M}] \{x_s\} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{k^2} C(k) \{R\} [S_1] \{x_s\} + i \frac{1}{k} C(k) \{R\} [S_2] \{x_s\} \right. \\ \left. - [M_{nc}] \{x_s\} + i \frac{1}{k} [B_{nc}] \{x_s\} + \frac{1}{k^2} [K_{nc}] \{x_s\} \right)$$

Amortecimento Artificial

- Também se pode assumir um amortecimento estrutural artificial:

$$\frac{1+ig}{\omega^2} [\bar{K}] \{x_s\} = [\bar{M}] \{x_s\} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{k^2} C(k) \{R\} [S_1] \{x_s\} + i \frac{1}{k} C(k) \{R\} [S_2] \{x_s\} - [M_{nc}] \{x_s\} + i \frac{1}{k} [B_{nc}] \{x_s\} + \frac{1}{k^2} [K_{nc}] \{x_s\} \right)$$

- Solução do problema de flutter – solução do problema de autovalor associado:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{Re}}} = \omega_i^2 \quad , \quad g = \frac{\lambda_{\text{Im}}}{\lambda_{\text{Re}}}$$

Codificando o método I:

```
% 3 dof system
wh=50.0; wa=100.0; wb=300.0;
a=-0.4; c=0.6; b=1;
xa=0.2; xb=0.0125;
ra=sqrt(0.25); rb=sqrt(0.00625);
mu=40;
nn=3; i=sqrt(-1); rho=0.002378;
mas=pi*rho*mu*b*b; damb=0.0;
sqr=sqrt(1-c*c);
arc=acos(c);
%%
% final version of t function generating the aero matrix
t1=-(2+c*c)/3*sqr+c*arc;
t3=-(1-c*c)/8*(5.*c*c+4)+.25*c*(7+2*c*c)*sqr*arc-
    (1./8.+c*c)*arc*arc;
t4=c*sqr-arc;
t5=-(1-c*c)-arc*arc+2*c*sqr*arc;
t7=c*(7+2*c*c)/8*sqr-(1/8+c*c)*arc;
t8=-1/3*(1+2*c*c)*sqr+c*arc;
t9=.5*(sqr*(1-c*c)/3+a*t4);
t10=sqr+arc;
t11=(2-c)*sqr+(1-2*c)*arc;
t12=(2+c)*sqr-(1+2*c)*arc;
t13=-.5*(t7+(c-a)*t1);
t15=t4+t10;
t16=t1-t8-(c-a)*t4+0.5*t11;
t17=-2*t9-t1+(a-.5)*t4;
t18=t5-t4*t10;
t19=-.5*t4*t11;
%
```

```
iden=zeros(nn,nn); ks=zeros(nn,nn); knc=zeros(nn,nn); bs=zeros(nn,
nn);
for ii=1:nn
    iden(ii,ii)=1.0;
end
% mass matrix
ms(1,1)=1; ms(1,2)=xa; ms(1,3)=xb;
ms(2,1)=xa; ms(2,2)=ra*ra; ms(2,3)=rb*rb+xb*(c-a);
ms(3,1)=xb; ms(3,2)=rb*rb+xb*(c-a); ms(3,3)=rb*rb;
%%
mnc(1,1)=-pi; mnc(1,2)=pi*a; mnc(1,3)=t1;
mnc(2,1)=pi*a; mnc(2,2)=-pi*(1./8.+a*a); mnc(2,3)=-2*t13;
mnc(3,1)=t1; mnc(3,2)=-2*t13; mnc(3,3)=t3/pi;
%
% stiffness matrix
ks(1,1)=wh*wh;
ks(2,2)=ra*ra*wa*wa;
ks(3,3)=rb*rb*wb*wb;
%%
knc(2,3)=-t15;
knc(3,3)=-t18/pi;
%%
bnc(1,1)=0; bnc(1,2)=-pi; bnc(1,3)=t4;
bnc(2,1)=0; bnc(2,2)=pi*(a-.5); bnc(2,3)=-t16;
bnc(3,1)=0; bnc(3,2)=-t17; bnc(3,3)=-t19/pi;
%%
r1=[ -2.*pi 2*pi*(a+0.5)-t12];
%
s1=[0 1 t10/pi]; s2=[1 (.5-a) t11/(2*pi)];
```

Codificando o método II:

```
% v-g method
m=200;
rst1=zeros(3,m); rst2=zeros(3,m); vel=zeros(3,m);
for kk=m:-1:1;
rk=kk*0.02;
[f,g]=faero(rk,b,mnc,bnc,knc,r1,s1,s2,mu);
aero=f+i*g;
ddd=eig(inv(ks)*(ms+aero));
rrr=abs(real(ddd)); iii= imag(ddd);
rst1(:,kk)=sqrt(1./rrr); rst2(:,kk)=iii./rrr;
vel(:,kk)=sqrt(1./rrr)*b/rk;
end
xxx=[vel(1,:); rst1(1,:); rst2(1,:); vel(2,:); rst1(2,:); rst2(2,:);
vel(3,:); rst1(3,:); rst2(3,:)]';
figure(1);
plot(vel(1,:),rst1(1,:), '*r', vel(2,:),rst1(2,:), '*r', vel(3,:),rst1(3,:), '*r'),
axis([0.0 500 0 500]),xlabel('Velocity'),ylabel('Frequency'),grid;
figure(2);
plot(vel(1,:),rst2(1,:), '*r', vel(2,:),rst2(2,:), '*r', vel(3,:),rst2(3,:), '*r'),
axis([0.0 500 -0.5 0.5]),xlabel('Velocity'),ylabel('g'),grid;
```

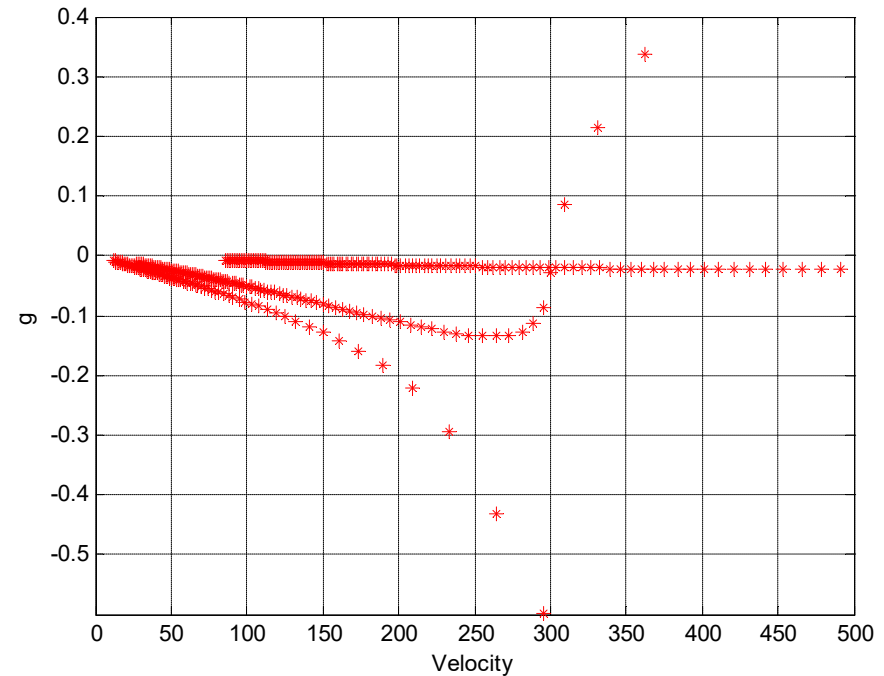
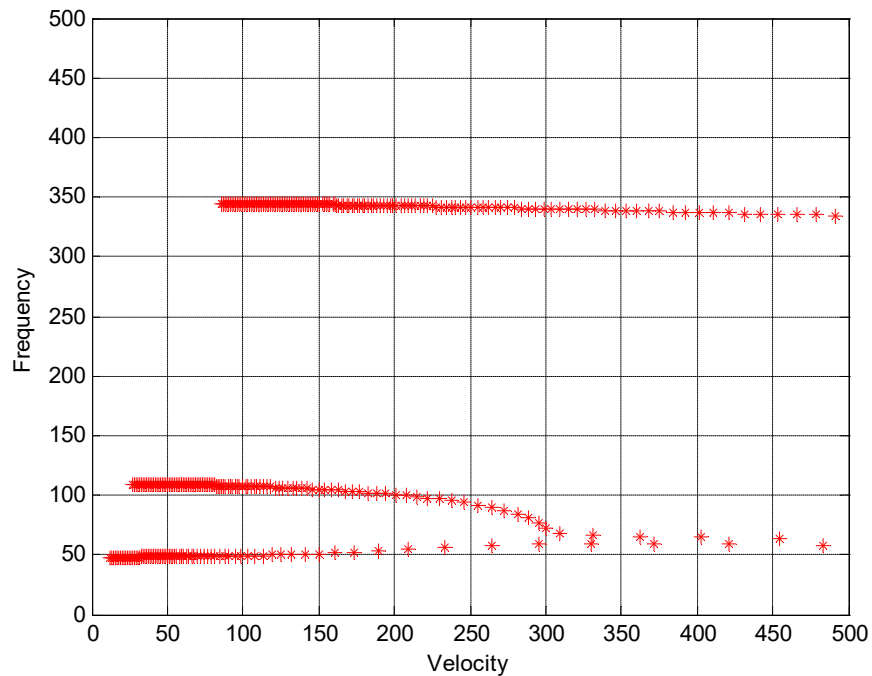
Caso de estudo : seção típica com 3 GDL, e as características dinâmicas e geométricas apresentadas abaixo

$$\omega_h = 50.0 \text{ rad/sec}, \quad \omega_\theta = 100.0 \text{ rad/sec}, \quad \omega_\beta = 300.0 \text{ rad/sec}$$

$$a = -0.4, \quad c = 0.6, \quad b = 1, \quad \bar{x}_\theta = 0.2, \quad \bar{x}_\beta = 0.0125, \quad \bar{r}_\theta^2 = 0.25, \quad \bar{r}_\beta^2 = 0.00625, \quad \mu = 40$$

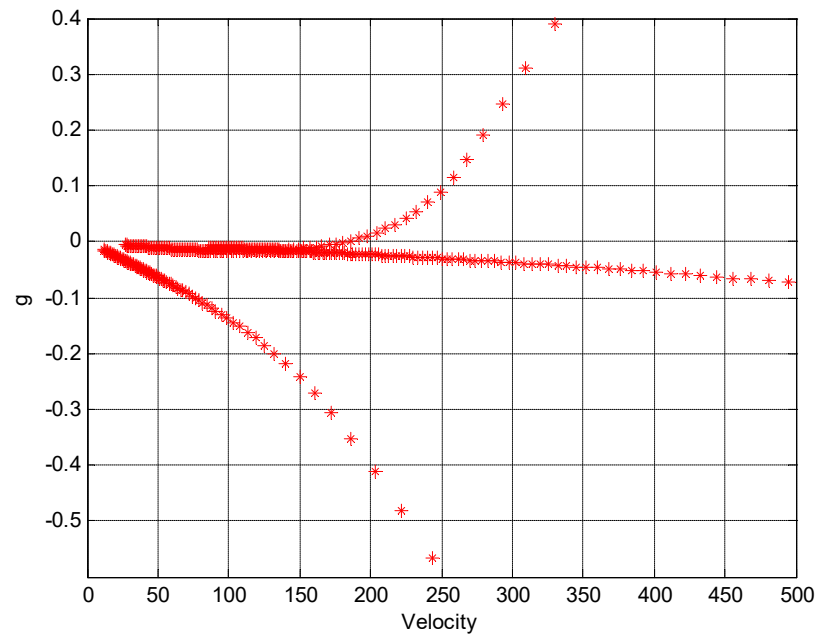
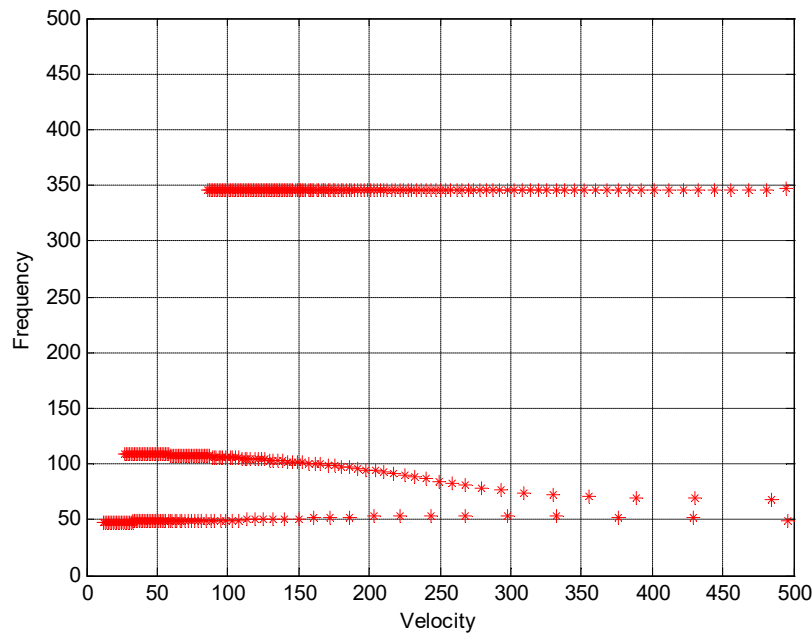
Resultados para o exemplo

- Curvas V-g: Observe o acoplamento dos modos de flexão (plunge) e torção (pitch)



Caso quasi-estacionário

- $C(k) = 1.0$, representa a ausência de efeito da esteira. Note como o acoplamento é alterado, em como o amortecimento aerodinâmico fica menor. Um amortecimento aerodinâmico menor facilita o flutter.



Considerações adicionais

- Este exemplo mostra bem como o amortecimento aerodinâmico é importante na promoção do acoplamento de dois modos;
- Um modelo quase-estacionário pode ser mais conservativa, porém o acoplamento aeroelástico fica mais evidente quando consideramos o efeito da esteira;
- Em sistemas com vários graus de liberdade, o efeito causado pela esteira (atraso no carregamento aerodinâmico) pode promover acoplamentos entre modos inesperados.