AE-249 - AEROELASTICIDADE

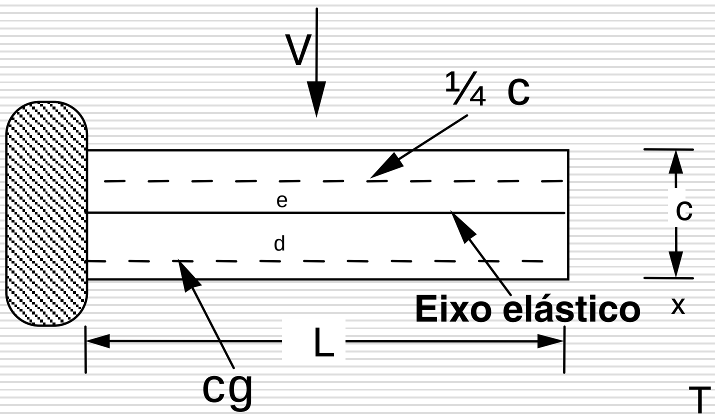
Aeroelasticidade Estática -
Torção de asas

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Divergência de uma asa

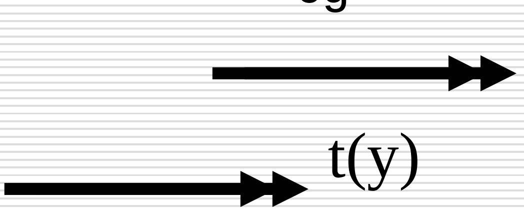
- Caso de estudo – divergência de uma asa sem enflechamento, com rigidez igualmente distribuída ao longo da envergadura.
- Hipóteses: Alongamento grande, pequenas deformações, de forma a permitir que a asa seja modelada por uma equação diferencial linear;
- Pode-se assumir a teoria de St. Venant, e a asa pode ser idealizada como um conjunto de pequenas seções de asa justapostos ao longo da envergadura.

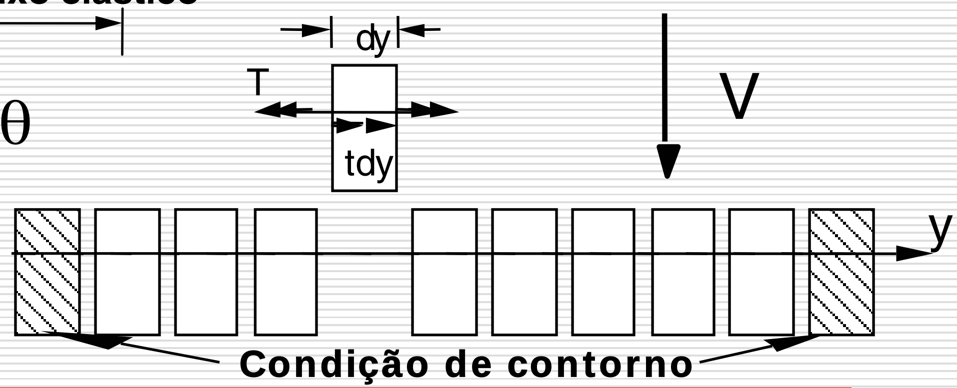
Modelo estrutural da asa contínua



$$T(y) = GJ\,\frac{d\theta}{dy}$$

Aproximação da asa por uma viga





$$\Sigma M_y = 0 = T - tdy - \left(T + \frac{dT}{dy}dy\right) = \left(-t - \frac{dT}{dy}\right)dy$$

Modelo estrutural da asa contínua

- Assume-se que a estrutura está sujeita a uma distribuição de torque t(y) contínua, ao longo da envergadura, com sinal positivo, o que representa um momento de cabrar de cada seção.
- Da teoria de St. Venant, pode-se relacionar as equações de equilíbrio com as forças atuantes:

$$T\left(y\right) = GJ\,\frac{d\theta}{dy} \Rightarrow \quad \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}\left(GJ\,\frac{d\theta}{dy}\right) = -t(y)$$

Esforços aerodinâmicos

- Os esforços aerodinâmicos atuantes são função das deformações estruturais, e neste caso assume-se um primeira aproximação onde a interferência aerodinâmica;
- A equação anterior pode ser empregada para calcular a divergência de uma asa como a indicada na figura anterior.

Modelo aerodinâmico

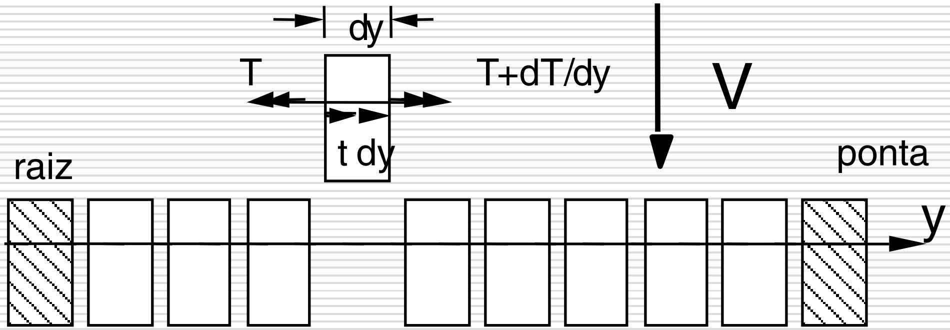
- Teoria das faixas: Assume que não existe interferência aerodinâmica entre faixas que discretizam a asa ao longo da envergadura.

$$l(y) = qc\, C_{l_\alpha} \alpha = qcC_{l_\alpha} \left(\alpha_o + \theta\right)$$

$$t(y) = qceC_{l_\alpha} \left(\alpha_o + \theta\right) + qc^2 C_{mac} + nmgd$$

- Desta forma o carregamento aerodinâmico pode ser facilmente assumido como a soma dos carregamentos aerodinâmicos de infinitas seção típicas distribuídas ao longo da envergadura.

Equações de equilíbrio - Momentos



$$\frac{dT}{dy} = -t\left(y\right)$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy}\left(GJ\,\frac{d\theta}{dy}\right) = -t(y)$$

$$t\left(y\right) = qceC_{l\alpha}\left(\alpha_o + \theta\right) + qc^2C_{mac} + nmgd \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(GJ\,\frac{d\theta}{dy}\right) + qceC_{l\alpha}\theta = -\left(qceC_{l\alpha}\alpha_o + qc^2c_{mac} + nmgd\right)}$$

Solução da Equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dy^2}+\left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}\right)\theta=-K$$ Fazendo $$\lambda^2=\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}$$

e $$K=\left(qceC_{l\alpha}\alpha_o+qc^2c_{mac}+nmgd\right)/GJ$$ simplificamos para

$$\theta''+\lambda^2\theta=-K$$

Que possui solução na forma

$$\boxed{\theta\left(y\right)=A\sin\lambda y+B\cos\lambda y-K/\lambda^2}$$

Condições de contorno

Para resolvermos o problema precisamos definir condições de contorno. Para particularizar a nossa solução:

$$\theta(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y - K/\lambda^2$$

A forma de particularizar é aplicar as condições de contorno que caracterizam o nosso problema, isto é uma asa reta, sem afilamento engastada na raiz e com distribuição constantes das propriedades de rigidez (G e J)

Engastamento na raiz $\theta(0) = 0 = B - \dfrac{K}{\lambda^2} \Rightarrow B = \dfrac{K}{\lambda^2}$

Momento na ponta da asa (em y = L) é nulo:

$$T(L) = GJ\theta'(L) = 0 = GJ\left[A\lambda\cos\lambda L - \frac{K}{\lambda^2}\lambda\sin\lambda L\right]$$

Condições de contorno

Resolvendo as equações resultantes da aplicação da condição de Contorno, temos A e B definidos pela relações anteriores chegando a:

$$\theta(y)=\frac{-K}{\lambda^2}\left[1-\cos\lambda y-(\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$

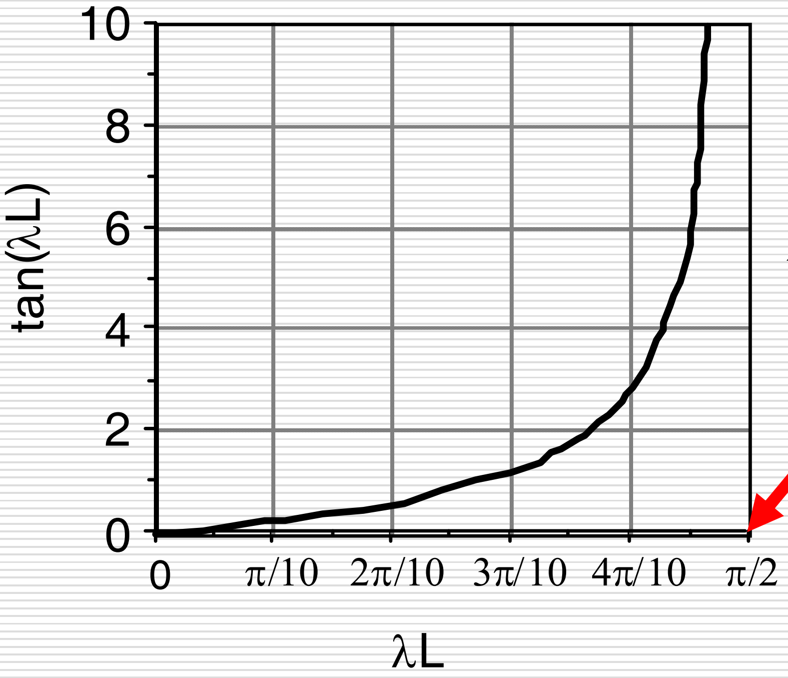
$$\theta(y)=-\left(\alpha_o+\left[\frac{c}{e}\right]\left[\frac{c_{mac}}{C_{l\alpha}}\right]+\left[\frac{nmgd}{qceC_{l\alpha}}\right]\right)\left[1-\cos\lambda y-(\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$

Esta equação representa a distribuição de torção de uma asa reta e Alongada, sujeita a um carregamento aerodinâmico que a deforma em Torção. Claro que associado a este carregamento pode existir uma flexão, porém o deslocamento vertical da asa não lateral o carregamento aerodinâmico, quando o enflechamento for nulo.

Amplificação da torção

- Note que temos um termo que pode se tornar infinito dependendo do seu argumento;
- Pode portanto associar este comportamento a um critério de divergência.

$$\theta(y) = \frac{-K}{\lambda^2}\left[1 - \cos\lambda y - (\tan\lambda L)(\sin\lambda y)\right]$$



$$\lambda L = \frac{\pi}{2}$$

Critério de divergência:

- Do resultado apresentado graficamente, pode-se estabelecer o seguinte critério:

$$\lambda^2 = \frac{\pi}{2L} = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow$$

$$q_D = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\frac{GJ}{ceC_{l\alpha}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{GJ}{L}\right)\left(\frac{1}{c \cdot LeC_{l\alpha}}\right)$$

- Pode-se fazer uma analogia deste resultado com o obtido para a seção típica, a pressão dinâmica é diretamente proporcional a rigidez e inversamente proporcional a área da asa.

Solução formal para a divergência

- Um resultado importante que foi observado na seção típica, é que a divergência é uma fenômeno associado a estabilidade da estrutura e, consequentemente independe de forças externas atuantes.
- Desta forma podemos estudar a equação que representa a distribuição de torção para asa na sua forma homogênea:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \right) \theta = 0$$

Solução elementar

- Assume-se as mesmas condições do caso anterior, e consequentemente A e B serão diferentes.

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \left(\frac{qceC_{l\alpha}}{GJ}\right)\theta = 0 \quad \theta(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y$$

- Conhecida a solução elementar, e considerando conhecido A e b, pode-se partir para o estudo da estabilidade do sistema aeroelástico.

Critério de estabilidade de Euler

- Do equilíbrio estático, chega-se a relação geral entre força e deslocamento em regime linear:

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

- Assumindo que existe uma pequena perturbação u_p , que se soma a condição de equilíbrio estático discriminada daqui por diante como u_s , tem-se os seguinte conjunto de equações:

(*Leonard Euler, matemático suíço, 1707-1783*)

Critério de estabilidade de Euler

$$[K]\{u\} = [K]\{u_p + u_s\} = \{F\}$$ (acrescentamos a perturbação)

$$[K]\{u_S\} + [K]\{u_p\} = \{F\}$$

Porém, do equilíbrio estático temos:

$$[K]\{u_s\} = \{F\} \quad \Rightarrow \quad [K]\{u_p\} = \{0\}$$

$$\{u_p\} = \{0\}$$ Solução trivial

$$[K] = [0]$$ Caracteriza um estado de estabilidade neutra

Critério de estabilidade de Euler

- Se $\left[K\right]\left\{u_p\right\} = \left\{0\right\} \quad e \quad \left\{u_p\right\} \neq \left\{0\right\}$ então:
  - A equação derivada do determinante de [K] deve ser nula ($\Delta=0$);
  - $\Delta=0$ é a equação característica, e as suas raízes são os auto-valores do sistema;
  - É um polinômio de ordem N, onde N é a dimensão da matriz [K]
    - Se $\Delta>0$ – o sistema é estável
    - Se $\Delta<0$ – o sistema é instável

Determinante de uma matriz: A condição para que se tenha solução não nula para u_p , só existe se det[K] = 0 !

Nosso caso de estabilidade...

$$T\left(L\right)=GJ\theta'\left(L\right)=0 \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta'\left(L\right)=A\lambda\cos\lambda L-B\lambda\sin\lambda L=0 \\ A(\lambda\cos\lambda L)+B(-\lambda\sin\lambda L)=0 \end{cases}$$

$$\theta\left(0\right)=0 \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta\left(0\right)=A\sin\lambda 0+B\cos\lambda 0=0 \\ A(0)+B(1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \left(\lambda\cos\lambda L\right) & \left(-\lambda\sin\lambda L\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinante de estabilidade

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda \cos \lambda L) & (-\lambda \sin \lambda L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \Delta = \lambda \cos \lambda L = 0$$

Soluções para a equação onde o determinante se anula. O menor valor deste conjunto é a pressão dinâmica de divergência. Como:

$$\lambda L = \frac{\pi}{2}, \; \frac{3\pi}{2}, \; \ldots \; \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

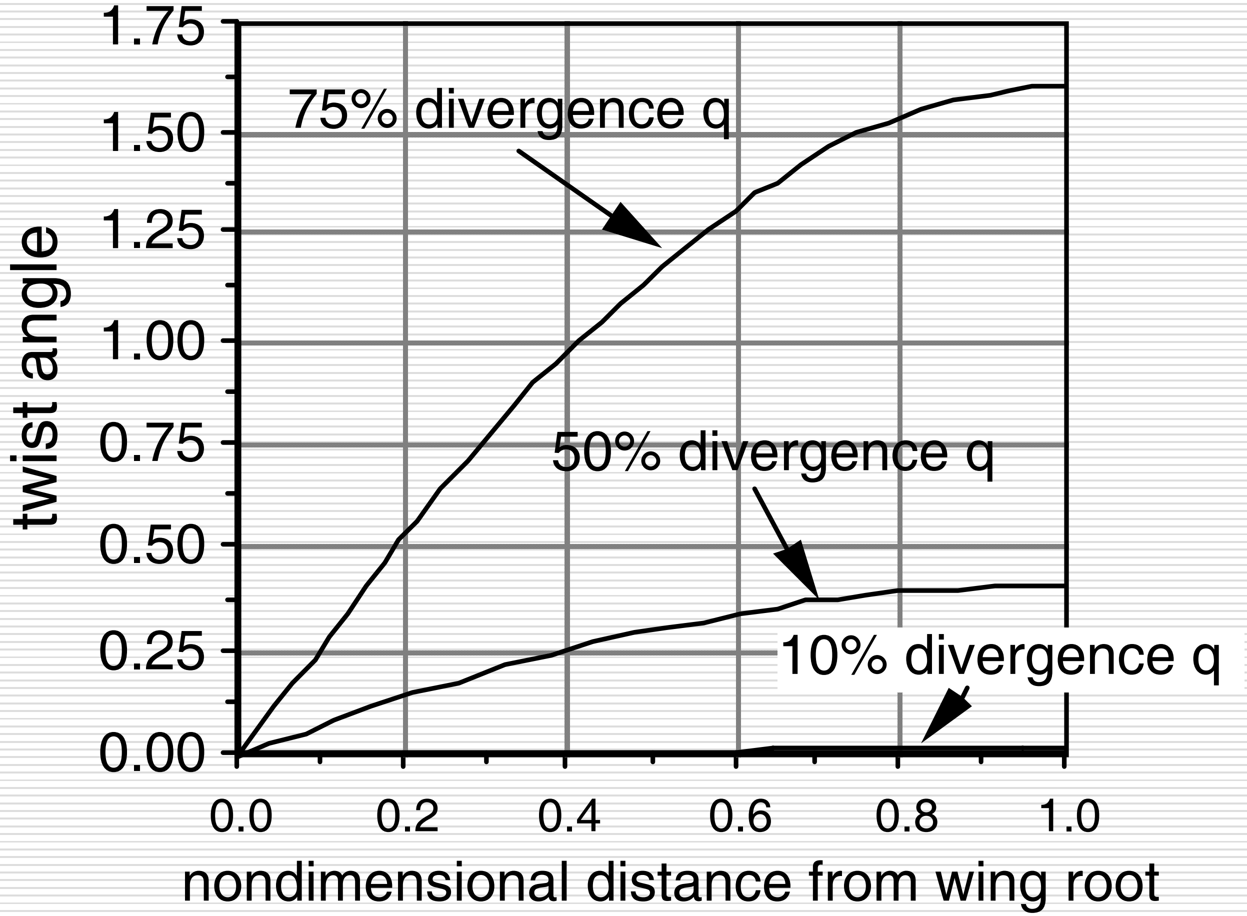
$$\lambda^2 = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow \lambda^2 L^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\lambda^2 L^2 = \frac{\pi^2}{4} = \frac{q_D cec_{l\alpha} L^2}{GJ}$$

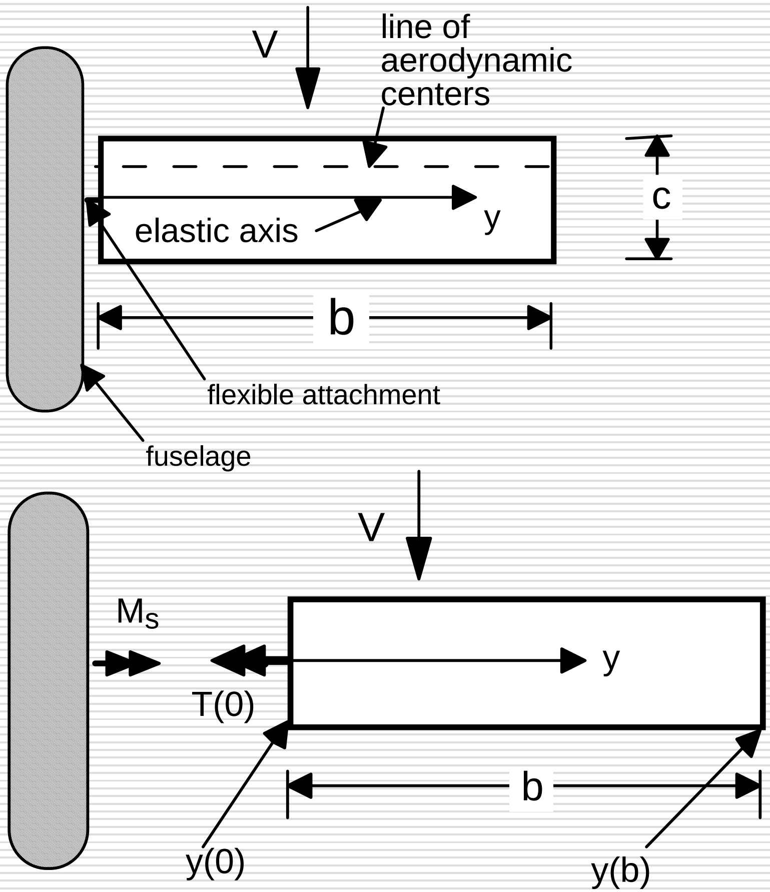
$$\frac{\pi^2}{4L^2} = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \Rightarrow q_D = \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 \left(\frac{GJ}{ceC_{l\alpha}}\right)$$

λ é o autovalor!

Efeito no ângulo de torção



Exemplos de Aplicação



Divergência de uma asa com engaste flexível

$$\theta'' + \lambda^2 \theta = 0$$

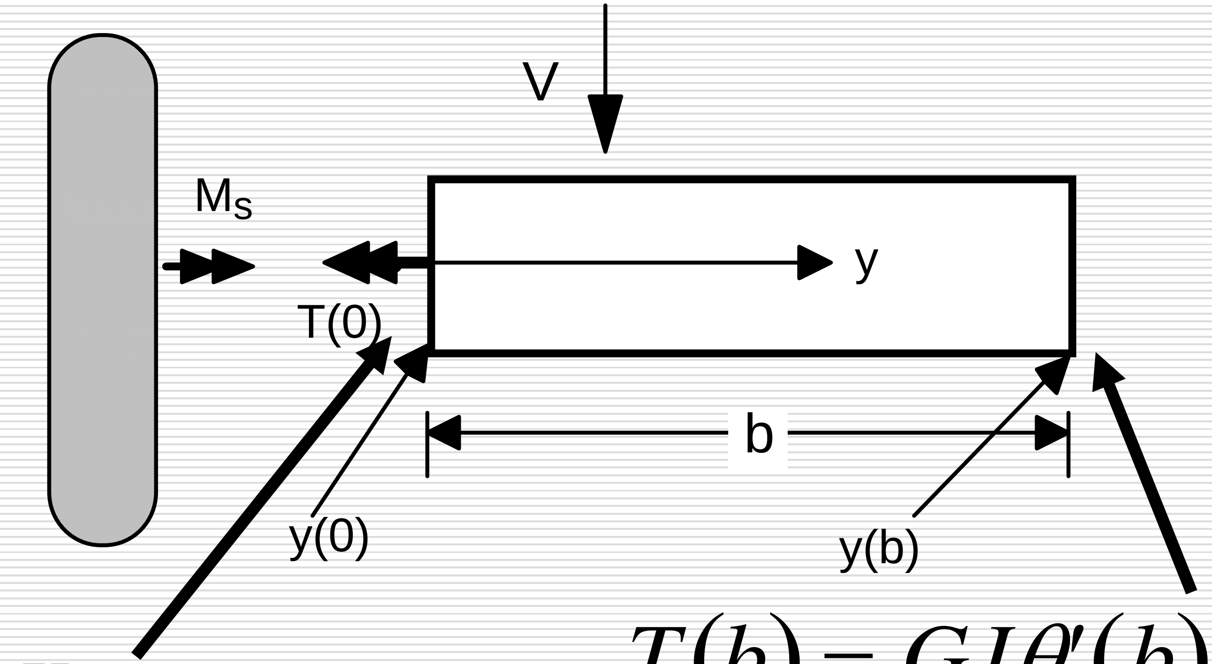
$$\left(\lambda^2 = \frac{qcec_{l_\alpha}}{GJ} \right)$$

$$M_s \equiv K_T \theta(0)$$

$$T(0) = GJ\theta'(0)$$

$$K_T \theta(0) = GJ\theta'(0)$$

Condições de contorno



$$\frac{K_T}{GJ}\theta(0) = \theta'(0)$$

$$T(b) = GJ\theta'(b) = 0$$

$$\theta'(b) = 0$$

Determinante de Estabilidade

$$\theta(y) = A\sin\lambda y + B\cos\lambda y$$

$$\theta'(y) = A\lambda\cos\lambda y - B\lambda\sin\lambda y$$

$$\frac{K_T}{GJ}\theta(0) = \theta'(0)$$

$$\boxed{\beta = \frac{GJ}{K_T b}}$$

$$B\frac{K_T b}{GJ} = A\lambda b$$

$$A\beta\lambda b - B = 0$$

O sistema de equações pode ser representado da mesma forma do caso onde o engaste da asa é rígido. Define-se o parâmetro b como sendo a forma de representar o quanto o engaste é rígido com relação a rigidez em torção da asa.

Determinante de Estabilidade

A torção na ponta da asa por sua vez é nula, o que implica em uma condição a mais que permite montar o sistema de equações para definir A e B.

$$\theta'(b) = A\lambda \cos \lambda b - B\lambda \sin \lambda b = 0$$

O sistema de equações, escrito na forma matricial fica portanto:

$$\begin{bmatrix} \beta\lambda b & -1 \\ \lambda \cos \lambda b & -\lambda \sin \lambda b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E o determinante de divergência aeroelástica é dado por:

$$\Delta = \lambda\left(-\beta\lambda b \sin \lambda b + \cos \lambda b\right) = 0$$

Equação de estabilidade

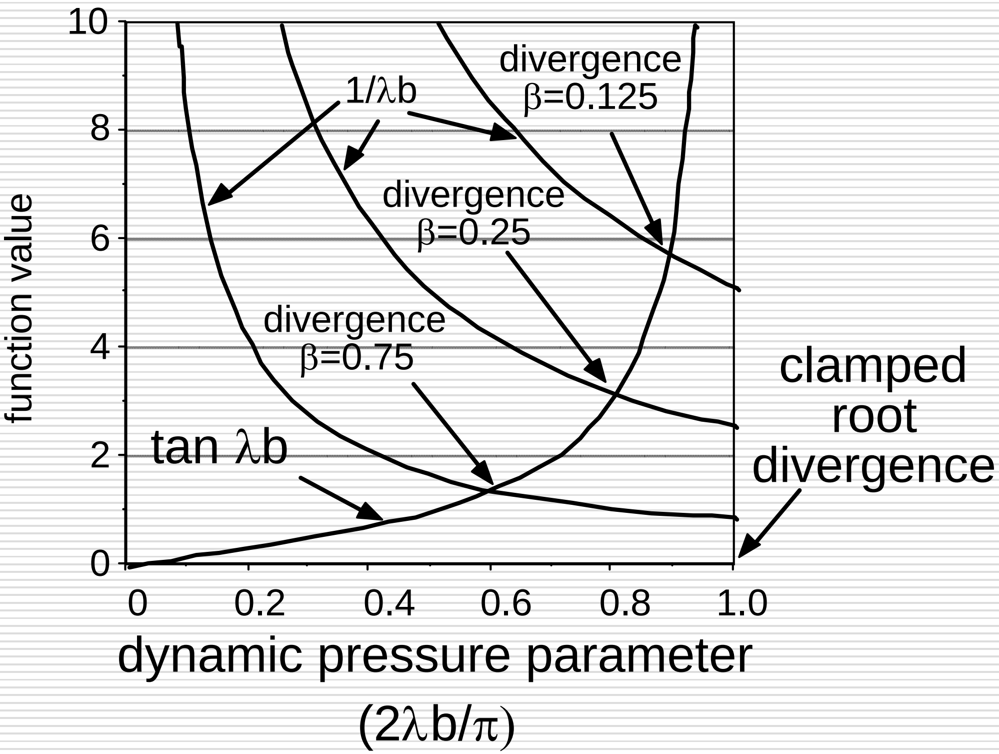
$$\Delta = \lambda\left(-\beta\lambda b \sin\lambda b + \cos\lambda b\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\beta\lambda b \sin\lambda b + \cos\lambda b = 0$$

$$\cos\lambda b = \beta\lambda b \sin\lambda b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\lambda b = \frac{1}{\beta\lambda b}$$

$$\lambda^2 = \frac{qceC_{l\alpha}}{GJ} \qquad \boxed{\beta = \frac{GJ}{K_T b}}$$



Resposta final...