



# AE-249 - AEROELASTICIDADE

---

## **Aeroelasticidade Dinâmica - Flutter**

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA**

# O que precisamos da aerodinâmica não estacionária para flutter?

---

□ Theodorsen:

$$l = \pi \rho b^2 \left[ \ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b C(k) \left[ \dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$m_y = \pi \rho b^2 \left[ ba \ddot{h} + V_0 b(0.5 - a) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2\pi \rho V_0 b^2 (0.5 + a) C(k) \left[ \dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$C(k) = \frac{-J_1 + iY_1}{-(J_1 + Y_0) + i(Y_1 - J_0)} = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)}$$

$$C(k) = 0.5 + \frac{0.0075}{ik + 0.0455} + \frac{0.10055}{ik + 0.3}$$

---

# Parcelas Circulatória e Não Circulatória

---

- ❑ REGIME É INCOMPRESSIVEL
  - ❑ Não Circulatória – efeitos de massa aparente e amortecimento associado ao movimento do aerofólio.
  - ❑ Circulatória – considera a mudança na sustentação associada ao vórtice ligado no aerofólio devido a um efeito de memória.
  - ❑ Cada parcela será mais ou menos relevante dependendo do movimento
    - Efeitos não circulatórios – massa aparente – alta frequência
    - Efeitos circulatórios – acoplamento de modos causado pelo atraso da fase do carregamento aerodinâmico.
-

# Significado físico:

---

- ❑ Os efeitos de atraso aerodinâmico no carregamento aerodinâmico são representados pela função de deficiência de sustentação de Theodorsen;
  - ❑ Ela representa a influência da esteira de vórtices alternados que se forma a jusante, a partir do BF. O potencial dos vórtices da esteira é que muda a magnitude e fase do vórtice ligado, e consequentemente da circulação.
-

# Theodorsen no domínio da frequência

---

- Na realidade, frequência reduzida:

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = 2b^2 q_D \left\{ -[M_{nc}]k^2 + ([B_{nc}] + C(k)[B_c])ik + C(k)[K_c] \right\} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{b} \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix}$$

- E este carregamento será importante para estudos de estabilidade, usualmente feitos no domínio da frequência
  - A frequência reduzida representa o quão não estacionário é o escoamento;
  - É um parâmetro adimensional que indica quantas oscilações ocorrem por quantidade de semi cordas percorrido pelo aerofólio.
-

# Coeficientes de Influência

$$\begin{Bmatrix} -\bar{l} \cdot b \\ \bar{m}_y \end{Bmatrix} = \pi \rho b^4 \omega^2 \begin{bmatrix} l_h & l_\alpha \\ m_h & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\alpha} \end{Bmatrix} \quad l_h = 1 - \frac{2iC(k)}{k}$$

$$l_\alpha = -a - \frac{i}{k} - \frac{2C(k)}{k^2} - \frac{2iC(k)(0.5-a)}{k} \quad m_h = -a + \frac{2iC(k)(0.5+a)}{k}$$

$$m_\alpha = \frac{1}{8} + a^2 - \frac{i(0.5-a)}{k} + \frac{2C(k)(0.5+a)}{k^2} + \frac{2iC(k)(0.25-a^2)}{k}$$

- A matriz na relação, é a matriz de coeficientes de influência da seção típica;
- Relaciona as "influências" entre os movimentos associados aos graus de liberdade e os esforços atuantes.

# E o que mais...

---

- Aproximação quase estacionária:

$$l = \pi \rho b^2 \left[ \ddot{h} + V_0 \dot{\alpha} - ba \ddot{\alpha} \right] + \underbrace{2\pi \rho V_0 b C(k=0)}_{1.0} \left[ \dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

$$m_y = \pi \rho b^2 \left[ ba \ddot{h} + V_0 b(0.5 - a) \dot{\alpha} - b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + \\ + \underbrace{2\pi \rho V_0 b^2 (0.5 + a) C(k=0)}_{1.0} \left[ \dot{h} + V_0 \alpha + b(0.5 - a) \dot{\alpha} \right]$$

- O carregamento está em fase com o movimento, exceto a parcela associada ao amortecimento aerodinâmico, defasado de 90°
-

# Introdução a aeroelasticidade dinâmica – Problema do flutter

---

- ❑ **Flutter** é uma auto-excitação de dois ou mais modos de vibração de um sistema, devidamente alterada e realimentada pelo escoamento de um fluido.
  - ❑ Pode vir a causar oscilações de amplitude que crescem exponencialmente levando a estrutura a uma falha dinâmica
-



# Introdução a aeroelasticidade dinâmica – Problema do flutter

---

- Sobre os tipos de Flutter
    - Além do flutter classificado como clássico, ou seja, previsível com teoria dinâmica e aerodinâmica linear, existem outros tipos importantes de flutter;
    - Alguns desses fenômenos são classificados como não aeronáuticos, por se tratar de estruturas como construções civis ou marítimas, tais como “raisers” de petróleo.
    - Existem instabilidades que são de natureza não linear, tanto associados ao regime de escoamento (transônico, supersônico ou subsônico), com e sem separação da camada limite, ou mesmo a estruturas que comportam-se não linearmente.
  - Vamos caracterizar a seguir:
-

# Estol-flutter

---

- ❑ Quando um aerofólio oscila próximo à sua condição de estol em regime permanente, o fenômeno do estol passa a ter um caráter dinâmico.
  - ❑ Isto significa que o perfil poderá apresentar, se partir de uma condição de escoamento colado, estol para ângulos maiores que o previsto no caso estático, ou mesmo, se partir de um estol, apresentar escoamento descolado para ângulos de ataque inferiores ao de estol estático.
  - ❑ Este comportamento recebe o nome de histerese aerodinâmica. Existem casos em que este atraso aerodinâmico promove a extração de energia do escoamento, produzindo uma instabilidade.
  - ❑ Este flutter comporta-se normalmente associado a um movimento de um grau de liberdade, o qual não pode ser explicado pela teoria clássica de flutter.
-

# Estol-flutter

---

- ❑ Costuma acontecer e “fans” de turbinas - >
- ❑ Pode também estar associado a uma súbita perda de sustentação devido ao descolamento do escoamento
- ❑ Dependendo da condição as forças de inércia induzem a amplificação do movimento associada a outra perda abrupta de sustentação causada por outro estol da superfície sustentadora



# Oscilações de ciclo limite (LCO)

---

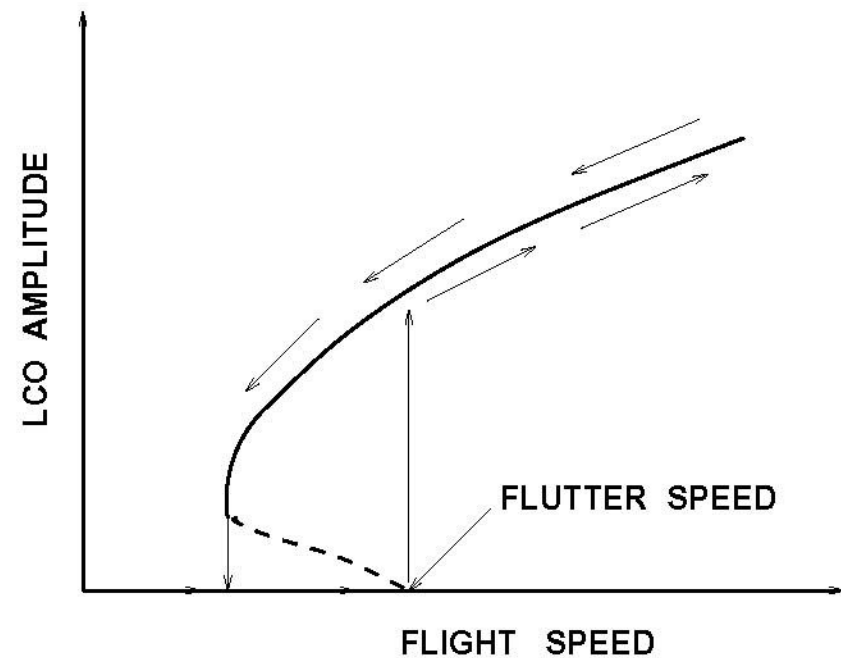
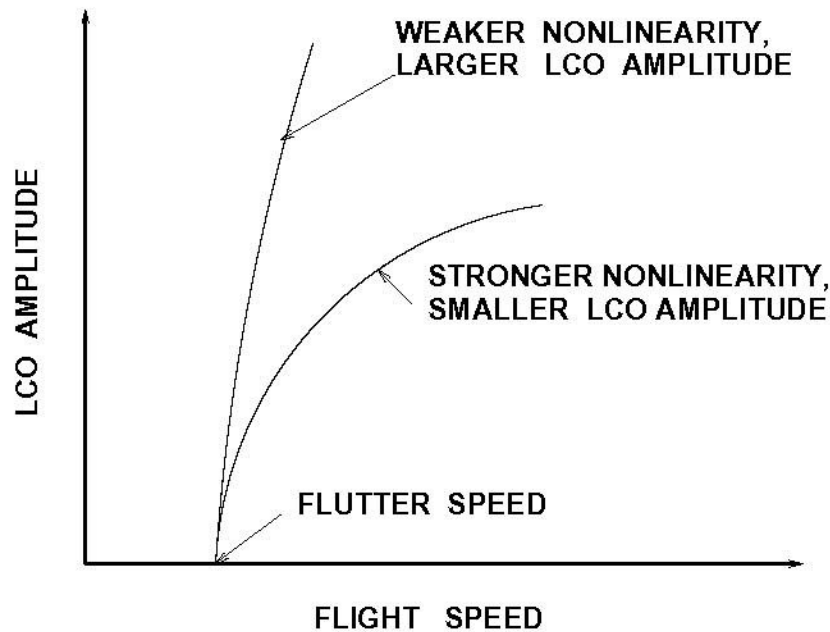
- A oscilação em ciclo limite é caracterizada como uma oscilação de amplitude constante associada a frequências de modos aeroelásticos da estrutura.
  - Usualmente este fenômeno manifesta-se em uma determinada faixa estreita de número de Mach e confinado em uma variação em ângulo de ataque de amplitude finita e constante
  - (Filme do F-16 que mostra o LCO.)
-

# LCO - Limit Cycle Oscillation

---

Não linearidade boa

Não linearidade ruim



# Observações sobre LCO

---

- ❑ LCO normalmente é caracterizado como:
    - Subcrítico ou supercrítico (bom ou ruim)
    - Fortemente não linear ou fracamente não linear (pequenos ou grandes deslocamentos)
  - ❑ Flutter catastrófico corresponde a um LCO fraco, e associados a grandes deformações, uma estrutura nunca é perfeitamente linear;
  - ❑ O LCO típico está associado a não linearidades importantes, que limitam o movimento a pequenas deformações;
  - ❑ É um fenômeno não linear, esta associado a condições iniciais.
-

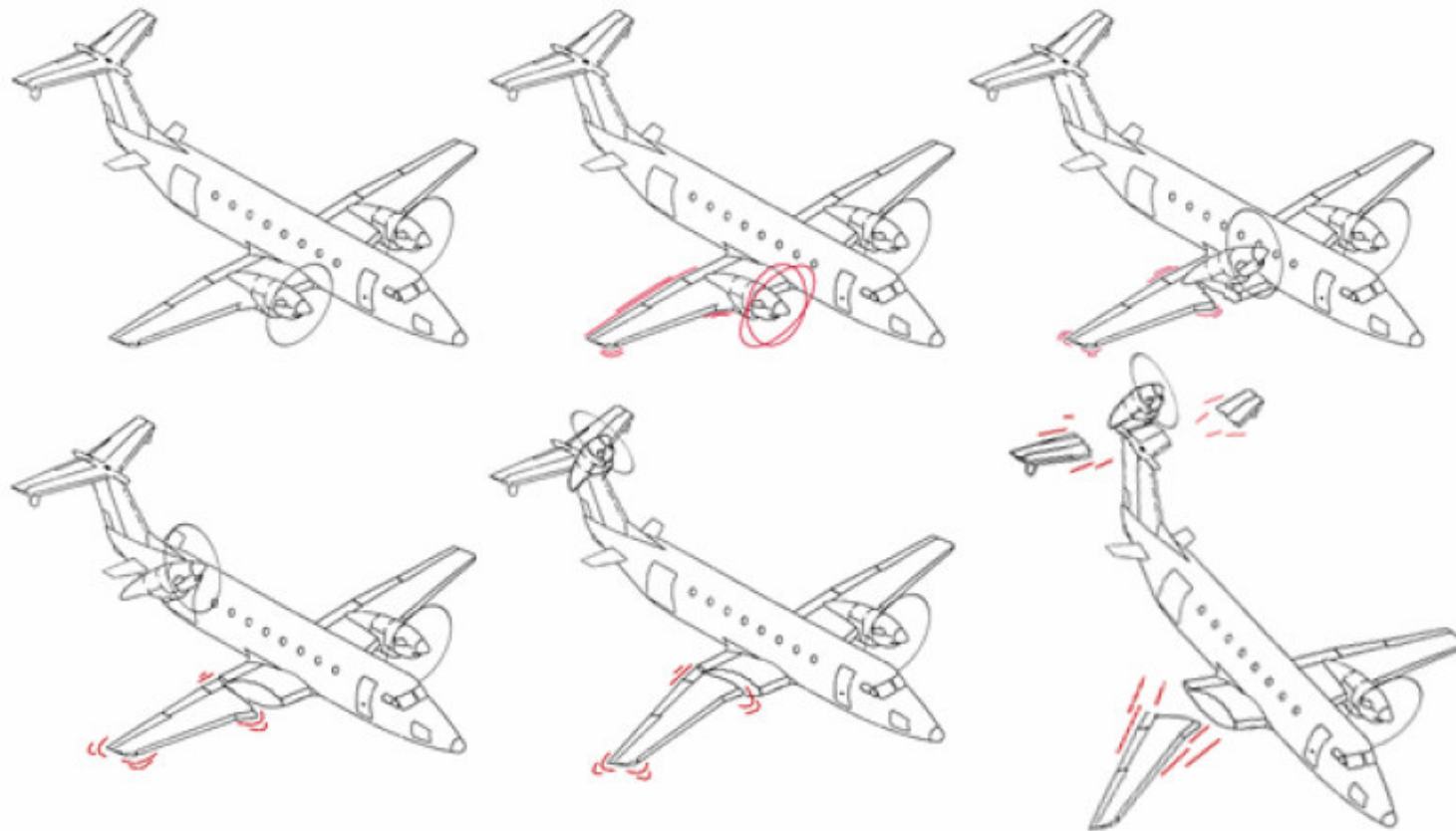
# Whirl-flutter

---

- ❑ Sistemas aerodinâmicos rotativos, tais como hélices, rotores de helicóptero e pás de compressores e turbinas, podem apresentar uma instabilidade rotativa.
  - ❑ Tomando como representativo o caso de uma hélice, por ocasião da instabilidade o cubo do rotor executa um movimento tipo de precessão de amplitude crescente que pode levar à quebra do conjunto.
  - ❑ Neste fenômeno interagem a aerodinâmica das pás, a dinâmica do conjunto e a elasticidade da estrutura.
  - ❑ Normalmente, a solução do problema consiste em reforçar as ligações do grupo moto-propulsor à nacele, eventualmente com a adição de amortecedores.
- 
- ❑ Fileme NASA
-

# Whirl-flutter

---





# Buzz-flutter

---

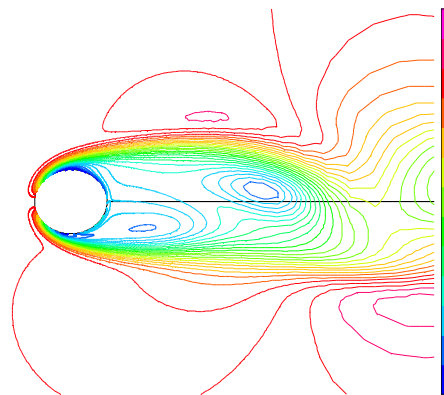
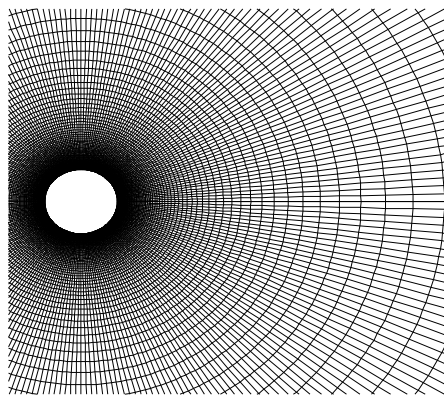
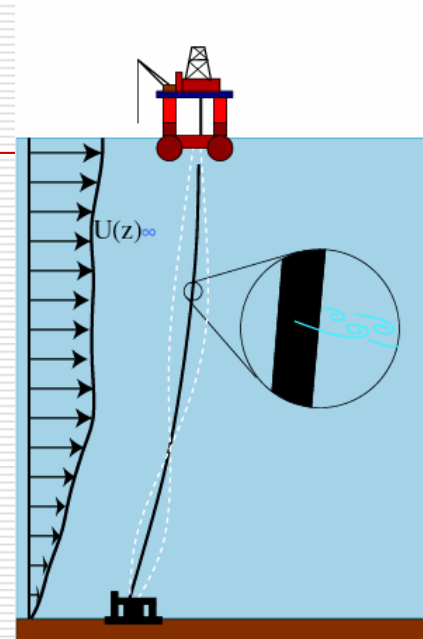
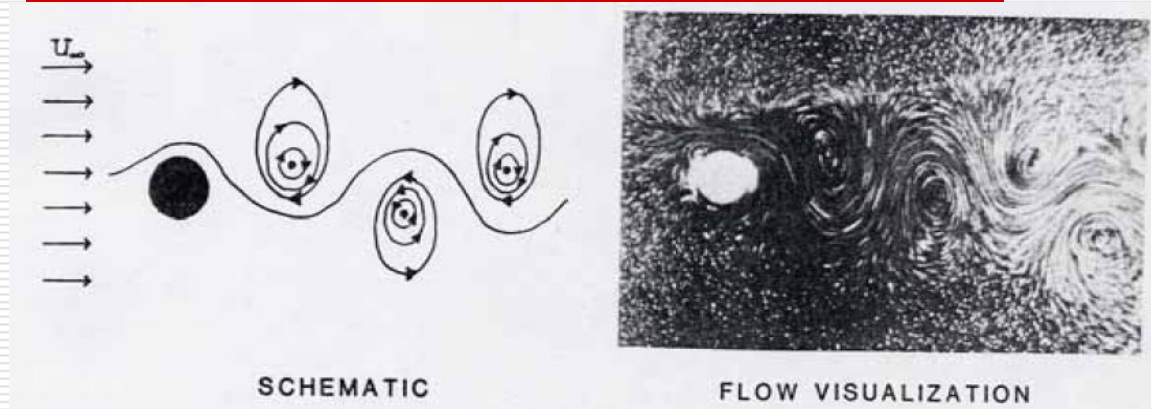
- ❑ Para aeronaves que operam no regime transônico sabemos existir sobre as asas "pacotes" de ar em regime supersônico, os quais terminam através de ondas de choque normais à superfície.
  - ❑ Se nesta situação a asa oscila, as ondas de choque "passeiam" por sobre a asa, eventualmente atingindo uma superfície de controle, como um aileron.
  - ❑ Esta oscilação induz uma resposta elástica da estrutura, podendo exibir instabilidade.
  - ❑ Para compreendermos bem este fenômeno, deve-se conhecer a interação da camada limite com a onda de choque, o que exige conhecimentos avançados de aerodinâmica.
  - ❑ Trata-se normalmente de um fenômeno não-catastrófico, de alta frequência, de onde vem o seu nome. Pode ser também entendido como um LCO de alta frequência.
-

# Galloping-flutter

---

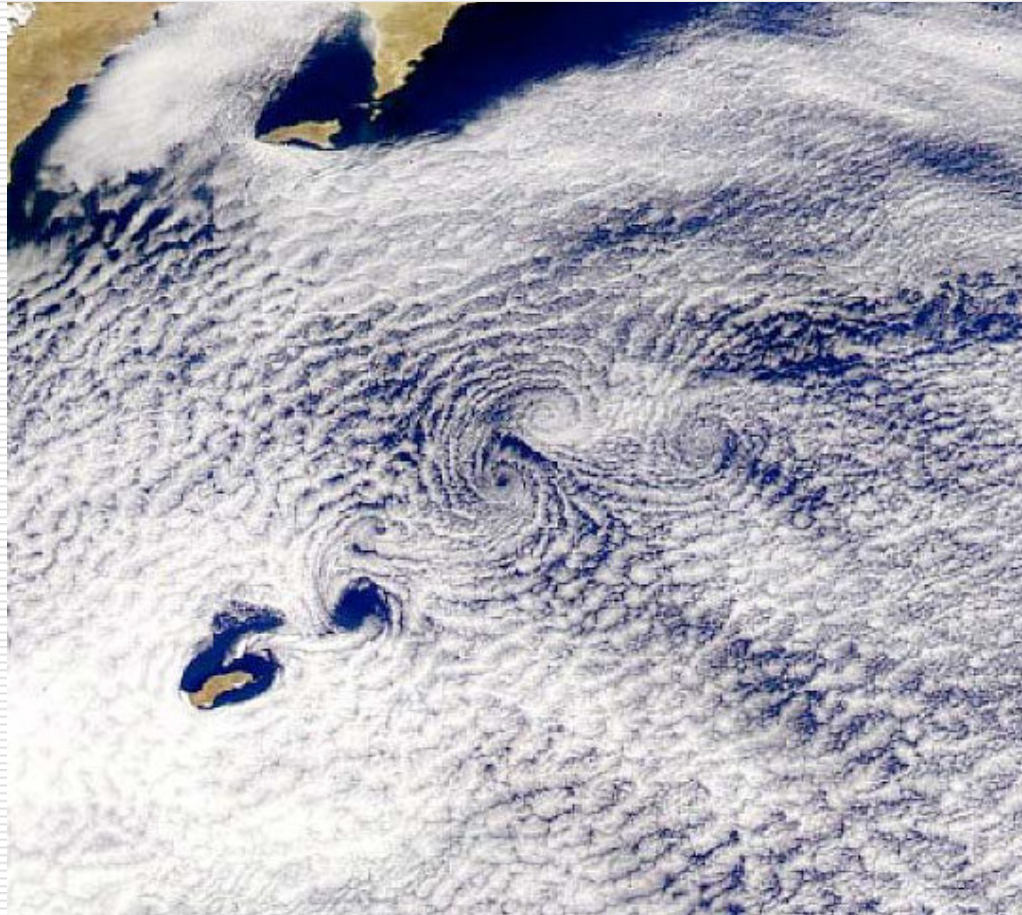
- ❑ Linhas de transmissão de energia elétrica, bem como “raisers” de exploração de petróleo são exemplos de cilindros imersos no escoamento provido pelos ventos, ou por correntes marítimas no último caso.
  - ❑ Cilindros são corpos aerodinâmicos rombudos, que provocam descolamento da camada limite e formação de esteiras de vórtices, famosas em fotografias clássicas.
  - ❑ Estas esteiras induzem oscilações dos fios, as quais podem instabilizar, produzindo movimentos de grande amplitude, pode existir uma realimentação dos vórtices alternados que amplificam as deformações dos cabos que por sua vez geram vórtices cada vez mais fortes.
  - ❑ Este fenômeno pode reduzir significativamente a vida útil de linhas de transmissão por fadiga, quando associados a vibrações induzidas pelas esteira de vórtices alternados.
-

# Galloping-flutter



# Esteira de vórtices alternados

---



# Galloping-flutter ou Ressonância?

- Até certo ponto, pode-se associar também uma amplificação do movimento a uma ressonância, pois caso a frequência dos vórtices emitidos seja coincidente com uma das frequências naturais dos cabos, podemos encontrar a ressonância, caso da oscilação induzida pelos vórtices;
- E ao lado pode-se ver como suprimir este tipo de fenômeno

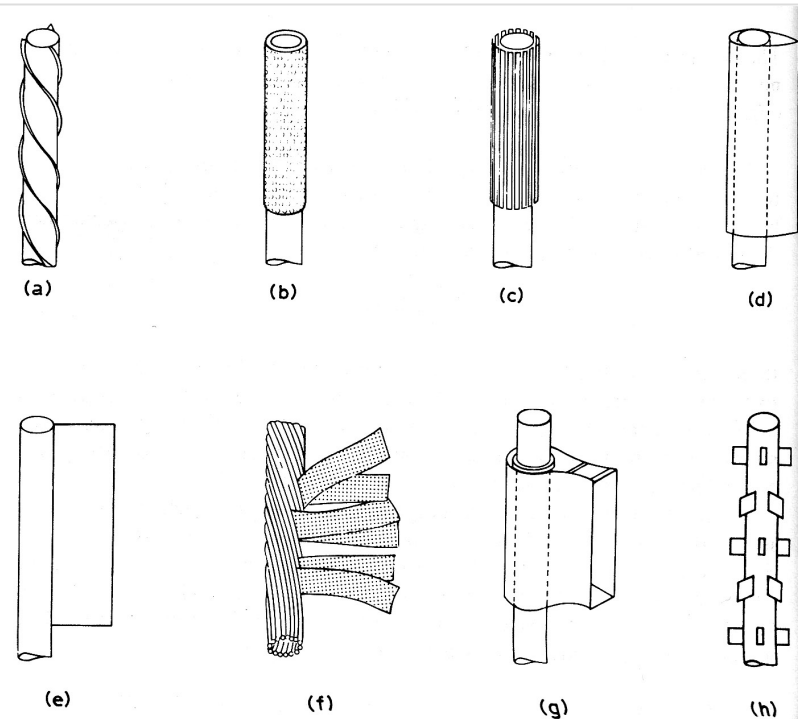
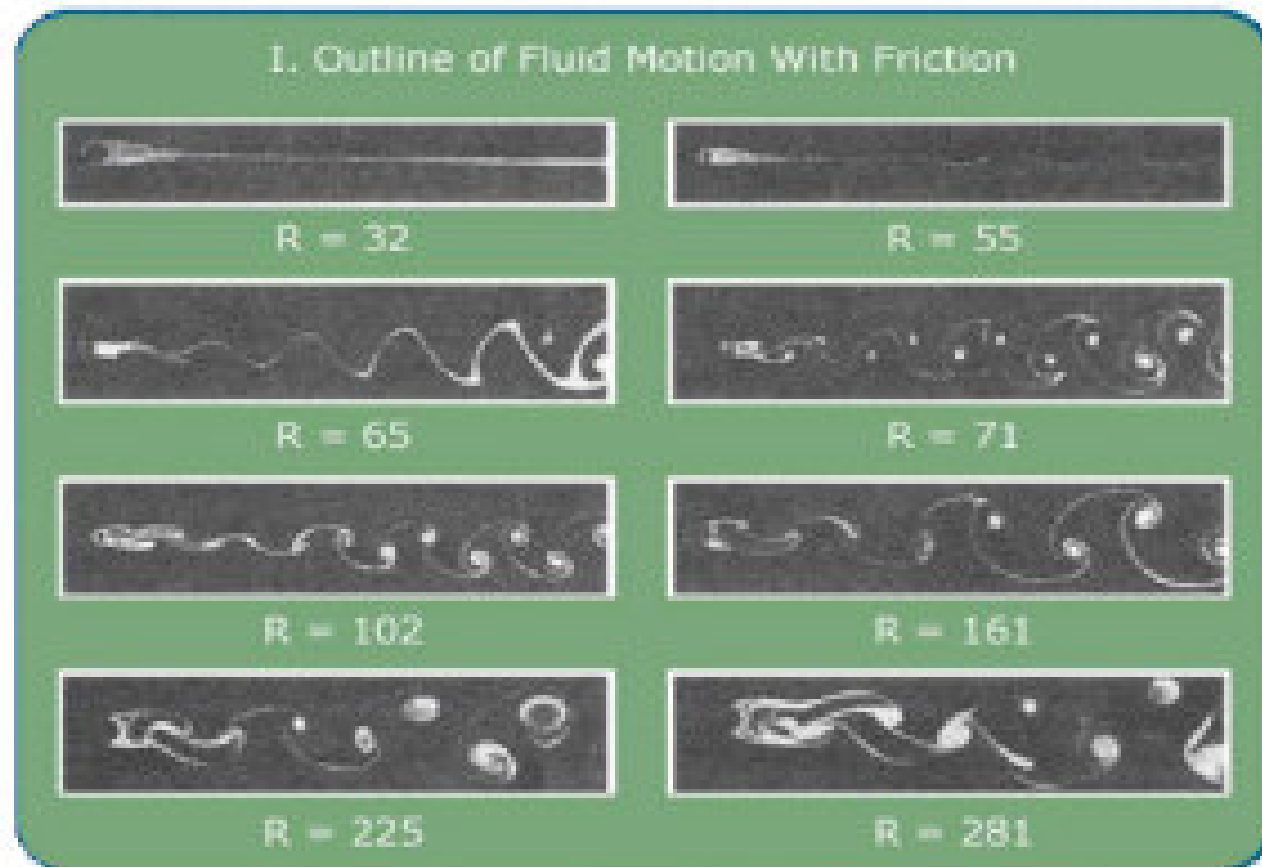


Fig. 3-23 Add-on devices for suppression of vortex-induced vibration of cylinders: (a) helical strake; (b) shroud; (c) axial slats; (d) streamlined fairing; (e) splitter; (f) ribboned cable; (g) pivoted guiding vane; (h) spoiler plates.

# “Vortex induced vibrations” (VIV)





# Depende do Reynolds...

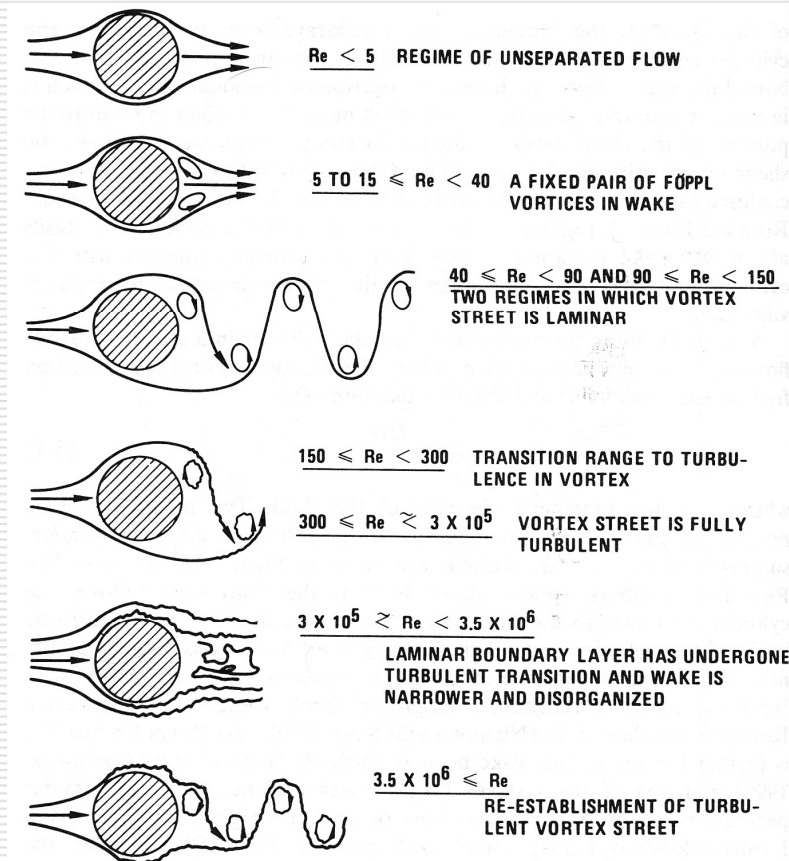


Fig. 3-2 Regimes of fluid flow across smooth circular cylinders (Lienhard, 1966).

$$R_d < 5$$

$$5-15 < R_d < 40$$

$$40 < R_d < 150$$

$$150 < R_d < 300$$

Transição turbulenta

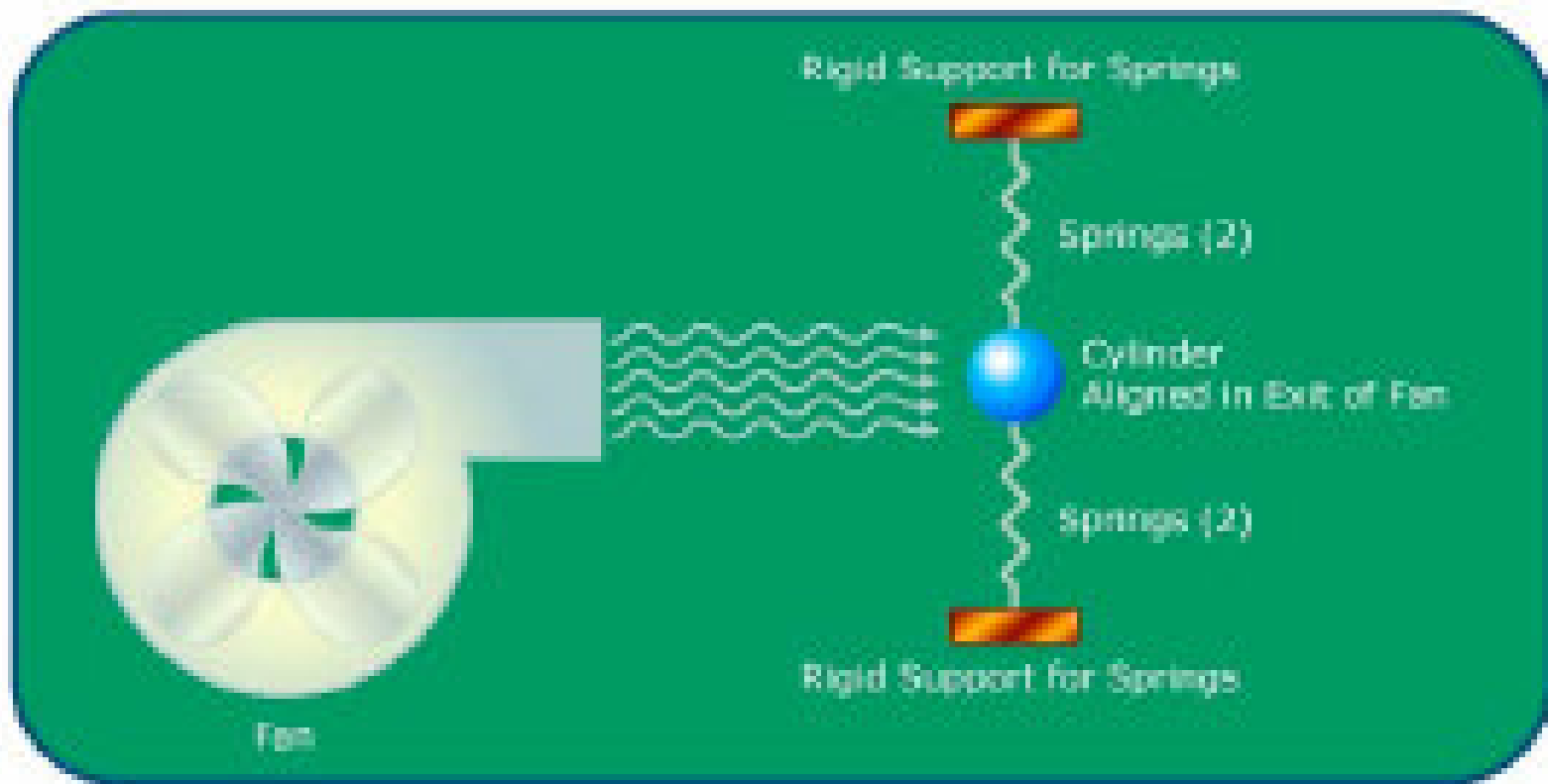
$$300 < R_d < 3 \cdot 10^5$$

$$3 \cdot 10^5 < R_d < 3.5 \cdot 10^6$$

$$3.5 \cdot 10^6 < R_d$$

# VIV – experimento para fazer em casa

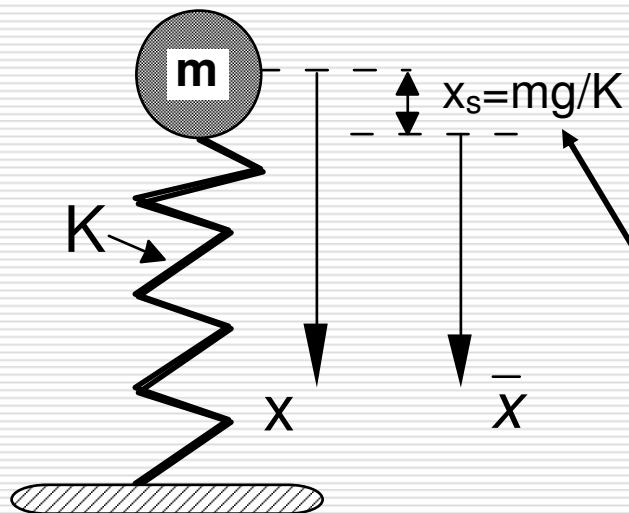
---





# Equações do movimento da seção típica com 1 GDL - Introdução

---



$$\bar{x} = x - \frac{mg}{K}$$

Em problemas de vibração sempre medimos os deslocamentos dinâmicos a partir do ponto de equilíbrio.

$$m\ddot{x} + Kx = mg$$

EDO de 2ª ordem a coeficientes constantes



$$\ddot{\bar{x}} + \frac{K}{m}\bar{x} = 0$$

---

# Solução da EDO:

---

$$\bar{x} = X e^{st} \qquad \ddot{\bar{x}} = s^2 X e^{st}$$

Substituindo a solução acima na equação de movimento podemos isolar a dependência temporal:

$$s^2 X e^{st} + \frac{K}{m} X e^{st} = 0 \Rightarrow X e^{st} \left( s^2 + \frac{K}{m} \right) = 0$$

$$s^2 = -\frac{K}{m} \Rightarrow s = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}} \therefore s = \pm i \sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i \omega$$

Autovalores solução da equação característica

---

## Solução final...

---

$$\bar{x}(t) = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$\bar{x}(t) = (X_1 + X_2) \cos \omega t + i(X_1 - X_2) \sin \omega t$$

$$\bar{x}(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

# Solução final

---

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{x}}(0) = v_0$$

$$\bar{x}(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \quad \Rightarrow C_1 = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{x}}(0) = -\omega \cdot C_1 \sin 0 + \omega \cdot C_2 \cos 0 \quad \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

---

# Frequência natural

---

É o resultado da solução da equação característica do sistema

$$Xe^{st} \left( s^2 + \frac{K}{m} \right) = 0$$

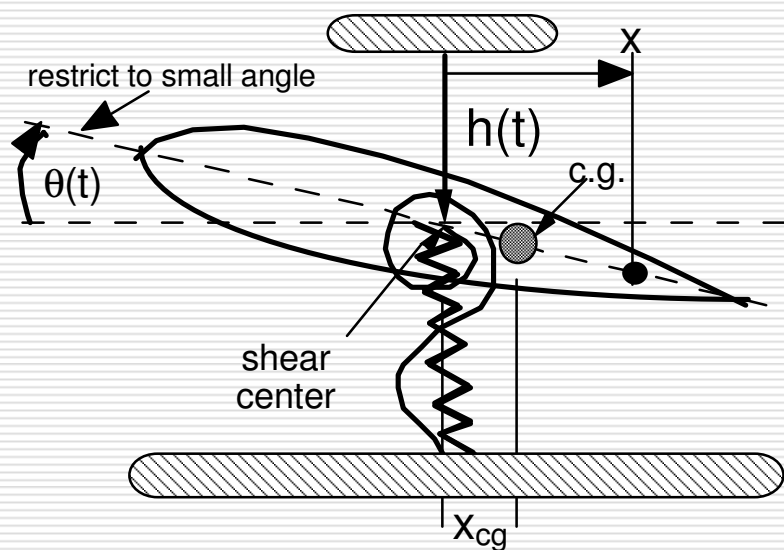
*equação característica*

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Depende das  
características de rigidez  
e inércia do sistema

---

# Exemplo: Seção típica com 1 GDL



$$I_{\theta} \ddot{\theta} + K_T \theta = q Se C_{L\alpha} \theta$$

$$I_{\theta} \ddot{\theta} + (K_T - q Se C_{L\alpha}) \theta = 0$$

$$\frac{K_T - q Se C_{L\alpha}}{K_T} = 1 - \frac{q Se C_{L\alpha}}{K_T} =$$

Equação torna-se homogênea

$$I_{\theta} \ddot{\theta} + \bar{K}_T \theta = 0 \quad = 1 - \bar{q} \quad , \quad \frac{q Se C_{L\alpha}}{K_T} = \bar{q}$$

# Solução elementar

---

$$\bar{K}_T = K_T (1 - \bar{q}) = \underbrace{(K_T - qSeC_{L\alpha})}_{\downarrow}$$

Note que esta é nossa  
velha conhecida, a  
**rigidez aeroelástica**

$$\theta(t) = \theta_0 e^{st}$$

$$s^2 I_\theta \theta_0 e^{st} + \bar{K}_T \theta_0 e^{st} = (s^2 I_\theta + \bar{K}_T) \theta_0 e^{st} = 0$$

$$\boxed{s^2 = -\frac{\bar{K}_T}{I_\theta} \Rightarrow s = \pm i \sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}}$$

---

# Solução elementar

---

Análise das possibilidades de solução:  
Se tivermos a rigidez aeroelástica menor que zero, o sistema apresentará uma solução composta por dois expoentes reais um positivo e outro negativo.

Esta solução caracteriza um **crescimento exponencial** de uma das parcelas da Solução para  $q$  com o tempo indicando a instabilidade. Note que é análogo ao caso estático, rigidez aeroelástica menor que zero implica em uma instabilidade aeroelástica, no caso a **divergência**.

$$\bar{K}_T = K_T (1 - \bar{q})$$

$$\bar{K}_T < 0$$

$$\theta(t) = \theta_1 e^{pt} + \theta_2 e^{-pt}$$

$$p = \pm i \sqrt{\frac{-\bar{K}_T}{I_\theta}} =$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}$$

---



# Solução elementar

---

Por outro lado se a rigidez aeroelástica for maior que zero, o que indica que as forças aerodinâmicas são menores que as forças elásticas, a resposta do sistema será do tipo harmônica

$$s^2 = -\frac{\bar{K}_T}{I_\theta} \Rightarrow s = \pm i \sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}$$

$$\theta(t) = \theta_1 e^{i\omega t} + \theta_2 e^{-i\omega t} \quad \theta(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

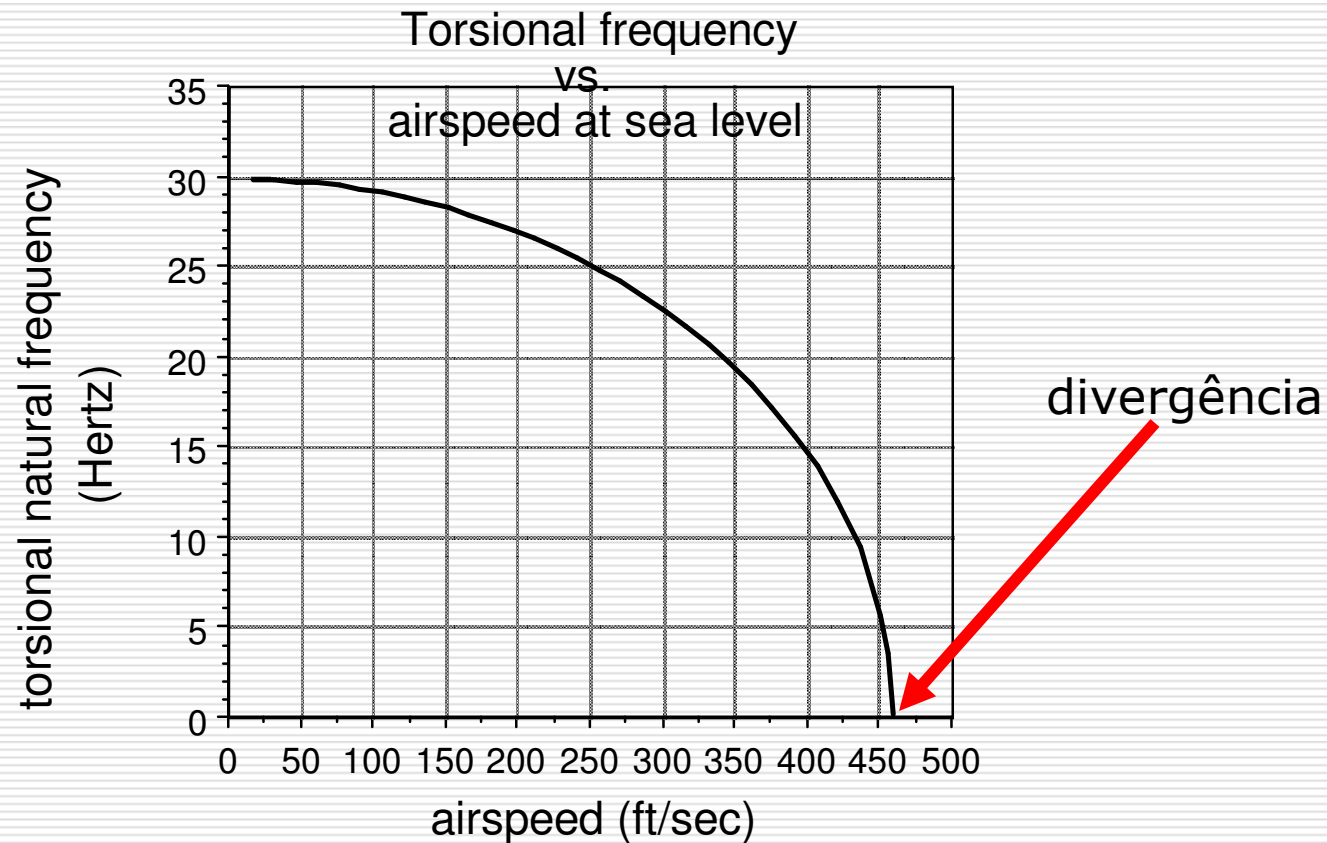
$$s = i\omega = \pm i \sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}$$

Onde C1 e C2 são determinados a partir de condições iniciais e de contorno

---

# Frequência X velocidade – 1 GDL

---



# Conclusões

---

1. Sistema estável: apresenta um movimento oscilatório senoidal quando perturbado;
  2. Sistema instável: apresenta um movimento exponencialmente divergente quando sistema é perturbado.
  3. Sistema neutramente estável: apresenta um movimento constante com o tempo, podendo ser senoidal ou não.
-

# Rigidez aerodinâmica

---

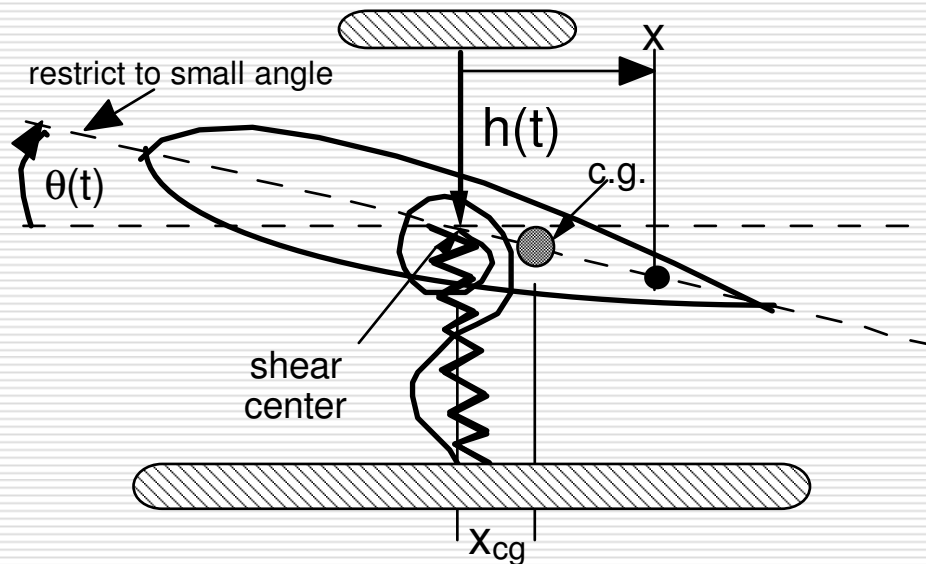
- A rigidez aerodinâmica é um conceito decorrente da variação de um esforço aerodinâmico dado um deslocamento;
- Está explícito em aeroelasticidade estática;
- E também quando o fenômeno aeroelástico é dinâmico:

$$I_{\theta}\ddot{\theta} + \left( K_T - qSeC_{L_{\alpha}} \right) \theta = 0$$

- Entretanto, da mesma forma que a rigidez associada a um deslocamento promove um esforço aerodinâmico, podemos ter um amortecimento que estaria associado às velocidades do corpo, e também forças de inércia que estariam associadas às acelerações. **Note que agora o nosso problema é dinâmico.**
-

# Modelo dinâmico do seção típica com 2 GDL

---



Derivação das equações de movimento empregando métodos de energia (Equações de Lagrange)

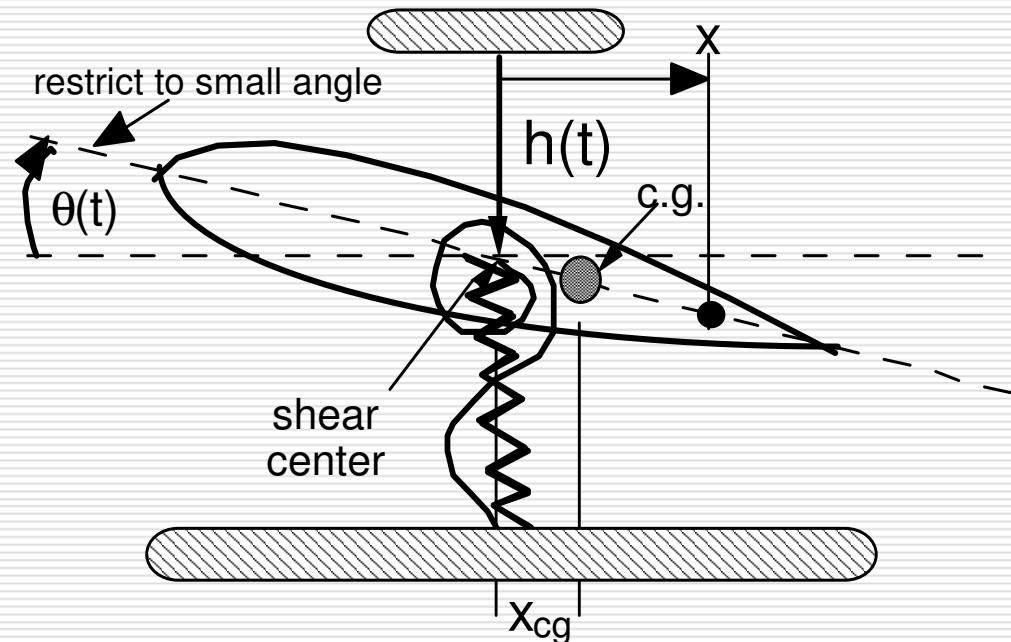
É um modelo clássico para dar início a compreensão dos fenômenos aeroelásticos. Assume-se que as molas são lineares e continuamos assumindo pequenas perturbações.

---

# Seção típica com 2 GDL

---

- a) Convenção de sinais por conveniência:  
O "plunge" é positivo para baixo.
- b) O sistema de referência possui origem no centro elástico ( $\mathbf{X}_{ce} = 0$ )



$h(t)$  = grau de liberdade em "plunge" (flexão)

$q(t)$  = grau de liberdade em "pitch" (torção)

Medidos a partir da posição de equilíbrio estático

---

# Expressões de energia

---

$z(t)$  é o deslocamento para baixo em uma posição  $x$  localizada após ao centro elástico

$$\rightarrow z = h + x \sin \theta \cong h + x\theta$$

Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=-x_l}^{x=x_l} (\rho)(\dot{h} + x\dot{\theta})^2 dx$$

Energia potencial

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_T \theta^2$$

## Equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \eta_i} = Q_i}$$

---

# Energia Cinética

---

$$T = \frac{1}{2} \int_{x=-x_l}^{x=x_l} (\rho)(\dot{h} + x\dot{\theta})^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{h}^2 + 2S_\theta \dot{h}\dot{\theta} + I_\theta \dot{\theta}^2)$$

$m$  é a massa total da seção típica

$$m = \int \rho(x) dx$$

$I_\theta$  momento de inércia da seção típica, composto por:

$$I_\theta = \int \rho(x) x^2 dx = I_o + mx_\theta^2$$

$\mathbf{X}_g = \mathbf{X}_{CG}$  posição do centro de massa com relação ao sistema de coordenadas da seção. No caso representa um desbalanceamento com relação ao eixo elástico

$S_\theta$  é o momento estático, ou desbalanceamento estático

$$S_\theta = mx_\theta = \int \rho(x) x dx$$

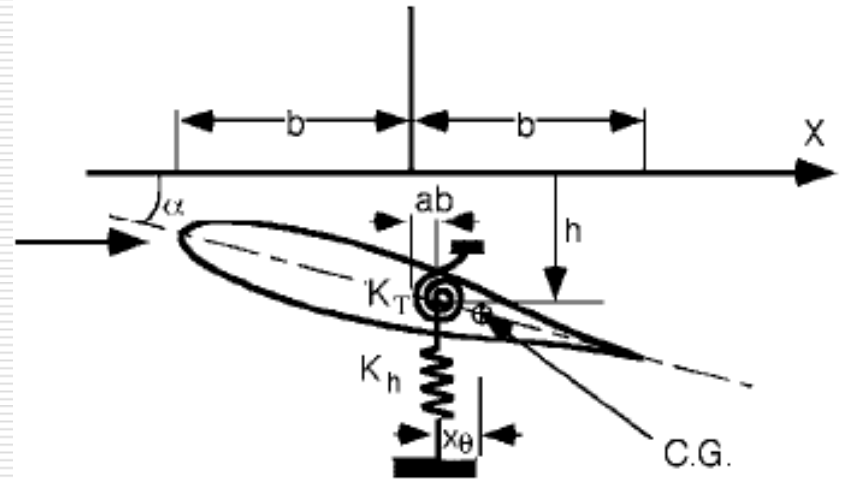


# Equações do movimento

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} + mx_{\theta}\dot{\theta} \quad \frac{\partial U}{\partial h} = K_h h$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mx_{\theta}\dot{h} + I_{\theta}\dot{\theta} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_T \theta$$

Equações de movimento na forma matricial. Note que o acoplamento ocorre devido a excentricidade  $\mathbf{x}_q$



$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Parâmetros dinâmicos

---

□ Definições:

$$r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m} \quad , \quad \omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \quad ,$$

$$\omega_{\theta}^2 = \frac{K_T}{I_{\theta}} = \frac{K_T}{mr_{\theta}^2} \quad , \quad r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m}$$

$$r_{\theta}^2 = r_0^2 + x_{\theta}^2 \quad , \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{\theta}} \quad ,$$

$$R = \frac{\omega_h}{\omega_{\theta}}$$

$r_0 \Rightarrow$  Raio de giração com relação ao cg

---

# Solução elementar

---

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} \quad \text{Substituímos no sistema acoplado:}$$

$$s^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Divide-se pelo termo exponencial}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

# Determinante da matriz

---

$$\begin{vmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 m x_\theta) \\ (s^2 m x_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{vmatrix} = 0$$

$$(s^2 m + K_h)(s^2 I_\theta + K_T) - (s^2 m x_\theta)(s^2 m x_\theta) = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{K_h}{m}\right)\left(s^2 + \frac{K_T}{I_\theta}\right) - \left(s^2\right)\left(s^2 \frac{m x_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

---

# Equação Característica

Parâmetros de frequência desacoplados :

PERGUNTA: O QUE  
ACONTECE QUANDO O CG  
COINCIDE COM O CE?

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \quad \omega_\theta^2 = \frac{K_T}{I_\theta}$$

$$mx_\theta^2 = I_0$$

$$(s^2 + \omega_h^2)(s^2 + \omega_\theta^2) - \left(s^2 \frac{mx_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

$$\left( s^4 \left( 1 - \frac{mx_\theta^2}{I_\theta} \right) + s^2 (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) + \omega_h^2 \omega_\theta^2 \right) = 0$$

# Frequências naturais

---

$$\left( s^4 \left( \frac{I_o}{I_\theta} \right) + s^2 (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) + \omega_h^2 \omega_\theta^2 \right) = 0 \quad , \quad (as^4 + bs^2 + c) = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad s^2 = \frac{-(\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{(\omega_h^2 + \omega_\theta^2)^2 - 4 \left( \frac{I_o}{I_\theta} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}}{2 \left( \frac{I_o}{I_\theta} \right)}$$

Finalmente, temos a expressão para s :

$$s^2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{I_\theta}{I_o} \right) (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \frac{I_\theta}{I_o} (\omega_h^2 + \omega_\theta^2) \right]^2 - \left( \frac{I_\theta}{I_o} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}$$

Cuidado, as frequências naturais são diferentes das frequências associadas a cada grau de liberdade do sistema desacoplado!

---

# Movimento Harmônico Simples

---

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assume-se MHS  $\rightarrow \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$   
O que resulta em:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

---

# Equações do Movimento

## Sistema Livre - Resumo

---

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Note que o sistema a dois graus de liberdade é um sistema acoplado dinamicamente, ou seja nas diagonais da matriz de massa temos os momentos estáticos;
- No domínio da frequência, assumindo MHS:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

---



# Aerodinâmica Quase-Estacionária

---

- A proposta é estudar o problema da seção típica com dois graus de liberdade, considerando a teoria aerodinâmica quase-estacionária;
  - Esta teoria pressupõem que as cargas aerodinâmicas são proporcionais aos deslocamentos, velocidades e acelerações associadas a condições de contorno estabelecidas sobre o corpo sujeito a um escoamento.
-

# Flutter Quase-Estacionário

---

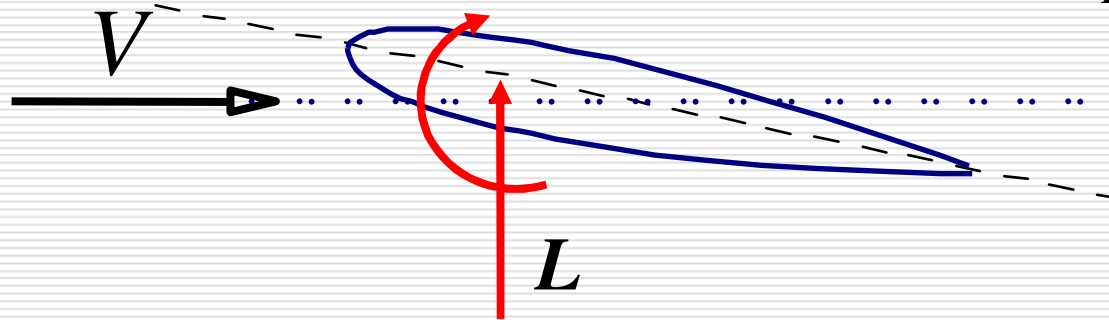
- ❑ Flutter é uma instabilidade dinâmica de natureza oscilatória e auto excitada que ocorre devido a interação entre dois modos de movimento distintos e um fornecimento de energia externo (carregamento aerodinâmico).
  - ❑ Aerodinâmica quase-estacionária desconsidera efeitos associados ao atraso entre as forças aerodinâmicas geradas (auto-excitação) e o movimento da estrutura;
  - ❑ Ou seja, o carregamento é função exclusivamente de deslocamentos, velocidades e acelerações do corpo (seção típica).
  - ❑ Uma primeira aproximação assume que a sustentação e o momento é função de uma ângulo de ataque associado a variação em  $\theta$  mais a velocidade de translação ( $dh/dt$ ) dividida pela velocidade do escoamento não perturbado  $V$ .
-

# Sustentação e Momento

---

(ref. Centro aerodinâmico)

$$L = qSC_{L\alpha} \left( \theta + \frac{\dot{h}}{V} \right)$$



(ref. eixo elástico)

$$M_Y = L \cdot e = qS \cdot e \cdot C_{L\alpha} \left( \theta + \frac{\dot{h}}{V} \right)$$

---

# Sistema homogêneo

---

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A inclusão do carregamento aerodinâmico é feita adicionando ao lado direito a sustentação  $L$  e o momento  $L.e$

---

# Inclusão do carregamento aerodinâmico

---

$$\begin{bmatrix} m & mx_{\theta} \\ mx_{\theta} & I_{\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ Le \end{Bmatrix}$$

O sinal de  $L$  é trocado pois uma sustentação positiva age para cima enquanto que  $h$  é positivo para baixo

Dividimos por  $m$ , massa do aerofólio: ,  $r_q$  = raio de giração =  $r_{\theta}^2 = \frac{I_{\theta}}{m}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m \\ Le/m \end{Bmatrix}$$


---

# Substituindo o carregamento

---

□ Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{V} & 0 \\ \frac{-e}{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

□ Equação de vibração livre o aerofólio sujeito a um escoamento.

---

# Problema estático:

---

- Derivadas temporais nulas:

$$\begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Recuperamos o problema estático de onde podemos calcular a velocidade de divergência -> verificar!
-

# Adimensionalizando...

---

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m\omega_{\theta}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m\omega_{\theta}^2 \\ Le/m\omega_{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m\omega_{\theta}^2 \\ Le/m\omega_{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

---



# Carregamento Aerodinâmico é função dos deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} -L/m\omega_\theta^2 \\ Le/m\omega_\theta^2 \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} =$$

Fazemos a substituição das relações para a sustentação e o momento, como função dos deslocamentos apenas.

$$= \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}}_0 + \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

**Teoria de Pines**

# Teoria de Pines (1958)

---

- ❑ É uma maneira de chegarmos a solução do problema de estabilidade aeroelástica, através da solução de um sistema de equação homogêneo onde a contribuição aerodinâmica se dá através da rigidez somente.
  - ❑ Ou seja, desconsidera-se os efeitos aerodinâmicos associados às velocidades de translação e rotação do aerofólio, uma vez que a sua inclusão implica em um amortecimento aerodinâmico o qual impediria tratar o sistema como um problema de vibração livre não amortecida.
  - ❑ É uma forma conveniente e bastante simplificada para identificar uma condição de flutter
-

# Vibração livre com escoamento

---

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_{\alpha}}}{m\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 1 & x_{\theta} \\ x_{\theta} & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2} & 0 \\ 0 & r_{\theta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_{\alpha}}}{m\omega_{\theta}^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

---

# Solução assumindo MHS

---

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

Dividindo por  $e^{i\omega t}$

$$\frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

---

# Associando a parâmetros de similaridade....

$$-\frac{\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{q SC_{L\alpha}}{m \omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{\rho V^2 SC_{L\alpha}}{2m \omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

# Definindo novos parâmetros

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{\rho V^2 S C_{L\alpha}}{2m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2, \mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l} = \frac{\text{massa da seção}}{\text{massa do volume de ar}} \Rightarrow \text{Diagrama de uma seção aerodinâmica (círculo amarelo com uma linha azul horizontal no meio)}$$

$m$  = "massa aparente"

$b\omega$  = [velocidade]

$$\frac{q S C_{L\alpha}}{m \omega_\theta^2} = \frac{\rho V^2 c l C_{L\alpha}}{2m \omega_\theta^2} = b \left( \frac{V}{b \omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{C_{L\alpha}}{\pi \mu} \right)$$

Velocidade reduzida =  $\left( \frac{V}{b \omega_\theta} \right)$

# Parâmetros adimensionais

---

Estes parâmetros são úteis para caracterizarmos o fenômeno

$$\bar{V} = \frac{V}{b \omega_{\theta}}$$

Velocidade  
Reduzida

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\theta}}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_{\theta}^2}$$

$$\bar{e} = \frac{e}{b}$$

$$\bar{r}_{\theta} = \frac{r_{\theta}}{b}$$

---

# Adimensionalizando por b

---

$$\frac{1/b}{1/b^2} \frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\boxed{-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{mb\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$


---



# Para surgir a massa aparente:

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{mb\omega_\theta^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2} = b \left( \frac{V}{b\omega_\theta} \right)^2 \left( \frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu} \right)$$

$$\begin{aligned} & -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \\ & + \left( \frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu} \right) \left( \frac{V}{b\omega_\theta} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\bar{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

# Sistema aeroelástico

---

- No domínio da frequência:

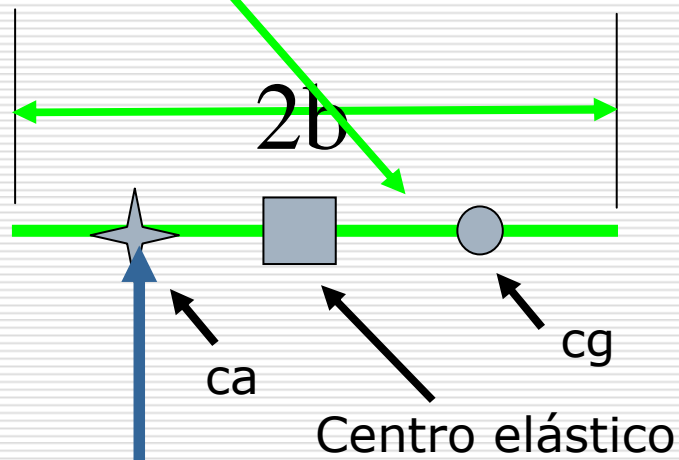
$$-1 \cdot \begin{bmatrix} \Omega^2 - R^2 & \Omega^2 \bar{x}_\theta - \bar{V}^2 \frac{C_{L\alpha}}{\pi\mu} \\ \Omega^2 \bar{x}_\theta & \Omega^2 \bar{r}_\theta^2 - \bar{r}_\theta^2 + \bar{V}^2 \frac{C_{L\alpha} e}{\pi\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- E para estudar a estabilidade deste sistema, posso usar um critério de estabilidade.
-

# Cálculo do Determinante

Para calcularmos a estabilidade, ou seja o flutter, busca-se a Equação característica para obter as suas raízes.

$$(\bar{r}_\theta^2 - \bar{x}_\theta^2)\Omega^4 - \left( \bar{r}_\theta^2 [1 + R^2] - \frac{(\bar{e} + \bar{x}_\theta) C_{L\alpha} \bar{V}^2}{\pi \mu} \right) \Omega^2 + \left( \bar{r}_\theta^2 R^2 - R^2 \frac{\bar{V}^2 \bar{e} C_{L\alpha}}{\pi \mu} \right) = 0$$



$$\bar{d} = \bar{e} + \bar{x}_\theta$$

Distância adimensional entre o ca e o cg.

# Equação quártica:

---

$$A\Omega^4 - B\Omega^2 + C = 0$$

Onde os coeficientes  
A, B e C são dados por:

$$A = \left( \bar{r}_\theta^2 - \bar{x}_\theta^2 \right) = \bar{r}_0^2 > 0$$

-> Raio de giração ref. cg

$$B = \left( \bar{r}_\theta^2 [1 + R^2] - \frac{(\bar{e} + \bar{x}_\theta) C_{L\alpha} \bar{V}^2}{\pi \mu} \right)$$

$$C = \left( \bar{r}_\theta^2 R^2 - R^2 \frac{\bar{V}^2 \bar{e} C_{L\alpha}}{\pi \mu} \right)$$

---

# Exame dos termos:

---

$$B = \left( \bar{r}_\theta^2 [1 + R^2] \right) - \left( \bar{d}^{C_{L_\alpha}} / \pi \mu \right) \bar{V}^2$$

Possui a forma:

$$B = b_1 - b_2 \bar{V}^2 \quad b_1 = \bar{r}_\theta^2 (1 + R) > 0$$

Como a solução para a eq. característica possui a forma:

$$\Omega^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

---

# Exame dos termos

---

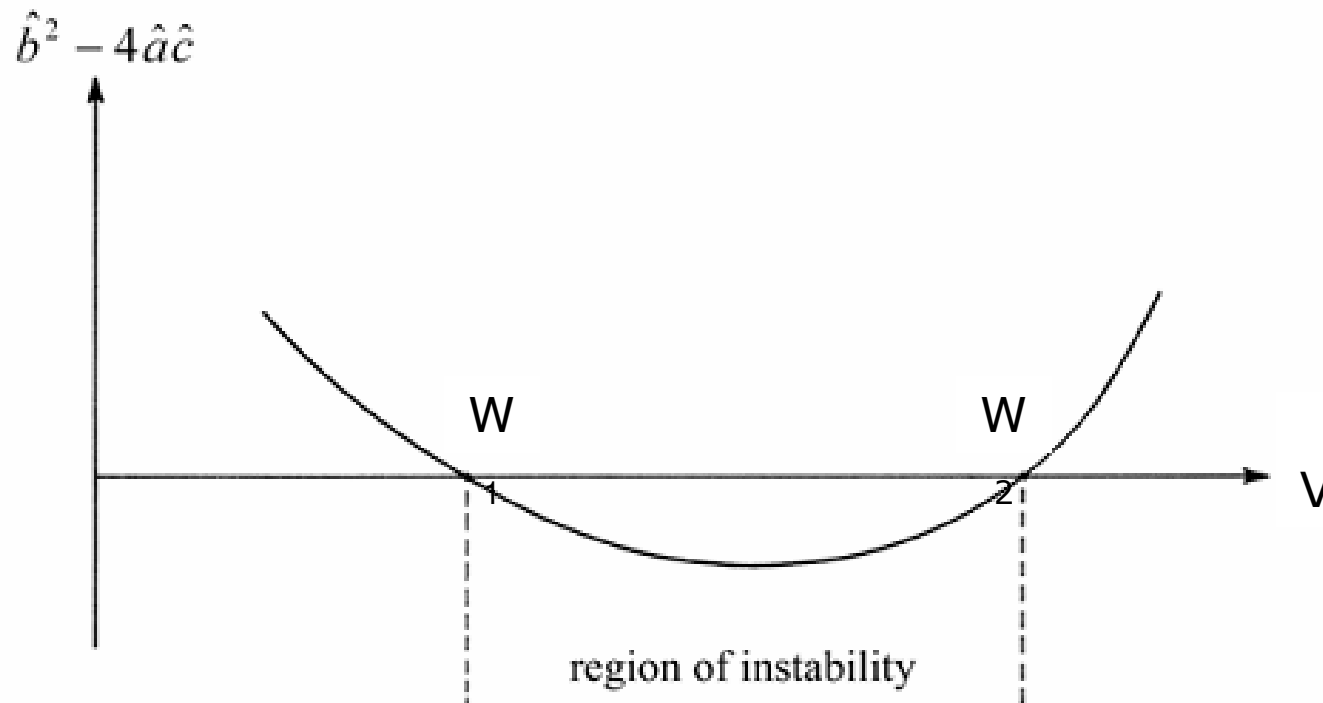
- ❑ Como  $b_1$  é maior que zero, e se  $V$  barra for igual a zero recuperamos as frequências naturais da seção típica.
- ❑ Uma mudança na velocidade reduzida ( $V$  barra) promove uma mudança dentro do radical.

$$\Omega^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- ❑ É positivo quando a velocidade reduzida é nula e decresce com o acréscimo nesta velocidade. Este efeito representa o acréscimo do acoplamento aerodinâmico causado pelo aumento da velocidade.
-

# $B^2 - 4AC$ em função de $V$

- Flutter em  $\Omega_1$



# Ocorrência de flutter

---

- Com o acréscimo na velocidade reduzida, o termo dentro do radical decresce, torna-se **negativo** implicando em raízes complexas conjugadas;

$$\omega = \omega_0 \pm i\sigma, \quad \sigma > 0$$

$$f(t) = a \cdot \begin{cases} e^{(i\omega_0 + \sigma)t} \\ e^{(i\omega_0 - \sigma)t} \end{cases}$$

- Raízes complexas, indicam que o exponencial onde  $\sigma$  é positivo indica um movimento divergente!
  - Na situação quando  $B^2 = 4AC$ , temos a **velocidade reduzida** correspondente a **condição de flutter**.
-