AE-249 - AEROELASTICIDADE

Aeroelasticidade Estática - Torção de asas

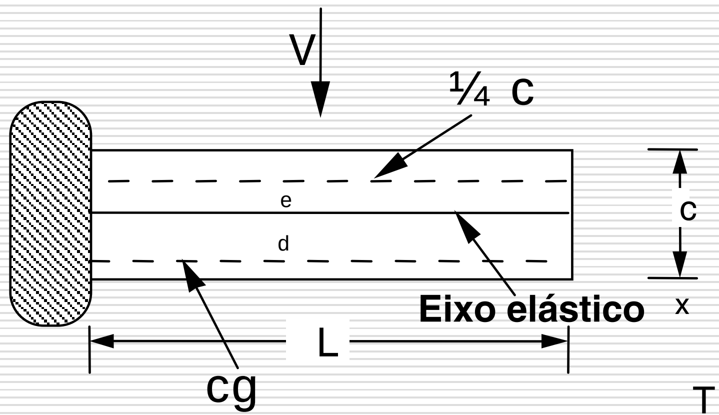
Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Divergência de uma asa

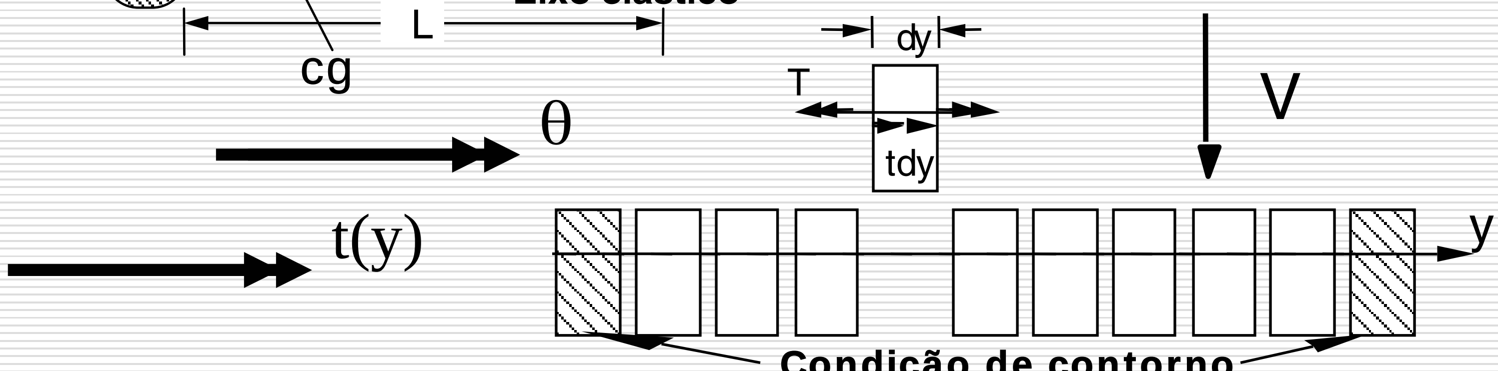
- Caso de estudo – divergência de uma asa sem enflechamento, com rigidez igualmente distribuída ao longo da envergadura.
- Hipóteses: Alongamento grande, pequenas deformações, de forma a permitir que a asa seja modelada por uma equação diferencial linear;
- Pode-se assumir a teoria de St. Venant, e a asa pode ser idealizada como um conjunto de pequenas seções de asa justapostos ao longo da envergadura.

Modelo estrutural da asa contínua

$$T(y) = GJ\,\frac{d\theta}{dy}$$



Aproximação da asa por uma viga



$$\boxed{\Sigma M_y = 0 = T - tdy - \left(T + \frac{dT}{dy}dy\right) = \left(-t - \frac{dT}{dy}\right)dy}$$

Modelo estrutural da asa contínua

- Assume-se que a estrutura está sujeita a uma distribuição de torque t(y) contínua, ao longo da envergadura, com sinal positivo, o que representa um momento de cabrar de cada seção.
- Da teoria de St. Venant, pode-se relacionar as equações de equilíbrio com as forças atuantes:

$$T(y) = GJ\frac{d\theta}{dy} \Rightarrow \qquad \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d\theta}{dy}\right) = -t(y)$$

Esforços aerodinâmicos

- Os esforços aerodinâmicos atuantes são função das deformações estruturais, e neste caso assume-se um primeira aproximação onde a interferência aerodinâmica;
- A equação anterior pode ser empregada para calcular a divergência de uma asa como a indicada na figura anterior.

Modelo aerodinâmico

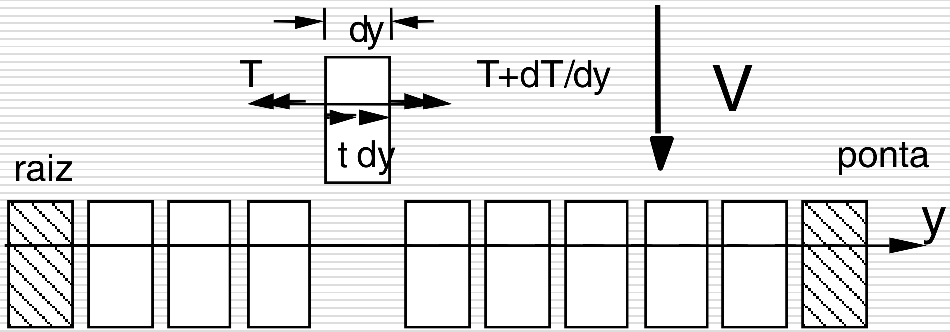
- Teoria das faixas: Assume que não existe interferência aerodinâmica entre faixas que discretizam a asa ao longo da envergadura.

$$l(y) = qc\, C_{l_\alpha} \alpha = qcC_{l_\alpha} (\alpha_o + \theta)$$

$$t(y) = qceC_{l_\alpha} (\alpha_o + \theta) + qc^2 C_{mac} + nmgd$$

- Desta forma o carregamento aerodinâmico pode ser facilmente assumido como a soma dos carregamentos aerodinâmicos de infinitas seção típicas distribuídas ao longo da envergadura.

Equações de equilíbrio - Momentos



$$\frac{dT}{dy} = -t\left(y\right)$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}\left(GJ\,\frac{d\theta}{dy}\right) = -t(y)$$

$$t\left(y\right) = qceC_{l\alpha}\left(\alpha_o + \theta\right) + qc^2C_{mac} + nmgd \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(GJ\,\frac{d\theta}{dy}\right) + qceC_{l\alpha}\theta = -\left(qceC_{l\alpha}\alpha_o + qc^2c_{mac} + nmgd\right)}$$

Solução da Equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dy^2}+\left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}\right)\theta=-K$$ Fazendo $$\lambda^2=\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}$$

e $$K=\left(qceC_{l\alpha}\alpha_o+qc^2c_{mac}+nmgd\right)/GJ$$ simplificamos para

$$\theta''+\lambda^2\theta=-K$$

Que possui solução na forma

$$\boxed{\theta(y)=A\sin\lambda y+B\cos\lambda y-K/\lambda^2}$$

Condições de contorno

Para resolvermos o problema precisamos definir condições de contorno. Para particularizar a nossa solução:

$$\theta\left(y\right) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y - K/\lambda^2$$

A forma de particularizar é aplicar as condições de contorno que caracterizam o nosso problema, isto é uma asa reta, sem afilamento engastada na raiz e com distribuição constantes das propriedades de rigidez (G e J)

Engastamento na raiz: $\theta\left(0\right) = 0 = B - \dfrac{K}{\lambda^2} \Rightarrow B = \dfrac{K}{\lambda^2}$

Momento na ponta da asa (em y = L) é nulo:

$$T\left(L\right) = GJ\theta'\left(L\right) = 0 = GJ\left[A\lambda\cos\lambda L - \frac{K}{\lambda^2}\lambda\sin\lambda L\right]$$

Condições de contorno

Resolvendo as equações resultantes da aplicação da condição de Contorno, temos A e B definidos pela relações anteriores chegando a:

$$\theta(y) = \frac{-K}{\lambda^2}\left[1 - \cos\lambda y - (\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$

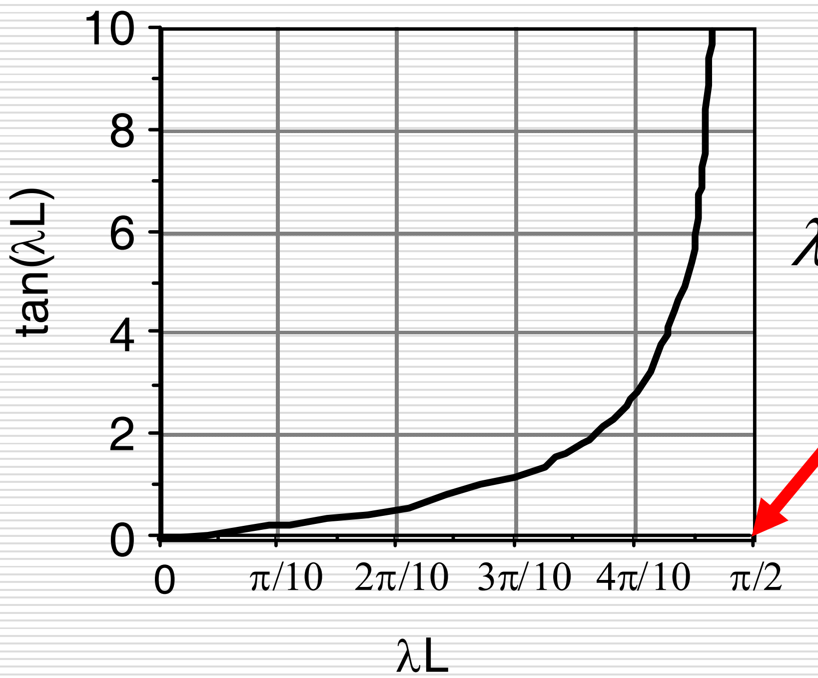
$$\theta(y) = -\left(\alpha_o + \left[\frac{c}{e}\right]\left[\frac{c_{mac}}{C_{l\alpha}}\right] + \left[\frac{nmgd}{qceC_{l\alpha}}\right]\right)\left[1 - \cos\lambda y - (\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$

Esta equação representa a distribuição de torção de uma asa reta e Alongada, sujeita a um carregamento aerodinâmico que a deforma em Torção.

Amplificação da torção

- Note que temos um termo que pode se tornar infinito dependendo do seu argumento;
- Pode portanto associar este comportamento a um critério de divergência.

$$\theta(y) = \frac{-K}{\lambda^2}\left[1 - \cos\lambda y - (\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$



$$\lambda L = \frac{\pi}{2}$$

Critério de divergência:

- Do resultado apresentado graficamente, pode-se estabelecer o seguinte critério:

$$\lambda^2 = \frac{\pi}{2L} = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow$$

$$q_D = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\frac{GJ}{ceC_{l\alpha}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{GJ}{L}\right)\left(\frac{1}{c \cdot LeC_{l\alpha}}\right)$$

- Pode-se fazer uma analogia deste resultado com o obtido para a seção típica, a pressão dinâmica é diretamente proporcional a rigidez e inversamente proporcional a área da asa.

Solução formal para a divergência

- Um resultado importante que foi observado na seção típica, é que a divergência é uma fenômeno associado a estabilidade da estrutura e, consequentemente independe de forças externas atuantes.
- Desta forma podemos estudar a equação que representa a distribuição de torção para asa na sua forma homogênea:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}\right)\theta = 0$$

Solução elementar

- Assume-se as mesmas condições do caso anterior, e consequentemente A e B serão diferentes.

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \right)\theta = 0 \quad \theta(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y$$

- Conhecida a solução elementar, e considerando conhecido A e B, pode-se partir para o estudo da estabilidade do sistema aeroelástico.

Critério de estabilidade de Euler

- Do equilíbrio estático, chega-se a relação geral entre força e deslocamento em regime linear:

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

- Assumindo que existe uma pequena perturbação u_p , que se soma a condição de equilíbrio estático discriminada daqui por diante como u_s , tem-se os seguinte conjunto de equações:

(*Leonard Euler, matemático suíço, 1707-1783*)

Critério de estabilidade de Euler

$$[K]\{u\} = [K]\{u_p + u_s\} = \{F\}$$ (acrescentamos a perturbação)

$$[K]\{u_S\} + [K]\{u_p\} = \{F\}$$

Porém, do equilíbrio estático temos:

$$[K]\{u_s\} = \{F\} \quad \Rightarrow \quad [K]\{u_p\} = \{0\}$$

$$\{u_p\} = \{0\}$$ Solução trivial

$$[K] = [0]$$ Caracteriza um estado de estabilidade neutra

Critério de estabilidade de Euler

- Se $$[K]\{u_p\} = \{0\} \quad e \quad \{u_p\} \neq \{0\}$$

  então:
  - A equação derivada do determinante de [K] deve ser nula ($\Delta=0$);
  - $\Delta=0$ é a equação característica, e as suas raízes são os auto-valores do sistema;
  - É um polinômio de ordem N, onde N é a dimensão da matriz [K]
    - Se $\Delta>0$ – o sistema é estável
    - Se $\Delta<0$ – o sistema é instável

Determinante de uma matriz: A condição para que se tenha solução não nula para u_p , só existe se det[K] = 0 !

Nosso caso de estabilidade...

$$T(L) = GJ\theta'(L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta'(L) = A\lambda\cos\lambda L - B\lambda\sin\lambda L = 0 \\ A(\lambda\cos\lambda L) + B(-\lambda\sin\lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = A\sin\lambda 0 + B\cos\lambda 0 = 0 \\ A(0) + B(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda\cos\lambda L) & (-\lambda\sin\lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinante de estabilidade

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\lambda\cos\lambda L\right) & \left(-\lambda\sin\lambda L\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta = \lambda\cos\lambda L = 0$$

Soluções para a equação onde o determinante se anula. O menor valor deste conjunto é a pressão dinâmica de divergência. Como:

$$\lambda L = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \ldots\ \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

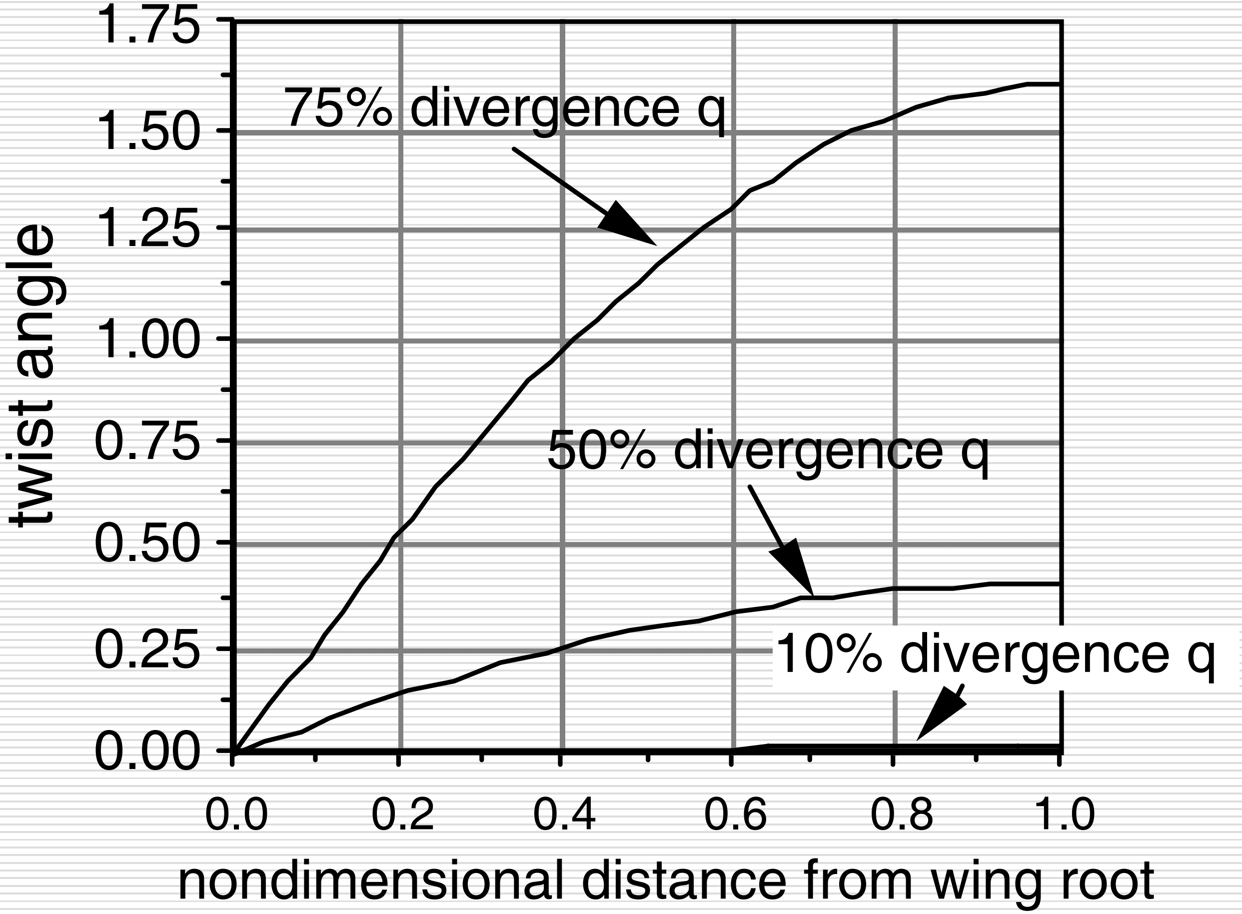
$$\lambda^2 = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow \lambda^2 L^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\lambda^2 L^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{q_D cec_{l\alpha} L^2}{GJ}$$

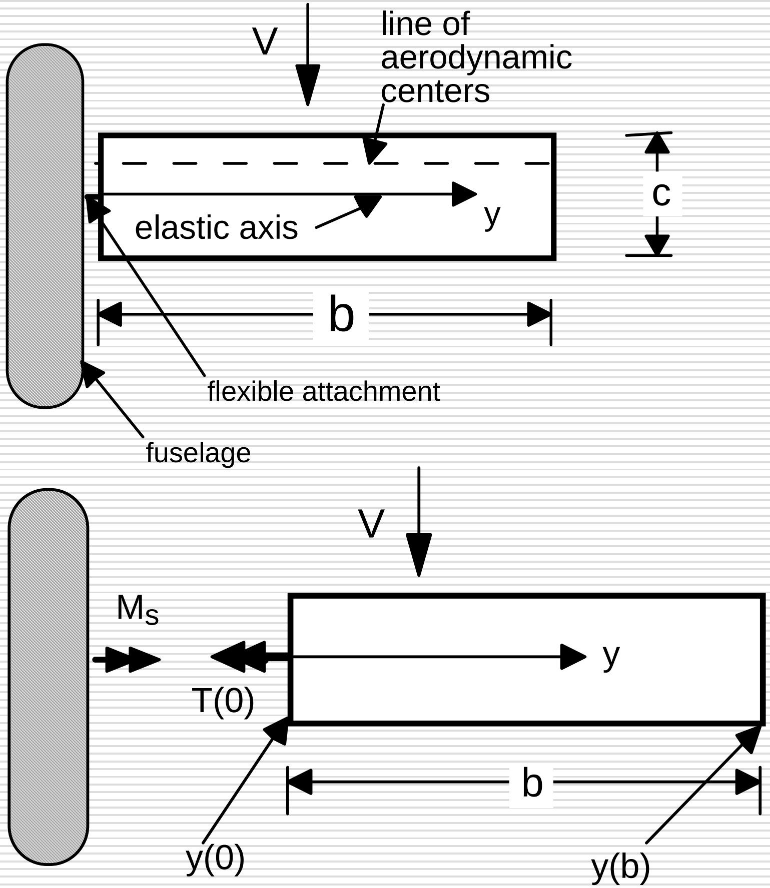
$$\frac{\pi^2}{4L^2} = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow q_D = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\frac{GJ}{ceC_{l\alpha}}\right)$$

λ é o autovalor!

Efeito no ângulo de torção



Exemplos de Aplicação



Divergência de uma
asa com engaste flexível

$$\theta'' + \lambda^2\theta = 0$$

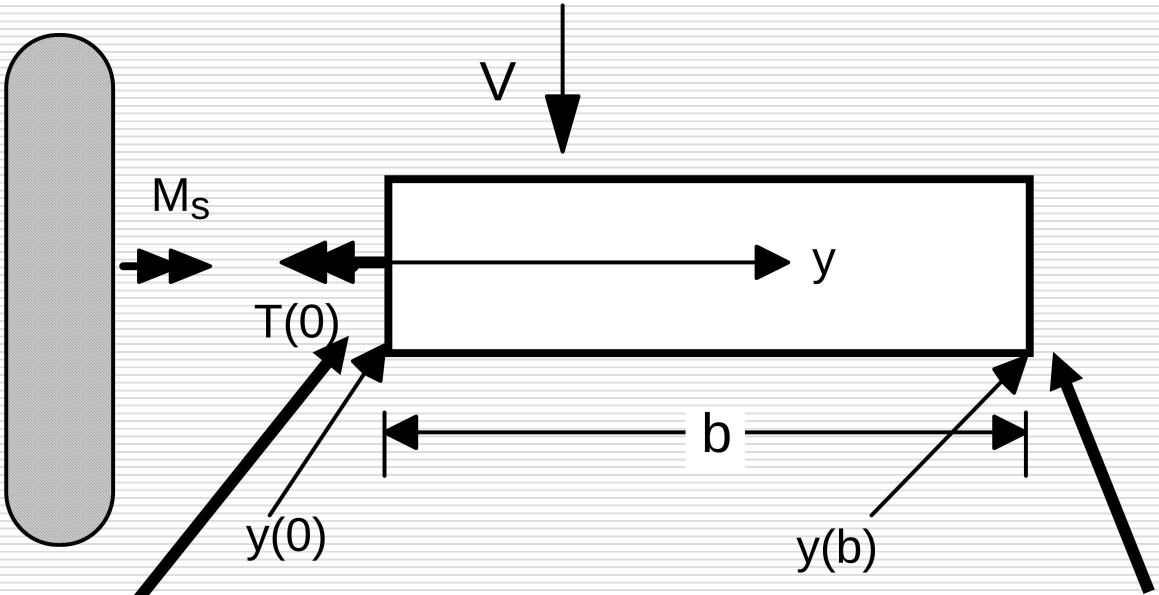
$$\left(\lambda^2 = \frac{qcec_{l_\alpha}}{GJ}\right)$$

$$M_s \equiv K_T\,\theta(0)$$

$$T(0) = GJ\theta'(0)$$

$$K_T\theta(0) = GJ\theta'(0)$$

Condições de contorno



$$\frac{K_T}{GJ}\theta(0) = \theta'(0)$$

$$T(b) = GJ\theta'(b) = 0$$

$$\theta'(b) = 0$$

Determinante de Estabilidade

$$\theta(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y$$

$$\theta'(y) = A\lambda\cos\lambda y - B\lambda\sin\lambda y$$

$$\frac{K_T}{GJ}\theta(0) = \theta'(0)$$

$$\boxed{\beta = \frac{GJ}{K_T b}}$$

$$B\frac{K_T b}{GJ} = A\lambda b$$

$$A\beta\lambda b - B = 0$$

O sistema de equações pode ser representado da mesma forma do caso onde o engaste da asa é rígido. Define-se o parâmetro β como sendo a forma de representar o quanto o engaste é rígido com relação a rigidez em torção da asa.

Determinante de Estabilidade

A torção na ponta da asa por sua vez é nula, o que implica em uma condição a mais que permite montar o sistema de equações para definir A e B.

$$\theta'(b) = A\lambda \cos \lambda b - B\lambda \sin \lambda b = 0$$

O sistema de equações, escrito na forma matricial fica portanto:

$$\begin{bmatrix} \beta\lambda b & -1 \\ \lambda \cos \lambda b & -\lambda \sin \lambda b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E o determinante de divergência aeroelástica é dado por:

$$\Delta = \lambda\left(-\beta\lambda b \sin \lambda b + \cos \lambda b\right) = 0$$

Equação de estabilidade

$$\Delta = \lambda\left(-\beta\lambda b\sin\lambda b + \cos\lambda b\right) = 0 \;\Rightarrow$$

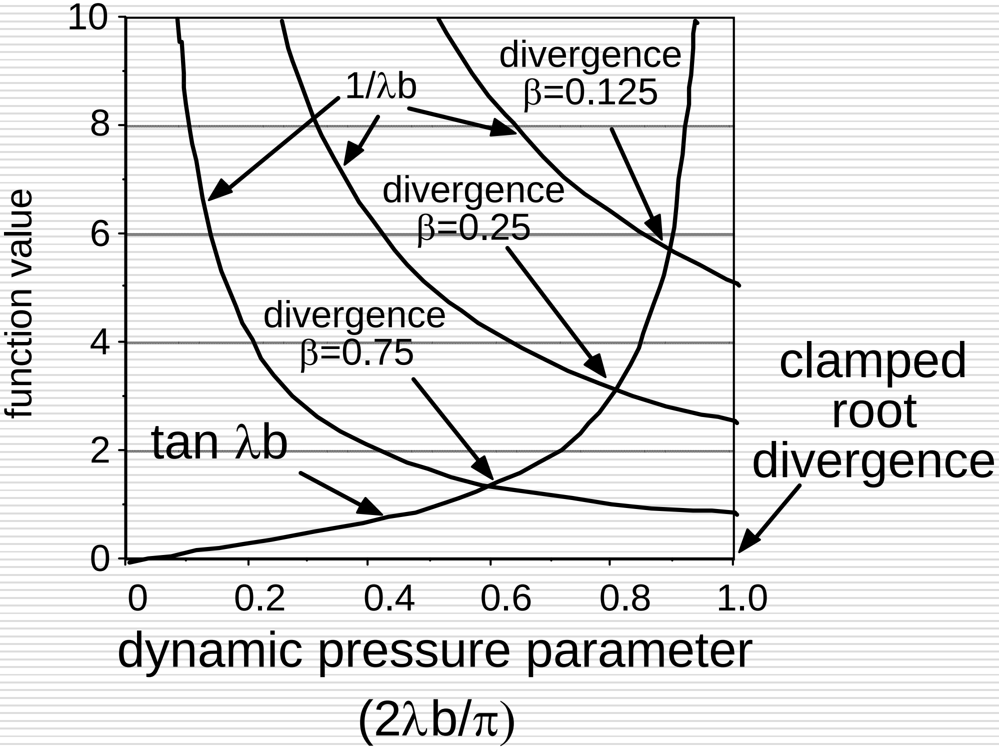
$$\Rightarrow -\beta\lambda b\sin\lambda b + \cos\lambda b = 0$$

$$\cos\lambda b = \beta\lambda b\sin\lambda b \;\Rightarrow$$

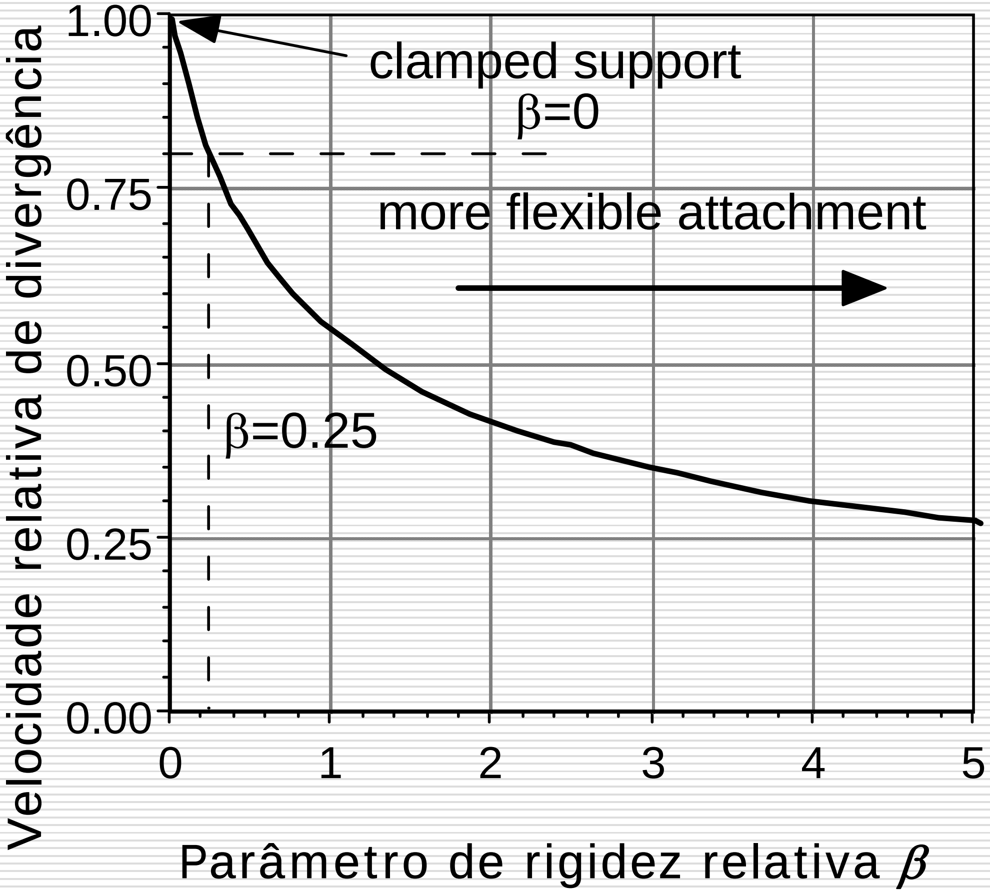
$$\Rightarrow \tan\lambda b = \frac{1}{\beta\lambda b}$$

Equação transcendental ->

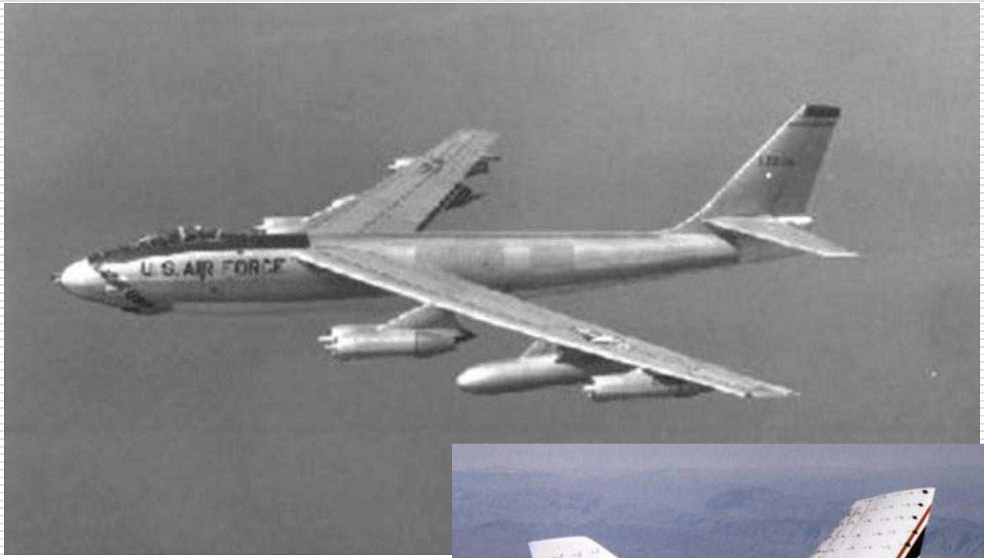
$$\lambda^2 = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \qquad \boxed{\beta = \frac{GJ}{K_T b}}$$



Resposta final...



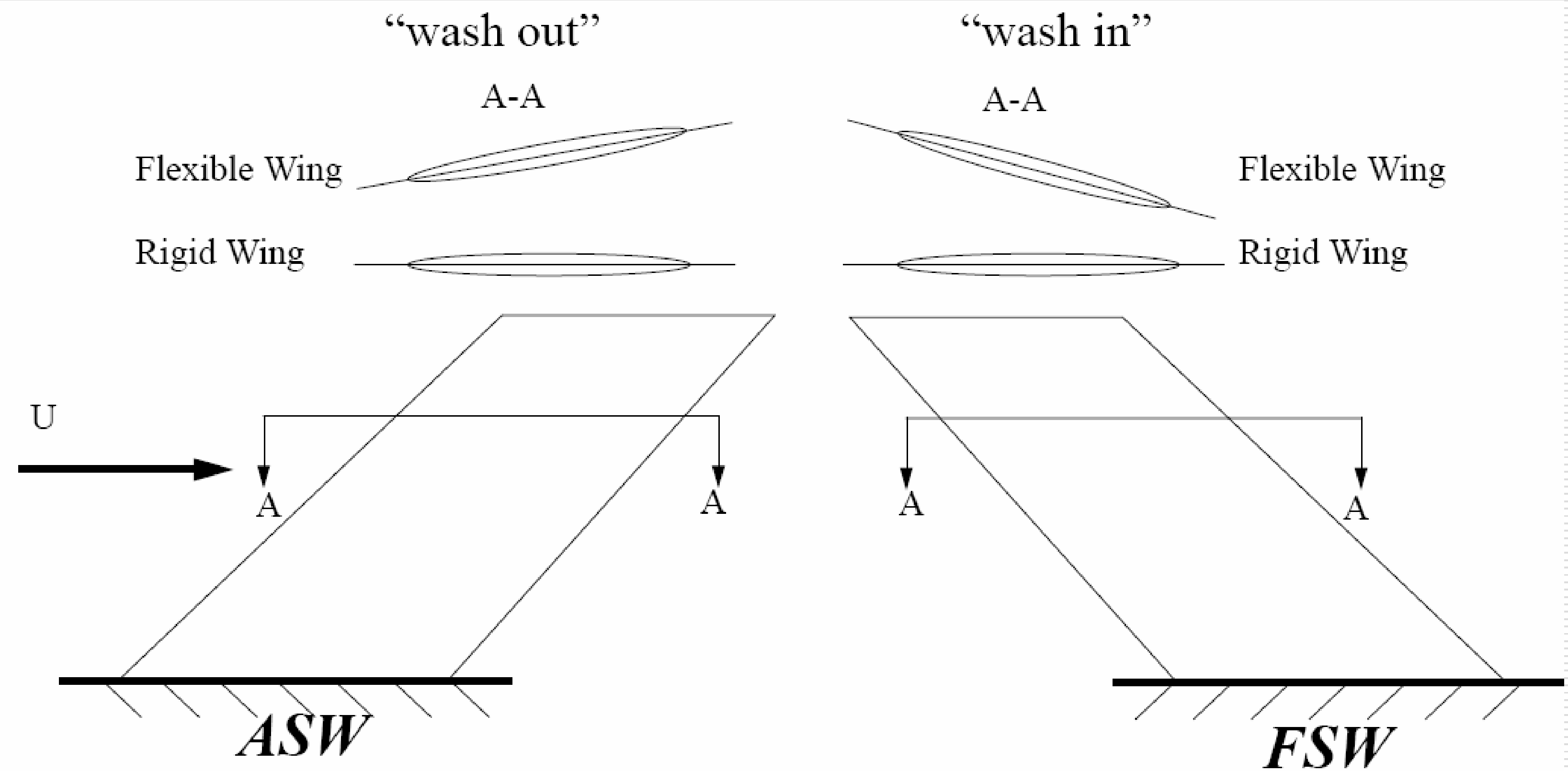
O efeito do enflechamento



Considerações iniciais

- Asas podem ter o seu enflechamento positivo (“para trás”), ou negativo (“para frente”)
- Para que enflechar para frente ?
  - Tentar diminuir a distância entre o centro aerodinâmico e o centro de gravidade da aeronave;
  - Melhorar características de controlabilidade longitudinal para o caso de aeronaves com pouco volume de cauda, uma vez que a eficiência de sustentação aumentada;
  - Diminuir efeito de arrasto de onda no regime transônico.

Efeitos de "Wash in" e "Wash Out"



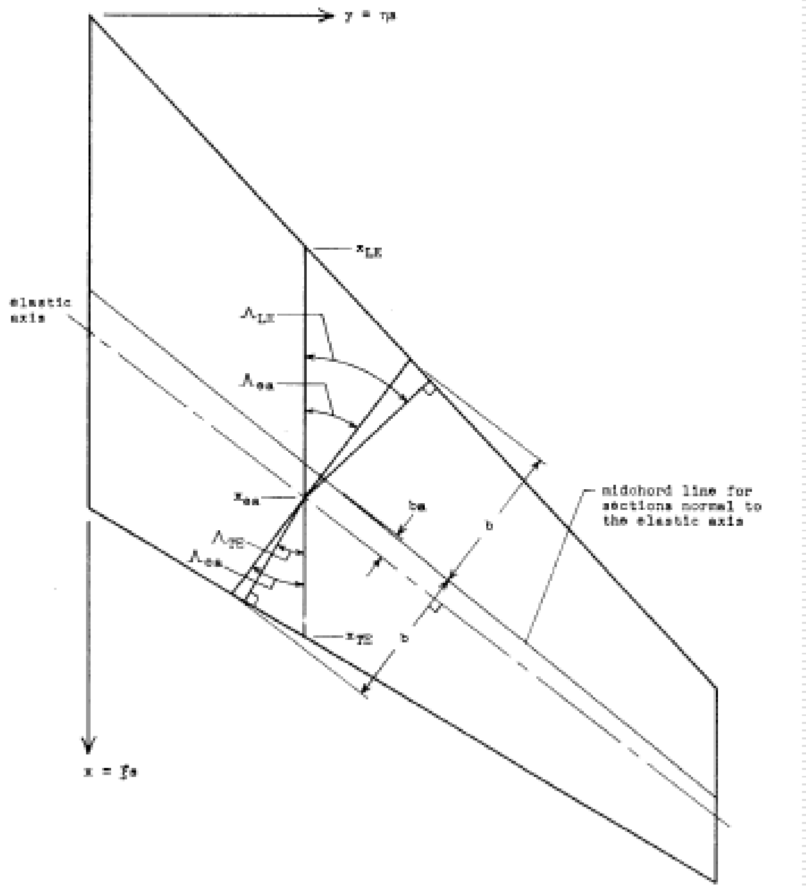
São resultantes do acoplamento de um movimento de flexão que induz uma torção

Aeroelasticidade estática de asas enflechadas.

- Objetivo
  - Determinar como a flexão, não somente a orçào como se viu antes, muda o carregamento em asas enflechadas;
  - Apresentação de modelos aerodinâmicos e estruturais simples.

Efeito do Enflechamento

- Enflechamento:
  - **Método das componentes de velocidade**
- **Usualmente, a asa é discretizada em faixas, cuja corda de cada seção típica é perpendicular ao seu eixo elástico;**
- **Entretanto, se a asa é enflechada, o eixo elástico também será;**



Efeito do Enflechamento

- Quando a asa é enflechada, deve-se observar que as seções típicas, definidas perpendiculares ao eixo elástico, não estão alinhadas com o escoamento;
- Emprega-se a solução aerodinâmica bidimensional para resolver o problemas por faixas (aproximação);
- Entretanto, alguns “termos novos”surgirão nas relações de sustentação e momento, pois existirá um acoplamento do movimento de flexão que induzirá uma torção nas faixas alinhadas com o escoamento não perturbado;
- O primeiro passo será escrever a velocidade de deformação da asa na direção vertical como função de coordenadas de um novo sistema de eixos, onde um deles é coincidente com o eixo elástico da asa.

Efeito do Enflechamento

Ref. NACA-REPT-1014

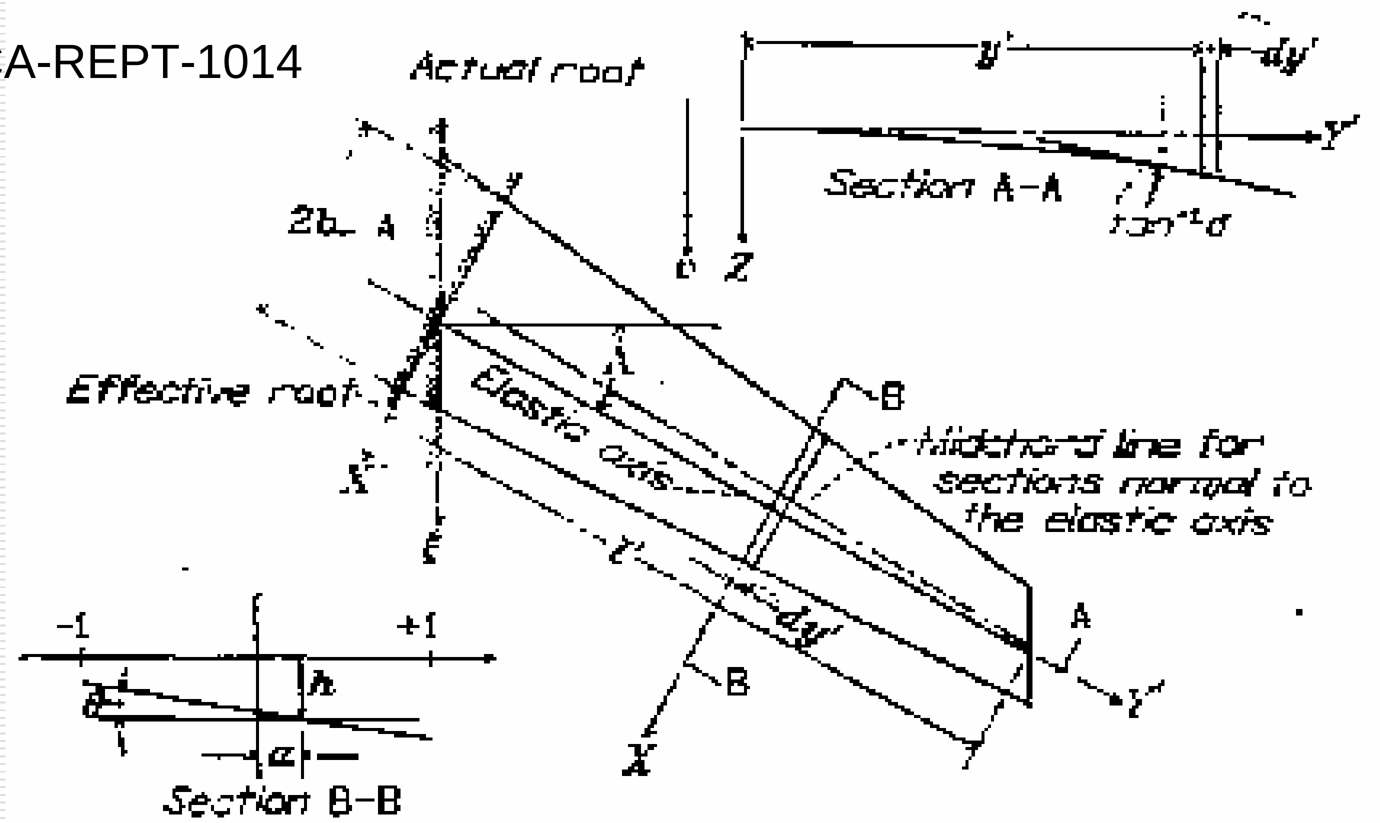


FIGURE 1.—Nonuniform swept wing treated in the present analysis.

Efeito do Enflechamento

- Sendo "s"o eixo alinhado com a direção da envergadura e coincidente com o eixo elástico; e "r" perpendicular a "s", um deslocamento Z escrito neste novo sistema de coordenadas é uma função: Z = Z(r,s,t) . (na figura, y' = s)
- E a condição de contorno, ou seja o normalwash induzido pela superfície da asa é:

$$W(r,s) = -V_0 \frac{\partial Z}{\partial \xi}(r,s)$$

onde a coordenada ξ é paralela com o escoamento não perturbado. Define-se o normalwash (ou downwash) como sendo a velocidade normal induzida pelo deslocamento da asa sujeita ao escoamento V_0.

$$\xi // V_0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial Z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \xi} = \cos\Lambda \frac{\partial Z}{\partial r} + \sin\Lambda \frac{\partial Z}{\partial s}$$

Efeito do Enflechamento

- **Condição de contorno:**

$$W\left(r,s\right)=-\left(V_0\cos\Lambda\frac{\partial Z}{\partial r}+V_0\sin\Lambda\frac{\partial Z}{\partial s}\right)$$

- **Porém o deslocamento na direção do eixo Z pode ser escrito como uma função de h(s) e α(s), graus de liberdade da seção típica :**

$$Z\left(r,s\right)=h\left(s\right)-r\cdot\alpha\left(s\right)$$

onde se considerou que $\cos\alpha\cong1.0$ **e** $\sin\alpha\cong\alpha$

- **Substituindo esta última relação na condição de contorno:**

$$W\left(r,s\right)=V_0\cos\Lambda\frac{\partial}{\partial r}\left[h\left(s\right)-r\cdot\alpha\left(s\right)\right]+V_0\sin\Lambda\frac{\partial}{\partial s}\left[h\left(s\right)-r\cdot\alpha\left(s\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W\left(r,s\right)=-V_0\cos\Lambda\left[\alpha\left(s\right)\right]+V_0\sin\Lambda\left[\frac{\partial h}{\partial s}\left(s\right)-r\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial s}\left(s\right)\right]$$

Efeito do Enflechamento

- Portanto, sobre o eixo elástico (r = 0) temos a expressão final para o ângulo de ataque no sistema rotacionado, a partir da expressão para o downwash:

$$W(r,s) = -V_0 \cos\Lambda\left[\alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda\left[\frac{\partial h}{\partial s}(s) - \cancel{r}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s)\right]$$

$$\Rightarrow W(r,s) = -V_0 \cos\Lambda\left[\alpha(s)\right] + V_0 \sin\Lambda\left[\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right]$$

- Como $V_n = V_0\cos(\Lambda)$, o ângulo de ataque observado pela seção típica com corda normal ao eixo elástico é dado por:

$$-\frac{W(r,s)}{V_0 \cos\Lambda} = \alpha_s(r,s) = \alpha(s) - \tan\Lambda\left(\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right)$$

Efeito do Enflechamento

- Mudando a notação, temos:

$$-\frac{W(r,s)}{V_0 \cos\Lambda} = \alpha_s(r,s) = \theta - \phi\tan\Lambda$$

$$\left(\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right) = \phi \quad \rightarrow$$ Inclinação local do eixo elástico deformado em flexão

Ou seja, fica claro agora que o ângulo de ataque efetivo na seção típica é composto por uma componente devido a torção (θ) e uma componente devido a flexão ($\phi.tan\Lambda$), que depende do enflechamento. Note que se o ângulo de enflechamento for positivo (para trás), temos o fenômeno de "wash out". Por outro Lado, se Λ for negativo, (para frente) temos o "wash in".

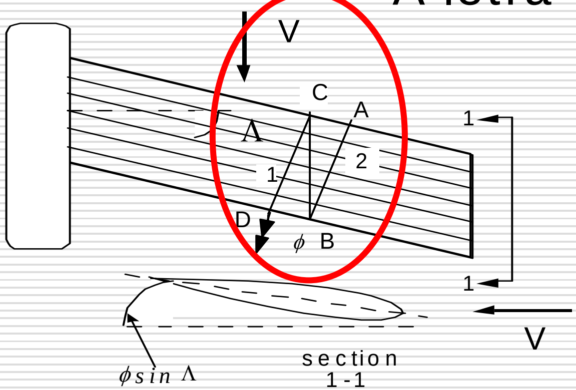
Exemplo simplificado: Asa rígida com engastes flexíveis

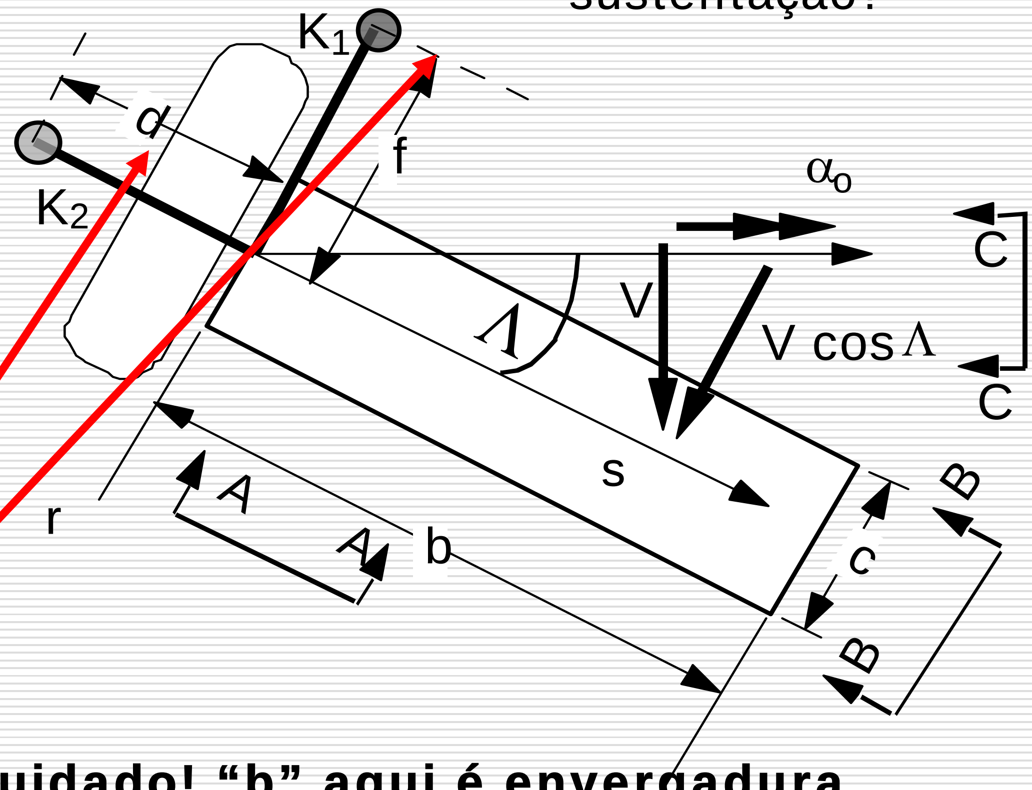
- Vamos estudar um primeiro modelo simplificado, cujo propósito é entender o efeito do enflechamento.
- Supõem-se que a asa é rígida e engastada através de molas que restringem movimento de corpo rígido que em flexão e torção.

Sistemas de eixos

A letra "N"

Flexão gera sustentação?



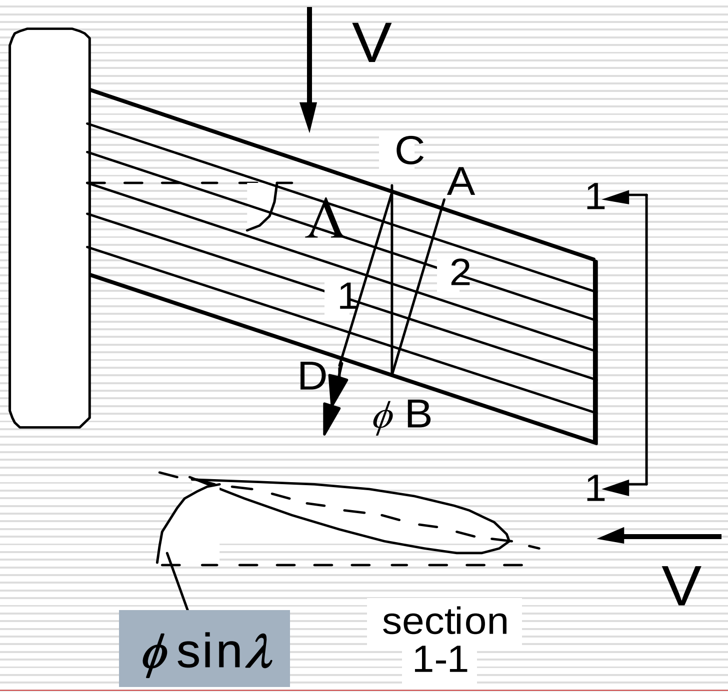


Molas que resistem a
deslocamentos verticais

Cuidado! "b" aqui é envergadura....

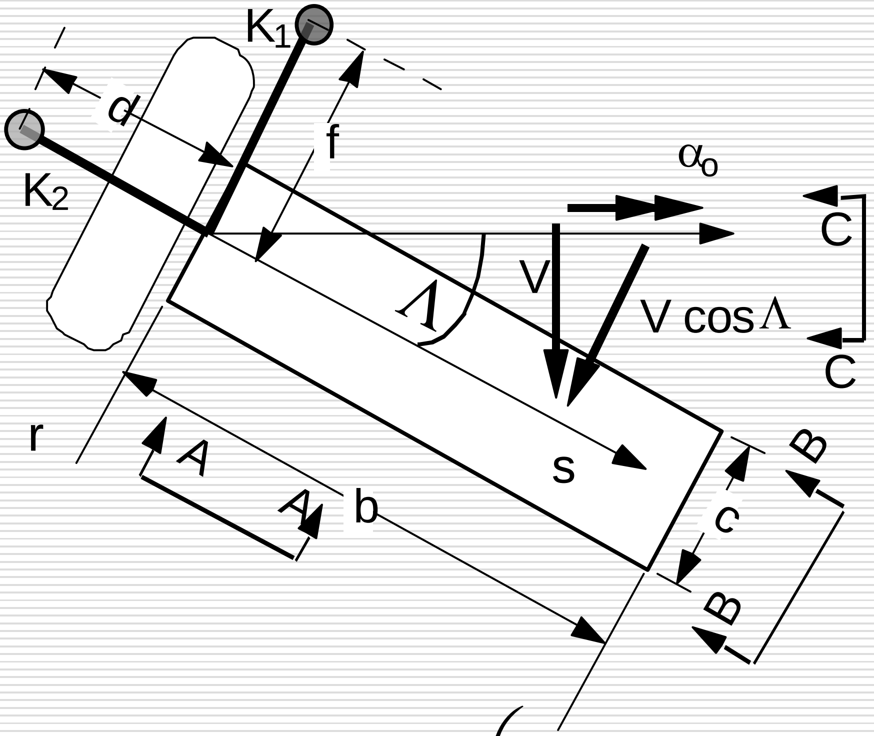
Acoplamento tipo flexo-torção

Pela figura abaixo, pode-se entender com funciona o acoplamento entre o modo de flexão e a torção induzida a uma seção de asa enflechada, alinhada com o escoamento aerodinâmico.



Os segmentos CD e AB acompanham o movimento vertical devido a flexão sem torcer. Por outro lado o segmento CB desloca-se verticalmente, porém ele torce, pois o ponto B desloca-se mais no sentido vertical que o ponto C. O segmento CB representa a seção da asa alinhada com o escoamento.

Sustentação na asa flexível



Para calcular o carregamento aerodinâmico na seção típica, que por razões estruturais é perpendicular ao eixo elástico, leva-se em conta a componente de escoamento não perturbado normal a este eixo.

$$q_n = q\cos^2\Lambda$$

$$L = q_n c b a_o \left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi \tan\Lambda \right)$$

Ângulo de ataque efetivo

$$\alpha_{freestream} = \frac{v}{V} = \alpha_o + \theta \cos\Lambda - \phi \sin\Lambda$$

(a expressão acima obtivemos da condição de contorno a pequenas Perturbações – expressão para o downwash)

Entretanto, queremos o ângulo de ataque "percebido" pela seção típica.

$$\alpha_c = \alpha_{corda} = \frac{v}{V\cos\Lambda} = \frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \frac{\theta\cos\Lambda}{\cos\Lambda} - \frac{\phi\sin\Lambda}{\cos\Lambda}$$

Estrutural ou na direção da corda...

$$\alpha_{estrutural} = \theta - \phi\tan\Lambda$$

Sustentação da asa flexível

Portanto, para o cálculo da sustentação na asa assumindo a teoria Das faixas, devemos calcular a sustentação em cada faixa empregando a pressão dinâmica equivalente.

$$q_n = q\cos^2\Lambda$$

Componente de velocidade normal ao eixo elástico da asa.

$$L = q_n c b C_{L\alpha}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi\tan\Lambda\right)$$

Note que esta sustentação é calculada com relação a seção típica, ou seja empregando o ângulo de ataque “estrutural”, mais A contribuição de um ângulo de ataque inicial α_0

Modelo estrutural simplificado

- Assumiu-se que as molas que restringem os movimentos de corpo rígido da nossa asa enflechada são representadas pelas molas K_1 e K_2, dispostas com uma excentricidade “f” e “d”, respectivamente;
- Estas molas podem ser representadas por molas que restringem os graus de liberdade em flexão na forma da derivada da deformação ao longo da envergadura e no sentido vertical, e o grau de liberdade em torção da asa.

$$K_\theta = K_1 f^2 \qquad K_\phi = K_2 d^2$$

Carregamento aerodinâmico

- O carregamento aerodinâmico para o nosso problema pode ser aproximado por:

$$\int_0^b (l\cdot s)\,ds = q_n c C_{l_\alpha} \frac{b^2}{2}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda}+\theta-\phi\tan\Lambda\right)$$

$$\int_0^b (l\cdot e)\,ds = q_n c C_{l_\alpha} eb\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda}+\theta-\phi\tan\Lambda\right)$$

Onde: $q_n = \frac{1}{2}\rho V_n^2 = \frac{1}{2}\rho V^2\cos^2\Lambda = q\cos^2\Lambda$

Note que na realidade são momentos resultantes da distribuição do carregamento aerodinâmico ao longo da envergadura b, no sentido deste e no sentido da corda.

Equilíbrio estático : momentos associados à flexão e torção

Equilíbrio em flexão (ϕ)

$$K_\phi \phi = \int_o^b (l \cdot s)\, ds \qquad \Rightarrow$$

$$K_\phi \phi = q_n c C_{l_\alpha} \frac{b^2}{2} \left(\frac{\alpha_o}{\cos \Lambda} + \theta - \phi \tan \Lambda \right)$$

Equilíbrio em flexão (θ)

$$K_\theta \theta = \int (le)\, dy \qquad \Rightarrow$$

$$K_\theta \theta = q_n c C_{l_\alpha} eb \left(\frac{\alpha_o}{\cos \Lambda} + \theta - \phi \tan \Lambda \right)$$

Chegamos a um sistema de duas equações e duas incógnitas.

“Parametrizando” o problema

$$t = \tan\Lambda \qquad\qquad Q = q_n c b C_{l_\alpha}$$

Equações para o equilíbrio estático supondo ângulo de ataque inicial

$$\begin{bmatrix} K_\phi & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda}\begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix} + Q\begin{bmatrix} \frac{-tb}{2} & \frac{b}{2} \\ -te & e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Note que a matriz de rigidez estrutural é desacoplada, porém a matriz aeroelástica representará um acoplamento de natureza aerodinâmica.

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{bmatrix} K_\phi & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} - Q\begin{bmatrix} \frac{-tb}{2} & \frac{b}{2} \\ -te & e \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda}\begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

Sistema aeroelástico

Resultando em :

$$\begin{bmatrix} \left(K_\phi + \frac{Qtb}{2}\right) & \left(-\frac{Qb}{2}\right) \\ (Qte) & (K_\theta - Qe) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

ou

$$\left[\overline{K}_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{Bmatrix} b/2 \\ e \end{Bmatrix}$$

Resposta aeroelástica

- Resolve-se o sistema de equações para obter ϕ e θ:

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{Q\alpha_o}{\cos\Lambda} \begin{bmatrix} \left(K_\phi + Qtb/2\right) & \left(-Qb/2\right) \\ \left(Qte\right) & \left(K_\theta - Qe\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{b}{2} \\ e \end{Bmatrix}$$

$$\phi = \frac{Qb\alpha_0}{2\cos\Lambda}\left(\frac{1}{K_\phi + Q\left(\dfrac{b\tan\Lambda}{2} - \dfrac{K_\phi}{K_\theta}e\right)}\right) \qquad \theta = \frac{Qb\alpha_0}{\cos\Lambda}\left(\frac{1}{K_\theta + Q\left(\dfrac{K_\theta}{K_\phi}\dfrac{b\tan\Lambda}{2} - e\right)}\right)$$

Estabilidade do sistema

Utilizamos o critério de estabilidade de Euler para estudar a estabilidade do sistema, chegando a uma equação para o parâmetro “Q” (não confundir “Q” com “q” de pressão dinâmica!)

$$\Delta = \left|\overline{K}\right| = \left(K_\phi + \frac{Qbt}{2}\right)\left(K_\theta - Qe\right) + Q^2 \frac{bet}{2}$$

$$\Delta = K_\theta K_\phi + Q\left(K_\theta \frac{bt}{2} - K_\phi e\right)$$

Condição de divergência

$$\Delta = 0$$

$$\boxed{Q_D = \frac{K_\theta K_\phi}{eK_\phi - K_\theta \frac{bt}{2}}}$$

$$Q = q_n cba_o$$

Ou agora, isolando a pressão dinâmica associada à velocidade de escoamento não perturbado temos:

$$\boxed{q_D = \frac{K_\theta \big/ Sea_o}{\cos^2\Lambda\left(1 - \left(\frac{b}{e}\right)\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\right)\frac{\tan\Lambda}{2}\right)}}$$

O que acontece se Λ for igual a zero?

Análise do enflechamento

Fazendo o denominador igual a zero:

$$1-\left(\frac{b}{e}\right)\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\right)\frac{\tan\Lambda_{critical}}{2}=0$$

$$\tan\Lambda_{crit}=2\left(\frac{e}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{K_\phi}{K_\theta}\right)$$

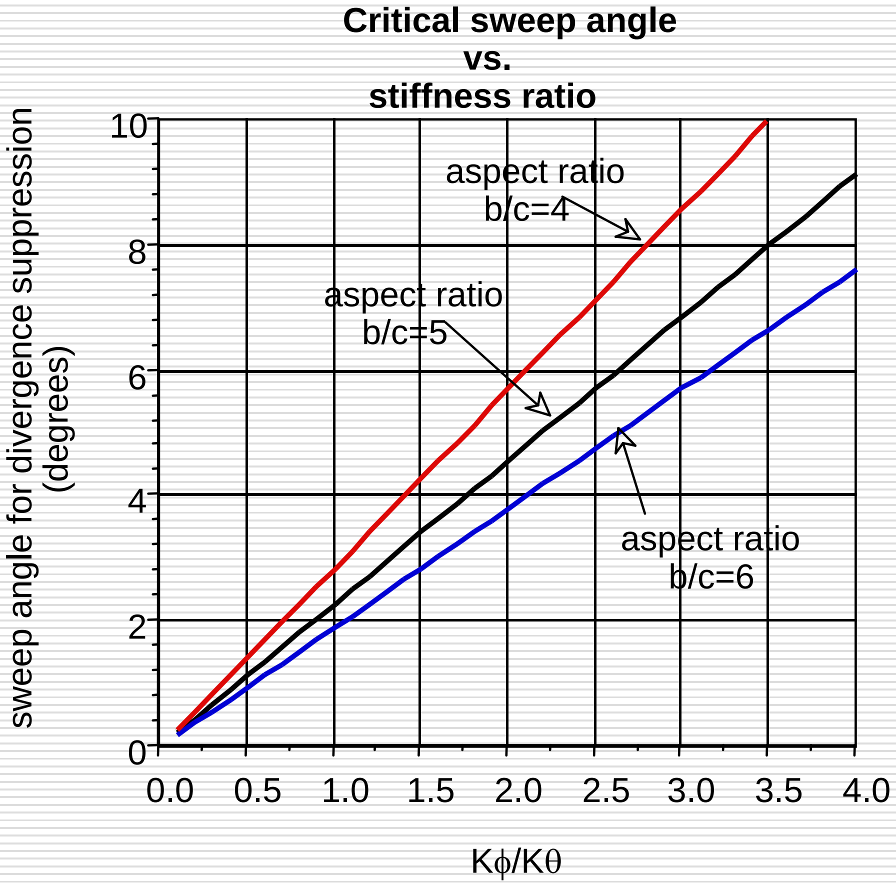
Implica em uma pressão dinâmica de divergência infinita.

Sem divergência:

$$\Lambda\geq\tan^{-1}\left(2\left(\frac{e}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{K_\phi}{K_\theta}\right)\right)$$

Exemplo

$$e/c = 0.1$$



$$b/c = 4{,}5{,}6$$

Se a razão entre as rigidezes em flexão e torção for 3, temos Λ_{cr} = 5.71°. Ou seja se asa for enflechada mais de 5.71o, nunca teremos divergência.

Eficiência de sustentação

- Eficiência de sustentação é definida como a razão entre a sustentação produzida por uma asa flexível e a sustentação produzida pela mesma asa, porém considerando-a rígida.

$$L^{rigida} = qSC_{L\alpha}\alpha_o \cos\Lambda$$

$$L^{flexível} = q_n SC_{L\alpha}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi\tan\Lambda\right)$$

Onde, $q_n = q\cos^2\Lambda$ emprega-se a pressão dinâmica normal ao eixo elástico.

Eficiência de sustentação

- Substituindo os ângulos da inclinação devido a flexão e devido a torção, obtidos da solução do sistema de equações, na relação:

$$L^{flexível} = q_n S C_{L\alpha}\left(\frac{\alpha_o}{\cos\Lambda} + \theta - \phi\tan\Lambda\right)$$

- Temos:

$$L = \frac{q_n S C_{L\alpha}\alpha_o}{\cos\Lambda}\left(1 + \frac{QK_\phi e}{\Delta} - \frac{QbK_\theta\tan\Lambda}{2\Delta}\right)$$

Sustentação da asa flexível

$$L = qSC_{L\alpha}\alpha_o \cos\Lambda \left(\frac{1}{1 + \dfrac{Q}{K_\theta K_\phi}\left(K_\theta \dfrac{b\tan\Lambda}{2} - K_\phi e \right)} \right)$$

Fazendo: $Q = q_n S c_{l_\alpha}$

$$Q_D = \frac{K_\phi K_\theta}{K_\phi e - \dfrac{K_\theta b\tan\Lambda}{2}}$$

Eficiência da sustentação

$$L = \frac{qSa_o\alpha_o\cos\Lambda}{1-Q/Q_D}$$

$$Q = q_nSC_{L\alpha}$$

$$Q_D = \frac{K_\phi K_\theta}{K_\phi e - \frac{K_\theta b\tan\Lambda}{2}}$$

$$\boxed{\frac{L}{qSa_o\alpha_o\cos\Lambda} = \frac{L^{flexível}}{L^{rígido}} = \frac{1}{1-q/q_D}}$$

Onde:

$$q_D = \frac{K_\theta/Sea_o}{\cos^2\Lambda\left(1-\left(\frac{b}{e}\right)\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\right)\frac{\tan\Lambda}{2}\right)}$$

Exemplo Numérico

$$q_D = \frac{q_0}{\cos^2\Lambda\left(1-\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{e}\right)\left(\frac{K_\theta}{K_\phi}\right)\frac{\tan\Lambda}{2}\right)}$$

Sendo as condições:

$$q_o = 250\ \ lb/\ ft^2 \qquad \frac{K_\phi}{K_\theta} = 3$$

$$\boxed{\frac{b}{c} = 6} \qquad \boxed{\Lambda = 30^o} \qquad \boxed{\frac{e}{c} = 0.1}$$

Eficiência de sustentação - final