AE-249 - AEROELASTICIDADE

Métodos de elementos discretos em aeroelasticidade

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Modelo aerodinâmico

- Uma classe de modelos aerodinâmicos não-estacionários, bastante utilizado em estudos de aeroelasticidade, são aqueles baseados em métodos de elementos discretos conhecidos também como métodos de painéis.

- A modelagem de aerodinâmica não estacionária pode realizada com base em métodos de elementos discretos tais como métodos baseados em funções Kernel.

- Apresenta-se aqui uma breve revisão de métodos baseados na solução elementar das equações do potencial aerodinâmico linearizado, supondo pequenas perturbações que ocorrem em torno de uma condição média de escoamento não perturbado.

Escoamento Potencial

- A equação básica a partir da qual os métodos de elementos discretos foram desenvolvidos é a equação do potencial aerodinâmico linearizado (EPAL) dada por:

$$\Box\phi\left(x,y,z,t\right)=\beta^2\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}-2\left(M_\infty^2/U_\infty\right)\phi_{xt}-\left(M_\infty^2/U_\infty\right)\phi_{tt}=0$$

onde : $\Box\equiv\beta^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-2\left(M_\infty^2/U_\infty\right)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\left(M_\infty^2/U_\infty\right)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$

é um operador linear aplicado ao potencial de pequenas perturbações.

Movimento Harmônico

- Assumindo que o potencial varie no tempo harmonicamente, isto é a sua intensidade pode-se associar uma frequência, pode-se escrever:

$$\phi\left(x, y, z, t\right) = \varphi\left(x, y, z, k\right) e^{ikt}$$

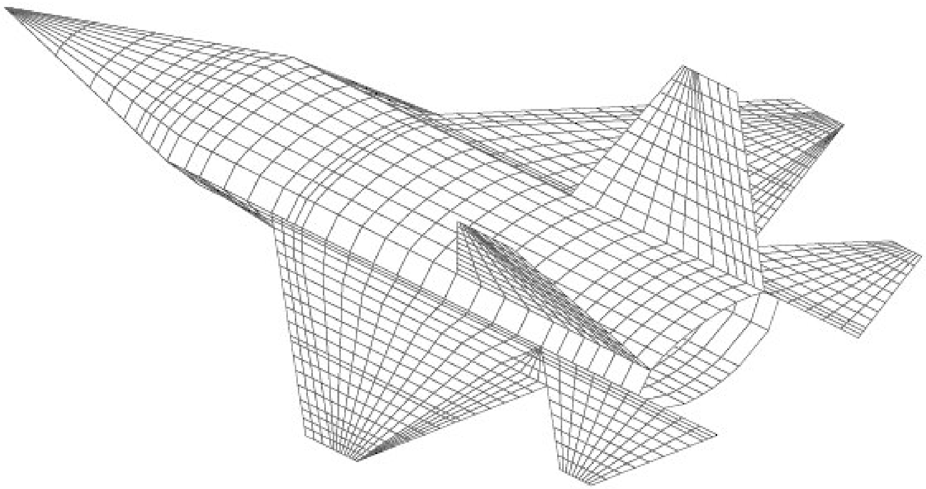
- O que implica em escrever a equação do potencial aerodinâmico linearizado no domínio da frequência como:

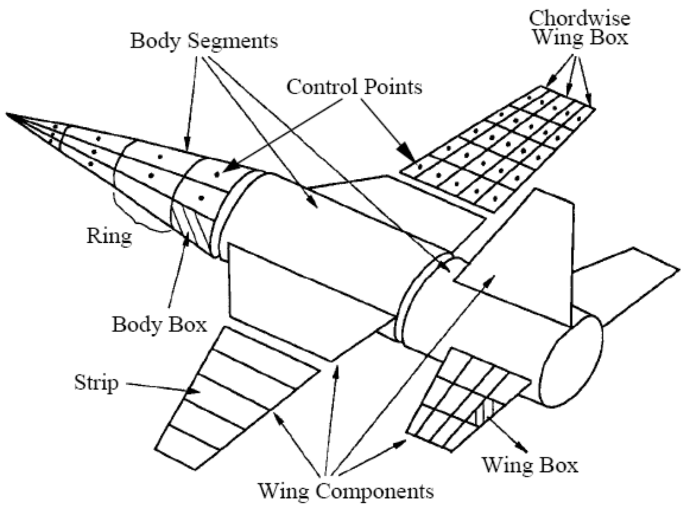
$$\bar{\Box}\varphi\left(x, y, z, k\right) = \beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - 2ikM_\infty^2 \varphi_x + k^2 M_\infty^2 \varphi = 0$$

onde $\bar{\Box}$ é um operador aplicado a esta versão no domínio da frequência, (x,y,z) coordenadas cartesianas, k é a frequência reduzida, M o número de Mach e b um comprimento de referência.

Métodos de Elementos Discretos

- A idéia é subdividir em elementos uma determinada geometria aerodinâmica sabendo-se que, se conhece a solução elementar da equação, associada a cada um destes elementos.
- Da composição destes elementos bem como, assumindo o princípio da superposição do efeitos potenciais, pode-se obter uma solução para um carregamento aerodinâmico no corpo.

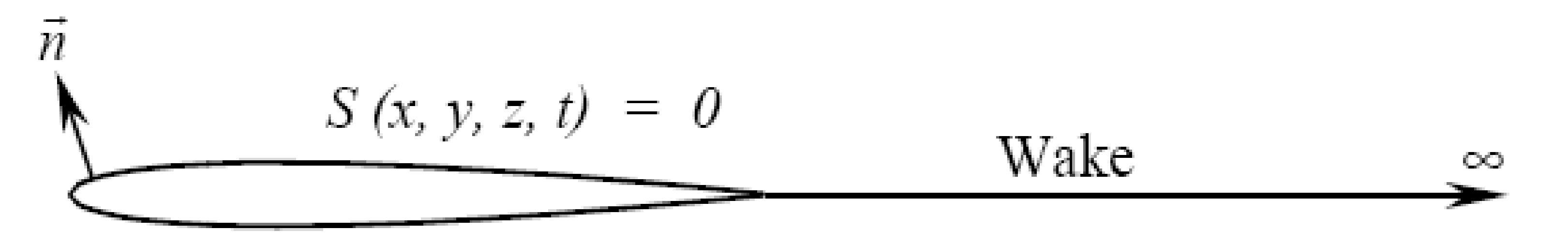




Métodos de Elementos Discretos

- Métodos de elementos discretos são baseados na solução integral da equação do potencial aerodinâmico linearizado, neste caso no domínio da frequência, particularizada para condições de contorno que descrevem a configuração aerodinâmica de interesse.
- A transformação da forma diferencial da EPAL para a forma integral é realizada aplicando-se o teorema de Green, chegando a:

$$\varphi\left(x, y, z, k\right) = -\iint_{S} \varphi_S dS + \iint_{S+W} \varphi_D d\left(S+W\right)$$



Solução Elementar

- Esta equação integral assume que sobre a superfície *S*, são distribuídas fontes φ_s e dipolos φ_d (soluções elementares da equação do potencial aerodinâmico linearizado), bem como nas superfícies que definem a esteira aerodinâmica (*W - Wake*).
- O potencial harmônico devido uma fonte e um dipolo de intensidade σ e μ (ou $\Delta\varphi$) são, por exemplo, dados por:

$$\varphi_S = \frac{\sigma\left(\bar{\xi},\bar{\eta},0,k\right)}{4\pi}\left(\frac{e^{\frac{ikM_\infty}{\beta^2}(M_\infty R - X)}}{R}\right) \qquad \varphi_D = \frac{\Delta\varphi\left(\bar{\xi},\bar{\eta},0,k\right)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{\frac{ikM_\infty}{\beta^2}(M_\infty R - X)}}{R}\right)$$

onde,

$\left(\bar{\xi},\bar{\eta},0\right)$ Posição da fonte

$\left(x,y,z\right)$ Ponto que recebe

$$R = \sqrt{X^2 + \beta^2\left(Y^2 + z^2\right)}$$

$$Y = y - \bar{\eta}$$

$$X = x - \bar{\xi}$$

Distância entre a fonte e o ponto que recebe

Kernel

- Isto é, soluções elementares são função de parâmetros geométricos, numero de Mach e frequência de oscilação (frequência reduzida).
- Note que existe um termo comum entre parênteses nas relações que definem as soluções elementares:

$$\boxed{\left(\frac{e^{\frac{ikM_\infty}{\beta^2}(M_\infty R - X)}}{R} \right)}$$

- Este termo é conhecido como o Kernel da relação integral e é dado por:

$$\varphi_0 = \frac{e^{\frac{ikM_\infty}{\beta^2}(M_\infty R - X)}}{R} = K_\varphi$$

Kernel

- O Kernel é uma função de Green de espaço livre, da equação:

$$\varphi(x, y, z, k) = -\iint_S \varphi_S dS + \iint_{S+W} \varphi_D d(S+W)$$

- Ele representa a solução da equação acima sobre um domínio tridimensional com uma fonte ou um dipolo pontual não estacionária de intensidade unitária concentrada no ponto $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0)$

- Assume-se como notação para a intensidade do dipolo como $\Delta\varphi$ pois o mesmo representa um salto de potencial através da superfície de sustentação sobre a qual estes dipolos estão distribuídos.

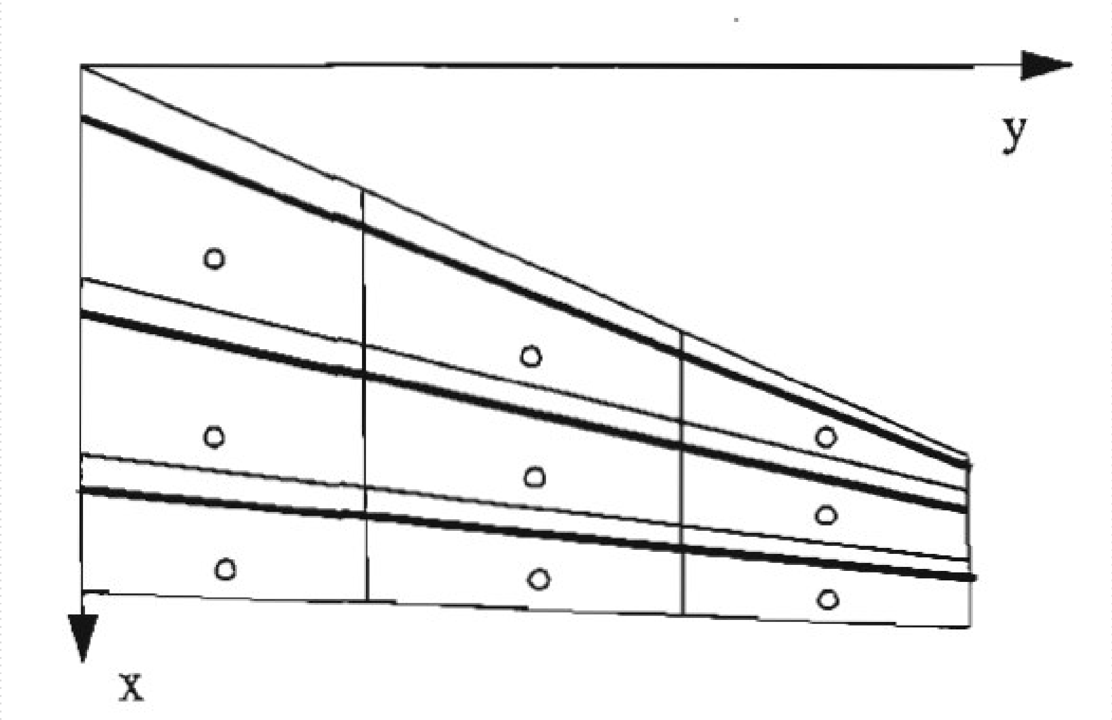
Kernel

- Rescrevendo a solução integral como função do Kernel tem-se:

$$\varphi(x,y,z,ik) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \sigma(\bar{\xi},\bar{\eta},0,ik)K_\varphi dS + \frac{1}{4\pi}\iint_{S+W} \Delta\varphi(\bar{\xi},\bar{\eta},0,ik)\frac{\partial K_\varphi}{\partial n} d(S+W)$$

- A mudança de notação do argumento variável *k* para *ik* é introduzida para reforçar a natureza da intensidade do potencial que obedece uma variação harmônica simples.
- Versão plana (*planar*): Vamos estudar um modelo mais simples, onde se pressupõem que o corpo é uma superfície de sustentação coincidente com o plano coordenado X-Y
- Desta forma- assumiu-se que a coordenada Z é nula, ver equação acima.

“Planar”



O Método de Funções Kernel

- Como já vimos, o objetivo dos método baseados em função Kernel é resolver o problema de configurações complexas, tais como aeronaves completas.
- Subdivide-se a superfície destas configurações aerodinamicamente complexas, bem como a esteira que se forma a jusante do corpo elementos geométricos discretos de área de tamanho finito, aos quais associam-se pontos de referência
- Sobre cada ponto deste área elementar, assume-se que existe uma distribuição fontes e dipolos. Estas singularidades são soluções elementares da equação integral (e também da diferencial) que modela o nosso problema.

Versão Plana ("*Planar*")

- No caso de estudos aerodinâmicos em um contexto linear, a pequenas perturbações de superfícies de sustentação finas, tal como no caso de asas, o efeito da espessura é de segunda ordem.
- Desta forma é consistente assumir apenas uma distribuição de **dipolos** para representar o salto de potencial que ocorre no caso da asa oscilando segundo um movimento harmônico simples, bem como o salto de potencial que ocorre na esteira.
- Singularidade do tipo fonte usualmente são empregadas para modelar os efeitos de espessura, enquanto que as singularidades dipolo servem para modelar o efeito de salto de potencial, o qual está associado a um salto de pressão (o mesmo raciocínio foi usado por Theodorsen, quando usou uma fonte e um sorvedouro aproximando-se de casa lado – extradorso e intradorso – do aerofólio).

Sustentação não estacionária

- Portanto o Kernel neste caso fica reduzido a:

$$\varphi(x, y, z, ik) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S+W)} \Delta\varphi\left(\overline{\xi}, \overline{\eta}, 0, ik\right) \frac{\partial K_{\varphi}}{\partial n} d\,(S+W)$$

- Esta relação integral representa uma distribuição de dipolos sobre a superfície de sustentação e a esteira.
- Ou seja, uma vez que existe um salto de potencial da esteira, é necessário discretizá-la para representar os efeito de memória representado pelo atraso aerodinâmico induzido pela esteira de vórtices da superfície de sustentação.
- Isto implica em um aumento do esforço computacional em termos de alocação de memória, por exemplo, uma vez que é necessário assumir que a esteira estende-se a uma distancia suficientemente grande do bordo de fuga.

Potencial de Aceleração

- Desta forma, é conveniente recorrer a uma formulação em termos do potencial de aceleração, pois se o potencial de velocidade satisfaz a equação:

$$\varphi\left(x,y,z,ik\right)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S+W)}\Delta\varphi\left(\overline{\xi},\overline{\eta},0,ik\right)\frac{\partial K_{\varphi}}{\partial n}d\left(S+W\right)$$

- O potencial de aceleração também vai satisfazer, uma vez que se pode escrever o a equação do potencial aerodinâmico linearizado como função do potencial de aceleração.
- Como o potencial de aceleração é na realidade a pressão linearizada, e na esteira não se tem salto de pressão, será necessário somente discretizar o domínio que compreende a superfície da asa.

Potencial de Aceleração

- Pode-se associar o potencial de aceleração ao potencial de velocidade através da relação que define a pressão linearizada como função do potencial de velocidade.

$$\Delta\psi = -\frac{\Delta p}{\rho_0} = \left[U_\infty \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t}\right]$$

$$\Delta\psi\left(x, y, z, ik\right) = \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x} + ik\Delta\varphi \quad , \qquad k = \frac{\omega b}{U_\infty}$$

Potencial de Aceleração

- Da mesma forma, as derivadas por potencial de velocidade bem como o potencial de aceleração satisfazem a equação do potencial aerodinâmico linearizado.
- Como

$$\Delta\psi(x, y, z, ik) = \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x} + ik\Delta\varphi$$

é uma equação diferencial, pode-se obter a relação inversa como:

$$\varphi(x, y, z, ik) = e^{ikx} \int_{-\infty}^{x} e^{ikx_0} \psi(x_0, y, z, ik)\, dx_0$$

com x_0 uma variável auxiliar.

Kernel na relação integral

- A escolha do limite inferior da integral como é feita para satisfazer a condição que φ desaparece quando x → ∞, ou seja, a frente da superfície de sustentação
- Substituindo a relação para o salto do potencial de velocidade $\Delta\varphi$ pelo potencial de aceleração chega-se a seguinte relação integral:

$$\varphi(x, y, z, ik) = -\frac{1}{8\pi}\iint_S \Delta C_p\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0, ik\right) K_\psi\left(X, Y, 0, ik\right) dS$$

onde: $$K_\psi\left(X, Y, 0\right) = e^{-ikX}\int_{-\infty}^{X} e^{ikx_0}\frac{\partial K_\varphi}{\partial n}\left(x_0, Y, 0\right) dx_0$$

obtido quando assumimos o MHS

O novo Kernel

- $K\psi$ é o novo Kernel, ou conhecido como Kernel associado ao potencial de aceleração.
- Note que ao eliminarmos a necessidade de modelar esteira, complicamos a forma de obter o Kernel da relação integral, uma vez que o mesmo depende de uma integração do Kernel associado ao salto de potencial de velocidades gerado pela distribuição de dipolos.

$$K_{\psi}\left(X,Y,0,ik\right)=\frac{\partial}{\partial n}\left(e^{-ikX}\int_{-\infty}^{X}e^{ikx_0}\left(\frac{e^{\frac{ikM_{\infty}}{\beta^2}\left(M_{\infty}R-x_0\right)}}{\sqrt{x_0^2+\beta^2\left(Y^2+z^2\right)}}\right)dx_0\right)$$

$\Delta C_p\left(\overline{\xi},\overline{\eta},0,ik\right)$ → coeficiente de pressão associado a intensidade do dipolo de pressão

Particularizando a solução

- Para particularizar a solução do problema integral, devemos associar condições de contorno que definem o nosso corpo bem como os movimentos a ele associados.
- Convenientemente, ao escrevemos a relação entre o salto de velocidade (downwash) e a condição de contorno, ao representar através da relação linearizada, temos, transformado para o domínio da frequência:

$$\varphi_n\left(x,y,0,ik\right)=w\left(x,y,0,ik\right)=\frac{\partial h}{\partial x}\left(x,y,0\right)+ikh\left(x,y,0\right)$$

- Note que $\boldsymbol{\varphi_n}$ representa a devida do potencial na direção normal, e h(x,y,0) uma função de deslocamento da superfície de sustentação. (condição de contorno de Neumann)

Solução de Küssner

- Caso "planar" - vetor *n* alinhado com o eixo "z". Derivada do potencial em relação a z – velocidade normal induzida (downwash):

$$\varphi_z(x,y,0,ik)_{z=0} = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{8\pi}\iint_S \Delta C_p\left(\bar{\xi},\bar{\eta},0,ik\right)K_\psi\left(X,Y,0,ik\right)dS\right]\right\}$$

- Fazendo as substituições do que definimos anteriormente:

$$\varphi_z(x,y,0,ik)_{z=0} =$$

$$-\frac{1}{8\pi}\iint_S \Delta C_p\left(\bar{\xi},\bar{\eta},0,ik\right)\left\{\lim_{z\to 0}\left[\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\left(e^{-ikX}\int_{-\infty}^{X} e^{ikx_0}\left(\frac{e^{\frac{ikM_\infty}{\beta^2}(M_\infty R - x_0)}}{\sqrt{x_0^2+\beta^2\left(Y^2+z^2\right)}}\right)dx_0\right)\right]\right\}dS$$

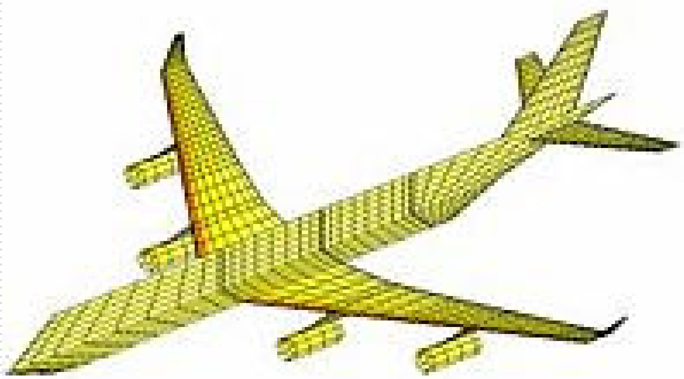
- Solução de Küssner para o potencial de aceleração associado ao downwash.

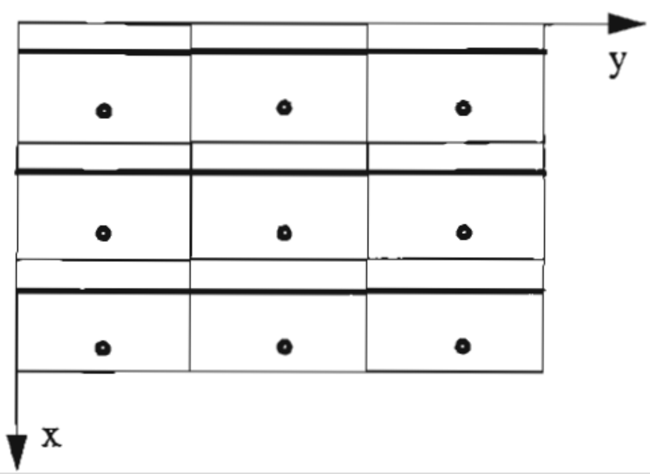
Métodos de elementos discretos baseados na função Kernel

- O que apresentamos anteriormente é a base para todos os desenvolvimentos baseados em métodos de função Kernel.
- Avaliar o Kernel não é tarefa fácil, especialmente quando mesmo refere-se a um salto de pressão (potencial de aceleração)
- A diferenças entre os métodos baseados em função Kernel são essencialmente associadas a técnicas que buscam uma solução racional para esta função que é complicada.
- Dentre alguns métodos clássicos, podemos citar:
  - Doublet Lattice Method (DLM) - Albano e Rodden (1969),
  - Doublet Point Method (DPM) - Ueda e Dowell (1982),
  - ZONA 6 Method – Chen e Liu (1990),
  - ...

O método "Doublet Lattice"

- A diferença básica entre eles é como as singularidades são distribuídas sobre os elementos usados para discretizar a geometria.
- As integrais também são resolvidas de forma diferente.
- Por exemplo o DLM assume que os dipolos são distribuídos ao longo de uma linha a ¼ da corda de cada painel, bem como a escolha de um ponto a ¾ da corda onde se mede o downwash induzido pelos demais painéis que discretizam o corpo.





Coeficientes de influência

- O conceito básico dos métodos de elementos discretos é assumir que o corpo é subdivididos elementos, conhecidos como painéis
- Cada painel possui um ponto conhecido como ponto de controle onde se impõem a condição de contorno (e se associa ao downwash induzido pelo movimento).
- A equação integral é aproximada pela soma de integrais elementares associada a cada painel.
- As integrais elementares que representam as influências de um painel nele mesmo, assim como a interferência mútua entre os painéis implica em um sistema de equações que relacionam pressões ao downwash.
- Como resultado tem-se um sistema de equações algébricas que pode ser representado na forma matricial.

Matriz AIC

- Esta matriz é conhecida como matriz de coeficientes de influência (aerodynamic influence coefficients matrix - AIC), e tem como papel relacionar o downwash induzido por um movimento (condição de contorno) que implicará em uma variação de pressão percebida por todos os painéis
- Esta forma linear é justificada pelo principio da superposição das influências exercidas pelas singularidades (dipolos) em cada painel.

$$\varphi_z^i\left(x, y, 0, ik\right)_{z=0} = -\frac{\Delta C_p^j}{8\pi}\left(\xi, \eta, 0, ik\right)\iint_{S_j}\left\{\lim_{z\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(K_\psi\right)\right]\right\}dS$$

- A variação de pressão no painel “j” implica em uma variação no downwash no painel “i”.

Matriz AIC

- i → painel que percebe o downwash, j → painel ao qual está associado o salto de pressão

$$\varphi_z^i = w_i = D_{ij} \Delta C_{p\,j}$$

onde D é a matriz de coeficientes de influência. E D é dado por:

$$D_{ij} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\bar{\xi}_{j-1}}^{\bar{\xi}_j} \int_{\bar{\eta}_{j-1}}^{\bar{\eta}_j} \left\{ \lim_{z \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial z} K_\psi \left(x_i - \bar{\xi}_n, y_i - \bar{\eta}_n, 0, M_\infty, k \right) \right] \right\} d\bar{\xi}_n d\bar{\eta}_n$$

uma função exclusivamente do Mach, geometria e frequência reduzida.

Fechando o problema

- Como se conhece o vetor de downwash pois o mesmo está associado a condição de contorno, bem como as informações necessárias para se obter o Kernel (geometria, frequência reduzida e número de Mach) teremos como incógnitas as pressões (ou o potencial de aceleração).
- Para tal, inverte-se a matriz D chegando a:

$$\left\{\Delta C_p(ik)\right\} = \left[D(ik)\right]^{-1}\left\{w(ik)\right\} \Rightarrow \left\{\Delta C_p(ik)\right\} = \left[AIC(ik)\right]\left\{w(ik)\right\}$$

- Como estamos no domínio da frequência, temos o downwash representado por:

$$\left\{w(x,y,0,ik)\right\} = \frac{\partial h(x,y,0)}{\partial x} + ikh(x,y,0) = \left[F(ik)\right]\left\{h(x,y,0)\right\}$$

Carregamento Aerodinâmico

- Ou seja, fechamos a nosso problema com a possibilidade de obter uma distribuição de pressão nos painéis, a qual pode ser relacionada a uma força aerodinâmica por:

$$\left\{L_a\left(ik\right)\right\} = q_\infty \left[S\right]\left[AIC\left(ik\right)\right]\left[F\left(ik\right)\right]\left\{h\right\}$$

onde S é uma matriz que representa as áreas dos painéis e ***F(ik)***:

$$\left[F\left(ik\right)\right]\left(\cdot\right) = \left[\frac{\partial\left(\cdot\right)}{\partial x} + ik\left(\cdot\right)\right]$$

é um operador que representa a derivada substancial do modo de movimento, responsável por gerar as pressões.