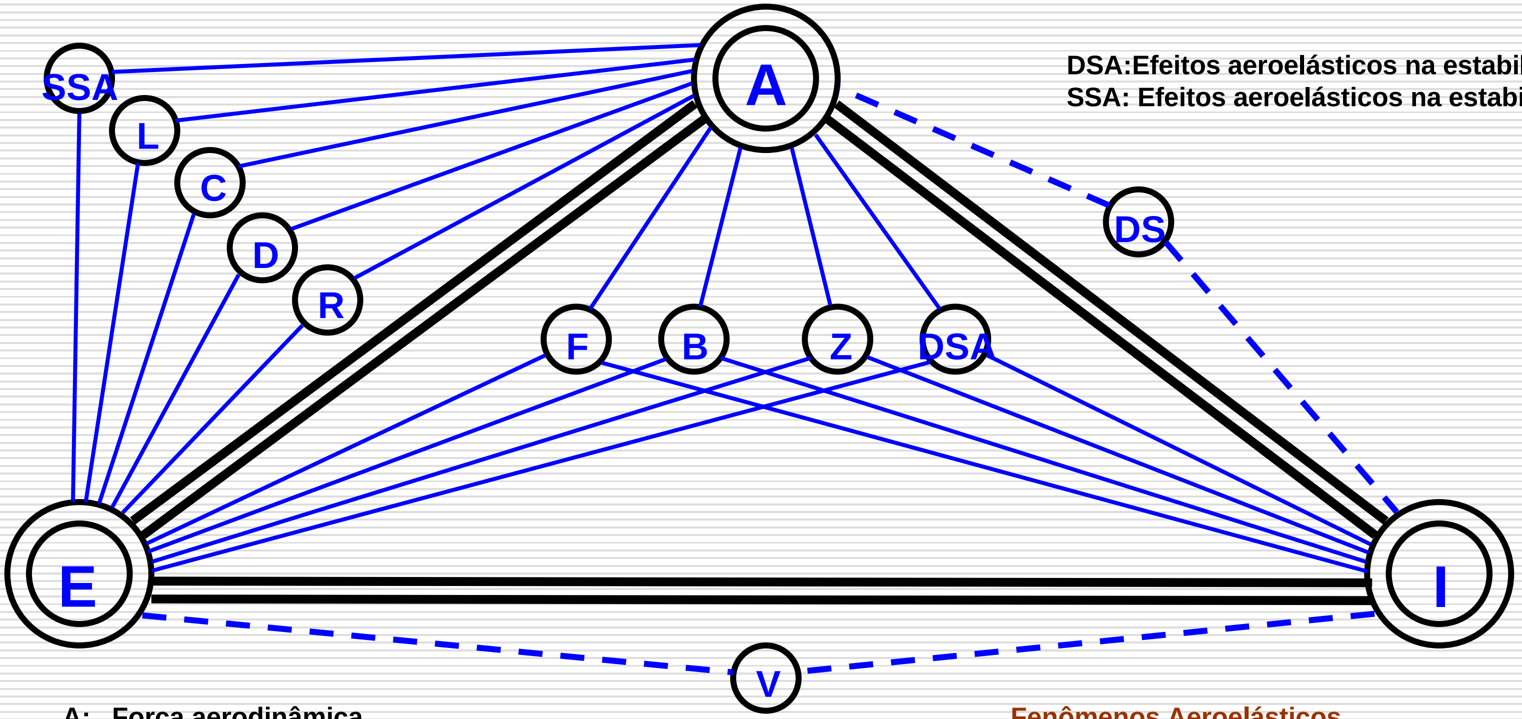
AE-249 - AEROELASTICIDADE

Aeroelasticidade Estática

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Triângulo de Collar



DSA:Efeitos aeroelásticos na estabilidade dinâmica
SSA: Efeitos aeroelásticos na estabilidade estática

A: Força aerodinâmica
E: Força elástica
I: Força inercial

Campos Relacionados

V: Vibrações mecânicas
DS: Estabilidade dinâmica

Fenômenos Aeroelásticos

F: "Flutter"
B: "Buffeting"
Z: Resposta dinâmica
L: Distribuição de carga
D: Divergência
C: Eficiência de controle
R: Reversão do sistema de controle

Conceitos introdutórios – Parte I

- **Análise matricial de estruturas**

Os deslocamento devido a flexibilidade estão relacionados às forças como:

$$\{F_i\} = \left[K_{ij}\right]\{u_j\}$$

Supondo que a estrutura é linear

$\left[K_{ij}\right]$ - matriz de rigidez, composta por coeficientes de influência de rigidez. Cada coluna representa o conjunto de forças necessário para que o deslocamento ui seja unitário e uj sendo nulo quando i≠j.

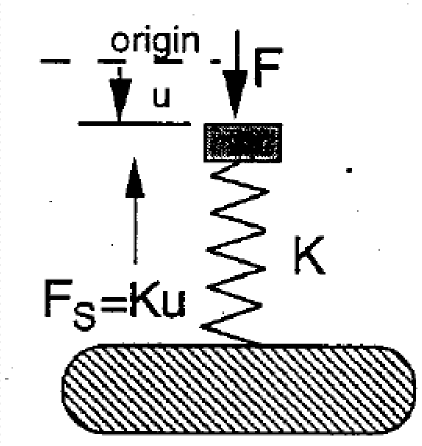
Análise matricial de estruturas

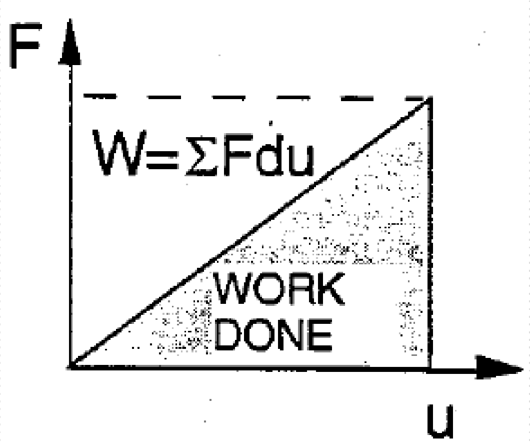
- Trabalho virtual realizado por uma força:

$$W = \sum F \cdot du = \frac{1}{2} F \cdot u =$$

$$= \frac{1}{2} K \cdot u \cdot u = \frac{1}{2} K \cdot u^2 \rightarrow$$

Energia potencial elástica





Análise matricial de estruturas

- Na forma matricial:

$$W = \sum F \cdot du = \frac{1}{2}\{F_i\} \cdot \{u_i\} = \frac{1}{2}\{u_i\}^T \cdot \{F_i\} \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\{u_i\}^T \cdot \{F_i\} \cdot \{u_j\} = U \rightarrow$$ Energia potencial elástica

Note que diferenciando $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} \Rightarrow$

refere-se a aplicação da equação de Lagrange:

$$\cancel{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i}\right]} - \frac{\partial\left(\cancel{T} - U\right)}{\partial x_i} = Q_j = \frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

Análise matricial de estruturas

- Consequentemente temos:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum K_{ij} u_j = F_i$$

Note que:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i \partial x_j} = K_{ij} = \frac{\partial U}{\partial x_j \partial x_i} = K_{ji}$$

Como a ordem de integração não altera o resultado, a matriz de rigidez deve ser simétrica

Os elementos diagonais devem ser positivos ou nulos, enquanto os demais não

Análise matricial de estruturas

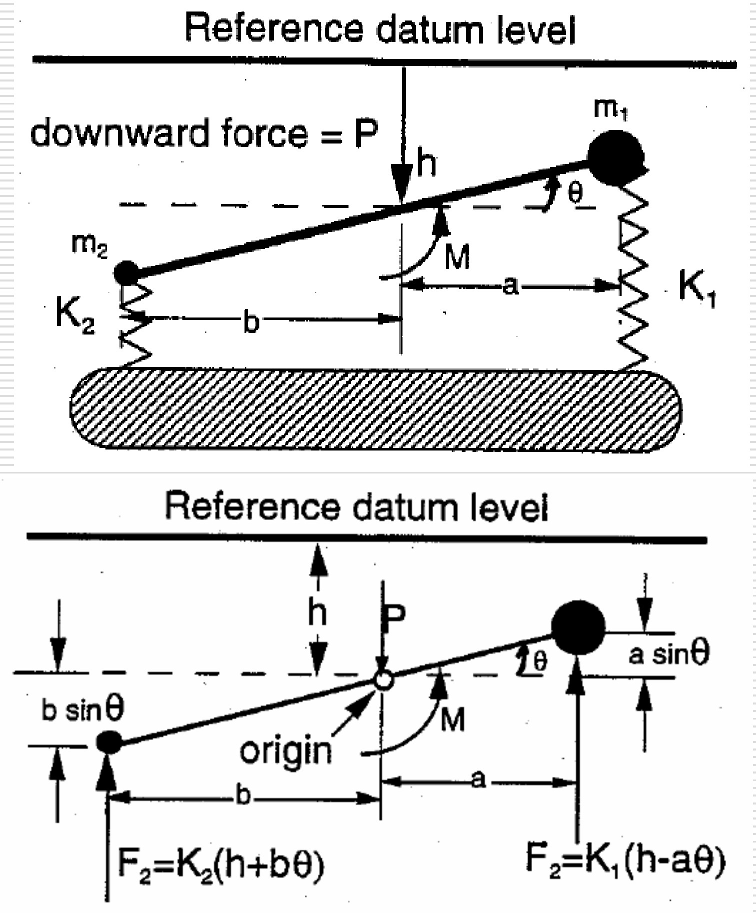
- Exemplo: construção da matriz de rigidez do sistema ao lado:

$$\sum F = P - K_1\left(h - a\theta\right) - K_2\left(h + b\theta\right) = 0$$

$$\sum M_T = M + K_1 a\left(h - a\theta\right) - K_2 b\left(h + b\theta\right) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(K_1 + K_2\right) & \left(K_2 b - K_1 a\right) \\ \left(K_2 b - K_1 a\right) & \left(K_1 a^2 + K_2 b^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Note que os termos diagonais são sempre positivos, e que existe o acoplamento elástico (termos fora da diagonal)



Análise matricial de estruturas

- Centro de cisalhamento e centro de torção – são exatamente a mesma coisa, é o ponto onde ao se aplicar uma força só existirá cisalhamento, ou seja não existirá nenhum momento aplicado. Se K1 = K2, e a = b, a origem O é o centro de torção;
- Este conceito é válido quando assume-se que a estrutura é linear;
- Em aeroelasticidade, a posição do centro de torção será determinante na caracterização da estabilidade estática e dinâmica do sistema

Conceitos introdutórios – Parte II

- **Aerodinâmica básica**

Definições básicas ->

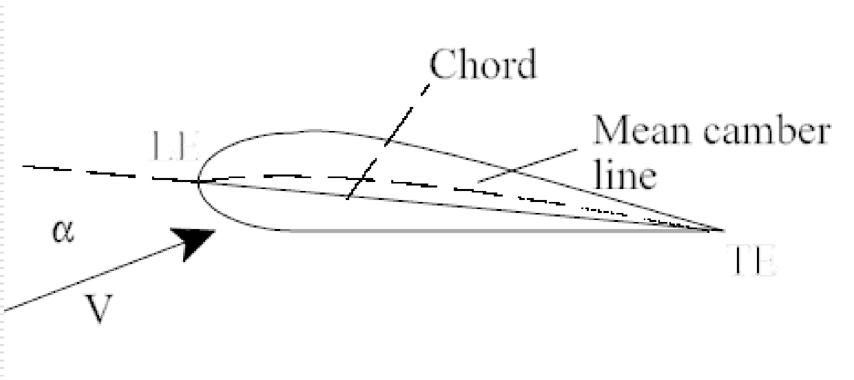
Geometria da um aerofólio bidimensional, daqui por diante abreviado para 2D.

c = corda

b = ½ corda

V = Velocidade de escoamento não perturbado.

α = ângulo de ataque



$$\frac{\delta}{c}\cdot 100 = \%\ \text{camber} \qquad \frac{t_{max}}{c}\cdot 100 = \%\ \text{thickness}$$

Parâmetros de similaridade

- Em aerodinâmica, define-se como parâmetros de similaridade:

$$M = \frac{V}{a} \rightarrow$$ Número de Mach

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V c}{\mu} \rightarrow$$ Número de Reynolds

V = vel. Escoamento
a = velocidade do som
ρ = densidade
μ =visc. dinâmica
ω = frequência circular
S = área

- Em aeroelasticidade temos:

$$k = \frac{\omega b}{V}$$

Frequência reduzida

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 S}$$

massa aparente

Parâmetros de similaridade

- O uso de parâmetros de similaridade garante o efeito de escala dinâmica para comparações teórico experimentais.

- Se Reynolds e Mach forem similares entre dois corpos imersos em um fluido, que sejam geometricamente similares, porém em escala diferente os parâmetros aerodinâmicos serão idênticos.

Sustentação e Momento

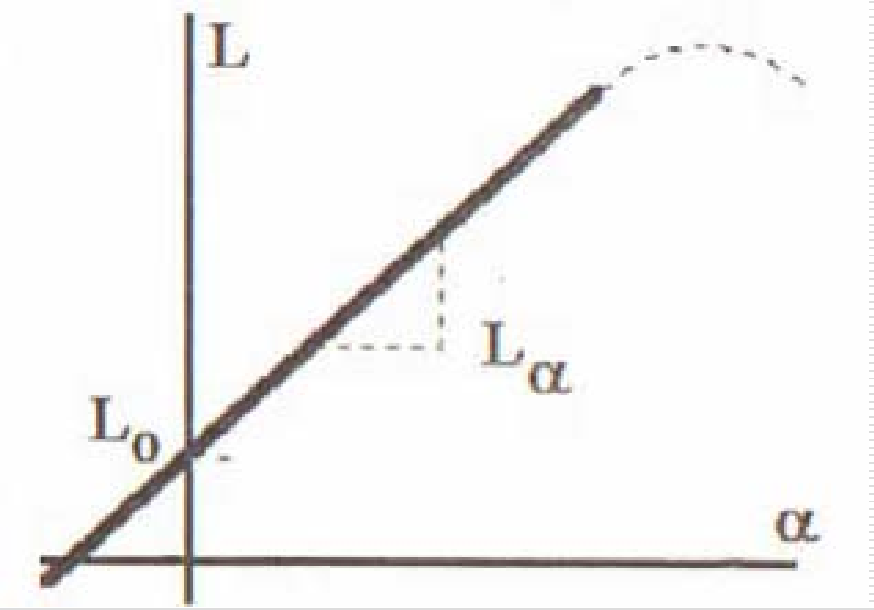
- Para calcular o momento, requer-se um comprimento de posição de referência;

$$L = L_o + \frac{dL}{d\alpha}\alpha$$

$$M = M_o + \frac{dM}{d\alpha}\alpha$$

$$qSC_L = qSC_{L_o} + qSC_{L_\alpha}\alpha$$

$$qScC_M = qScC_{M_o} + qScC_{M_\alpha}\alpha$$



Coeficientes aerodinâmicos

- Coeficientes de sustentação e momento:

$$C_l = \frac{l}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \qquad C_m = \frac{m}{\frac{1}{2}\rho V^2 Sc}$$

Nota: é usual definir os índices de coeficiente de seções 2D em minúsculas.

$$C_{l\alpha} = \frac{dC_l}{d\alpha} \Rightarrow C_l = C_{l0} + C_{l\alpha}\alpha = C_{l\alpha}\left(\alpha - \alpha_{0Lift}\right)$$

α_{0Lift} - ângulo de ataque para sustentação nula

Transporte do momento

- Pode-se medir ou calcular o momento aerodinâmico em um determinado ponto e transporta-lo para outro ponto de interesse:

$$C_{ma} = C_{ma} + C_l \left(h_a - h_b \right)$$

- Onde a e b são dois pontos distintos situados a distâncias h_a e h_b do bordo de ataque em frações da corda “c”.

Centro aerodinâmico

- Por definição o centro aerodinâmico é o ponto sobre o aerofólio onde o momento aerodinâmico não varia com o ângulo de ataque.

$$\frac{dC_{m_{ac}}}{d\alpha} = 0$$

- Para obter o centro aerodinâmico (ac), empregas-se a fórmula de transporte de momentos

$$C_{m_{ac}} = C_{mb} + C_l \left(h_{ac} - h_b \right)$$

Centro aerodinâmico

- Diferenciando em relação a α:

$$\frac{dC_{m_{ac}}}{d\alpha} = 0 = \frac{dC_{mb}}{d\alpha} + \frac{dC_l}{d\alpha}\left(h_{ac} - h_b\right) \Rightarrow$$

$$h_{ac} = h_b - \frac{dC_{mb}}{dC_l}$$

- Exemplo:

C_l	0,2	0,4	0,6	0,8
$C_{m1/3}$	-0,02	0,00	0,02	0,04

Centro aerodinâmico

- Como os dados de túnel de vento acima comporta-se de forma linear,

$$\frac{dC_{m_{1/3}}}{dC_l} = \frac{0,04-(-0,02)}{0,8-0,2} = 0,10$$

$$h_{ac} = h_{1/3} - \frac{dC_{m_{1/3}}}{dC_l} = \frac{1}{3} - 0,10 = 0,2333$$

- Para aerofólios finos em regime subsônico o centro aerodinâmico situa-se a uma posição a ¼ da corda aproximadamente.

Centro de pressão

- Posição onde o momento aerodinâmico é nulo pois é o ponto de aplicação da resultante do carregamento aerodinâmico distribuído sobre a corda.
- A sua posição pode ser determinada de:

$$C_{m_{xcp}} = C_{m_{1/3}} + C_l\left(h_{xcp} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-C_{m_{1/3}} = C_l\left(h_{xcp} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow h_{xcp} = \frac{C_{m_{1/3}}}{C_l} + \frac{1}{3} = \frac{0,02}{0,2} + \frac{1}{3} = 0,4333$$

- Note que a posição do Cp depende de α .

Porque o CA ao invés do CP?

- Embora o centro de pressão CP seja o ponto de aplicação da resultante aerodinâmica, a sua posição muda com a variação do ângulo de ataque.
- Por outro lado, o que não muda com o ângulo de ataque é a posição do centro aerodinâmico CA.
- Portanto, é razoável assumir como ponto de aplicação da resultante aerodinâmica a posição do centro aerodinâmico, uma vez que a força aerodinâmica variará proporcionalmente ao ângulo de ataque ao mesmo tempo que momento aerodinâmico permanecerá constante ou nulo (placa plana).
- Note que para o caso de um aerofólio fino, ou mesmo a representação da seção de um aerofólio por uma placa plana a posição do CA será aproximadamente e exatamente a ¼ da corda, respectivamente. e todo o momento atuante no aerofólio será oriundo da sustentação multiplicada pela distancia do ponto de giro do aerofólio ao centro aerodinâmico a ¼ da corda.
- Note que para o caso da placa sem arqueamento, o momento aerodinâmico será nulo ($Cmac_0 = 0$)

Mais definições...

- Asa finita (3D)

  Λ_e=enflechamento do bordo de ataque (LE)

  A = área da asa

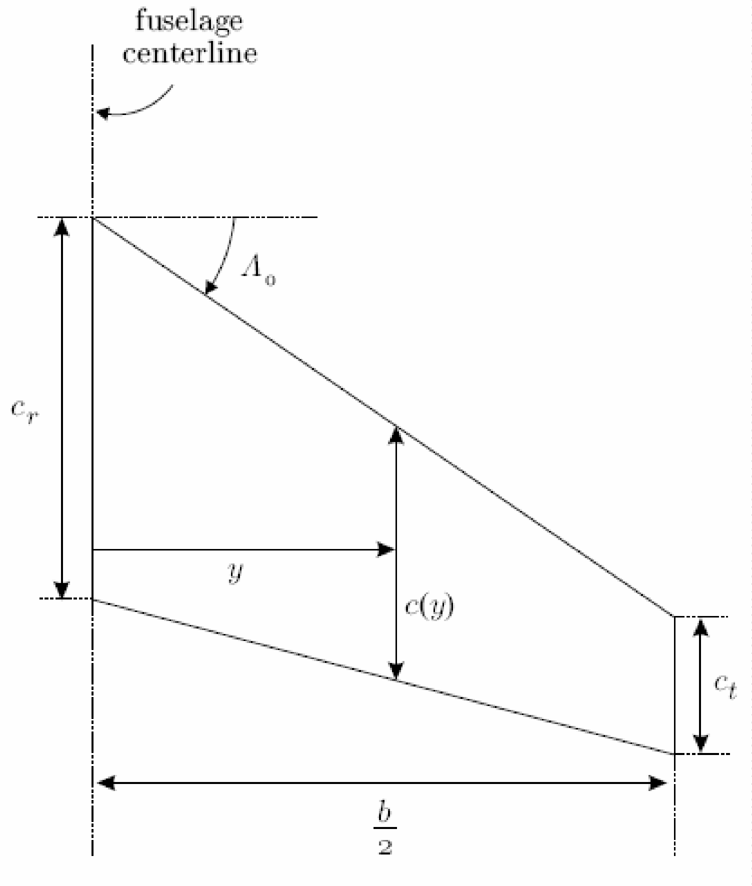
  b/2 (s/2) = ½ envergadura

  Cr = corda na raiz

  Ct = corda na ponta

  $$\frac{ct}{cr} = \lambda$$ afilamento

  $$AR = \frac{s^2}{A}$$ alongamento



Corda média aerodinâmica (MAC)

- Corda de uma asa retangular com a, com a mesma área A, cujas características aerodinâmicas (sustentação e momento de arfagem) são iguais a asa original.

$$MAC = \int_0^{\frac{s}{2}} c^2\left(y\right)dy$$

$$MAC = \frac{2}{3}cr\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda} \rightarrow$$

Asa reta e afilada, e será importante para adimensionalizar A frequência reduzida

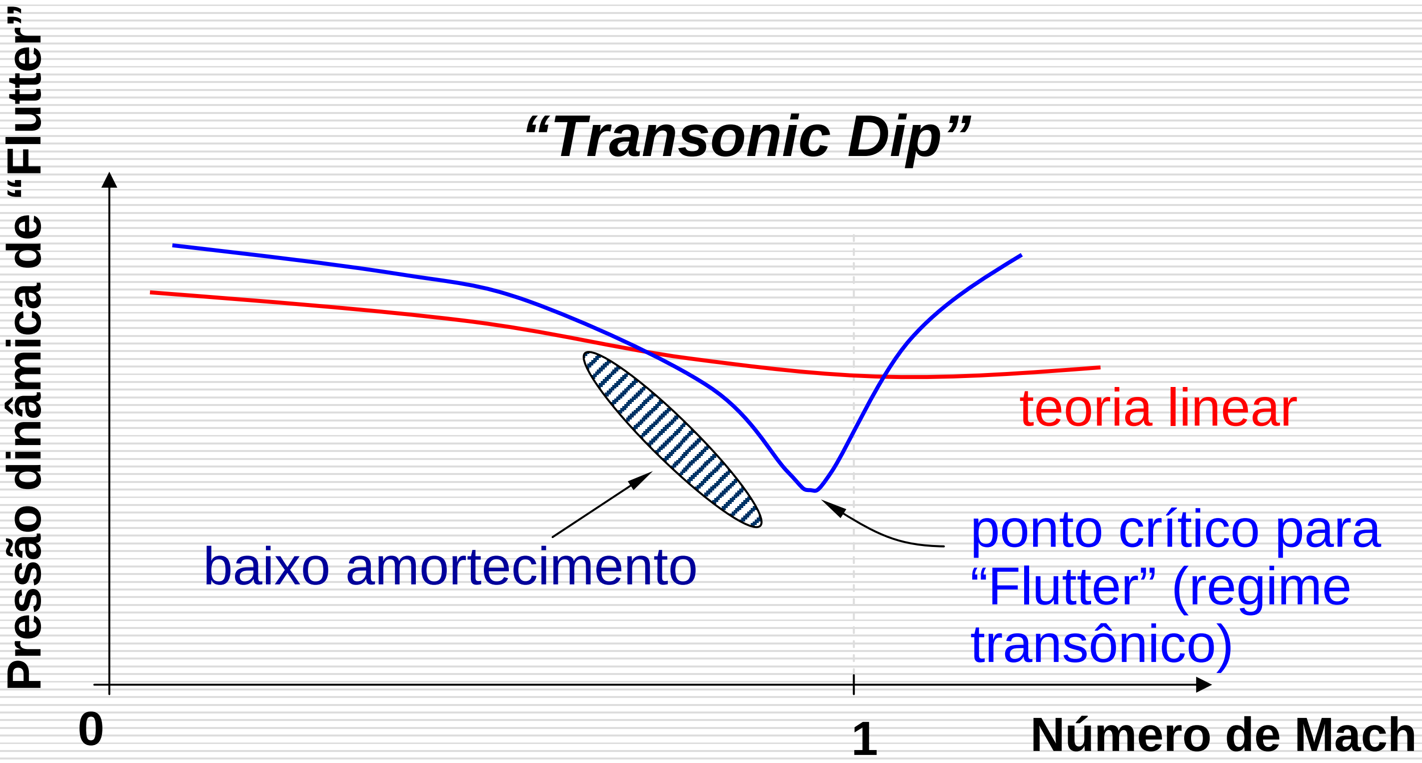
Compressibilidade

- Os coeficientes aerodinâmicos bem como as suas derivadas dependem de efeitos de compressibilidade;
- Este efeito é representado pela correção de compressibilidade conhecida também como correção de Prandtl-Glauert;

$$\frac{dC_l}{d\alpha} = C_{l\alpha} = \frac{C_{l\alpha}^{Inc}}{\sqrt{1-M^2}}$$

- Não só coeficientes, mas também a posição do centro aerodinâmico é alterada.

Regime Transônico

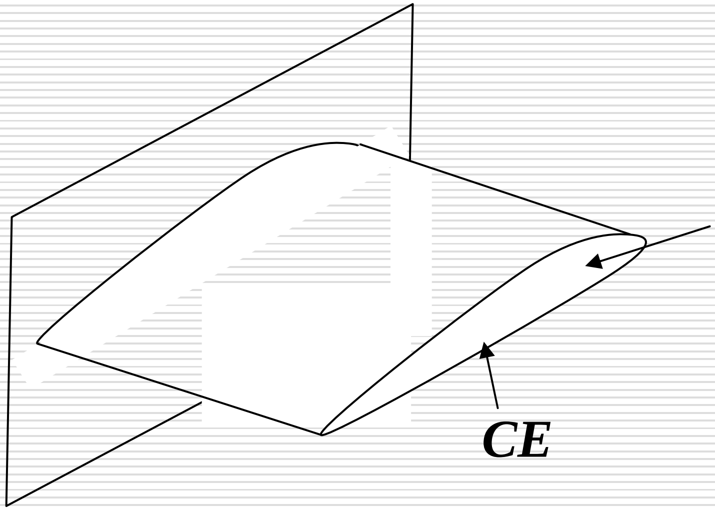


Introdução à Aeroelasticidade Estática

X-29

Aeroelasticidade Estática

- **Centro Elástico (*CE*):** é o ponto para o qual uma força normal à corda é aplicada e a seção não sofre torção, mas apenas flexão.
- Uma força aplicada fora do *CE* causa torção e flexão.

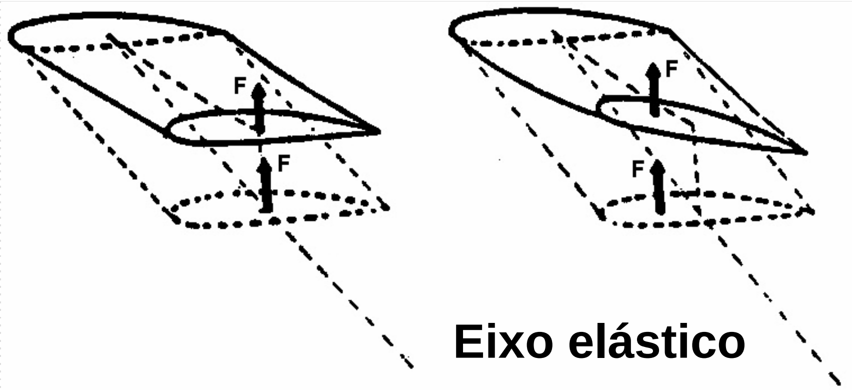


AC - **Centro Aerodinâmico (Ponto onde o Momento Aerodinâmico não muda)**

Aeroelasticidade Estática

- **Eixo Elástico:** linha ao longo do comprimento da semi-asa, formada pelos pontos (*CE*) onde forças podem ser aplicadas sem resultar em torção da mesma.

Esforço aplicado no eixo elástico (flexão)



Esforço aplicado fora do eixo elástico (torção e flexão)

:

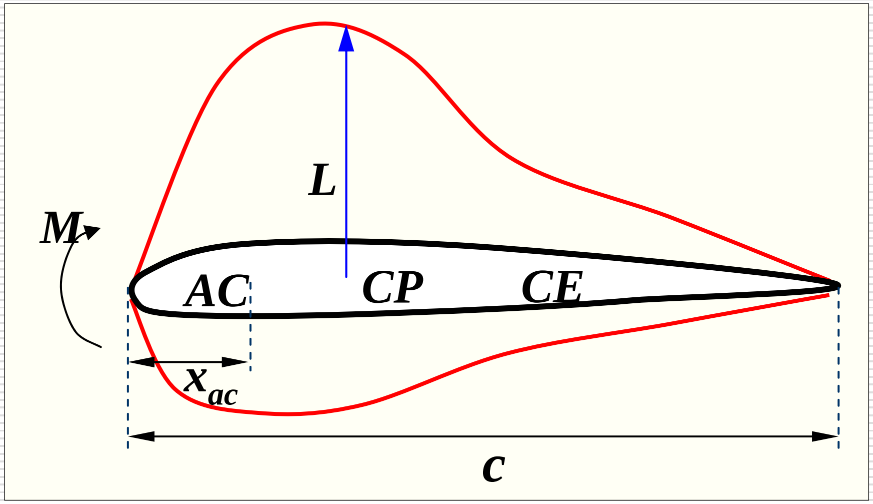
Distribuição da sustentação

$$C_L = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha$$

$$M_{AC_{(x)}} = L \cdot x_{AC} + M_{AC}$$

$$M_{AC} = C_{M_{AC}} q \cdot S \cdot c$$

$$M_{x_{CP}} = 0$$



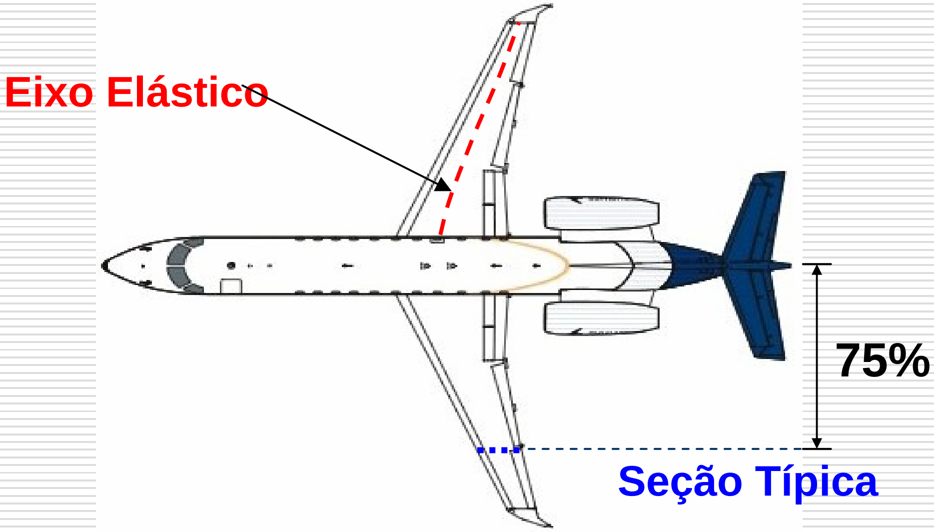
$$x_{AC} \cong \frac{c}{4}$$ Escoamento subsônico (consegue-se o valor exato quando se aplica a teoria dos perfis finos).

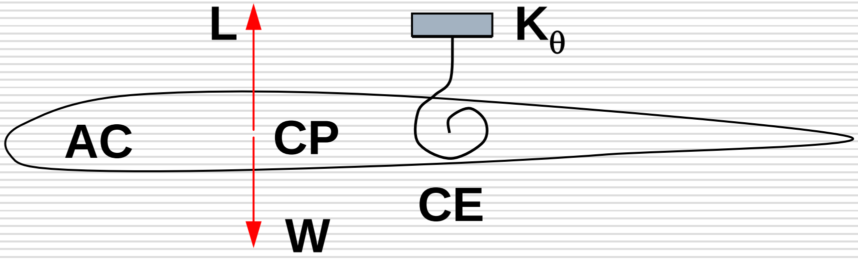
$$x_{AC} \cong \frac{c}{2}$$ Escoamento supersônico

Seção Típica de uma Asa

Seção mais representativa da asa. Em geral, é considerada a 75% da semi-envergadura da asa.

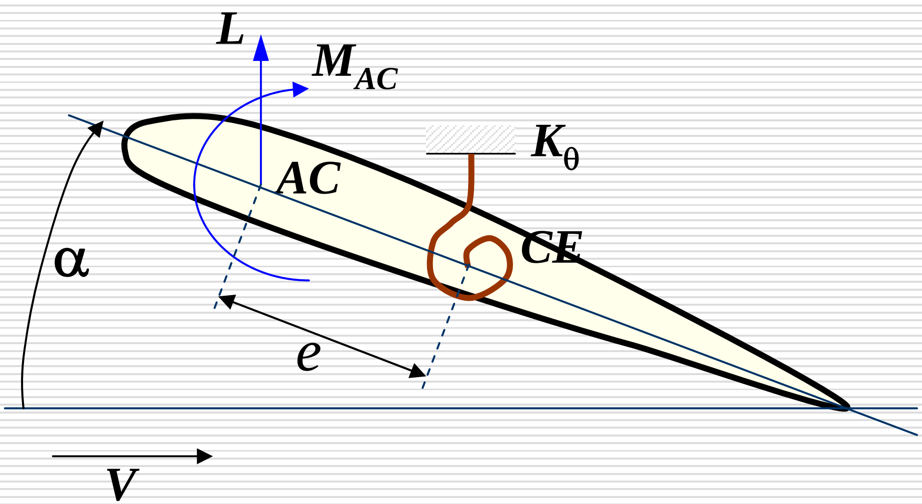
Esta seção depende da rigidez torcional ao longo da asa.

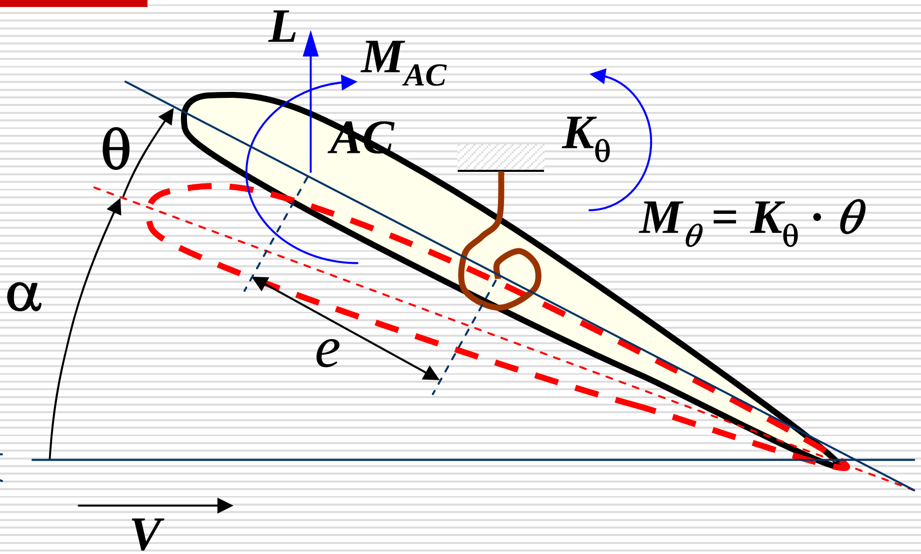




A resistência devido à rigidez torcional é a tendência de uma seção da asa em resistir à torção imposta pela seção adjacente. É representada pela *Mola Torcional* (K_θ).

Divergência Aeroelástica-1 GDL





e - distância do *CE* ao *AC*

α - ângulo de ataque inicial

θ - ângulo de torção elástica

<u>Obs.</u>: Geralmente o "Flutter" ocorre antes que a Divergência, exceto para asas com enflechamento negativo.

Equilíbrio de Momentos (ref. CE)

$$M_{AC} + Le = K_\theta \theta$$

Em termos de coeficientes aerodinâmicos, tem-se:

$$C_{M_{AC}} qSc + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) qSe = K_\theta \theta$$

Determina o quanto tem de torção, dependendo da velocidade. Então,

$$\theta = \frac{qS}{K_\theta}\left(\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC}}}{1 - q\dfrac{Se}{K_\theta}\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

<u>Obs.</u>: θ aumenta quando diminui o denominador. Denominador nulo corresponde a *condição de divergência*.

Condição de divergência

<u>Pressão Dinâmica de Divergência</u> (q_D):
Que proporciona a divergência sobre um aerofólio.

$$q_D = \frac{K_\theta}{Se\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}$$

<u>Velocidade de Divergência</u> (V_D):
Velocidade em que ocorre a Divergência.

$$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho Se\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}}$$

$$L_{Total} = qS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) \quad \therefore \quad L_{Total} = L_{Rígida} + L_{Elástica}$$

O carregamento é alterado pela flexibilidade

Para aumentar a V_D: aumentar K_θ; diminuir e; e reduzir o ρ (aumentar o nível de vôo). Se $e < 0$, não existe a condição de Divergência.

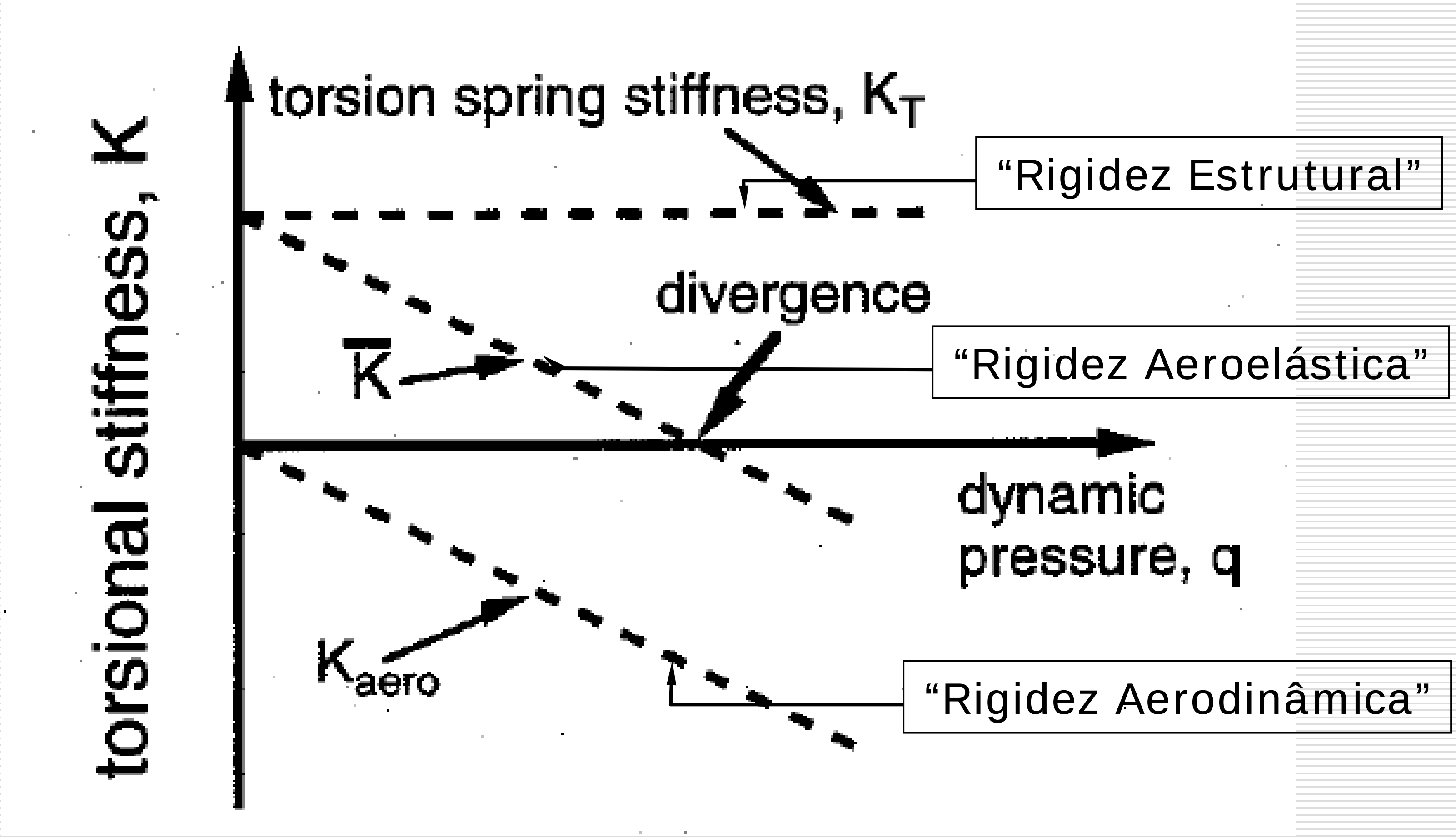
Condição de divergência

- Note os termos que compõem a relação abaixo:

$$\theta = \frac{qSeC_{L\alpha}\alpha_0 + qScC_{M_{AC}}}{\underbrace{\underbrace{K_\theta}_{\text{“Rigidez Estrutural”}} - \underbrace{qSeC_{L\alpha}}_{\text{“Rigidez Aerodinâmica”}}}_{\text{“Rigidez Aeroelástica”}}}$$

A divergência é uma instabilidade independente da magnitude dos esforços (momentos), mas sim dependente da rigidez aeroelástica

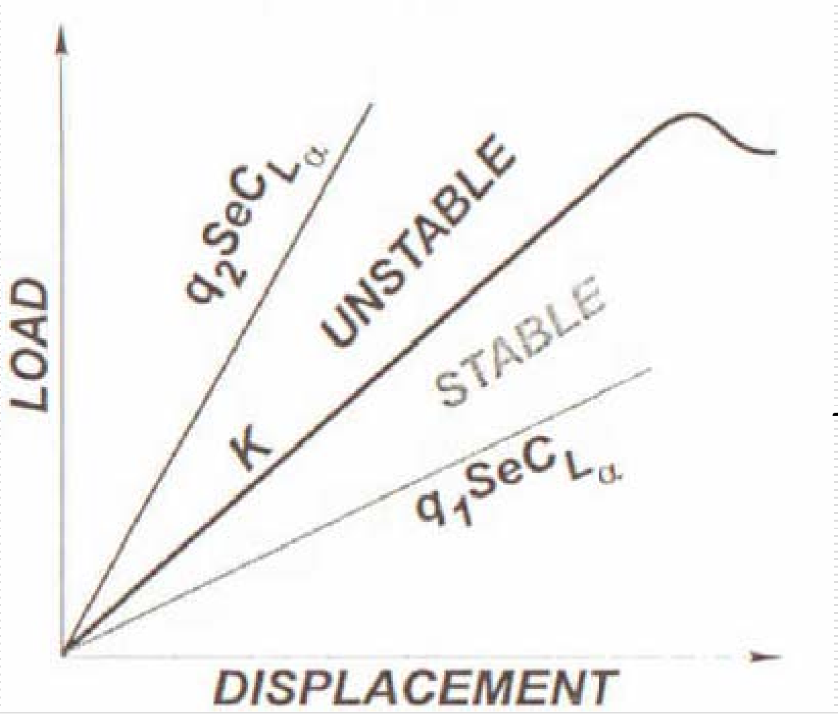
Condição de divergência



Condição de divergência

- Graficamente:

$$K_\theta < q_2 SeC_{L\alpha}$$



$$K_\theta > q_1 SeC_{L\alpha}$$

Influência do peso

- O peso *W*, cujo ponto de aplicação é o CG, também tem influência sobre a torção elástica, devido o momento negativo gerado por ele, resultando em

$$M_{AC} + Le - Wd = K_\theta \theta$$

$$C_{M_{AC}} qSc + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) qSe - Wd = K_\theta \theta$$

$$\theta = \frac{qS}{K_\theta}\left(\frac{e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0 + cC_{M_{AC}} - Wd}{1 - q\frac{Se}{K_\theta}\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

Entretanto, note que a divergência independe desta "força externa"...

Acréscimo de sustentação

Efeito Aeroelástico abaixo da *VD*:

$$M_{AC} + Le = K_\theta \theta \quad \therefore \quad Se\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) + qScC_{M_{AC}} = K_\theta \theta \quad \therefore$$

$$qSe\left(\underbrace{\alpha_0 + \frac{c}{e}\frac{C_{M_{AC}}}{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}}_{\bar{\alpha}_0} + \theta\right)\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = K_\theta \theta$$

$\overline{\alpha}_0$ = ângulo de ataque antes da torção elástica

Acréscimo de sustentação

Como $q_D = \dfrac{K_\theta}{Se\left(\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)} \quad \therefore \quad K_\theta = q_D Se\left(\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)$

Então obtém-se :

$$qS\cancel{e}\left(\bar{\alpha}_0 + \theta\right)\cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} = q_D S\cancel{e}\cancel{\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{\alpha}_0 + \theta}{\bar{\alpha}_0} = \frac{1}{1 - \frac{q}{q_D}}$$

que é a expressão que indica o quanto de sustentação se tem em relação à asa rígida.

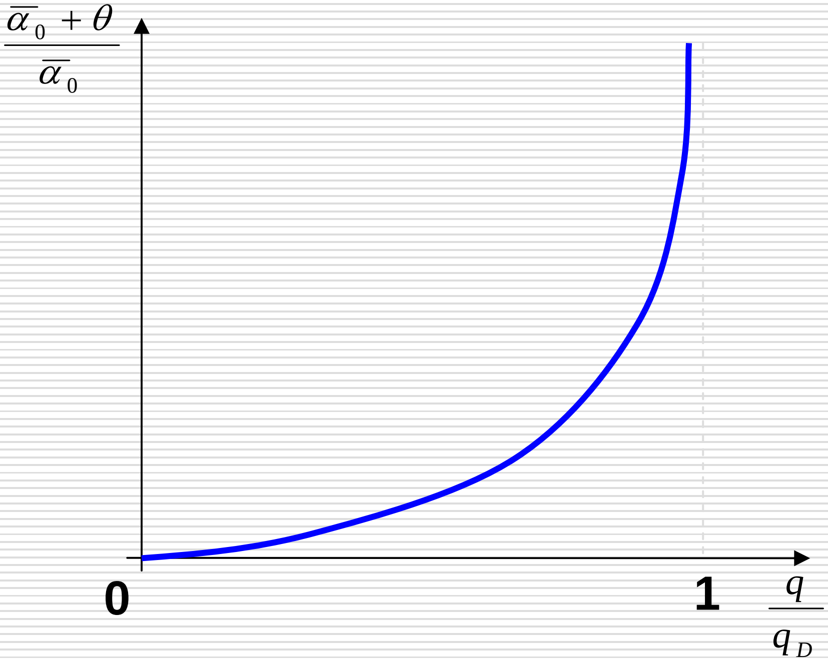
Sustentação Efetiva

$$L_{Efetiva} = \frac{L_{Rígida} + L_{Elástica}}{L_{Rígida}} \cong \frac{\bar{\alpha}_0 + \theta}{\bar{\alpha}_0}$$

Ex.: $\frac{V}{V_D} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{q_D} = 0,64$

$$\therefore \quad \frac{\bar{\alpha}_0 + \theta}{\bar{\alpha}_0} \cong 0,3$$

então $L_{Elástica} \cong 2L_{Rígida}$



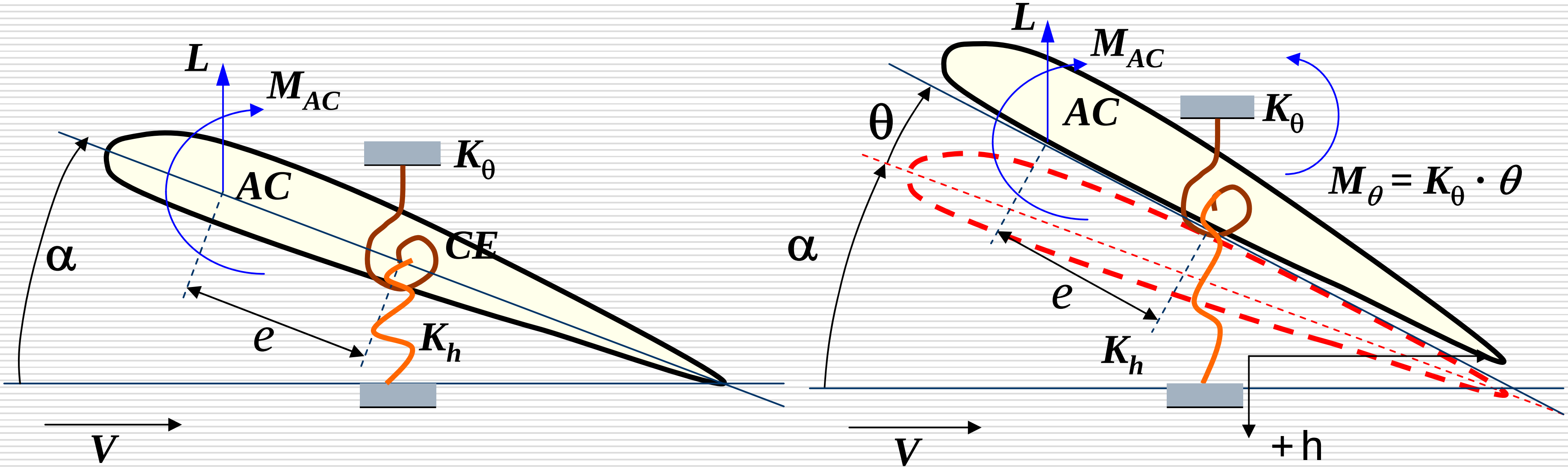
Mas, com $\bar{\alpha}_0 = 5° \quad \Rightarrow \quad \theta = 10°$, e $\bar{\alpha}_0 + \theta = 15°$

que está fora da faixa linear (tomar cuidado).

Considerações adicionais

- A eficiência da sustentação modifica o desempenho da aeronave, e deve ser considerada no projeto;
- A superfícies de sustentação devem ser dimensionadas considerando a flexibilidade;
- A redistribuição da sustentação move o centro de pressão de uma asa na direção da raiz, e para a frente (direção do BA);
- O estudo da estabilidade e controle da aeronave deve levar em conta os efeitos da flexibilidade.

Divergência Aeroelástica-2 GDL



e - distância do CE ao AC

α - ângulo de ataque inicial

θ - ângulo de torção elástica

h - deslocamento vertical

K_h = rigidez em translação

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$M_{AC} + L \cdot e = K_\theta \cdot \theta$$

$$L = K_h \cdot h$$

Agrupando:

$$qS\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right)\right] = K_h \cdot h$$

$$qScC_{M_{AC}} + qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right)\right] = K_\theta \cdot \theta$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = qSC_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + qSC_{L_\alpha} \alpha_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + qScC_{M_{AC}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} - qSC_{L_\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = qSC_{L_\alpha} \alpha_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + qScC_{M_{AC}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{K_\theta} & \dfrac{qSC_{L_\alpha}}{K_\theta} \\ 0 & 1 - \dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha} \alpha_0}{K_\theta} \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + \frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha}\alpha_0}{K_\theta} \begin{bmatrix} \dfrac{K_\theta}{K_h} & \dfrac{\left(-qSC_{L_\alpha} / K_h \right)}{1 - qSeC_{L_\alpha} / K_\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{1 - qSeC_{L_\alpha} / K_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ e \end{Bmatrix} + \frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta} \begin{bmatrix} \dfrac{K_\theta}{K_h} & \dfrac{\left(-qSC_{L_\alpha} / K_h \right)}{1 - qSeC_{L_\alpha} / K_\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{1 - qSeC_{L_\alpha} / K_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Equilíbrio de Momentos e Forças (ref. CE)

Os deslocamentos são dados por:

$$h=\left[\frac{\left(-qSC_{L_\alpha}\alpha_0 / K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]-\frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta}\left[\frac{\left(-qSC_{L_\alpha} / K_h\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]$$

$$\theta=\left[\frac{\left(qSC_{L_\alpha}\alpha_0 / K_\theta\right)}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]-\frac{qScC_{M_{AC}}}{K_\theta}\left[\frac{1}{1-\dfrac{qSeC_{L_\alpha}}{K_\theta}}\right]$$

Moral da história: A pressão dinâmica de divergência é a mesma que o caso com 1 GDL.

Outros efeitos...

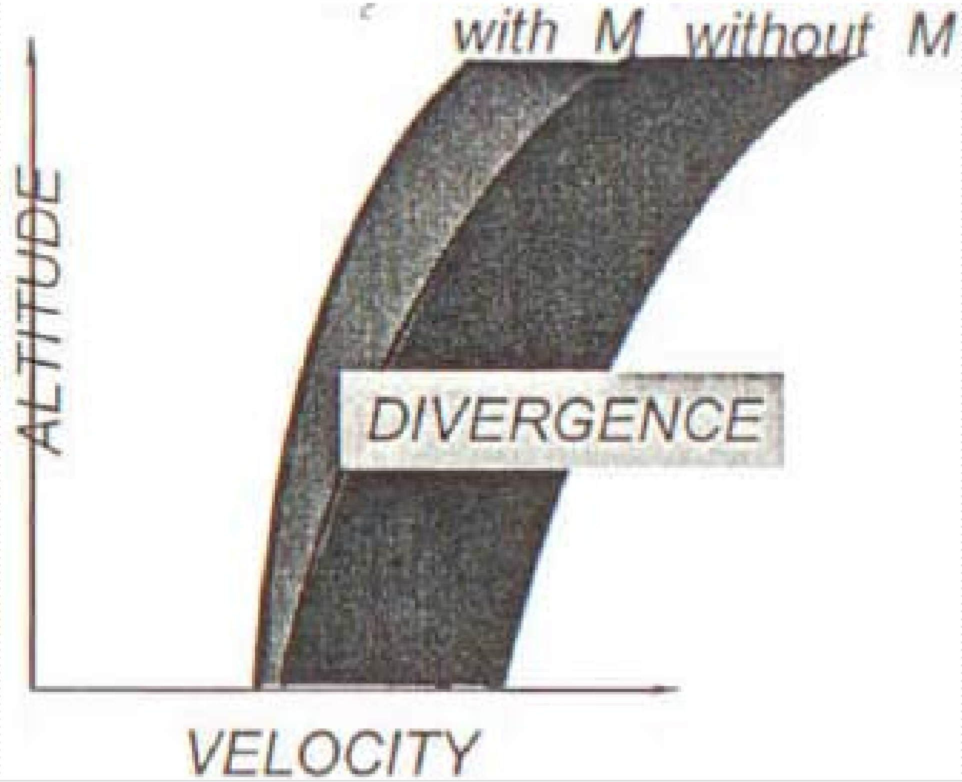
- A condição (pressão dinâmica, por exemplo) em que o aerofólio perde a sua resistência em torção é conhecida como divergência;
- Não apenas o efeito da compressibilidade, mas também um eventual aquecimento aerodinâmico pode mudar as características estruturais da estrutura, diminuindo a sua rigidez. (Aerotermoelasticidade). Ex. vôos em regime hipersônico.
- Uma falha estrutural pode alterar a característica aeroelástica e levar a divergência

O mais importante - efeito da compressibilidade

- Correção de Prandtl-Glauert:

$$q_D = \frac{K_\theta}{Se \dfrac{C_{L\alpha}^{inc}}{\sqrt{1-M^2}}}$$

A velocidade de divergência aumenta com a altitude, porém diminui com o efeito da compressibilidade.



O efeito da compressibilidade

$$q_D = \frac{K_T}{SeC_{L_\alpha}} \Rightarrow \quad C_{L_\alpha} = \frac{C_{L_{\alpha 0}}}{\sqrt{1-M^2}}$$

$$q_{Do} = \frac{K_T}{SeC_{L_{\alpha 0}}} \Rightarrow \quad \boxed{q_D = \frac{K_T\sqrt{1-M^2}}{SeC_{L_{\alpha 0}}} = q_{Do}\sqrt{1-M^2}}$$

Mais sobre compressibilidade...

- Todavia, o número de Mach muda a pressão dinâmica de divergência (Prandtl-Glauert);
- Porém não podemos trata-lo como um parâmetro independente; note a relação para a velocidade de divergência:

$$V_D = \sqrt{\frac{2K_\theta}{\rho S e \dfrac{C_{L\alpha}^{inc}}{\sqrt{1-M^2}}}}$$

- A velocidade de divergência depende do par ρ e ***M***, uma vez que o número de Mach depende da altitude .

Mach de divergência

- Pergunta: se operarmos em uma determinada altitude, qual será o Mach de divergência? A condição de vôo calculada a partir da equação:

$$M = \frac{V}{a} \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot M^2 a^2$$

  deve corresponder (*match*) à condição calculada pela análise de divergência.
- Em outras palavras, a densidade e o número de Mach devem corresponder à velocidade calculada para uma determinada condição de vôo (altitude).

Mach de divergência

- Para tal, vamos calcular a pressão dinâmica incluindo o efeito da compressibilidade:

$$q_D = \frac{K_\theta \sqrt{1-M^2}}{S \cdot e \cdot C_{L\alpha}^{inc}} = q_0\sqrt{1-M^2} = q_D^{inc}\sqrt{1-M^2}$$

- Combinando a equação acima com:

$$q = \frac{1}{2}\rho \cdot V^2 = \frac{1}{2}\rho \cdot M^2 a^2$$

- Tem-se :

Mach de divergência

- Continuação...

$$\frac{1}{2}\rho\cdot M^2 a^2 = q_D^{inc}\sqrt{1-M^2} = q_S M^2$$

- Onde a pressão dinâmica q_s é a pressão correspondente a um escoamento à velocidade do som.
- Ou seja, podemos usar a relação acima que é função exclusivamente do número de Mach e da pressão dinâmica de divergência em regime incompressível. Também é necessário identificar a altitude correspondente à análise para se calcular a velocidade do som e se obter a pressão dinâmica de referência para aquela altitude;
- O resultado é uma equação quártica para o número de Mach apenas, a nossa incógnita. Este valor correspondente a uma dada altitude será o número de Mach de divergência:

Mach de divergência

$$M_D^4 + \left(\frac{q_{Do}}{q_s}\right)^2 M_D^2 - \left(\frac{q_{Do}}{q_s}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$M_D = +\sqrt{\frac{-\left(\frac{q_{Do}}{q_s}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{q_{Do}}{q_s}\right)^4 + 4\left(\frac{q_{Do}}{q_s}\right)^2}}{2}}$$

O conceito de “*Match Point*”

- O conceito de “*Match Point”*, ou “ponto correspondente” é muito utilizado para a correlação de resultados de análises aeroelástica com experimentos em vôo.
- A idéia é obter uma velocidade de divergência que corresponda ao número de Mach a uma determinada altitude de vôo.
- Ou seja, plota-se a pressão dinâmica corrigida para os efeitos de compressibilidade e a pressão dinâmica do escoamento a velocidade do som (*a*) correspondente a uma determinada altitude de vôo.
- A interseção entre as duas curvas fornecerá o Mach de diverg6encia, ou seja e deste valor pode-se obter a velocidade de divergência fisicamente correta para a condição investigada.

O conceito de “Match Point”

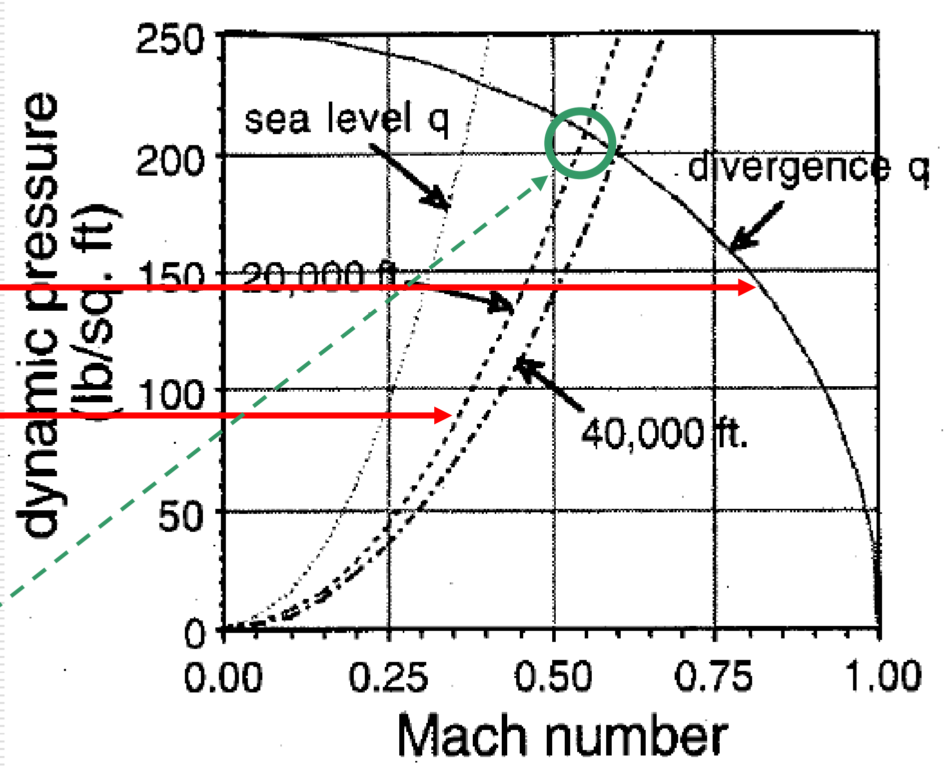
- O número de Mach de divergência é a interseção de duas curvas, resultado de plotar

$$q_D = q_D^{inc}\sqrt{1-M^2}$$

e

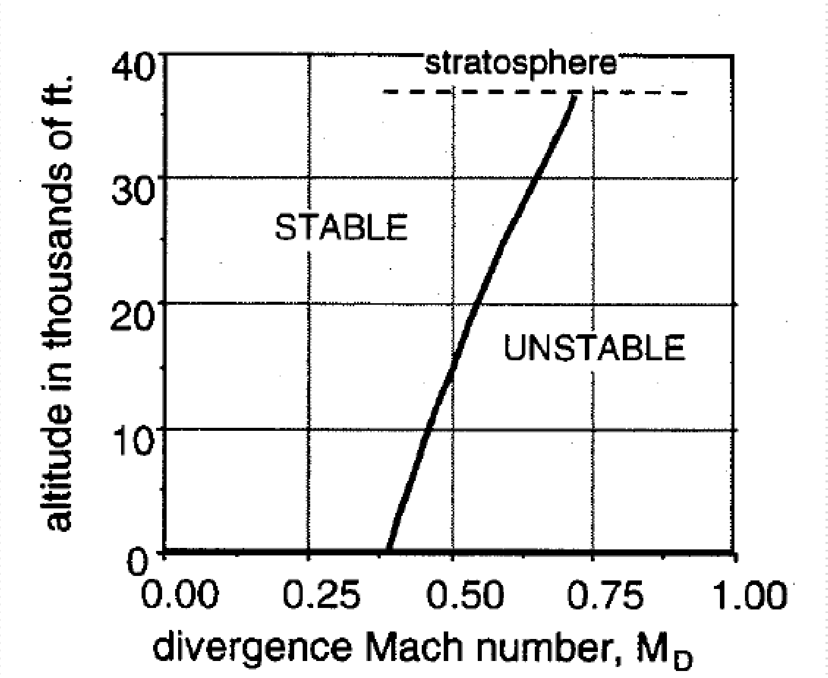
$$q_S = \frac{1}{2}\rho \cdot M^2 a^2$$

respectivamente como função do número de Mach. Este ponto é conhecido como **“Match Point”**



Efeito da Altitude no Mach de divergência

- Do gráfico anterior, observa-se que o número de Mach de divergência aumenta com o aumento da altitude que implica na mudança da velocidade do som. Na figura ao lado pode-se também notar que o M_D aumenta acompanhando a altitude.



Evitando a divergência...

- Analisando a expressão:

$$q_D = \frac{K_\theta}{Se\left(\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\right)}$$

- Se diminuirmos “e”, a pressão dinâmica de divergência aumenta;
- Se aumentarmos a rigidez da $\boldsymbol{K_\theta}$ a pressão dinâmica de divergência aumenta.
- Eventuais restrições no envelope de operação também são uma forma de evitar a divergência

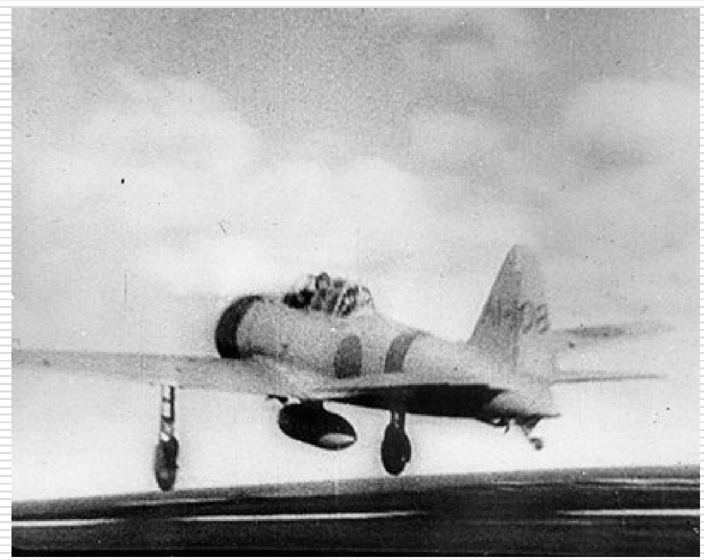
Hipóteses restritivas

- Contexto linear, a pequenas deformações, o que implica em comportamento linear do material e da aerodinâmica;
- Deformações ocorrem em um período de tempo suficientemente grande, podendo-se classificar o fenômeno como quasi-estático.

Sumário

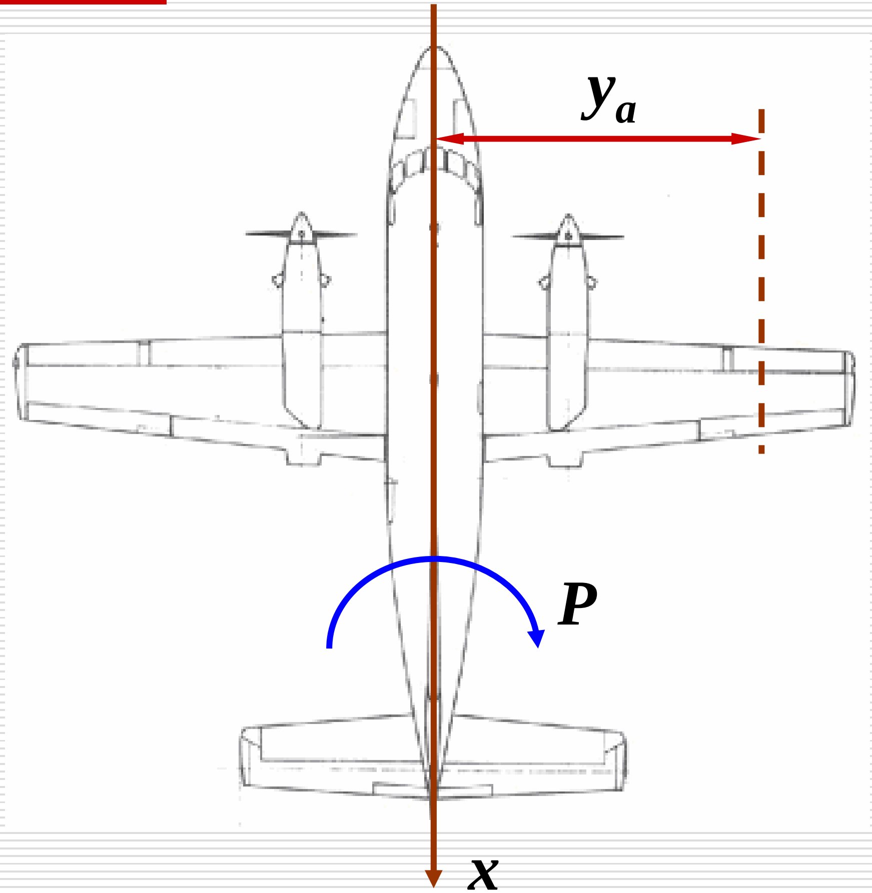
- A divergência aeroelástica é uma instabilidade prevista por uma análise de rigidez estática;
- Próximo da condição de divergência, pequenas deformações em torção (incidência da asa) implicam em grande deformações que podem levar a carregamentos aerodinâmicos ainda maiores – pode-se atingir regimes não lineares quanto ao comportamento aerodinâmico;
- Perto da condição de pressão dinâmica de divergência, o efeito da flexibilidade promove um incremento significativo na sustentação.

Eficiência e Reversão de Comandos



Eficiência e reversão de comandos

Fenômenos que também estão associados à Aeroelasticidade Estática.
Será usado o aileron para exemplificar estes fenômenos. Seu objetivo é criar um momento de rolamento *P*.



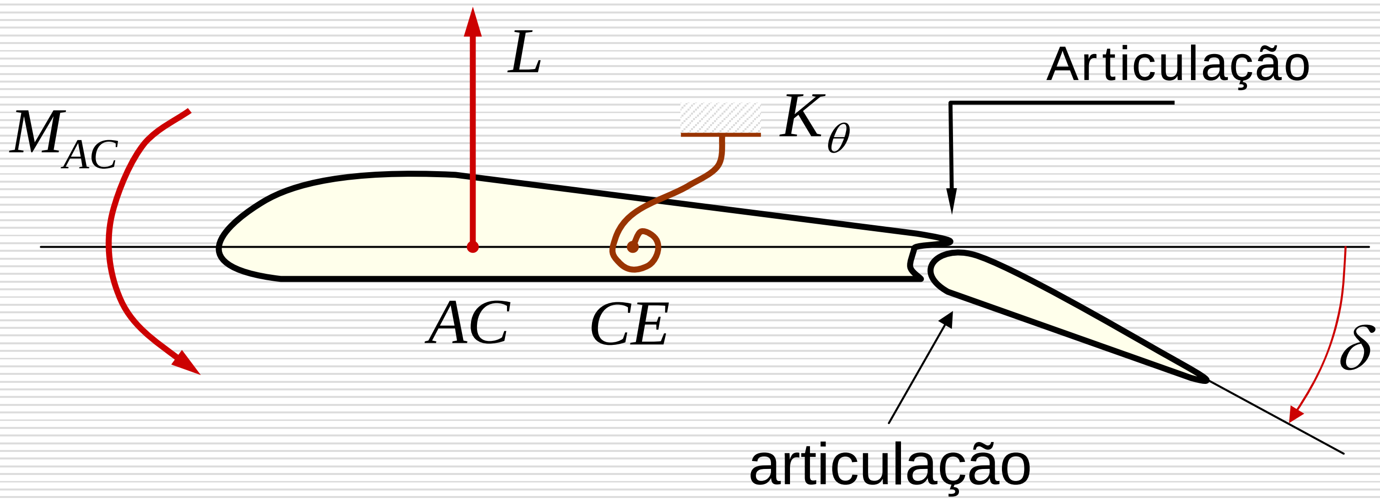
ΔL_a = diferença de sustentação

$$M_x = 2\Delta L_a \cdot y_a$$

Eficiência e reversão de comandos

- Supõem-se que a superfície de comando rotacione fazendo um ângulo δ com a linha da corda da seção;
- Com a deflexão da superfície de comando, a geometria do perfil muda (camber efetivo), então o C_{MAC} também muda;
- Esta variação angular da superfícies de comando gera um momento picador que tende a deformar a asa da aeronave, que é flexível;
- Tal deformação pode ser suficientemente grande de forma que a ação do aileron pode gerar um torque em rolamento em sentido contrário do que o esperado.

Reversão de comandos



sem deflexão

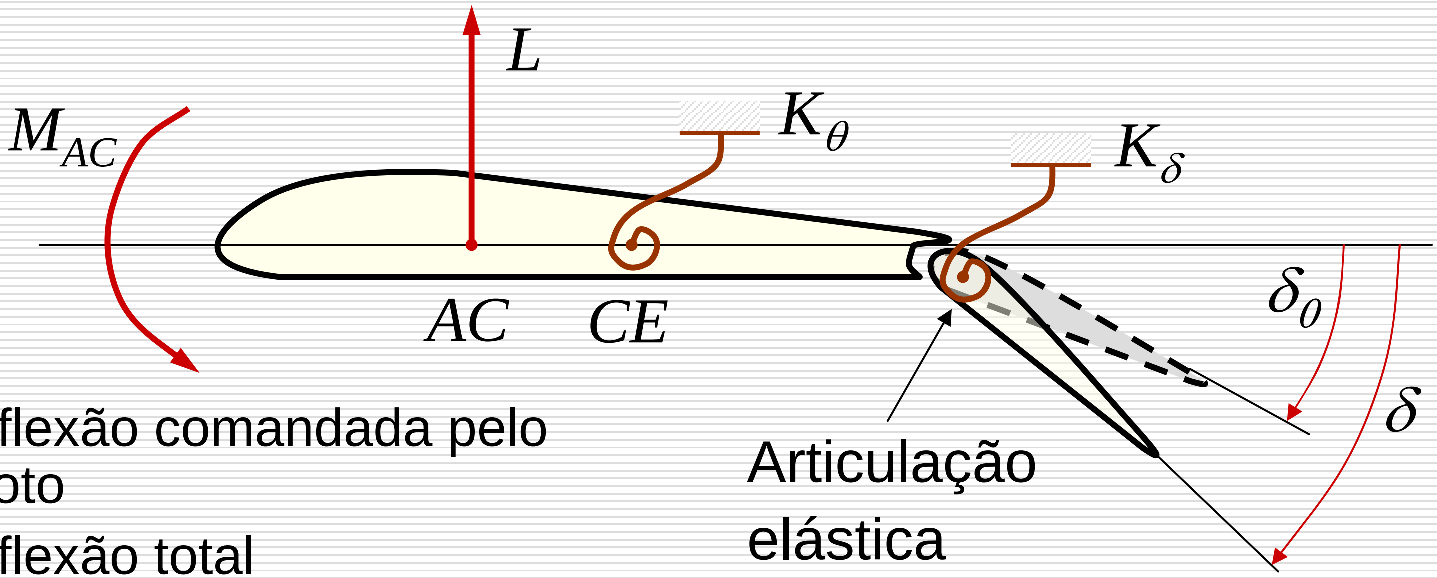
total

coeficiente de momento
da deflexão do aileron

$$C_{M_{AC}} = C_{M_{AC_0}} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta$$

deflexão do aileron

Reversão de comandos



δ_0 deflexão comandada pelo piloto

δ deflexão total

K_δ rigidez da articulação

Devido os esforços aerodinâmicos que tendem a introduzir uma nova deflexão da superfície de comando, a deflexão total é diferente da imposta pelo piloto. A deflexão pode ser maior ou menor que a deflexão inicial.

Reversão de comandos

Então, relativo a seção típica com superfície de controle, tem-se:

$$L = qSC_L \qquad \therefore \qquad L = qS\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0 + \theta) + \frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]$$

$$M_{AC} = qScC_{M_{AC}} \qquad \therefore \qquad M_{AC} = qSc\left(C_{M_{AC_0}} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right)$$

Reversão de comandos

Devido à articulação, o momento aerodinâmico da superfície de controle (H), em relação ao eixo da articulação, é dado por:

$$H = qS_{(H)}c_{(H)}C_{M_{(H)}} \quad \therefore$$

$$H = qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}} + \frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \alpha}\left(\alpha_0 + \theta\right) + \frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \delta}\delta\right]$$

<u>Nota</u>: com δ +, H +

Exemplo: Seção Típica

1) Equilíbrio de momentos em relação ao *CE* da seção:

$$qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\alpha_0+\theta\right)+\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]+qSc\left[C_{M_{AC_0}}+\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\theta\theta$$

2) Equilíbrio de momentos em relação ao eixo de articulação:

$H=K_\delta\left(\delta-\delta_0\right)$, com $(\delta-\delta_0)$ sendo a torção elástica da superfície de controle, em relação ao eixo de articulação.

$$qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}}+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \alpha}\left(\alpha_0+\theta\right)+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\delta\left(\delta-\delta_0\right)$$

Reversão de comandos

O que resulta em um sistema cuja equação matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \delta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \cdot [B]$$

$$a_{11} = e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} - \frac{K_\theta}{qS}, a_{12} = e\frac{\partial C_L}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}$$

$$a_{21} = \frac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}, a_{22} = \frac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta} - \frac{K_\delta}{qS_H c_H}$$

Demonstração do desenvolvimento da matriz

Equilíbrio de momentos em relação ao CE da seção:

$$qSe\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha_0+\theta)+\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta\right]+qSc\left[C_{M_{AC_0}}+\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta\right]=K_\theta\theta$$

$$qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+qSe\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\theta+qSe\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta+qScC_{M_{AC_0}}+qSc\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta=K_\theta\theta$$

$$\left(\cancel{qS}e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}-K_\theta\right)\theta+\cancel{qS}\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \delta}+c\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta=-\cancel{qS}\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right)$$

$$\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}-\frac{K_\theta}{qS}\right)\theta+\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \delta}+c\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta=-\left(e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right)$$

Equilíbrio de momentos em relação ao eixo de articulação

$$qS_{(H)}c_{(H)}\left[C_{M_{0(H)}}+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial\alpha}\left(\alpha_0+\theta\right)+\frac{\partial C_{M_{(H)}}}{\partial\delta}\delta\right]=K_\delta\left(\delta-\delta_0\right)$$

$$qS_Hc_HC_{M_{0H}}+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\theta+qS_Hc_H\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta=K_\delta\delta-K_\delta\delta_0$$

$$\left(\cancel{qS_Hc_H}\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\right)\theta+\left(\cancel{qS_Hc_H}\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta-K_\delta\right)\delta=-\left[\cancel{qS_Hc_H}\left(C_{M_{0H}}+\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0\right)+K_\delta\delta_0\right]$$

$$\left(\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\right)\theta+\left(\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\delta}\delta-\frac{K_\delta}{qS_Hc_H}\right)\delta=-\left[\left(C_{M_{0H}}+\frac{\partial C_{M_H}}{\partial\alpha}\alpha_0\right)+\frac{K_\delta\delta_0}{qS_Hc_H}\right]$$

Montagem da equação matricial

$$\begin{cases} \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}-\dfrac{K_\theta}{qS}\right)\theta+\left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}+c\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right)\delta=-\left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right) \\ \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\right)\theta+\left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta}\delta-\dfrac{K_\delta}{qS_Hc_H}\right)\delta=-\left[\left(C_{M_{0H}}+\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\alpha_0\right)+\dfrac{K_\delta\delta_0}{qS_Hc_H}\right] \end{cases}$$

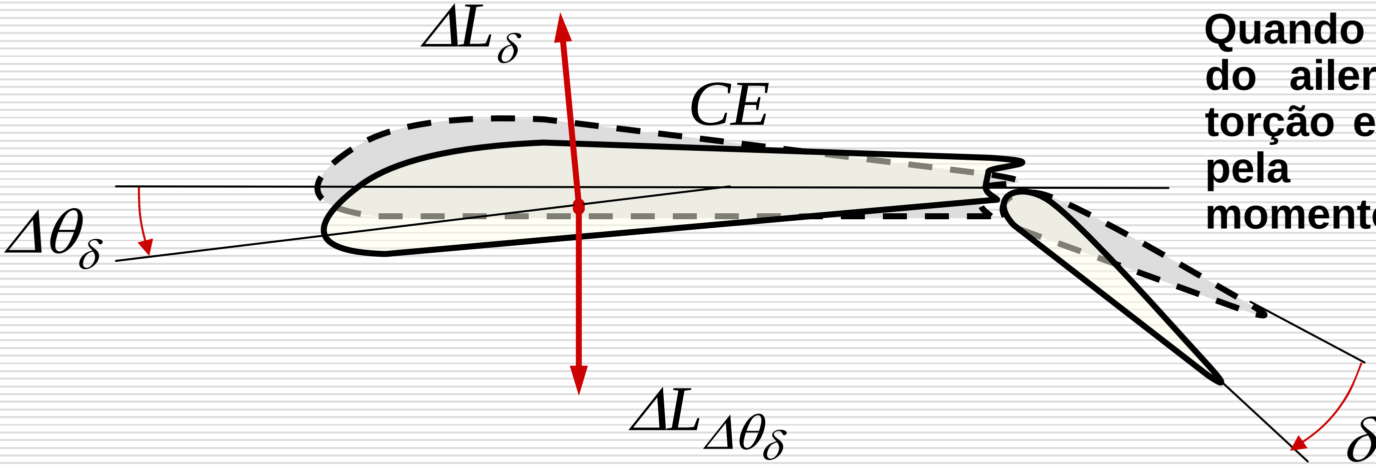
$$\begin{bmatrix} \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}-\dfrac{K_\theta}{qS}\right) & \left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}+\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\right) \\ \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\right) & \left(\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \delta}-\dfrac{K_\delta}{qS_Hc_H}\right) \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\theta\\ \delta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\left(e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\alpha_0+cC_{M_{AC_0}}\right) \\ -\left(C_{M_{0H}}+\dfrac{\partial C_{M_H}}{\partial \alpha}\alpha_0+\dfrac{K_\delta\delta_0}{qS_Hc_H}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\theta\\ \delta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_{11}\\ b_{12}\end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \{A\}\cdot\begin{Bmatrix}\theta\\ \delta\end{Bmatrix}=\{B\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix}\theta\\ \delta\end{Bmatrix}=\{A\}^{-1}\cdot\{B\}$$

Divergência

- A divergência aeroelástica vai ocorrer quando o det[A] = 0, o que é real para um determinado valor da pressão dinâmica, exceto se o CE estiver à frente do AC, caso onde nunca ocorre a divergência aeroelástica.
- Este critério de estabilidade é conhecido como critério de estabilidade de Euler, e será apresentado formalmente quando tratarmos do problemas de asas sujeitas a fenômenos aeroelásticos estáticos.

Reversão de comandos



Quando se tem deflexão do aileron, surge uma torção elástica, causada pela variação do momento aerodinâmico.

$\Delta L_{\Delta\theta_\delta}$ **é devido o momento picador que surge com a deflexão positiva do aileron, tendendo a diminuir a sustentação adicional gerada, ou o momento de cabragem que surge com a deflexão negativa do aileron, tendendo a adicionar sustentação.**

ΔL_δ **sustentação gerada pela deflexão do aileron se a asa fosse rígida.**

$$\Delta L_\delta = qS\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta$$

onde $\partial C_L/\partial\delta$ é a derivada de controle, que depende do perfil e da superfície de controle.

Reversão de comandos

A deflexão do aileron também gera uma mudança no momento aerodinâmico, representado por:

$$\Delta M_{AC_\delta} = qSc \frac{\partial M_{AC}}{\partial \delta} \delta$$

onde $\partial M_{AC}/\partial \delta$ é uma derivada tipicamente negativa.

Voltando à equação de equilíbrio $Le + M_{AC} = K_\theta \theta$.

as variações em L e M_{AC} produzirão uma torção elástica adicional $\Delta\theta_\delta$ resultando em $\Delta L_a e + \Delta M_{AC} = K_\theta \Delta\theta_\delta$

ou seja, saindo de uma condição de equilíbrio para outra condição de equilíbrio, onde:

$$\Delta L_a = \Delta L_\delta + \Delta L_{\Delta\theta_\delta}$$

Reversão de comandos

E escrevendo-se na forma de coeficientes, tem-se:

$$qSc\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}\delta + eqS\left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\Delta\theta_\delta\right) = K_\theta \Delta\theta_\delta$$

A partir desta expressão, obtém-se a mudança na torção elástica correspondente, ou seja, a Torção Elástica Adicional causada pela deflexão do aileron. .

Assumindo-se que δ seja conhecido, a expressão para a Torção Elástica Adicional é dada por:

$$\Delta\theta_\delta = \frac{e\frac{\partial C_L}{\partial \delta} + c\frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\frac{K_\theta}{qS} - e\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\delta$$

Eficiência dos comandos

Com isso, pode-se calcular as mudanças adicionais no carregamento aerodinâmico do perfil devido à deflexão do aileron:

$$\Delta L_a = \Delta L_\delta + \Delta L_{\Delta\theta_\delta} \quad \therefore \quad \Delta L_a = qS\frac{\partial C_L}{\partial \delta}\delta + qS\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}\left(\frac{e\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta} + c\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\dfrac{K_\theta}{qS} - e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\delta\right) \therefore$$

$$\Delta L_a = qS\delta\left(\frac{\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}\dfrac{K_\theta}{qS} + c\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}{\dfrac{K_\theta}{qS} - e\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}}\right)$$

Eficiência dos comandos

devido à deflexão do aileron

$$\Delta L_a = qS\delta \left(\frac{\boxed{\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta} \dfrac{K_\theta}{qS}} + \boxed{c \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha} \dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}}{\dfrac{K_\theta}{qS} - e \dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}} \right)$$

devido à torção na asa, por causa da deflexão do aileron

A uma determinada pressão dinâmica (q) não muito pequena, pode ocorrer do termo no numerador zerar, ou seja $\boldsymbol{\Delta L_a}$ será nulo, o que será um bom critério para adotar a condição de reversão do comando

Limite da reversão

$$0 = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \delta} \frac{K_\theta}{qS} + c \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta} \right) qS\delta =$$

$$= C_{L\delta} K_\theta + c C_{L\alpha} C_{M_{AC}\delta} qS = 0 \qquad \Rightarrow$$

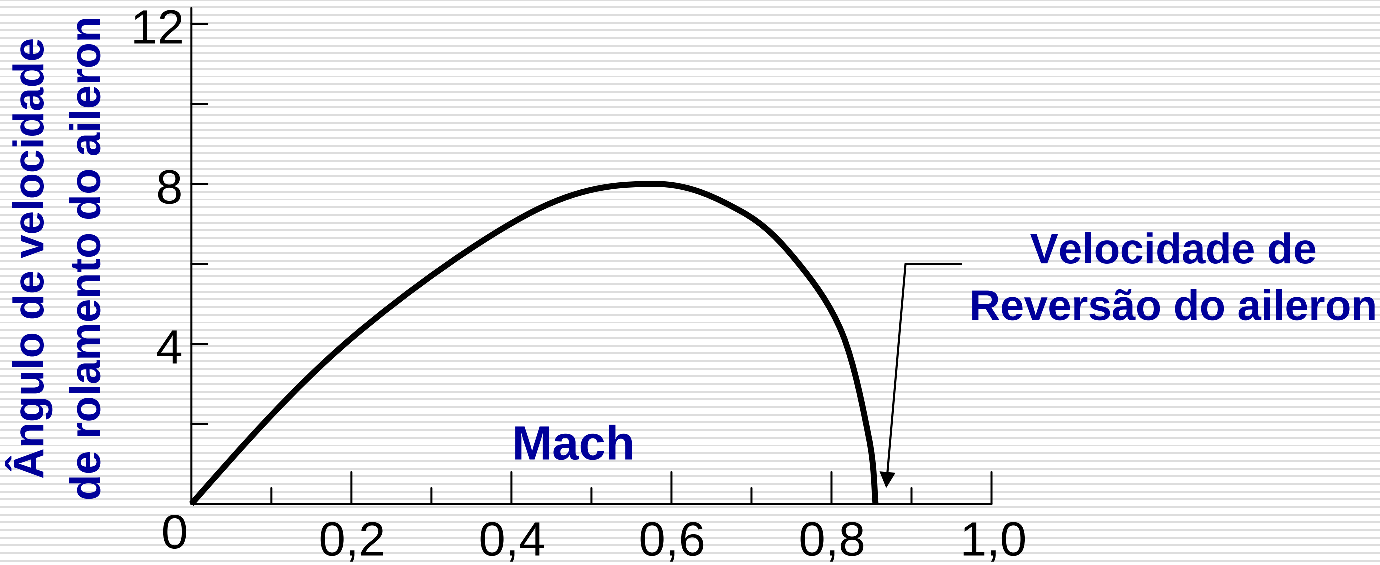
$$q_R = -\frac{C_{L\delta} K_\theta}{S c C_{L\alpha} C_{M_{AC}\delta}}$$

Eficiência dos comandos

Esta pressão é denominada *Pressão Dinâmica de Reversão de Controle* (q_R).

$$\boxed{q_R = -\frac{K_\theta}{Sc}\,\frac{\dfrac{\partial C_L}{\partial \delta}}{\dfrac{\partial C_L}{\partial \alpha}\,\dfrac{\partial C_{M_{AC}}}{\partial \delta}}}$$

Eficiência dos Comandos



Efeito da velocidade na eficiência do aileron