

FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Maurício Pazini Brandão
©1996

Apresentação

Sempre foi nossa intenção possuir um texto em português que servisse de apoio didático adequado a um curso introdutório em Dinâmica de Estruturas. A necessidade de um texto deste tipo foi percebida desde que este autor iniciou seu magistério na área, há mais de dez anos. Este texto deveria ser indicado para alunos avançados de graduação ou alunos iniciantes de pós-graduação em engenharia. Porém, alunos com menor preparação básica também poderiam se beneficiar pela seleção de trechos adequados sob a orientação de um instrutor. O texto deveria abordar aspectos fundamentais da atividade e aprofundar aqueles que tivessem maior utilidade em aplicações de engenharia.

Da verificação dessa necessidade à apresentação daquilo que aqui segue, passou um bom tempo, enquanto idéias eram amadurecidas. Para produzir este texto, o autor fez uso de sua experiência acadêmica e do conhecimento adquirido em envolvimento com colegas dos setores industrial e de desenvolvimento. O texto busca apresentar fundamentos que permitam ao leitor *resolver problemas*. No entanto, este pragmatismo não exclui detalhes e variações sobre os temas abordados, desde que relevantes para a consecução deste objetivo.

No Capítulo 1, à guisa de introdução, apresentamos nossos objetivos a atingir, a seqüência de apresentação do material, indicação de problemas avançados de vibração em engenharia e a bibliografia recomendada para estudo adicional. No Capítulo 2 apresentamos fundamentos de análise, com ferramentas da Mecânica Newtoniana e Lagrangeana que permitem ao analista obter as equações de movimento de sistemas mecânicos.

Uma vez dominada a arte de modelar sistemas e de obter suas equações de movimento, preocupamo-nos com a resolução dessas equações. No Capítulo 3 estudamos as vibrações livres de sistemas de um grau de liberdade do ponto de vista teórico e experimental. No Capítulo 4 estudamos as vibrações desses mesmos sistemas quando excitados por forças harmônicas, periódicas e arbitrárias.

A perfeita compreensão do comportamento de sistemas de um grau de liberdade é fundamental para o domínio da Dinâmica de Estruturas. Completada esta fase, dedicamo-nos no Capítulo 5 ao estudo das vibrações livres e forçadas de sistemas de múltiplos graus de liberdade. Neste estudo aparecem os conceitos básicos de modos e frequências naturais de vibração. O capítulo é completado pela aplicação de métodos de superposição modal largamente empregados na indústria.

Os problemas de vibração estrutural de sistemas contínuos, também chamados de sistemas com propriedades distribuídas, são considerados no Capítulo 6. Ali são discutidos problemas de vibração em tração, compressão, cisalhamento, flexão e torsão de estruturas uni e bidimensionais. O capítulo é completado com a apresentação de métodos de discretização de sistemas contínuos e de seus métodos numéricos associados.

Cada capítulo traz em seu final uma série de exercícios que se destinam a fixar os fundamentos discutidos no texto. Não são fornecidas respostas para alguns desses exercícios. Isto é intencional, de forma a estimular o leitor a realizar uma análise crítica de sua resolução, comparando-a com a de seus colegas (o que estimula também o trabalho em equipe). Alguns

exercícios são extremamente simples, pois envolvem apenas aplicações numéricas imediatas. Outros são mais elaborados, por envolverem aplicações de conceitos. Outros mais não admitem uma única resposta, pois envolvem projeto de sistemas, sendo, portanto, questões abertas. Finalmente, existem ainda perguntas e estímulos à discussão, onde pretende-se que o leitor pratique a arte de redigir, de colocar as suas idéias em termos de um texto claro, sucinto e de leitura agradável.

Nós aproveitamos os exercícios resolvidos para fixar, através de aplicações, os conceitos fundamentais apresentados nos capítulos. Também aproveitamos esses mesmos exercícios para apresentar alguns aspectos novos da teoria, que complementam e ampliam a visão dos assuntos tratados.

Cada capítulo também apresenta a bibliografia que lhe é pertinente ou que lhe completa, o que permite ao leitor aprofundar e considerar variações sobre os conceitos básicos requeridos para dominar a matéria. As referências bibliográficas, na sua maioria livros textos, estão agrupadas em segmentos de mesma área de interesse ou aplicação.

Muitas foram as pessoas, professores, engenheiros e alunos, que contribuíram para que este texto pudesse ser produzido. A elas posso atribuir o que há nele de melhor. Os erros e omissões são de minha única responsabilidade. Agradeceria muito se o(a) nobre leitor(a) pudesse apontar-me estes últimos para a devida correção.

São José dos Campos, março de 1996.

M. P. Brandão

Dedicatória

*À Silmara, Ludmila e Lucas,
por terem completado minha presente experiência de vida!*

Índice

1	Introdução	1
1.1	Definições	1
1.2	Sistemas Dinâmicos	2
1.2.1	Projeto	2
1.2.2	Análise	4
1.2.3	Teste	4
1.3	Objetivos	5
1.4	Seqüência	6
1.5	Estudos Posteriores	6
1.6	Bibliografia	7
1.7	Exercícios	9
2	Fundamentos de Análise	11
2.1	Introdução	11
2.2	Modelo Analítico	11
2.2.1	Considerações Gerais	11
2.2.2	Um Modelo Protótipo	13
2.3	Modelo Matemático	16
2.4	Mecânica Newtoniana	16
2.4.1	Segunda Lei de Newton	16
2.4.2	Princípio de D'Alembert	18
2.5	Mecânica Lagrangeana	19
2.5.1	Considerações Iniciais	19
2.5.2	Princípio dos Deslocamentos Virtuais	21
2.5.3	Princípio da Conservação de Energia	22
2.5.4	Equações de Lagrange	24
2.5.5	Princípio de Hamilton	25
2.6	Importância da Posição de Equilíbrio	27
2.7	Vibrações em Engenharia	29
2.7.1	Efeito do Movimento da Base	30
2.7.2	Esforços Transmitidos à Base	31
2.8	Conclusões	31
2.9	Bibliografia	32
2.10	Exercícios	32

3	Vibrações Livres de Sistemas de Um Grau de Liberdade	39
3.1	Introdução	39
3.2	Vibrações Livres sem Amortecimento	39
3.3	Vibrações Livres com Amortecimento Viscoso	43
3.3.1	Solução Geral	44
3.3.2	Caso Subcrítico	45
3.3.3	Caso Crítico	46
3.3.4	Caso Supercrítico	47
3.3.5	Determinação Experimental do Amortecimento	49
3.4	Vibrações Livres com Atrito Seco	51
3.5	Conclusões	54
3.6	Bibliografia	54
3.7	Exercícios	54
4	Vibrações Forçadas de Sistemas de Um Grau de Liberdade	61
4.1	Introdução	61
4.2	Excitações Harmônicas	61
4.2.1	Considerações Gerais	62
4.2.2	Ressonância Mecânica	63
4.2.3	Resposta em Frequência	63
4.2.4	Transmissão e Controle da Vibração	66
4.3	Excitações Periódicas	69
4.3.1	Análise do Sinal Externo	69
4.3.2	Resposta do Sistema	70
4.4	Excitações Arbitrárias	75
4.4.1	Respostas Fundamentais	75
4.4.2	Técnicas de Convolução	78
4.5	Técnicas Experimentais	82
4.6	Conclusões	84
4.7	Bibliografia	84
4.8	Exercícios	85
5	Vibrações de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade	95
5.1	Introdução	95
5.2	Dedução das Equações de Movimento	95
5.2.1	Segunda Lei de Newton	96
5.2.2	Princípio da Conservação de Energia	98
5.2.3	Equações de Lagrange	99
5.3	Vibrações Livres - Frequências e Modos de Vibração	99
5.4	Vibrações Forçadas - Análise Modal	102
5.5	Métodos Numéricos para o Problema de Auto-Valor	106
5.5.1	Método do Determinante	107
5.5.2	Método Q-R	107
5.6	Conclusões	109
5.7	Bibliografia	109
5.8	Exercícios	110

6	Vibrações de Sistemas Contínuos	129
6.1	Introdução	129
6.2	Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange	129
6.3	Vibrações Axiais e Torcionais de Barras	131
6.3.1	Definição do Problema	131
6.3.2	Dedução da Equação de Movimento	132
6.3.3	Vibração Axial Livre de uma Barra Uniforme	134
6.3.4	Vibração Axial Forçada de uma Barra Uniforme	135
6.3.5	Vibrações Torcionais	136
6.4	Dinâmica de Vigas em Flexão	137
6.4.1	Definição do Problema	137
6.4.2	Vigas de Euler-Bernoulli	138
6.4.3	Vibrações Livres em Flexão de uma Viga Uniforme	141
6.4.4	Vibrações Forçadas de uma Viga Uniforme	142
6.5	Vigas de Timoshenko	143
6.5.1	Aplicação do Princípio de Hamilton	143
6.5.2	Vigas de Propriedades Uniformes	146
6.6	Vibrações de Placas	147
6.6.1	Definição do Problema	148
6.6.2	Aplicação do Princípio de Hamilton	148
6.6.3	Vibrações Livres	151
6.6.4	Vibrações Forçadas	152
6.7	Métodos Numéricos	154
6.7.1	Métodos de Galerkin	154
6.7.2	Métodos de Integração Direta	156
6.8	Conclusões	160
6.9	Bibliografia	160
6.10	Exercícios	162

Lista de Figuras

Capítulo 1

1.1	Algoritmo das atividades relacionadas com a Dinâmica de Sistemas.	3
-----	---	---

Capítulo 2

2.1	Sistema protótipo de um único grau de liberdade.	13
2.2	Comportamento típico de uma mola resistindo a deslocamentos.	14
2.3	Diagrama de corpo livre do oscilador protótipo da Figura 2.1.	17
2.4	Diagrama de corpo livre para aplicação do Princípio de D'Alembert.	19
2.5	Sistema de um grau de liberdade com restrição cinemática.	20
2.6	Trajetórias dinâmicas de um sistema entre duas condições fixas.	26
2.7	Sistema protótipo sob ação de um campo gravitacional.	29
2.8	Sistema protótipo excitado pelo movimento da base.	30
2.9	Dois sistemas equivalentes, com ênfase na questão de rigidez.	33
2.10	Dois sistemas equivalentes, com ênfase na questão de massa.	34
2.11	Sistema de um grau de liberdade em oscilação livre.	35
2.12	Modelo de uma balança.	37
2.13	Modelo de uma controlador de posição.	37

Capítulo 3

3.1	Diagrama de Argand do oscilador harmônico sem amortecimento.	43
3.2	Lugar das raízes do sistema linear amortecido como função de ζ	45
3.3	Efeito da velocidade inicial na resposta de um sistema com amortecimento crítico.	47
3.4	Efeito do fator de amortecimento na resposta livre para mesmas condições iniciais.	49
3.5	Sistema de um grau de liberdade com atrito de Coulomb.	52
3.6	Resposta do sistema de um grau de liberdade com atrito seco.	53
3.7	Modelo de um controlador de posição rotacional.	57
3.8	Um modelo mais sofisticado de controlador de posição rotacional.	60

Capítulo 4

4.1	Fator de amplificação da resposta permanente à excitação harmônica.	64
4.2	Ângulo de fase da resposta permanente à excitação harmônica.	65
4.3	Amplitude da oscilação excitada pelo movimento da base.	67
4.4	Fator de transmissibilidade de vibrações como função de Ω e ζ	68
4.5	Força externa periódica que excita o sistema protótipo.	72
4.6	Resposta do sistema protótipo à excitação periódica da Figura 4.5.	73
4.7	Espectro de frequências da onda quadrada da Figura 4.5.	73

4.8	Espectro de frequências da resposta do sistema apresentada na Figura 4.6.	74
4.9	Resposta do sistema protótipo a um impulso unitário.	76
4.10	Resposta do sistema protótipo a um degrau unitário.	77
4.11	Duas representações de uma força genérica por elementos de impulso.	79
4.12	Perfil da excitação descrita pela equação (4.40).	79
4.13	Resposta do sistema protótipo à excitação da equação (4.40).	82
4.14	Determinação experimental do fator de amortecimento ζ	83
4.15	Um sinal periódico de excitação.	89
4.16	Espectro de frequências da força disposta na Figura 4.15.	91
4.17	Uma excitação periódica representativa de folgas de acionamento.	93
4.18	Uma excitação periódica em forma de onda triangular.	93
4.19	Excitação impulsiva em forma de “rampa”.	94
4.20	Modelo de acionamento de um acelerador na retomada de velocidade.	94

Capítulo 5

5.1	Modelo analítico do sistema protótipo de dois graus de liberdade.	96
5.2	Diagrama de corpos livres do sistema da Figura 5.1.	97
5.3	Modelo analítico simplificado de uma molécula diatômica.	111
5.4	Modelo analítico de um sistema mecânico em batimento.	114
5.5	Resposta do sistema da Figura 5.4 em batimento.	118
5.6	Modelo analítico simplificado de um avião no solo.	119
5.7	Modelo analítico de um pêndulo duplo, com seus graus de liberdade.	122
5.8	Modelo analítico de um sistema com dois graus de liberdade em translação.	123
5.9	Modelo analítico simplificado do Pêndulo de Wilberforce.	124
5.10	Sistema de dois graus de liberdade excitado por um “shaker”.	125
5.11	Modelo analítico de um controlador passivo de velocidade de rotação.	126
5.12	Modelo analítico simplificado de um carrinho equilibrista.	127

Capítulo 6

6.1	Barra de seção transversal variável em sollicitação axial dinâmica.	131
6.2	Viga de propriedades variáveis em sollicitação lateral dinâmica.	137
6.3	Placa quadrada em sollicitação lateral dinâmica.	148
6.4	Barra de propriedades variáveis ao longo de seu comprimento.	163
6.5	Modelo de uma barra em ressonância axial.	166
6.6	Viga apoiada sobre uma fundação elástica.	172
6.7	Uma estrutura em duas situações de carregamento axial.	173

Simbologia

a	comprimento do lado de uma placa quadrada
a_n	n -ésima parte cossenoidal da excitação periódica de um sistema mecânico
\vec{a}	vetor aceleração de um ponto
A	amplitude de uma oscilação ou área da seção transversal de uma barra
A_n	n -ésima parte cossenoidal da resposta de um sistema mecânico à excitação periódica
$\{a_o\}$	vetor de aceleração inicial de um sistema discretizado
b_n	n -ésima parte senoidal da excitação periódica de um sistema mecânico
B_n	n -ésima parte senoidal da resposta de um sistema mecânico à excitação periódica
c	coeficiente de amortecimento viscoso equivalente de um sistema mecânico
C	amplitude de uma resposta dinâmica ou constante de integração
C_i	constante de integração ($i = 1, 2, 3, \dots$)
c_{cr}	coeficiente de amortecimento crítico
$[C]$	matriz de amortecimento do sistema
$[C]$	matriz de amortecimento generalizado do sistema
D	rigidez em flexão de uma placa ou amplitude de uma excitação
\mathcal{D}	função dissipação de Rayleigh de um sistema
$[D]$	matriz dinâmica do sistema
E	módulo de elasticidade de um material (módulo de Young) ou amplitude de uma resposta dinâmica
\mathcal{E}	energia mecânica de um sistema
f	fator de forma da seção transversal de uma viga em cisalhamento
f_d	frequência natural amortecida de um sistema mecânico, medida em Hz
f_n	frequência natural não-amortecida de um sistema mecânico, medida em Hz
f_o	frequência fundamental de uma excitação periódica, medida em Hz
$F(t)$	força externa aplicada ao sistema
$F_a(t)$	força de atrito entre duas superfícies em movimento relativo
$F_c(t)$	força produzida por um amortecedor em reação à velocidade de um sistema
$F_k(t)$	força produzida por uma mola em reação ao deslocamento de um sistema
\vec{F}	vetor de força resultante
$\{\mathcal{F}(t)\}$	vetor de excitação externa do sistema
$\{\mathcal{F}_e\}$	vetor de forças externas estáticas do sistema
$\{\mathcal{F}\}$	vetor de forças generalizadas do sistema
$[F]$	matriz de flexibilidade do sistema, inversa da matriz de rigidez $[K]$
g	coeficiente de amortecimento estrutural ou aceleração da gravidade
G	módulo de elasticidade em cisalhamento de um material
h	espessura de uma placa
\vec{h}	vetor quantidade de movimento angular
$H(t)$	função degrau (função generalizada)

$ H(\Omega) $	fator de amplificação de um sistema mecânico em vibração forçada harmônica de razão de frequências Ω
i	unidade imaginária ou designativo de número ou grau de liberdade
I	momento de inércia de uma seção transversal em flexão
I_p	momento polar de inércia de uma seção transversal em torção
\mathcal{I}	tensor de inércia de um sistema ou componente mecânico
$[I]$	matriz identidade, elemento neutro da multiplicação matricial
J	momento de inércia de área da seção transversal de uma barra em torção
J_m	momento de inércia de massa de uma seção transversal em flexão
k	coeficiente de rigidez de uma mola ou componente elástico de um sistema ou raio de giração de uma seção transversal
K	coeficiente de rigidez de uma mola torcional
$[K]$	matriz de rigidez do sistema
$[\bar{K}]$	matriz de rigidez modificada do método de Newmark
$[\mathcal{K}]$	matriz de rigidez generalizada do sistema
l, L	comprimentos de referência em situação não-deformada
\mathcal{L}	função Lagrangeana ou designativo de transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	transformada inversa de Laplace
m	massa de um sistema mecânico ou massa por unidade de comprimento de uma barra ou número de modos de vibração em uma solução aproximada
M	momento fletor distribuído aplicado a uma viga
\vec{M}	vetor de momento resultante
$[M]$	matriz de massa do sistema
$[\mathcal{M}]$	matriz de massa generalizada do sistema
n	designativo do número de graus de liberdade de um sistema ou da ordem da componente harmônica de um sinal periódico ou do número de modos de vibração adotados em uma solução aproximada
\mathcal{O}	indicativo de ordem de grandeza de um termo matemático
$p(x, t)$	carga axial de uma barra em solicitação dinâmica
$P(x, y, t)$	carga lateral distribuída em uma placa em solicitação dinâmica
\vec{p}	vetor quantidade de movimento de translação
\mathcal{P}	potência instantânea de um sistema
\mathcal{P}_c	potência instantânea dissipada em um amortecedor
$q(x, t)$	carga lateral de uma viga em solicitação dinâmica
q_i	designativo genérico de grau de liberdade
Q_i	força generalizada associada ao grau de liberdade q_i
$\{q\}$	vetor de deslocamentos
$[Q]$	matriz ortogonal do método Q-R de auto-valor
r	raio de um disco ou seção transversal cilíndrica
\mathcal{R}	resíduo do método de Galerkin
\vec{r}	vetor posição de um determinado ponto
$[R]$	matriz triangular superior do método Q-R de auto-valor ou matriz de método de integração
s	argumento da transformada de Laplace ou argumento de integração
S	carga de cisalhamento distribuída aplicada a uma viga
\mathcal{S}	designativo da área de uma estrutura
$[S]$	matriz de método de integração
sinal (\dot{x})	função sinal da velocidade de parte de um sistema mecânico
t	tempo (usualmente uma variável independente)

T_d	período da oscilação natural amortecida de um sistema mecânico, medido em s
T_n	período da oscilação natural não-amortecida de um sistema mecânico, medido em s
T_o	período fundamental de uma excitação periódica
\mathcal{T}	energia cinética de um sistema
$T(x, t)$	torque dinâmico por unidade de comprimento aplicado a uma barra em torção
$ T(\Omega) $	fator de transmissibilidade de um sistema mecânico em vibração forçada harmônica de razão de frequências Ω
$[T]$	matriz do método de integração de Newmark
u	coordenada espacial genérica
$U(x)$	modo de vibração axial de uma barra
$u(x, t)$	deslocamento axial de uma barra em solicitação dinâmica
\mathcal{U}	energia potencial de um sistema
v	módulo do vetor velocidade de um ponto de um sistema ou coordenada espacial genérica
v_o	velocidade inicial de um sistema mecânico de um grau de liberdade
\vec{v}	vetor velocidade de um ponto em relação a um referencial inercial
$\{v_o\}$	vetor de velocidade inicial de um sistema discretizado
$w(x, t)$	grau de liberdade de translação, função do tempo e do espaço
$w(x, y, t)$	deslocamento lateral de uma placa em solicitação dinâmica
$W(x, y)$	modo de vibração lateral de uma placa
x	variável independente espacial
x_e	posição de equilíbrio de um sistema mecânico de um grau de liberdade
$x_h(t)$	parte homogênea da resposta de um sistema mecânico
x_o	deslocamento inicial de um sistema mecânico de um grau de liberdade
$x_p(t)$	parte particular da resposta de um sistema mecânico
x^*	um deslocamento adimensionalizado de referência
$x(t)$	grau de liberdade de translação
$\{x\}$	vetor de deslocamentos do sistema
$\{x_e\}$	vetor de deslocamentos da posição de equilíbrio do sistema
$\{x_o\}$	vetor de deslocamento inicial de um sistema discretizado
$\{\dot{x}\}$	vetor de velocidades do sistema
$\{\ddot{x}\}$	vetor de acelerações do sistema
y	variável independente espacial
$y(x, t)$	deslocamento lateral de uma viga em solicitação dinâmica
$\bar{y}(t)$	grau de liberdade de translação
$Y(x)$	modo de vibração de uma viga em flexão

Letras Gregas

α	ângulo genérico ou número real
$\vec{\alpha}$	vetor aceleração angular de um referencial
β	ângulo de rotação de uma seção transversal de viga em cisalhamento ou parâmetro do método de integração de Newmark ou número real
γ	parâmetro do método de integração de Newmark ou número real
δ	designativo do operador de variação ou de decremento logarítmico
$\delta(t)$	função delta de Dirac (função generalizada)
δ_{ij}	delta de Kronecker dos índices i e j

δq_i	designativo do deslocamento virtual associado ao grau de liberdade q_i
$\delta \mathcal{W}$	designativo de trabalho virtual
Δt	intervalo de tempo (diferenças finitas)
$\{\delta q\}$	vetor de deslocamentos virtuais
ε	um número real
$\{\eta\}$	vetor de deslocamentos ou coordenadas modais do sistema
ϕ	ângulo de fase
$[\Phi]$	matriz modal do sistema, “coleção” ordenada de auto-vetores (modos)
$\theta(t)$	grau de liberdade de rotação, função do tempo
$\theta(x, t)$	deslocamento angular de uma barra em torção dinâmica
λ	designativo de auto-valor
μ	coeficiente de atrito médio (no tempo) entre duas superfícies em movimento relativo ou auto-valor
ν	coeficiente de Poisson
∇	operador gradiente
ψ	ângulo de rotação de uma seção transversal de viga em flexão
ρ	massa específica do material de uma estrutura
ω	freqüência de excitação de um sistema mecânico
ω_d	freqüência natural circular amortecida de um sistema mecânico, medida em rad/s
ω_g	freqüência circular de excitação de uma rajada
ω_n	freqüência natural circular não-amortecida de um sistema mecânico, medida em rad/s
ω_o	freqüência circular fundamental de uma excitação periódica, medida em rad/s
ω_*	uma relação entre freqüências de vibração, válida para o caso supercrítico
$\vec{\omega}$	vetor velocidade angular
Ω	razão entre as freqüências de excitação e natural não-amortecida de um sistema
Ω_o	razão entre a freqüência fundamental de um sinal periódico e a freqüência natural não-amortecida de um sistema
τ	tempo de relaxação de um sistema mecânico, medido em s, ou argumento de integração das integrais de convolução
ζ	fator de amortecimento

Subscritos

a	referente à carga externa aplicada a um sistema mecânico ou indicativo de solução aproximada
b	designativo de base
c	referente ao amortecimento de um sistema mecânico ou indicativo de parte conservativa de uma quantidade física
cr	designativo de condição crítica
d	designativo de sistema em vibração amortecida (do inglês “damped”)
e	referente à condição de equilíbrio estático de um sistema
h	referente à solução homogênea de uma equação diferencial
i	referente a um número, grau de liberdade, ou designativo de inércia
k	referente à rigidez de um sistema mecânico
max	designativo de valor máximo de uma função
n	designativo de sistema em vibração natural não-amortecida ou ordem de harmônico de uma freqüência fundamental

nc	indicativo de parte não-conservativa de uma quantidade física
o	designativo de condição inicial ou de frequência fundamental de um sinal periódico
p	referente à solução particular de uma equação diferencial
r	designativo de uma referência ou de ordem
rms	designativo de média “root mean square”
s	designativo de ordem
sub	designativo de amortecimento subcrítico
sup	designativo de amortecimento supercrítico
t	referente a total ou a esforço transmitido a uma base ou à quantidade física tomada no instante t de um esquema de diferenças finitas
$t-\Delta t$	referente à quantidade física tomada no instante $t - \Delta t$ de um esquema de diferenças finitas
$t+\Delta t$	referente à quantidade física tomada no instante $t + \Delta t$ de um esquema de diferenças finitas
$*$	referente a uma relação de frequências do caso supercrítico

Superscritos

T	designativo de matriz ou vetor transposto
-1	designativo de inversão (matriz ou transformada)
$*$	designativo de deslocamento adimensionalizado
$-$	designativo de média
\cdot	designativo de primeira derivada em relação ao tempo
$\ddot{}$	designativo de segunda derivada em relação ao tempo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definições

O assunto *Dinâmica de Estruturas* comporta um conjunto de atividades bastante amplo na Engenharia. Devido a esta amplitude, devemos, antes de mais nada, definir claramente o contexto de nosso trabalho, o que se pretende fazer nesta seção.

A palavra *estruturas* permite uma série de interpretações. No presente contexto, pretendemos investigar os sistemas mecânicos que servem para resistir de alguma maneira a *cargas*. Por outro lado, a palavra *cargas* também admite muitas interpretações. Aqui, estamos interessados naquilo que possa ser suportado por tais sistemas mecânicos. Podemos, então, afirmar que todas as engenharias encontram-se representadas em nosso interesse, pois todas, sem exceção, têm interface com tais sistemas.

Cargas são entes físicos de caráter vetorial. Possuem, portanto, magnitude, direção, sentido e ponto de aplicação. Durante a maior parte do estudo da Engenharia de Estruturas em nossas escolas, fica-se restrito a problemas onde estruturas são carregadas estaticamente. Neste caso, dizemos que a magnitude, direção, sentido e ponto de aplicação dessas cargas independe do tempo. Neste texto estamos interessados em explorar um quadro mais amplo.

Um carregamento é dito *dinâmico* quando sua magnitude, direção, sentido e/ou ponto de aplicação são funções do tempo. Com esta definição, um carregamento estático passa a ser um caso particular do dinâmico. O leitor poderá facilmente elaborar situações onde uma ou mais dessas características vetoriais do carregamento variam com o tempo. Por exemplo, um avião taxiando ao longo de uma reta com velocidade uniforme sobre uma pista de pouso sem ondulações representa um caso de carregamento estático para o avião, mas de carregamento dinâmico para a pista. Neste caso, a pista “enxerga” um carregamento de magnitude, direção e sentido constantes no tempo, mas o mesmo não acontece com o seu ponto de aplicação.

Um carregamento dinâmico pode ser *determinístico* ou *aleatório*. Um carregamento determinístico tem como descrição uma função temporal que pode ser definida analiticamente. Por outro lado, um carregamento aleatório requer um tratamento estatístico devido à impossibilidade de ser caracterizado plenamente por uma função do tempo. Neste texto tratamos apenas o caso de carregamentos determinísticos.

Uma situação que leva uma estrutura a reagir dinamicamente introduz nela mesma cargas que são função da aceleração e velocidade de seus componentes. Tais cargas podem ser apreciáveis em termos de amplitude e podem, dentro do regime linear, ser superpostas às cargas estáticas. Assim, uma análise estrutural estática pode ser recomendada se e somente se há certeza de que cargas resultantes de acelerações e velocidades são pequenas.

Como engenheiros, estamos interessados em avaliar o efeito de cargas dinâmicas na *estabilidade* e/ou *resposta estrutural*. Por *estabilidade* entendemos a propriedade da estrutura de,

sob ação de cargas, manter essencialmente a geometria definida pela sua condição de equilíbrio estático. Já por *resposta estrutural*, entendemos a evolução no tempo da estrutura após aplicação das cargas. Neste texto enfatizamos a resposta estrutural, por ser de tratamento mais simples, deixando os aspectos ligados à estabilidade para contextos mais específicos.

No trato de um sistema dinâmico qualquer, como uma estrutura, podem ser exercidas atividades de projeto, análise e teste. A Figura 1.1 mostra o relacionamento entre essas atividades, válidas para muitas outras funções em Engenharia. Dentro deste contexto, a ser detalhado mais tarde, podemos finalmente definir *Dinâmica de Estruturas* como sendo a arte de projetar, analisar e/ou testar estruturas para que estas sejam estáveis e tenham respostas desejáveis, dentro de certo critério, quando solicitadas por cargas que mudem com o tempo.

São requisitos para plena compreensão deste texto conhecimentos básicos em *Dinâmica e Mecânica de Sólidos*. Fica também implícita a necessidade de que o leitor possua conhecimentos matemáticos básicos associados a estes dois ramos da Física.

1.2 Sistemas Dinâmicos

A Figura 1.1 mostra o inter-relacionamento entre as diversas atividades ligadas à investigação de sistemas dinâmicos. Tais atividades podem ser classificadas em três grupos básicos: projeto, análise e teste. Neste texto temos ênfase nas tarefas de análise. No entanto, sempre que possível estabelecemos os elos de ligação com atividades de projeto e teste.

1.2.1 Projeto

Projeto é tido como a atividade mais difícil e, em consequência, mais nobre da Engenharia. Esta tarefa requer conhecimentos de síntese e bastante capacidade de integração, características que não estão presentes no perfil de todos os engenheiros.

Um projeto tem início na especificação de requisitos a serem atendidos pelo produto. Esses requisitos são apresentados pelo cliente ou “adivinhados” pelo produtor após uma pesquisa de mercado.

Uma vez de posse dos requisitos, havendo interesse e recursos por parte do produtor, tem início a fase de *concepção*. Aqui é elaborado o “espírito” do projeto. É a fase mais criativa, mais difícil e de maior responsabilidade do projeto. Criativa, por tratar da própria criação de algo inexistente; difícil, por envolver o maior número de variáveis livres, não fixadas, de todo o projeto; e de maior responsabilidade, porque erros cometidos nesta fase poderão propagar-se em cascata, levando todo o projeto à inviabilidade econômica. É também a fase que requer o menor número de engenheiros e projetistas.

Concluída a concepção, verificada a existência de clientes interessados e havendo recursos, pode-se passar para a fase de *anteprojeto*. Aqui a concepção é aprofundada e várias variáveis são congeladas. A equipe envolvida cresce. Ao final, o produto toma forma com detalhes suficientes para convencer autoridades da empresa e agentes financeiros a decidir sobre o futuro do projeto. Caso positivo, começa o *projeto* propriamente dito, quando o produto é detalhado nos seus mínimos pormenores. É quando ocorre o maior importe de capital e esforço humano no desenvolvimento. Ocorre simultaneamente a produção de ferramental de série e de protótipos, acompanhados de maior desembolso financeiro e de esforço de marketing.

Finalmente, verificada a viabilidade econômica do projeto e a colocação de pedidos por clientes, começa a produção seriada. Obviamente, esta descrição é bastante simplificada face ao escopo deste texto. Na realidade existem diversos ciclos de iteração que tentam levar o projeto na direção do ótimo. Nesta fase, testes com protótipos, tarefas de reprojeção e realimentações de operadores são muito importantes para a melhoria da qualidade do produto.

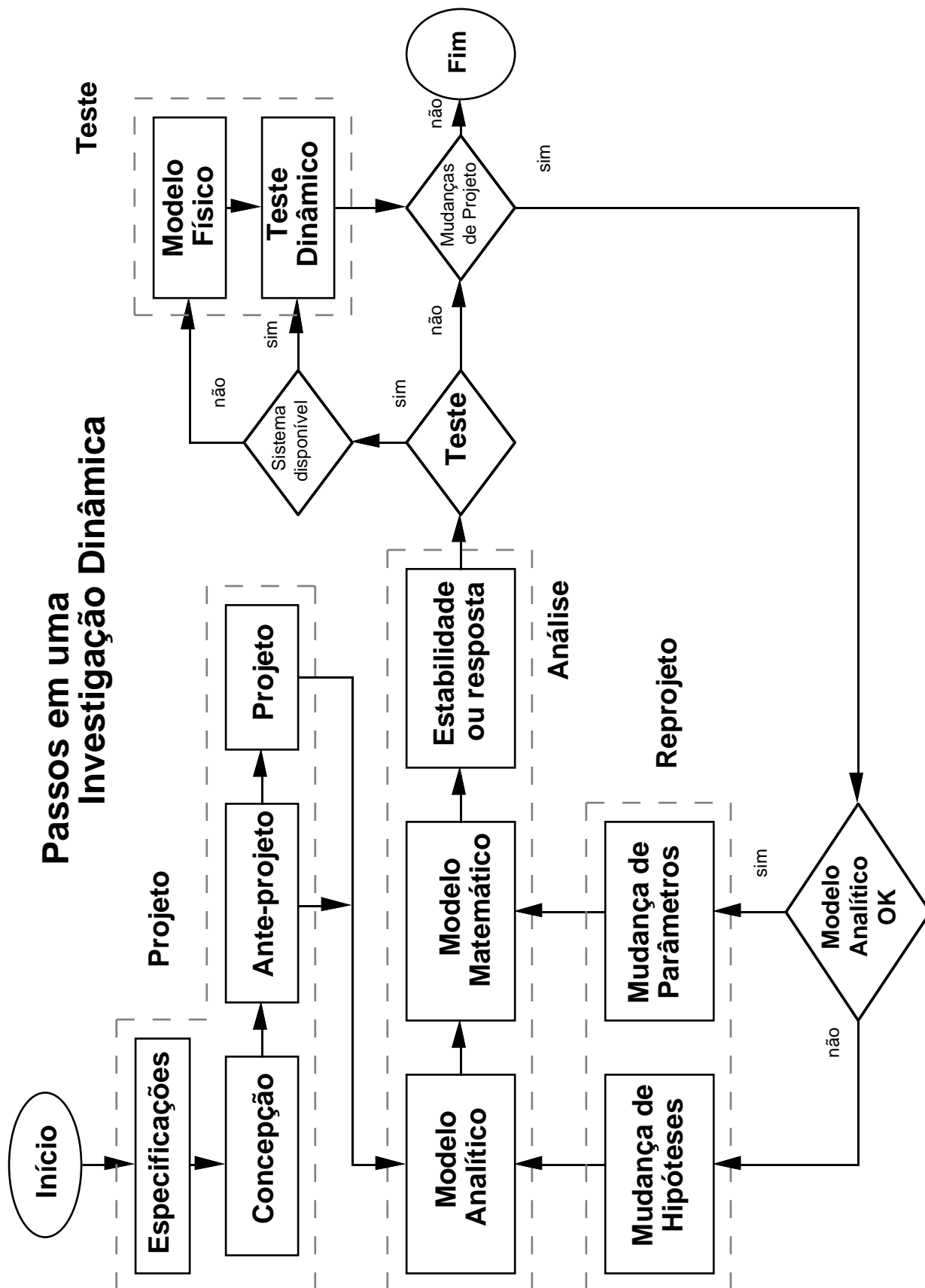


Figura 1.1: Algoritmo das atividades relacionadas com a Dinâmica de Sistemas.

1.2.2 Análise

Vamos admitir agora que um determinado sistema exista em forma física ou em forma de imagem de projeto. Ambos os casos são analisáveis, competindo ao projetista determinar a profundidade com que uma análise deva ser efetuada.

A análise propriamente dita compreende três fases distintas, que são:

1. *Modelamento Analítico* - dado um sistema, esta fase significa adotar um conjunto de hipóteses e simplificações de maneira a permitir a construção de um modelo matemático do mesmo. Em outras palavras, consiste em colecionar hipóteses, desenhos e parâmetros para a redução de um sistema real a um sistema que possa ser analisado. Está claro que quanto mais sofisticado, mais o modelo aproxima-se da realidade física. Entretanto, deve-se pagar o preço de uma análise mais complexa, de maior custo, e que demande maior prazo para ser completada.
2. *Modelamento Matemático* - a partir de um modelamento analítico pode-se, então, gerar as equações de movimento do modelo adotado. Para obtermos essas equações diferenciais de movimento e suas condições associadas (iniciais e/ou de contorno) podemos fazer uso de técnicas da Mecânica Newtoniana, que enfatizam esforços, ou da Mecânica Lagrangeana, que destacam conceitos de energia.
3. *Comportamento Dinâmico* - consiste em, uma vez de posse das equações de movimento e condições acessórias, resolvê-las. Desta forma, podemos determinar as características de estabilidade e/ou de resposta dinâmica do modelo analítico do sistema. Vale ressaltar que os resultados obtidos nesta fase não serão necessariamente verdadeiros, mas sim meras consequências do modelamento analítico adotado.

1.2.3 Teste

A atividade de teste implica a necessidade de se dispor de um modelo físico para ser testado. Este modelo pode ser o próprio sistema ou partes dele, como também pode ser representado por protótipos em escala. Por exemplo, os modelos para ensaio aeroelástico em túnel de vento são escalas geométricas e dinâmicas do sistema real. Escalas geométricas levam em conta somente a forma do objeto de interesse, enquanto escalas dinâmicas consideram também a distribuição de propriedades de massa e de rigidez, de forma que sejam reproduzidas as características intrínsecas do sistema físico no modelo de teste. Portanto, a fase de testes tem início somente quando um projeto já se encontra em estágio bastante avançado.

O teste tem por objetivo coletar dados para serem confrontados com análises teóricas e para servirem de base para processos decisórios relativos ao projeto. Serve, portanto, para validar um modelamento analítico e/ou determinar falhas de projeto. Na validação, talvez possa vir a ser recomendada a troca de parâmetros, hipóteses simplificadoras ou outros detalhes concernentes ao modelo analítico. Caso falhas sejam detectadas, estas devem ser corrigidas da maneira mais apropriada do ponto de vista de engenharia, ou seja, buscando-se um compromisso entre os caminhos do ótimo em termos de qualidade, preço e prazo de mercado do produto.

A atividade de teste de sistemas dinâmicos exige profundo conhecimento de sensores, instrumentos de medição, integração de sistemas de aquisição de dados, processamento e interpretação de resultados e, finalmente, emissão de recomendações para melhoria do produto, com o suporte de simulações computacionais. Esta atividade define uma carreira própria no amplo espectro das atividades de Engenharia, criando interfaces cada vez mais amplas entre as engenharias mecânica, eletrônica e de computação. Terá sucesso nesta carreira quem possuir uma formação interdisciplinar.

1.3 Objetivos

Dentre as atividades discutidas na seção anterior e ligadas à investigação de sistemas dinâmicos e de estruturas é objetivo deste texto enfatizar aquelas relacionadas com a análise. No entanto, sempre que possível, a discussão faz uso de argumentos típicos de projeto, assim como aponta correlações entre teoria e experimento.

Quanto ao modelamento analítico, é nosso objetivo desenvolver metodologias que permitam ao leitor decidir entre uma representação contínua ou discreta de uma estrutura, bem como entre as hipóteses e simplificações mais adequadas a cada caso. Quanto ao modelamento matemático, é nosso objetivo discutir as diversas técnicas que permitam ao leitor, a partir de um modelo analítico, deduzir as equações de movimento correspondentes. Dentre essas técnicas, vamos nos concentrar nas abordagens Lagrangeanas, as quais envolvem conceitos de energia, são mais sistemáticas e menos sujeitas a produzir erros de dedução à medida que os sistemas se tornam mais complexos.

O modelo matemático da dinâmica de uma estrutura discretizada de n graus de liberdade pode ser apresentado de maneira simplificada e didática na forma da seguinte equação:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(\{\ddot{x}\}, \{\dot{x}\}, \{x\}, t)\} \quad (1.1)$$

Nesta equação, os termos do lado esquerdo do sinal de igualdade representam respectivamente as propriedades de inércia, amortecimento e rigidez da estrutura, enquanto o lado direito representa a carga dinâmica a que a estrutura está exposta. Embora pareça simples, a equação (1.1) sintetiza não somente problemas de Dinâmica de Estruturas, como também problemas de Aeroelasticidade, já que a carga $\{F\}$ depende do deslocamento, velocidade e aceleração do sistema. Neste texto vamos tratar casos em que a carga depende apenas do tempo, simplificando a equação (1.1) para

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (1.2)$$

é interessante observar que na equação (1.2) a dependência do sistema com o tempo é representada por efeitos de inércia, amortecimento e excitação externa. Para reduzirmos o problema ao caso estático, necessitamos que

1. velocidades e acelerações aplicadas à estrutura sejam de pequenas magnitudes e
2. a carga externa independa do tempo, i.e., $\{F(t)\}$ seja uma constante $\{F_e\}$.

Caso as condições acima se verifiquem, o problema estático pode ser escrito como

$$[K] \{x_e\} = \{F_e\} \quad (1.3)$$

A equação (1.3) representa o problema estrutural estático que ocupa a maior parte do trabalho e do tempo de engenheiros estruturistas nas indústrias e de currículos de estruturas nas universidades. Neste texto vamos evoluir para o estudo de problemas que possam ser representados pela equação (1.2), que inclui o caso estático como situação particular. Posteriormente, em outro texto, poderemos evoluir ainda mais para o estudo de problemas do tipo representado pela equação (1.1).

Obter o comportamento dinâmico de uma estrutura significa, no presente contexto, resolver um problema do tipo (1.2) sujeito a condições iniciais apropriadas. É nosso objetivo verificar técnicas de solução desses problemas. Uma vez tal solução seja alcançada, podemos então inferir esforços, tensões e nível de solicitação de cada parte da estrutura. Daí podemos concluir sobre a sua estabilidade, resposta, confiabilidade, bem como fornecer subsídios para a avaliação da sua resistência à fadiga.

1.4 Seqüência

Os objetivos que são citados na seção anterior podem ser atingidos de diversas formas. Aqui fazemos breves considerações sobre a seqüência dos tópicos apresentados no texto de forma a cumprir as metas propostas.

O problema fundamental da Dinâmica de Estruturas está centrado na vibração de um sistema de um único grau de liberdade. Portanto, é por onde começamos. Para este tipo de sistema estudamos as vibrações livres não-amortecidas e amortecidas. Seguem-se os problemas de vibrações forçadas por cargas harmônicas, periódicas e arbitrárias, que são cargas determinísticas. Alguma ênfase é colocada na resolução numérica de tais problemas nos domínios do tempo e da freqüência.

Uma vez absorvidos os conceitos básicos ligados ao problema fundamental, passamos a estudar os modelos discretos com dois ou mais graus de liberdade. Voltamos a considerar o problema de vibrações livres, desta vez para introduzir os conceitos de modos e freqüências naturais de vibração. Finalmente, discutimos a resposta dinâmica de tais sistemas a excitações externas pelo método da superposição modal.

A compreensão do comportamento estrutural de sistemas com múltiplos graus de liberdade pode ser estendido ao limite de infinitos graus de liberdade com os problemas de estruturas modeladas como elementos contínuos. Consideramos a dedução das equações de movimento para estruturas idealizadas e técnicas de obtenção de suas freqüências e modos naturais de vibração. Para completar, estudamos a resposta de tais estruturas a vários tipos de cargas dinâmicas.

Sabemos que uma estrutura real pode ser modelada analiticamente como um conjunto de elementos discretos ou contínuos. Sabemos também que cargas dinâmicas determinísticas podem assumir diversas formas, sendo os tipos harmônico, periódico e arbitrário plenamente representativos da maioria das situações encontradas na prática. A proposta deste texto é de apresentar problemas de estruturas submetidas a cargas dinâmicas na seqüência aqui descrita. Com isto pretende-se dar ao leitor elementos básicos para considerar com segurança problemas de Dinâmica de Estruturas encontrados na indústria.

1.5 Estudos Posteriores

Como este texto tem um caráter introdutório, foge ao escopo proposto discutir tópicos mais avançados. No entanto, nada nos impede nesta Introdução de apontar alguns deles com o objetivo de indicar ao leitor como proceder para aumentar o seu conhecimento sobre Dinâmica de Estruturas.

No que se refere a cargas, fica o texto restrito a casos determinísticos. No entanto, cargas aleatórias representam importantes casos em Engenharia. O comportamento não-determinístico da atmosfera atuando sobre um avião, do mar sobre um navio, de uma rodovia sobre um automóvel, ou ainda de um terremoto sobre um edifício, são exemplos dos quais se depreende a importância deste assunto. Para lidar com problemas desse tipo é recomendável uma certa experiência com estatística e processos estocásticos.

Problemas particularmente interessantes de estabilidade e resposta estrutural dinâmica aparecem quando cargas aplicadas a estruturas são produzidas por fluidos escoando internamente ou externamente a elas. Tais problemas definem áreas de conhecimento mais gerais, porém enganosamente percebidas por pessoas não devidamente esclarecidas como sendo mais restritas ou específicas. Dentre essas áreas estão a Aeroelasticidade e Hidroelasticidade. Como já apontado na seção 1.3, fenômenos desta classe podem ser didaticamente representados pela equação 1.1, que não será estudada neste texto por estar além dos objetivos propostos.

O texto não espelha uma preocupação em limitar o escopo, embora enfatize problemas e técnicas essencialmente lineares. Vibrações não-lineares requerem tratamentos matemáticos especiais de caráter geométrico, tipo espaço de fase, ou de caráter analítico, tipo método de perturbação. Problemas não-lineares podem levar a resultados surpreendentes, tais como respostas de sistemas envolvendo bifurcações e caos.

As equações da Dinâmica de Estruturas podem ser resolvidas utilizando-se diversas técnicas analíticas e computacionais. No entanto, à medida que sistemas tornam-se mais complexos, técnicas computacionais tornam-se as únicas opções viáveis para resolução. Dentre essas técnicas, o método de elementos finitos tem sua popularidade contínua e merecidamente ampliada. O uso desta técnica requer conhecimento e treinamento que não são cobertos neste texto.

A aplicação do método de elementos finitos pressupõe em uma de suas fases a discretização do domínio do problema em elementos. Estudos de convergência levam usuários do método a diminuir o tamanho dos elementos ou, mantendo-os, a aumentar o grau das funções de interpolação. Qualquer dessas sistemáticas acarreta um aumento no número de graus de liberdade do problema. Sistemas estruturais complexos, como um avião, navio ou automóvel, requerem, portanto, para avaliação global, a resolução de sistemas de equações de altíssima ordem. Como alternativa, apresenta-se o conceito de subestruturação. A idéia consiste em resolver o problema por partes, que podem ser *a posteriori* integradas utilizando-se técnicas apropriadas. Assim, é possível, no caso do avião, resolver-se separadamente as asas, empenagens e fuselagem, promovendo-se o acoplamento das partes depois de individualmente solucionadas. Obviamente, tal assunto foge aos objetivos apresentados na seção 1.3.

Vale a pena observar que a resolução das equações que descrevem a dinâmica de sistemas estruturais pode requerer métodos numéricos dedicados, além da tradicional técnica de elementos finitos. Dependendo do tipo de problema e de seu modelamento, alguns métodos têm vantagens sobre outros. O leitor encontra neste texto o emprego de alguns deles, tanto para sistemas discretos como para sistemas contínuos. No entanto, está além de nossos objetivos fazer uma revisão completa deste tópico.

Finalmente, não podemos deixar de lembrar todo o conjunto de esforços e conhecimentos relacionados com a parte experimental ligada à Vibração de Sistemas Mecânicos e Aeroelasticidade. O funcionamento e aplicação de sensores, a adaptação de túneis de vento para testes dinâmicos, a integração com sistemas de aquisição e tratamento de sinais, bem como a posterior análise e interpretação de resultados formam um grupo de atividades tão extenso que merece um texto específico. Aqui discutimos apenas alguns detalhes dessas atividades.

Os assuntos relativos a cargas aleatórias e aerodinâmicas, efeitos de não-linearidade, modelamento por subestruturas, emprego do método de elementos finitos, uso de técnicas numéricas dedicadas e verificações experimentais de modelos teóricos representam somente parte dos aspectos avançados que interessam àqueles que trabalham com Dinâmica de Estruturas. Esperamos com estas indicações mostrar ao leitor a amplitude da atividade e a parcela da mesma sobre a qual depositamos a nossa atenção. Por tentar discutir os *fundamentos* da atividade, esperamos fornecer ao leitor as ferramentas necessárias para desenvolver com segurança estudos posteriores.

1.6 Bibliografia

Este texto é o resultado da experiência acumulada pelo autor sobre a Dinâmica de Sistemas, e de Estruturas em particular, como estudante, engenheiro e professor. Embora as palavras aqui colocadas sejam de minha autoria, a grande maioria das idéias é tomada emprestada de diversos outros autores que se interessaram pelo assunto antes de mim e de conhecimento estabelecido há tanto tempo que constitui hoje legado de toda a humanidade. Enquanto as idéias corretas devem ser atribuídas devidamente a seus autores, erros de interpretação das mesmas idéias

são de exclusiva responsabilidade deste autor. Portanto, agradeço a todos aqueles que puderem gentilmente indicar-me as falhas aqui incorridas. Com respeito a isto, faço minhas as palavras do Professor Daniel Antipoff no trabalho *Instituto Tecnológico de Aeronáutica – sua Organização e Problemas Humanos da Comunidade*: “O consolo que se tem, de lançar idéias porventura consideradas erradas, é que a outros se dá uma oportunidade de acertarem”.

O projeto de um grande sistema como um avião, navio ou automóvel envolve, como mostrado na Figura 1.1, atividades de projeto, análise e teste. Diversos conceitos modernos como engenharia simultânea e qualidade total visam reduzir a necessidade de testes, reprojeto, custos envolvidos e prazo para mercado do produto. Para progredir nesta direção, um projeto deve ser executado segundo técnicas integradoras de conhecimento, em que o computador atua como ferramenta fundamental. O que aqui discutimos sobre projeto deve ser reobservado à luz desta afirmação, que considera a multidisciplinariedade requerida para o desenvolvimento de tais sistemas. Em outras palavras, ao estudarmos Dinâmica de Estruturas, devemos compreender o contexto maior em que esta arte se insere, sem o que estaremos apresentando apenas uma perspectiva limitada da atividade.

Apontamos abaixo referências que foram utilizadas algum dia por este autor para aprender algo novo, esclarecer alguma dúvida ou ilustrar alguma questão sobre Projeto, Vibrações em geral, Dinâmica de Estruturas, métodos computacionais, estabilidade e resposta de sistemas dinâmicos e tópicos mais avançados e especializados, como Vibrações Não-lineares, Vibrações Aleatórias e Aeroelasticidade. Esta lista é limitada e incompleta, devendo ser encarada como mera referência. Ela exclui dezenas de outros livros que tratam de Vibrações Mecânicas, que é aqui entendido como um tópico mais restrito. Note que a maioria das referências apontadas são apresentadas na língua inglesa, justificando a necessidade não apenas de traduções para o português, mas de textos modernos e adequados à nossa realidade.

Sobre Vibrações

- INMAN, D. - *Vibration with Control, Measurement and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- MEIROVITCH, L. - *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York, 1967.
- MEIROVITCH, L. - *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- THOMSON, W. T. - *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.

Sobre Dinâmica Estrutural

- BREBBIA, C. A., TOTTENHAM, H., WARBURTON, G. B., WILSON, J. M. E WILSON, R. R. - *Vibrations of Engineering Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- CLOUGH, R. W. E PENZIEN, J. - *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- CRAIG, R. R. JR. - *Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods*, John Wiley, New York, 1981.

Sobre Estabilidade Dinâmica

- BOLOTIN, V. V. - *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- ROCARD, Y. - *Dynamic Instability*, Frederick Ungar, New York, 1957.

Sobre Métodos Computacionais em Dinâmica Estrutural

- BATHE, K. E WILSON, E. L. - *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- MEIROVITCH, L. - *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, Rockville, 1980.
- PRZEMIENIECKI, J. S. - *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover, Mineola, 1985.

Sobre Vibrações Não-Lineares e Aleatórias

- DINCA, F. E TEODOSIU, C. - *Nonlinear and Random Vibrations*, Academic Press, New York, 1973.
- NEWLAND, D. E. - *Random Vibration and Spectral Analysis*, Longman, New York, 1984.

Sobre Aeroelasticidade

- BISPLINGHOFF, R. L., ASHLEY, H. E HALFMAN, R. L. - *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Reading, 1955.
- DOWELL, E. H., CURTISS, H. C., SCANLAN, R. H. E SISTO, F. - *A Modern Course in Aeroelasticity*, Sijthoff & Noordhoff, Rockville, 1978.

Sobre Manufatura Integrada por Computador

- BEDWORTH, D. D., HENDERSON, M. R. E WOLFE, P. M. - *Computer Integrated Design and Manufacturing*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- ALMEIDA, S. F. M., BRANDÃO, M. P. E GERENCER, R. - *A Filosofia CIM e a Tecnologia da Mobilidade*, SAE Technical Paper Series nº 931654P, II Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade, São Paulo, Outubro de 1993.

1.7 Exercícios

Como este capítulo é fortemente conceitual, apresentamos aqui como desafio para o leitor algumas perguntas ou propostas para reflexão e dissertação.

1. Defina o que você entende por *carregamento dinâmico* no contexto de Dinâmica de Estruturas. Forneça exemplos que ilustrem a sua definição.
2. O que significa uma carga ser *determinística*? Idem, *aleatória*? Que alternativas são disponíveis para resolver problemas que envolvam tais cargas?
3. Descreva com suas próprias palavras o conceito de Dinâmica Estrutural.
4. Tente comparar as áreas de Vibrações Mecânicas e Dinâmica Estrutural.
5. Quais são as fases clássicas do projeto de um grande sistema? O que separa cada uma dessas fases?
6. Reflita sobre a evolução dos custos e da responsabilidade dos projetistas ao longo do desenvolvimento de um grande projeto.

7. Quais são as etapas fundamentais do processo de análise? Qual é a importância do modelamento analítico neste contexto?
8. Estabeleça distinções entre os conceitos de estabilidade estática e estabilidade dinâmica de um sistema. Que problema matemático é usualmente associado a um problema físico de estabilidade?
9. O que você entende por um problema de resposta estrutural? Qual é a variável independente utilizada neste tipo de problema?
10. Que preparação e/ou conhecimentos deve possuir o engenheiro encarregado de realizar testes em sistemas ou partes de sistemas?
11. Qual é o procedimento lógico adotado no tratamento dos problemas de Dinâmica de Estruturas? Descreva o relacionamento entre as atividades de projeto, análise e teste.
12. Que condições necessitam ser satisfeitas para que possa ser considerado seguro o projeto de um sistema utilizando apenas critérios de estática?
13. O que significa Manufatura Integrada por Computador – em inglês CIM (Computer Integrated Manufacturing)?

Capítulo 2

Fundamentos de Análise

2.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos conceitos básicos relativos à análise de sistemas estruturais solicitados dinamicamente. Começamos por discutir um pouco mais profundamente o que chamamos de *modelamento analítico*. A seguir, apresentamos idéias relativas ao *modelamento matemático* dessas estruturas. Discutimos tanto métodos ligados à *Mecânica Newtoniana* quanto à *Mecânica Lagrangeana*. Nesta discussão, fazemos uso de um sistema protótipo de um grau de liberdade em todos os casos, de forma a deixar clara a diferença existente entre as diversas metodologias. Segue-se uma apreciação da importância no contexto de vibrações da posição de equilíbrio do sistema. Em particular, analisamos o efeito da aceleração da gravidade nas equações de movimento. Finalmente, discutimos dois problemas de grande importância na engenharia de vibrações: primeiro, o do movimento de sistemas que estão conectados a bases móveis (e.g., terremotos) e segundo, o das forças transmitidas por sistemas em oscilação a bases rígidas às quais estes estão ligados.

Com esses tópicos cobrimos aspectos fundamentais da análise da *Dinâmica de Estruturas*, com exceção do comportamento dinâmico propriamente dito, o qual deixamos para discutir nos capítulos seguintes.

2.2 Modelo Analítico

2.2.1 Considerações Gerais

Quando fazemos o desenho de uma estrutura em um quadro negro, em um papel, ou mesmo na tela de um monitor de sistema CAD, estamos implicitamente executando uma parte fundamental do modelamento analítico da estrutura. Esta tarefa fica completada com a adição de hipóteses simplificadoras, com a definição de propriedades de inércia, amortecimento e rigidez, bem como com a determinação do tipo de carregamento aplicado à estrutura.

Esta fase da análise, por ser a primeira, é de grande importância, porque determina todo o procedimento a ser seguido em fases posteriores. Em consequência, é a fase que mais impõe dúvidas ao analista. Uma asa de avião, por exemplo, do ponto de vista estrutural é um complicado conjunto de longarinas, nervuras, reforçadores, chapas de revestimento, parafusos, juntas e rebites, preenchido em parte por uma massa móvel e variável de combustível, completado por condutos e sistemas hidráulicos, cablagens elétricas, sistemas de aquecimento, superfícies de controle móveis, sensores, atuadores, trens de pouso e grupos moto-propulsores, submetido a um ambiente aerodinâmico tridimensional, não-linear, viscoso, turbulento, compressível e não-estacionário. Como modelar esta complexa realidade?

Temos que ter sempre em mente que o modelamento analítico adotado deve prioritariamente permitir que a análise possa prosseguir em fases posteriores. Um modelo sofisticado e, portanto, mais real, pode requerer recursos analíticos indisponíveis e implicar custos para os quais não estamos preparados. Por isso, o nível de sofisticação do modelo deve ser devidamente ponderado pelo analista.

Estruturas podem ser modeladas como sistemas unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. Embora o mundo real comporte três dimensões, podemos idealizar uma estrutura esquecendo uma ou mais de suas características espaciais. Por exemplo, vigas são fortes candidatas a serem modeladas como estruturas unidimensionais se uma de suas dimensões for bem maior que as demais. Isto pode ser verdade para uma asa de grande alongamento, mas certamente não o é para uma asa em delta. Da mesma maneira, chapas podem ser representadas como estruturas bidimensionais se tiverem espessura pequena face à largura e ao comprimento. Finalmente, cascas devem ser consideradas como estruturas tridimensionais se envolverem curvaturas que não permitam um modelamento simplificado.

Vamos supor que estejamos interessados em investigar o comportamento de uma asa em flexão como consequência da aplicação da força que sustenta a aeronave em vôo. Se o prazo disponível para análise for pequeno, podemos representar a asa por uma linha flexível $w(x, t)$, sem massa, ao longo da qual estão concentrados n grupos mássicos que substituem, por exemplo, trem de pouso, grupo moto-propulsor, combustível, superfícies móveis, sistemas e a própria estrutura da asa. Esta linha normalmente coincide com o eixo elástico da asa. Este modelo é chamado *unidimensional* porque utiliza uma única variável espacial x para descrever o deslocamento w da asa. O modelo é também denominado *discreto* por concentrar a massa distribuída do conjunto em pontos discretos ao longo do eixo, fazendo-nos buscar a solução para n variáveis $w_i(x_i, t)$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como a posição das n massas concentradas é definida *a priori*, o problema deixa de depender da variável espacial x . Um problema dinâmico, entretanto, pressupõe uma dependência temporal. Assim, modelos unidimensionais discretos produzem n equações diferenciais ordinárias para representar o movimento das n massas.

Podemos associar, no exemplo acima, um grau de liberdade a cada uma das massas concentradas. Em consequência, quanto maior for o nível de discretização das massas, tanto maior será o número de equações de movimento. Se estendermos a discretização até o limite teórico de infinitos graus de liberdade, obtemos uma viga contínua, com propriedades distribuídas. Neste caso, os deslocamentos em flexão da estrutura passam a ser função não somente do tempo, mas também da variável espacial x . O resultado deste processo de limite é que as infinitas equações de movimento da estrutura coalescem em uma única equação diferencial parcial.

Se estivermos interessados na flexão $w(x, t)$ e torção $\theta(x, t)$ da asa, o problema torna-se mais complexo. Neste caso, para um modelamento discreto o número de graus de liberdade dobra, isto é, para n grupos mássicos teremos $2n$ equações diferenciais ordinárias. Por outro lado, se as propriedades de inércia e rigidez da asa forem consideradas distribuídas ao longo do eixo elástico, teremos duas equações diferenciais parciais a duas variáveis independentes: x e t .

Eventualmente necessitamos analisar uma asa de baixo alongamento ou, talvez, o prazo disponível para análise seja mais amplo. Ambos os casos recomendam a adoção de um modelo analítico bidimensional para a asa. Assim, tanto flexão w como torção θ passam a ser funções das variáveis espaciais x e y e do tempo t . Apesar de bidimensional, um modelamento de propriedades discretizadas em posições predefinidas continua levando a um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Já um modelamento de propriedades distribuídas produz equações diferenciais parciais, mas desta vez a três variáveis independentes: x , y e t .

Asas de baixo alongamento e bastante espessas recomendam por sua própria natureza modelamento como estruturas tridimensionais. O mesmo pode acontecer a uma asa fina e de grande alongamento, como a de um planador, se houver prazo suficiente para análise. Modelos do tipo

viga-casca, ou o chamado “caixão estrutural da asa”, têm sido comumente adotados. Hipóteses do tipo Euler-Bernoulli, Timoshenko, com ou sem retorcão, têm sido utilizadas no desenvolvimento das equações de movimento. De novo, as propriedades da asa podem estar concentradas em pontos pré-definidos ou distribuídas, levando respectivamente a equações diferenciais ordinárias ou parciais. Em ambos os casos, o número de graus de liberdade do modelo cresce à proporção do nível de sofisticação das hipóteses adotadas.

Condições de contorno também devem ser modeladas com critério, particularmente se a estrutura sendo analisada é uma subestrutura de um conjunto maior. Cabe ao analista decidir se um contorno é livre, simplesmente apoiado ou engastado com relação a um determinado grau de liberdade. Pode ser que condições de contorno mistas tenham de ser adotadas em determinados problemas, particularmente no caso de estruturas automobilísticas e aeroespaciais.

Não é nosso objetivo nesta fase do texto discutir técnicas de modelamento analítico com profundidade. Tais técnicas precisam ser exercitadas para um aprendizado efetivo. Tomamos aqui o exemplo de uma asa de avião para ilustrar os aspectos a serem abordados. Temos certeza que o leitor saberá estender a aplicação desses aspectos, quando necessário, a outros sistemas estruturais.

Assim, limitamo-nos a resumir o assunto observando que estruturas podem ser representadas como sistemas uni, bi ou tridimensionais. Em qualquer desses casos, propriedades mássicas e estruturais podem ser concentradas em pontos definidos a priori ou distribuídas ao longo do domínio considerado. No caso de sistemas discretos, obtemos para descrever o movimento de cada ponto considerado uma ou mais equações diferenciais ordinárias, enquanto que para sistemas distribuídos a mesma função é descrita por equações diferenciais parciais. Finalmente, em ambos os casos, o número de graus de liberdade e a dificuldade de solução crescem à proporção do nível de discretização e sofisticação do modelo.

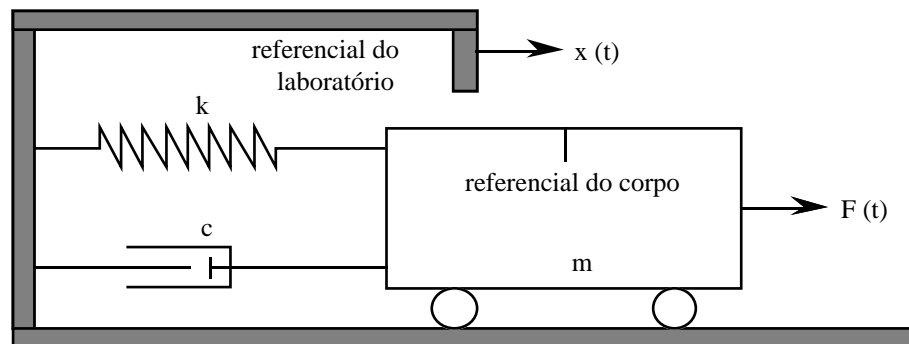


Figura 2.1: Sistema protótipo de um único grau de liberdade.

2.2.2 Um Modelo Protótipo

A Figura 2.1 mostra o modelo analítico de um sistema mecânico simples que possui características de inércia, amortecimento, rigidez e carregamento externo. A inércia do sistema é representada por um carro de massa m que rola sem qualquer perda de energia sobre um plano horizontal. A rigidez do sistema é associada a uma mola linear de coeficiente de rigidez k , sem massa, que opera também de maneira ideal, isto é, sem perdas energéticas. Todas essas perdas e outras mais que possam existir podem ser associadas à atuação de um amortecedor do tipo viscoso e comportamento linear, de coeficiente c . O sistema é ligado a uma base fixa pela mola e amortecedor e desloca-se uma distância $x(t)$ de uma posição de referência a que denominamos *posição de equilíbrio*. O sistema é movimentado por uma força externa $F(t)$ aplicada à massa.

Este sistema é o protótipo que utilizaremos para discutir técnicas de obtenção de equações de movimento, de forma a permitir uma comparação entre as características e os resultados dessas técnicas.

O carro do sistema mostrado na Figura 2.1 possui a capacidade de deslocar-se apenas ao longo da direção horizontal. Se conhecermos a posição do referencial do carro a todo instante, saberemos determinar o que ocorre com os demais componentes do sistema. Portanto, o sistema possui uma única incógnita ou grau de liberdade. O deslocamento $x(t)$ é definido a partir da coincidência dos referenciais do corpo e do laboratório, quando não há qualquer solicitação da mola, quer seja em tração, quer seja em compressão. Esta coincidência de referenciais e inexistência de força na mola caracteriza a situação de equilíbrio.

A Figura 2.2 mostra o comportamento típico da força $F_k(t)$ aplicada ao carro pela mola em resistência ao deslocamento $x(t)$. Está implícito nesta figura que na posição de equilíbrio não há força resistindo ao movimento, o que significa que $x(t)$ é medido à partir da posição não-deformada da mola. Note que, dentro de certos limites, a força varia linearmente com o deslocamento, esteja ele provocando tração ou compressão na mola. No entanto, se os deslocamentos forem grandes, o comportamento da mola passa a ser não-linear, podendo exibir dois tipos de características:

1. *Mola mole* - o material da mola, com grandes tensões, escoa, e produz maiores taxas de deslocamento com menores taxas de carga.
2. *Mola dura* - o material da mola, com grandes tensões, encrua, e produz menores taxas de deslocamento com maiores taxas de carga.

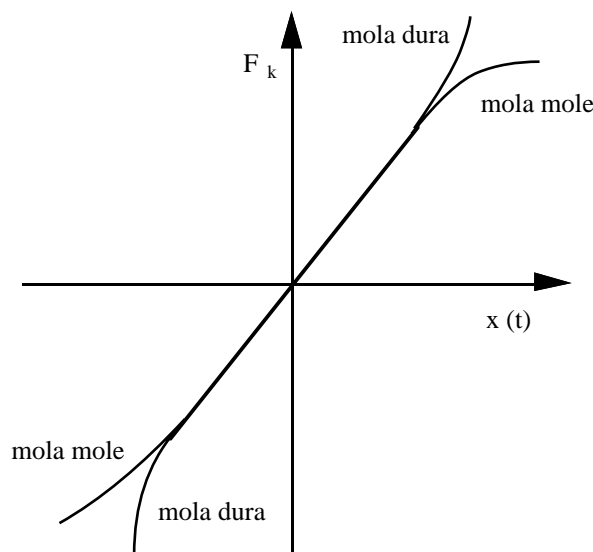


Figura 2.2: Comportamento típico de uma mola resistindo a deslocamentos.

Embora seja interessante o conhecimento dessas possibilidades, neste texto ficaremos restritos a deslocamentos dentro do limite de comportamento linear de rigidez das estruturas. Desta forma, essa constante de rigidez pode ser determinada experimentalmente através de testes e da relação

$$k = \frac{dF_k}{dx}$$

o que, no regime linear, fornece

$$F_k(t) = k x(t) \quad (2.1)$$

Já com respeito a amortecimento, nosso conhecimento ainda é muito incipiente para modelá-lo adequadamente. Na realidade, necessitamos de um modelo físico capaz de descrever as perdas energéticas verificadas em Dinâmica de Estruturas. Essas perdas acontecem devido principalmente às mútuas interferências entre estruturas e o ar que as circunda, bem como entre os constituintes em escala microscópica da própria estrutura. Além disso, muitas vezes podemos ter que dotar o sistema estrutural de um amortecedor físico, como em suspensões de automóveis e trens de pouso de aviões.

O chamado *amortecimento estrutural* é um modelo de perda energética proporcional ao deslocamento sofrido pela estrutura, porém em fase com a velocidade desse deslocamento. Ele descreve perdas que ocorrem no interior de uma estrutura em vibração devido basicamente a mecanismos de atrito entre os constituintes primários da estrutura, como cristais e inclusões, no caso de metais, ou fibras e resina, no caso de materiais conjugados. Esse efeito pode ser matematicamente descrito por uma força de resistência ao movimento dada por

$$F_c(t) = i g \dot{x}(t)$$

onde g é uma constante a ser determinada experimentalmente e $i = \sqrt{-1}$.

Já o chamado *amortecimento viscoso* é um modelo de perda proporcional e em fase com a velocidade que anima uma estrutura. Ele representa bem o desempenho de amortecedores físicos que envolvem o escoamento forçado de fluidos através de orifícios. Neste caso, a força de resistência é dada pelo produto da velocidade por uma constante

$$F_c(t) = \beta \dot{x}(t)$$

Finalmente, a interação entre a estrutura em movimento e fluidos exteriores pode acarretar um modelo em que perdas energéticas sejam proporcionais em parte à aceleração do sistema e em parte ao seu deslocamento, isto é

$$F_c(t) = \alpha \ddot{x}(t) + \gamma x(t)$$

Se juntarmos essas informações, poderíamos modelar uma força fictícia que levaria a perdas energéticas em uma estrutura do tipo

$$F_c(t) = \alpha \ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) + \gamma x(t) \quad (2.2)$$

onde os parâmetros α , β e γ poderiam ser determinados experimentalmente para cada sistema. Isto, porém, é muito complicado do ponto de vista de engenharia, pelo menos nas fases de projeto e análise preliminar. Para contornar essa dificuldade, costuma-se adotar o conceito de *amortecimento viscoso equivalente*, o qual pressupõe a redução da força dissipativa dada em (2.2) para simplesmente

$$F_c(t) = c \dot{x}(t) \quad (2.3)$$

onde c é chamado coeficiente de amortecimento, um parâmetro determinado experimentalmente, quando possível, ou estimado pelo analista em face da experiência industrial. Note que o valor desse parâmetro deve ser tal a substituir *em média* os efeitos descritos pelo modelo matemático (2.2).

Tendo modelado o comportamento da mola e do amortecedor, resta-nos dizer algo a respeito do carro e da força externa aplicada. Toda a massa do sistema é suposta estar concentrada no centro de massa do carro. Portanto, o leitor pode considerar que estamos tentando descrever o movimento de um único ponto. Já a força externa é prescrita e aplicada neste ponto. Fazemos a hipótese adicional de que esta força não se altera com o comportamento do sistema, o que é difícil de se conseguir na realidade.

Este foi o esforço utilizado aqui para exemplificar o modelamento analítico de um sistema mecânico simples de um grau de liberdade. Esperamos com esta discussão fornecer ao leitor elementos suficientes para que este tenha um panorama da tarefa de modelagem analítica que lhe competirá ao trabalhar com *Dinâmica de Estruturas*, quando certamente será solicitado a analisar sistemas muito mais complexos.

2.3 Modelo Matemático

Após adotado um modelo analítico para uma estrutura, o problema de análise consiste em obter as equações que descrevem o movimento da mesma. Portanto, o analista deve ser capaz de transformar desenhos, esquemas e hipóteses em equações matemáticas. Diversas técnicas existem para cumprir esta tarefa. Didaticamente, essas técnicas dividem-se em duas abordagens básicas, a saber:

1. *Abordagem Newtoniana* - utiliza um linguajar baseado em grandezas vetoriais, como podemos observar na Segunda Lei de Newton e no Princípio de D'Alembert. Trata-se de uma abordagem mais tradicional, sendo recomendada apenas para problemas de geometria simples.
2. *Abordagem Lagrangeana* - utiliza conceitos escalares do tipo energia, como verificamos no Princípio dos Deslocamentos Virtuais, Princípio da Conservação de Energia, Equações de Lagrange e Princípio de Hamilton. Trata-se de uma abordagem mais geral, sistemática e poderosa. Em consequência, representa o caminho a ser trilhado para atender aos requisitos de análise das complexas estruturas modernas.

Nas duas próximas seções pretendemos enunciar brevemente a teoria básica de cada uma dessas técnicas e demonstrar a aplicação delas ao modelo analítico protótipo apresentado na seção anterior. Após esta discussão, colocamos ênfase nas Equações de Lagrange e Princípio de Hamilton, por representarem ferramentas de análise de caráter mais geral.

2.4 Mecânica Newtoniana

Vamos considerar aqui a teoria e a aplicação da Segunda Lei de Newton e do Princípio de D'Alembert na análise de sistemas mecânicos em solicitação dinâmica.

2.4.1 Segunda Lei de Newton

A lei fundamental de movimento de Newton, em tratando de translações, pode ser colocada na seguinte forma:

Vista de um referencial inercial, a resultante das forças aplicadas ao centro de massa de um sistema é igual à variação temporal da quantidade de movimento linear do mesmo.

Este enunciado é adequado para os sistemas estruturais que são objeto de nosso estudo. Matematicamente, isto pode ser escrito como

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) \quad (2.4)$$

A quantidade de movimento linear do sistema é dada por

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

onde m é a massa do sistema e \vec{v} é o vetor velocidade do seu centro de massa em relação a um referencial inercial. Como estamos preocupados, a princípio, com sistemas de massa constante, podemos reescrever a lei (2.4) na forma familiar

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (2.5)$$

onde \vec{a} é a aceleração do centro de massa do sistema. Esta lei, com suas formidáveis consequências, foi publicada em 1687 em *Principia*, possuindo, portanto, mais de três séculos de existência.

Note que a lei (2.4) utiliza um linguajar vetorial e representa na verdade três equações escalares. Analogamente, podemos obter outras três equações escalares que tratam do movimento de rotação de uma estrutura em torno de eixos ortogonais definidos com origem em um ponto da estrutura. Podemos enunciar o teorema que trata desses movimentos rotacionais como segue:

Os momentos resultantes aplicados em torno de eixos ortogonais com origem num ponto de um sistema são iguais à variação temporal da quantidade de movimento angular do mesmo sistema em relação aos eixos considerados.

Matematicamente, isto pode ser colocado na forma

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} (\vec{h}) \quad (2.6)$$

Sabemos que a quantidade de movimento angular é dada por

$$\vec{h} = \mathcal{I} \vec{\omega}$$

onde \mathcal{I} é o tensor de inércia do sistema em relação ao sistema de eixos considerado e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular do sistema do corpo em relação a um referencial inercial. Assim, como estamos interessados em sistemas onde, a princípio, as propriedades de inércia são constantes, podemos reescrever o teorema (2.6) na forma simplificada

$$\vec{M} = \mathcal{I} \vec{\alpha} \quad (2.7)$$

onde $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular do sistema de eixos em relação a um referencial inercial.

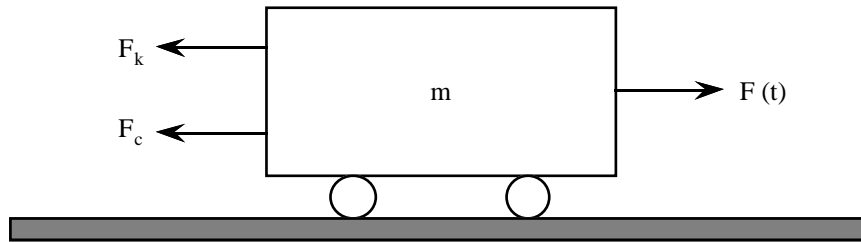


Figura 2.3: Diagrama de corpo livre do oscilador protótipo da Figura 2.1.

Para ilustrar o uso da Lei de Newton na dedução das equações de movimento de estruturas, vamos aqui tomar o exemplo do modelo analítico desenvolvido na seção anterior. O primeiro passo dessa aplicação consiste em considerar o *diagrama de corpo livre* do carro de massa m como aparece na Figura 2.3. A partir desse diagrama, a aplicação da equação (2.4) fornece

$$F(t) - F_c - F_k = m \ddot{x} \quad (2.8)$$

Se substituirmos no resultado (2.8) as relações (2.1) para F_k e (2.3) para F_c e rearranjarmos os termos resultantes, nós obtemos

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (2.9)$$

Esta é, portanto, a equação diferencial que governa o movimento do carro do sistema em pequenas vibrações em torno da sua posição de equilíbrio. Esta é a razão pela qual esta equação é chamada de *equação de movimento*. Note que trata-se de uma equação diferencial ordinária não-homogênea de segunda ordem no tempo e, usualmente, de coeficientes constantes.

Como pudemos observar, a aplicação da Segunda Lei de Newton na obtenção de equações de movimento de sistemas dinâmicos tem duas fases:

1. determinação do diagrama de corpo livre do sistema e
2. aplicação da lei na forma (2.4) para translações e/ou (2.6) para rotações.

Embora pareça simples, a maior dificuldade deste método reside exatamente na elaboração do diagrama de corpo livre. Esta dificuldade fica mais evidente quando os sistemas em estudo são multicorpos e cargas são tridimensionais, pois corre-se sempre o risco de confundir as direções dos esforços aplicados e suas reações.

2.4.2 Princípio de D'Alembert

Uma extensão às leis de Newton do movimento foi publicada pelo francês Jean Ronde D'Alembert em 1743. O Princípio que leva o nome de seu criador pode ser descrito em sua poderosa simplicidade pelo seguinte enunciado:

Qualquer sistema de forças e/ou momentos está em equilíbrio se adicionarmos às forças e/ou momentos aplicados as forças e/ou momentos de inércia.

Para compreendermos melhor esse enunciado, devemos definir os *esforços de inércia* como sendo esforços de *reação ao movimento* dados por

$$\vec{F}_i = -\frac{d}{dt}(m \vec{v}) \quad (2.10)$$

para variações de quantidade de movimento linear do centro de massa de um sistema e

$$\vec{M}_i = -\frac{d}{dt}(\mathcal{I} \vec{\omega}) \quad (2.11)$$

para variações de quantidade de movimento angular em torno dos eixos considerados. Essas definições permitem escrever o *Princípio de D'Alembert* na forma

$$\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{e/ou} \quad \vec{M} + \vec{M}_i = \vec{0} \quad (2.12 - 13)$$

onde \vec{F} e \vec{M} representam respectivamente as resultantes de forças e de momentos aplicadas ao sistema em análise.

A importância dessas equações pode ser percebida pelo fato de que elas representam mais do que uma mera reformulação da Segunda Lei de Newton. Com efeito, sabemos que o desaparecimento de forças resultantes na Mecânica Newtoniana significa equilíbrio. Assim, se existem critérios de equilíbrio para problemas de estática, podemos com isto estendê-los a problemas de dinâmica. Em outras palavras, o Princípio de D'Alembert permite reduzir problemas de dinâmica a problemas de estática.

A aplicação desse Princípio ao nosso sistema protótipo é ilustrada no diagrama de corpo livre da Figura 2.4. Ali, a massa do sistema tem seus efeitos substituídos pela força de inércia F_i . A inclusão dessa força fictícia permite escrever

$$F(t) + F_i - F_c - F_k = 0 \quad (2.14)$$

o que representa uma condição de equilíbrio. Se aqui substituirmos as relações (2.1), (2.3) e a definição (2.10), recuperamos a equação de movimento (2.9), como seria de se esperar. Assim, embora existam profundas diferenças filosóficas entre a Segunda Lei de Newton e o Princípio de D'Alembert, em termos de resultados não há qualquer diferença entre eles.

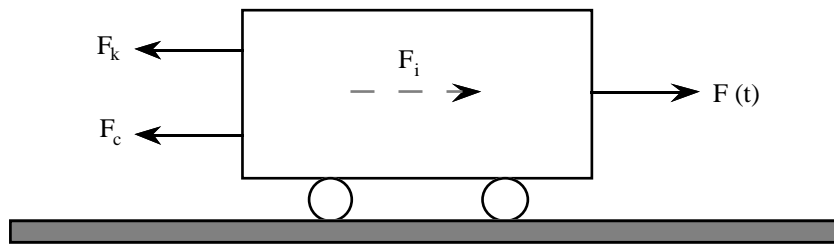


Figura 2.4: Diagrama de corpo livre para aplicação do Princípio de D'Alembert.

Nota-se que para a aplicação do Princípio de D'Alembert seguem-se os mesmos passos da aplicação da Segunda Lei de Newton. A dificuldade está novamente na confecção do diagrama de corpo livre. É comum confundir-se em sistemas complexos ações com reações. Note na Figura 2.4 que F_i aponta na direção da força externa aplicada $F(t)$, mas tem sinal negativo, de acordo com a definição (2.10).

Em conclusão, tanto a Segunda Lei de Newton (Equações (2.4) e (2.6)) quanto o Princípio de D'Alembert (Equações (2.10) e (2.11)) são matematicamente descritos por equações vetoriais. Portanto, no caso geral, ambas as formulações representam conjuntos de 6 equações escalares. À medida que os sistemas dinâmicos tornam-se mais sofisticados, a aplicação dessas abordagens torna-se mais complicada e mais sujeita a erros de tratamento. Assim, abordagens mais gerais e sistemáticas tornam-se necessárias para investigar problemas mais complexos. Neste mister, a Mecânica Newtoniana cede lugar à Mecânica Lagrangeana.

2.5 Mecânica Lagrangeana

2.5.1 Considerações Iniciais

Antes de discutirmos qualquer método da Mecânica Lagrangeana, devemos apresentar algumas definições para estabelecermos o linguajar apropriado para essa discussão.

Começemos por apresentar o conceito de *configuração* de um sistema. Se estabelecermos um sistema de coordenadas inercial de referência, o *estado* de um ponto de um sistema mecânico passa a ser conhecido, em relação à referência, se conhecermos a posição e velocidade desse ponto. Este conhecimento permite estabelecer uma localização exata do ponto em um gráfico velocidade versus posição. A coleção de todos os estados do ponto do sistema ao longo do tempo, que estabelece uma *trajetória dinâmica*, fornece uma curva a que denominamos *plano de fase* do ponto considerado.

Se o sistema mecânico considerado for um corpo rígido, basta concentrarmos nossa atenção na análise de um sistema de eixos fixo ao corpo e com origem em seu centro de massa. Se o sistema for composto por uma coleção de n corpos rígidos, conectados ou não entre si, basta

analisarmos o estado dos sistemas de eixos com origem nos centros de massa desses n corpos. Se, porém, tivermos sob análise um sistema composto por um ou mais corpos flexíveis, que se deformam sob ação de cargas, necessitamos concentrar nossa atenção sobre todos os infinitos pontos que constituem o sistema. Nesses termos, entendemos por *configuração* de um sistema em um determinado instante de tempo a coleção de estados que definem completamente o estado do sistema.

Um corpo rígido livre no espaço possui seis *graus de liberdade*: três translações, uma em cada direção do sistema de coordenadas de referência, e três rotações, cada uma estabelecida em torno dos mesmos eixos do sistema de coordenadas. Se este corpo for impedido de se movimentar em qualquer dessas direções, estará enfrentando o que chamamos de uma *restrição*. Por exemplo, se o mesmo corpo for limitado a se deslocar em um plano, o número de graus de liberdade ficará reduzido a três: duas translações e uma rotação. Um sistema composto por dois ou mais corpos rígidos conectados entre si possui uma série de restrições estabelecidas entre esses corpos.

Aprofundando mais esses conceitos, entendemos *deslocamento* como uma quantidade usada para especificar uma troca de configuração de um sistema. Portanto, deslocamento não é necessariamente medido em metros, podendo sê-lo em radianos, metros por segundo ou radianos por segundo. Entendemos *restrição* como uma condicionante cinemática nas configurações que um sistema tenha que assumir. Na maioria das situações, restrições podem ser expressas matematicamente, como funções do espaço e do tempo. Com essas definições, entendemos *deslocamento virtual* como uma troca infinitesimal e imaginária de configuração de um sistema que seja consistente com suas restrições.

Entendemos um grupo de *coordenadas generalizadas* como um conjunto linearmente independente de deslocamentos que são consistentes com as restrições do sistema e que são suficientes para descrever qualquer configuração arbitrária e, portanto, possível do sistema. Um sistema de n graus de liberdade possui para sua descrição equações expressas em termos de n coordenadas generalizadas.

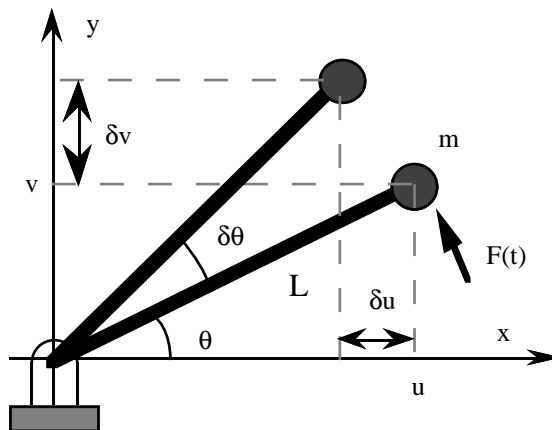


Figura 2.5: Sistema de um grau de liberdade com restrição cinemática.

Para tentarmos esclarecer melhor essas definições, tomemos o exemplo que aparece na Figura 2.5. Consideremos o movimento de uma massa m no plano, presa por uma barra rígida de comprimento L a uma articulação na origem do sistema. Este sistema possui um único grau de liberdade, qual seja, a rotação da barra em torno do eixo que passa pela origem do sistema x, y perpendicularmente ao plano. A posição da massa pode ser descrita pelas coordenadas lineares u e v , ou pela coordenada angular θ . Sabemos que, por si só, θ é suficiente para descrever a configuração do sistema sendo, portanto, uma *coordenada generalizada*. No entanto, a posição

da massa m no plano também pode ser descrita pelos deslocamentos u e v . A diferença neste caso é que existe uma restrição entre essas coordenadas dada por

$$u^2 + v^2 = L^2$$

Assim, u e v são coordenadas, mas não são coordenadas generalizadas. A relação entre u , v e θ é dada por

$$u = L \cos \theta \quad v = L \sin \theta$$

Em conseqüência, como mostrado na Figura 2.5, ao deslocamento virtual $\delta\theta$ correspondem os seguintes deslocamentos virtuais

$$\delta u = -L \sin \theta \delta\theta \quad \delta v = L \cos \theta \delta\theta$$

Este exemplo complica-se bastante se a haste que conecta a massa m à articulação não for rígida. Neste caso, um número maior de graus de liberdade seria necessário para descrever a configuração do sistema. No caso limite da haste ser considerada um elemento contínuo, teríamos necessidade de um número infinito de graus de liberdade para permitir uma descrição completa do problema.

Uma vez assimiladas as definições relativas a deslocamentos virtuais, entendemos *trabalho virtual* como sendo o trabalho das forças atuantes no sistema quando este sofre um deslocamento virtual. Por hipótese, consideramos essas forças constantes durante a ocorrência do deslocamento virtual, já que este é infinitesimal. Para um sistema com n graus de liberdade designados por q_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, o trabalho virtual $\delta\mathcal{W}$ é dado por

$$\delta\mathcal{W} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (2.15)$$

Nesta definição, Q_i é chamada *força generalizada* associada ao i -ésimo grau de liberdade do sistema. Em outras palavras, Q_i é o trabalho virtual do sistema quando $\delta q_i = 1$ e $\delta q_j = 0$ para todo $j \neq i$, isto é, quando a configuração do sistema é alterada apenas para o i -ésimo grau de liberdade.

Como exemplo, se à massa m da Figura 2.5 for aplicada uma força $F(t)$ ortogonal à haste, o trabalho virtual do sistema será $\delta\mathcal{W} = F(t) L \delta\theta$. Assim, $Q_\theta = F(t) L$ será a força generalizada associada ao grau de liberdade θ e deslocamento virtual $\delta\theta$. O leitor encontrará outros exemplos que possam elucidar mais tais idéias ao longo do texto.

Com essas definições, podemos agora apresentar e aplicar ao nosso sistema protótipo técnicas da Mecânica Lagrangeana. Vamos considerar neste texto, sem a preocupação de completeza, porém com o objetivo de ampliar nossa perspectiva de análise de sistemas mecânicos as seguintes técnicas: Princípio dos Deslocamentos Virtuais, Princípio da Conservação de Energia, Equações de Lagrange e Princípio de Hamilton.

2.5.2 Princípio dos Deslocamentos Virtuais

As definições apresentadas na subseção anterior foram utilizadas por Johann Bernoulli em 1717 para enunciar o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais*. Note, portanto, que ele é anterior ao Princípio de D'Alembert. No contexto de problemas dinâmicos, podemos apresentar o Princípio dos Deslocamentos Virtuais da seguinte forma:

Para qualquer deslocamento virtual de um sistema, o trabalho virtual de todas as forças aplicadas ao mesmo, incluindo as forças de inércia, deve ser igual a zero.

Matematicamente, isto equivale a dizer que

$$\delta\mathcal{W}_t = \delta\mathcal{W}_a + \delta\mathcal{W}_i = 0 \quad (2.16)$$

onde $\delta\mathcal{W}_t$ refere-se ao trabalho virtual total e $\delta\mathcal{W}_a$ ao trabalho virtual de todas as forças aplicadas e de resistência ao movimento, com exceção das forças de inércia, cujos efeitos aparecem em $\delta\mathcal{W}_i$.

Notem que o Princípio (2.16) é claramente escalar, em oposição aos métodos da Mecânica Newtoniana, que são vetoriais. No entanto, o Princípio ainda faz uso de conceitos vetoriais, como as forças de inércia do Princípio de D'Alembert. Além disso, a sua aplicação prática ainda utiliza informações contidas em diagramas de corpo livre das partes de sistemas em movimento, como veremos a seguir.

A aplicação do Princípio (2.16) ao nosso sistema protótipo começa pela consideração do diagrama de corpo livre do Princípio de D'Alembert (Figura 2.4). Em seguida, para um deslocamento virtual δx , obtemos

$$\delta\mathcal{W}_t = [F(t) + F_i - F_c - F_k] \delta x = 0 \quad (2.17)$$

Agora, usamos o argumento de que δx , em sendo arbitrário, pode inclusive ser igual a zero. No entanto, este é um caso particular, trivial e desinteressante. No caso geral, em que $\delta x \neq 0$, não ficamos com outra alternativa senão fazer nulo o conteúdo do colchete na equação (2.17). Assim, obtemos:

$$F(t) + F_i - F_c - F_k = 0 \quad (2.18)$$

o que conduz, com a devida substituição das forças envolvidas, novamente à equação de movimento (2.9).

No caso mais geral de um sistema linear discreto de n graus de liberdade com um vetor $\{q\}$ de coordenadas generalizadas, obtemos o seguinte resultado quando aplicamos o Princípio dos Deslocamentos Virtuais:

$$\{\mathcal{F}(\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}, t)\}^T \{\delta q\} = 0 \quad (2.19)$$

onde $\{\delta q\}$ é o vetor dos n deslocamentos virtuais e $\{\mathcal{F}\}$ é o vetor de n equações diferenciais de segunda ordem do sistema. Como o vetor de deslocamentos $\{\delta q\}$ é arbitrário, suas componentes podem ser todas diferentes de zero. Para que o resultado (2.19) seja satisfeito, devem ser nulas todas as n equações de movimento contidas nas linhas do vetor $\{\mathcal{F}\}$.

O método aparenta ser mais geral que os anteriores e prestar-se de maneira mais sistemática ao trato de sistemas de maior complexidade. No entanto, possui ainda fortes traços de natureza vetorial que podem confundir o analista.

2.5.3 Princípio da Conservação de Energia

Chamamos de *energia mecânica* \mathcal{E} de um sistema a soma de suas energias cinética \mathcal{T} e potencial \mathcal{U} . A energia cinética está associada às propriedades de movimento e de massa do sistema. Já a energia potencial está associada a processos que permitam sua descrição matemática através de potenciais dependentes de posição, tais como os potenciais elásticos e gravitacionais. Um sistema é dito *conservativo* quando conserva energia mecânica. Por outro lado, um sistema é dito *dissipativo* ou *não-conservativo* quando absorve ou gasta energia com o tempo.

Considerando as definições apresentadas no parágrafo anterior, podemos enunciar o *Princípio da Conservação de Energia* da seguinte forma:

A variação temporal da energia mecânica de um sistema é igual à potência instantânea absorvida ou dissipada pelo sistema.

Matematicamente, este enunciado é apresentado como

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{T} + \mathcal{U}) = \mathcal{P} \quad (2.20)$$

onde \mathcal{P} incorpora a taxa de variação de energia dissipada por qualquer processo passível de análise e a potência fornecida ou retirada do sistema por forças externas não-potencializáveis. No caso do sistema ser conservativo e não possuir excitação externa, então o princípio (2.20) reduz-se a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathcal{T} + \mathcal{U}) = 0 \quad (2.21)$$

o que equivale a dizer que a energia mecânica do sistema é conservada no tempo.

Para exemplificar o uso deste princípio, tomemos o caso de sistema protótipo da Figura 2.1. As energias cinética e potencial elástica do sistema são dadas respectivamente por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.22)$$

que são funcionais quadráticos, liberando o analista de preocupação com sinais de deslocamentos e velocidades. Já a potência instantânea associada ao amortecedor viscoso e à força externa aplicada é dada por

$$\mathcal{P} = [F(t) - c \dot{x}] \dot{x} \quad (2.23)$$

Na formulação deste resultado, observe que a força externa $F(t)$ e a velocidade \dot{x} têm a mesma direção, significando adição de energia ao sistema, enquanto que a força do amortecedor e a velocidade têm sinais contrários, significando a retirada de energia do sistema. Os sinais positivos ou negativos associados a essas quantidades físicas decorrem daqueles definidos no modelo analítico do problema.

Se substituirmos as energias (2.22) e a potência (2.23) no princípio (2.20), efetuarmos a diferenciação em relação ao tempo e coletarmos os termos de maneira adequada, obtemos o seguinte resultado:

$$[m \ddot{x} + c \dot{x} + k x - F(t)] \dot{x} = 0 \quad (2.24)$$

Como a velocidade do sistema varia, podendo inclusive ser nula, para garantirmos a satisfação da equação (2.24), em qualquer instante de tempo, temos que admitir que o conteúdo do seu colchete é nulo. Assim, recuperamos, como era de se esperar, o resultado (2.9) como equação de movimento do sistema protótipo.

A aplicação desse princípio para um sistema discreto de n graus de liberdade acaba recaindo no seguinte produto escalar:

$$\{\mathcal{F}(\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}, t)\}^T \{\dot{q}\} = 0 \quad (2.25)$$

onde $\{\dot{q}\}$ é o vetor das velocidades dos n graus de liberdade considerados e $\{\mathcal{F}\}$ é o vetor das n equações diferenciais de segunda ordem do sistema. Como as componentes do vetor de velocidades $\{\dot{q}\}$ podem ser individualmente não-nulas, para satisfação a qualquer instante de tempo t do produto escalar (2.25), concluímos que são individualmente nulas as n equações de movimento contidas nas linhas do vetor $\{\mathcal{F}\}$.

Para aplicar este método na obtenção de equações de movimento de sistemas, o analista deve saber escrever as expressões de suas energias cinética e potencial, bem como da potência instantânea associada às suas forças externas e aos mecanismos de dissipação energética do sistema. O Princípio de Conservação de Energia é uma técnica claramente escalar e bastante sistemática, requerendo um pouco mais de atenção apenas para a formulação da potência instantânea.

2.5.4 Equações de Lagrange

O método que amplia o que já vimos dentro do contexto da Mecânica Lagrangeana em termos de generalidade, sofisticação e poder analítico foi apresentado por Joseph-Louis Lagrange em 1788 no livro *Mécanique Analytique*. O método, baseado em equações que envolvem derivadas de energias de sistemas dinâmicos, é hoje conhecido pelo nome de *Equações de Lagrange*. Tais equações podem ser deduzidas, em sentido crescente, a partir do Princípio de Deslocamentos Virtuais de Bernoulli ou, em sentido decrescente, a partir do Princípio de Hamilton, como apresentamos no Capítulo 6. No entanto, foge ao escopo deste trabalho, que enfatiza aplicações, deter-se em longas deduções. Assim, vamos nos limitar a apresentar os resultados finais, devendo o leitor interessado procurar detalhes em outras referências.

Vamos definir a função Lagrangeana \mathcal{L} como sendo a diferença entre as energias cinética \mathcal{T} e potencial \mathcal{U} do sistema, i.e.

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (2.26)$$

Então, as equações de Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{Q}_i \quad (2.27)$$

onde q_i é a i -ésima coordenada generalizada do sistema e \mathcal{Q}_i é a força generalizada associada a q_i . Essa força generalizada inclui todos os esforços externos prescritos não relacionados a energias do sistema e todas as forças não-conservativas que nele atuam.

Podemos agora aplicar a equação (2.27) ao sistema protótipo de coordenada generalizada $x(t)$ na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \mathcal{Q}_x \quad (2.28)$$

A energia cinética associada à massa do carro e a energia potencial elástica associada à mola são dadas pelas equações (2.22). Em consequência, a função Lagrangeana do sistema assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [m \dot{x}^2 - k x^2] \quad (2.29)$$

Por outro lado, o trabalho virtual da força externa $F(t)$ e do amortecedor de coeficiente c através de um deslocamento virtual δx é o seguinte:

$$\delta \mathcal{W} = [F(t) - c \dot{x}] \delta x \quad (2.30)$$

Se compararmos o trabalho virtual (2.30) com a definição (2.15), podemos reconhecer que a força generalizada \mathcal{Q}_x é dada por

$$\mathcal{Q}_x = F(t) - c \dot{x} \quad (2.31)$$

Assim, substituindo as relações (2.29) e (2.31) na equação (2.28), recuperamos a equação de movimento (2.9) do sistema protótipo.

Uma alternativa à abordagem apresentada anteriormente considera as equações (2.27) na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{Q}_i \quad (2.32)$$

onde foi incluído um termo com a função dissipação de Rayleigh \mathcal{D} . Esta função leva em conta os efeitos de mecanismos de gasto energético segundo o modelo do amortecedor viscoso linear, sendo mais um funcional quadrático a ser considerado na análise. É possível interpretarmos este funcional como o sendo a metade da potência instantânea \mathcal{P}_c dissipada no amortecedor, i.e.

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [C] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_c \quad (2.33)$$

Se aplicarmos esta abordagem alternativa para o sistema protótipo, temos as seguintes alterações na dedução da equação de movimento:

- A função dissipação de Rayleigh e a força generalizada do sistema ficam dadas respectivamente por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad \text{e} \quad Q_x = F(t) \quad (2.34)$$

- A aplicação da equação de Lagrange (2.32) para $q_i = x(t)$ não produz qualquer alteração no resultado (2.9). Portanto, o fato de introduzirmos a função dissipação de Rayleigh na formulação é equivalente a retirarmos os efeitos de perdas energéticas do tipo amortecedor viscoso do termo de forças generalizadas, liberando-o para tratar apenas dos esforços externos e não-conservativos.

Observe a vantagem de trabalhar-se analiticamente com quantidade escalares (energias e trabalhos) de forma sistemática para obter equações de movimento. Caso tal vantagem não seja evidente ao leitor agora, observe a generalidade das Equações de Lagrange para tratar sistemas com múltiplos graus de liberdade, como veremos no Capítulo 5.

2.5.5 Princípio de Hamilton

O *Princípio de Hamilton* foi publicado em 1834. Portanto, das teorias do movimento discutidas neste texto, esta é a mais moderna. Trata-se de uma afirmação de estacionariedade no campo de funções, também chamado de *Princípio da Ação Mínima*. No presente contexto, podemos enunciá-lo da seguinte forma:

A variação da integral da função Lagrangeana adicionada à integral do trabalho virtual das forças ativas e não-conservativas de um sistema entre dois instantes de tempo é nula, desde que as configurações inicial e final do sistema sejam prescritas.

Matematicamente, isto pode ser colocado como segue:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{W} dt = 0 \quad (2.35)$$

onde o operador δ denota a variação de um funcional como já praticado, por exemplo, na aplicação do conceito de trabalho virtual.

Uma interpretação física deste Princípio pode ser obtida a partir da análise da Figura 2.6, desde que o leitor esteja disposto a usar de um pouco de abstração. O gráfico desta figura não possui designação para abscissas ou ordenadas por estar representando posições simbólicas no espaço de funções, ou seja, o sistema possui um estado conhecido (prescrito) no instante t_1 , evolui segundo uma trajetória dinâmica com o passar do tempo e volta a possuir um estado conhecido no instante t_2 . Duas trajetórias dinâmicas possíveis do sistema entre esses dois instantes de tempo estão representadas neste gráfico: uma trajetória nominal (contínua) e outra variada (tracejada). Note que, como previsto no enunciado, não há diferença entre essas duas trajetórias nos instantes t_1 e t_2 , pois o estado do sistema é conhecido (prescrito) nestes instantes. A trajetória tracejada, portanto, representa um dos caminhos que o sistema pode percorrer no espaço de funções como alternativa à trajetória nominal. Neste contexto, o que o Princípio de Hamilton estabelece é que, de todas as possíveis trajetórias, o sistema adotará aquela que minimiza a “atividade dinâmica” (e.g., energia), minimização esta expressa matematicamente pelo fato de tornar nula a variação em (2.35). É por esta razão que o Princípio relaciona-se com o princípio mais geral de “ação mínima”.

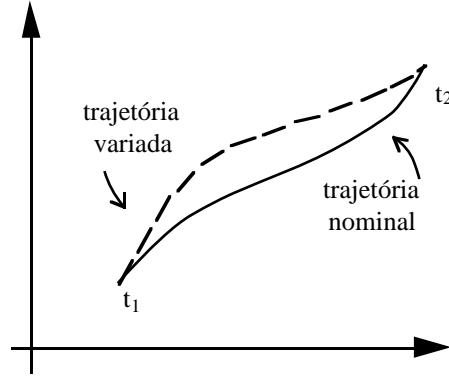


Figura 2.6: Trajetórias dinâmicas de um sistema entre duas condições fixas.

Para tornar a discussão menos abstrata e permitir ao leitor uma interpretação mais pragmática desses conceitos, vamos aplicar o Princípio de Hamilton ao sistema protótipo da Figura 2.1. Se substituirmos a função Lagrangeana (2.29) e o trabalho virtual (2.30) em (2.35), obtemos o seguinte enunciado matemático:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} [m \dot{x}^2 - k x^2] dt + \int_{t_1}^{t_2} [F(t) - c \dot{x}] \delta x dt = 0$$

Note que temos a considerar aqui a variação de uma integral e a integral de uma variação. No primeiro caso, temos dois campos a variar: o dos deslocamentos $x(t)$ e o das velocidades $\dot{x}(t)$. A idéia geral de manipulação matemática deste método é a de conduzir todos os termos do Princípio para uma única integral de variação em deslocamento. Se aplicarmos a variação da primeira integral, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} \{m \dot{x} \delta \dot{x} - [k x - F(t) + c \dot{x}] \delta x\} dt = 0 \quad (2.36)$$

O próximo passo consiste em integrarmos por partes o primeiro termo do resultado (2.36) para transformarmos a variação em $\dot{x}(t)$ para variação em $x(t)$. Antes, porém, é necessário ressaltar que a seguinte permutação de operadores é válida:

$$\delta \dot{x} = \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d \delta x}{dt}$$

Assim, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = [m \dot{x} \delta x]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt \quad (2.37)$$

Usamos agora a hipótese de que $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, pois o sistema tem configuração prescrita nos instantes inicial e final da trajetória dinâmica considerada. Nessas condições, a substituição do resultado (2.37) em (2.36) fornece a seguinte integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{x} - k x + F(t) - c \dot{x}] \delta x dt = 0 \quad (2.38)$$

Como a variação δx é arbitrária, podemos tomar essa variação, por exemplo, como sendo positiva durante todo o intervalo $t_1 < t < t_2$. Em consequência, para que a condição (2.38) se verifique, não temos outra alternativa senão admitirmos que o colchete do integrando em (2.38) é nulo. Disto resulta novamente a equação de movimento (2.9) para o sistema protótipo, a qual foi obtida por todos os outros métodos discutidos neste texto.

Como pode-se perceber do exemplo acima, o *Princípio de Hamilton* requer muito mais trabalho do que qualquer dos outros métodos discutidos aqui para chegar ao mesmo resultado. No entanto, além de ser bastante sistemático e de trabalhar com grandezas escalares de fácil generalização para sistemas complexos, o Princípio produz para sistemas estruturais modelados como estruturas contínuas as condições de contorno do problema como subproduto, conforme mostraremos no Capítulo 6. Isto não é aparente no presente exemplo devido à simplicidade associada a um modelamento discreto.

Em conclusão, foram aqui apresentados seis métodos da Mecânica Analítica que se prestam à tarefa de obtenção das equações de movimento de estruturas. Como os sistemas estruturais tendem a se tornar cada vez mais sofisticados, é conveniente que engenheiros sejam preparados colocando-se ênfase em ferramentas analíticas de maior potencial descritivo. Assim, as *Equações de Lagrange* podem ser recomendadas para tratar sistemas discretos, enquanto o *Princípio de Hamilton* pode ser recomendado para tratar sistemas contínuos. No entanto, o leitor não deve tomar esta recomendação como definitiva, podendo utilizar o método que lhe parecer mais indicado para cada caso.

2.6 Importância da Posição de Equilíbrio

Neste ponto é interessante verificarmos como os métodos apontados na seção anterior particularizam-se para problemas estáticos. Para atingirmos este objetivo, precisamos eliminar dos métodos todas as dependências implícitas e explícitas do tempo.

A *Segunda Lei de Newton* e o *Princípio de D'Alembert* coalescem na forma das conhecidas equações de equilíbrio da Estática, ou seja,

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M} = \vec{0} \quad (2.39)$$

onde \vec{F} e \vec{M} representam respectivamente a resultante das forças e momentos (independentes do tempo) aplicados ao sistema em equilíbrio. Já o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais* de Bernoulli reduz-se a

$$\delta \mathcal{W}_a = 0 \quad (2.40)$$

isto é, o trabalho virtual das forças externas aplicadas estaticamente e das forças que resistem ao deslocamento de um sistema é nulo. Este resultado tem grande uso na análise estática de estruturas.

O *Princípio da Conservação de Energia* reduz-se após algumas operações a uma afirmação física equivalente à equação (2.40), isto é

$$\mathcal{U} = \mathcal{W} \quad (2.41)$$

a energia potencial absorvida pelo sistema a partir da sua posição antes da aplicação de cargas (não-deformada) até a sua posição final de equilíbrio (deformada) é igual ao trabalho executado pelas cargas estáticas externas que atuam sobre o sistema.

No que diz respeito às *Equações de Lagrange*, podemos observar que a função Lagrangeana perde a sua parcela de energia cinética, reduzindo-se a $\mathcal{L} = -\mathcal{U}$. Assim, as equações (2.27) e (2.32) assumem a forma

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = \mathcal{Q}_i \quad (2.42)$$

que podem ser reconhecidas como um dos teoremas de energia devidos a Castigliano. Este teorema é bastante útil na análise estática de estruturas, ao relacionar cargas generalizadas \mathcal{Q}_i com derivadas da energia potencial elástica desses sistemas.

Finalmente, como último dos 6 métodos apresentados, o *Princípio de Hamilton* reduz-se a

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{W} \quad (2.43)$$

ou seja, a partir da condição de equilíbrio do sistema (um caso particular de estado disposto na Figura 2.6), a variação da energia potencial interna iguala-se ao trabalho virtual das forças externas aplicadas ao sistema. Isto equivale a uma afirmação da conservação de energia do sistema e representa um refraseamento físico da equação (2.41), assim como também um refraseamento matemático da equação (2.40), em termos de variações.

Posições de equilíbrio de um sistema podem ser determinadas a partir das equações de movimento do mesmo. Para esclarecer este ponto, consideremos a equação de movimento (2.44) de um sistema linear discreto de múltiplos graus de liberdade:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (2.44)$$

Vamos agora admitir que o deslocamento $\{x(t)\}$ seja medido a partir de uma certa referência e que possa ser escrito como

$$\{x(t)\} = \{x_e\} + \{x_r(t)\} \quad (2.45)$$

A relação (2.45) admite que $\{x(t)\}$ possui uma parcela independente do tempo $\{x_e\}$ e um deslocamento relativo $\{x_r(t)\}$ dependente do tempo e medido a partir de $\{x_e\}$. Admitamos agora que algo semelhante ocorra com respeito à força externa aplicada ao sistema, isto é

$$\{F(t)\} = \{F_e\} + \{F_r(t)\} \quad (2.46)$$

onde $\{F_e\}$ representa a parcela de $\{F(t)\}$ que é independente do tempo.

Se substituirmos as hipóteses (2.45) e (2.46) na equação de movimento (2.44), obtemos

$$[M] \{\ddot{x}_r\} + [C] \{\dot{x}_r\} + [K] (\{x_e\} + \{x_r(t)\}) = \{F_e\} + \{F_r(t)\} \quad (2.47)$$

Notamos que em (2.47) temos parcelas que dependem e independem do tempo. Essas parcelas são escritas separadamente da seguinte forma:

- problema estático

$$[K] \{x_e\} = \{F_e\} \Rightarrow \{x_e\} = [K]^{-1} \{F_e\} \quad (2.48)$$

- problema de vibração em torno de $\{x_e\}$

$$[M] \{\ddot{x}_r\} + [C] \{\dot{x}_r\} + [K] \{x_r\} = \{F_r(t)\} \quad (2.49)$$

Note que $\{F_e\} = \{0\}$ implica automaticamente $\{x_e\} = \{0\}$, de acordo com a equação de equilíbrio (2.48). A existência de um valor não-nulo para $\{F_e\}$ significa simplesmente adicionar à estrutura uma certa parcela de energia potencial elástica. Isto pode ser facilmente visualizado se o nosso sistema protótipo de um grau de liberdade sofrer a ação de um campo gravitacional, como mostrado na Figura 2.7.

Neste caso unidimensional, a força estática é dada por

$$F_e = m g$$

onde g é a aceleração da gravidade no local onde se encontra o sistema. Da equação (2.48) obtemos a posição de equilíbrio como sendo

$$x_e = \frac{m g}{k}$$

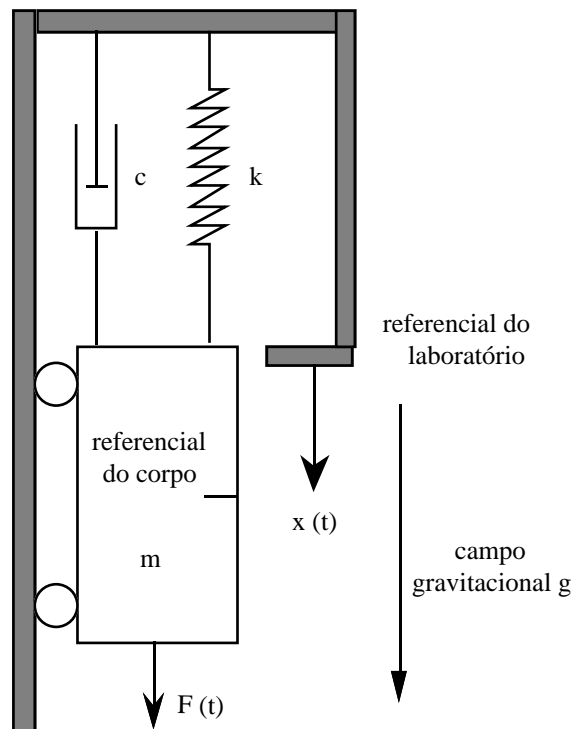


Figura 2.7: Sistema protótipo sob ação de um campo gravitacional.

Este resultado é obtido em uma formulação Lagrangeana se incluirmos na energia potencial a parcela devida ao potencial gravitacional. No entanto, é mais prático ignorar esta inclusão, desde que tenhamos fixado o conceito de que deslocamentos do sistema são medidos *a partir de uma posição de equilíbrio*. Em outras palavras, a inclusão de energia potencial gravitacional leva à condição de equilíbrio, a qual pode ser ignorada se estivermos interessados apenas no problema de vibração descrito pela equação (2.49).

Em conclusão, é possível separar das equações gerais de movimento de um sistema as suas posições de equilíbrio e os problemas de vibração que ocorrem em torno dessas posições. Caso o movimento do sistema seja descrito por equações não-lineares, este esquema produz problemas de equilíbrio não-lineares e problemas lineares de vibração, dos quais é possível determinar, entre outras coisas, se cada uma das posições de equilíbrio encontradas é estável ou instável. Porém, este assunto foge ao escopo previsto para este texto.

2.7 Vibrações em Engenharia

Na arte de *Dinâmica Estrutural*, o engenheiro tem sua atenção permanentemente voltada para problemas ligados à determinação da resposta estrutural e à “sobrevivência” de sistemas em vibração. A resposta estrutural pode ser expressa em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações lineares e angulares, assim como em termos de forças e torques. Já a “sobrevivência” tem a ver com a amplitude e frequência das vibrações, particularmente no que concerne à fadiga.

Podemos vislumbrar nesta atividade de engenharia dois problemas básicos e com inter-relacionamento: ora deseja-se determinar o comportamento de um sistema ligado a uma base móvel, ora tem-se por objetivo investigar os esforços transmitidos a uma base fixa por um sistema em vibração. É meta a ser atingida nesta seção a análise breve desses dois tipos de problemas e suas implicações.

2.7.1 Efeito do Movimento da Base

A Figura 2.8 mostra um sistema de um grau de liberdade preso a uma base que é animada em relação a um referencial inercial de um movimento determinístico qualquer $x_b(t)$. Portanto, no presente contexto, $x_b(t)$ é um dado de entrada. No caso de terremotos, por exemplo, além de possuir um comportamento aleatório, o movimento da base pode representar justamente a *incógnita* a ser determinada.

Para estudarmos o movimento da massa m , vamos adotar como coordenada generalizada $x(t)$, a posição relativa da massa em relação à base móvel. Note que esta coordenada tem origem na posição do carro em que a mola não se encontra deformada.

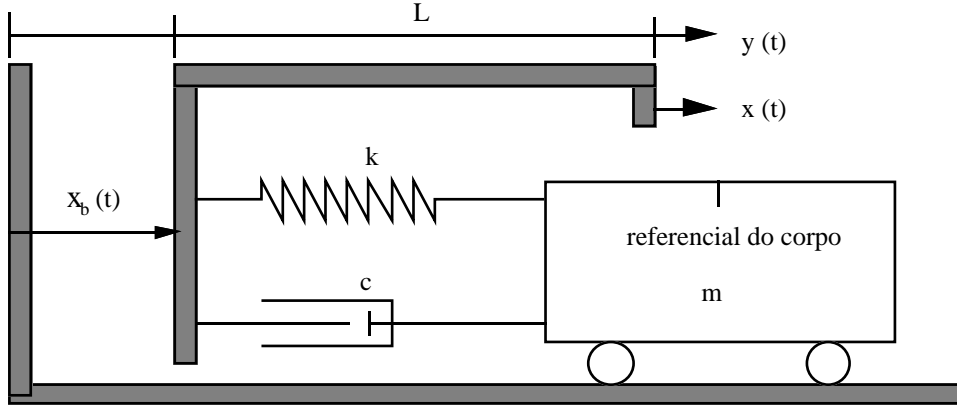


Figura 2.8: Sistema protótipo excitado pelo movimento da base.

As expressões das energias cinética e potencial elástica do sistema nas condições estabelecidas são dadas respectivamente por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{x}_b)^2 \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.50)$$

Já a função dissipação de Rayleigh do sistema é dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (2.51)$$

Aplicando as equações de Lagrange (2.32) para a coordenada generalizada $x(t)$, obtemos para a equação de movimento do carro o seguinte resultado:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{x}_b \quad (2.52)$$

Uma alternativa a esta formulação pode ser desenvolvida se utilizarmos como coordenada generalizada do problema a função $\bar{y}(t) = x_b(t) + x(t)$, que mede a posição da massa m em relação ao sistema inercial de referência (base fixa), exceto por uma constante L . Neste caso, as energias expressas em (2.50) transformam-se em

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{\bar{y}}^2 \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} k (\bar{y} - x_b)^2 \quad (2.53)$$

enquanto a função dissipação de Rayleigh do sistema é dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c (\dot{\bar{y}} - \dot{x}_b)^2 \quad (2.54)$$

Aplicando novamente as equações de Lagrange para a coordenada generalizada $\bar{y}(t)$, obtemos

$$m \ddot{\bar{y}} + c \dot{\bar{y}} + k \bar{y} = c \dot{x}_b + k x_b \quad (2.55)$$

Os resultados (2.52) e (2.55) mostram que o problema do movimento da base leva a equações não-homogêneas, excitadas no primeiro caso pela força de inércia do sistema com a aceleração da base, e no segundo caso pelas forças elástica e de amortecimento provocadas pela base móvel. Note que (2.55) pode ser obtida a partir de (2.52) se substituirmos $x(t)$ por $\bar{y}(t) - x_b(t)$.

A resolução dos problemas (2.52) e (2.55) é de fundamental importância na engenharia de vibrações. No entanto, é nosso interesse no momento apenas apresentar o problema. Este assunto voltará a ser discutido no Capítulo 4, quando tratarmos de vibrações forçadas de sistemas de um grau de liberdade.

2.7.2 Esforços Transmitidos à Base

Um outro problema industrial de importância consiste em avaliar o efeito que um sistema em vibração exerce sobre a base em que este se encontra apoiado. Para tal avaliação, dentro do nosso contexto básico, observemos da Figura 2.1 que o carro de massa m está ligado à base pela mola e pelo amortecedor. Em consequência, a força transmitida à base é dada por

$$F_t = -c \dot{x} - k x = m \ddot{x} - F(t) \quad (2.56)$$

Note que a segunda igualdade na relação (2.56) foi obtida fazendo uso da equação de movimento (2.9). Portanto, a força transmitida à base por um sistema oscilante pode ser encarada tanto como resultado de uma reação a componentes estruturais diretamente conectados à base (mola e amortecedor), quanto como resultado de uma reação a componentes “remotos” (inércia da massa e força externa aplicada ao sistema).

A força transmitida à base pode provocar problemas de fadiga por tensões cíclicas no material de união base-sistema, problemas de ruído, ou mesmo problemas de movimento da base em resposta à excitação do sistema. Assim, o leitor consegue facilmente depreender que os problemas de transmissão e movimento de base são inter-relacionados por realimentação. Somente no caso da base ser bastante rígida ou ter bastante inércia é que tais problemas poderão ser considerados desacoplados.

2.8 Conclusões

Um engenheiro moderno deve ser capaz de modelar sistemas mecânicos e de obter as equações que descrevem seu movimento sob ação de cargas externas. Assim, neste capítulo tentamos fornecer ao leitor elementos básicos para que o mesmo possa modelar um sistema físico como uma coleção de entes discretos ou como um contínuo, de propriedades distribuídas. Da mesma forma, foram discutidas seis diferentes técnicas de obtenção das equações de movimento desses sistemas e apontadas aquelas mais apropriadas para cada caso. É fácil observar a evolução dos diversos métodos no caminho da sempre maior abstração e generalidade com a finalidade de tratar problemas cada vez mais sofisticados.

Além disso, mostramos neste capítulo o papel desempenhado por posições de equilíbrio na Dinâmica de Estruturas. Finalmente, apresentamos alguns problemas fundamentais da engenharia de vibrações, concernentes a bases móveis e transmissão de vibrações.

Ao término deste capítulo, o leitor deve julgar-se competente nos aspectos apontados nos parágrafos anteriores. Enquanto aqui a preocupação foi focalizada em *modelar* problemas de Dinâmica de Estruturas, no próximo capítulo vamos começar a *resolver* tais problemas.

2.9 Bibliografia

Seguem-se algumas referências que podem ser utilizadas pelo leitor para aprofundar os seus estudos na arte de modelar sistemas mecânicos e no uso de ferramentas de Mecânica Analítica para pesquisar o comportamento de tais sistemas.

Sobre Modelamento de Sistemas Mecânicos

- CROSS, N. - *Engineering Design Methods*, John Wiley, New York, 1989.
- NIKRAVESH, P. E. - *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- DOEBELIN, E. O. - *System Modeling and Response*, John Wiley, New York, 1980.

Sobre Mecânica Analítica

- GOLDSTEIN, H. - *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1959.
- GIACAGLIA, G. E. O. - *Mecânica Analítica*, Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1978.
- LANCZOS, C. - *The Variational Principles of Mechanics*, 4a. ed., Dover, New York, 1986.

2.10 Exercícios

Este é um capítulo que explora uma série de conceitos importantes, mas que também introduz uma gama enorme de aplicações. Como desafio para fortalecer a base de conhecimentos do leitor, aqui são apresentados alguns exercícios de fixação.

Perguntas

1. Escolha um sistema mecânico qualquer e desenvolva para o mesmo dois modelos analíticos: um simples e um mais sofisticado. Compare-os em termos de tempo e recursos necessários para análise.
2. Quais são as vantagens e/ou desvantagens relativas de se modelar um sistema mecânico de forma discreta e contínua? Como a rigidez de um elemento estrutural pode participar deste contexto?
3. Prepare uma dissertação breve comparando as abordagens Newtoniana e Lagrangeana para modelamento matemático de modelos analíticos de sistemas mecânicos.
4. O que é um referencial inercial? E um referencial não-inercial? Qual é a importância deste conceito no estabelecimento das equações de movimento de sistemas mecânicos?
5. Defina o que você entende por *coordenada generalizada*. E por *restrições*. Como estes dois conceitos se relacionam com a idéia de *grau de liberdade*?
6. Um cilindro circular longo repousa sobre um plano horizontal. Quantos graus de liberdade possui este sistema? Qual é a restrição que regula o movimento deste sistema?
7. Qual é o efeito da gravidade na vibração de um sistema mecânico?
8. O que você entende por transmissibilidade? Que relação tem este conceito com o problema de fadiga de sistemas mecânicos?

9. Enuncie e forneça o significado filosófico das seguintes leis, princípios e métodos:

- a Segunda Lei de Newton;
- o Princípio de D'Alembert;
- o Princípio dos Deslocamentos Virtuais;
- o Princípio da Conservação de Energia;
- o método das Equações de Lagrange; e
- o Princípio de Hamilton.

Exercícios Resolvidos

1. Determine a rigidez equivalente do sistema de molas que aparece abaixo.

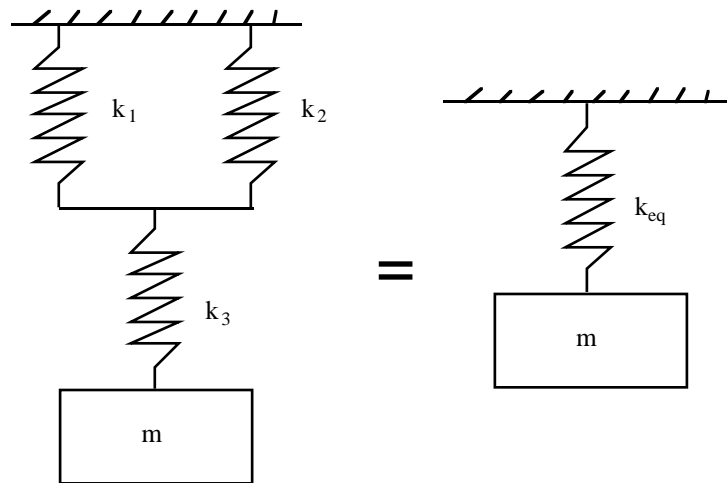


Figura 2.9: Dois sistemas equivalentes, com ênfase na questão de rigidez.

Duas molas estão em paralelo quando, sob ação de força, sofrem o mesmo deslocamento, em módulo. Duas molas estão em série quando “percebem” a mesma força aplicada e seus deslocamentos são proporcionais aos coeficientes de rigidez de cada mola. Assim, observamos que as molas 1 e 2 estão em paralelo e o conjunto por elas formado está em série com a mola 3. Nosso objetivo é encontrar a mola de rigidez equivalente k_{eq} que possa substituir o conjunto.

Se aplicarmos ao subconjunto das molas 1 e 2 apenas uma força F , haverá como resposta um deslocamento único x para ambas as molas. Assim, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$F = k_{(1+2)} x = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x$$

Em conseqüência,

$$k_{(1+2)} = k_1 + k_2 \quad (a)$$

Agora, se ao conjunto (1 + 2) e 3 aplicarmos uma força F , o deslocamento final x será a soma dos deslocamentos dos dois elementos, os quais estão sujeitos à mesma carga. Desta forma, temos as seguintes relações:

$$x = \frac{F}{k_{eq}} = x_{(1+2)} + x_3 = \frac{F}{k_{(1+2)}} + \frac{F}{k_3}$$

Em consequência,

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_{(1+2)}} + \frac{1}{k_3} \quad (b)$$

Se substituirmos a equação (a) em (b), obtemos, após um algebrismo simples, o seguinte resultado como rigidez equivalente do sistema:

$$k_{\text{eq}} = \frac{(k_1 + k_2) k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (c)$$

Note que o conceito de rigidez equivalente é extremamente útil para simplificar sistemas mecânicos na fase de análise. Se pudermos simplificar nosso trabalho, não o compliquemos desnecessariamente!

2. Determine a massa efetiva do sistema da Figura 2.10 no ponto O, sabendo-se que a barra pode ser considerada uniforme, rígida, com massa total m , e que ela está pivotada na metade de seu comprimento.

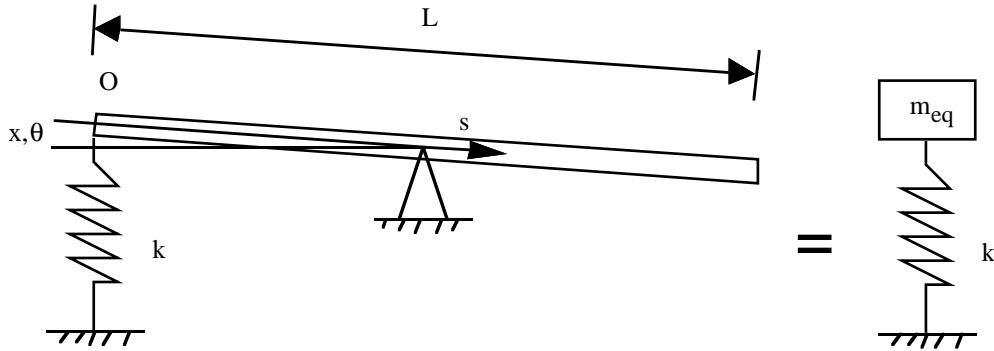


Figura 2.10: Dois sistemas equivalentes, com ênfase na questão de massa.

Vamos adotar como referência para definir uma relação entre os dois sistemas o deslocamento $x(t)$ do ponto O, a partir da condição de equilíbrio (mola não deformada).

A equivalência buscada aqui pode ser estabelecida em termos de igual energia cinética \mathcal{T} para ambos os sistemas. Para o sistema equivalente temos como energia cinética apenas o seguinte:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 \quad (d)$$

Já para determinarmos a energia cinética do sistema original, devemos recorrer à definição formal deste conceito físico, qual seja

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\text{corpo}} v^2 dm \quad (e)$$

onde dm é um elemento de massa, animado de velocidade v em relação a um referencial inercial. Note que a integral deve ser efetuada ao longo de toda a barra.

Se utilizarmos como variável de integração a coordenada s definida na Figura 2.10, então um elemento de massa pode ser escrito como

$$dm = \frac{m}{L} ds \quad (f)$$

já que a barra é suposta ser uniforme e rígida.

Se adotarmos como referencial inercial um sistema cartesiano com versores \vec{i} e \vec{j} , com o primeiro ao longo da horizontal, na direção positiva da coordenada s na situação de equilíbrio e o segundo ortogonal ao primeiro, para cima, o vetor posição de um ponto qualquer ao longo da barra é dado por

$$\vec{r} = s \cos \theta \vec{i} - s \sin \theta \vec{j}$$

Assim, o vetor velocidade é dado pela derivada do vetor posição em relação ao tempo, i.e.

$$\vec{v} = -s \dot{\theta} (\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

Então, o módulo deste resultado ao quadrado fica sendo apenas

$$v^2 = (s \dot{\theta})^2 \quad (g)$$

A energia cinética do sistema pode ser obtida pela substituição dos resultados (f) e (g) na definição (e), ou seja

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (s \dot{\theta})^2 \frac{m}{L} ds = \frac{1}{24} m (L \dot{\theta})^2 \quad (h)$$

Se admitirmos agora que os deslocamentos em translação $x(t)$ são de pequena magnitude (e, em consequência os deslocamentos em rotação $\theta(t)$ também o são), podemos aceitar como válida a linearização

$$x(t) = L \theta(t)$$

A substituição deste resultado na energia cinética (h) e a subsequente comparação com a energia cinética (d) permite, então, concluir que

$$m_{\text{eq}} = \frac{m}{12}$$

Note que esta equivalência em termos de massa depende do ponto em que a barra está pivotada e do ponto que se deseja analisar em termos de movimento.

3. Obtenha a equação de movimento do sistema mecânico da Figura 2.11. Deixe bem claro a coordenada generalizada utilizada e demais hipóteses adotadas para completar seu modelo analítico. Lembre-se que para girar em torno do eixo O, o cilindro também sofre translação paralela à base horizontal.

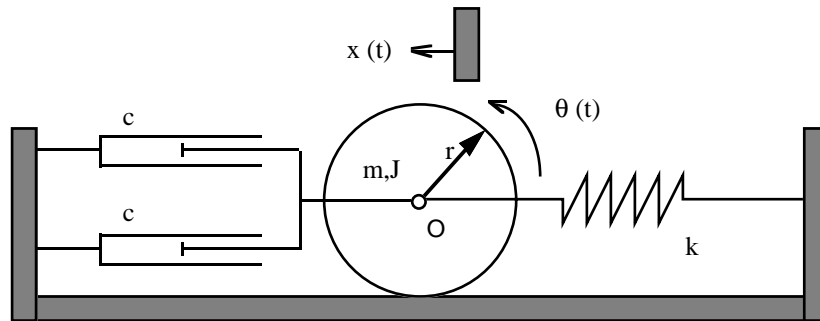


Figura 2.11: Sistema de um grau de liberdade em oscilação livre.

Vamos admitir que o cilindro execute oscilações de pequena amplitude e que não deslize. O cilindro tem seção circular, de raio r , massa m e momento de inércia J em torno de um eixo ortogonal ao plano do papel, passando pelo ponto O. Os amortecedores de coeficiente c e a mola de coeficiente k são considerados ideais, conforme discutido na seção 2.2 do texto. Assim, podemos usar como coordenada generalizada do problema tanto o deslocamento horizontal $x(t)$ do ponto O, quanto o deslocamento angular $\theta(t)$ do cilindro em torno do seu eixo, a partir da posição de equilíbrio do sistema. Não havendo deslizamento, essas coordenadas relacionam-se por

$$x(t) = r \theta(t) \quad (i)$$

A título de exercício, vamos aqui utilizar as duas possibilidades de análise através das Equações de Lagrange. Na falta de esforços externos excitando o sistema, essas equações são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (j)$$

Dentro das hipóteses definidas, a energia cinética do sistema é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

a energia potencial elástica é escrita como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2$$

e, observando que os dois amortecedores estão em paralelo, a função dissipação de Rayleigh do sistema fica sendo simplesmente

$$\mathcal{D} = c \dot{x}^2 = c r^2 \dot{\theta}^2 \quad (k)$$

Se usarmos a relação (i), essas funções de energia podem ser escritas exclusivamente em termos de $x(t)$ e de $\dot{x}(t)$ ou em termos de $\theta(t)$ e de $\dot{\theta}(t)$. Com isto, a função Lagrangeana do sistema fica dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{r^2} \right) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(m r^2 + J \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k r^2 \theta^2 \quad (l)$$

Com os resultados (k) e (l) obtidos, se efetuarmos as diferenciações requeridas pelas equações de Lagrange (j) obtemos as seguintes equações de movimento para o sistema:

- para o grau de liberdade $x(t)$

$$\left(m + \frac{J}{r^2} \right) \ddot{x} + 2 c \dot{x} + k x = 0 \quad (m)$$

- para o grau de liberdade $\theta(t)$

$$\left(m r^2 + J \right) \ddot{\theta} + 2 c r^2 \dot{\theta} + k r^2 \theta = 0 \quad (n)$$

Note que os resultados (m) e (n) diferem entre si. No entanto, se dividirmos os coeficientes de seus termos de rigidez pelos de seus termos de inércia, respectivamente, obtemos um resultado invariante, i.e.

$$\frac{k}{m + \frac{J}{r^2}} = \frac{k r^2}{m r^2 + J}$$

Como veremos no próximo capítulo, este resultado é o quadrado da frequência natural não-amortecida do sistema, medida em rad/s, a qual deve obviamente ser independente da coordenada generalizada utilizada para análise.

Exercícios Propostos

1. Tente estabelecer rigorosamente a equivalência entre os sistemas da Figura 2.9 utilizando desta vez a igualdade entre as energias potenciais elásticas dos dois sistemas. Você há de obter o mesmo resultado da equação (c).
2. A Figura 2.12 mostra parte do modelo analítico de uma balança de braços. Procure simplificar este modelo, obtendo o sistema de um grau de liberdade com massa e rigidez equivalentes no ponto O.

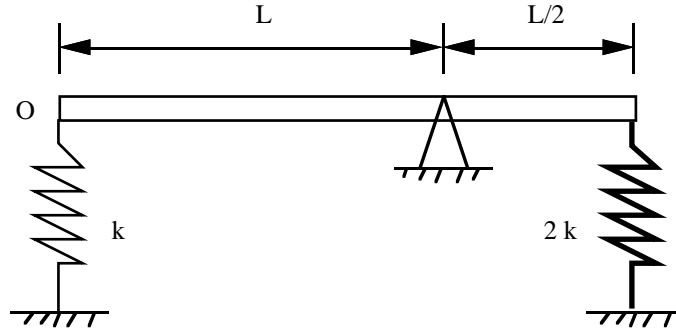


Figura 2.12: Modelo de uma balança.

3. Um disco de momento de inércia J em torno de um eixo que passa pelo seu centro pode executar rotações $\theta(t)$ a partir de uma posição de equilíbrio. O movimento é restrito por uma mola torcional de rigidez K_θ e por um amortecedor viscoso linear com a velocidade angular, de coeficiente C_θ . O movimento também pode ser excitado por um torque externo $Q_\theta(t)$. Forneça o modelo analítico e deduza a equação de movimento deste sistema utilizando os seis métodos estudados neste texto.
4. Um controlador de posição composto por uma massa m vibra livremente restrito por duas molas e dois amortecedores, como mostra a Figura 2.13.

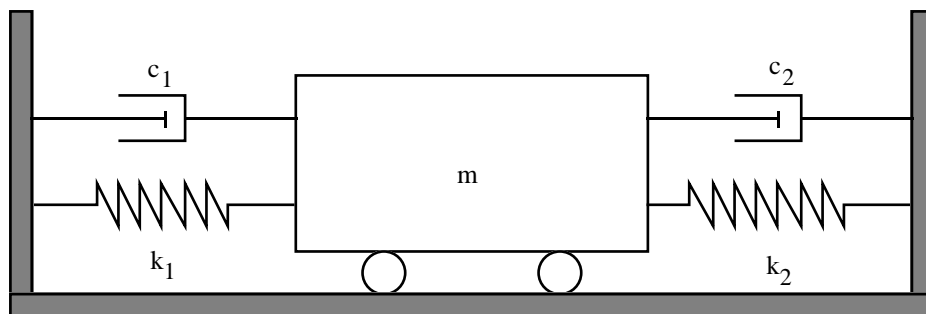


Figura 2.13: Modelo de um controlador de posição.

- (a) As molas k_1 e k_2 (ou amortecedores c_1 e c_2) estão em série ou em paralelo? Se você fosse substituí-las(los) por uma única mola (amortecedor) de rigidez k_{eq} (coeficiente de amortecimento c_{eq}), qual seria a relação entre os coeficientes?
- (b) Aproveite para recordar um pouco de Física e apresentar as relações capazes de substituir molas (amortecedores) em série ou em paralelo por molas (amortecedores) de coeficientes equivalentes.

- (c) Finalmente, obtenha a equação de movimento do sistema usando
- o Princípio de D'Alembert;
 - o Princípio da Conservação de Energia;
 - o Princípio de Hamilton.
5. O pêndulo simples, apesar do nome e da aparência, é um sistema mecânico complexo. Para mostrar isso, siga o roteiro de estudo abaixo.
- (a) Deduza a equação de movimento exata do sistema usando os seguintes métodos:
- a Segunda Lei de Newton;
 - o Princípio dos Deslocamentos Virtuais; e
 - o método das Equações de Lagrange.
- (b) Use o esquema discutido no texto para encontrar a(s) posição(ões) de equilíbrio do sistema.
- (c) Adote pequenas perturbações em torno dessa(s) posição(ões) de equilíbrio e tire conclusões sobre a estabilidade do sistema.
- (d) Mostre no Plano de Laplace a posição das raízes no caso anterior e reforce as suas conclusões sobre a estabilidade do sistema em torno dessa(s) posição(ões) de equilíbrio.
6. Em sala estudamos o sistema massa m e mola k ideal. Neste sistema a mola reage elasticamente de forma linear com o deslocamento, mas não possui massa. De forma a tornar a análise mais realista, suponha que a mola possui massa total m_m distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento. Admita que esta massa distribuída “estique” ou “encolha” linearmente com a deflexão global da mola, de forma que sua extremidade fixa permaneça fixa e sua extremidade móvel se desloque tanto quanto a massa m . Nestas condições, mostre que podemos continuar considerando a mola ideal, desde que um terço de m_m esteja concentrada junto com m . De forma a provocar a curiosidade do leitor e estabelecer um elo de ligação com o próximo capítulo, pergunta-se: Qual é a influência da massa da mola na frequência natural do sistema?

Capítulo 3

Vibrações Livres de Sistemas de Um Grau de Liberdade

3.1 Introdução

Neste capítulo o leitor será submetido ao começo da terceira parte da tarefa de análise de sistemas mecânicos de um grau de liberdade em vibração: a da investigação do comportamento dinâmico desses sistemas. Tendo passado no capítulo anterior por um treinamento em modelamento analítico e em modelamento matemático, o leitor já é certamente competente na arte de obter as equações de movimento de sistemas mecânicos. Agora é chegada a hora de resolver essas equações e tirar conclusões sobre a resposta das estruturas.

Estamos inicialmente interessados na resposta de sistemas excitados por condições iniciais. Em outras palavras, às estruturas será dada uma energia inicial sob forma de energia mecânica (cinética e potencial) e desejamos conhecer como o sistema lida com esta energia. Começamos com o estudo de sistemas conservativos e depois passamos para sistemas dissipativos. No segundo caso, trataremos inicialmente os sistemas que possam ser modelados como tendo perda energética segundo o modelo viscoso linear. Por fim, estudamos o caso de atrito seco, segundo o modelo de Coulomb.

O assunto abordado é elementar, por se restringir a um grau de liberdade apenas. Porém, o assunto é básico para a compreensão dos problemas mais avançados dos capítulos que se seguem. No tratamento das equações diferenciais de movimento é utilizada a técnica de transformadas de Laplace no sentido de criar uma interface amigável com a formulação que permitirá, mais tarde, efetuar o controle de vibração de sistemas estruturais.

3.2 Vibrações Livres sem Amortecimento

Conforme verificado no capítulo anterior, o nosso sistema protótipo de um grau de liberdade, mostrado na Figura 2.1, tem como equação de movimento o seguinte resultado:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (3.1)$$

Dizemos que o sistema está em vibração livre quando não existem forças externas alterando o seu movimento. Matematicamente, isto equivale a fazer $F(t) = 0$. A equação (3.1) torna-se, portanto, homogênea. Neste caso, como poderemos verificar, movimento só pode ocorrer se o sistema for excitado por condições iniciais não-nulas, isto é, se no instante $t = 0$ a posição e/ou a velocidade do carro forem diferentes de zero.

Por outro lado, dizemos que o sistema não é amortecido quando a sua energia mecânica não é dissipada com o tempo. Isto é obviamente uma idealização, pois existem diversos mecanismos naturais que dissipam inevitavelmente a energia de qualquer sistema. Esta realidade é uma verificação natural da Segunda Lei da Termodinâmica. No entanto, na eventualidade desta abstração ser possível, isto equivaleria em nosso modelo a fazer nulo o coeficiente c do amortecedor. Nesta condição, a equação (3.1) reduz-se a

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3.2)$$

onde

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T_n} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é, como veremos, a *freqüência natural circular não-amortecida de vibração do sistema*. Esta freqüência é medida em radianos/segundo, enquanto a freqüência natural não-circular f_n é medida em Hertz (ciclos/segundo) e o período da vibração T_n é medido em segundos. Por se tratar de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, o problema (3.2) só fica bem-posto matematicamente com a adição de duas condições iniciais linearmente independentes. Usualmente, estas condições são o deslocamento e a velocidade iniciais, isto é

$$x(t=0) = x_o \quad \text{e} \quad \dot{x}(t=0) = v_o \quad (3.3)$$

Existem diversas técnicas de resolução de uma equação diferencial como a equação (3.2). Dessas, vamos utilizar a técnica da transformada de Laplace, que é comumente utilizada em teoria de controle de sistemas. Esta técnica matemática permite transformar uma equação diferencial ordinária em equação algébrica, de mais fácil solução.

A transformada de Laplace de uma função temporal $f(t)$ é definida por

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3.4a)$$

A integração, neste caso, é feita ao longo do eixo real positivo. Em contrapartida, a transformada inversa de uma função transformada $\bar{f}(s)$ é dada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad \text{para } t > 0 \quad (3.4b)$$

A integração, neste caso, é feita ao longo de uma reta paralela ao eixo imaginário, à direita de todos os pontos singulares de $\bar{f}(s)$. Aqui, c é uma constante real chamada *constante de convergência*. Se o sistema for estável, podemos usar o próprio eixo imaginário como trajetória de integração. As definições (3.4) estabelecem uma relação dual entre as funções $f(t)$ e $\bar{f}(s)$, que são chamadas pares de transformada de Laplace, encontrados em muitas tabelas de uso prático na resolução de problemas.

A aplicação da transformada de Laplace à equação diferencial (3.2) fornece

$$\mathcal{L}(\ddot{x} + \omega_n^2 x) = 0$$

Mas,

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2 \bar{x}(s) - s x_o - v_o$$

e

$$\mathcal{L}(\omega_n^2 x) = \omega_n^2 \bar{x}(s)$$

Coletando esses resultados e resolvendo para $\bar{x}(s)$, obtemos

$$\bar{x}(s) = \frac{s x_o + v_o}{s^2 + \omega_n^2} \quad (3.5)$$

Se igualarmos o denominador deste resultado a zero, obtemos a chamada *equação característica* do sistema. As raízes desta equação são chamadas *polos* e determinam, dependendo de sua localização no plano de Laplace, a condição de estabilidade do sistema. Neste caso, essas raízes são

$$s_{1,2} = \pm i \omega_n \quad (3.6)$$

e o sistema possui estabilidade neutra, ou seja, é conservativo, como veremos a seguir. Já o numerador do resultado (3.5) é totalmente dependente das condições iniciais e mostra que, se não for por elas, o sistema não terá movimento. A raiz do numerador é chamada de zero do sistema.

A tarefa agora consiste em inverter o resultado (3.5) de forma a obter $x(t)$. Ao invés de utilizarmos diretamente a integral (3.4b), vamos aqui empregar a técnica de expansão em frações parciais. Para isto, verificamos que é possível escrever

$$\bar{x}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ são polinômios em s . De imediato vemos que

$$B(s) = (s + i \omega_n)(s - i \omega_n)$$

Em conseqüência, o resultado (3.5) pode ser reescrito na forma

$$\bar{x}(s) = \frac{C_1}{s + i \omega_n} + \frac{C_2}{s - i \omega_n}$$

onde

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -i \omega_n} (s + i \omega_n) \bar{x}(s) = \frac{1}{2} \left(x_o + i \frac{v_o}{\omega_n} \right) \quad (3.7a)$$

e

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow i \omega_n} (s - i \omega_n) \bar{x}(s) = \frac{1}{2} \left(x_o - i \frac{v_o}{\omega_n} \right) \quad (3.7b)$$

Sabemos que o seguinte par de transformadas de Laplace é válido

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - a}\right) = e^{at}$$

Em conseqüência

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{x}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C_1}{s + i \omega_n} + \frac{C_2}{s - i \omega_n}\right) = C_1 e^{-i \omega_n t} + C_2 e^{i \omega_n t}$$

Se agora usarmos a regra de Euler de expansão das exponenciais em funções trigonométricas e substituirmos para as constantes os valores obtidos em (3.7a) e (3.7b), a solução que buscamos fica expressa por

$$x(t) = x_o \cos \omega_n t + \frac{v_o}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (3.8)$$

Este resultado mostra que o sistema oscila harmonicamente com frequência ω_n com amplitude e ângulo de fase que dependem, como veremos, das condições iniciais x_o e v_o .

Vale a pena analisarmos o resultado (3.8) do ponto de vista conceitual. Os conceitos de conservação de energia e estabilidade de sistemas mecânicos são interrelacionados, porém distintos. Dizemos que um sistema mecânico é *conservativo* se este conserva a sua energia mecânica (potencial e cinética) com o tempo. Esta é uma abstração física, pois contraria a Segunda Lei da Termodinâmica, porém é uma abstração bastante útil em termos de análise. Por outro lado, um sistema é dito *não-conservativo* caso a sua energia mecânica mude com o tempo, seja para maior ou para menor.

Um sistema é *estável* se este possui um limitante energético superior, isto é, se existe sempre um valor fixo de energia que é igual ou maior que a energia mecânica do sistema. Por isso, todo sistema conservativo é estável. Já os sistemas não-conservativos serão estáveis apenas se seus conteúdos energéticos diminuïrem com o tempo. Como o sistema descrito acima, com movimento dado pela equação (3.8), tem um conteúdo energético limitado e constante, dizemos que o sistema é conservativo e estável. Ao longo deste texto deveremos entrar em contato com sistemas que possuem comportamento distinto do aqui descrito.

Sem dúvida alguma, a solução (3.8) poderia ter sido obtida de forma bem mais simples do que a que foi empregada aqui. No entanto, desejamos exercitar esta formidável ferramenta de análise da matemática operacional que é a transformada de Laplace de forma a poder interfacear os presentes resultados com as técnicas de controle ativo de vibrações de estruturas que são atualmente desenvolvidas. Portanto, o uso de transformadas de Laplace é justificado pelo treinamento que inspira e pelas aplicações mais sofisticadas para as quais o leitor deve se preparar.

A solução (3.8) também pode ser apresentada em forma alternativa, de bastante utilidade em análise. Esta forma é dada por

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (3.9)$$

onde A é chamada amplitude da oscilação (medida em metros) e ϕ é o seu ângulo de fase (medido em radianos). A amplitude fornece o valor máximo de deslocamento do sistema ao longo de seu período de oscilação. O ângulo de fase indica o quanto a oscilação real está atrasada em relação a um movimento cossenoidal puro que é tomado como referência. Tradicionalmente, expressamos ϕ como um ângulo com valor no intervalo $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$. Neste caso, dizemos que

- a oscilação está *em fase* se $0^\circ \leq \phi < 90^\circ$;
- a oscilação está *em quadratura* se $\phi = 90^\circ$; e
- a oscilação está *fora de fase* se $90^\circ < \phi \leq 180^\circ$.

A amplitude e a fase podem ser obtidas em função das condições iniciais. Se expandirmos a função trigonométrica da solução (3.9) e compararmos o resultado com a forma (3.8), obtemos

$$x_o = A \cos \phi \quad \text{e} \quad \frac{v_o}{\omega_n} = A \sin \phi$$

de onde

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{v_o}{\omega_n x_o} \quad (3.10)$$

Esta solução alternativa pode ser interpretada graficamente na forma do conhecido *Diagrama de Argand*. Este diagrama nada mais é que a representação do plano de fase do sistema apresentado no capítulo anterior. Neste diagrama, mostrado na Figura 3.1, colocamos o deslocamento $x(t)$ do carro no eixo das abscissas e a “velocidade” $\dot{x}(t)/\omega_n$ no eixo das ordenadas. O resultado

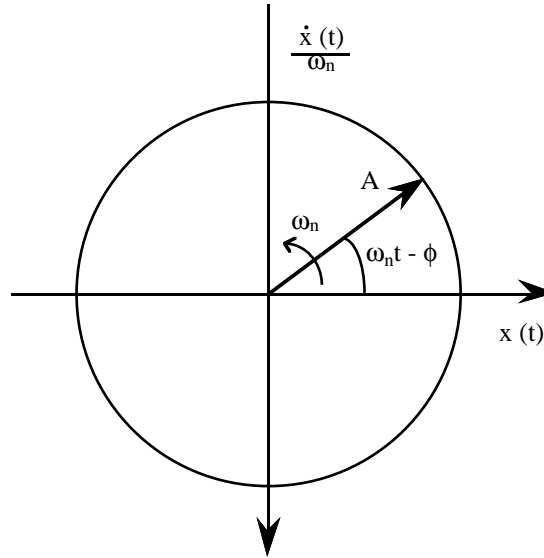


Figura 3.1: Diagrama de Argand do oscilador harmônico sem amortecimento.

é uma circunferência de raio igual a A , que pode ser interpretada como o rastro de um fasor de amplitude A que gira com velocidade angular ω_n no sentido anti-horário.

Conforme discutido no Capítulo 2, a circunferência que aparece nesse diagrama é a união de todos os possíveis estados que o sistema pode assumir ao longo de um período de oscilação. Um resultado como este é característico de um sistema conservativo e neutralmente estável. Um sistema não-conservativo e assintoticamente estável apresentar-se-ia como uma espiral convergente para a origem do diagrama, significando gasto de energia com o tempo. Finalmente, um sistema não-conservativo e assintoticamente instável apresentar-se-ia como uma espiral divergente, que se afastaria da origem com amplitude sempre crescente, significando absorção de energia com o tempo. Conceitos como estes são importantes e merecem ser considerados quando da análise de sistemas mecânicos, mesmo se estes forem simples.

3.3 Vibrações Livres com Amortecimento Viscoso

Agora podemos reconsiderar as simplificações feitas na seção anterior e reintroduzir no modelo matemático o efeito do amortecedor viscoso linear. A equação de movimento é dada por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$

Se dividirmos esta equação por m , podemos reescrevê-la na forma padrão de vibração de um grau de liberdade que é a seguinte:

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3.11)$$

onde ζ é um parâmetro adimensional chamado *fator de amortecimento* do sistema, que se relaciona com os demais parâmetros da seguinte forma:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (3.12)$$

Como veremos, $c_{cr} = 2m\omega_n$ é o chamado *amortecimento crítico* do sistema, aquele que justamente separa o comportamento dinâmico do sistema em vibração livre entre oscilatório e não-oscilatório. Neste quadro, podemos definir três faixas de valores para o fator de amortecimento ζ , às quais correspondem três tipos de comportamento dinâmico:

- amortecimento subcrítico ($0 < \zeta < 1$)
- amortecimento crítico ($\zeta = 1$)
- amortecimento supercrítico ($\zeta > 1$)

Vamos aqui fazer um estudo geral do problema antes de tratar cada um dos casos separadamente.

3.3.1 Solução Geral

Se aplicarmos a transformada de Laplace a ambos os lados da equação (3.11), obtemos

$$\mathcal{L}(\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x) = 0 \quad (3.13)$$

Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{x}) &= s^2\bar{x} - sx_o - v_o \\ \mathcal{L}(2\zeta\omega_n\dot{x}) &= 2\zeta\omega_n(s\bar{x} - x_o) \\ \mathcal{L}(\omega_n^2x) &= \omega_n^2\bar{x} \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados em (3.13) e rearranjando os termos, obtemos

$$\bar{x}(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_o + v_o}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2} \quad (3.14)$$

A equação característica do sistema é dada pelo denominador de (3.14), isto é

$$s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2 = 0 \quad (3.15)$$

As raízes desta equação são as seguintes:

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\omega_n \quad (3.16)$$

De posse desse resultado, devemos fazer os seguintes comentários:

1. Considere o limite ideal em que $\zeta = 0$. Se não existe amortecimento, as raízes (3.16) reduzem-se para os valores expressos em (3.6), quando temos duas raízes imaginárias puras, de igual módulo e de sinais contrários.
2. No caso de amortecimento subcrítico ($0 < \zeta < 1$), temos duas raízes distintas, complexas conjugadas.
3. No limite crítico em que $\zeta = 1$ temos a coalescência das duas raízes complexas conjugadas em um único valor real $s_{1,2} = -\omega_n$.
4. No caso de amortecimento supercrítico ($\zeta > 1$) temos duas raízes reais, distintas e negativas.
5. Qualquer que seja o caso, conforme observado anteriormente, o sistema é estável (neutralmente ou assintoticamente).

Estas observações podem ser visualizadas mais facilmente na Figura 3.2, a qual mostra o diagrama de lugar das raízes da equação característica (3.15), tendo o fator de amortecimento ζ como parâmetro. Se, hipoteticamente, pudéssemos aumentar pouco a pouco o amortecimento do sistema a partir do caso conservativo, veríamos um par de raízes sair do eixo imaginário e caminhar ao longo de uma circunferência de raio ω_n . Haveria um encontro das duas raízes no eixo real no valor $s = -\omega_n$ e, dali, uma raiz partiria para a direita e outra para a esquerda. No limite abstrato em que o amortecimento fosse infinito, veríamos uma raiz chegar à origem do plano de Laplace e outra chegar ao final do eixo real negativo.

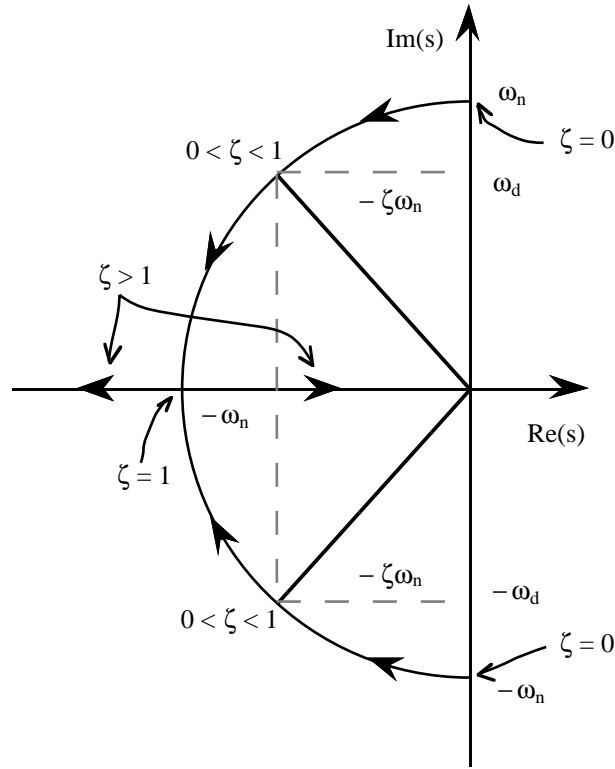


Figura 3.2: Lugar das raízes do sistema linear amortecido como função de ζ .

3.3.2 Caso Subcrítico

Sabemos, da discussão anterior, que quando $0 < \zeta < 1$ o sistema oscila com amplitude decrescente. Se definirmos uma *frequência natural circular amortecida do sistema* na forma

$$\omega_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T_d} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.17)$$

as raízes (3.16) da equação característica podem ser reescritas como

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d \quad (3.18)$$

A inversão da transformada de Laplace $\bar{x}(s)$ dada por (3.14) leva-nos à seguinte expansão em frações parciais:

$$\bar{x}(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2}$$

cuja transformada inversa é dada por

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (3.19)$$

As constantes que aparecem nesta solução são obtidas de

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \bar{x}(s) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - i \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \right) x_o - i \frac{v_o}{\omega_d} \right] \quad (3.20a)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \bar{x}(s) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + i \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \right) x_o + i \frac{v_o}{\omega_d} \right] \quad (3.20b)$$

Se substituirmos as constantes (3.20a) e (3.20b) e as raízes (3.18) na resposta (3.19), usarmos a regra de Euler de expansão de exponenciais em funções trigonométricas

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

e coletarmos algebricamente termos semelhantes, obtemos o seguinte resultado para a posição $x(t)$ do carro do sistema protótipo em vibração livre com amortecimento subcrítico:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[x_o \cos \omega_d t + \left(\zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} x_o + \frac{v_o}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right] \quad (3.21)$$

Observamos que o sistema oscila, agora com frequência natural amortecida ω_d , controlado por um envelope externo de amplitude exponencial decrescente. O Diagrama de Argand agora produziria uma trajetória espiral, a partir das condições iniciais, com amplitude governada pelo parâmetro $\zeta \omega_n$. Para um tempo t razoavelmente longo a trajetória dinâmica do sistema coincidiria com a origem do diagrama, significando que o sistema retornaria ao repouso.

Como forma alternativa, a resposta (3.21) pode ser apresentada como

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad (3.22)$$

onde vemos que o sistema oscila harmonicamente com amplitude A e frequência ω_d , com um ângulo de fase ϕ . Se expandirmos a função trigonométrica em (3.22) e compararmos a expansão com a resposta (3.21), podemos obter as seguintes relações entre a amplitude e o ângulo de fase com as condições iniciais do movimento:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o + \zeta \omega_n x_o}{\omega_d} \right)^2} \quad e \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{v_o}{\omega_d x_o} + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \right) \quad (3.23)$$

que são generalizações dos resultados (3.10) para $\zeta \neq 0$. Esta forma de solução é bastante útil na resolução de problemas práticos de engenharia, como veremos a seguir.

Note que toda a formulação apresentada nesta subseção admite o limite quando ζ vai a zero de maneira trivial. Assim, o caso de vibração livre sem amortecimento pode ser recuperado sem problemas. O mesmo acontece para o limite crítico, isto é, quando $\zeta \rightarrow 1$, embora este limite exija algum cuidado. Neste caso, a solução tem uma forma especial.

3.3.3 Caso Crítico

Quando o fator de amortecimento $\zeta = 1$, temos o caso em o sistema protótipo vibra livremente na condição crítica. Como veremos, não existem oscilações. O sistema experimenta uma redução constante de sua energia mecânica, a partir de suas condições iniciais de posição e velocidade.

A resposta transformada $\bar{x}(s)$ (3.14) para $\zeta = 1$ reduz-se para

$$\bar{x}(s) = \frac{(s + 2\omega_n)x_o + v_o}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.24)$$

A equação característica agora é dada por

$$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \omega_n)^2 = 0 \quad (3.25)$$

cujas duas raízes, como mostrado na Figura 3.2, coalescem em $s_{1,2} = -\omega_n$. Neste caso particular de raízes coincidentes, a expansão da resposta transformada $\bar{x}(s)$ em frações parciais fica dada por

$$\bar{x}(s) = \frac{C_1}{(s + \omega_n)^2} + \frac{C_2}{s + \omega_n}$$

cuja transformada inversa é

$$x(t) = C_1 t e^{-\omega_n t} + C_2 e^{-\omega_n t} \quad (3.26)$$

As constantes C_1 e C_2 na resposta (3.26) são dadas por

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -\omega_n} (s + \omega_n)^2 \bar{x}(s) = \omega_n x_o + v_o \quad (3.27a)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -\omega_n} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s + \omega_n)^2 \bar{x}(s) \right] \right\} = x_o \quad (3.27b)$$

A substituição das constantes (3.27a) e (3.27b) na resposta (3.26) fornece

$$x(t) = [x_o + (\omega_n x_o + v_o) t] e^{-\omega_n t} \quad (3.28)$$

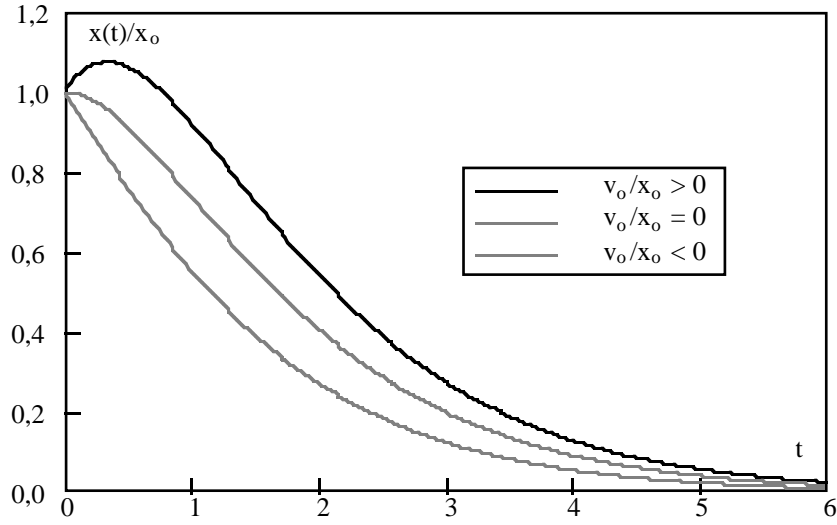


Figura 3.3: Efeito da velocidade inicial na resposta de um sistema com amortecimento crítico.

Podemos observar que a resposta possui um caráter não-oscilatório, com diminuição exponencial da resposta. Note também que, enquanto o deslocamento inicial afeta a resposta das duas raízes, a velocidade inicial afeta apenas uma das raízes. Para que possamos compreender o papel da velocidade inicial neste caso, a Figura 3.3 mostra as respostas de um sistema com mesmo deslocamento inicial, porém com velocidades iniciais positiva, nula e negativa.

3.3.4 Caso Supercrítico

Como condição de fronteira, o caso crítico é de difícil realização prática. Uma pequena perturbação em parâmetros pode torná-lo subcrítico ou supercrítico. No primeiro caso, temos oscilações livres amortecidas. No segundo caso, sabemos da Figura 3.2 que resultam da equação característica duas raízes reais, distintas e negativas. Em consequência, a resposta livre é não-oscilatória e amortecida com o tempo.

Para $\zeta > 1$, a equação característica volta a ser dada por (3.15). No entanto, as raízes são dadas por

$$s_{1,2} = - \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega_n \quad (3.29)$$

Uma dessas raízes, por estar à esquerda de $-\omega_n$ no eixo real do plano de Laplace, faz a sua parte da resposta do sistema no tempo desaparecer rapidamente, sendo chamada de raiz “rápida”.

Em comparação, a outra raiz, por estar à direita de $-\omega_n$ no eixo real, faz a sua parte da resposta demorar mais a desaparecer, sendo chamada de raiz “lenta”. Em certos sistemas bem amortecidos, depois de um transitório inicial, sobrevive apenas a parcela devida à raiz dita lenta.

A resposta transformada $\bar{x}(s)$ volta a permitir uma expansão em frações parciais semelhante à do caso subcrítico, isto é

$$\bar{x}(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2}$$

com transformada inversa dada por (3.19). As constantes que aparecem nesta solução são obtidas de

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \bar{x}(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} x_o + \frac{v_o}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \quad (3.30a)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \bar{x}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} x_o + \frac{v_o}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \quad (3.30b)$$

Se definirmos a “frequência” circular

$$\omega_* = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

a substituição das constantes (3.30) na resposta (3.19) permite obter, após algum algebrismo, o seguinte resultado:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(x_o \cosh \omega_* t + \frac{\zeta \omega_n x_o + v_o}{\omega_*} \sinh \omega_* t \right) \quad (3.31)$$

Novamente, esta resposta tem duas parcelas, uma que depende apenas do deslocamento inicial e outra que depende do deslocamento e velocidade iniciais. O efeito da velocidade inicial na resposta do sistema é semelhante ao apresentado para o caso crítico na Figura 3.3.

Note que todos os resultados obtidos nesta subseção admitem o limite teórico em que o fator de amortecimento vai a infinito. Com alguns cuidados, o mesmo acontece com o limite em que $\zeta \rightarrow 1$, mostrando que o caso crítico é realmente especial. Por exemplo, podemos mostrar que o limite da resposta (3.31) quando $\zeta \rightarrow 1$ é dado exatamente pela resposta (3.28) do caso crítico. Coisa semelhante acontece quando fazemos o limite do caso subcrítico para o caso crítico, isto é, podemos verificar que a resposta (3.28) é o exato limite da resposta (3.21) quando fazemos o limite $\zeta \rightarrow 1$. Para isto, é preciso observar que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sinh \omega_* t}{\omega_*} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sinh \omega_d t}{\omega_d} = t$$

A obtenção desses limites fica como exercício para o estimado leitor.

A maioria dos casos de sistemas amortecidos encontrados na prática pode ser modelada como pertencente ao regime subcrítico. Porém, o caso supercrítico também encontra aplicações industriais, merecendo ser estudado com atenção.

Para completar esta seção, apresentamos na Figura 3.4 a resposta do sistema protótipo para um mesmo conjunto de condições iniciais de deslocamento e velocidade nos casos subcrítico, crítico e supercrítico. Estas curvas são representações gráficas das respostas (3.21), (3.28) e (3.31), respectivamente. Caso o leitor queira reproduzi-las, elas foram obtidas para o seguinte conjunto de valores: $\omega_n = 1$ rad/s, $v_o/x_o = 0,5$ s⁻¹, $\zeta_{\text{sub}} = \sqrt{2}/4$ e $\zeta_{\text{sup}} = 2\sqrt{2}$. Podemos observar desta figura que

- em todos os casos há amortecimento, com gasto de energia;
- o caso subcrítico é oscilatório em torno da posição de equilíbrio $x = 0$;

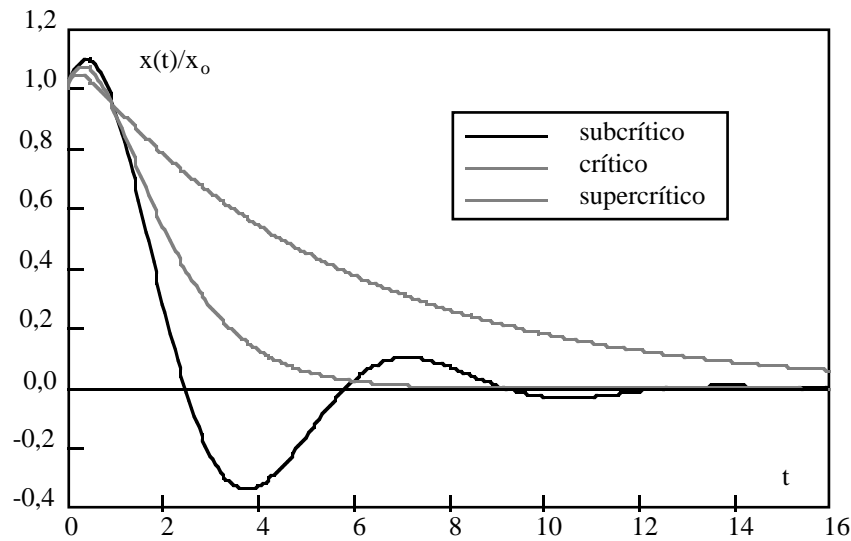


Figura 3.4: Efeito do fator de amortecimento na resposta livre para mesmas condições iniciais.

- os casos crítico e supercrítico têm convergência monotônica e assintótica para a posição de equilíbrio;
- em termos de rapidez para se atingir a posição de equilíbrio e lá permanecer, o caso crítico é preferível; e
- em termos de lentidão para se atingir a posição de equilíbrio sem oscilações, o caso supercrítico é o indicado.

3.3.5 Determinação Experimental do Amortecimento

O acelerômetro é um sensor que, fixado a um objeto em movimento, produz um sinal proporcional à aceleração que o objeto está sofrendo instantaneamente. Acelerômetros modernos são pequenas peças com massa da ordem de 20 gramas. Esta pequena massa pode normalmente ser ignorada quando comparada com a massa do corpo em movimento. Esses sensores possuem em seus interiores cristais de quartzo que reagem quando pressionados segundo o efeito piezoelétrico, gerando uma carga elétrica. Esta carga, da ordem de microcoulombs, é proporcional à pressão (aceleração) sofrida pelo sensor. O sinal elétrico fornecido pelo acelerômetro pode ser integrado eletronicamente uma vez para fornecer uma medida da velocidade do corpo em movimento e uma segunda vez para fornecer a sua posição. Assim, um acelerômetro pode tornar-se um sensor extremamente útil, permitindo uma gama enorme de aplicações.

Vamos supor que tenhamos acesso à resposta de um sistema de um grau de liberdade em vibração livre, sujeito a condições iniciais. Vamos supor também que o sistema seja amortecido e que este amortecimento seja, na falta de um melhor modelo matemático, do tipo viscoso, linear e subcrítico. Em outras palavras, suponhamos dispor de um sinal gráfico como o fornecido pela curva do caso subcrítico que aparece na Figura 3.4. Este sinal pode ser obtido experimentalmente na tela de um osciloscópio, ao mostrar a resposta tratada eletronicamente de um acelerômetro ligado ao carro do sistema protótipo. O objetivo é obter, a partir desse resultado experimental, o fator de amortecimento ζ do sistema.

Dentro das hipóteses colocadas, a resposta do sistema pode ser dada pela equação (3.22). Se medirmos a posição x_1 do carro do sistema protótipo no instante t_1 e a posição x_2 exatamente

um período T_d mais tarde, podemos escrever a razão entre essas posições como segue

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_d)} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_d)} \cos[\omega_d (t_1 + T_d) - \phi]} \quad (3.32)$$

Como $\omega_d T_d = 2\pi$, então

$$\cos(\omega_d t_1 - \phi) = \cos[\omega_d (t_1 + T_d) - \phi]$$

e a razão (3.32) reduz-se a

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta \omega_n T_d}$$

Se tomarmos o logaritmo natural de ambos os lados deste resultado e definirmos o *decremento logarítmico* δ como sendo

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad (3.33)$$

basta invocar a relação entre ω_n e ω_d para que tenhamos

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.34)$$

Como δ pode ser medido experimentalmente, podemos calcular ζ invertendo a relação (3.34), ou seja,

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (3.35)$$

No caso das estruturas, em que o amortecimento é pequeno, o decremento logarítmico δ também é pequeno, de forma que o resultado (3.35) pode ser simplificado para

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (3.36)$$

Isto não ocorrerá para um sistema mecânico que disponha de amortecedores reais, como é o caso de suspensão de automóveis ou trem de pouso de aeronaves.

A exatidão da medida do fator ζ feita de acordo com este método depende da precisão com que é medido o decremento logarítmico δ . Para melhorar esta precisão, recomenda-se trabalhar com picos de sinal e tomar relações entre diversos picos. Fazendo-se uma média dos resultados, passa-se a dispor de um resultado mais confiável, principalmente se o sistema apresentar algum tipo de não-linearidade. Uma alternativa consiste em relacionar ao deslocamento x_1 do instante t_1 o deslocamento x_{n+1} medido n períodos após t_1 . Nesta hipótese, o decremento logarítmico definido em (3.33) fica dado por

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)$$

Como exemplo, vamos supor que um sinal tenha sua amplitude reduzida à metade após 5 ciclos completos de oscilação. Neste caso, o decremento logarítmico será

$$\delta = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{x_1}{x_6}\right) = \frac{1}{5} \ln 2 = 0,13863$$

Se aplicarmos agora a fórmula (3.35), obtemos $\zeta = 0,02206$, o que praticamente coincide com o resultado fornecido pela aproximação (3.36), já que o amortecimento do sistema é baixo, da ordem de 2,2%.

Uma outra técnica de medida, bastante útil em sistemas de alta frequência, é aquela que se preocupa apenas com o envelope do movimento. A partir de um determinado instante em que

a amplitude vale x_1 , medimos o intervalo de tempo $k T_d$ para que a amplitude se reduza para $x_1/2$. O que se mede agora é o número k , que não é necessariamente inteiro. De posse deste número, o fator de amortecimento ζ fica dado por

$$\zeta = \frac{\ln 2}{\sqrt{4\pi^2 k^2 + (\ln 2)^2}} \quad (3.37)$$

Para sistemas com baixo amortecimento, este resultado reduz-se para uma fórmula muito simples e prática, que se lê como

$$\zeta \approx \frac{0,11}{k} \quad (3.38)$$

O amortecimento de um sistema também pode ser quantificado através de um outro fator chamado *constante de tempo* ou *tempo de relaxação* τ do sistema. Este fator é comumente empregado na literatura de sistemas de controle, sendo definido como o intervalo de tempo em que a amplitude da oscilação é reduzida pela razão $1/e \approx 0,368$, ou seja, o tempo requerido para que a amplitude da oscilação perca 63% de seu valor. Desta definição, temos

$$\frac{x(t)}{x(t+\tau)} = e = e^{\zeta \omega_n \tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (3.39)$$

Como ω_n é um parâmetro associado ao sistema não-amortecido, τ pode ser encarado como um fator inversamente proporcional a ζ , devidamente escalado por ω_n . O fator de amortecimento pode ser calculado a partir da medição experimental de τ e ω_d através da fórmula

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_d^2 \tau^2}} \quad (3.40)$$

Para sistemas de pequeno amortecimento, em que $\omega_d \approx \omega_n$, ζ pode ser obtido a partir do resultado (3.39). A verificação da validade dessas fórmulas e aproximações fica como exercício para o leitor.

3.4 Vibrações Livres com Atrito Seco

Tendo estudado o problema de sistemas mecânicos em vibração livre com amortecimento do tipo viscoso, agora podemos tratar o problema em que o amortecimento é provido pelo atrito seco estabelecido entre duas superfícies em movimento relativo entre si. Este problema, além de ser importante para a análise de sistemas mecânicos encontrados na indústria, serve como introdução para o caso de vibrações forçadas que será discutido no próximo capítulo.

A Figura 3.5 mostra o nosso sistema protótipo da Figura 2.1 despojado de forças externas, de amortecedor e de rodas para o carro. Há contato direto entre a base do carro e a superfície do plano horizontal do laboratório. Assim, havendo movimento relativo entre essas duas superfícies, surge no carro uma força de atrito que resiste ao movimento e é proporcional ao peso do carro, podendo ser apresentada matematicamente segundo o modelo de Coulomb

$$F_a(t) = \mu m g \text{ sinal}(\dot{x}) \quad (3.41)$$

Neste modelo, μ é um coeficiente de atrito médio entre as duas superfícies, simulando as condições estáticas e dinâmicas entre elas. Já a função sinal de \dot{x} pode ser apresentada como

$$\text{sinal}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}} \quad (3.42)$$

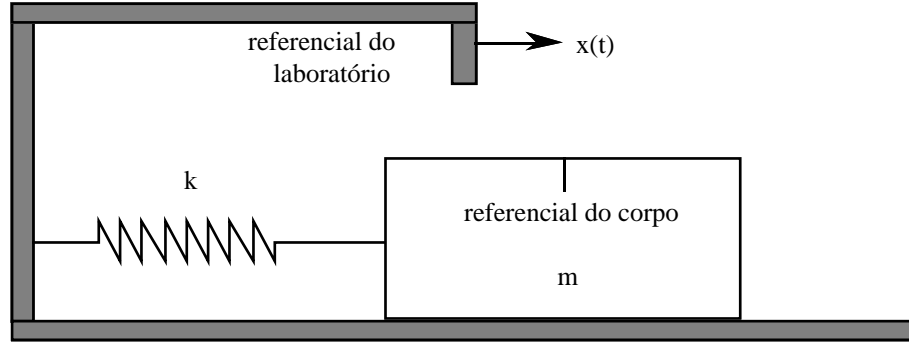


Figura 3.5: Sistema de um grau de liberdade com atrito de Coulomb.

Se substituirmos este modelo na equação de movimento do sistema, ficamos com duas equações diferenciais ordinárias não-homogêneas válidas para semiperíodos em que a velocidade do carro possui um determinado sinal, isto é

$$m \ddot{x} + kx = -\mu mg \quad \text{para } \dot{x} > 0 \quad (3.43a)$$

e

$$m \ddot{x} + kx = \mu mg \quad \text{para } \dot{x} < 0 \quad (3.43b)$$

Por serem não-homogêneas, essas equações diferenciais têm, cada uma, uma solução geral $x(t)$ composta por uma parte homogênea $x_h(t)$ e outra particular $x_p(t)$. A solução geral de cada uma dessas equações depende de duas condições iniciais que devem ser aplicadas às respectivas soluções gerais. A condição inicial de velocidade determina qual das equações (3.43) deverá ser utilizada para determinar o trecho da resposta do sistema a ser considerado.

Como demonstração, vamos considerar aqui o exemplo em que o carro da Figura 3.5 é deslocado a partir do seu equilíbrio ideal (energia potencial elástica nula na mola) de uma distância $x_o > 0$ e solto a partir do repouso. A Figura 3.6 mostra a resposta do sistema para condições iniciais $x(0) = x_o$ e $\dot{x}(0) = 0$, quando utilizamos a equação (3.43b) no primeiro semiperíodo. Se definirmos um deslocamento adimensional crítico x^* tal que

$$x^* = \frac{\mu mg}{k x_o}$$

a resposta geral do sistema é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.44)$$

onde a solução homogênea é escrita como

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (3.45)$$

e a solução particular é simplesmente

$$x_p(t) = x^* x_o$$

A substituição dessas soluções parciais na solução geral (3.44) e a aplicação subsequente das condições iniciais permite obter como resposta no primeiro semiperíodo a seguinte expressão:

$$\frac{x(t)}{x_o} = (1 - x^*) \cos \omega_n t + x^* \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_n} \quad (3.46)$$

No instante $t = \pi/\omega_n$ a velocidade do carro troca de sinal, tornando-se positiva na posição $x = -(1 - 2x^*)x_o$. Essas novas condições iniciais devem ser impostas à solução geral da equação (3.43a), que regula o movimento no seu segundo semiperíodo. A nova solução homogênea é idêntica à equação (3.45) e a nova solução particular é

$$x_p(t) = -x^*x_o$$

A substituição das novas soluções parciais na solução geral (3.44) e a aplicação subsequente das novas condições iniciais permite obter como resposta no segundo semiperíodo o seguinte resultado:

$$\frac{x(t)}{x_o} = (1 - 3x^*) \cos \omega_n t - x^* \quad \text{para } \frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (3.47)$$

Ao término do período, há nova troca de sinal de velocidade, passando a ser válida novamente a equação de movimento (3.43b), a partir da posição $x = (1 - 4x^*)x_o$. E assim consecutivamente!

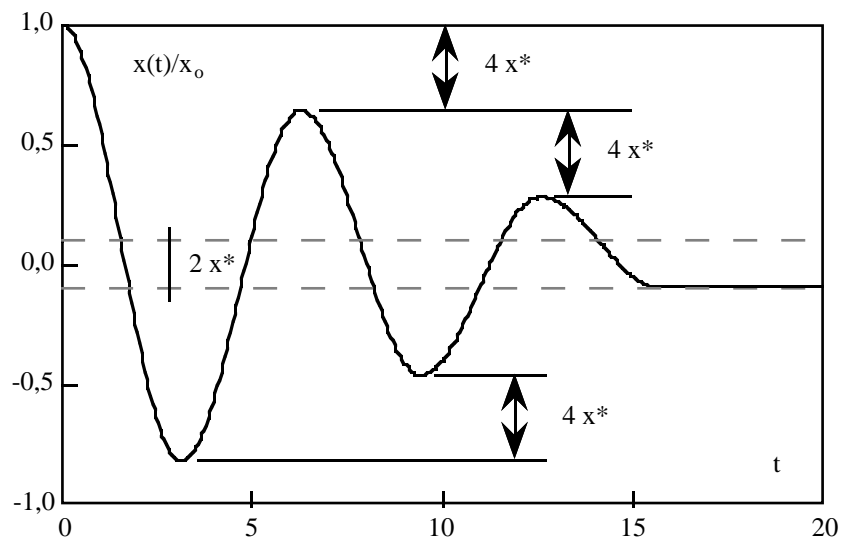


Figura 3.6: Resposta do sistema de um grau de liberdade com atrito seco.

Em resumo, podemos tirar da Figura 3.6 e da discussão apresentada as seguintes observações:

- A descontinuidade da função forçante, sendo aparente no modelo matemático, não o é na resposta, isto é, a curva do deslocamento é contínua, com derivadas contínuas, filtrando a descontinuidade da excitação.
- O carro oscila na frequência natural não-amortecida ω_n , mas a amplitude adimensionalizada do movimento cai $4x^*$ por ciclo.
- O amortecimento do sistema desta vez tem um envelope externo linear, em contraste com a queda exponencial do amortecimento viscoso.
- O sistema deixa de oscilar quando atingir velocidade nula com deslocamento dentro da faixa $-x^* < x(t)/x_o < x^*$, mostrada entre linhas tracejadas na Figura 3.6. Portanto, o carro não se imobiliza necessariamente na condição de mínima energia potencial elástica, como ocorre no caso de amortecimento viscoso.

Caso o leitor queira reproduzir a Figura 3.6, foi utilizado o valor 0,09 para o parâmetro x^* . Observa-se que o carro estaciona na posição $x(t)/x_o \approx -0,08$.

3.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos a vibração de sistemas mecânicos de um grau de liberdade, modelados segundo o sistema protótipo da Figura 2.1, livres da atuação de forças externas. Iniciamos pelo caso em que não há amortecimento, quando apresentamos o conceito de frequência natural de vibração não-amortecida. Passamos, posteriormente, para o caso em que o amortecimento é do tipo viscoso, quando estudamos os casos subcrítico, crítico e supercrítico. No caso subcrítico, o mais importante deles, foram apresentados os conceitos de fator de amortecimento e frequência natural amortecida. Verificamos também, através da técnica do decremento logarítmico, como efetuar determinações experimentais do fator de amortecimento. Para os casos crítico e supercrítico verificamos a rapidez do amortecimento da resposta não-oscilatória e a influência das condições iniciais do sistema nesta resposta. Finalmente, estudamos o importante modelo analítico do sistema amortecido por atrito seco, dado pela Figura 3.5, quando obtemos como modelo matemático equações diferenciais ordinárias não-homogêneas válidas para trechos determinados da resposta.

Com este estudo, o leitor deve julgar-se competente para conceber dispositivos simples, que possam ser modelados como sistemas de um grau de liberdade, bem como para analisá-los e testá-los em suas propriedades básicas. Com este preparo, o mesmo leitor deve julgar-se capaz para analisar os problemas mais complexos que surgem quando esses dispositivos são forçados a vibrar por algum mecanismo ou ação externa, problemas esses que serão tratados no próximo capítulo.

3.6 Bibliografia

Para completar e aprofundar o estudo deste capítulo, recomendamos a seguir algumas referências úteis sobre transformadas de Laplace e sobre métodos experimentais em dinâmica de sistemas.

Sobre Transformadas de Laplace

- CHURCHIL, R. V. - *Operational Mathematics*, 3a. ed., McGraw-Hill, New York, 1972.
- LE PAGE, W. R. - *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*, Dover, New York, 1980.
- SPIEGEL, M. R. - *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1965.

Sobre Métodos Experimentais em Vibrações

- HOLMAN, J. P. - *Experimental Methods for Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- DOEBELIN, E. O. - *Measurement Systems: Application and Design*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- BENDAT, J. S. E PERSOL, A. G. - *Measurement and Analysis of Random Data*, 2a. ed., John Wiley, New York, 1986.

3.7 Exercícios

Aqui o enfoque em resultados começa a ser fortalecido. O leitor terá diversas oportunidades de transformar em números os conceitos abstratos desenvolvidos no capítulo anterior, os quais nos endereçam às fórmulas desenvolvidas no presente capítulo.

Perguntas

1. Defina e relacione os conceitos de frequência circular, frequência e período de uma oscilação harmônica.
2. O que significa um sistema mecânico experimental *vibrações livres*. Que relação este conceito possui com a excitação de sistemas através de condições iniciais?
3. Qual é o significado físico e matemático da frequência natural de um sistema mecânico? Forneça exemplos de sistemas conhecidos.
4. O que é e para que serve a técnica matemática de transformadas de Laplace no contexto de Dinâmica de Sistemas?
5. O que é a *equação característica* de um sistema mecânico? Que informações importantes podem ser extraídas dessa equação?
6. Estabeleça paralelos entre os conceitos de estabilidade e conservação de energia em sistemas mecânicos.
7. O que é e para que serve o *plano de fase* de um sistema dinâmico? Forneça exemplos de sistemas conservativos e não-conservativos.
8. Compare para um mesmo sistema e mesmo conjunto de condições iniciais as respostas livres nos casos de amortecimento viscoso subcrítico, crítico e supercrítico.
9. Faça uma visita à sua biblioteca e procure compreender como funcionam sensores de movimento, integradores e tratadores de sinais e outros equipamentos e sistemas utilizados na análise experimental de sistemas dinâmicos.
10. O que é e para que serve o conceito de *decremento logarítmico*? Como utilizá-lo na prática? Qual é a limitação deste método?
11. Estabeleça comparações entre o comportamento de sistemas mecânicos amortecidos por amortecedores do tipo viscoso e do tipo seco.

Exercícios Resolvidos

1. Um sistema simples consiste de uma massa desconhecida de valor M conectada a uma base rígida por uma mola de rigidez desconhecida k . Nesta situação, ele oscila naturalmente com período $T_1 = 0,20$ s. Determine o valor de M e de k , sabendo-se que quando uma massa $m = 0,5$ kg é adicionada à massa M o período de oscilação natural passa a ser $T_2 = 0,25$ s.

Na primeira situação, o sistema tem uma massa M e uma rigidez k . Assim,

$$T_{n_1} = \frac{2\pi}{\omega_{n_1}} \quad \Rightarrow \quad T_{n_1}^2 = \frac{4\pi^2 M}{k} \quad (a)$$

Na segunda situação, a rigidez do sistema não foi alterada, mas a sua massa foi acrescida de $m = 0,5$ kg. Assim,

$$T_{n_2} = \frac{2\pi}{\omega_{n_2}} \quad \Rightarrow \quad T_{n_2}^2 = \frac{4\pi^2 (M + m)}{k} \quad (b)$$

Se da equação (a) retirarmos a expressão para o coeficiente de rigidez k e a substituirmos na equação (b), obtemos, após algum algebrismo

$$M = \frac{T_{n_1}^2}{T_{n_2}^2 - T_{n_1}^2} m \quad \Rightarrow \quad M = 0,888 \text{ kg}$$

Com este resultado, da equação (a) retiramos a relação

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T_{n_1}^2} \quad \Rightarrow \quad k = 877,3 \text{ N/m}$$

2. Uma massa de 10 kg desliza sem atrito sobre um plano, estando conectada a um ponto fixo por uma mola de constante elástica de valor 1000 N/m e por um amortecedor de coeficiente de valor 50 Ns/m. No instante $t = 0$ s a massa está em repouso e recebe um impulso de 50 Ns na forma de uma martelada, partindo na direção positiva do deslocamento. Obtenha a expressão do movimento resultante e a posição da massa no instante $t = 4$ s.

Pela descrição do problema, devemos analisar um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, excitado por condições iniciais. A equação governante do problema é a identificada no texto pela numeração (3.11). Com os dados numéricos fornecidos, obtemos da equação (3.2)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 10 \text{ rad/s} \quad (c)$$

e da equação (3.17)

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{50}{2 \cdot 10 \cdot 10} \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0,25 \quad (d)$$

Portanto, o sistema é subcrítico e a resposta procurada pode ser apresentada nas formas das equações (3.21) ou (3.22).

Pelo enunciado do problema, o deslocamento inicial x_o do carro é nulo. Já a velocidade inicial pode ser obtida através da conservação de momentum do sistema, i.e.

$$I = m v_o \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{I}{m} = 5 \text{ m/s} \quad (e)$$

Finalmente, se utilizarmos os resultados (c) e (d), a frequência natural circular amortecida do sistema é dada pela relação (3.17), ou seja

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10 \sqrt{1 - 0,25^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 9,014 \text{ rad/s} \quad (f)$$

Com os resultados de (c) a (f), a resposta na forma (3.21) fica dada por

$$x(t) = 0,555 e^{-2,5t} \text{ sen } (9,014 t) \quad (g)$$

Já para aplicarmos a forma (3.22), devemos reconhecer que o ângulo de fase ϕ , para deslocamento inicial x_o nulo, vale $\pi/2$. Assim,

$$\cos(\omega_d t - \phi) = \text{sen } \omega_d t$$

o que nos conduz ao mesmo resultado da equação (g). Em conseqüência, 4 segundos após o início do movimento a posição do carro será dada por

$$x(4) = 0,555 \cdot e^{-10} \cdot \text{sen } 36,056 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad x(4) = -25 \mu\text{m}$$

o que mostra que o sistema é suficientemente amortecido para reduzir rapidamente a amplitude das oscilações excitadas pelas condições iniciais dadas.

3. Conforme mostrado na Figura 3.7, um cilindro de momento de inércia $J = 49 \text{ kg m}^2$ está pivotado em seu centro de massa e conectado a uma mola linear de constante elástica de rigidez $k = 6400 \text{ N/m}$. Qual deve ser o valor mínimo do coeficiente c do amortecedor do sistema para que este, ao ser excitado por condições iniciais, retorne à sua posição de equilíbrio *sem oscilações*?

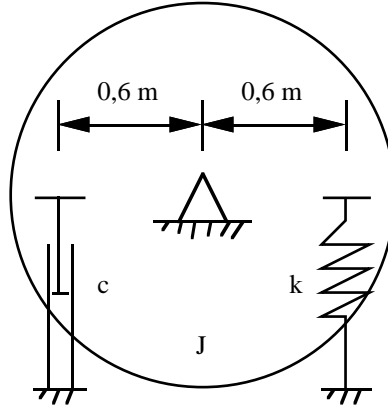


Figura 3.7: Modelo de um controlador de posição rotacional.

Para resolver este problema, devemos inicialmente obter a equação de movimento do sistema. Se adotarmos como coordenada generalizada um deslocamento angular $\theta(t)$ a partir da posição de equilíbrio, a energia cinética do disco é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (h)$$

Já a energia potencial elástica, para pequenos deslocamentos angulares, é escrita como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{0,36}{2} k \theta^2 \quad (i)$$

pois, a um deslocamento angular $\theta(t)$ do disco corresponde um deslocamento linear $x(t)$ da mola igual a $0,6 \theta(t)$. Finalmente, a potência instantânea associada ao amortecedor é dada por

$$\mathcal{P} = -c \dot{x}^2 = -0,36 c \dot{\theta}^2 \quad (j)$$

Com estas informações, a equação de movimento do sistema pode ser obtida de

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d(\mathcal{T} + \mathcal{U})}{dt} = \mathcal{P} \quad (k)$$

A substituição das energias (h) e (i) e da potência (j) na afirmação da conservação de energia (k) e subsequente diferenciação produz o seguinte resultado:

$$\left(J \ddot{\theta} + 0,36 c \dot{\theta} + 0,36 k \theta \right) \dot{\theta} = 0 \quad (l)$$

Como isto deve ser válido para qualquer instante de tempo, o conteúdo do parênteses deve ser nulo. Daqui, a equação de movimento do sistema fica dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{0,36 c}{J} \dot{\theta} + \frac{0,36 k}{J} \theta = 0 \quad (m)$$

Uma comparação da equação (m) com a equação padrão de vibração de sistemas de um grau de liberdade com amortecimento (3.11) permite identificar a frequência natural circular não-amortecida do sistema como sendo

$$\omega_n = \sqrt{\frac{0,36 k}{J}} = \sqrt{\frac{0,36 \cdot 6400}{49}} \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 6,86 \text{ rad/s} \quad (n)$$

e

$$2 \zeta \omega_n = \frac{0,36 c}{J} \quad (o)$$

Para que o sistema em vibrações livres não apresente oscilações, ele deve ter, no mínimo, amortecimento crítico. Assim, se no resultado (o) fizermos $\zeta = 1$, obtemos

$$c = \frac{2 \omega_n J}{0,36} = \frac{2 \cdot 6,86 \cdot 49}{0,36} \text{ Ns/m} \quad \Rightarrow \quad c = 1867,4 \text{ Ns/m} \quad (p)$$

Valores de coeficiente de amortecimento superiores a este também atenderão ao solicitado no problema, porém com resposta no regime supercrítico.

4. Um sistema de um grau de liberdade em vibração livre experimenta uma redução na amplitude de dois picos consecutivos de aproximadamente 2%. Qual é o fator de amortecimento deste sistema e quantos ciclos são necessários para, a partir de um determinado instante, reduzir a amplitude das oscilações à metade da existente no início?

Se aplicarmos de imediato o conceito de decremento logarítmico, representado pela equação (3.33), temos

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \ln \left(\frac{1,00}{0,98} \right) \quad \Rightarrow \quad \delta = 0,020 \quad (q)$$

Agora, se utilizarmos a relação (3.35), obtemos para o fator de amortecimento o seguinte valor:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4 \pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,020}{\sqrt{4 \pi^2 + 0,020^2}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0,0032 \quad (r)$$

O mesmo resultado seria obtido se tivéssemos utilizado a relação (3.36), pois o amortecimento do sistema é muito baixo, que é o caso típico de estruturas aeroespaciais e automobilísticas.

Para determinarmos o número de ciclos de oscilação para redução da amplitude à metade da original, vamos fazer uso da relação (3.37), i.e.

$$\zeta = \frac{\ln 2}{\sqrt{4 \pi^2 k^2 + (\ln 2)^2}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{2 \pi} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \quad (s)$$

Se substituirmos na equação (s) o valor de ζ obtido em (r), obtemos $k = 34,47$, o que aproxima-se bem do resultado proporcionado pela relação (3.38), especializado para sistemas de baixo amortecimento. Portanto, são necessários mais de 34 ciclos completos deste sistema para redução da amplitude à metade.

Exercícios Propostos

1. Um peso de 50 N ligado à extremidade inferior de uma mola cuja extremidade superior é fixa, vibra com um período natural $T = 0,45$ s. Determine o período natural da vibração quando um peso metade do anterior é ligado ao ponto médio da mesma mola, mas esta agora tem ambas as extremidades fixas.

2. Um sistema massa-mola tem frequência natural não-amortecida $f_n = 10$ Hz e frequência natural amortecida $f_d = 9$ Hz. No instante inicial do movimento a posição da massa em relação ao ponto de equilíbrio é de 0,15 m e a velocidade inicial é no sentido de aumentar o deslocamento, de valor igual a 4 m/s. Pede-se:
 - (a) Admita que o sistema não tenha amortecimento e escreva a resposta $x(t)$ do sistema nas formas das equações (3.8) e (3.9).
 - (b) Inclua agora os efeitos do amortecimento e escreva a resposta $x(t)$ do sistema nas formas das equações (3.21) e (3.22).
3. Obtenha os resultados (3.10) e (3.23) do texto para a amplitude e ângulo de fase da resposta do sistema não-amortecido e amortecido subcrítico, respectivamente.
4. Mostre que
 - a resposta subcrítica (3.21) verifica a resposta não-amortecida (3.8) no limite $\zeta \rightarrow 0$;
 - a resposta subcrítica (3.21) verifica a resposta crítica (3.28) no limite $\zeta \rightarrow 1$; e
 - a resposta supercrítica (3.31) verifica a resposta crítica (3.28) no limite $\zeta \rightarrow 1$.
5. Um sistema consistindo de uma massa de 2,5 kg e uma mola de rigidez 2000 N/m é amortecido viscosamente de forma que a relação entre duas amplitudes máximas seguidas é de 1,00 para 0,92. Determine a frequência natural do sistema não-amortecido, do sistema amortecido, o decremento logarítmico, o fator de amortecimento e o coeficiente de amortecimento.
6. Mostre a validade dos resultados (3.37) e (3.38) do texto sobre fórmulas empregadas na determinação experimental do amortecimento de sistemas mecânicos.
7. Mostre a validade dos resultados (3.39) e (3.40) do texto sobre fórmulas empregadas na determinação experimental do amortecimento de sistemas mecânicos.
8. Um sistema mecânico com $m = 5$ kg e $k = 800$ N/m é criticamente amortecido. Se a massa parte com velocidade $v_o = 3$ m/s de um deslocamento inicial $x_o = 0,15$ m, depois de quanto tempo terá como deflexão apenas $x(t) = 0,02$ m?
9. Considere uma barra rígida de comprimento L pivotada em um de seus extremos, oscilando como um pêndulo. Na outra extremidade existe uma massa concentrada M . Esta barra é feita de um material de massa específica constante ρ kg/m. Pede-se:
 - (a) Deduza a equação de movimento do sistema usando as equações de Lagrange.
 - (b) Qual deve ser a relação entre M , ρ e L para que, em pequenas oscilações, *sem a massa* o sistema tenha uma frequência natural $n\%$ maior do que *com a massa*?
 - (c) Em que faixa de porcentagem uma solução é fisicamente possível?
10. Em bons aeroportos e postos de estrada é comum encontrar-se nos banheiros torneiras que jorram água quando pressionadas de uma distância x_o . *Lentamente, sem oscilações*, elas voltam à posição original, quando param de jorrar água. Baseado nestas informações, pede-se:
 - (a) Modele a torneira como um sistema de um grau de liberdade.
 - (b) Projete o sistema, fornecendo valores compatíveis para os seus parâmetros, desde que a água jorre por 10 segundos cada vez que a torneira for acionada.

11. A Figura 3.8 mostra um disco de momento de inércia igual a $J = 50 \text{ kg m}^2$ que gira em torno de um eixo em seu centro. O movimento é restrito por duas molas lineares de constante elástica de rigidez $k = 400 \text{ N/m}$ e dois amortecedores lineares de coeficiente de amortecimento $c = 100 \text{ Ns/m}$. Sabe-se também que as distâncias a e b medem respectivamente 0,6 e 0,8 m. Pede-se:

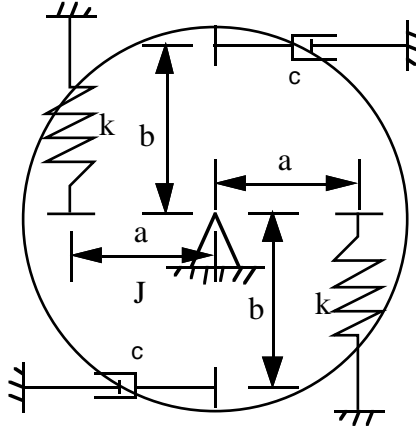


Figura 3.8: Um modelo mais sofisticado de controlador de posição rotacional.

- (a) Obtenha a sua equação de movimento para pequenas oscilações angulares pelos seguintes métodos de análise (destaque bem as características de cada método):
- Segunda Lei de Newton;
 - Princípio de D'Alembert;
 - Princípio dos Deslocamentos Virtuais;
 - Conservação de Energia;
 - Equações de Lagrange; e
 - Princípio de Hamilton.
- (b) A partir da equação de movimento, obtenha a frequência natural não-amortecida e a frequência natural amortecida do sistema.
- (c) Para condições iniciais $\theta(0) = \theta_o$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, forneça a resposta $\theta(t)$ do sistema para os casos amortecido e não-amortecido, com um gráfico para um intervalo de tempo conveniente.
12. Um dos mais elementares sistemas dinâmicos conhecidos é o chamado pêndulo simples não-amortecido. No entanto, ele não é tão simples como parece. Para mostrar isto, siga o roteiro de estudo abaixo:
- deduza a equação de movimento do pêndulo por um processo que lhe seja familiar.
 - linearize a equação exata e encontre a solução para o período de oscilação T_l .
 - para as condições iniciais $\theta(0) = \theta_o$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_o$, forneça a resposta do pêndulo.
 - a equação de movimento não-linear possui uma solução exata para o período de oscilação T_{nl} em termos de integrais elípticas. Pesquise a literatura e deduza a expressão para este período, comparando-a com a solução linear.
 - desenhe e analise o plano de fase das soluções linear e não-linear para pequenas e grandes oscilações.

Capítulo 4

Vibrações Forçadas de Sistemas de Um Grau de Liberdade

4.1 Introdução

Neste capítulo o leitor será submetido ao estudo dos problemas de vibração forçada que possam ser modelados como envolvendo sistemas de um grau de liberdade. As forças externas a serem consideradas aqui serão do tipo harmônico, periódico e arbitrário determinístico. Para o primeiro caso, estudaremos as curvas de resposta em amplitude e fase e caracterizaremos o fenômeno de ressonância. No segundo caso, empregaremos a técnica de decomposição da excitação em série de Fourier, de forma a permitir a aplicação de somas de soluções do caso harmônico. Finalmente, no último caso estudaremos as soluções básicas para excitações do tipo impulso e degrau, de forma a permitir o uso da técnica de convolução para excitações de variação arbitrária no tempo. O capítulo será completado por uma seção em métodos experimentais que visam a determinação da frequência natural e do fator de amortecimento do sistema empregando técnicas de ressonância. Conforme apresentado no Capítulo 1, não trataremos neste texto do caso de excitações externas do tipo aleatório, por não ser indicado para um primeiro curso de fundamentos em Dinâmica Estrutural.

Após o estudo deste capítulo, o leitor deverá ser capaz de tratar qualquer problema que possa ser modelado como envolvendo sistemas de um grau de liberdade, quer sejam esses sistemas colocados em movimento por condições iniciais apenas, quer o sejam por aplicação de forças externas dos tipos aqui considerados. Vale a pena observar que o problema de um grau de liberdade é fundamental, pois para o seu trato são requeridos conceitos que serão apenas generalizados quando for necessário analisar sistemas mais complexos.

4.2 Excitações Harmônicas

No capítulo anterior verificamos que, com amortecimento subcrítico, oscilar em uma determinada frequência é atributo natural de sistemas mecânicos e, conseqüentemente, de estruturas. Livres de excitações externas, tais sistemas oscilam harmonicamente com frequência natural não-amortecida ω_n ou amortecida ω_d , a partir de condições iniciais dadas. Além disso, os mecanismos que podem excitar tais sistemas são normalmente construídos de forma a prover uma excitação harmônica ou periódica. Como uma excitação periódica pode ser decomposta em múltiplos harmônicos de uma frequência fundamental, ela pode ser interpretada como a soma de excitações harmônicas individuais. Assim, a maioria dos sistemas que nos interessam têm no problema de excitação harmônica um caso de extrema importância.

4.2.1 Considerações Gerais

No Capítulo 2 verificamos que ao modelo analítico da Figura 2.1 tínhamos associado o seguinte modelo matemático:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (4.1)$$

No capítulo anterior trabalhamos com a condição de que $F(t)$ fosse nulo. Agora é chegado o momento de estudarmos casos em que $F(t) \neq 0$. Adotemos como hipótese que esta força possa ser escrita como

$$F(t) = k x_e \cos \omega t \quad (4.2)$$

Nesta expressão x_e é o deslocamento que teria o sistema, a partir da posição de equilíbrio, se esta força fosse reduzida à sua amplitude $k x_e$ apenas, sem modulação temporal, razão porque ele é chamado de *deslocamento estático*. Além disso, ω é a frequência circular de excitação do carro, que pode assumir valores na faixa $0 \leq \omega \leq \infty$. Se substituirmos a força (4.2) na equação (4.1) e colocarmos o resultado na forma padrão da equação de vibração, obtemos

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_e \cos \omega t \quad (4.3)$$

A equação de movimento (4.3) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes e não-homogênea. Como tal, sua solução geral comporta uma solução homogênea e uma solução particular, isto é,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

A solução homogênea $x_h(t)$, dependendo do valor do fator de amortecimento ζ , é dada pelas respostas (3.21), (3.28) e (3.31), se o caso é subcrítico, crítico ou supercrítico, respectivamente. Uma observação importante que pode ser extraída dessas respostas é a de que, devido aos seus envelopes exponenciais decrescentes, elas desaparecem rapidamente com o passar do tempo. Devido a isso, a solução homogênea é chamada de *parte transiente* da solução total. Por outro lado, a solução particular permanece existindo como resposta do sistema, razão pela qual ela é chamada de *parte permanente* da solução total.

A consideração de condições iniciais para completar a matemática da proposição (4.3) só é necessária se estivermos interessados no transitório do sistema. Este é o caso para sistemas que são excitados a partir do equilíbrio inúmeras vezes por prazo típico de operação. No entanto, se estivermos investigando um sistema em que a maior parte do tempo de operação ocorre em regime permanente, não faz sentido haver excessiva preocupação com o regime transiente. Esta observação justifica a postura, utilizada muitas vezes, de considerar apenas a parte permanente da solução como resposta do sistema.

A experiência demonstra que a solução em regime permanente da equação (4.3) ocorre na frequência da excitação externa. Assim, para solução particular desta equação vamos adotar a forma

$$x_p(t) = C \cos(\omega t - \phi) \quad (4.4)$$

Esta proposta apresenta dois parâmetros a determinar: a amplitude C e o ângulo de fase ϕ de atraso da resposta em relação à excitação. Se substituirmos essa hipótese na equação (4.3), expandirmos as funções trigonométricas e igualarmos os coeficientes de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ em ambos os lados, obtemos os seguintes resultados para a amplitude e a fase:

$$|H(\Omega)| = \frac{C}{x_e} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (4.5)$$

e

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2} \right) \quad (4.6)$$

Nestas expressões definimos

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$$

como a razão entre as frequências de excitação e natural não-amortecida do sistema. Este parâmetro, por razões óbvias, é chamado de *razão de frequências*. Ele será utilizado daqui em diante na descrição do comportamento dinâmico de sistemas de um grau de liberdade e o leitor poderá perceber a importância deste parâmetro neste comportamento.

4.2.2 Ressonância Mecânica

Antes que o leitor possa observar melhor os resultados recém-obtidos, vale a pena examinar em separado, por razões didáticas, o caso do sistema ressonante. Tomemos a situação em que a equação (4.3) pode ser reescrita como

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 x_e \cos \omega_n t \quad (4.7)$$

Note que, por simplicidade, retiramos o amortecimento do sistema e estamos excitando-o na sua própria frequência natural, isto é, estamos operando com $\Omega = 1$. Neste caso, a resposta homogênea é dada por

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Já a resposta particular é escrita como

$$x_p(t) = \frac{x_e}{2} \omega_n t \sin \omega_n t \quad (4.8)$$

Se admitirmos que o sistema parte do repouso, as constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas como sendo nulas, de forma que a solução global fica reduzida à solução particular.

Este resultado mostra duas ocorrências dignas de nota. A primeira é que a amplitude da resposta cresce linearmente com o tempo, a partir do repouso. Não há limite previsto para este crescimento segundo a teoria linear. Portanto, o deslocamento do carro é oscilatório, de frequência ω_n , e de amplitude sempre crescente, até o ponto em que não-linearidades alterem o comportamento ou provoquem a falha do sistema. A segunda observação é que, embora o sistema esteja sendo forçado a vibrar segundo uma força cossenoidal, a resposta acontece segundo uma vibração senoidal. Assim, existe um atraso em fase de exatamente 90° entre a resposta e a excitação. Essas duas características são os traços mais marcantes do fenômeno a que chamamos de *ressonância mecânica*.

4.2.3 Resposta em Frequência

Com este preâmbulo, podemos agora voltar a examinar com mais cuidado os resultados (4.5) e (4.6) obtidos anteriormente. A relação (4.5) é chamada de *fator de amplificação*, pois fornece o fator que amplifica a amplitude de entrada x_e da excitação harmônica externa para a resposta de saída C . Dois parâmetros governam o comportamento desta relação: a razão de frequências Ω e o fator de amortecimento ζ do sistema. Para compreendermos este comportamento, a Figura 4.1 mostra curvas da variação desta relação com Ω , parametrizadas por diferentes valores do fator de amortecimento ζ , abrangendo os casos subcrítico, crítico e supercrítico e, em particular, o caso em que $\zeta = \sqrt{2}/2$. Deste gráfico podemos observar os seguintes pontos interessantes para serem comentados:

- Para baixos valores de Ω , o fator de amplificação tem valor próximo da unidade, qualquer que seja o fator de amortecimento. Para grandes valores de Ω , o fator de amplificação tende a zero, mostrando que o sistema é insensível a freqüências de excitação elevadas.
- Existe uma amplificação considerável da excitação para a resposta quando a freqüência de excitação se aproxima da freqüência natural do sistema, isto é, para $\Omega \approx 1$. Este fenômeno é uma das características da ressonância. Pode-se mostrar que o valor máximo desta amplificação é exatamente igual a

$$|H(\Omega)|_{\max} = \left[\frac{C}{x_e} \right]_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Teoricamente, para um sistema sem amortecimento, esta amplificação tem valor infinito e ocorre exatamente quando $\Omega = 1$. Para sistemas estruturais, que normalmente dispõem de pequeno amortecimento, o fator de amplificação $|H(\Omega)|$ pode ser aproximado para $1/2\zeta$, ocorrendo para $\Omega \approx 1$.

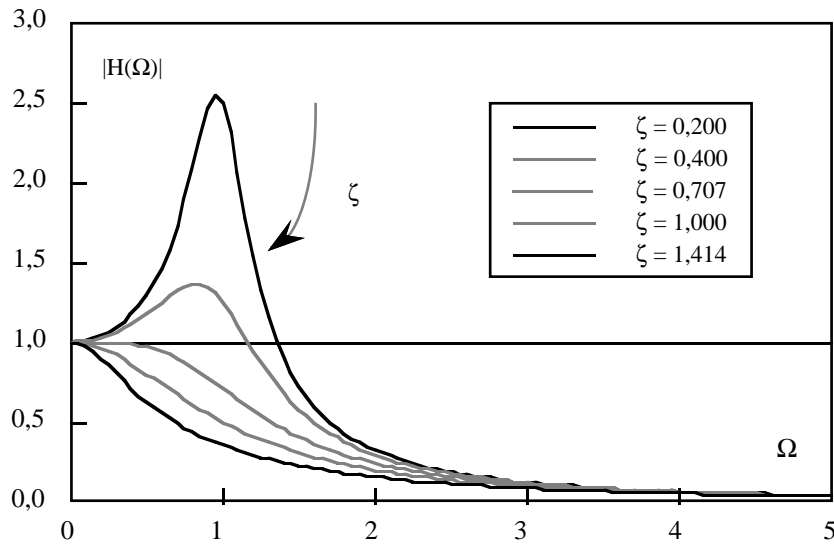


Figura 4.1: Fator de amplificação da resposta permanente à excitação harmônica.

- O pico de ressonância ocorre, a rigor, quando $\Omega = \sqrt{1-2\zeta^2}$. À medida que ζ cresce, a amplitude do valor de pico decresce e o pico desloca-se para menores valores de Ω (à esquerda na Figura 4.1), desde que os valores de ζ sejam menores ou iguais a $\sqrt{2}/2$.
- Quando o fator de amortecimento for maior que $\sqrt{2}/2$ não existe mais o pico de ressonância e o fator de amplificação $|H(\Omega)|$ tem valor sempre menor do que a unidade para qualquer razão de freqüência Ω , tendendo a zero quando $\Omega \rightarrow \infty$.
- Os efeitos danosos da ressonância podem ser minimizados, ou mesmo evitados, com a adição de amortecedores reais a um sistema. Já para estruturas, com amortecimento baixo, a ressonância deve ser evitada por iniciativa de projeto.
- O fator de amortecimento controla não apenas o pico de ressonância, como também a resposta do sistema de uma maneira global, para todas as freqüências. O fator de amplificação é, portanto, inversamente proporcional ao fator de amortecimento.

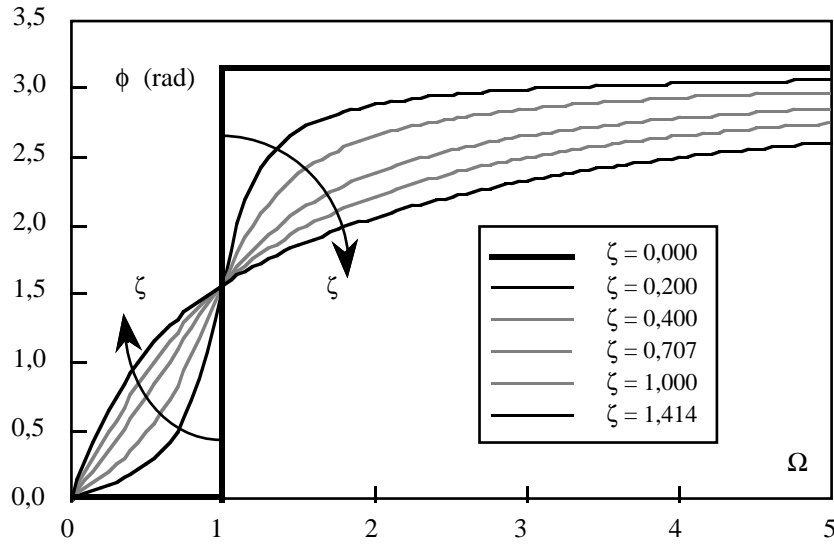


Figura 4.2: Ângulo de fase da resposta permanente à excitação harmônica.

A relação (4.6) fornece o ângulo de fase ϕ que a resposta apresenta de atraso em relação à excitação harmônica. Este ângulo também é função da razão de frequências Ω e do fator de amortecimento ζ . Esta dependência pode ser visualizada graficamente na Figura 4.2, de onde podemos extrair as seguintes observações:

- Quando o fator de amortecimento é nulo, o ângulo de fase é exatamente 0° na faixa $0 \leq \Omega < 1$ e exatamente 180° na faixa $\Omega > 1$. Há um salto de exatos 180° nas vizinhanças de $\Omega = 1$. Pelo teorema do valor central e, conforme comprovado matematicamente pela resposta particular (4.8), o valor de ϕ nesta condição é exatamente 90° .
- Se o fator de amortecimento $\zeta > 0$, qualquer que seja este valor, o ângulo de fase quando $\Omega = 1$ é exatamente 90° . Esta é outra das características da ressonância. Devido a isto, respostas a vibrações forçadas que ocorram na faixa $0 \leq \Omega < 1$ são ditas estarem *em fase* com a excitação, enquanto que aquelas que ocorram na faixa $\Omega > 1$ são ditas estarem *fora de fase* com a excitação.
- As setas na Figura 4.2 indicam a direção de crescimento do fator de amortecimento. Qualquer que seja este valor, o ângulo de fase aumenta sempre com o aumento da razão de frequências, convergindo assintoticamente para 180° quando $\Omega \rightarrow \infty$. Este crescimento é mais rápido para oscilações em fase e mais lento para oscilações fora de fase, pois temos um ponto de inflexão em $\Omega = 1$.

Entendemos por *resposta em frequência* o comportamento da resposta (4.4) conforme variamos a frequência ω de excitação do sistema. Isto equivale a considerar o comportamento do fator de amplificação $|H(\Omega)|$, dado pela equação (4.5), e da fase ϕ , dado pela equação (4.6), da resposta do sistema com a razão de frequências Ω , devidamente parametrizado pelo fator de amortecimento ζ . As Figuras 4.1 e 4.2 podem ser entendidas como expressões gráficas das equações (4.5) e (4.6), respectivamente. Em outras palavras, essas figuras são espectros de frequência da amplitude e da fase da resposta do sistema protótipo à excitação harmônica externa. O leitor poderá aprender muito ao analisar esses resultados gráficos. Este aprendizado será maior ainda se ele puder comprovar a validade de todos os comentários feitos a respeito de cada uma dessas figuras, o que deixamos como exercício.

4.2.4 Transmissão e Controle da Vibração

No Capítulo 2 levantamos em caráter preliminar dois importantes problemas industriais: o da transmissão de esforços para uma base fixa por um sistema forçado a oscilar e o da transmissão de movimento de uma base móvel para um sistema fixado à base e livre de forças externas. Com os elementos teóricos aqui apresentados, temos agora condições de discutir melhor esses problemas no caso de forças e movimentos harmônicos.

Problema da Base Móvel

Conforme verificamos na seção 2.6, quando o sistema protótipo é excitado pelo movimento $x_b(t)$ da base à qual ele se encontra fixado, a equação de movimento é dada por

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{x}_b \quad (4.9)$$

onde $x(t)$ é a coordenada que mede o deslocamento do carro em relação à base móvel, a partir da condição de equilíbrio, conforme aparece na Figura 2.8. Se admitirmos um movimento prescrito da base segundo uma oscilação harmônica do tipo

$$x_b(t) = D \cos \omega t \quad (4.10)$$

e substituirmos esta hipótese na equação (4.9), ficamos com uma equação diferencial ordinária não-homogênea a resolver. Desprezados os eventuais transitórios, segundo os argumentos já colocados aqui, podemos adotar uma solução permanente da forma

$$x(t) = E \cos(\omega t - \phi_1) \quad (4.11)$$

Se substituirmos esta solução na equação (4.9), expandirmos as funções trigonométricas e fizermos um balanceamento dos termos que multiplicam $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, obtemos duas identidades. Se utilizarmos a relação trigonométrica

$$\sin^2 \phi_1 + \cos^2 \phi_1 = 1$$

a amplitude e ângulo de fase da resposta (4.11) são dados por

$$\frac{E}{D} = |H(\Omega)| \quad \Omega^2 = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (4.12)$$

e

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\Omega}{1 - \Omega^2} \right) \quad (4.13)$$

O ângulo de fase ϕ_1 dado pela equação (4.13) é idêntico ao ângulo ϕ da equação (4.6). Portanto, em termos de fase, tanto faz excitarmos um sistema através de uma força harmônica aplicada à massa do sistema, com base fixa, quanto através de um deslocamento harmônico aplicado à base que suporta o sistema, com massa livre de forças externas.

O mesmo não ocorre com a amplitude dada pela equação (4.12). Neste caso, observamos que a amplitude é dada pelo produto do fator de amplificação $|H(\Omega)|$ por Ω^2 . A alteração introduzida nesta amplitude da resposta pode ser visualizada graficamente na Figura 4.3, com as seguintes observações:

- Todas as curvas, independentemente do valor de ζ , começam com amplificação nula para $\Omega = 0$ e convergem para amplificação unitária quando $\Omega \rightarrow \infty$. Isto contrasta com a Figura 4.1, quando todas as curvas começam com amplificação unitária para $\Omega = 0$ e convergem assintoticamente para amplificação nula quando $\Omega \rightarrow \infty$.

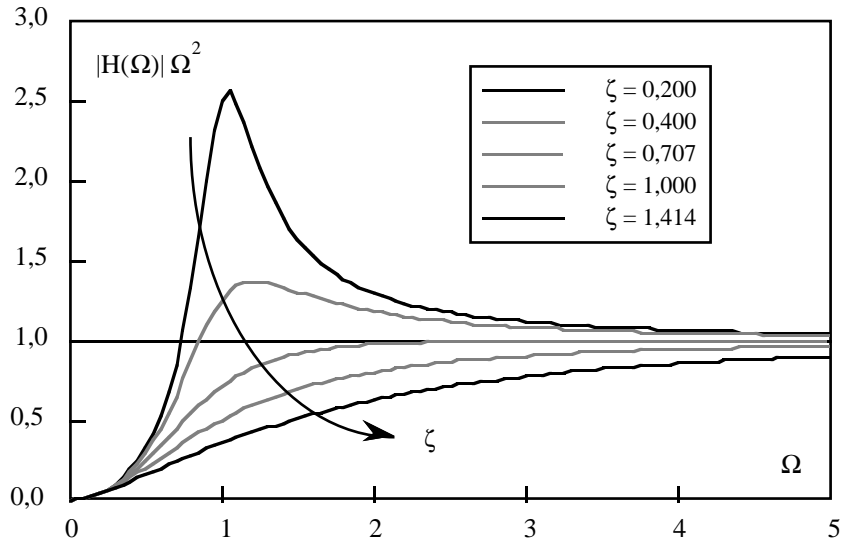


Figura 4.3: Amplitude da oscilação excitada pelo movimento da base.

- Também experimenta-se o fenômeno de ressonância na vizinhança de $\Omega = 1$. O valor do pico de ressonância diminui com o aumento de ζ . Porém, com o aumento do amortecimento, desta vez os picos se deslocam para a direita de $\Omega = 1$, quando acontece o deslocamento do pico para a esquerda na Figura 4.1.
- Para controlarmos passivamente as oscilações do sistema cuja base oscila harmonicamente devemos tentar operar com pequenos valores de Ω , quando a amplificação é pequena. A forma mais fácil e pragmática de se atingir esta meta consiste em aumentar a rigidez do sistema.

Os resultados mostrados aqui são essencialmente os mesmos para problemas em que há desbalanceamento rotativo. A comprovação dessa afirmação fica por conta do leitor.

Problema da Transmissão de Vibrações

Voltemos agora nossa atenção para o problema da força harmônica. Conforme a equação (2.56), a força transmitida pelo sistema protótipo à base em que ele está fixado é dada por

$$F_t(t) = -c\dot{x} - kx = -m(2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x) \quad (4.14)$$

Ignorados os transitórios, o deslocamento $x(t)$ é dado pela equação (4.4), com ângulo de fase ϕ_2 . A substituição em (4.14) fornece o seguinte resultado:

$$F_t(t) = -kC[-2\zeta\Omega \sin(\omega t - \phi_2) + \cos(\omega t - \phi_2)] \quad (4.15)$$

A razão entre a amplitude da força transmitida à base e a amplitude da força de excitação do sistema pode, então, ser apresentada na seguinte forma:

$$|T(\Omega)| = \frac{|F_t|}{kx_e} = |H(\Omega)| \sqrt{1 + (2\zeta\Omega)^2} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (4.16)$$

Podemos observar que este resultado, de grande importância para aplicações industriais, depende também do fator de amplificação $|H(\Omega)|$, dado pela equação (4.5).

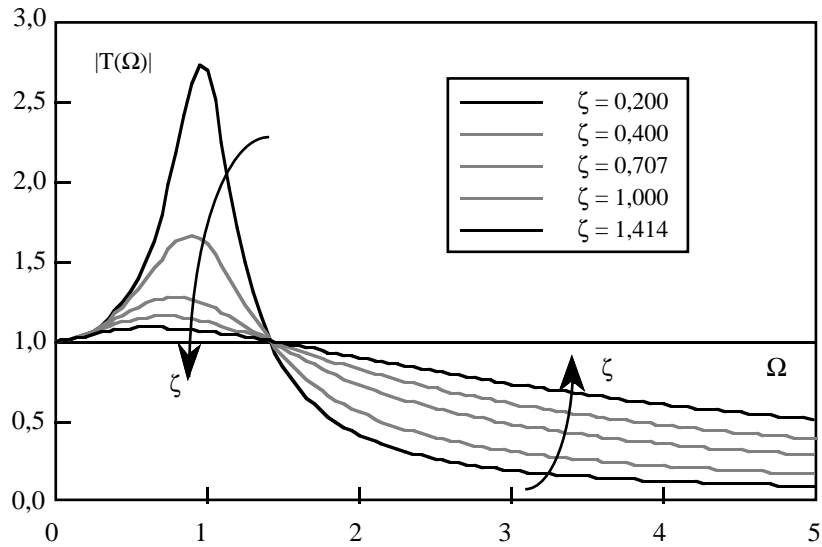


Figura 4.4: Fator de transmissibilidade de vibrações como função de Ω e ζ .

A razão (4.16), por relacionar a amplitude da força transmitida à amplitude da força de excitação do sistema, é chamada de *fator de transmissibilidade* e denotada aqui por $|T(\Omega)|$. A Figura 4.4 mostra graficamente este fator como função da razão de frequências Ω e do fator de amortecimento ζ . Desta figura podemos tirar as seguintes observações:

- Há amplificação da força excitadora, qualquer que seja o valor do fator de amortecimento ζ , na faixa $0 < \Omega < \sqrt{2}$. Por outro lado, o fator de transmissibilidade é menor do que um na faixa $\Omega > \sqrt{2}$.
- Como na ressonância, existe um pico de transmissibilidade nas proximidades de $\Omega = 1$. Este pico é teoricamente infinito quando não há amortecimento e diminui com o aumento do fator de amortecimento.
- Na faixa $0 < \Omega < \sqrt{2}$, quanto maior é o amortecimento, menor é a amplificação. Tal situação se inverte na faixa $\Omega > \sqrt{2}$, onde observa-se que os fatores de amortecimento e de transmissibilidade são diretamente proporcionais.
- Na faixa $0 < \Omega < \sqrt{2}$, no regime supercrítico, o fator de transmissibilidade tende a ficar constante e próximo ao valor unitário. Para $\Omega \rightarrow \infty$, este fator tende a zero.
- Em conclusão, para controle passivo da força transmitida à base, recomenda-se o projeto do sistema tal que o fator de amortecimento ζ seja baixo e a razão de frequências Ω seja alta, superior a $\sqrt{2}$.

Existe um ângulo de fase ϕ_2 entre a aplicação da força harmônica no sistema e a força transmitida à base, conforme previsto na solução (4.4). Este ângulo é uma função de Ω e ζ diferente da obtida para ϕ na equação (4.6). Fica como exercício para o leitor obter esta função, dispô-la em forma gráfica e tirar as conclusões possíveis.

O controle de vibrações a que nos referimos aqui é o chamado *controle passivo*. Neste caso, buscamos soluções de projeto que, sem dispêndio extra de energia, permitam garantir que a resposta do sistema esteja dentro de um comportamento considerado razoável. Em textos mais avançados o leitor poderá encontrar técnicas para *controle ativo*. Neste caso estarão envolvidos sensores, atuadores, computadores, interfaces analógicas/digitais e dispêndio de energia para obtenção de respostas otimizadas do sistema.

4.3 Excitações Periódicas

Na seção anterior vimos dois problemas fundamentais de vibração forçada de sistemas de um grau de liberdade. No primeiro, tivemos o sistema protótipo ligado a uma base fixa e excitado por uma força harmônica aplicada diretamente à massa. Neste caso, investigamos também a força transmitida pelo sistema à base em que este está ligado. No segundo problema, estudamos o sistema protótipo livre de forças externas, porém ligado a uma base que se mexe harmonicamente. Agora é chegada a hora de generalizarmos a excitação do sistema.

Sabemos que todo sinal periódico pode ser decomposto através da análise de Fourier em infinitos termos harmônicos de frequências múltiplas de uma frequência fundamental. Assim, dentro do regime linear, que permite a validade do princípio da superposição, os problemas de vibrações forçadas periodicamente podem ser entendidos como a soma de infinitos problemas semelhantes aos estudados na seção anterior. Nesta seção vamos detalhar esta perspectiva, de forma a capacitar o leitor a resolver os problemas pertinentes a esta classe.

4.3.1 Análise do Sinal Externo

Uma função $f(t)$ é dita periódica, de período T_o , se $f(t) = f(t \pm nT_o)$ para n inteiro. Como o instante inicial de medição do tempo pode ser arbitrário, interessa mais a repetição da função para tempos futuros, mas admite-se tacitamente que o mesmo possa ter ocorrido no passado.

Uma função periódica apresenta médias que nos interessam. A média de ordem j desta função é definida por

$$\overline{f^j} = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} [f(t)]^j dt \quad (4.17)$$

Dessas médias, as mais úteis são as de ordem um e dois, chamadas respectivamente de *média temporal* e de *valor médio quadrático*. A média temporal representa o valor médio da função dentro do período, sendo usada, como veremos, como o primeiro termo da expansão de um sinal periódico em série de Fourier. Já o valor médio quadrático está associado à média das energias dos sistemas, pois, como vimos, energias cinéticas e potenciais elásticas são usualmente expressas como funções quadráticas de velocidades e deslocamentos.

Uma média especial de importância em vibrações é a chamada *média rms*. Este acrograma vem do inglês “root mean square”, e significa exatamente raiz quadrada da média quadrática, isto é

$$\bar{f}_{rms} = \sqrt{\overline{f^2}} \quad (4.18)$$

A esta média associamos uma idéia de contínuo ao sinal oscilatório. Por exemplo, esta média seria o valor da corrente contínua em um circuito elétrico de corrente contínua que produziria os mesmos efeitos do ponto de vista energético de uma corrente alternada em um circuito de corrente alternada.

Uma função $f(t)$ é dita *par* se $f(t) = f(-t)$. Neste caso, a função apresenta uma simetria em relação ao eixo das ordenadas, podendo-se imaginar que um lado do plano é a imagem do outro lado dada por um espelho situado em $t = 0$. Por outro lado, uma função $f(t)$ é dita *ímpar* se $f(t) = -f(-t)$. Neste caso temos simetria em relação ao eixo das ordenadas somente após termos refletido um dos lados do plano por um espelho situado no eixo das abscissas, ou seja, somente após termos trocado o sinal de um dos semiplanos da função.

Assimilados os conceitos apostos acima, considere um sinal periódico $f(t)$ de período T_o . Este sinal pode ser expandido em série na forma

$$f(t) = \bar{f} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \quad (4.19)$$

onde

$$\omega_o = 2\pi f_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

é chamada frequência circular fundamental do sinal.

Na série (4.19) a média temporal é dada por \bar{f} , conforme já apontado anteriormente. Os demais termos da série representam oscilações harmônicas em cosseno e seno de frequências crescentes e múltiplas inteiras da frequência fundamental ω_o . Como as funções cosseno são pares, funções pares expandem-se apenas em oscilações cossenoidais e, em consequência, todos os coeficientes b_n são nulos. Por outro lado, como as funções seno são ímpares, funções ímpares expandem-se apenas em oscilações senoidais, implicando fazer nulos todos os coeficientes a_n . Finalmente, se o sinal periódico não for nem par e nem ímpar, tanto os coeficientes a_n quanto os coeficientes b_n são (pelo menos alguns) diferentes de zero. Esses coeficientes são obtidos pelas seguintes relações:

$$a_n = \frac{\omega_o}{\pi} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t) \cos n\omega_o t \, dt \quad (4.20a)$$

e

$$b_n = \frac{\omega_o}{\pi} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t) \sin n\omega_o t \, dt \quad (4.20b)$$

Essas relações podem ser verificadas como exercício pelo leitor utilizando as propriedades de ortogonalidade das oscilações de diferentes frequências dentro de um período completo.

Podemos dispor o resultado dessa expansão em série de um sinal periódico na forma de um gráfico amplitude versus frequência. No eixo das ordenadas podemos dispor os coeficientes a_n ou b_n , ou ainda, de preferência, a amplitude composta $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. No eixo das abscissas dispomos a frequência fundamental ω_o , seus múltiplos e submúltiplos. Este gráfico recebe o nome de *espectro de frequência* do sinal.

Um sinal harmônico possui como espectro de frequências um único pico na sua frequência própria. Já um sinal periódico possui picos de amplitudes variáveis distribuídos ao longo do eixo das abscissas. Normalmente estes picos têm menor amplitude para frequências maiores, porém ocorrem todos em frequências múltiplas da frequência fundamental. Sinais não-lineares caracterizam-se por apresentar picos para múltiplos e submúltiplos da frequência fundamental. Sinais aleatórios não possuem uma forma típica para seus espectros. Finalmente, sinais caóticos apresentam faixas contínuas em seus espectros. Existem aparelhos e softwares próprios para tratamento de sinais e obtenção de seus correspondentes espectros de frequência. Assim, para um analista experiente, basta a visualização do espectro de um sistema sob análise para caracterizá-lo completamente.

4.3.2 Resposta do Sistema

Os conceitos e definições apresentados e discutidos na subseção anterior permitem-nos analisar agora os problemas de vibração de sistemas de um grau de liberdade excitados por forças externas periódicas. Para tanto, admitamos que na equação de movimento (4.1) a força externa $F(t)$ seja dada por

$$F(t) = k \left[\bar{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t) \right] \quad (4.21)$$

Neste caso, tanto \bar{x} quanto os coeficientes a_n e b_n são constantes que têm dimensão de deslocamento. Como o sistema é linear por hipótese, podemos usar o princípio da superposição e dividir a excitação em três tipos separados de problemas.

Pelas razões apresentadas anteriormente, vamos ignorar a parte transiente da resposta e concentrar nossa atenção na sua parte permanente. Buscamos a resposta $x(t)$ devida a três

problemas diferentes: uma excitação constante, uma excitação cossenoidal e outra senoidal. A resposta $x_m(t)$ devida ao termo de média \bar{x} é exatamente igual a

$$x_m(t) = \bar{x} \quad (4.22a)$$

Já a resposta devida a um termo cossenoidal de amplitude a_n é dada por

$$x_{a_n}(t) = A_n \cos(n\omega_o t - \phi_n) \quad (4.22b)$$

onde

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{(1 - n^2\Omega_o^2)^2 + (2\zeta n\Omega_o)^2}} = a_n |H(n\Omega_o)| \quad (4.22c)$$

e

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{2\zeta n\Omega_o}{1 - n^2\Omega_o^2} \quad (4.22d)$$

Aqui, definimos Ω_o como sendo a razão entre a frequência fundamental ω_o e a frequência natural não-amortecida ω_n do sistema e $|H(n\Omega_o)|$ é o fator de amplificação do sistema para a frequência $n\Omega_o$. De maneira similar, a resposta devida a um termo senoidal de amplitude b_n é dada por

$$x_{b_n}(t) = B_n \sin(n\omega_o t - \phi_n) \quad (4.22e)$$

onde

$$B_n = \frac{b_n}{\sqrt{(1 - n^2\Omega_o^2)^2 + (2\zeta n\Omega_o)^2}} = b_n |H(n\Omega_o)| \quad (4.22f)$$

e ϕ_n é dada pela equação (4.22d). Se juntarmos os resultados (4.22) pertinentes, a resposta do sistema à excitação periódica (4.21) é expressa como

$$x(t) = \bar{x} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_o t - \phi_n) + B_n \sin(n\omega_o t - \phi_n)] \quad (4.23)$$

Assim, verificamos que o sistema atua como um filtro de amplitude, pois responde com as mesmas frequências da excitação periódica $F(t)$, porém alterando os coeficientes que modulam cada uma dessas frequências, de acordo com o fator de amplificação que caracteriza o sistema.

Da mesma maneira como podemos obter o espectro de frequências de um sinal de excitação, podemos efetuar o mesmo com relação ao sinal de resposta do sistema. Desta forma, temos uma maneira alternativa de apreciar a atuação do sistema como um filtro do sinal de entrada. Neste caso, fica evidente se o sistema é ou não linear, pois sistemas não-lineares têm resposta com espectro não-linear, mesmo que a entrada seja linear.

Como exemplo, consideremos a resposta permanente do sistema protótipo à excitação provida pela onda quadrada da Figura 4.5. Como podemos observar, esta força periódica é uma função ímpar, de média temporal nula. Portanto, sua expansão em série de Fourier é feita apenas através de termos senoidais. Da integral prevista em (4.20b), obtemos

$$b_n = \frac{\omega_o}{\pi} \left\{ \int_{-T_o/2}^0 [-k A] \sin n\omega_o t \, dt + \int_0^{T_o/2} [k A] \sin n\omega_o t \, dt \right\}$$

Após efetuarmos essas operações matemáticas, ficamos com a seguinte expansão em série para a excitação do sistema:

$$F(t) = k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_o t \quad (4.24)$$

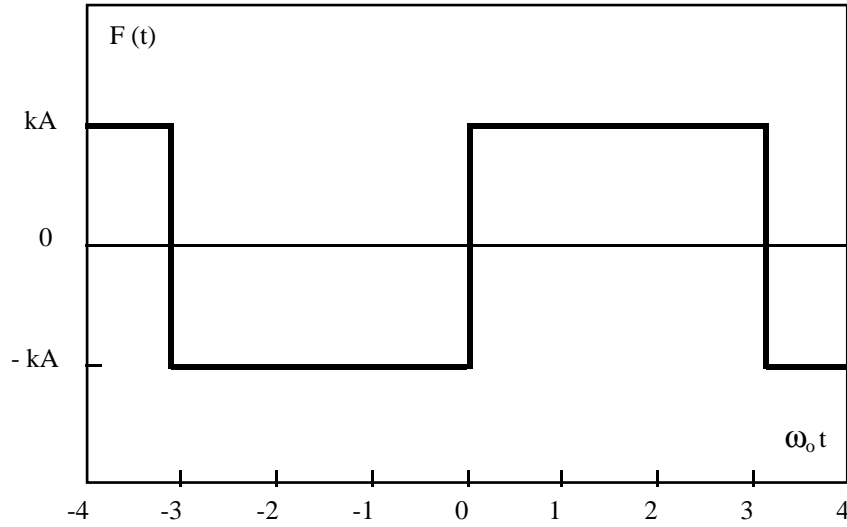


Figura 4.5: Força externa periódica que excita o sistema protótipo.

com

$$b_n = \frac{4A}{n\pi}$$

para n ímpar e

$$b_n = 0$$

para n par.

De acordo com a equação (4.23), a resposta do sistema é dada por

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_o t - \phi_n) \quad (4.25)$$

onde B_n é dado pela equação (4.22f) e ϕ_n é dado pela equação (4.22d) para n ímpar.

A figura 4.5 fornece a excitação do sistema. Trata-se de uma onda quadrada de amplitude kA e período $T_o = 2\pi/\omega_o$. Já a Figura 4.6 mostra a resposta do sistema protótipo. Escolhemos para obtenção das curvas os seguintes valores para os parâmetros: fator de amortecimento $\zeta = 0,2$ e frequência natural não-amortecida $\omega_n = 1$ rad/s. Duas curvas são mostradas, uma em que a razão de frequências Ω_o vale 0,5 e outra em que este parâmetro vale 1,5. Nota-se que ambas as respostas são periódicas e contínuas, de derivadas contínuas, em contraste com a excitação, que é descontínua nos seus semiperíodos. Este comportamento mostra o papel desempenhado pelo filtro do sistema, que transforma um sinal descontínuo em um sinal contínuo.

A Figura 4.6 mostra a resposta permanente $x(t)$ dividida pelo fator de escala $4A/\pi$, com somatório dos primeiros 30 termos da série. O truncamento dessas séries com infinitos termos é um procedimento normal, tendo-se usado aqui o critério de convergência “visual” para realizar este truncamento. Assim, o gráfico dispõe a evolução temporal de

$$\frac{\pi x(t)}{4A} = \sum_{n=1}^{30} \frac{|H(n\Omega_o)|}{n} \sin(n\omega_o t - \phi_n) \quad (4.26)$$

A resposta no caso $\Omega_o = 0,5$ mostra uma maior amplificação e variação do sinal, típica de sistemas com baixa razão de frequências. Já a resposta no caso $\Omega_o = 1,5$ mostra uma menor amplificação e maior estabilização do sinal. A resposta do sistema para $\Omega_o \approx 1$ mostraria uma amplificação típica de ressonância.

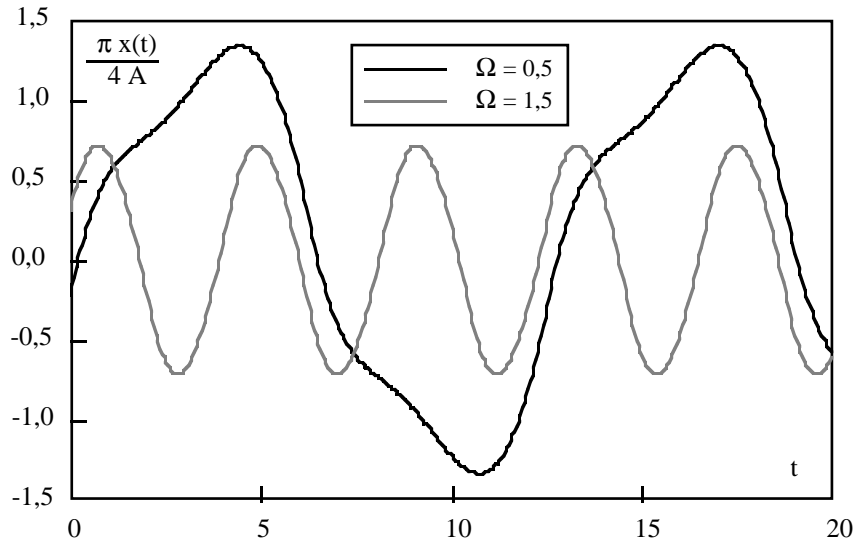


Figura 4.6: Resposta do sistema protótipo à excitação periódica da Figura 4.5.

Conforme já apontado, outra forma de visualizarmos estes resultados é através do espectro de frequências. A Figura 4.7 mostra o espectro da onda quadrada da Figura 4.5 que excita o sistema. Cada pico discreto da figura tem uma amplitude dada por $4kA/n\pi$. A convergência é controlada pelo fator $1/n$, o que implica uma convergência lenta.

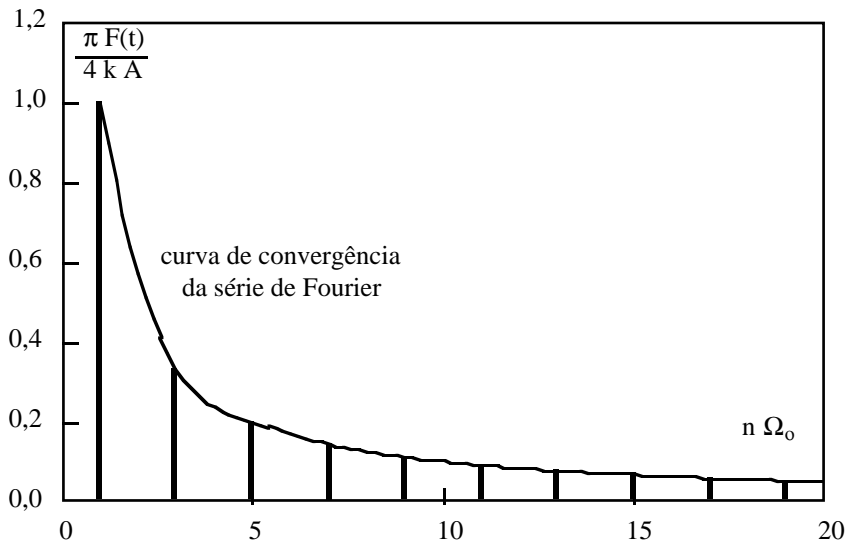


Figura 4.7: Espectro de frequências da onda quadrada da Figura 4.5.

Uma vez tendo apreciado o espectro de frequências da excitação do sistema, podemos agora examinar o espectro da resposta. A Figura 4.8 apresenta este espectro cujos termos discretos de ordem ímpar são dados por $|H(n\Omega_o)|/n$. Embora o fator n do denominador sugira uma convergência lenta, ela é na realidade mais rápida que a da excitação porque, como podemos observar da Figura 4.1, o fator de amplificação tende para zero com o aumento da frequência. Isto se verifica para qualquer valor do fator de amortecimento ζ . Assim, as amplitudes dos termos da série (4.26) decrescem rapidamente com o aumento da frequência.

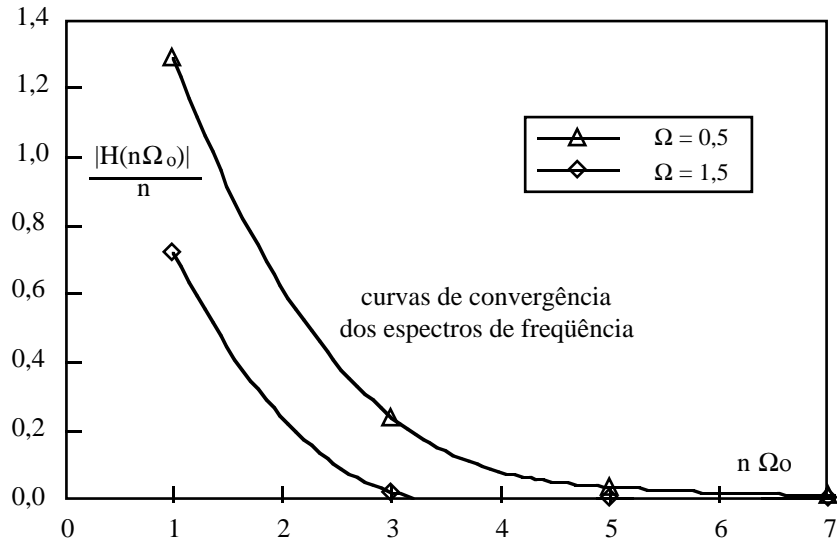


Figura 4.8: Espectro de frequências da resposta do sistema apresentada na Figura 4.6.

No estudo deste exemplo utilizamos quatro figuras que representam excitação e resposta do sistema protótipo no domínio do tempo e da frequência. A análise dessas figuras permitem-nos emitir os seguintes comentários:

- O problema de um sistema linear excitado periodicamente pode ser tratado como a soma de diversos problemas de excitações harmônicas individuais, conforme previsto na expansão em série de Fourier do sinal de entrada do sistema. Para tanto, é necessário e suficiente o conhecimento da resposta em frequência do sistema para a excitação harmônica, a qual pode ser usada para cada termo da série individualmente.
- Para obtenção da Figura 4.8 fizemos uma redução do eixo das abscissas de modo a mostrar apenas os quatro primeiros picos do espectro. Mesmo assim, observamos que o quarto pico é visualmente desprezível nas duas situações mostradas. A figura mostra que para $\Omega_o = 0,5$ apenas os três primeiros termos, de ordens $n = 1, 3$, e 5 têm amplitude visualmente significativa na resposta; já para $\Omega = 1,5$ este efeito é ainda mais marcante, sendo significativas do ponto de vista visual apenas as amplitudes dos dois primeiros termos, de ordens $n = 1$ e 3 .
- A mais importante observação é a da atuação do sistema como um filtro. Buscamos uma excitação de espectro amplo, de convergência baixa, como mostrado na Figura 4.7. Para esta excitação o sistema respondeu enfatizando apenas as menores frequências. Assim, do ponto de vista comumente empregado em mecatrônica, este sistema mecânico comporta-se como um filtro “passa-baixa”.
- O comportamento deste exemplo pode ser tomado como característico para estruturas comumente empregadas nas engenharias aeronáutica, naval e mecânica. Embora excitado por frequências distintas de larga faixa, a resposta do sistema é normalmente dominada pelos termos de frequências mais baixas. Neste caso, tomar-se o somatório (4.26) com n máximo igual a 30 chega a ser um exagero.
- As informações aqui apresentadas sobre a resposta do sistema no domínio do tempo e da frequência são igualmente importantes e complementares. Portanto, para uma análise completa, as duas perspectivas são desejáveis.

4.4 Excitações Arbitrárias

Tendo estudado os casos de excitações harmônicas e periódicas, é chegado o momento de pesquisar a resposta do sistema protótipo a excitações quaisquer, desde que possuam caráter determinístico. Por isto queremos dizer que as excitações devem possuir equações matemáticas que as descrevam. As maiores aplicações industriais neste caso são as excitações impulsivas que modelam “choques” aos quais sistemas mecânicos devam sobreviver.

Para atingir o objetivo disposto acima, vamos inicialmente analisar os casos fundamentais de resposta a um impulso e resposta a um degrau para um sistema mecânico com amortecimento viscoso subcrítico. De posse dessas respostas básicas, poderemos construir uma técnica sistemática para resolução de casos mais gerais. Por exemplo, fica como sugestão para o leitor desenvolver versões das respostas básicas válidas no regime viscoso supercrítico, as quais podem ser especializadas através de processos de limites para o caso crítico.

4.4.1 Respostas Fundamentais

Impulso Unitário

Suponhamos que o sistema protótipo da Figura 2.1 esteja sendo excitado a partir do repouso por um impulso unitário no instante $t = 0$. Este impulso pode ser representado matematicamente por uma função delta de Dirac de argumento t , ou seja

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad (4.27)$$

Se integrarmos esta equação de um instante de tempo imediatamente anterior a outro imediatamente posterior ao início do movimento, o lado direito da equação fornece o seguinte resultado:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$$

o qual reflete uma propriedade operacional da função generalizada delta de Dirac. Com isto, admitindo-se uma impulsão ideal (aquela que é aplicada sem movimentação do sistema), a integração do lado esquerdo da equação (4.27) fornece a relação

$$m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dot{x}(\varepsilon) = 1 \quad \Rightarrow \quad v_o = \frac{1}{m} \quad (4.28)$$

Este resultado permite-nos interpretar fisicamente a aplicação de um impulso unitário como correspondente à aplicação de uma condição inicial de velocidade ao sistema. Em outras palavras, um impulso pode ser interpretado como uma variação instantânea de quantidade de movimento aplicada à massa m do sistema.

No Capítulo 3 vimos que a resposta do sistema subcrítico para condições iniciais conhecidas é dada pela equação 3.21. Se o deslocamento inicial é nulo e a velocidade inicial é dada pela equação 4.28, a resposta básica que buscamos é a seguinte:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_d t \quad (4.29)$$

Denotamos a resposta do sistema protótipo a um impulso unitário por $u(t)$. A Figura 4.9 mostra esta resposta adimensionalizada e parametrizada para dois fatores de amortecimento distintos. As curvas partem do repouso, atingem deslocamentos máximos (“overshoots”) que são funções de ζ e retornam à posição inicial de equilíbrio com oscilações amortecidas. Na confecção desta figura utilizamos valor unitário para a frequência circular natural não-amortecida ω_n .

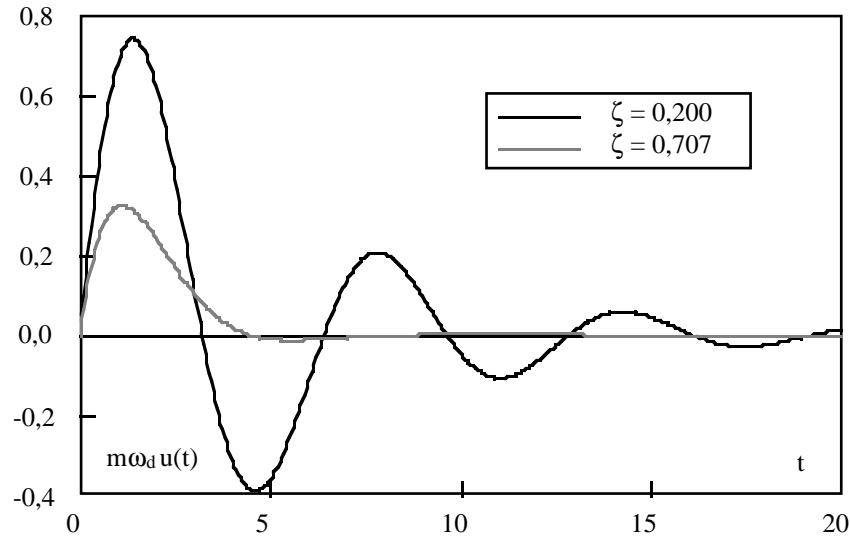


Figura 4.9: Resposta do sistema protótipo a um impulso unitário.

Se o leitor julgar a obtenção do resultado (4.29) bastante informal, isto é, desprovida de rigoroso tratamento matemático, façamos um reestudo do problema utilizando a técnica de transformada de Laplace. Aplicando a transformada à equação (4.27), para condições iniciais nulas, ficamos com

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.30)$$

pois

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

A inversão da equação (4.30) fornece

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (4.31)$$

onde as raízes $s_{1,2}$ são dadas pela equação (3.18). As constantes C_1 e C_2 acima são obtidas de

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \bar{x}(s) = -\frac{i}{2m\omega_d} \quad (4.32a)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \bar{x}(s) = \frac{i}{2m\omega_d} \quad (4.32b)$$

Se substituirmos as constantes (4.32a) e (4.32b) e as raízes (3.18) na resposta (4.31), obtemos a resposta $u(t)$ dada pela equação (4.29) e disposta graficamente na Figura 4.9.

Degrau Unitário

Uma segunda resposta básica pode ser obtida quando estudamos o problema do sistema protótipo, inicialmente em repouso, sendo excitado no instante $t = 0$ por um degrau unitário, isto é, por uma força dada pela função generalizada $H(t)$ tal que

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1/2 & \text{para } t = 0 \text{ e} \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Assim, o problema a resolver consiste em

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = H(t) \quad (4.33)$$

As soluções homogênea e particular deste problema são dadas respectivamente por

$$x_h(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t)$$

e

$$x_p = \frac{1}{k}$$

Ao aplicarmos as condições iniciais nulas para a determinação de C_1 e C_2 , obtemos a resposta $h(t)$ do sistema para um degrau unitário como sendo

$$h(t) = \frac{1}{k} \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right] \quad (4.34)$$

cuja forma gráfica é apresentada na Figura 4.10. Dela observamos que as curvas partem do repouso, apresentam valores de pico que dependem do fator de amortecimento ζ e convergem oscilatoriamente para o valor de equilíbrio, dado pela solução particular do problema. Para a confecção deste gráfico utilizamos novamente valor unitário para a frequência circular natural não-amortecida ω_n .

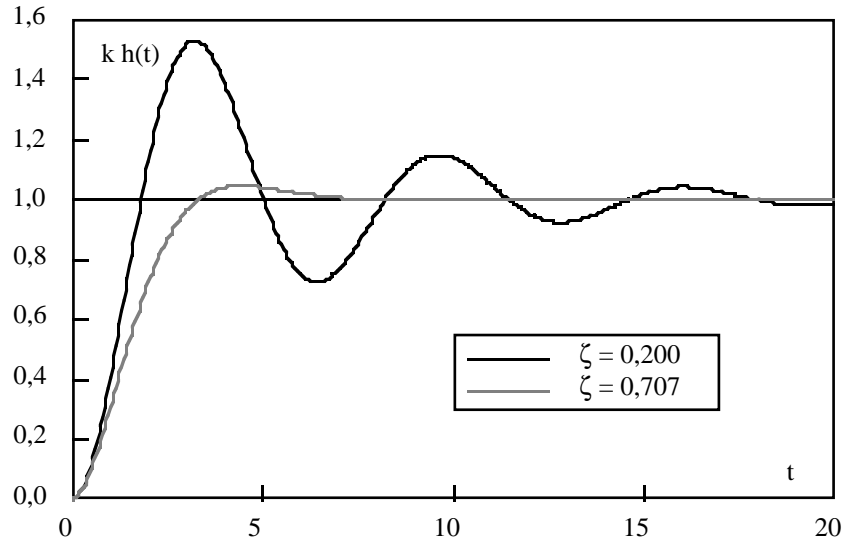


Figura 4.10: Resposta do sistema protótipo a um degrau unitário.

Esta solução básica também pode ser obtida aplicando a técnica da transformada de Laplace à equação (4.33). Neste caso, a transformada da resposta é dada por

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{m s (s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4.35)$$

pois

$$\mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}$$

A equação característica do problema possui três raízes: as duas fornecidas pela equação (3.18) e uma terceira raiz $s_3 = 0$. A partição da relação (4.35) em frações parciais produz

$$\bar{x}(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \frac{C_3}{s}$$

cuja transformada inversa é dada por

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + C_3 \quad (4.36)$$

As constantes que aparecem no resultado acima são obtidas dos seguintes processos de limite:

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) \bar{x}(s) = \frac{1}{2k} \left(i \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} - 1 \right) \quad (4.37a)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) \bar{x}(s) = -\frac{1}{2k} \left(i \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} + 1 \right) \quad (4.37b)$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow s_3} s \bar{x}(s) = \frac{1}{k} \quad (4.37c)$$

Se substituirmos as constantes (4.37a), (4.37b) e (4.37c) e as raízes s_i , $i = 1, 2, 3$ do problema na resposta (4.36), obtemos após alguma manipulação algébrica a resposta $h(t)$ dada pela equação (4.34) e disposta graficamente na Figura 4.10.

4.4.2 Técnicas de Convolução

Uma vez estabelecidas as soluções básicas $u(t)$ e $h(t)$ para os problemas de excitação por impulso unitário e excitação por degrau unitário, respectivamente, temos em mãos os instrumentos necessários para construir respostas analíticas para excitações de caráter geral. Para tanto, vamos admitir que o sistema de um grau de liberdade em análise seja linear, de forma a admitir a aplicação do princípio da superposição.

Se observarmos a resposta $u(t)$ na Figura 4.9, verificamos que o sistema parte do repouso e a ele retorna após um certo tempo de relaxação depois da aplicação do impulso. Já para a resposta $h(t)$ da Figura 4.10, o sistema também parte do repouso, mas oscila com frequência ω_d e converge com o tempo para o valor de regime permanente $1/k$. Uma excitação arbitrária, porém determinística, pode ser interpretada como uma sucessão de impulsos de amplitudes variáveis e conhecidas, aplicados sequencialmente no tempo. Em outra interpretação, a mesma excitação arbitrária pode ser entendida como a aplicação de degraus de amplitudes variáveis e conhecidas, que são “ligados” em determinados instantes de tempo (quando a excitação tem derivada positiva) e “desligados” em instante de tempo posterior (quando a excitação tem derivada negativa). Essas duas interpretações estão colocadas na Figura 4.11, onde uma mesma excitação genérica é aproximada por elementos discretos dispostos vertical e horizontalmente. Note que, no limite, esses elementos são infinitesimais, garantindo continuidade na representação da excitação.

Com estas observações, a primeira perspectiva do problema produz a seguinte integral de convolução para fornecer a resposta do sistema a uma excitação genérica $F(t)$:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (4.38)$$

A função $u(t - \tau)$ é nula para $t \leq \tau$ e assume, no caso do sistema protótipo, a forma dada pela equação (4.29) para $t > \tau$. Assim, o integrando de (4.38) pode ser interpretado como a aplicação no instante τ de um impulso de amplitude elementar $F(\tau) d\tau$, como aparece no lado esquerdo da Figura 4.11. A soma das contribuições de todos os impulsos aplicados em distintos instantes de tempo produz no limite a integral (4.38), com argumento de integração τ . Note que este resultado, conhecido como integral de Duhamel, é geral e aplicável a qualquer sistema, desde que seja inserida em (4.38) a resposta $u(t)$ apropriada. No caso particular de nosso sistema protótipo ficaríamos com

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta \omega_n (t - \tau)} \sen [\omega_d (t - \tau)] d\tau \quad (4.39)$$

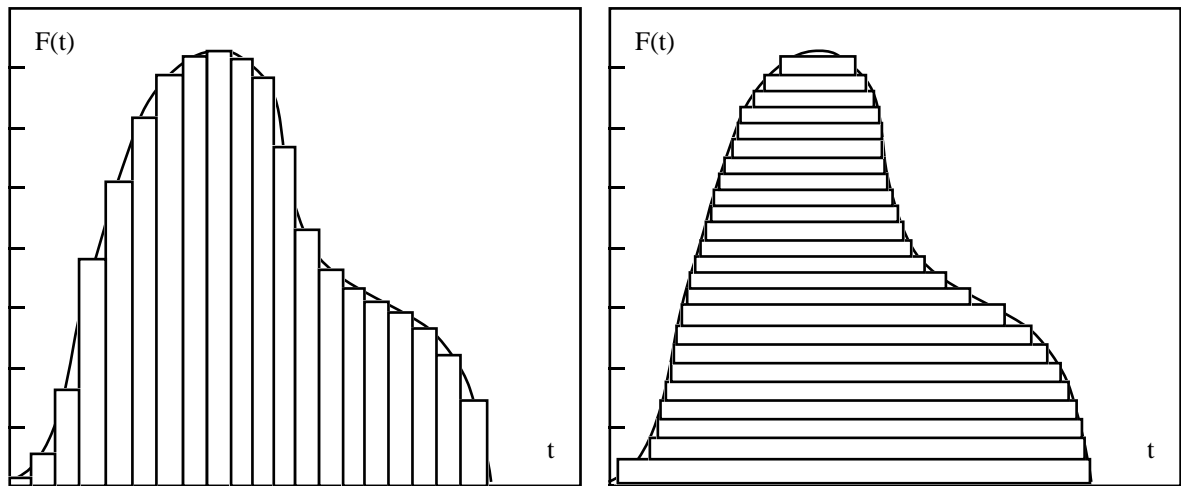


Figura 4.11: Duas representações de uma força genérica por elementos de impulso.

Com a inserção da função excitadora $F(\tau)$ e avaliação desta integral podemos obter uma expressão analítica para a resposta desejada.

Como exemplo, vamos tomar o caso em que um eixo de automóvel enfrenta um redutor de velocidade ou um avião enfrenta uma rajada limitada no espaço. Ambos os problemas podem ser modelados por uma força aplicada conhecida na literatura como “1 - cosseno”. A definição formal desta força é dada por

$$F(t) = \frac{k A}{2} (1 - \cos \omega_g t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_g} \quad (4.40)$$

onde os parâmetros A e ω_g podem ser interpretados como sendo a amplitude e a frequência da rajada, respectivamente. Ao variar estes parâmetros, o leitor poderá conseguir excitações de diferentes perfis. O gráfico desta excitação, para valores normalizados de parâmetros, aparece na Figura 4.12.

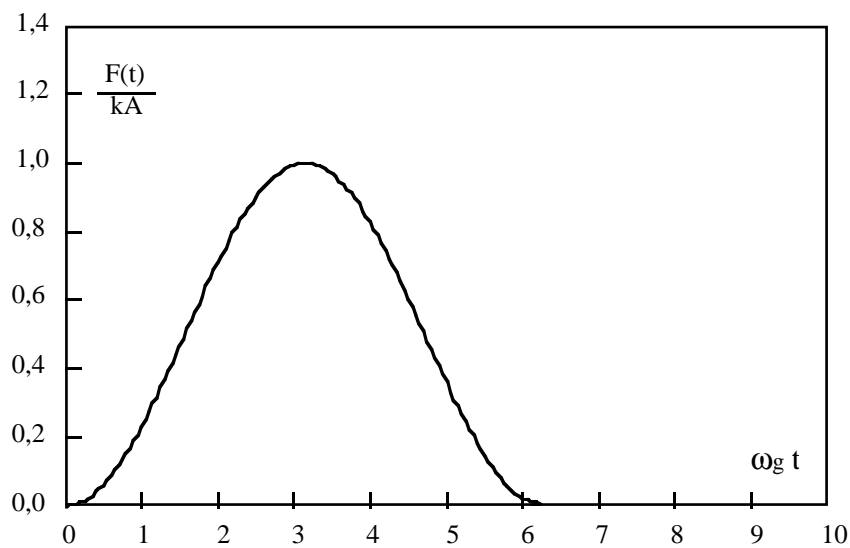


Figura 4.12: Perfil da excitação descrita pela equação (4.40).

A inserção da força (4.40) na resposta (4.39) fornece

$$x(t) = \frac{A\omega_n^2}{2\omega_d} \int_0^t (1 - \cos \omega_g \tau) e^{-\zeta \omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (4.41)$$

para excitação aplicada no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi/\omega_g$.

Após efetuarmos as integrais previstas na equação (4.41), obtemos a resposta do sistema protótipo entre os instantes de tempo $t = 0$ e $t = 2\pi/\omega_g$. Esta resposta é dada por

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{A}{4} \left\{ 2 \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right] \right. \\ & - \frac{\sin \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & - \frac{\sin \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & + \frac{\cos \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & - \frac{\cos \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \left\{ \frac{1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} + \frac{1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \right\} \\ & \left. - e^{-\zeta \omega_n t} \cos \omega_d t \left\{ \frac{\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} - \frac{\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \right\} \right\} \quad (4.42) \end{aligned}$$

A resposta para $t > 2\pi/\omega_g$ depende das condições finais do intervalo de aplicação da carga.

Este resultado é expresso em 7 linhas de equações, evidenciando a complexidade do problema. Ele é colocado em termos de coeficientes adimensionais, tais como o fator de amortecimento ζ e a relação entre a frequência ω_g da rajada e a frequência natural não-amortecida ω_n do sistema. As demais relações adimensionais que aparecem em (4.42), tais como ω_g/ω_d e ω_d/ω_n , podem ser obtidas como funções destas duas relações básicas.

Conforme já antecipado, uma outra técnica de convolução aplicável para tratar excitações genéricas consiste em usar como solução básica a resposta do sistema a um degrau unitário. Neste caso, a resposta do sistema pode ser obtida a partir de

$$x(t) = \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau \quad (4.43)$$

A função $h(t-\tau)$ é nula para $t \leq \tau$ e assume, no caso do sistema protótipo, a expressão dada pela equação (4.34) para $t > \tau$. Assim, o integrando de (4.43) pode ser interpretado como a aplicação no instante τ de um degrau de amplitude elementar dada pelo produto da primeira derivada de $F(\tau)$ em relação a τ com o elemento de tempo $d\tau$, de onde resulta um elemento de força dF , como aparece no lado direito da Figura 4.11. A soma das contribuições de todos os degraus aplicados em distintos instantes de tempo produz no limite a integral (4.43), tendo como argumento de integração a variável τ . Note que este resultado, à semelhança da técnica

representada pela equação (4.38), é geral e aplicável a qualquer sistema, desde que seja inserida em (4.43) a resposta $h(t)$ apropriada a cada situação. No caso particular de nosso sistema protótipo, admitindo-o subcrítico em amortecimento, ficaríamos com

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \left[\cos \omega_d(t-\tau) + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d(t-\tau) \right] \right\} d\tau \quad (4.44)$$

Se aplicarmos esta técnica ao mesmo exemplo da rajada dada pela equação (4.40), obtemos a seguinte integral para o nosso sistema protótipo:

$$x(t) = \frac{A\omega_g}{2} \int_0^t \sin \omega_g \tau \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \left[\cos \omega_d(t-\tau) + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d(t-\tau) \right] \right\} d\tau \quad (4.45)$$

Após efetuarmos as integrais previstas nesta equação, a resposta do sistema fica dada por

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{A}{4} \frac{\omega_g}{\omega_n} \left\{ 2 \frac{\omega_n}{\omega_g} (1 - \cos \omega_g t) \right. \\ & - \frac{\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \zeta \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] - \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right) \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & - \frac{\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \zeta \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] - \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right) \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & - \frac{\sin \omega_d t - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \zeta \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right) \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} - 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & + \frac{\sin \omega_d t - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \left\{ \zeta \cos \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right) \sin \left[\left(\frac{\omega_g}{\omega_d} + 1 \right) \omega_d t \right] \right\} \\ & - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \left\{ \frac{\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n}}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} + \frac{\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n}}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \right\} \\ & \left. + \zeta e^{-\zeta\omega_n t} \left(\sin \omega_d t - \zeta \frac{\omega_n}{\omega_d} \cos \omega_d t \right) \left\{ \frac{1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} - \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} - \frac{1}{\zeta^2 + \left(\frac{\omega_g}{\omega_n} + \frac{\omega_d}{\omega_n} \right)^2} \right\} \right\} \quad (4.46) \end{aligned}$$

Para a obtenção dos resultados (4.42) e (4.46) foi desenvolvido esforço semelhante. No primeiro caso tivemos que efetuar três integrais de dificuldade média, enquanto que no segundo caso tivemos que avaliar uma integral fácil e duas de dificuldade média. No entanto, observa-se que o primeiro resultado tem uma expressão um pouco mais simples e de maior facilidade em termos de implementação computacional. Não é possível aconselhar definitivamente o leitor sobre qual é a melhor das duas técnicas, ficando cada caso a ser avaliado em função de suas características próprias.

Embora os resultados (4.42) e (4.46) tenham aparência matemática distinta, eles expressam exatamente a mesma realidade física, como deveríamos esperar. Uma implementação computacional das duas respostas produz duas curvas temporais idênticas. Colocamos na Figura 4.13 esta resposta única, obtida com os seguintes valores de parâmetros: $\omega_n = 1$ rad/s, $\omega_g/\omega_n = 0,5$, com o fator de amortecimento ζ variável. Observamos a importância deste fator de amortecimento tanto no reduzir a amplitude do deslocamento máximo como no reduzir as oscilações após a aplicação da carga.

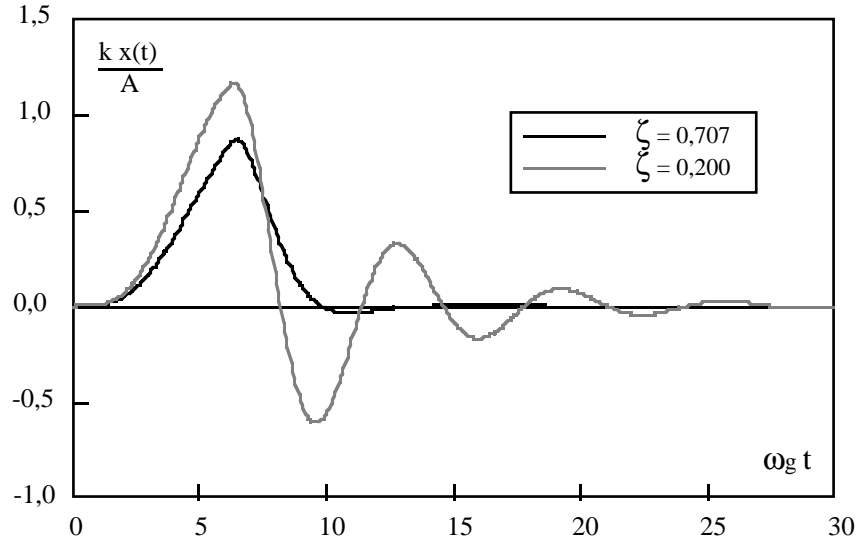


Figura 4.13: Resposta do sistema protótipo à excitação da equação (4.40).

Na Figura 4.13 a carga é aplicada de $t = 0$ até $t = 2\pi/\omega_g$. Neste último instante o deslocamento foi calculado analiticamente e a velocidade foi obtida por diferenciação numérica. Tais resultados serviram como condições iniciais para a resposta livre e amortecida que se seguiu com a evolução do tempo.

Um outro estudo poderia ser conduzido para avaliar a influência da frequência da rajada ω_g na resposta. Deixamos este estudo como exercício para o leitor, de forma que ele possa comprovar pessoalmente as afirmações colocadas nesta seção.

A obtenção das respostas analíticas (4.42) e (4.46) não é trivial, como pudemos observar, mas representam resultados exatos que podem ser usados como padrão de comparação com resultados obtidos via técnicas numéricas aproximadas.

Em conclusão, as duas técnicas de convolução aqui apresentadas produzem o mesmo resultado. A escolha pela aplicação de uma ou de outra fica a cargo do usuário, tendo como único guia a conveniência, devido à facilidade de integração de uma ou de outra expressão. De maneira geral, as integrais que aqui aparecem são elaboradas, não estando disponíveis em tabelas comuns. Vale também observar que as técnicas aplicadas aqui são exatas e válidas desde que o sistema tenha um comportamento linear. Caso isto não ocorra, o analista não disporá de outra ferramenta de análise a não ser recorrer ao uso de técnicas de integração numérica. Algumas dessas técnicas são apresentadas no Capítulo 6.

4.5 Técnicas Experimentais

O movimento de nosso sistema protótipo, com excitação externa, é dado pela resolução da equação diferencial (4.1), aqui reescrita por questão de conveniência:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t) \quad (4.47)$$

Se o sistema vibra na sua frequência natural não-amortecida, sabemos existir um equilíbrio dinâmico entre as forças de inércia e de rigidez do sistema, isto é

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (4.48)$$

Se subtrairmos a equação (4.48) da (4.47) ficamos com

$$c \dot{x} = F(t) \quad (4.49)$$

Este resultado heurístico mostra que, quando forçado a vibrar harmonicamente na sua frequência natural ou próximo a ela, apenas o amortecedor resiste à carga externa. Resulta disto uma amplificação da resposta do sistema, fenômeno natural este chamado de ressonância.

Estruturas são sistemas de baixo amortecimento. Neste caso, suas frequências naturais não-amortecida e amortecida são bastante próximas, tanto que não são consideradas distintas na prática. Assim, à luz da discussão apresentada neste capítulo, podemos utilizar experimentalmente excitações externas harmônicas para determinar as frequências naturais e fatores de amortecimento desses sistemas.

A determinação da frequência natural de um sistema é mais óbvia. Um vibrador (“shaker”) é um dispositivo que produz uma excitação na forma de um deslocamento harmônico. Trata-se normalmente de um dispositivo eletromecânico. O usuário tem controle sobre a amplitude e a frequência da vibração. Quando tal dispositivo é fixado ao sistema e acionado, podemos reproduzir experimentalmente a teoria apresentada na seção 4.2.4 e, em particular, a resposta que aparece na Figura 4.3, quando tratamos do sistema excitado por uma base móvel. Nesta figura, para baixos valores de ζ , temos um pico de ressonância nas proximidades de $\Omega = 1$. A localização deste pico, com a precisão associada, permite a determinação experimental da frequência natural do sistema.

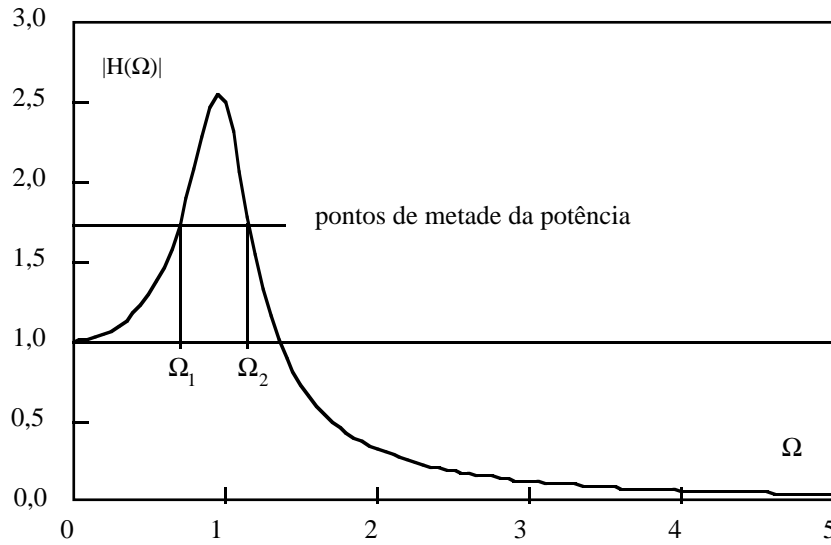


Figura 4.14: Determinação experimental do fator de amortecimento ζ .

A determinação do fator de amortecimento também é simples. Quando ζ é pequeno temos em um gráfico como o da Figura 4.1 um pico de ressonância bem definido, de grande amplitude e razoavelmente simétrico em relação ao seu ponto de máximo. Localizado o pico, nas proximidades de $\Omega = 1$, buscamos os valores de Ω para ambos os lados do pico que correspondam ao valor do pico multiplicado pelo redutor $\sqrt{2}/2$. Esses valores de deslocamento do sistema são equivalentes à metade da energia associada ao valor de pico, sendo, portanto, chamados de pontos de metade da potência. No ponto à esquerda do pico medimos uma razão de frequências Ω_1 e no ponto à direita do pico medimos uma razão de frequências Ω_2 . Obtidos estes valores, pode-se provar que o fator de amortecimento é dado pela relação simples

$$\zeta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \quad (4.50)$$

A precisão com que esta medida pode ser feita está associada à precisão com que os pontos de metade da potência possam ser localizados. Sabemos que o pico de ressonância é tão mais agudo quanto menor for o amortecimento do sistema. O resultado (4.50) mostra justamente que quanto menor for a “largura” do pico, menor é o fator de amortecimento. Obviamente, esta técnica deixa de ser precisa para valores elevados de ζ , pois o pico de ressonância deixa de ser simétrico em torno da frequência crítica. A Figura 4.14 ilustra o caso em que ζ vale 0,2 e já se observa alguma assimetria em relação à frequência de ressonância.

Assim, as técnicas aqui discutidas são dirigidas a sistemas com baixo fator de amortecimento, mas não são restritas a sistemas de um grau de liberdade. De fato, vibradores, sensores e tratadores de sinal são utilizados na indústria justamente para determinar frequências naturais e fatores de amortecimento de sistemas complexos, para os quais modelamentos teóricos deixam de ser efetivos por questões de prazo.

4.6 Conclusões

Neste capítulo o leitor tomou contato com os problemas básicos de vibração forçada de sistemas de um grau de liberdade. O problema de vibração excitada por uma força harmônica é fundamental, por ser o mais comumente encontrado na prática industrial e por explicar a ocorrência de ressonância mecânica, demonstrar suas desastrosas conseqüências e indicar formas de evitá-las. Além disso, somas de contribuições harmônicas de múltiplas frequências permitem o tratamento do segundo problema mais importante na indústria, qual seja, o da excitação de sistemas mecânicos por uma força periódica.

Também neste capítulo o leitor teve contato com problemas básicos de resposta de sistemas de um grau de liberdade a excitações impulsivas. Tais respostas básicas permitem, através da integral de Duhamel, a construção de soluções para excitações determinísticas de qualquer natureza. Por sua vez, tais formulações analíticas podem ser facilmente implementadas em computador, levando a métodos de integração direta da resposta diferentes dos que serão discutidos no Capítulo 6. Finalmente, neste capítulo o leitor teve uma oportunidade de ampliar o seu conhecimento de análise experimental de vibrações, ao estudar técnicas de determinação de frequências naturais e de fatores de amortecimento através da excitação harmônica de estruturas. Tais técnicas são amplamente empregadas na indústria.

Com este estudo, o leitor deve sentir-se capaz de resolver qualquer problema de vibração de sistemas que possam ser modelados analiticamente como descritos por um único grau de liberdade. Com este conhecimento, ele deve julgar-se igualmente preparado para enfrentar problemas mais complexos, tais como aqueles que possam ser modelados por dois ou mais graus de liberdade. Este é o objetivo disposto para o próximo capítulo.

4.7 Bibliografia

Para complementar o estudo das ferramentas matemáticas requeridas neste capítulo, recomendamos a seguir algumas referências úteis sobre análise de Fourier e sobre funções generalizadas.

Sobre Análise de Fourier

- CARSLAW, H. S. - *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3a. ed., Dover, New York, 1950.
- SPIEGEL, M. R. - *Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1974.

Sobre Funções Generalizadas

- GELFAND, I. M. ET AL. - *Generalized Functions*, Vol 1-5, Academic Press, New York, 1964.
- KANWAL, R. P. - *Generalized Functions: Theory and Technique*, Academic Press, New York, 1983.

4.8 Exercícios

Neste capítulo foram apresentados alguns conceitos importantes, particularmente no que concerne à física de vibrações. A maioria desses conceitos sugere aplicações bastante práticas em engenharia. A seguir são apresentados alguns exercícios para complementar o estudo do leitor.

Perguntas

1. Um acelerômetro indica que um sistema mecânico está vibrando harmonicamente com deslocamento máximo de 0,02 m e velocidade máxima de 5 m/s. Determine a frequência, o período e a aceleração máxima da oscilação.
2. O que fisicamente acontece quando um sistema estrutural vibra na sua frequência natural? Qual é o problema matemático associado a este problema físico?
3. O que é ressonância? Quais são as características básicas da resposta de um sistema mecânico ressonante?
4. O que é transmissibilidade? Qual é a relação que este conceito tem com fadiga e ruído causado por sistemas mecânicos? Qual é a importância industrial deste conceito?
5. Qual é o efeito do amortecimento na redução das vibrações de sistemas mecânicos? As conclusões relativas a amortecimento são válidas para quaisquer faixas de frequência?
6. Como um toca-fitas ou CD-player pode ser “isolado” das vibrações que são aplicadas à estrutura de um automóvel?
7. O que você entende por controle de vibrações? Faça distinção entre controle passivo e controle ativo de vibrações.
8. Há quem diga que os sistemas mecânicos “filtram” as vibrações a que são submetidos. Explique o conteúdo desta afirmação.
9. Defina matematicamente e fisicamente os conceitos de média temporal, média quadrática e média rms de um sinal periódico.
10. O que é a análise de Fourier de um sinal? Qual é a importância disto no contexto de vibrações forçadas de sistemas mecânicos?
11. O que é espectro de frequências de um sinal? Forneça exemplos de espectros de sinais harmônicos, periódicos e aleatórios.
12. O que é uma integral de convolução? Qual é a utilidade desta idéia na análise de sistemas lineares?
13. Que técnicas *analíticas* (e, portanto, exatas) você conhece para tratar o caso de sistemas lineares excitados por forças arbitrárias, porém determinísticas?

14. Faça uma pesquisa e descreva como funciona um sismógrafo. Quais são as suas características relevantes como captor de acelerações?
15. Descreva duas técnicas de determinação experimental do coeficiente de amortecimento viscoso equivalente de uma estrutura. Qual é a teoria por detrás dessas técnicas?

Exercícios Resolvidos

1. As molas de um caminhão comprimem-se devido ao seu próprio peso cerca de 10 cm quando este está parado. Despreze efeitos de amortecimento e determine a velocidade crítica de tráfego para este caminhão quando este percorre uma estrada com um perfil aproximadamente senoidal de amplitude igual a 5 cm e comprimento de onda de 2,5 m. Qual será a amplitude da vibração quando o caminhão trafega a 65 km/h? Se necessário, use o valor $9,8 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da gravidade g .

Sem os efeitos de amortecimento, a velocidade crítica do caminhão será aquela em que o veículo é excitado pela estrada exatamente na sua frequência natural. Estamos obviamente modelando o caminhão como um sistema de um grau de liberdade. Do equilíbrio estático do veículo temos

$$m g = k x_e \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{x_e} \quad (a)$$

onde m é a massa do caminhão, k é a rigidez equivalente do seu sistema de suspensão e x_e é o deslocamento estático da suspensão devido ao peso do veículo. Por outro lado, a frequência da excitação externa é dada por

$$\omega = \frac{V}{\lambda} \quad (b)$$

onde V é a velocidade do caminhão e λ é o comprimento de onda da perturbação no leito da estrada. Se igualarmos as frequências descritas pelas equações (a) e (b), obtemos

$$\frac{V_{cr}^2}{\lambda^2} = \frac{g}{x_e} \quad \Rightarrow \quad V_{cr} = \sqrt{\frac{g}{x_e}} \lambda \quad (c)$$

Se substituirmos no resultado (c) os valores numéricos do problema, a velocidade crítica que buscamos é

$$V_{cr} = 24,75 \text{ m/s} = 89,10 \text{ km/h}$$

Se o caminhão trafegar a 65 km/h na mesma estrada, a razão de frequências da excitação é dada por

$$\Omega = \frac{V}{V_{cr}} = \frac{65}{90} \quad \Rightarrow \quad \Omega = 0,73$$

Sem amortecimento, o fator de amplificação $|H(\Omega)|$ dado pela relação (4.5) reduz-se a

$$|H(\Omega)| = \frac{C}{x_e} = \frac{1}{1 - \Omega^2} \quad (d)$$

onde C é a amplitude da resposta e x_e é o deslocamento estático referente à excitação do sistema. Se substituirmos os valores numéricos na relação (d), a amplitude da vibração provocada pelo trânsito na estrada é

$$C = \frac{x_e}{1 - \Omega^2} = \frac{0,05}{1 - 0,73^2} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad C = 0,107 \text{ m}$$

Este resultado evidencia o fenômeno de ressonância mecânica. Se dotarmos o sistema de amortecimento, conforme demonstra a Figura 4.1, a amplificação será menor.

2. Determine a razão de frequências em que ocorre o pico e o valor do pico de amplitude para o fator de transmissibilidade $|T(\Omega)|$.

De acordo com a relação (4.16), o fator de transmissibilidade é dado por

$$|T(\Omega)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

e sua forma gráfica aparece na Figura 4.4. Trata-se de uma função que tem como variável independente a razão de frequências Ω e como parâmetro o fator de amortecimento ζ . Para determinarmos o valor de Ω em que ocorre o valor máximo de transmissibilidade, devemos buscar diferenciar o resultado em relação a Ω e igualá-lo a zero, isto é

$$\frac{d|T(\Omega)|}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}} = 0 \quad (e)$$

Após efetuarmos essa diferenciação e simplificarmos o algebrismo envolvido nessa operação obtemos o seguinte resultado para o numerador da derivada (e):

$$\Omega \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2} (1 - \Omega^2 - 2\zeta^2\Omega^4) = 0 \quad (f)$$

Como a solução $\Omega = 0$ não nos interessa, precisamos investigar as soluções possíveis que resultam do termo em raiz quadrada e do termo entre parêntese na equação (f). As soluções oriundas da raiz quadrada não são reais e uniformemente válidas para o intervalo $0 \leq \Omega, \zeta \leq \infty$. Ao investigarmos o termo entre parênteses, entretanto, obtemos um resultado que é fisicamente significativo, ou seja

$$\Omega_{\max} = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1} \quad (g)$$

Se analisarmos a Figura 4.4, verificamos que este resultado verifica as curvas ali reproduzidas, pois o valor de Ω_{\max} evolui continuamente do valor unitário ao valor nulo enquanto o fator de amortecimento ζ assume os valores de zero a infinito. Em particular, por envolver indeterminações, seria interessante que o leitor provasse os seguintes limites da relação (g):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Omega_{\max} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1} \right] = 1$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \Omega_{\max} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1} \right] = 0$$

De posse do valor de Ω_{\max} dado pela relação (g), podemos agora determinar o valor do pico de amplitude a ele correspondente. Se substituirmos este valor na expressão (4.16) para o fator de transmissibilidade obtemos, após algum algebrismo, o seguinte resultado:

$$|T(\Omega)|_{\max} = \sqrt{\frac{8\zeta^4}{8\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1 + \sqrt{1 + 8\zeta^2}}} \quad (h)$$

O leitor poderá verificar que a relação (h) evolui continuamente do valor infinito ao valor unitário à medida que o fator de amortecimento ζ passa do valor nulo ao valor infinito, o que verifica aquilo que está disposto graficamente na Figura 4.4.

3. Uma máquina com massa de 30 kg é suportada por três molas iguais em paralelo de rigidez k N/m cada uma. Se a máquina é forçada a oscilar harmonicamente a 580 rpm, qual deve ser o valor do coeficiente de rigidez k para que, sem amortecimento, apenas 10% da força excitadora seja transmitida à estrutura de suporte? Que acontecerá se, mantidas as mesmas características de rigidez, o fator de amortecimento ζ for igual a 0,707 ?

Se adotarmos um modelo de um grau de liberdade para este sistema, a sua frequência circular natural não-amortecida ω_n fica dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m}{3} \omega_n^2 \quad (i)$$

Em consequência, a razão de frequências Ω relaciona-se com o coeficiente de rigidez k através de

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \frac{m \omega^2}{3k} \quad (j)$$

onde

$$\omega = 580 \text{ rpm} = 580 \cdot \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 60,74 \text{ rad/s}$$

é a frequência de excitação do sistema.

O fator de transmissibilidade é dado pela relação (4.16), isto é

$$|T(\Omega)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os lados desta relação, obtemos a seguinte equação algébrica biquadrada para Ω :

$$|T(\Omega)|^2 \Omega^4 + [4\zeta^2 (|T(\Omega)|^2 - 1) - 2 |T(\Omega)|^2] \Omega^2 + |T(\Omega)|^2 - 1 = 0 \quad (k)$$

Se substituirmos aqui a relação (j) e manipularmos algebricamente o resultado, ficamos com a seguinte equação do segundo grau para k :

$$9 [|T(\Omega)|^2 - 1] k^2 + 3 [4\zeta^2 (|T(\Omega)|^2 - 1) - 2 |T(\Omega)|^2] m \omega^2 k + |T(\Omega)|^2 m^2 \omega^4 = 0 \quad (l)$$

Se especializarmos esta equação para o caso em que o fator de amortecimento ζ é nulo, ficamos com

$$9 [|T(\Omega)|^2 - 1] k^2 - 6 |T(\Omega)|^2 m \omega^2 k + |T(\Omega)|^2 m^2 \omega^4 = 0$$

o que, com os valores numéricos do problema, fornece

$$k^2 + 745,32 k - 13.748.773,45 = 0$$

Como apenas a raiz positiva desta equação possui significado físico, obtemos como resposta que

$$k = 100.856,7 \text{ N/m}$$

o que mostra que a fixação da máquina à sua base é bastante rígida.

Se retornarmos à relação (i) com o valor de k encontrado, a frequência circular natural do sistema ω_n fica valendo

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 100.856,7}{30}} \text{ rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 100,43 \text{ rad/s}$$

e a razão de freqüências Ω assume o valor

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{100,43}{60,74} \Rightarrow \Omega = 1,65$$

Se substituirmos este valor de Ω e o valor de ζ na expressão do fator de transmissibilidade, obtemos

$$|T(\Omega)| = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot 0,707 \cdot 1,65)^2}{(1 - 1,65^2)^2 + (2 \cdot 0,707 \cdot 1,65)^2}} \Rightarrow |T(\Omega)| = 0,875$$

Este resultado mostra que, como foi antecipado nas curvas da Figura 4.4, o aumento de amortecimento na faixa de razão de freqüências $\Omega > \sqrt{2}$ é prejudicial ao isolamento das vibrações provocadas pelo sistema pois, agora, temos 87,5% de transmissibilidade.

4. Um sinal periódico é definido graficamente pela Figura 4.15. Para a análise deste sinal, pede-se:
- média temporal;
 - valor médio quadrático;
 - valor rms;
 - classificação: par ou ímpar? Por que?
 - série de Fourier que descreve a excitação periódica $F(t)$; e
 - espectro de freqüências de $F(t)$.

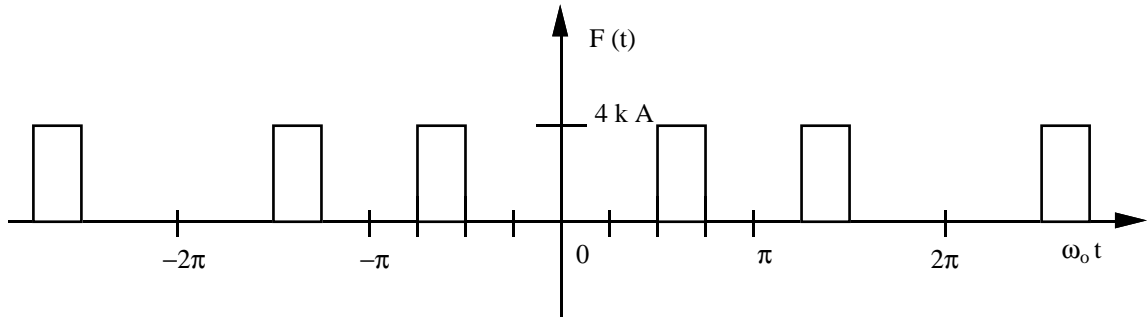


Figura 4.15: Um sinal periódico de excitação.

Para a análise deste sinal, vamos considerar o período T_o compreendido entre os instantes $t = -\pi/\omega_o$ e $t = \pi/\omega_o$. A média temporal é definida pela relação (4.17) com ordem $j = 1$, isto é

$$\overline{F(t)} = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} F(t) dt$$

Uma simples inspeção visual é suficiente para fornecer o resultado, ou seja

$$\overline{F(t)} = k A$$

A média quadrática é dada também pela relação (4.17), com ordem $j = 2$. Assim,

$$\overline{[F(t)]^2} = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} [F(t)]^2 dt$$

Isto equivale a tomar a média temporal (de ordem 1) da função $[F(t)]^2$. Novamente, uma inspeção visual permite obter o resultado

$$\overline{[F(t)]^2} = 4 k^2 A^2$$

Como consequência imediata, a média rms do sinal é

$$\overline{F(t)}_{\text{rms}} = \sqrt{4 k^2 A^2} = 2 k A$$

Note que, do ponto de vista de energia, a média rms é o dobro da média temporal desta excitação.

A força $F(t)$ dada pela Figura 4.15 é descrita matematicamente por uma função par, pois

$$F(t) = F(-t) \quad \forall t$$

De maneira equivalente, observamos que existe uma simetria da função com relação ao eixo das ordenadas a partir de $t = 0$, como se, colocando-se ali um espelho, tivéssemos à direita da origem uma imagem especular da função à esquerda da origem e vice-versa. Em consequência, esta função expande-se em cossenos de frequências múltiplas da frequência fundamental ω_o , permitindo-nos, a partir da expansão 4.21, escrever que

$$F(t) = k \left[A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_o t \right] \quad (m)$$

Da relação (4.20a) temos

$$a_n = \frac{\omega_o}{\pi} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} F(t) \cos n \omega_o t \, dt \quad (n)$$

A função $F(t)$ é descrita matematicamente como

$$\begin{aligned} F(t) &= 0 && \text{para } -\frac{\pi}{\omega_o} < t < -\frac{3\pi}{4\omega_o} \\ &= 4 k A && \text{para } -\frac{3\pi}{4\omega_o} < t < -\frac{\pi}{2\omega_o} \\ &= 0 && \text{para } -\frac{\pi}{2\omega_o} < t < \frac{\pi}{2\omega_o} \\ &= 4 k A && \text{para } \frac{\pi}{2\omega_o} < t < \frac{3\pi}{4\omega_o} \\ &= 0 && \text{para } \frac{3\pi}{4\omega_o} < t < \frac{\pi}{\omega_o} \end{aligned} \quad \text{e}$$

Assim, o coeficiente a_n pode ser obtido inserindo-se a função ora descrita na relação (n), ou seja

$$a_n = \frac{4 A \omega_o}{\pi} \left\{ \int_{-3T_o/8}^{-T_o/4} \cos n \omega_o t \, dt + \int_{T_o/4}^{3T_o/8} \cos n \omega_o t \, dt \right\}$$

Efetuada as integrais requeridas e simplificando os resultados, obtemos

$$a_n = \frac{8 A}{n \pi} \left(\sin \frac{3 n \pi}{4} - \sin \frac{n \pi}{2} \right)$$

Como

$$\sin \frac{n \pi}{2} = 1; 0; -1; 0 \quad \text{para } n = 1; 2; 3; 4$$

respectivamente e ciclicamente para $n > 4$ e

$$\sin \frac{3 n \pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \quad \text{para } n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$$

respectivamente e ciclicamente para $n > 8$, concluímos que os coeficientes a_n terão uma amplitude governada pelo fator $1/n$ e por uma modulação cíclica de 8 harmônicos da frequência fundamental. Colocando isto em forma explícita, temos o espectro de frequências da Figura 4.16 e a expansão matemática dada por

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{kA} = 1 + \frac{8}{\pi} & (-0,2929 \cos \omega_o t - 0,5000 \cos 2\omega_o t + 0,5690 \cos 3\omega_o t - 0,3414 \cos 5\omega_o t \\ & + 0,1667 \cos 6\omega_o t + 0,0418 \cos 7\omega_o t - 0,0325 \cos 9\omega_o t - \dots) \end{aligned} \quad (o)$$

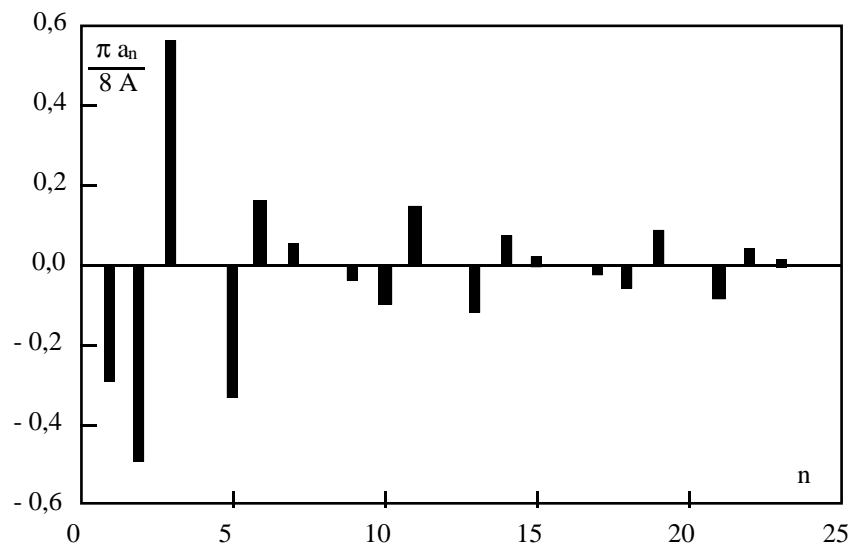


Figura 4.16: Espectro de frequências da força disposta na Figura 4.15.

No espectro de frequências da Figura 4.16 observa-se uma baixa taxa de convergência devido ao fator $1/n$. Isto acontece porque a função $F(t)$ apresenta fortes descontinuidades. Assim, um grande número de termos de alta frequência é necessária para reproduzir de maneira razoável a função disposta graficamente na Figura 4.15. No espectro não aparece o termo de frequência nula (também conhecido por termo “DC”, em analogia à prática utilizada em engenharia eletrônica), que corresponde ao termo de média temporal da função.

Fica como exercício para o leitor aplicar esta excitação a um sistema mecânico de um grau de liberdade e obter a resposta correspondente no domínio do tempo e da frequência, como aparece no texto.

Exercícios Propostos

1. Um sistema de massa m e mola k , de frequência circular natural não-amortecida ω_n , inicialmente em repouso, é forçado a vibrar pela força externa $F(t) = F_o \sin \omega_n t$. Pede-se:
 - (a) Obtenha a resposta $x(t)$ à excitação dada.
 - (b) Qual é o tempo necessário para esta resposta atingir uma amplitude duas vezes maior que o deslocamento estático F_o/k ?

2. Uma massa fixa a uma mola de rigidez 600 N/m, quando colocada em vibração livre, vibra com período de 1,80 s e relação entre dois picos consecutivos de 4,2 para 1. Se o mesmo sistema for excitado por uma força

$$F(t) = 10 \cos 3t$$

com amplitude da força em N, pede-se:

- Determine a amplitude e fase da resposta permanente do sistema.
 - Determine a forma da resposta transiente do sistema.
 - Determine qual é a posição da massa após 3 segundos, se ela parte do repouso.
3. Uma máquina de massa 2 kg vibra com amortecimento do tipo viscoso. Determine o coeficiente de amortecimento do sistema quando o mesmo possui um pico de ressonância de 2,5 cm se excitado por uma força harmônica de 25 N de amplitude e período de 0,20 s.
4. Mostre que a razão de frequências exata para a ressonância e o fator de amplificação associado são dados por

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad |H(\Omega)|_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

5. Determine a razão de frequências em que ocorre o pico e o valor do pico de amplitude para o problema da vibração excitada pela base descrito pela Figura 4.3.
6. Prove a validade dos seguintes resultados apresentados no texto:
- (4.5) e (4.6), concernente à resposta em frequência de sistemas mecânicos;
 - (4.12) e (4.13), concernente a sistemas excitados pelo movimento da base;
 - (4.16), concernente ao fator de transmissibilidade de vibrações;
 - (4.20a) e (4.20b), concernentes aos termos da expansão em série de Fourier; e
 - (4.50), concernente à determinação experimental do coeficiente de amortecimento.
7. A corrente em um circuito elétrico de corrente alternada é dada por $i = A \sin \omega t$ e a potência dissipada em um resistor é dada por $P = B \sin^2 \omega t$. Determine a média temporal, o valor médio quadrático e o valor rms de i e de P . Discuta os seus resultados, interpretando o significado do valor encontrado para a média rms da corrente e da potência.
8. Um movimento periódico $x(t)$ é dado por

$$x(t) = 3 \sin(\omega t) + 2 \sin(3\omega t) + 1 \sin(5\omega t)$$

Faça um gráfico de $x(t)$ com t indo de 0 a $2\pi/\omega$ e paralelamente mostre como é o espectro de frequências do movimento.

9. Um sistema massa-mola-amortecedor tem frequência natural não-amortecida de 3 Hz e é excitado por uma força externa periódica igual a

$$F(t) = 2 \cos \omega t + 1 \cos 2\omega t + 0,3 \cos 3\omega t$$

Determine a resposta do sistema, incluindo as amplitudes e os ângulos de fase, sabendo-se que a sua frequência natural é dada por $\omega_n = 7\omega/3$ e o fator de amortecimento é de 10%. Qual das três frequências externas contribui mais para a resposta?

10. Considere a força “dente de serra” mostrada na Figura 4.17. Pede-se:

- Qualifique este sinal com respeito à paridade e à continuidade.
- Determine a série de Fourier que a representa. Obtenha pelo menos 7 termos da série. A convergência da série é rápida ou lenta? Por que?
- Determine a média temporal, o valor médio quadrático e o valor rms do sinal $F(t)$ dado. Faça isto de dois modos: a partir da própria função e a partir da série de Fourier. Que relação(ões) pode(m) ser estabelecida(s) entre essas médias e os termos da série de Fourier?
- Forneça o espectro de frequências do sinal. Ele é harmônico, periódico ou aleatório? Por que? Que relação existe entre este espectro e a função $F(t)$ fornecida? Qual é a importância da fase da Figura 4.17 no espectro de frequências?

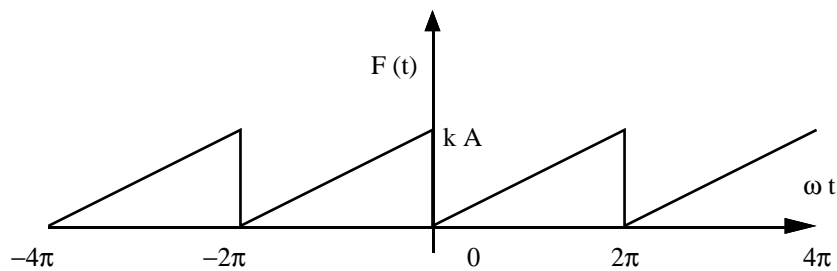


Figura 4.17: Uma excitação periódica representativa de folgas de acionamento.

11. Um sistema massa-mola-amortecedor linear é excitado por uma força externa periódica dada pela Figura 4.18. Pede-se:

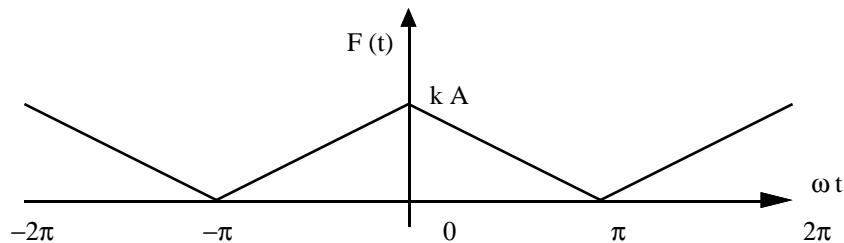


Figura 4.18: Uma excitação periódica em forma de onda triangular.

- Classifique a função quanto à paridade e continuidade. Você espera que a sua expansão em série de Fourier tenha convergência rápida ou lenta? Por que?
- Forneça a média temporal, o valor médio quadrático e a média rms da força excitadora $F(t)$ do sistema.
- Obtenha a série de Fourier que descreve esta excitação e espectro de frequências a ela associado.
- Obtenha a resposta permanente $x(t)$ do sistema para esta excitação e faça um gráfico correspondente. Adote os valores numéricos que julgar conveniente para os parâmetros relevantes.
- Obtenha o espectro de frequências da resposta $x(t)$ dada no item anterior. O que pode ser comentado sobre a atuação do sistema como um filtro das excitações recebidas?

12. Um sistema massa-amortecedor-mola linear é excitado a partir do repouso por uma força externa cuja variação temporal é dada pela Figura 4.19: Pede-se:

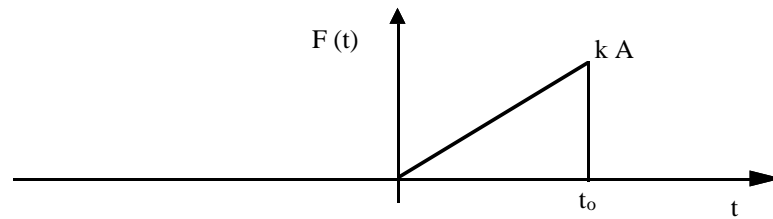


Figura 4.19: Excitação impulsiva em forma de “rampa”.

- Obtenha a resposta do sistema pela integral de convolução que descreve a excitação como uma seqüência de impulsos.
 - Idem, pela integral de convolução que descreve a excitação externa como uma seqüência de degraus.
 - Coloque as duas respostas em um único gráfico e perceba que, embora analiticamente diferentes, elas fornecem o mesmo comportamento para o sistema.
 - Para um sistema em que a massa $m = 10$ kg, a mola $k = 1.000$ N/m, o amortecedor $c = 20$ Ns/m, $kA = 10$ N e $t_o = 0,5$ s, inicialmente em repouso, em que instante de tempo a amplitude da resposta é máxima?
13. Considere um carro descendo uma colina em “banguela”. Nesta condição, a agulha do tacômetro está estabilizada em 800 RPM. No final da descida o motorista pisa no acelerador do motor segundo a Figura 4.20, de forma a estabilizar uma subida em 3000 RPM. Modele a agulha do tacômetro como um sistema de um grau de liberdade e a atuação no acelerador como um torque aplicado à agulha. Nestes termos, pede-se:

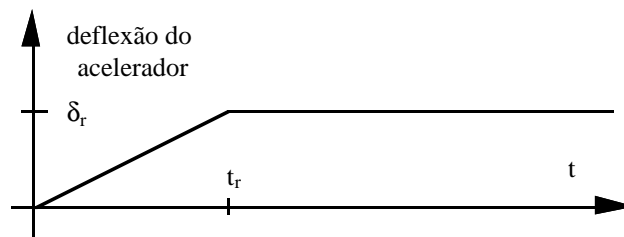


Figura 4.20: Modelo de acionamento de um acelerador na retomada de velocidade.

- Qual é a resposta transiente do sistema?
 - Qual é a influência do tempo de aplicação t_r do acelerador nesta resposta?
 - Qual é a influência do fator de amortecimento na resposta da agulha?
14. Uma máquina com 40 kg de massa é suportada por duas molas iguais em série de rigidez k N/m cada uma. Se a máquina vibra a 600 rpm, qual deve ser o valor da rigidez k para que, com amortecimento de 20%, apenas 20% da força excitadora seja transmitida à estrutura de suporte? Qual deverá ser o novo valor de k se, mantido o mesmo fator de transmissibilidade $|T(\Omega)|$, o fator de amortecimento ζ dobrar de valor?

Capítulo 5

Vibrações de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

5.1 Introdução

Tendo estudado problemas de vibração livre e forçada de sistemas de um grau de liberdade, o leitor está preparado para tomar contato neste capítulo com problemas similares de sistemas de maior complexidade. Modeladas como sistemas discretos de múltiplos graus de liberdade, estruturas podem ser tratadas à semelhança do que aqui já foi apresentado. No entanto, a formulação passa a ser matricial e a possibilidade de tratamento analítico diminui, favorecendo o tratamento numérico via computadores.

O presente capítulo principia pela dedução das equações de movimento de um sistema protótipo de dois graus de liberdade. A seguir são estudadas as características de vibração livre deste sistema. Neste caso, a idéia de frequência natural de vibração é ampliada, sendo também introduzido o conceito de modo de vibração associado à frequência natural. O próximo passo envolve o estudo de vibrações forçadas, quando é apresentada a técnica de análise modal amplamente utilizada na indústria.

Problemas reais modelados segundo sistemas discretos podem envolver um grande número de graus de liberdade. Para tratar tais problemas de maneira rápida e sistemática existem uma série de programas de computador disponíveis comercialmente e de domínio público. Para o ponto de vista do usuário, bastaria que houvesse treinamento no uso desses pacotes de programas. No entanto, como buscamos aqui discutir fundamentos da *Dinâmica de Estruturas*, não utilizaremos este ponto de vista. Pelo contrário, discutiremos alguns aspectos básicos do ponto de vista de métodos numéricos necessários para a aplicação da técnica de análise modal. Isto visa capacitar o leitor no entendimento do funcionamento, aplicação e limitações desses pacotes.

5.2 Dedução das Equações de Movimento

A Figura 5.1 mostra o modelo analítico de um sistema com duas massas ideais m_1 e m_2 , ligadas à parede do laboratório e entre si por molas lineares ideais k_1 e k_2 e por amortecedores viscosos de coeficientes c_1 e c_2 . Quando o sistema está em repouso, as massas têm suas referências alinhadas com as referências do laboratório. Quando em movimento, as massas deslocam-se quantidades $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em relação às respectivas referências. O movimento pode ser excitado por forças externas prescritas designadas respectivamente por $F_1(t)$ e $F_2(t)$. Como necessitamos conhecer duas incógnitas para determinarmos o estado do sistema, à luz dos conceitos apresentados no Capítulo 2, temos a tratar um sistema de dois graus de liberdade.

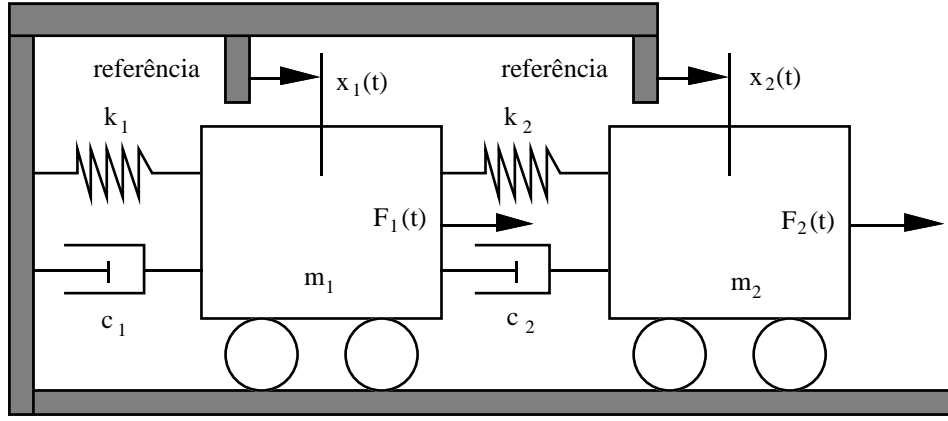


Figura 5.1: Modelo analítico do sistema protótipo de dois graus de liberdade.

O estudo de um sistema de dois graus de liberdade é suficiente para ilustrar todos os aspectos relevantes à vibração livre e forçada de sistemas de múltiplos graus de liberdade. Além disso, um sistema de dois graus é simples o suficiente para permitir que seus resultados possam ser obtidos analiticamente, estabelecendo com aquele que o estuda um forte vínculo de credibilidade em termos de formulação e resultados. Assim, este será o sistema protótipo a ser utilizado neste capítulo. Esperamos que o leitor possa fazer as generalizações e extensões necessárias para permitir-lhe obter um tratamento de sistemas com três ou mais graus de liberdade.

Nossa tarefa consiste em deduzir as equações de movimento do sistema de dois graus de liberdade tomando por base o modelo analítico da Figura 5.1. No capítulo 2 apresentamos 6 diferentes abordagens que nos permitem obter este resultado. Do ponto de vista didático, vale a pena considerar esta tarefa por diferentes perspectivas, de forma que o leitor possa perceber as vantagens e desvantagens relativas dessas abordagens. No entanto, não desejamos enfatizar demais esta comparação entre as diversas técnicas das Mecânicas Newtoniana e Lagrangeana. Assim, vamos aqui limitar a dedução das equações pertinentes através do emprego da Segunda Lei de Newton, do Princípio da Conservação de Energia e das Equações de Lagrange.

5.2.1 Segunda Lei de Newton

Como verificamos no Capítulo 2, o primeiro passo do modelamento matemático segundo a Segunda Lei de Newton consiste em preparar o diagrama dos corpos livres que compõem o sistema sob análise. O diagrama mostrado na Figura 5.2 resulta após a adoção das seguintes hipóteses:

- que os deslocamentos x_1 e x_2 e velocidades \dot{x}_1 e \dot{x}_2 são positivos e
- que no instante de análise $x_2(t) > x_1(t)$ e $\dot{x}_2(t) > \dot{x}_1(t)$.

Neste diagrama F_{k_i} é a força de resistência provida pela mola i e F_{c_i} é a força de resistência provida pelo amortecedor i .

Se considerarmos o diagrama de corpo livre do carro de massa m_1 , podemos escrever a seguinte equação de equilíbrio dinâmico para m_1 constante:

$$F_1(t) + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 = m_1 \ddot{x}_1$$

Se rearranjarmos os termos de maneira apropriada, obtemos

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = F_1(t) \quad (5.1)$$

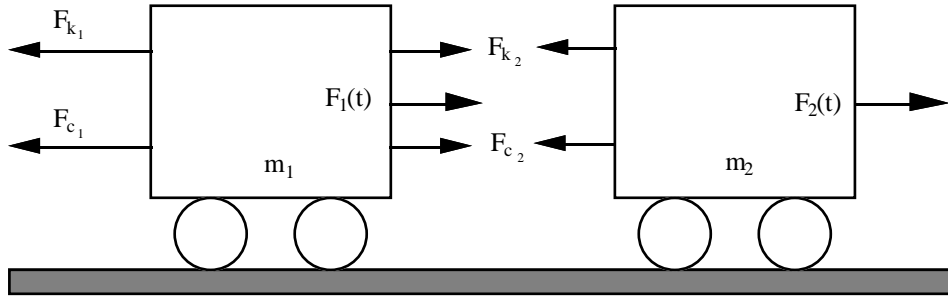


Figura 5.2: Diagrama de corpos livres do sistema da Figura 5.1.

Se usarmos as mesmas hipóteses colocadas anteriormente com relação a deslocamentos e velocidades, o diagrama de corpo livre do carro de massa m_2 indica a seguinte condição de equilíbrio dinâmico:

$$F_2(t) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2$$

Se rearranjarmos os termos deste resultado, ficamos com

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = F_2(t) \quad (5.2)$$

As equações de movimento (5.1) e (5.2) podem ser apresentadas simultaneamente em forma matricial tendo por base um vetor de deslocamentos de duas linhas, com $x_1(t)$ na primeira linha e $x_2(t)$ na segunda. Nesta forma de apresentação, que evidencia o acoplamento do problema, essas equações são apresentadas como

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ou, sinteticamente, na seguinte forma:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (5.3)$$

A primeira matriz desta equação, que descreve propriedades inerciais, é chamada de *matriz de massa* do sistema. Ela aparece multiplicada pelo *vetor aceleração*. A segunda matriz da equação, que descreve propriedades de dissipação energética, é chamada de *matriz de amortecimento* do sistema. Ela aparece multiplicada pelo *vetor velocidade*. A terceira matriz da equação (5.3), que descreve propriedades de elasticidade, é chamada de *matriz de rigidez* do sistema. Ela aparece multiplicada pelo *vetor deslocamento*, definido anteriormente. Finalmente, do lado direito da equação aparece um vetor que descreve as características de excitação do sistema, sendo, devido a isto, denominado *vetor de forças*.

Note que as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são simétricas e, em particular, para o presente caso de massas concentradas, a matriz de massa é diagonal. O fato das matrizes de amortecimento e de rigidez serem cheias denota o acoplamento entre os graus de liberdade do problema. O fato dessas matrizes serem simétricas resulta dos funcionais quadráticos que descrevem energia cinética, energia potencial elástica e função dissipação de Rayleigh. Esta é uma característica natural dos sistemas lineares que serão tratados aqui. Esta característica deixa de existir para alguns sistemas não-lineares e dissipativos.

A aplicação da Segunda Lei de Newton ao sistema da Figura 5.1 exigiu a adoção de hipóteses adicionais quanto ao sinal dos deslocamentos e velocidades, bem como da magnitude relativa entre eles. Tais hipóteses se fizeram necessárias para permitir a confecção dos diagramas de corpo livre dos dois carros que aparecem na Figura 5.2. Além disso, vale observar que os diagramas devem ser coerentes entre si, o que exige bastante atenção do analista, particularmente para sistemas com maior número de graus de liberdade.

5.2.2 Princípio da Conservação de Energia

A energia cinética do sistema da Figura 5.1 é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (5.4)$$

Este resultado é particularmente simples porque os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos medidos em relação ao referencial inercial do laboratório.

A energia potencial elástica associada às molas do sistema é dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (5.5)$$

Note a facilidade com que é expressa a energia associada à mola k_2 . Como o funcional é quadrático, tanto faz colocar $(x_2 - x_1)^2$ como $(x_1 - x_2)^2$. O que realmente importa é o quadrado do deslocamento relativo entre as duas massas.

A função dissipação de Rayleigh do sistema pode ser escrita de forma semelhante, ou seja

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (5.6)$$

Vale ressaltar que esta função equivale à metade da potência dissipada nos amortecedores do sistema, algo que o leitor poderá demonstrar com facilidade.

Finalmente, a potência instantânea associada às forças externas aplicadas ao sistema é dada por

$$\mathcal{P} = F_1(t) \dot{x}_1 + F_2(t) \dot{x}_2 \quad (5.7)$$

A substituição das equações (5.4) a (5.7) no Princípio

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{T} + \mathcal{U}) = \mathcal{P} - 2\mathcal{D} \quad (5.8)$$

fornece o seguinte resultado após diferenciação e manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} & [m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 - F_1] \dot{x}_1 \\ & + [m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 - F_2] \dot{x}_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

o que havia sido antecipado pela equação (2.25) do Capítulo 2, isto é

$$\{\mathcal{F}\}^T \{\dot{x}\} = 0$$

No resultado (5.9), termos como $2c_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2$ foram “divididos”, ficando um para cada colchete. Como este resultado deve valer para qualquer instante de tempo e o vetor $\{\dot{x}\}$ é em geral diferente de zero, o vetor $\{\mathcal{F}\}$ deve ser identicamente nulo. Assim, conclui-se pela validade da afirmação de que cada colchete da equação (5.9) é individualmente nulo. Desta forma, recuperamos as equações de movimento (5.1) e (5.2) que, postas em forma conjunta, fornecem a equação matricial de movimento (5.3).

Observa-se que esta técnica de modelamento matemático conduz aos mesmos resultados da anterior, porém sem a necessidade de hipóteses adicionais concernentes aos sinais e magnitude relativa de deslocamentos e velocidades. Esta vantagem, aliada à sistematização do processo, torna mais evidente a superioridade da abordagem Lagrangeana face aos métodos Newtonianos, notadamente para a análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade, quando esta sistematização pode ser implementada em computação simbólica.

5.2.3 Equações de Lagrange

As equações de Lagrange para o problema da Figura 5.1 são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \mathcal{Q}_i \quad (5.10)$$

com $i = 1, 2$. Com as equações (5.4) e (5.5), a função Lagrangeana assume a seguinte expressão:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 \quad (5.11)$$

A função dissipação de Rayleigh \mathcal{D} é dada pela equação (5.6). Já o trabalho virtual das forças externas é escrito como

$$\delta \mathcal{W} = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2$$

o que nos permite determinar que

$$\mathcal{Q}_1 = F_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = F_2 \quad (5.12)$$

Se substituirmos as equações (5.11), (5.6) e (5.12) em (5.10), obtemos para $i = 1$ a equação de movimento (5.1) e para $i = 2$ a equação (5.2). Se estas duas equações forem expressas em forma matricial, recuperamos o resultado (5.3), como seria de se esperar. Assim, o método de equações de Lagrange fornece exatamente o mesmo resultado dos métodos anteriores a um custo semelhante ao do Princípio da Conservação de Energia.

O leitor depararia com conclusões semelhantes às aqui apresentadas se aplicasse ao modelo analítico da Figura 5.1 os Princípios de D'Alembert, dos Deslocamentos Virtuais ou de Hamilton. É interessante observar a facilidade com que expressões de energias e potências podem ser escritas em contraste com a dificuldade que nos deparamos ao elaborar diagramas de corpos livres de sistemas complexos. Como diferenciações podem ser realizadas modernamente via álgebra simbólica em computador, os métodos Lagrangeanos são favorecidos.

5.3 Vibrações Livres - Frequências e Modos de Vibração

Uma vez encontrada a equação matricial (5.3) que descreve o movimento do nosso sistema protótipo de dois graus de liberdade, estamos agora na posição de resolvê-la. Acontece que a equação (5.3) representa de fato duas equações diferenciais acopladas de segunda ordem, de coeficientes constantes e não-homogêneas. A resolução deste problema matemático não é trivial. No sentido de desenvolvermos ferramentas que permitam mais tarde atingirmos este objetivo, vamos inicialmente analisar o problema de vibrações livres.

O modelo analítico da Figura 5.1 oscilará livremente quando as forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ aplicadas respectivamente às massas m_1 e m_2 forem nulas. Isto equivale a fazer nulo o vetor do lado direito da equação (5.3). Neste caso, podemos avançar um pouco mais na simplificação do modelo matemático ao ignorarmos os efeitos introduzidos pelos amortecedores no problema. Esta simplificação está de acordo com a abordagem mais frequentemente utilizada em *Dinâmica Estrutural*, representada pela escola americana. Já a escola francesa prefere trabalhar a questão de vibrações livres incluindo os efeitos de amortecimento. Embora neste último caso tenhamos vantagens de desacoplamento que serão apontadas mais tarde, temos a pagar o preço de trabalhar com auto-valores e auto-vetores complexos. Não cremos ser vantajoso pagar este preço. Portanto, vamos aqui utilizar a abordagem da escola americana.

Com as simplificações aludidas acima, a equação (5.3) fica reduzida a

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

Vamos supor uma solução na forma

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_n t - \phi) \quad (5.14)$$

Esta solução representa uma oscilação perfeitamente em fase ou fora de fase de ambos os carros na frequência ω_n , com amplitudes distintas A_1 e A_2 . Se ambas as amplitudes tiverem o mesmo sinal, elas estão em fase. Caso contrário, estão fora de fase.

Se diferenciarmos duas vezes a solução (5.14) em relação ao tempo e substituirmos os vetores aceleração e deslocamento na equação (5.13), obtemos o seguinte resultado:

$$\left[-\omega_n^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

Para que não tenhamos solução trivial desta equação, precisamos que o determinante da matriz do sistema seja nulo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega_n^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega_n^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.16)$$

Este determinante produz uma equação algébrica biquadrada em ω_n dada por

$$\omega_n^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \omega_n^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (5.17)$$

A solução desta equação para ω_n^2 é a seguinte:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \pm \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right]^{1/2} \right\} \quad (5.18)$$

De posse deste resultado geral, vamos nos permitir tomar um caso particular para facilitar a compreensão das questões relevantes ligadas ao assunto. Assim, por questões de didática, consideremos que $k_1 = k_2 = k$ e que $m_1 = m_2 = m$. Neste caso, a solução (5.18) reduz-se a

$$\omega_n^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \frac{k}{m} \quad (5.19)$$

Isto mostra que existem duas frequências naturais ω_n em que uma solução do tipo (5.14) satisfaz a equação (5.13). Estas frequências naturais, com três decimais após a vírgula, são as seguintes:

$$\omega_{n_1} = 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_{n_2} = 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.20)$$

Do ponto de vista matemático, estas frequências são os auto-valores da matriz quadrada de ordem dois que aparece na equação (5.15) quando $k_1 = k_2 = k$ e $m_1 = m_2 = m$. Os auto-vetores associados a estes auto-valores podem ser determinados um de cada vez pela substituição das frequências (5.20) na equação (5.15). Para $\omega_n = \omega_{n_1}$ temos

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega_{n_1}^2 & -k \\ -k & k - m\omega_{n_1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Se substituirmos aqui o valor de ω_{n_1} dado por (5.20), a equação matricial (5.21) fica dada por

$$\begin{bmatrix} 1,618 & -1,000 \\ -1,000 & 0,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

Nota-se que as duas equações que aparecem em (5.22) são *linearmente dependentes*. Este resultado era esperado, pois em (5.16) buscamos justamente condições que tornassem nulo o determinante do sistema. Isto significa que não possuímos condições de determinar as amplitudes A_1 e A_2 univocamente. Este fato impõe um processo de normalização que fica ao arbítrio do analista. De definitivo retiramos da equação (5.22) somente que $A_1 = 0,618 A_2$. Tomando o valor unitário para A_2 , ficamos com o auto-vetor associado ao auto-valor ω_{n_1} dado por

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0,618 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Este resultado mostra que, ao oscilar na frequência ω_{n_1} , os carros executam movimentos *em fase* entre si, sendo a amplitude da oscilação do carro mais próximo à parede do laboratório 61,8% do valor experimentado pelo outro carro. Se repetirmos este estudo para $\omega_n = \omega_{n_2}$, temos

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega_{n_2}^2 & -k \\ -k & k - m\omega_{n_2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Com ω_{n_2} dado por (5.20), esta equação matricial fica reduzida a

$$\begin{bmatrix} -0,618 & -1,000 \\ -1,000 & -1,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

As duas equações em (5.25) também são linearmente dependentes. Desta feita obtemos como única informação válida a de que $A_2 = -0,618 A_1$. Tomando o valor unitário para A_1 , ficamos com o auto-vetor associado ao auto-valor ω_{n_2} dado por

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,618 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Este resultado mostra que, ao oscilar na frequência ω_{n_2} , os carros executam movimentos *fora de fase* entre si, sendo a amplitude da oscilação do carro mais distante da parede do laboratório também 61,8% do valor experimentado pelo outro carro.

Os auto-vetores (5.23) e (5.26) são chamados *modos de vibração* do sistema associados às frequências naturais ω_{n_1} e ω_{n_2} respectivamente. Por *modo* devemos entender a forma com que os dois carros oscilam relativamente entre si. No primeiro modo os dois carros estão sempre de um mesmo lado da posição de equilíbrio de cada um deles, ora à esquerda e ora à direita. Já no segundo modo os dois carros estão opostos com relação às suas respectivas posições de equilíbrio, ou seja, se um estiver à esquerda, o outro está à direita e vice-versa. Note que, neste caso, existe um ponto do sistema que não se desloca, sendo este chamado de um *nó*. Se generalizarmos estes resultados, podemos perceber que um sistema discreto de n graus de liberdade possui n frequências naturais, n modos de vibração associados e $n - 1$ nós.

Como o nosso sistema protótipo tem duas soluções do tipo (5.14) possíveis, a solução geral pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_1 \cos(\omega_{n_1} t - \phi_1) + C_2 \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}_2 \cos(\omega_{n_2} t - \phi_2) \quad (5.27)$$

Para determinarmos as constantes C_1 e C_2 e os ângulos de fase ϕ_1 e ϕ_2 devemos lançar mão de quatro condições iniciais: dois deslocamentos e duas velocidades, isto é

$$\begin{Bmatrix} x_1(t=0) \\ x_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t=0) \\ \dot{x}_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{o1} \\ v_{o2} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

Para que um sistema oscile em um modo puro, é preciso que os vetores deslocamento e velocidade inicial que aparecem em (5.28) sejam *ambos* proporcionais ao modo de vibração desejado. Esta é uma condição difícil de se obter em termos práticos. Por isso, no caso geral, a resposta do sistema é dada pela combinação linear dos modos apresentada na equação (5.27). Uma solução do problema diretamente neste formato, no entanto, não é conveniente, mesmo para um problema simples de dois graus de liberdade. A técnica de análise modal a ser apresentada na próxima seção é bem mais adequada para esta tarefa.

Ao estudarmos o problema de vibrações livres não-amortecidas de sistemas de múltiplos graus de liberdade ampliamos o nosso entendimento de frequência natural e introduzimos a idéia de modo de vibração associado a cada frequência. Tratam-se de conceitos fundamentais que serão utilizados como ferramentas daqui por diante. O problema de vibrações livres amortecidas desses sistemas não será tratado nesta seção, mas será considerado como caso particular do problema de vibrações forçadas a ser tratado a seguir.

5.4 Vibrações Forçadas - Análise Modal

Um sistema discreto de n graus de liberdade em vibração forçada tem como equação de movimento a seguinte equação diferencial matricial de segunda ordem no tempo:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} \quad (5.29)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes quadradas de ordem n e $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$, $\{x\}$ e $\{F\}$ são vetores de n linhas e uma única coluna. Para problemas de evolução, este quadro matemático completa-se com o estabelecimento de duas condições iniciais em forma vetorial, isto é

$$\{x(t=0)\} = \{x_o\} \quad e \quad \{\dot{x}(t=0)\} = \{v_o\} \quad (5.30)$$

onde $\{x_o\}$ e $\{v_o\}$ são também vetores com n linhas e uma única coluna que fornecem duas condições iniciais para cada um dos n graus de liberdade do sistema.

Do problema de vibração livre e não-amortecida associado à equação (5.29)

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

podemos obter, conforme discutido na seção anterior, n frequências de vibração naturais ω_n e n auto-vetores $\{A\}$ associados. Com esta informação, vamos agora construir uma matriz quadrada $[\Phi]$ de ordem n , formada em suas colunas pelos n auto-vetores do sistema (5.29), ordenados da esquerda para a direita no sentido de frequência associada crescente, isto é

$$[\Phi] = \left[\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{Bmatrix}_1 \quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{Bmatrix}_2 \quad \cdots \quad \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{Bmatrix}_n \right] \quad (5.31)$$

Esta matriz, por razões óbvias, é chamada de *matriz modal* do sistema.

Podemos agora definir a seguinte transformação linear, conhecida como *transformação modal*:

$$\{x\} = [\Phi] \{\eta\} \quad (5.32)$$

Nesta transformação, o vetor $\{x\}$ é o *vetor de deslocamentos ou coordenadas generalizadas* e refere-se ao espaço físico, mensurável experimentalmente. Já o vetor $\{\eta\}$ é denominado *vetor de coordenadas modais* e refere-se a um espaço matemático sem qualquer interpretação física associada.

Com a definição (5.32), podemos associar às condições iniciais no espaço físico (5.30) as seguintes condições iniciais no espaço matemático:

$$\{x_o\} = [\Phi] \{\eta_o\} \quad \Rightarrow \quad \{\eta_o\} = [\Phi]^{-1} \{x_o\} \quad (5.33a)$$

e

$$\{v_o\} = [\Phi] \{\dot{\eta}_o\} \quad \Rightarrow \quad \{\dot{\eta}_o\} = [\Phi]^{-1} \{v_o\} \quad (5.33b)$$

Se diferenciarmos duas vezes em relação ao tempo a transformação modal (5.32) e substituirmos apropriadamente os resultados na equação de movimento (5.29), obtemos o seguinte resultado:

$$[M] [\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [C] [\Phi] \{\dot{\eta}\} + [K] [\Phi] \{\eta\} = \{F\}$$

Se pré-multiplicarmos este resultado pela transposta da matriz modal (5.31) obtemos

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \{\dot{\eta}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{\eta\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (5.34)$$

Pode-se provar que a matriz

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [\mathcal{M}]$$

é diagonal, sendo chamada de *matriz de massa generalizada* do sistema. O mesmo acontece com a matriz

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\mathcal{K}]$$

a qual é chamada de *matriz de rigidez generalizada* do sistema. Caso a matriz de amortecimento $[C]$ possa ser expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez do sistema, isto é

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

com α e β números reais, então pode-se mostrar que o produto matricial

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [\mathcal{C}] = \alpha [\mathcal{M}] + \beta [\mathcal{K}]$$

também é diagonal e denominado *matriz de amortecimento generalizado* do sistema. Em consequência, o sistema de equações lineares (5.34) pode ser reescrito na forma

$$[\mathcal{M}] \{\ddot{\eta}\} + [\mathcal{C}] \{\dot{\eta}\} + [\mathcal{K}] \{\eta\} = \{\mathcal{F}\} \quad (5.35)$$

onde

$$\{\mathcal{F}\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (5.36)$$

é chamado de *vetor de forças generalizadas* do sistema.

Como todas as matrizes quadradas de ordem n em (5.35) são diagonais, o sistema de equações é desacoplado, podendo ser apresentado como n problemas individuais de um grau de liberdade, ou seja

$$\mathcal{M}_{ii} \ddot{\eta}_i + \mathcal{C}_{ii} \dot{\eta}_i + \mathcal{K}_{ii} \eta_i = \mathcal{F}_i \quad (5.37)$$

com $i = 1, 2, \dots, n$. Completa cada um desses n problemas o par de condições iniciais de ordem i obtido das relações (5.33a) e (5.33b).

Portanto, a técnica de análise modal permite transformar um problema matemático de n equações diferenciais acopladas de n graus de liberdade no espaço físico $\{x\}$ em n problemas desacoplados de um grau de liberdade no espaço matemático definido pela base $\{\eta\}$. Desta forma, uma solução torna-se muito facilitada, pois cada um dos problemas individuais pode ser resolvido como estudado no Capítulo 4. Após determinação de todos os $\eta_i(t)$, a solução para o espaço físico pode ser reconstruída fazendo uso da transformação modal (5.32).

Para mostrar como esta técnica funciona, vamos prosseguir a análise do problema apresentado nas seções anteriores. Considere o modelo analítico que aparece na Figura 5.1 com as massas $m_1 = m_2 = m$, os coeficientes de amortecedor $c_1 = c_2 = c$, os coeficientes de mola $k_1 = k_2 = k$, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{Bmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}_{o1} \\ \dot{x}_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou seja, o sistema está inicialmente em repouso, com deslocamento inicial apenas do segundo carro. Para completar o problema, vamos admitir que o sistema está sendo forçado a vibrar pelo seguinte vetor de forças:

$$\begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = k x_e \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

ou seja, estamos excitando harmonicamente apenas o segundo carro com frequência ω e amplitude $k x_e$. Nosso objetivo é obter a resposta do sistema.

Nessas condições, havíamos obtido na seção anterior as duas frequências naturais não-amortecidas do problema como dadas pelas relações (5.20) e os dois modos de vibração associados dados pelas equações (5.23) e (5.26). Assim, podemos apresentar a matriz modal do problema como sendo

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,618 & 1,000 \\ 1,000 & -0,618 \end{bmatrix}$$

que coincide, neste exemplo, com sua transposta.

Nestes termos, a matriz de massa generalizada do sistema é dada por

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = m \begin{bmatrix} 1,382 & 0 \\ 0 & 1,382 \end{bmatrix}$$

a matriz de amortecimento generalizado é dada por

$$[\mathcal{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi] = c \begin{bmatrix} 0,528 & 0 \\ 0 & 3,618 \end{bmatrix}$$

a matriz de rigidez generalizada é dada por

$$[\mathcal{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = k \begin{bmatrix} 0,528 & 0 \\ 0 & 3,618 \end{bmatrix}$$

e o vetor de forças generalizadas é dada por

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} k x_e \sin \omega t$$

Assim, a equação (5.35) para o nosso exemplo assume a forma

$$m \begin{bmatrix} 1,382 & 0 \\ 0 & 1,382 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0,528 & 0 \\ 0 & 3,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0,528 & 0 \\ 0 & 3,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{Bmatrix} k x_e \sin \omega t \quad (5.38)$$

o que mostra o desacoplamento resultante da técnica de análise modal, pois as três matrizes são diagonais. Neste caso, a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de rigidez.

Se dividirmos ambas as equações por $1,382 m$, a equação (5.38) reduz-se a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 2,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0,382 & 0 \\ 0 & 2,618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,724 \\ -0,447 \end{Bmatrix} \frac{k x_e}{m} \sin \omega t \quad (5.39)$$

Individualmente, essas equações podem ser reescritas como

$$\ddot{\eta}_1 + 2 \gamma_1 \omega_{n_1} \dot{\eta}_1 + \omega_{n_1}^2 \eta_1 = \omega_{n_1}^2 x_{e_1} \sin \omega t \quad (5.40a)$$

$$\ddot{\eta}_2 + 2 \gamma_2 \omega_{n_2} \dot{\eta}_2 + \omega_{n_2}^2 \eta_2 = \omega_{n_2}^2 x_{e_2} \sin \omega t \quad (5.40b)$$

onde

$$2 \gamma_1 \omega_{n_1} = 0,382 \frac{c}{m} \quad \omega_{n_1}^2 = 0,382 \frac{k}{m} \quad \omega_{n_1}^2 x_{e_1} = 0,724 \frac{k x_e}{m}$$

e

$$2 \gamma_2 \omega_{n_2} = 2,618 \frac{c}{m} \quad \omega_{n_2}^2 = 2,618 \frac{k}{m} \quad \omega_{n_2}^2 x_{e_2} = -0,447 \frac{k x_e}{m}$$

o que permite determinar todos os parâmetros desconhecidos.

As equações (5.40a) e (5.40b) são equações de vibração do tipo padrão para sistemas de um grau de liberdade, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,618 & 1,000 \\ 1,000 & -0,618 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,447 & 0,724 \\ 0,724 & -0,447 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,724 \\ -0,447 \end{Bmatrix}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,618 & 1,000 \\ 1,000 & -0,618 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,447 & 0,724 \\ 0,724 & -0,447 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A resolução de cada um desses dois problemas pode ser efetuada à luz dos conceitos apresentados no capítulo anterior, quando estudamos vibrações forçadas harmonicamente. A soma das soluções homogêneas e particulares em cada um dos casos fornece a evolução do vetor das coordenadas generalizadas $\{\eta(t)\}$ no espaço matemático. A solução no espaço físico $\{x(t)\}$ pode, então, ser recuperada através da transformação modal (5.32), isto é

$$\{x(t)\} = [\Phi] \{\eta(t)\}$$

O leitor poderá facilmente apreciar o valor analítico da presente técnica e compreender a extensão da mesma para sistemas mais complexos, de múltiplos graus de liberdade. Neste caso, torna-se conveniente uma sistematização computacional, como a encontrada em diversos pacotes comerciais disponíveis.

5.5 Métodos Numéricos para o Problema de Auto-Valor

Ficou evidente neste capítulo a necessidade de resolução do problema matemático de auto-valor de matrizes. Existem diversas técnicas para cumprir esta tarefa e diversos pacotes computacionais que a executam com eficiência. Não está em nosso objetivo descrever todas elas ou mesmo discutir como usar os programas disponíveis no mercado. Nossa intenção, visando estabelecer fundamentos, será restrita a estudar o problema matemático de auto-valor. Para isso, usaremos duas técnicas. No caso de sistemas simples, a técnica mais óbvia é o método do determinante, já empregado na seção 5.3. Veremos, no entanto, que tal método não é indicado para sistemas com muitos graus de liberdade. Neste segundo caso, apresentaremos o método Q-R, o qual tem recebido bastante atenção em aplicações recentes de *Dinâmica Estrutural*.

O problema

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (5.41)$$

considera a vibração livre e não-amortecida de um sistema discreto de n graus de liberdade. Se adotarmos como válida uma resposta do tipo (5.14), a substituição na equação (5.41) fornece

$$-\omega_n^2 [M] \{x\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (5.42)$$

Se pré-multiplicarmos esta equação pela inversa da matriz de massa e usarmos a relação $\lambda = \omega_n^2$, obtemos

$$\left[[M]^{-1} [K] - \lambda [I] \right] \{x\} = \{0\}$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Se chamarmos de *matriz dinâmica* o produto

$$[D] = [M]^{-1} [K]$$

ficamos com o seguinte problema de auto-valor:

$$[[D] - \lambda [I]] \{x\} = \{0\} \quad (5.43)$$

onde os auto-valores são os quadrados das frequências naturais do sistema. Neste caso, interessamos os auto-valores de menor amplitude, pois são aqueles que produzem nas estruturas os maiores deslocamentos, conforme mostrado no capítulo anterior.

Uma análise alternativa é possível se retornarmos à equação (5.42), dividirmos toda a equação por $-\omega_n^2$ e pré-multiplicarmos o resultado pela inversa da matriz de rigidez. Neste caso, obtemos

$$\left[[K]^{-1} [M] - \frac{1}{\omega_n^2} [I] \right] \{x\} = \{0\}$$

Se denotarmos $\lambda = 1/\omega_n^2$ e chamarmos de matriz dinâmica o produto

$$[D] = [K]^{-1} [M] = [F] [M]$$

(onde $[F]$ representa a matriz de flexibilidade do sistema, conceito de grande aplicação industrial), recuperamos novamente o problema de auto-valor dado pela equação (5.43). Porém, os auto-valores são neste caso os inversos dos quadrados das frequências naturais do sistema. Interessam-nos, pelas mesmas razões já apontadas, os auto-valores de maior magnitude, que correspondem às menores frequências naturais do sistema.

Seja por uma opção ou outra, determinar as frequências naturais de um sistema de n graus de liberdade significa resolver o problema de auto-valor da equação (5.43). Isto é equivalente a encontrar os auto-valores da matriz dinâmica, a qual recebe este nome por sintetizar informações da inércia e da rigidez do sistema.

5.5.1 Método do Determinante

Considere o problema de auto-valor de uma matriz dinâmica $[D]$, quadrada de ordem n , dado pela equação (5.43). Para que não tenhamos solução trivial, a teoria de sistemas lineares requer que

$$\det [[D] - \lambda [I]] = 0 \quad (5.44)$$

A expansão deste determinante fornece um polinômio em λ de ordem n (ou um polinômio em ω_n de ordem $2n$), isto é

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (5.45)$$

o qual possui n raízes reais, que podem ser determinadas por quaisquer dos diversos processos numéricos disponíveis.

Uma vez escolhida uma raiz λ_i do polinômio (5.45), podemos retornar ao problema de auto-valor (5.43) para determinação do auto-vetor $\{x\}$ correspondente. Para isso, inserimos a raiz no sistema homogêneo de equações. Como esta raiz foi determinada de forma a tornar nulo o determinante do sistema, existe uma linha ou coluna que é linearmente dependente das demais. Portanto, ficamos com $(n - 1)$ equações linearmente independentes a n incógnitas. Para obter uma solução, precisamos definir arbitrariamente o valor de uma dessas incógnitas. Existem infinitas formas para definir este valor. No exemplo da seção 5.3, adotamos o valor unitário para uma delas. Uma alternativa, a ser detalhada no próximo capítulo, consiste em fazer uma normalização dos auto-vetores pela matriz de massa do sistema, de forma que

$$\{x\}_i^T [M] \{x\}_j = \delta_{ij} \quad (5.46)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker dos índices i e j , o que significa que

$$\text{se } i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \quad \text{e} \quad \text{se } i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$$

Os auto-vetores assim determinados poderão ser usados para construir a matriz modal quando do emprego da técnica de análise modal do sistema. A vantagem que se obtém ao utilizar o esquema de normalização dos auto-vetores pela matriz de massa do sistema é que, quando do emprego da técnica de análise modal, a matriz de massa generalizada é a matriz identidade.

Este método de resolução do problema de auto-valor é o mais tradicional e pode ser indicado para a maioria dos problemas elementares de engenharia. No entanto, à medida que os problemas tornam-se mais complexos, a ordem do polinômio (5.45) fica muito elevada e muitos algoritmos de procura de raízes começam a falhar, perdendo em eficiência. Esta falha pode ser explicada com facilidade, observando-se que uma raiz pode estar localizada entre dois passos de procura. Portanto, este método deixa de ser indicado para sistema industriais modelados com muitos graus de liberdade.

5.5.2 Método Q-R

Este método encontrou ampla utilização nas duas últimas décadas e é o indicado para problemas complexos. Ele aparenta ser complicado, mas mostra-se na prática computacionalmente eficiente. Aqui vamos apresentar apenas a filosofia do método, ficando os detalhes e a prática de exemplos a cargo do leitor, após consulta à bibliografia apontada.

Usando a técnica de ortogonalização de Gram-Schmidt a matriz dinâmica $[D]$ quadrada de ordem n (simétrica ou não) pode ser fatorada em termos do produto de uma matriz ortogonal $[Q]$ e de uma matriz triangular superior $[R]$ (também chamada de triangular pela direita), também ambas quadradas de ordem n . Nota-se que este produto fornece o nome do método. Em um primeiro passo temos

$$[D]_0 = [Q]_1 [R]_1 \quad (5.47)$$

onde os índices das matrizes indicam o número de ordem da iteração neste processo. Em seguida, calculamos o produto

$$[D]_1 = [R]_1 [Q]_1 \quad (5.48)$$

Pode-se mostrar que o produto matricial da equação (5.48) representa na realidade uma transformação ortogonal. De fato, da equação (5.47) obtemos

$$[R]_1 = [Q]_1^{-1} [D]_0 = [Q]_1^T [D]_0 \quad (5.49)$$

pois a matriz $[Q]_1$ é ortogonal. A substituição da relação (5.49) em (5.48) fornece

$$[D]_1 = [Q]_1^T [D]_0 [Q]_1 \quad (5.50)$$

que é uma transformação ortogonal da matriz dinâmica $[D]_0$ original. A partir daí podemos prosseguir iterativamente de forma que no n -ésimo passo temos

- uma fatoração

$$[D]_n = [Q]_{n+1} [R]_{n+1} \quad (5.51a)$$

- e uma transformação ortogonal

$$[D]_{n+1} = [R]_{n+1} [Q]_{n+1} = [Q]_{n+1}^T [D]_n [Q]_{n+1} \quad (5.51b)$$

Pode-se provar que, se a matriz dinâmica $[D]$ é simétrica, então o processo descrito anteriormente converge para uma matriz diagonal, com os auto-valores do sistema dispostos ao longo de sua diagonal. Além disso, os auto-vetores são as colunas da matriz modal obtida pelo simples produto das matrizes $[D]_i$ calculadas ao longo do processo, i.e.

$$[\Phi] = [Q]_1 [Q]_2 \cdots [Q]_n \quad (5.52)$$

pois

$$[D]_n = [Q]_n^T [Q]_{n-1}^T \cdots [Q]_1^T [D] [Q]_1 [Q]_2 \cdots [Q]_n = [\Phi]^T [D] [\Phi] \quad (5.53)$$

Portanto, a matriz modal $[\Phi]$ é a matriz ortogonal que diagonaliza a matriz dinâmica $[D]$. Na prática a convergência é obtida quando os termos fora da diagonal de $[D]_n$ são de pequena magnitude se comparados com os termos da diagonal principal.

Pode-se igualmente provar que, se a matriz dinâmica $[D]$ não é simétrica, então o processo iterativo descrito anteriormente converge para uma matriz triangular com os auto-valores do sistema na diagonal. A partir daí, os auto-vetores podem ser calculados eficientemente através de uma variação do método da eliminação de Gauss.

A maior parte dos cálculos a serem realizados na execução deste algoritmo está exatamente na decomposição dada pela equação (5.47). O processo pode ser bastante otimizado com o uso de transformações de Householder para colocar a matriz dinâmica $[D]$ na forma de Hessenberg. A partir daí os produtos matriciais que aparecem no algoritmo são computacionalmente baratos, pois não envolvem inversões de matrizes (operações que são conhecidas por serem computacionalmente exigentes). O leitor poderá encontrar na literatura especializada em métodos numéricos inúmeras variações e artifícios deste método que podem ser aplicados no cálculo de auto-valores e auto-vetores de matrizes genéricas e especiais.

Limitamos esta nossa discussão à apresentação da teoria básica, de um método simples e de outro sofisticado. Enquanto o primeiro método presta-se a estudos acadêmicos, podendo ser realizado manualmente, o segundo requer implementação computacional, sendo indicado para problemas industriais. Entre esses dois limites existe uma gama enorme de algoritmos que podem ser estudados.

5.6 Conclusões

Neste capítulo o leitor teve contato com problemas de vibração livre e forçada de sistemas que foram modelados como um conjunto de elementos discretos de propriedades concentradas. Se analisar tais sistemas implica conhecer o estado de dois ou mais desses elementos, torna-se necessário o uso de duas ou mais coordenadas generalizadas para a descrição completa desses sistemas.

Diferentemente dos problemas de um grau de liberdade, os problemas de múltiplos graus de liberdade possuem tratamento matricial. Assim, o leitor foi apresentado a matrizes de massa, amortecimento e rigidez, bem como a vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e de forças externas. As técnicas de obtenção desses elementos, discutidas de maneira geral no Capítulo 2, foram aqui empregadas, evidenciando-se a sistematização apresentada pelos métodos da Mecânica Lagrangeana.

O leitor pôde perceber que encontrar frequências naturais de vibração significa, do ponto de vista matemático, resolver um problema de auto-valor. A cada auto-valor associamos uma frequência natural e um modo de vibração do sistema. Conhecidas essas características do sistema, o leitor pôde resolver problemas de vibrações forçadas através da técnica da análise modal. Assim, ficou evidente a ênfase colocada no estudo de sistemas de um grau de liberdade, justificada pela transformação de um problema de n graus de liberdade em n problemas de um grau de liberdade. Finalmente, o leitor pôde observar alguns elementos de métodos numéricos necessários à obtenção desses resultados no trato de sistemas lineares.

A conclusão desse estudo capacita o leitor a resolver qualquer problema de vibração livre ou forçada de sistemas modelados como tendo propriedades concentradas. Tais problemas requerem a solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo, com as condições iniciais associadas. Com este conhecimento, podemos partir para o estudo de sistemas ainda mais sofisticados. No próximo capítulo trataremos de sistemas modelados como tendo propriedades distribuídas. Neste caso, embora aproximemos mais o modelamento da realidade física, pagamos o preço pelo fato do modelo matemático ser de maior complexidade.

5.7 Bibliografia

Para complementar o estudo dos assuntos deste capítulo, recomendamos a seguir algumas referências bibliográficas sobre o problema de auto-valor e sobre técnicas de computação simbólica que permitem gerar automaticamente equações de movimento de sistemas complexos.

Sobre Matrizes e o Problema de Auto-Valor

- WILKINSON, J. H. - *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- JENNINGS, A. - *Matrix Computations for Engineers and Scientists*, John Wiley, New York, 1977.
- GOLUB, G. H. E VAN LOAN, C. F. - *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.

Sobre Computação Simbólica

- BUCHBERGER, B. ET AL. - *Computer Algebra - Symbolic and Algebraic Computation*, 2a. ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
- PAVELLE, R. (ED.) - *Applications of Computer Algebra*, Kluwer, Boston, 1985.

- WOLFRAM, S. - *Mathematica – A System for Doing Mathematics by Computer*, 2a. ed., Addison-Wesley, Reading, 1991.

5.8 Exercícios

Neste capítulo foram apresentados conceitos mais profundos que resumem e estendem aqueles discutidos nos capítulos anteriores. A seguir são apresentados algumas perguntas para reflexão, são resolvidos alguns exercícios para fixação de conceitos e são propostos outros exercícios para estudo pelo leitor. Alguns dos exercícios propostos são de natureza aberta, não havendo uma única solução.

Perguntas

1. O que é entendido como computação simbólica? Como este entendimento pode ser empregado na dedução das equações de movimento de sistemas complexos?
2. Agora que o leitor foi submetido ao estudo de sistemas discretos de múltiplos graus de liberdade, volte a comparar os diferentes métodos da Mecânica Analítica na dedução das equações de movimento de sistemas mecânicos.
3. O que são modos de vibração de um sistema mecânico? Forneça exemplos qualitativos de sistemas simples conhecidos.
4. Formule dois modelos analíticos para o problema de vibração da suspensão de um automóvel: um no plano, e outro no espaço. Procure vislumbrar os graus de liberdade desses modelos e os possíveis modos de vibração associados.
5. No contexto de modos de vibração, o que se entende por nó? Quantos nós tem o n -ésimo modo de vibração de uma estrutura discreta?
6. O que é matriz modal? Idem, transformação modal? O que é e como funciona a técnica de análise modal de sistemas mecânicos?
7. Explicite os passos utilizados na análise de vibração livre de um sistema discreto de n graus de liberdade através da técnica de análise modal. Idem, no caso de vibrações forçadas.
8. O que é a matriz de flexibilidade? Qual é a sua importância prática na determinação experimental de propriedades elásticas de estruturas?
9. O que se entende por matriz dinâmica? Que informações do sistema mecânico estão embutidas nesta matriz?
10. O que é o problema matemático de auto-valor? No caso de Dinâmica estrutural, qual é a interpretação física para os auto-valores? Idem, para os auto-vetores?
11. O que é e para que serve o método do determinante discutido no texto? Comente sobre as suas vantagens e limitações face a outros métodos existentes para o mesmo propósito.
12. O que é e para que serve o método Q-R? Quais são as suas dificuldades de implementação e vantagens relativas a outros métodos?
13. O que é o fenômeno do batimento? Que condições são necessárias para que este fenômeno possa ser observado em sistemas mecânicos?

Exercícios Resolvidos

1. Uma molécula diatômica (como H_2 , N_2 ou O_2) pode ser modelada como duas massas iguais ligadas entre si por uma mola, a qual reproduz os efeitos das ligações químicas interatômicas. Um modelo analítico desta situação está reproduzido na Figura 5.3. Determine as frequências naturais e os modos de vibração deste sistema. Determine também a resposta do sistema a uma condição inicial de velocidade positiva (choque) aplicada apenas ao átomo de coordenada generalizada $x_1(t)$.

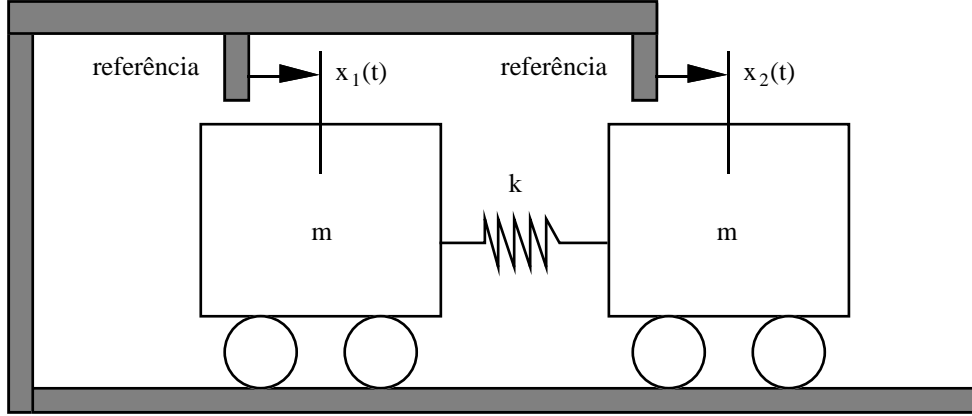


Figura 5.3: Modelo analítico simplificado de uma molécula diatômica.

O problema está obviamente simplificado, pois considera apenas deslocamentos ao longo de uma única direção. As posições dos átomos estão referenciadas por coordenadas espaciais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ medidas a partir de um referencial inercial, pois o sistema envolve dois graus de liberdade, cada um associado a um átomo. Note que os deslocamentos são medidos a partir de uma posição de equilíbrio em que a mola não se encontra acionada, quer em compressão, quer em tração. Portanto, podemos admitir que no instante inicial estes dois deslocamentos são nulos.

A energia cinética do sistema é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (a)$$

e a energia potencial elástica é escrita simplesmente como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 \quad (b)$$

Definida a função Lagrangeana do sistema $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, obtida imediatamente a partir dos resultados (a) e (b), as seguintes equações de Lagrange especializadas para o caso de oscilações livres não-amortecidas podem ser utilizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (c)$$

Realizadas as operações matemáticas aqui especificadas, obtêm-se as seguintes equações de movimento em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Este resultado mostra que o problema é desacoplado inercialmente e acoplado elasticamente. Em outras palavras, a matriz de massa é diagonal, enquanto a matriz de rigidez é cheia. Fisicamente, é a mola de coeficiente k que realiza o acoplamento entre os graus de liberdade do problema.

Se admitirmos para solução das equações de movimento (d) uma resposta do tipo (5.14), a substituição no sistema de equações fornece

$$\begin{bmatrix} k - m\omega_n^2 & -k \\ -k & k - m\omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Soluções não-triviais para o problema (e) só existem se o determinante da matriz dinâmica for nulo. Desta condição extraímos as frequências naturais ω_n do sistema. Assim,

$$\det \begin{bmatrix} k - m\omega_n^2 & -k \\ -k & k - m\omega_n^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n^2 (m^2 \omega_n^2 - 2km) = 0$$

de onde extraímos uma raiz ω_{n_1} nula e outra raiz dada por

$$\omega_{n_2} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Sistemas com n frequências naturais nulas têm n graus de liberdade de translação ou de rotação como corpos rígidos. Por exemplo, uma aeronave em vôo tem 6 frequências naturais nulas, sendo 3 referentes a translações em direções ortogonais do centro de massa da aeronave e outras 3 referentes a rotações da aeronave em torno de eixos ortogonais com origem no CM do sistema.

Conhecidas as frequências naturais da molécula, podemos determinar os modos de vibração associados. Para tanto, retornamos ao sistema homogêneo (e), inserimos a frequência natural ω_{n_1} e obtemos

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de onde retiramos apenas a relação $x_1 = x_2$. Se admitirmos o valor unitário para qualquer uma delas, o primeiro modo de vibração fica dado por

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

que é o modo de translação de corpo rígido da molécula. Repetindo o processo para ω_{n_2} , temos

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de onde retiramos apenas a relação $x_1 = -x_2$. Se admitirmos o valor unitário para x_1 , o segundo modo de vibração fica dado por

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

que é o modo de vibração interno da molécula.

A partir dos resultados (f) e (g) montamos a matriz modal do sistema como sendo

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz é coincidentemente idêntica à sua transposta e sua inversa é dada por

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Assim, a transformação modal e sua inversa são dadas respectivamente por

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Com as transformações (h), a matriz de massa generalizada do sistema fica sendo

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

a matriz de rigidez generalizada assume a forma

$$[\mathcal{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4k \end{bmatrix}$$

e as condições iniciais (deslocamentos e velocidades) expressas em termos de deslocamentos modais são dadas respectivamente por

$$\{\eta\}_o = [\Phi]^{-1} \{x\}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\dot{\eta}\}_o = [\Phi]^{-1} \{\dot{x}\}_o = \begin{Bmatrix} v_o/2 \\ v_o/2 \end{Bmatrix}$$

Com a aplicação da técnica de análise modal, as equações diferenciais de movimento (d), que são acopladas pela matriz de rigidez, sofrem um desacoplamento, pois a transformação modal é ortogonal às matrizes do sistema. Assim, ficamos com duas equações diferenciais desacopladas em termos de deslocamentos modais, as quais são dadas por

$$\ddot{\eta}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\eta}_2 + \omega_{n_2}^2 \eta_2 = 0$$

A solução geral destas equações é apresentada como

$$\eta_1(t) = C_1 t + C_2 \quad \text{e} \quad \eta_2(t) = C_3 \sin \omega_{n_2} t + C_4 \cos \omega_{n_2} t \quad (i)$$

Se aplicarmos as condições iniciais em termos de deslocamentos modais obtemos os seguintes resultados para as constantes C_i nas respostas (i):

$$C_1 = \frac{v_o}{2} \quad C_2 = 0 \quad C_3 = \frac{v_o}{2\omega_{n_2}} \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

Desta forma, ficamos com

$$\eta_1(t) = \frac{v_o}{2} t \quad \text{e} \quad \eta_2(t) = \frac{v_o}{2\omega_{n_2}} \sin \omega_{n_2} t$$

Se utilizarmos esta informação na transformação modal (h), os deslocamentos físicos experimentados pelos dois átomos são dados por

$$x_1(t) = \frac{v_o}{2} t + \frac{v_o}{2\omega_{n_2}} \text{sen } \omega_{n_2} t$$

$$x_2(t) = \frac{v_o}{2} t - \frac{v_o}{2\omega_{n_2}} \text{sen } \omega_{n_2} t$$

Nestas duas respostas, a primeira parcela refere-se ao deslocamento de corpo rígido do conjunto e a segunda parcela a uma vibração fora de fase dos dois átomos em torno do centro de massa da molécula.

Ao leitor fica recomendada uma análise alternativa deste problema. Para qualquer tempo t , o ponto médio entre os dois átomos é tanto um nó quanto o centro de massa do sistema. Transfira a origem de coordenadas para este ponto e refaça o problema. Isto é equivalente a eliminar o grau de liberdade de corpo rígido, restando apenas o de natureza elástica. Procure analisar as alterações envolvidas nas equações de movimento e na resposta do sistema à mesma excitação.

2. A Figura 5.4 mostra dois cilindros idênticos, de momento de inércia I , pivotados em seus centros. Estes cilindros podem executar pequenas oscilações angulares θ_i ($i = 1, 2$). As direções consideradas como positivas para estes deslocamentos estão mostradas na ilustração. Tais deslocamentos são restritos por uma mola linear de coeficiente de elasticidade k ligada aos cilindros a uma distância r de seus eixos de rotação e por molas torcionais de coeficiente de rigidez K situadas nos pivotamentos. Analise este sistema quanto às suas oscilações livres de pequena amplitude, supondo que o coeficiente de rigidez da mola linear é pequeno.

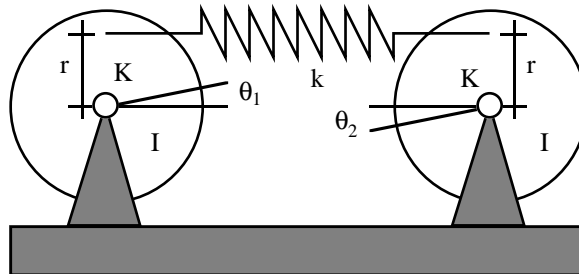


Figura 5.4: Modelo analítico de um sistema mecânico em batimento.

Este sistema possui dois graus de liberdade, pois é necessário o conhecimento simultâneo dos deslocamentos angulares $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ para podermos determinar o *estado* do sistema. Para recordar a definição de estado, retorne à subseção 2.4.1 do texto.

A energia cinética do sistema é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (j)$$

Já a energia potencial elástica é escrita como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} K (\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{k r^2}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (k)$$

Daí, a função Lagrangeana do sistema pode ser obtida da diferença $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$, onde utilizamos as relações (j) e (k). As equações de Lagrange no caso de oscilações livres não-amortecidas são as seguintes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (l)$$

Se efetuarmos as operações matemáticas previstas, a equação de movimento do sistema em forma matricial fica dada por

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K + k r^2 & -k r^2 \\ -k r^2 & K + k r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

Este resultado mostra que o problema é desacoplado inercialmente e acoplado elasticamente. Em outras palavras, a matriz de massa é diagonal, enquanto a matriz de rigidez é cheia, fazendo a ligação entre os graus de liberdade do problema. Observe que se fizermos $k = 0$, ou seja, retirarmos fisicamente a mola linear do modelo analítico da Figura 5.4, o acoplamento desaparece.

Se admitirmos para solução das equações (m) uma resposta do tipo (5.14), a substituição no sistema de equações fornece

$$\begin{bmatrix} \frac{K + k r^2}{I} - \omega_n^2 & -\frac{k r^2}{I} \\ -\frac{k r^2}{I} & \frac{K + k r^2}{I} - \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

Para que este sistema homogêneo admita resposta não-nula, seu determinante deve ser igual a zero. Esta condição leva a uma equação biquadrada em ω_n , cujas soluções são

$$\omega_{n1}^2 = \frac{K}{I} \quad \text{e} \quad \omega_{n2}^2 = \frac{K}{I} \left(1 + 2 \frac{k r^2}{K} \right)$$

Observe que a primeira solução para a frequência circular natural do sistema não envolve a característica de rigidez da mola linear. É como se esta mola não existisse! De fato, se usarmos o auto-valor ω_{n1} no sistema homogêneo (n), o auto-vetor (modo de vibração) associado fica dado por

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ou seja, os dois cilindros oscilam em fase, executando movimentos idênticos em termos de amplitude. Nestas condições, a mola linear não sofre qualquer tração ou compressão. Na prática, é como se ela não fizesse parte do modelo analítico!

Já a substituição da frequência natural ω_{n2} no sistema (n) produz o seguinte modo de vibração associado:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

ou seja, os dois cilindros oscilam agora totalmente fora de fase, com amplitudes idênticas. Nesta situação, a mola linear é utilizada de forma contínua, meio período em compressão e meio período em tração.

As duas frequências circulares naturais do sistema diferem entre si apenas pela quantidade

$$\omega_{n2} - \omega_{n1} = \sqrt{\frac{K}{I}} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{k r^2}{K}} - 1 \right) \quad (o)$$

No caso de k ser pequeno, observamos que as duas frequências são bem próximas e dependem do parâmetro

$$\varepsilon = 2 \frac{k r^2}{K}$$

Se utilizarmos a expansão binomial do termo sob raiz, i.e.

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

a diferença (ω) pode ser dada aproximadamente por

$$\omega_{n_2} - \omega_{n_1} = \frac{k r^2}{\sqrt{I K}}$$

Uma situação como esta (de proximidade de frequências naturais no mesmo sistema mecânico) pode gerar um fenômeno interessante a que denominamos *batimento*.

Sabemos que se o sistema sob análise aqui for excitado inicialmente por deslocamentos e/ou velocidades proporcionais ao primeiro modo de vibração, ele responde exclusivamente segundo este mesmo modo, na frequência circular ω_{n_1} . A mesma situação ocorre para uma excitação proporcional ao segundo modo de vibração, com resposta na frequência circular ω_{n_2} . Qualquer outro conjunto de condições iniciais excita simultaneamente os dois modos, através de uma combinação linear. Para ilustrar o fenômeno do batimento, vamos aqui considerar uma excitação deste último tipo, em que o movimento inicial do sistema está “concentrado” no primeiro cilindro. A palavra concentrado aparece aqui entre aspas porque aparenta envolver apenas uma parte do sistema, embora na realidade este deslocamento provoque o armazenamento de energia potencial elástica na mola torcional de coeficiente K do primeiro cilindro e na mola linear de coeficiente k que acopla os dois cilindros.

Consideremos o caso em que o sistema da Figura 5.4 está inicialmente em repouso e damos apenas ao primeiro cilindro um deslocamento inicial θ_o , ou seja, adotamos o seguinte conjunto de condições iniciais:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1(t=0) \\ \theta_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_o \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1(t=0) \\ \dot{\theta}_2(t=0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para determinarmos a resposta do sistema a este conjunto de condições iniciais, vamos fazer uso da técnica de análise modal. Se coletarmos os auto-vetores da matriz dinâmica, a matriz modal do sistema fica dada por

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Como no exercício anterior, esta matriz é igual à sua transposta e sua inversa é dada por

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A transformação modal e sua inversa são dadas respectivamente por

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (p)$$

Com as transformações (p) , a matriz de massa generalizada do sistema fica sendo

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$$

a matriz de rigidez generalizada assume a forma

$$[\mathcal{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & 2(K + 2kr^2) \end{bmatrix}$$

e as condições iniciais (deslocamentos e velocidades) expressas em termos de deslocamentos modais são dadas respectivamente por

$$\{\eta\}_o = [\Phi]^{-1} \{\theta\}_o = \begin{Bmatrix} \theta_o/2 \\ \theta_o/2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\dot{\eta}\}_o = [\Phi]^{-1} \{\dot{\theta}\}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com a coleta desses resultados, as equações de movimento (m) , que são acopladas pela matriz de rigidez, tornam-se desacopladas. As novas equações são dadas por

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_{n_1}^2 \eta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\eta}_2 + \omega_{n_2}^2 \eta_2 = 0$$

A solução geral destas equações é apresentada como

$$\eta_1(t) = C_1 \sin \omega_{n_1} t + C_2 \cos \omega_{n_1} t \quad \text{e} \quad \eta_2(t) = C_3 \sin \omega_{n_2} t + C_4 \cos \omega_{n_2} t \quad (q)$$

Com as condições iniciais, obtemos as constantes C_i nas respostas (q) como sendo

$$C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{\theta_o}{2} \quad C_3 = 0 \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{\theta_o}{2}$$

Assim, as respostas (q) reduzem-se para

$$\eta_1(t) = \frac{\theta_o}{2} \cos \omega_{n_1} t \quad \text{e} \quad \eta_2(t) = \frac{\theta_o}{2} \cos \omega_{n_2} t$$

Se utilizarmos esta informação na transformação modal (p) , os deslocamentos angulares experimentados pelos dois cilindros ficam dados por

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_o}{2} (\cos \omega_{n_1} t + \cos \omega_{n_2} t) \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \frac{\theta_o}{2} (\cos \omega_{n_1} t - \cos \omega_{n_2} t) \quad (r)$$

Os resultados (r) podem ser manipulados matematicamente a fim de serem apresentados em forma que permita uma melhor compreensão física. Se utilizarmos as relações trigonométricas

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \quad \text{e} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

não fica difícil para o leitor provar as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) &= \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \\ \frac{1}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) &= \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \end{aligned}$$

Com este preâmbulo matemático, se definirmos como frequência circular de batimento e frequência circular natural média as seguintes relações respectivas:

$$\omega_b = \frac{\omega_{n2} - \omega_{n1}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_n = \frac{\omega_{n2} + \omega_{n1}}{2}$$

então as respostas (r) podem ser apresentadas de maneira alternativa como

$$\theta_1(t) = \theta_o \cos \omega_b t \cos \bar{\omega}_n t \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \theta_o \sin \omega_b t \sin \bar{\omega}_n t \quad (s)$$

A Figura 5.5 mostra uma visualização destes resultados. Desde que o coeficiente de rigidez k da mola linear seja “pequeno”, as frequências circulares de batimento e média ficam dadas respectivamente por

$$\omega_b = \frac{k r^2}{2 \sqrt{IK}} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_n = \sqrt{\frac{K}{I}} \left(1 + \frac{k r^2}{2 K} \right)$$

Nota-se que a frequência de batimento é “lenta” se comparada à frequência média. Assim, enquanto a primeira modula a amplitude da oscilação, a segunda é responsável pelas oscilações de alta frequência dentro do pacote modulado pela primeira.

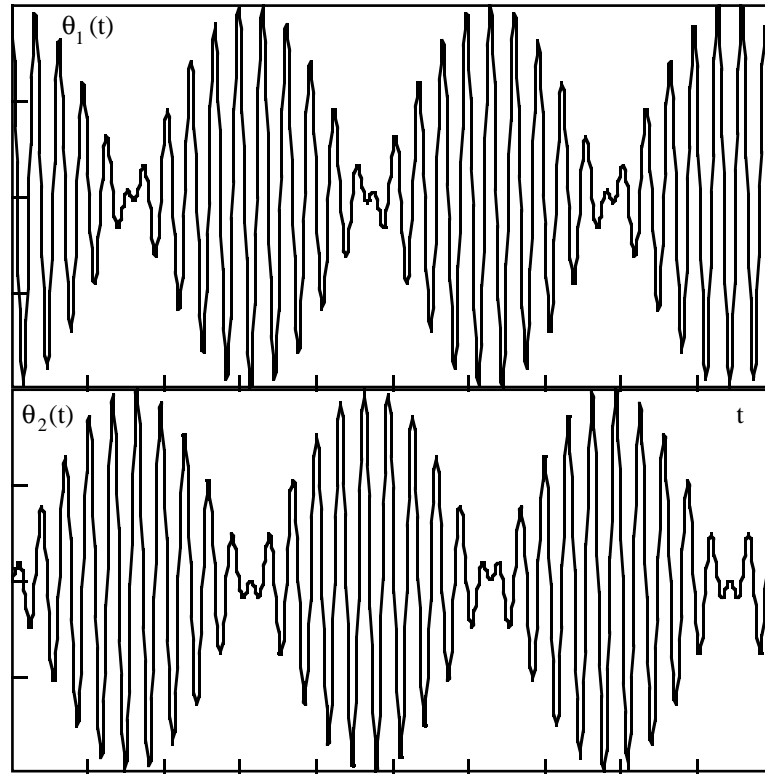


Figura 5.5: Resposta do sistema da Figura 5.4 em batimento.

A Figura 5.5 traz na mesma escala de tempo as respostas angulares dos dois cilindros. Enquanto o primeiro parte do repouso com deslocamento angular θ_o (normalizado na figura para valor unitário), o segundo parte também do repouso, mas com deslocamento nulo. Mais importante, porém, é observar o efeito do batimento. Nota-se que a energia do sistema transfere-se periodicamente de um para outro cilindro com frequência circular de modulação $2\omega_b$, enquanto ambos os cilindros oscilam na frequência rápida $\bar{\omega}_n$.

3. Nesta questão vamos estudar a dinâmica de um avião no solo. A Figura 5.6 mostra um modelo analítico do sistema. Use como coordenadas generalizadas o deslocamento vertical x do centro de gravidade e o ângulo θ que a fuselagem forma com a horizontal ao cabrar. O avião pesa 15.000 N ($g = 10 \text{ m/s}^2$) e tem um momento de inércia totalmente carregado em torno do centro de gravidade igual a 2.000 kg m^2 . Adote os seguintes dados adicionais: $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 0,5 \text{ m}$, $k_1 = 20.000 \text{ N/m}$ e $k_2 = 40.000 \text{ N/m}$. Pede-se:
- Determine e apresente em forma matricial as equações de movimento do sistema para pequenas oscilações.
 - Determine as frequências naturais de vibração e os modos de vibração associados.
 - Mostre como aplicar a técnica de análise modal para resolver qualquer problema de cargas dinâmicas aplicadas nos dois trens de pouso.
 - Qual é a melhor posição para se instalar a cadeira do piloto?

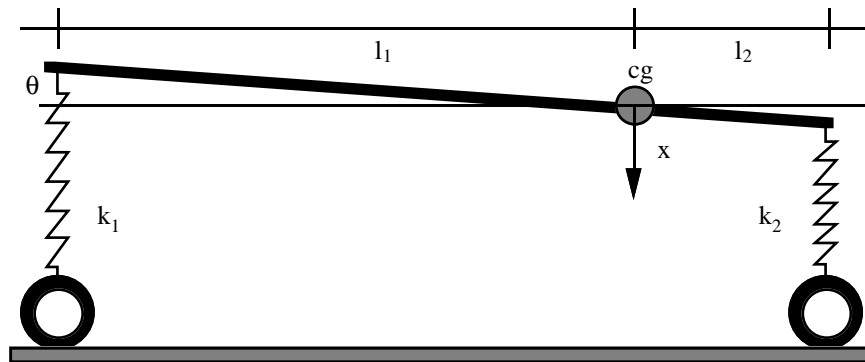


Figura 5.6: Modelo analítico simplificado de um avião no solo.

Este problema é interessante por misturar no mesmo contexto graus de liberdade de translação e de rotação. Vamos supor nesta solução que a fuselagem do avião é perfeitamente rígida e que as direções positivas dos deslocamentos são aquelas mostradas na Figura 5.6.

- Como o sistema é conservativo (não tem perdas energéticas), vamos usar o Princípio da Conservação de Energia para deduzir as equações de movimento do sistema. Para tanto, a energia cinética é dada pela soma das energias de translação e de rotação, ou seja,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (t)$$

e a energia potencial elástica, para pequenas oscilações, é dada pela soma das energias de deformação das duas molas que representam os trens de pouso, i.e.

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k_1 (x - l_1 \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + l_2 \theta)^2 \quad (u)$$

Assim, a energia mecânica \mathcal{E} do sistema é dada pela soma das energias (t) e (u).

Se diferenciarmos \mathcal{E} em relação ao tempo, igualarmos o resultado a zero e coletarmos os termos obtidos de maneira adequada, as equações de movimento em forma matricial podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se substituirmos os valores numéricos do problema, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 190 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (v)$$

- (b) Se admitirmos a possibilidade do sistema apresentar oscilações livres à frequência circular ω_n , a equação matricial (v) assume a forma

$$\begin{bmatrix} 60 - 1,5\omega_n^2 & -40 \\ -40 & 190 - 2\omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (w)$$

Este sistema linear homogêneo de equações admite solução apenas se o determinante da matriz for nulo. Desta condição, obtemos a seguinte equação biquadrada em ω_n :

$$\omega_n^4 - 135\omega_n^2 + 3267 = 0$$

cujas soluções são

$$\omega_{n_1} = 5,62 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \omega_{n_2} = 10,17 \text{ rad/s}$$

Se voltarmos ao sistema de equações (w), a substituição da primeira frequência natural fornece como auto-vetor (ou modo de vibração)

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,315 \end{Bmatrix}$$

De maneira similar, a substituição de ω_{n_2} em (w) produz como segundo modo de vibração

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0,421 \\ -1,000 \end{Bmatrix}$$

Podemos observar que não existe neste caso um modo de vibração puro em translação e outro em rotação. Enquanto o primeiro modo de vibração envolve mais translação que rotação, o contrário acontece com o segundo modo. Fica como desafio para o leitor encontrar a condição a ser satisfeita para que, com as mesmas propriedades, possam existir modos puros de vibração. Talvez uma alteração na posição do CG seja suficiente.

- (c) Vamos agora supor que, ao taxiar na pista, o avião venha a sofrer excitações nos trens de pouso. Tais excitações podem resultar de ondulações na pista. Assim, vamos admitir a situação genérica em que são aplicadas forças aos dois trens dadas por $F_1(t)$ e $F_2(t)$, respectivamente, e que tais forças são consideradas positivas quando apontadas para cima (direção contrária ao deslocamento $x(t)$ positivo).

Para incluir os efeitos dessas forças em nosso modelo matemático vamos utilizar o conceito de forças generalizadas apresentado no Capítulo 2. Podemos observar que, no que concerne ao grau de liberdade de translação, as forças atuantes nos dois trens de pouso podem ser somadas e aplicadas diretamente no CG da aeronave, de forma que

$$Q_x = -(F_1(t) + F_2(t))$$

passa a ser a força generalizada associada a $x(t)$. Já com respeito ao grau de liberdade de rotação, obtemos o seguinte momento aplicado em torno do CG, observadas as direções positivas dos esforços:

$$Q_\theta = F_1 l_1 - F_2 l_2$$

Assim, as equações (v) completam-se da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 190 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 - F_2 \\ F_1 l_1 - F_2 l_2 \end{Bmatrix} \quad (x)$$

Para obter a resposta do sistema, vamos aplicar a técnica de análise modal. Conhecidos os modos de vibração do sistema, a transformação modal fica dada por

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,421 \\ 0,315 & -1,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\eta\} \quad (y)$$

Ao aplicarmos a técnica de análise modal, a matriz de massa generalizada fica sendo

$$[\mathcal{M}] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1,698 & 0,000 \\ 0,000 & 2,267 \end{bmatrix}$$

De maneira similar, a matriz de rigidez generalizada assume a forma

$$[\mathcal{K}] = [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} 53,653 & 0,000 \\ 0,000 & 234,314 \end{bmatrix}$$

e o vetor de forças generalizadas fica dado por

$$\{\mathcal{F}(t)\} = [\Phi]^T \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} -F_1 - F_2 + 0,315 (F_1 l_1 - F_2 l_2) \\ -0,421 (F_1 + F_2) - F_1 l_1 + F_2 l_2 \end{Bmatrix}$$

As duas equações diferenciais desacopladas a resolver são, então,

$$\ddot{\eta}_1 + 31,59 \eta_1 = -0,589 (F_1 + F_2) + 0,186 (F_1 l_1 - F_2 l_2)$$

$$\ddot{\eta}_2 + 103,40 \eta_2 = -0,186 (F_1 + F_2) - 0,441 (F_1 l_1 - F_2 l_2)$$

Aqui, o leitor pode inserir diretamente as expressões das forças de excitação e buscar a resposta de cada problema. As forças poderão ser harmônicas, periódicas, genéricas e determinísticas ou aleatórias. A existência de condições iniciais para o sistema poderá ser tratada à semelhança do que aqui fizemos nos dois problemas anteriores, ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \eta_1(0) \\ \eta_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,883 & 0,372 \\ 0,278 & -0,883 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix}$$

Uma vez resolvida as coordenadas modais η_i ($i = 1, 2$), o leitor poderá recuperar a resposta para as coordenadas físicas $x(t)$ e $\theta(t)$ através da transformação modal (y).

- (d) A melhor posição para instalar a cadeira do piloto é aquela em que esta posição sofre o mínimo de deslocamentos, velocidades e acelerações em relação a um referencial inercial. Como o deslocamento de translação $x(t)$ afeta toda a aeronave, a questão reduz-se a analisar o movimento de rotação apenas. Como o centro de massa (ou de gravidade) é justamente o nó do grau de liberdade rotacional $\theta(t)$, é justamente aí (ou perto daí) que devemos instalar o assento do piloto.

Note que este problema poderia ter sido analisado utilizando como coordenadas generalizadas os deslocamentos lineares percebidos pelas molas representativas dos dois trens de pouso. Esta alternativa fica como exercício para o leitor.

Exercícios Propostos

1. Considere o modelo analítico da Figura 5.1 com dois graus de liberdade. Suponha que os dois carros e molas são iguais, não há amortecedores ou forças externas e adote os seguintes valores numéricos: $m = 3 \text{ kg}$ e $k = 600 \text{ N/m}$. A equação de movimento do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Este sistema possui as seguintes frequências naturais e modos de vibração associados:

$$\omega_{n1} = \sqrt{0,382 \frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_{n2} = \sqrt{2,618 \frac{k}{m}}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0,618 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,618 \end{Bmatrix}$$

Determine a resposta do problema com as seguintes condições iniciais: $x_1(0) = 0,1 \text{ m}$, $x_2(0) = 0,2 \text{ m}$, $\dot{x}_1(0) = 1 \text{ m/s}$ e $\dot{x}_2(0) = 2 \text{ m/s}$.

2. A Figura 5.7 mostra um pêndulo duplo, um sistema simples de dois graus de liberdade, onde não há amortecimento ou excitação externa. Para estudarmos este sistema, pede-se que você siga o seguinte roteiro:

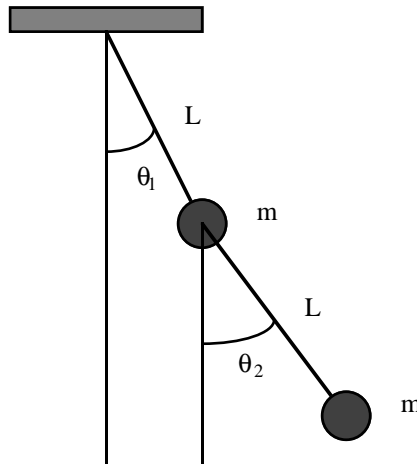


Figura 5.7: Modelo analítico de um pêndulo duplo, com seus graus de liberdade.

- (a) Obtenha as equações exatas de movimento do sistema nas coordenadas generalizadas acima definidas utilizando o método das equações de Lagrange.
- (b) Linearize as equações obtidas para o caso de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, apresentando-as em forma matricial, e mostre que elas são dadas por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g/L & 0 \\ 0 & g/2L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- (c) Mostre que as frequências naturais do sistema e os modos de vibração associados são dados por

$$\omega_{n1} = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{L}} \quad \text{e} \quad \omega_{n2} = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{L}}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0,707 \\ -1,000 \end{Bmatrix}$$

- (d) Adote os seguintes valores numéricos: $L = 0,25 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Com condições iniciais $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0,2 \text{ rad}$ e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = -0,5 \text{ rad/s}$, forneça a resposta do sistema.

3. Considere o problema de vibração forçada com o seguinte modelo matemático:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c & -2c \\ -2c & 4c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6k & -2k \\ -2k & 4k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

Este sistema possui as seguintes frequências naturais e modos de vibração associados:

$$\omega_{n_1} = \sqrt{2 \frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_{n_2} = \sqrt{5 \frac{k}{m}}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Determine a resposta permanente do sistema usando a técnica de análise modal.

4. Considere o modelo analítico da Figura 5.8. Pede-se:

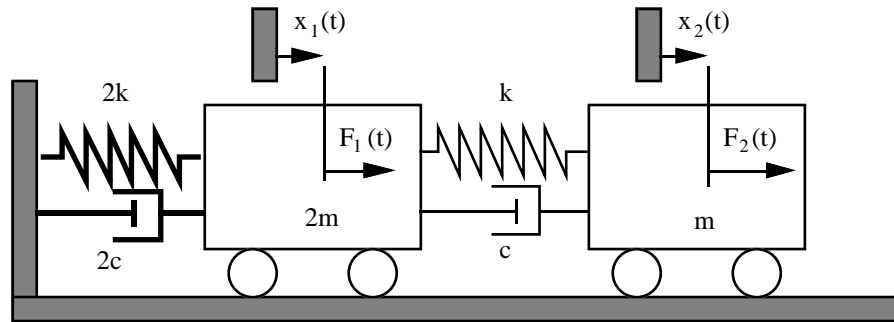


Figura 5.8: Modelo analítico de um sistema com dois graus de liberdade em translação.

- (a) Deduza as equações de movimento do sistema utilizando
- a Segunda Lei de Newton;
 - o Princípio de D'Alembert;
 - o Princípio dos Deslocamentos Virtuais;
 - o Princípio da Conservação de Energia;
 - o método das Equações de Lagrange; e
 - o Princípio de Hamilton.
- (b) Obtenha as suas frequências naturais.
- (c) Obtenha os modos de vibração associados.
- (d) Para o caso sem amortecimento e sem forças externas, determine a resposta do sistema para as seguintes condições iniciais:

$$x_1(0) = 0,2 \text{ m} \quad x_2(0) = 0,3 \text{ m} \quad \dot{x}_1(0) = 2 \text{ m/s} \quad \dot{x}_2(0) = 3 \text{ m/s}$$

- (e) Para o caso com amortecimento, determine a resposta permanente do sistema usando a técnica de análise modal se

$$F_1(t) = 2 \sin \omega t \quad F_2(t) = -2 \sin \omega t$$

- (f) Determine a resposta para o caso forçado do item (e) sujeito às condições iniciais do item (d).

5. A Figura 5.9 mostra um modelo analítico do pêndulo de Wilberforce. Trata-se de um sistema que pode vibrar verticalmente, descrito pela coordenada $x(t)$, e rodar horizontalmente em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da mola, com coordenada $\theta(t)$. Chamemos de m e k respectivamente a massa e a rigidez associadas ao grau de liberdade de translação, e de I e K as quantidades correspondentes para o grau de liberdade torcional. O sistema é não-amortecido. Existe um pequeno torque devido ao deslocamento $x(t)$, dado por $-S_{\theta x} x$ e uma pequena força devida à torção $\theta(t)$, dada por $-S_{x\theta} \theta$. Estes termos introduzem acoplamentos fracos entre os graus de liberdade e induzem a ocorrência de batimento. Baseado nesses considerandos, pede-se:

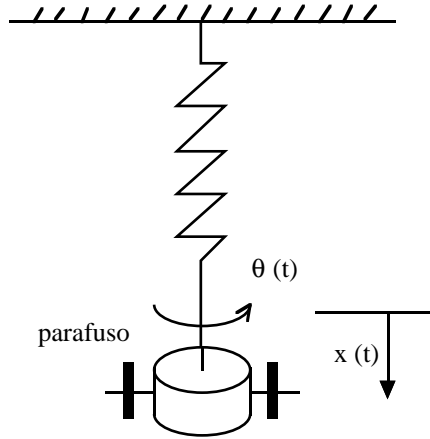


Figura 5.9: Modelo analítico simplificado do Pêndulo de Wilberforce.

- (a) Obtenha as equações de movimento do sistema.
 (b) Por que devemos ter $S_{\theta x} = S_{x\theta}$ para que o sistema seja conservativo?
 (c) Ache as expressões exatas para as duas frequências naturais do pêndulo.
 (d) Mostre que as frequências acima são aproximadamente iguais a

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_\theta = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

quando $(S_{\theta x})^2 \ll kK$.

- (e) No caso anterior, determine os modos naturais de vibração.
 (f) Os parafusos ao lado do oscilador torcional podem ser ajustados de forma a fornecer $\omega_x \approx \omega_\theta$. Nesta situação, como ficam os modos de vibração?
 (g) Finalmente, como será a resposta do sistema no caso anterior quando o sistema é inicializado por uma vibração pura em x ou em θ ?

6. Um sistema com massa m , amortecedor c e mola k é forçado a vibrar por uma força externa $F(t)$. Este sistema apoia-se em uma fundação elástica que pode ser modelada como tendo uma mola k_f e um amortecedor c_f . Faça um modelo analítico do problema e um diagrama de blocos que mostre o movimento da base realimentando o movimento do sistema original. Estabeleça as equações de movimento relevantes colocando-as, se possível, em forma matricial. Note que tanto o movimento da massa m como da base são incógnitas do problema; apenas a força externa $F(t)$ é considerada prescrita. Defina claramente as incógnitas a serem utilizadas, se indicam movimento relativo a um referencial móvel ou a um referencial inercial. Que tipo de acoplamento apresenta o sistema?
7. Para exercitar um problema com mais de dois graus de liberdade, considere o modelo de um pêndulo triplo, como uma extensão ao pêndulo duplo da Figura 5.7. Pede-se:
 - (a) Obtenha as equações exatas de movimento e linearize-as para pequenas oscilações, apresentando o resultado em forma matricial. Que tipo de acoplamento apresenta este problema?
 - (b) Obtenha as frequências naturais e os modos de vibração deste sistema.
 - (c) A seu critério, forneça uma energia inicial ao sistema através de um conjunto de condições iniciais e determine a resposta do sistema através da técnica de análise modal.
8. A Figura 5.10 mostra um sistema de dois graus de liberdade, constituído por duas massas conectadas entre si por molas e por um amortecedor. O sistema é preso em uma extremidade à uma base fixa e na outra extremidade é forçado a vibrar por um “shaker”, que pode ser modelado como um mero introdutor de uma força externa $F(t)$. Pede-se:

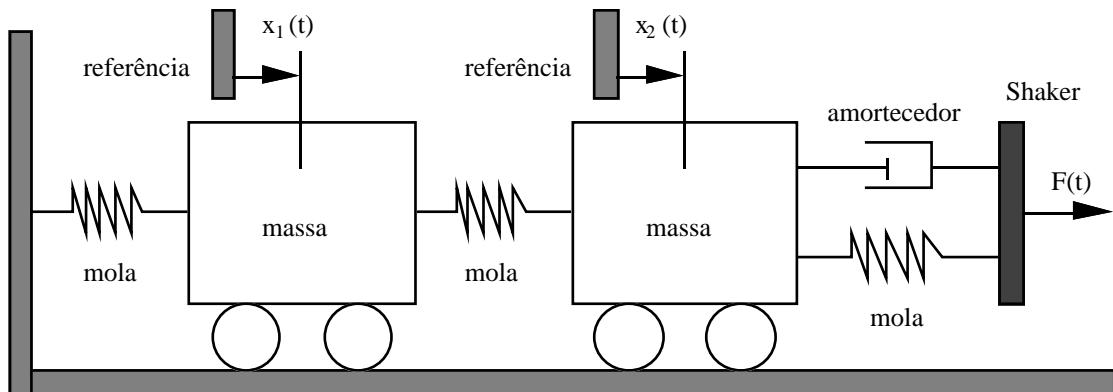


Figura 5.10: Sistema de dois graus de liberdade excitado por um “shaker”.

- (a) Obtenha as equações de movimento do sistema para pequenas oscilações pelos seguintes métodos de análise:
 - i. Segunda Lei de Newton;
 - ii. Conservação de Energia; e
 - iii. Equações de Lagrange.
- (b) Coloque-as em forma matricial, identificando as matrizes de massa, amortecimento, rigidez e os vetores aceleração, velocidade, deslocamento e forçante do sistema.
- (c) Que tipo de acoplamento apresenta este sistema?

9. Um disco de raio R e momento de inércia J em torno do eixo de rotação deve girar com velocidade angular constante Ω . Devido a perturbações no sistema de acionamento, esta velocidade angular pode variar um pouco. A idéia é controlar essa velocidade através de um pêndulo centrífugo como mostrado na Figura 5.11. Este sistema possui dois graus de liberdade, θ e ϕ . A haste de comprimento r é articulada na borda do disco, sendo rígida e sem massa, com uma massa concentrada m na ponta. Pede-se:

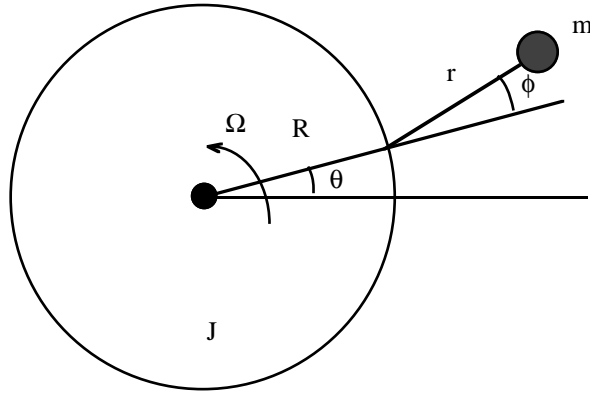


Figura 5.11: Modelo analítico de um controlador passivo de velocidade de rotação.

- Deduza as equações exatas de movimento do sistema e particularize o resultado para pequenas perturbações.
 - Admita o movimento do disco dado por $\theta(t) = \Omega t + \theta_o \sin \omega t$, sendo este segundo termo uma pequena perturbação. Qual é a frequência natural do pêndulo?
 - Qual é a resposta permanente do sistema, supondo a presença de um amortecimento pequeno?
 - O que é necessário ocorrer para que o disco gire com velocidade constante?
 - Discuta estes resultados à luz da técnica de absorção de vibrações que pode ser experimentada por sistemas de dois graus de liberdade.
10. Parado, sem efeito gravitacional, um pêndulo de massa m tem comprimento L . Acontece que este pêndulo está imerso no campo gravitacional de aceleração g e tem uma haste sem massa, porém elástica ao longo de seu comprimento, podendo ser modelada como uma mola de rigidez k . Pede-se:
- Obtenha a equação de movimento exata do sistema por qualquer método considerando dois graus de liberdade: o deslocamento radial da massa $x(t)$ e o deslocamento angular da haste $\theta(t)$. Vamos supor que a haste não sofre flexão lateral.
 - Admita, conforme mostrado em sala de aula, que $x(t)$ e $\theta(t)$ possuem partes independente e dependente do tempo. Em conseqüência, obtenha os dois problemas de equilíbrio associados e os problemas de vibração de pequenas amplitudes em torno das posições de equilíbrio. Coloque esses problemas de vibração em forma matricial, apresentando as matrizes de massa e de rigidez do sistema.
 - Forneça as posições de equilíbrio existentes e deduza a estabilidade do sistema em torno de cada uma delas (se o sistema é estável, instável ou indiferente).
 - Que tipo de acoplamento apresenta o sistema? O que aconteceria se este sistema não estivesse imerso em um campo gravitacional (e.g., em órbita da Terra)?

11. A Figura 5.12 mostra um sistema simples de dois graus de liberdade. Um carrinho, livre para deslocar-se sobre um plano, tenta equilibrar um pêndulo na posição vertical. Para principiarmos nossos estudos sobre controle de vibrações, pede-se que você siga o seguinte roteiro:

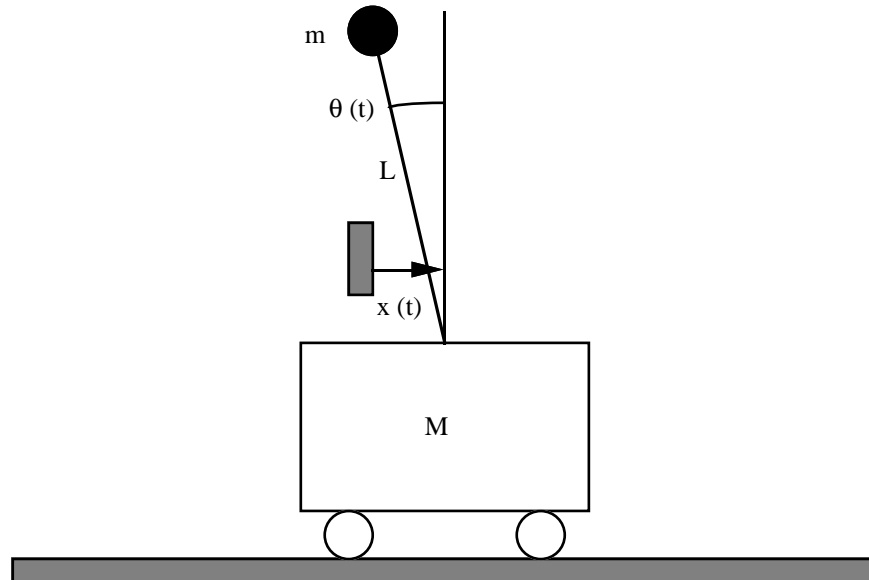


Figura 5.12: Modelo analítico simplificado de um carrinho equilibrista.

- Obtenha as equações exatas de movimento do sistema nas coordenadas generalizadas definidas na Figura 5.12 utilizando qualquer método da Mecânica Lagrangeana.
- Linearize as equações obtidas para o caso de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio instável, apresentando-as em forma matricial.
- Projete um controlador do carrinho para garantirmos o equilíbrio do sistema. Use para isso tantos sensores quantos você julgar adequado e qualquer lei de controle, desde que o objetivo seja atingido. Lembre-se que quanto mais complexo for, mais caro será o sistema.
- Procure ser original. Discuta as opções existentes com seus colegas, mas apresente uma solução somente sua.

Capítulo 6

Vibrações de Sistemas Contínuos

6.1 Introdução

Sistemas contínuos ou sistemas com propriedades distribuídas são aqueles cujas propriedades inerciais, de amortecimento, de rigidez e/ou de carregamento formam por algum intervalo espacial um contínuo. Descontinuidades, como saltos em propriedades geométricas, são permitidas. Porém, entre descontinuidades, admite-se que propriedades possam variar de maneira matematicamente razoável, de forma a permitir continuidade de derivadas dessas propriedades até uma certa ordem.

A rigor, sistemas idealmente contínuos não existem, pois sabemos, por exemplo, que os materiais estruturais são compostos por componentes discretos em nível microscópico. Enquanto comportarem modelamento como um contínuo, tais sistemas permitem obter uma descrição matemática ainda mais sofisticada que aquela obtida ao admitir-se propriedades concentradas em pontos preferenciais da estrutura. Portanto, este tipo de modelamento representa uma evolução com respeito ao que foi praticado até agora neste texto.

Neste capítulo iniciamos mostrando uma relação entre o Princípio de Hamilton, indicado para a análise de estruturas contínuas e as Equações de Lagrange, indicada para a análise de estruturas discretas. Esta dedução estabelece, de certa forma, uma ligação entre sistemas contínuos e discretos. A seguir, consideramos os problemas de vibrações axiais, em cisalhamento, em torção e em flexão de estruturas elementares unidimensionais (barras e vigas) e bidimensionais (placas). Finalmente, discutimos os problemas de vibrações forçadas de estruturas, evidenciando a importância de métodos numéricos para resolução dos mesmos. A discussão enfatiza o método de Galerkin e métodos de integração numérica das equações de movimento de estruturas.

6.2 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange

O Princípio de Hamilton foi discutido no Capítulo 2. Trata-se da ferramenta de análise mais sofisticada a ser empregada neste texto. Este Princípio pode ser apresentado matematicamente como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} + \mathcal{W}) dt = 0 \quad (6.1)$$

Em palavras, isto significa que entre dois instantes de tempo fixos em que o estado de um sistema é conhecido a variação da energia cinética e do trabalho executado por este sistema é nula. Este enunciado pode ser encarado como um princípio de estacionariedade (ou de mínimo) da natureza.

O trabalho \mathcal{W} executado por um sistema é resultado, no caso geral, da ação de forças conservativas (potencializáveis) e não-conservativas (não-potencializáveis). No primeiro caso,

podemos associar ao trabalho o conceito de uma energia potencial, de sinal contrário ao do trabalho oriundo de forças conservativas, isto é,

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_{nc} = -\mathcal{U} + \mathcal{W}_{nc} \quad (6.2)$$

Assim, podemos reescrever o princípio (6.1) como

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{W}_{nc} dt = 0 \quad (6.3)$$

Vamos agora admitir que a energia cinética \mathcal{T} de um sistema possa ser escrita como uma função de deslocamentos e velocidades de n coordenadas generalizadas q_r ($r = 1, 2, \dots, n$). Desta forma, a variação de \mathcal{T} fornece

$$\delta\mathcal{T} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right) \quad (6.4)$$

De maneira similar, vamos admitir que a energia potencial \mathcal{U} possa ser escrita apenas como função dos deslocamentos q_r das coordenadas generalizadas. Neste caso, a variação deste potencial fornece

$$\delta\mathcal{U} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_r} \delta q_r \quad (6.5)$$

Finalmente, admitamos que o trabalho executado por forças externas que não derivem de um potencial possa ser escrito como a soma dos produtos de forças generalizadas \mathcal{Q}_r por seus deslocamentos q_r correspondentes. Assim, a variação do trabalho das forças não-conservativas ou não-potencializáveis fica dada por

$$\delta\mathcal{W}_{nc} = \sum_{r=1}^n \mathcal{Q}_r \delta q_r \quad (6.6)$$

A substituição das hipóteses (6.4), (6.5) e (6.6) no princípio (6.3) fornece

$$\sum_{r=1}^n \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right) - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_r} \delta q_r + \mathcal{Q}_r \delta q_r \right] dt \right\} = 0 \quad (6.7)$$

Se integrarmos o termo em $\delta \dot{q}_r$ por partes, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r dt = \left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r dt$$

Porém, sabemos que por hipótese $\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0$. Assim, este resultado reduz-se a

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r dt \quad (6.8)$$

A substituição do resultado (6.8) em (6.7) fornece a seguinte relação matemática:

$$\sum_{r=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_r} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_r} - \mathcal{Q}_r \right] \delta q_r \right\} dt = 0 \quad (6.9)$$

Como os instantes t_1 e t_2 são fixos, porém arbitrários, e a variação do deslocamento da r -ésima coordenada generalizada é também arbitrária, a única forma de garantir que a relação (6.9) seja satisfeita é admitir que para cada grau de liberdade individual temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_r} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_r} - \mathcal{Q}_r = 0 \quad (6.10)$$

Se adicionarmos a este quadro a hipótese de que a energia potencial \mathcal{U} não dependa da velocidade das coordenadas generalizadas e chamarmos de $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ a função Lagrangeana do sistema, podemos finalmente reescrever o resultado (6.10) na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = Q_r \quad (6.11)$$

que são as conhecidas equações de Lagrange de um sistema mecânico.

Este resultado permite-nos observar que as equações de Lagrange podem ser obtidas a partir do Princípio de Hamilton. Portanto, este último Princípio tem um caráter mais geral, sendo uma afirmação mais poderosa da Física que governa o movimento de corpos deformáveis sob ação de cargas dinâmicas.

As equações de Lagrange são ótimos instrumentos de análise para sistemas discretos. No entanto, para o tratamento de sistemas contínuos recomenda-se, dentro do enfoque da Mecânica Lagrangeana, o uso do Princípio de Hamilton. Como poderemos observar nos problemas que se seguem neste capítulo, o Princípio permite obter não apenas as equações de movimento do sistema, como também as condições de contorno associadas. Para sistemas mecânicos complexos, onde a Mecânica Newtoniana poderia causar alguma confusão, o Princípio de Hamilton permite a obtenção de resultados de forma segura e sistemática, bastando para isto sabermos expressar as energias cinética e potencial e as forças generalizadas do sistema de maneira a incluir os efeitos desejados. Portanto, trata-se de uma ferramenta de análise mais poderosa.

6.3 Vibrações Axiais e Torcionais de Barras

6.3.1 Definição do Problema

A Figura 6.1 mostra uma barra de seção transversal variável $A(x)$ submetida a um carregamento axial distribuído $p(x, t)$ por unidade de comprimento. Sob ação dessa carga, cada elemento da barra sofre um deslocamento na direção axial $u(x, t)$, deslocamento este medido a partir de um referencial inercial. A barra é suposta ter um comprimento não-deformado l , uma massa por unidade de comprimento $m(x)$ e ser feita de um material não necessariamente uniforme, de módulo de Young $E(x)$. Trata-se, portanto, de uma estrutura unidimensional, em que todas as propriedades da barra variam apenas ao longo da direção x . Vamos considerar o caso ideal em que há apenas deformações axiais da barra em resposta à excitação eterna.

Os nossos objetivos consistem em utilizar o Princípio de Hamilton para obter a equação de movimento do sistema e em fazer uma análise preliminar do comportamento da barra em vibração axial.

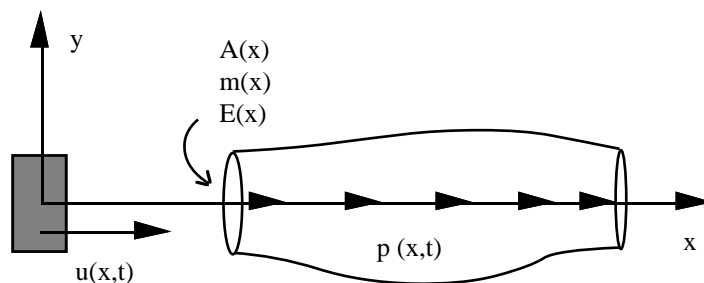


Figura 6.1: Barra de seção transversal variável em solicitação axial dinâmica.

6.3.2 Dedução da Equação de Movimento

A energia cinética da barra em um determinado instante é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6.12)$$

A energia potencial elástica instantânea da barra em solicitação axial é dada por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (6.13)$$

Finalmente, o trabalho num determinado instante realizado pelo carregamento externo $p(x, t)$ é escrito como

$$\mathcal{W}_{nc} = \int_0^l p u dx \quad (6.14)$$

A substituição dos resultados (6.12), (6.13) e (6.14) no Princípio de Hamilton (6.3) fornece a seguinte relação:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\int_0^l p u dx \right] dt = 0$$

Efetuada a variação da função deslocamento $u(x, t)$, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - \int_0^l E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_0^l p \delta u dx \right] dt = 0$$

Acontece que os operadores de variação e de diferenciação são comutáveis, isto é,

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \delta u}{\partial t} \quad \text{e} \quad \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x}$$

Assim, o resultado anterior transforma-se em

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx - \int_0^l E A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx + \int_0^l p \delta u dx \right] dt = 0 \quad (6.15)$$

Os dois termos deste resultado que apresentam derivadas parciais da variação δu devem ser agora integrados por partes. Como as integrais no tempo e no espaço são também comutáveis, o termo dependente do tempo fornece

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} dt = \left[m \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u dt$$

Porém, como observado na seção anterior, $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$ por hipótese do Princípio de Hamilton. Em consequência, este resultado simplifica-se para

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta u dt \quad (6.16)$$

Já o termo dependente do espaço em (6.15) pode ser integrado como segue abaixo:

$$\int_0^l E A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx = \left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dx \quad (6.17)$$

Se substituirmos as integrações (6.16) e (6.17) em (6.15) e rearranjarmos os termos adequadamente, o Princípio de Hamilton fornece o seguinte resultado:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p - \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] dx \delta u - \left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^l \right\} dt = 0 \quad (6.18)$$

O último colchete neste resultado deve ser interpretado como

$$\left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^l = \left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]^l - \left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0 \quad (6.19a)$$

Acontece que

$$E A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

é equivalente a afirmar que a extremidade da barra é livre de carregamento. Esta é uma condição de contorno dita *natural* do problema. Por outro lado, a condição

$$\delta u = 0$$

corresponde a uma extremidade da barra para a qual não é permitido qualquer deslocamento axial, isto é, uma extremidade engastada. Esta é uma condição de contorno dita *geométrica* do problema.

Note que todos os casos reais de barras atenderão às condições acima dispostas, pois em cada extremidade da barra ocorrerá uma condição natural ou geométrica, porém não ambas simultaneamente. Uma barra livre-livre atenderá a duas condições de contorno naturais; uma barra livre-engastada atenderá a uma condição de contorno natural e a uma geométrica; e, finalmente, uma barra engastada-engastada atenderá a duas condições de contorno geométricas. Em conclusão, o colchete (6.19a) será nulo sempre e o resultado (6.18) reduz-se a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p - \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] dx \delta u \right\} dt = 0$$

Lembrando que a variação δu é arbitrária, o resultado acima só será verificado se o integrando

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p - \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0 \quad (6.19b)$$

Em conclusão, a aplicação do Princípio de Hamilton a este problema mostra que são necessárias ser atendidas simultaneamente as seguintes duas condições:

1.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p - \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$$

2.

$$\left[E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right]_0^l = 0$$

O primeiro resultado é uma equação diferencial parcial com variáveis independentes temporal e espacial. Este resultado envolve as propriedades de inércia, de rigidez e de carregamento da barra e é chamado, por esta mesma razão, de equação de movimento do sistema. Já o segundo resultado é um subproduto do Princípio de Hamilton: as condições de contorno naturais e geométricas do problema.

Os resultados aqui obtidos permitem observar que a aplicação do Princípio de Hamilton gerou, dentro de sua generalidade, não apenas a equação de movimento do sistema, como também as suas condições de contorno. Note também que o problema aqui colocado pode admitir variações, principalmente no que concerne a condições de contorno. No entanto, tais variações serão incorporadas automaticamente nos resultados desde que incluídas de maneira adequada nas expressões de energia e de trabalho do sistema.

6.3.3 Vibração Axial Livre de uma Barra Uniforme

Como aplicação, vamos estudar a vibração axial livre de uma barra de propriedades constantes ao longo de seu comprimento, engastada em $x = 0$ e livre em $x = l$. A equação de movimento (6.19a) reduz-se, nestas condições, a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{E A} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6.20)$$

Podemos admitir para $u(x, t)$ uma solução com separação de variáveis da forma

$$u(x, t) = U(x) \cos \omega t \quad (6.21)$$

onde $U(x)$ expressa uma forma de deformação axial possível de ocorrer ao longo da viga e ω representa uma frequência circular de vibração em torno da posição nominal de equilíbrio. Dentro dessa hipótese, a equação diferencial parcial (6.20) transforma-se na seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda^2 U = 0 \quad (6.22)$$

onde o parâmetro

$$\lambda^2 = \frac{m \omega^2}{E A} \quad (6.23)$$

expressa uma combinação das propriedades de inércia, de rigidez e de dinâmica da estrutura.

A solução da equação diferencial ordinária (6.22) é dada por

$$U(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x \quad (6.24)$$

Se aplicarmos a condição de contorno de engastamento na extremidade $x = 0$, obtemos $C_2 = 0$. Se aplicarmos a condição de carregamento livre na extremidade $x = l$, obtemos para solução não-nula o seguinte problema de auto-valor:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{em } x = l \quad \Rightarrow \quad \cos \lambda l = 0 \quad (6.25)$$

Este problema possui infinitas soluções da forma

$$\lambda_r = (2r - 1) \frac{\pi}{2l} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

que correspondem a infinitas *frequências naturais de vibração* obtidas da definição (6.23) como sendo

$$\omega_r = (2r - 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E A}{m l^2}} \quad (6.26a)$$

e a infinitos *modos naturais de vibração* obtidos a partir da solução (6.24) como sendo

$$U_r(x) = C_r \sin \left[(2r - 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} \right] \quad (6.26b)$$

Observe que todos os possíveis modos de vibração respeitam as condições de contorno naturais e geométricas do problema.

Do problema de auto-valor (6.25) nós obtemos as formas dos modos naturais de vibração (6.26b), porém não os seus coeficientes C_r , que continuam indeterminados. Existem diversas formas de se atribuir valores para esses coeficientes, dentro do processo matemático chamado de normalização dos auto-vetores. Dentre essas formas, vamos aqui adotar a normalização pela massa da estrutura, conforme apontado no capítulo anterior. Assim, façamos

$$\int_0^l m(x) U_r(x) U_s(x) dx = \delta_{rs} \quad (6.27)$$

onde δ_{rs} é o delta de Kronecker dos índices r e s . Quando esses índices são iguais e a barra tem distribuição uniforme de massa ao longo de seu comprimento, nós obtemos

$$\int_0^l m U_r^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C_r = \sqrt{\frac{2}{ml}} \quad (6.28)$$

Com este resultado, podemos reescrever os auto-vetores (6.26b), agora normalizados, como sendo

$$U_r(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin \left[(2r-1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{l} \right] \quad (6.29)$$

Se plotarmos esses modos de vibração ao longo do comprimento da viga verificamos que

- todos atendem à condição de contorno geométrica em $x = 0$;
- todos atendem à condição de contorno natural em $x = l$;
- todos têm “amplitude” máxima $\sqrt{2/ml}$, com unidade de medida de $\text{kg}^{-1/2}$; e
- o modo de ordem r tem $r - 1$ “nós”, ou seja, pontos em que o deslocamento axial é nulo.

No capítulo anterior verificamos que é possível que um sistema mecânico discreto possa ser excitado de forma a vibrar livremente segundo um modo puro. Tal situação é difícil de se obter em um sistema contínuo, pois ter-se-ia de aplicar à estrutura uma condição inicial *distribuída* de um único modo. Assim, espera-se que a resposta em vibração livre da barra contenha um número significativo de modos de vibração superpostos.

6.3.4 Vibração Axial Forçada de uma Barra Uniforme

Como aplicação mais avançada, vamos agora considerar o problema de vibração da mesma barra da subseção anterior, com as mesmas condições de contorno, porém com carga axial $p(x, t)$ não-nula. A equação de movimento do problema é dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{EA} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{p}{EA} \quad (6.30)$$

Vamos adotar uma solução para o deslocamento axial com separação de variáveis da forma

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^n U_r(x) q_r(t) \quad (6.31)$$

onde tomamos n modos de vibração dados pelo resultado (6.29). A substituição da solução (6.31) na equação de movimento (6.30) fornece o seguinte resultado:

$$\sum_{r=1}^n \left[\frac{d^2 U_r}{dx^2} q_r - \frac{m}{EA} U_r \ddot{q}_r \right] = - \frac{p}{EA} \quad (6.32)$$

Do problema de vibração livre associado, a equação (6.22) fornece a seguinte relação:

$$\frac{d^2 U_r}{dx^2} = - \frac{m \omega_r^2}{E A} U_r \quad (6.33)$$

para o r -ésimo modo natural de vibração. Se substituirmos a relação (6.33) em (6.32), obtemos

$$\sum_{r=1}^n \left[\left(\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r \right) m U_r \right] = p \quad (6.34)$$

Se multiplicarmos ambos os lados da equação (6.34) pelo modo de vibração $U_s(x)$, integrarmos o resultado ao longo do domínio da barra ($0 \leq x \leq l$) e utilizarmos a propriedade de normalização de modos (6.27), ficamos com a seguinte equação diferencial ordinária desacoplada para o r -ésimo modo de vibração:

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r = f_r(t) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (6.35)$$

onde definimos o termo forçante $f_r(t)$ da seguinte forma:

$$f_r(t) = \int_0^l p(x, t) U_r(x) dx \quad (6.36)$$

A equação (6.35) representa na realidade n equações diferenciais ordinárias de vibração desacopladas de um grau de liberdade. Este desacoplamento foi possível porque usou-se para resolver o problema de vibração forçada da barra os modos de vibração exatos da mesma estrutura. Caso não tivessem sido usados os mesmos modos de vibração da estrutura, a equação (6.35) seria matricial e requeria métodos numéricos de integração direta para sua solução. Vamos elaborar um pouco mais sobre este assunto ainda neste capítulo.

Após a resolução individual de cada um dos n problemas de vibração de um grau de liberdade expressos pela equação (6.35), a solução final pode ser montada de acordo com a hipótese inicial (6.31). Não existe uma regra explícita para definir a ordem n de termos a ser tomada nesta série. O bom-senso recomenda comparar a resposta obtida com n termos com outra obtida com $n + 1$ termos na ordem crescente de frequência dos modos de vibração da estrutura. Caso haja convergência dentro de um certo critério, pode-se tomar a última resposta como aquela válida do ponto de vista de engenharia. Caso contrário, um número maior de termos da série precisa ser considerado. Na prática, a amplitude dos coeficientes q_r tende a decrescer com o aumento de frequência espacial. As estruturas comuns admitem soluções que convergem com razoável rapidez. Alguns cuidados extras são necessários quando o termo forçante possui conteúdo em frequência bastante próximo ao de alguma das frequências naturais da estrutura.

A solução aqui apresentada para a vibração axial forçada de barras emprega informalmente o chamado método de Galerkin. Este método, que se presta bem para a solução de equações diferenciais parciais ou ordinárias que admitam uma solução em série, será discutido formalmente em outra seção deste capítulo.

6.3.5 Vibrações Torcionais

O problema de uma barra em torção é em tudo similar ao discutido nesta seção. A similaridade começa na expressão das energias e do trabalho virtual e termina essencialmente em uma equação diferencial de movimento de apresentação matemática análoga. Onde temos $u(x, t)$, $p(x, t)$, $m(x)$ e $EA(x)$ no problema axial, ficamos no problema torcional com $\theta(x, t)$, $T(x, t)$, $I_p(x)$ e $GJ(x)$, respectivamente, onde $\theta(x, t)$ é o deslocamento angular da barra em torno do seu eixo, a partir da condição não-deformada, $T(x, t)$ é o torque distribuído e externo aplicado à barra, $I_p(x)$ é o momento polar de inércia da seção transversal e $GJ(x)$ é a rigidez torcional da barra.

Se aplicarmos a este problema o Princípio de Hamilton, a equação de movimento resultante é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G J \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + T - \frac{\partial}{\partial t} \left(I_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0$$

que é, como no caso axial, de segunda ordem no tempo e no espaço. As condições de contorno possíveis são

- natural - extremidade livre de torque

$$G J \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

- geométrica - extremidade engastada

$$\delta \theta = 0$$

Tendo em vista a total similaridade da equação de movimento e das condições de contorno do problema torcional face ao problema axial, os casos de vibração livre e forçada em torção não serão aqui discutidos formalmente, ficando como exercício para o leitor.

6.4 Dinâmica de Vigas em Flexão

6.4.1 Definição do Problema

A Figura 6.2 mostra uma viga de seção transversal $A(x)$ e momento de inércia em flexão $I(x)$ variáveis ao longo de seu comprimento. Na condição nominal descarregada a viga tem seu eixo elástico coincidindo com o eixo x . Sob ação de cargas laterais, a viga sofre deslocamentos lineares $y(x, t)$ definidos ortogonalmente ao eixo elástico na posição nominal. A viga encontra-se submetida a um carregamento lateral distribuído $q(x, t)$ por unidade de comprimento. A viga é suposta ter um comprimento l na condição não-deformada, uma massa por unidade de comprimento $m(x)$ e um momento de inércia de massa em torno do eixo z designado por $J_m(x)$. Vamos supor também que a viga é feita de um material não-uniforme, de módulo de Young $E(x)$ e módulo de cisalhamento $G(x)$. Trata-se, portanto, de outra estrutura unidimensional, cujas propriedades são função de x apenas. Vamos supor, finalmente, que os deslocamentos lineares ocorram no plano x, y e rotações ocorram em torno do eixo ortogonal z .

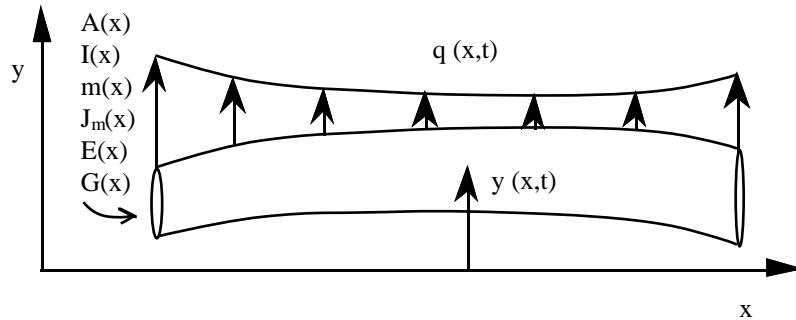


Figura 6.2: Viga de propriedades variáveis em solicitação lateral dinâmica.

Os nossos objetivos consistem em utilizar o Princípio de Hamilton para obter a equação de movimento do sistema usando inicialmente as hipóteses de Euler-Bernoulli e posteriormente as de Timoshenko. Também como objetivo consta fazer uma análise preliminar do comportamento da viga em vibração lateral no caso mais simplificado, de Euler-Bernoulli.

6.4.2 Vigas de Euler-Bernoulli

Como hipótese básica da teoria de vigas desenvolvida por Euler e Bernoulli no século XVIII encontramos aquela de que seções transversais originalmente planas e ortogonais ao eixo elástico antes da deformação continuam planas e ortogonais ao eixo elástico na condição deformada. Portanto, nesta teoria não existem efeitos introduzidos por esforços cortantes na deformação da estrutura e também não estão computados efeitos da energia de rotação da viga em torno do eixo ortogonal ao seu plano de flexão. Tais efeitos foram incorporados na teoria de vigas de Timoshenko, a ser discutida ainda neste capítulo.

Dentro do quadro descrito, a energia cinética de translação da viga é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6.37)$$

A energia potencial elástica da viga em flexão é expressa como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l E I \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6.38)$$

Finalmente, o trabalho realizado pelo carregamento lateral distribuído é expresso simplesmente por

$$\mathcal{W}_{nc} = \int_0^l q y dx \quad (6.39)$$

Note que, de acordo com a Figura 6.2, $q(x, t)$ e $y(x, t)$ positivos apontam na mesma direção. Caso não fosse assim, um sinal negativo apareceria no trabalho definido pela equação (6.39). Note também que \mathcal{W}_{nc} não se refere a um trabalho oriundo de força não-conservativa, mas apenas a um trabalho não potencializável no sentido usual.

Se substituirmos as energias (6.37) e (6.38) e o trabalho (6.39) no Princípio de Hamilton (6.3), nós obtemos o seguinte resultado:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l E I \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_0^l q y dx dt = 0 \quad (6.40)$$

Efetuada as variações em relação ao deslocamento lateral $y(x, t)$, a equação (6.40) reduz-se a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx - \int_0^l E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dx + \int_0^l q \delta y dx \right] dt = 0 \quad (6.41)$$

Lembrando que as integrais no tempo e no espaço podem ser comutadas entre si, o próximo passo consiste em efetuar integrações por partes com respeito ao tempo e ao espaço de forma a eliminar derivadas de variações de $y(x, t)$. Dentro do colchete na equação (6.41) temos três integrais. A terceira não será alterada, por já trazer a variação δy sem estar diferenciada. A primeira integral será efetuada uma vez com respeito ao tempo, enquanto a segunda será efetuada duas vezes com respeito à variável independente espacial x . Para a integral no domínio do tempo temos

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} dt = \left[m \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y dt$$

Como $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$ por hipótese e a distribuição de massa da viga é suposta ser fixa no tempo, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dt \quad (6.42)$$

Note que se a distribuição de massa da viga variar também com o tempo, precisamos tomar um resultado ainda mais geral para a integral (6.42), qual seja

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y dt$$

Este é o caso, por exemplo, se a viga for oca e contiver fluidos. Qualquer semelhança com uma asa de avião é mera coincidência!

Já para a segunda integral no colchete de (6.41) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^l E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dx &= \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]_0^l - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]_0^l \\ &+ \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y dx \end{aligned} \quad (6.43)$$

Se substituirmos os resultados (6.42) e (6.43) na equação (6.41) e rearranjarmos os termos convenientemente, o Princípio de Hamilton para a viga de Euler-Bernoulli assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - q \right] \delta y dx + \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]_0^l \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]_0^l \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

A condição

$$\left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]_0^l = \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]^l - \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]_0 = 0 \quad (6.45a)$$

e a condição

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]_0^l = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]^l - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]_0 = 0 \quad (6.45b)$$

são simultaneamente e identicamente satisfeitas. A condição

$$E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

equivale a afirmar que o momento fletor na extremidade da viga é nulo. Já a condição

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0$$

que é a derivada da anterior, equivale a dizer que o esforço cortante na extremidade é nulo. Estas duas condições são ditas *naturais* da estrutura. Por outro lado, a condição

$$\frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0$$

significa que a viga está engastada nesta extremidade, com o eixo elástico coincidindo com a direção do eixo x . Finalmente, a condição

$$\delta y = 0$$

significa que não é permitida à extremidade deslocar-se na direção y . Estas duas condições são ditas *geométricas* da estrutura.

As condições (6.45a) e (6.45b) são as condições de contorno do problema. Podemos observar que estas condições são sempre satisfeitas. Para provar isto, considere as seguintes situações:

- extremidade livre - esforço cortante e momento fletor nulos
- extremidade simplesmente apoiada - deslocamento lateral e momento fletor nulos
- extremidade engastada - deslocamento lateral e derivada do deslocamento nulos

No primeiro caso aparecem como nulas duas condições de contorno naturais, uma de (6.45a) e outra de (6.45b). No segundo caso aparecem como nulas uma condição de contorno natural de (6.45a) e outra geométrica de (6.45b). Finalmente, no terceiro caso aparecem duas condições de contorno geométricas, uma de (6.45a) e outra de (6.45b). Portanto, ambas as condições são satisfeitas em todos os casos.

Com esta discussão fica evidente que os dois colchetes do resultado (6.44) são nulos, permitindo reduzi-lo a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - q \right] \delta y \, dx \right\} dt = 0$$

Como a variação δy é arbitrária, para que este resultado se verifique seu integrando deve ser nulo, o que permite escrever

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - q = 0 \quad (6.45c)$$

que é a equação de movimento da estrutura, também chamada de equação de Euler da viga. Trata-se de uma equação diferencial parcial, de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo. Este modelo matemático vem em contraste com a equação de movimento para vibrações axiais e torcionais de uma barra, onde as derivadas temporais e espaciais são ambas de segunda ordem.

Em resumo, a aplicação do Princípio de Hamilton ao problema de vigas em flexão fornece três condições que precisam ser verificadas simultaneamente:

1.

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = q$$

2.

$$\left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]_0^l = 0$$

3.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right]_0^l = 0$$

ou seja, além da equação de movimento da estrutura temos quatro condições de contorno possíveis, já que o problema é de quarta ordem no espaço. Variações na equação de movimento e nas quatro condições de contorno postas acima podem acontecer, dependendo do problema. No entanto, tais variações aparecerão automaticamente como resultado da aplicação do Princípio de Hamilton se as expressões das energias e do trabalho incorporarem os efeitos correspondentes.

6.4.3 Vibrações Livres em Flexão de uma Viga Uniforme

Para ilustrar outra vez a vibração livre e forçada de estruturas, vamos aqui considerar por questões de simplicidade o problema de uma viga uniforme, de propriedades constantes ao longo de seu comprimento. Neste caso, a equação de movimento (6.45c) fica reduzida a

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q}{EI} \quad (6.46)$$

Para o caso de vibrações livres, isto é, para $q(x, t) = 0$, podemos adotar uma solução para o deslocamento lateral na forma

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t \quad (6.47)$$

A substituição da solução (6.47) na equação do movimento, então, fornece

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \mu^4 Y = 0 \quad (6.48)$$

onde

$$\mu^4 = \frac{m \omega^2}{EI} \quad (6.49)$$

A solução da equação diferencial ordinária (6.48) pode ser apresentada na forma

$$Y(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + C_3 \sinh \mu x + C_4 \cosh \mu x \quad (6.50)$$

As quatro constantes nesta solução podem ser determinadas a partir das quatro condições de contorno da viga. Admitindo, a título de exercício, o caso de uma viga bi-apoiada, das condições de deflexão e momento nulo em $x = 0$ tiramos que

$$C_2 + C_4 = 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 (-C_2 + C_4) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_4 = 0$$

Das condições de deflexão e momento nulo em $x = l$ obtemos

$$C_1 \sin \mu l + C_3 \sinh \mu l = 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 (-C_1 \sin \mu l + C_3 \sinh \mu l) = 0$$

donde concluímos que $C_3 = 0$ e ficamos, para solução não-trivial, com o seguinte problema simples de auto-valor:

$$\sin \mu l = 0 \quad (6.51)$$

O problema (6.51) tem infinitas soluções da forma

$$\mu_r l = r\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_r = r^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad (6.52)$$

a que correspondem os seguintes auto-vetores (modos de vibração):

$$Y_r(x) = A_r \sin \left(r\pi \frac{x}{l} \right) \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (6.53)$$

Se normalizarmos esses auto-vetores com a distribuição de massa da viga, como já utilizado na seção 6.3.3, devemos obedecer à seguinte relação:

$$\int_0^l m(x) Y_r(x) Y_s(x) dx = \delta_{rs} \quad (6.54)$$

donde

$$m A_r^2 \int_0^l \sin^2 \left(r \pi \frac{x}{l} \right) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A_r = \sqrt{\frac{2}{m l}}$$

Com este resultado, podemos reescrever os auto-vetores (6.53) normalizados como sendo

$$Y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{m l}} \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \quad (6.55)$$

Valem para esses modos de vibração as mesmas observações feitas na seção 6.3.3 para o caso de vibração axial, isto é, todos os modos observam as condições naturais e geométricas do problema, têm “amplitude” como função da massa da viga, e possuem número de nós inferior de uma unidade com respeito à ordem do modo considerado.

6.4.4 Vibrações Forçadas de uma Viga Uniforme

Vamos agora considerar o problema de vibração forçada expresso pela equação de movimento (6.46). O primeiro passo da solução consiste em adotar para o deslocamento lateral $y(x, t)$ a expressão em série abaixo:

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^n Y_r(x) h_r(t) \quad (6.56)$$

onde tomamos n modos de vibração dados pelo resultado (6.55). A substituição desta solução na equação de movimento (6.46) fornece

$$\sum_{r=1}^n \left[\frac{d^4 Y_r}{dx^4} h_r + \frac{m}{E I} Y_r \ddot{h}_r \right] = \frac{q}{E I} \quad (6.57)$$

Porém, da equação (6.48) de vibração livre sabemos que

$$\frac{d^4 Y_r}{dx^4} = \mu_r^4 Y_r \quad (6.58)$$

Substituindo a relação (6.58) em (6.57), obtemos

$$\sum_{r=1}^n \left[\left(\ddot{h}_r + \omega_r^2 h_r \right) m Y_r \right] = q \quad (6.59)$$

Se multiplicarmos ambos os lados da equação (6.59) pelo modo de vibração $Y_s(x)$, integrarmos o resultado ao longo do domínio da viga e utilizarmos a propriedade de normalização de modos (6.54), obtemos para cada modo de vibração a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\ddot{h}_r + \omega_r^2 h_r = g_r(t) \quad (6.60)$$

onde definimos o termo forçante como sendo

$$g_r(t) = \int_0^l q(x, t) Y_r(x) dx$$

Em resumo, utilizando os modos de vibração exatos da viga, transformamos a equação diferencial parcial de movimento (de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo) em n equações diferenciais ordinárias não-homogêneas (de segunda ordem no tempo) de um único grau de liberdade. A resolução desses n problemas individuais permite a obtenção da resposta desejada, de acordo com a série (6.56). Esta série deverá convergir rapidamente para a solução

exata. Cuidados extras deverão ser tomados caso a estrutura esteja sendo excitada em regime de ressonância.

Na eventualidade de se utilizar modos de vibração diferentes dos exatos do problema para esta análise, a relação (6.58) não é mais válida. Em consequência, os procedimentos aqui descritos continuam em vigor, porém não mais ocorre o desacoplamento dos n graus de liberdade. Em outras palavras, a aplicação do método de Galerkin continua a fazer desaparecer da análise a dependência espacial, mais os n graus de liberdade em $h_r(t)$ continuam acoplados entre si. Nestas condições, torna-se necessário o uso de métodos de integração numérica como os que serão apresentados ainda neste capítulo.

Usar ou não os modos de vibração exatos da estrutura sob estudo é uma opção do analista. Se a viga tem propriedades distribuídas de forma complicada, talvez não valha a pena procurar modos exatos para obter equações desacopladas no final, face a usar modos aproximados e integrar numericamente as equações matriciais resultantes. De qualquer maneira, será o esforço necessário e a experiência do analista que determinarão o procedimento mais adequado a seguir.

6.5 Vigas de Timoshenko

Uma teoria de vigas mais completa que a de Euler e Bernoulli foi apresentada por Timoshenko há cerca de um século. Nesta teoria Timoshenko admitiu que seções transversais planas da viga inicialmente ortogonais ao eixo elástico continuavam planas após aplicação das cargas, porém não necessariamente ortogonais ao eixo elástico. Em outras palavras, Timoshenko incluiu os efeitos de cisalhamento na deformação da estrutura. Temos agora dois campos de deformação a considerar: a deflexão lateral $y(x, t)$ e o ângulo de cisalhamento $\beta(x, t)$. A inclusão desse tópico neste texto é justificada pela sua maior generalidade e pelo fato de expor o leitor a um problema matemático de variação em dois campos funcionais.

6.5.1 Aplicação do Princípio de Hamilton

Para apreciarmos as consequências da inclusão promovida por Timoshenko, consideremos o mesmo problema dado pela Figura 6.2. Desta vez, a deflexão angular total de uma seção transversal da viga referida a um ponto do eixo elástico pode ser descrita por

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \psi(x, t) + \beta(x, t) \quad (6.61)$$

onde $\psi(x, t)$ é o ângulo de rotação da seção em (x, t) devido à flexão apenas e $\beta(x, t)$ é o ângulo de rotação devido ao cisalhamento. Lembre-se que em termos de ordem de grandeza o ângulo β é pequeno face a ψ .

Tendo o ângulo β como novidade, a energia cinética da viga é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l J_m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6.62)$$

Neste resultado, a primeira integral trata da energia de translação, enquanto a segunda inclui a energia de rotação das diversas seções transversais da viga em torno de eixos paralelos ao eixo z da Figura 6.2. Note que estamos desprezando uma parcela extra de energia devida à energia cinética de rotação em cisalhamento. Este desprezo está sendo efetuado baseado em termos de ordem de grandeza relativa entre essas energias.

Na energia cinética (6.62) $J_m(x)$ é o momento de inércia da seção transversal em torno do eixo z . Esta propriedade relaciona-se a outras da seção através de

$$J_m = \rho I = \frac{m}{A} I = k^2 m$$

onde ρ é a massa específica do material da viga (massa por unidade de volume) e k é o raio de giração da seção transversal em torno do eixo z . Assim, a expressão da energia (6.62) pode ser substituída por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k^2 m \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (6.63)$$

A energia potencial elástica da viga devido à flexão e ao cisalhamento é expressa pela soma das seguintes contribuições:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l M \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_0^l S \beta dx \quad (6.64)$$

onde $M(x)$ é o momento fletor percebido pela seção transversal na posição x e S é a correspondente carga local de cisalhamento. Da teoria elementar de Resistência dos Materiais sabemos que

$$M = E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad S = f G A \beta$$

onde f é o fator de forma da seção transversal definido por Timoshenko e G é o coeficiente de elasticidade do material da viga em cisalhamento. A substituição dessas relações e da definição (6.61) na energia (6.64), de forma a eliminar o ângulo de cisalhamento β , permite obter a seguinte expressão para a energia potencial elástica da viga em termos de y e de ψ apenas:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l E I \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right)^2 dx \quad (6.65)$$

Finalmente, o trabalho realizado pelo carregamento lateral externo distribuído $q(x, t)$ ao longo do comprimento da viga é dado por

$$\mathcal{W} = \int_0^l q y dx \quad (6.66)$$

Note que nesta definição está implícito que a carga $q(x, t)$ é positiva na mesma direção positiva de $y(x, t)$ e que a carga continua apontando nesta direção, qualquer que seja a deformação lateral da viga. Em termos técnicos, esta é uma carga *não-seguidora*. Em contexto mais evoluído, típico de Aeroelasticidade, o leitor poderia considerar uma carga que atuasse sempre perpendicularmente ao corpo na situação deformada. Neste caso, teríamos a analisar uma *carga seguidora*.

Se substituirmos as expressões (6.63), (6.65) e (6.66) no Princípio de Hamilton (6.3) e fizermos as variações devidas em termos de $y(x)$ e de $\psi(x)$, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx + \int_0^l k^2 m \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} dx - \int_0^l E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dx \right. \\ \left. - \int_0^l f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \delta \psi \right) dx + \int_0^l q \delta y dx \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (6.67)$$

Como podemos observar, o resultado (6.67) possui variações em y e ψ , bem como derivadas temporais e espaciais dessas variações. O próximo passo na dedução das equações de movimento consiste em efetuar integrações por partes de forma a eliminar estas derivadas. Quando estas integrações são em relação ao tempo, usamos o fato de que, por hipótese, as variações nos instantes t_1 e t_2 são nulas, já que as condições inicial e final do sistema são prescritas. Quando estas integrações são em relação à variável independente x , surgem naturalmente as condições de contorno do problema. Se efetuarmos as operações matemáticas descritas e rearranjarmos os

termos de forma a colocar em evidência as variações em y e em ψ , o resultado (6.67) transforma-se em

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q \right\} \delta y \, dx - \left\{ \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] \delta y \right\}_0^l + \right. \\ \left. + \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - k^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} \delta \psi \, dx - \left[\left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \right]_0^l \right\} dt = 0$$

Pelas mesmas razões apontadas nos estudos anteriores deste capítulo, a condição

$$\left\{ \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] \delta y \right\}_0^l = \left\{ \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] \delta y \right\}^l - \left\{ \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] \delta y \right\}_0 = 0$$

e a condição

$$\left[\left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \right]_0^l = \left[\left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \right]^l - \left[\left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \right]_0 = 0$$

são verificadas em todos os casos possíveis de extremidades. Para provar isto, observemos que a condição

$$f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) = 0$$

significa que o cisalhamento é nulo, situação que é verificada em qualquer extremidade livre onde não há aplicação de carga paralela ao eixo y . De maneira similar, a condição

$$E I \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

significa que o momento fletor é nulo na extremidade considerada, o que é equivalente a uma extremidade livre de carga ou simplesmente apoiada. Estas são condições de contorno naturais do problema. Por outro lado, a condição

$$\delta y = 0$$

representa não haver deslocamento lateral na extremidade, o que representa o caso típico de um apoio simples ou engastado. Finalmente, a condição

$$\delta \psi = 0$$

representa não haver ângulo devido à flexão na extremidade da viga, o que representa ser a extremidade considerada um engastamento. Estas são as condições de contorno geométricas do problema. No conjunto, estas condições naturais e geométricas são generalizações daquelas apresentadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, ficando como exercício para o leitor observar as simplificações decorrentes.

Em consequência dessa discussão, o resultado do Princípio de Hamilton fica simplificado como segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q \right\} \delta y \, dx + \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - k^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} \delta \psi \, dx \right\} dt = 0$$

Como as variações δy e $\delta \psi$ são arbitrárias, conclui-se que ambos os integrandos dentre chaves são nulos. Desta conclusão extraímos as duas equações diferenciais parciais que descrevem o movimento do sistema.

Como resumo de tudo o que foi exposto, o Princípio de Hamilton só será satisfeito se observarmos simultaneamente a ocorrência das seguintes afirmações matemáticas:

•

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q = 0 \quad (6.68a)$$

•

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - k^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.68b)$$

•

$$\left\{ \left[f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) \right] \delta y \right\}_0^l = 0 \quad (6.68c)$$

•

$$\left[\left(E I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \right]_0^l = 0 \quad (6.68d)$$

Como resultados, obtemos duas equações de movimento e dois conjuntos de condições de contorno. A equação (6.68a) tem dimensão de carga por unidade de comprimento da viga, enquanto a equação (6.68b) tem dimensão de momento por unidade de comprimento. Por misturarem termos de flexão e cisalhamento, elas não permitem uma interpretação física imediata. Com a simplificação a ser introduzida a seguir, poderemos interpretar melhor estes resultados.

É interessante observar que este é um problema com dois graus de liberdade. Os resultados apresentados aqui foram obtidos usando-se como incógnitas do problema o deslocamento lateral y e o ângulo de rotação em flexão ψ . Existem como alternativas usar os conjuntos (y, β) e (ψ, β) como graus de liberdade do problema, fazendo uso da relação (6.61) para estabelecer relações entre as incógnitas. Tais opções são deixadas como exercício para o leitor.

6.5.2 Vigas de Propriedades Uniformes

No sentido de permitir uma interpretação física mais clara da inclusão do efeito de cisalhamento na teoria de vigas, vamos aqui fazer uma simplificação, admitindo que a viga possua propriedades constantes ao longo de seu comprimento. Neste caso, as equações (6.68a) e (6.68b) reduzem-se respectivamente a

$$f G A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q = 0 \quad (6.69a)$$

$$E I \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f G A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - k^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (6.69b)$$

De (6.69a) obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{f G A} \left(q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (6.70)$$

Se diferenciarmos a equação (6.69b) em relação a x , substituirmos o resultado obtido na equação (6.69a) e usarmos a relação (6.70) para eliminar derivadas de ψ , obtemos a seguinte equação diferencial parcial onde y é o único grau de liberdade utilizado para descrever a dinâmica da viga:

$$\begin{aligned} E I \left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{f G A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \right] - q + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ - k^2 m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{f G A} \left(q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.71)$$

Uma interpretação física agora torna-se mais clara se desmembrarmos os termos da equação (6.71) como segue:

- termos presentes na teoria de viga de Euler-Bernoulli (6.46)

$$E I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q$$

- termo de inércia de rotação

$$- k^2 m \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2}$$

- termo de acoplamento entre flexão e cisalhamento

$$+ \frac{E I}{f G A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

- e termo de acoplamento entre cisalhamento e inércia de rotação.

$$- \frac{k^2 m}{f G A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

Em resumo, a teoria de vigas de Timoshenko para aplicações dinâmicas incorpora efeitos de cisalhamento e de inércia de rotação que não estão presentes na teoria de Euler-Bernoulli. É óbvio que para aplicações simples ou para uma primeira avaliação em termos de anteprojeto, a teoria de Euler-Bernoulli deve satisfazer plenamente. No entanto, para aplicações mais sofisticadas, em termos de projeto detalhado, talvez o analista deva utilizar a teoria de Timoshenko para pelo menos avaliar a importância dos efeitos citados no comportamento da estrutura. É dentro dessa idéia que tal assunto foi incorporado neste texto.

Existem teorias de viga ainda mais sofisticadas. Em Engenharia Aeronáutica é corrente o uso em análises estruturais da teoria de Vlasov, a qual incorpora efeitos de deformação fora do plano original das seções transversais. Este efeito, denominado retorção, é particularmente importante em vigas de seção transversal aberta. O efeito pode ser incorporado à análise pela consideração da energia que lhe é associada.

Os problemas analisados aqui até agora envolvem estruturas unidimensionais. Para tornar o nosso estudo mais completo, vamos agora considerar um problema de caráter bidimensional, em que as variáveis de interesse dependem de duas coordenadas espaciais.

6.6 Vibrações de Placas

O problema de vibrações de placas é muito importante em engenharia. Tais estruturas resistem de maneira ótima a cargas em tração, propiciando o máximo de resistência por unidade de peso. Estas estruturas são bidimensionais e podem ser empregadas em diversas formas. Em termos de geometria, podem ser retangulares, elípticas, etc. Em termos de carregamento, podem suportar cargas no plano e ortogonal ao seu plano, embora sejam mais eficientes no primeiro caso. Em termos de materiais, podem ser manufaturadas em material uniforme, isotrópico, ou em lâminas de material conjugado, anisotrópico. Em termos de montagem, podem ser rebitadas ou coladas em seus bordos, podendo ainda receber reforçadores sobre suas superfícies, formando os chamados painéis. Em termos dinâmicos, estas estruturas podem apresentar como novidade o fato de permitirem a coincidência de frequências com modos de vibração diferentes.

Dada a complexidade do problema e o caráter introdutório deste texto, vamos aqui analisar um caso extremamente simples e prático: o de placas quadradas uniformes, constituídas de material homogêneo e isotrópico, sujeitas a carregamento lateral. Após este estudo, o leitor terá condições de examinar por si próprio, com o auxílio da literatura indicada, problemas mais avançados.

6.6.1 Definição do Problema

A Figura 6.3 mostra uma placa plana de seção transversal constante h submetida a um carregamento perpendicular distribuído $P(x, y, t)$ por unidade de área. Sob ação dessa carga de “pressão” dinâmica, cada elemento da placa sofre um deslocamento na direção z , que denotaremos por $w(x, y, t)$. Este deslocamento é medido a partir da posição não-deformada da placa, que também define um referencial inercial para o sistema.

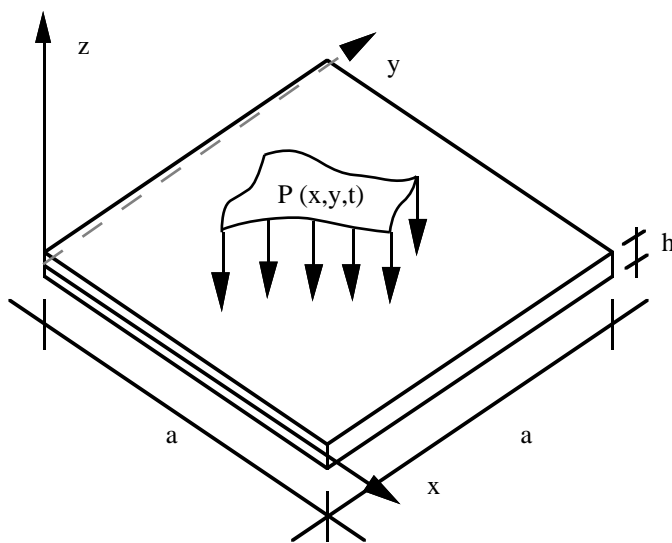


Figura 6.3: Placa quadrada em solitação lateral dinâmica.

A placa é suposta por simplicidade ser quadrada, de comprimento não-deformado lateral a , ter uma massa específica constante ρ e ser feita de um material uniforme, de módulo de Young E e coeficiente de Poisson ν . Trata-se, portanto, de uma estrutura bidimensional, em que as propriedades de interesse da placa variam ao longo das direções x e y . Vamos considerar o caso ideal em que nos interessam apenas deformações ortogonais ao plano x, y em resposta à excitação externa. Utilizamos aqui as hipóteses tradicionais da teoria de placas de Kirchhoff-Love que pode ser encontrada em livros clássicos da área.

Como objetivos a atingir nesta seção, pretendemos utilizar o Princípio de Hamilton para obter a equação de movimento do sistema e fazer uma análise preliminar do comportamento da placa em vibrações livres e forçadas.

6.6.2 Aplicação do Princípio de Hamilton

O Princípio de Hamilton, conforme discutido neste capítulo, é dado por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + \mathcal{W}) dt = 0 \quad (6.72)$$

Para utilizá-lo, necessitamos conhecer as energias cinética e potencial elástica do sistema, assim como o trabalho realizado pelos esforços externos que não possam ser potencializados.

A energia cinética do sistema é dada por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_S \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dS \quad (6.73)$$

onde dS é um elemento de área da superfície média da placa, suposta ser coplanar com o plano (x, y) na condição não-deformada. Por sua vez, a energia potencial elástica da placa pode ser expressa como

$$\mathcal{U} = \frac{D}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dS \quad (6.74)$$

onde

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

é a rigidez da placa em flexão. Finalmente, o trabalho da carga distribuída e não-seguidora (suposta atuar sempre na direção contrária à do eixo z , apesar da deformação) é descrito simplesmente por

$$\mathcal{W} = - \int_S P w dS \quad (6.75)$$

Se substituirmos as energias (6.73) e (6.74) e o trabalho (6.75) no Princípio de Hamilton (6.72), ficamos com um problema interessante de um único campo, mas com três variáveis independentes. Se efetuarmos a variação do deslocamento lateral w da placa, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho h \int_S \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dS - D \int_S \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right] dS \right. \\ \left. - \int_S P \delta w dS \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (6.76)$$

Este resultado (6.76) tem cinco termos para serem integrados, sendo um em relação ao tempo e quatro em relação a coordenadas espaciais x e y . A integração do único termo temporal fornece

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dt = \left[\frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \quad (6.77a)$$

Como, por definição, as condições iniciais e finais do sistema são prescritas, então

$$\delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0$$

e o resultado (6.77a) reduz-se para

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \quad (6.77b)$$

Já a primeira integração espacial em x produz o seguinte resultado:

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dS + \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right]_0^a \right\} dy \quad (6.78a)$$

A integral em y no lado direito de (6.78a) é identicamente nula, pois envolve condições de contorno que desaparecem quaisquer que sejam os apoios nos bordos $x = 0$ ou $x = a$. Senão, vejamos as seguintes três possibilidades:

1. se o apoio for livre, então duas condições de contorno naturais são aplicáveis:

- momento fletor nulo, isto é, $D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ e
- cisalhamento nulo, isto é $D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$

2. se o apoio for simples, então são aplicáveis uma condição natural e uma geométrica:

- momento fletor nulo, isto é, $D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ e
- deslocamento lateral nulo, isto é $\delta w = 0$

3. finalmente, se o apoio for de engaste, então são aplicáveis duas condições de contorno geométricas:

- ângulo de engastamento prescrito, isto é, $\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0$ e
- deslocamento lateral nulo, isto é $\delta w = 0$

Observe que em quaisquer dessas possibilidades os termos do integrando da integral em y são nulos. Portanto, a integral (6.78a) reduz-se a

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dS \quad (6.78b)$$

De maneira similar, a segunda integral espacial em (6.76) fornece

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dS + \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right]_0^a - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \delta w \right]_0^a \right\} dy \quad (6.79a)$$

Se aplicarmos as condições de contorno naturais e/ou geométricas do problema, este resultado reduz-se para

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dS \quad (6.79b)$$

A terceira integral espacial em (6.76) fornece

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dS + \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^a - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \delta w \right]_0^a \right\} dx \quad (6.80a)$$

Desta vez a segunda integral neste resultado é ao longo da direção x . Se aplicarmos as condições de contorno nos bordos $y = 0$ e $y = a$, quaisquer que sejam os tipos de apoio, verificamos que os termos do integrando são nulos. Portanto, a integral (6.80a) fica simplificada a

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dS \quad (6.80b)$$

De maneira similar, a quarta e última integral espacial em (6.76) fornece

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dS + \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right]_0^a - \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \delta w \right]_0^a \right\} dx \quad (6.81a)$$

Após terem sido aplicadas as condições de contorno adequadas ao problema, este resultado fica simplificado para

$$\int_S \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dS = \int_S \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dS \quad (6.81b)$$

Se substituirmos os resultados (6.77), (6.78b), (6.79b), (6.80b) e (6.81b) no Princípio de Hamilton (6.76), obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_S \left[\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w + P \right] \delta w \, dS \right\} dt = 0 \quad (6.82)$$

onde

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

é o operador diferencial biarmônico (Laplaciano do Laplaciano) aplicado ao deslocamento lateral $w(x, y, t)$ da placa na direção z . Como a variação do deslocamento lateral δw é arbitrária, para que o resultado (6.82) se verifique, temos que admitir que o integrando entre colchetes é nulo. Assim, ficamos com

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P = 0 \quad (6.83)$$

Esta equação diferencial parcial que descreve o movimento lateral da placa tem um termo de origem estrutural, um outro termo de origem inercial e, finalmente, um termo devido ao carregamento externo aplicado à placa.

6.6.3 Vibrações Livres

Vamos agora considerar o problema de vibrações livres da placa da Figura 6.3. Nestas condições, $P(x, y, t) = 0$ e a equação de movimento (6.83) reduz-se a

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.84)$$

Se admitirmos uma solução do tipo

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos \omega t \quad (6.85)$$

onde $W(x, y)$ é a forma espacial de deslocamento e ω é a frequência natural de vibração da resposta, estamos impondo uma separação das variáveis espaciais e temporal. A substituição desta solução na equação de movimento (6.84) permite obter

$$\nabla^4 W - \lambda^4 W = 0 \quad (6.86)$$

onde

$$\lambda = \left[\frac{\rho h}{D} \omega^2 \right]^{1/4} \quad (6.87)$$

é um parâmetro que sintetiza as propriedades elásticas e inerciais da placa.

Vamos agora admitir, a título de exercício, que a placa da Figura 6.3 é simplesmente apoiada em todos os seus bordos. Devemos, então, aplicar as seguintes condições de contorno:

- naturais

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a, y) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x, a) = 0$$

- e geométricas

$$W(0, y) = W(a, y) = W(x, 0) = W(x, a) = 0$$

Note que a equação diferencial (6.86), sendo de quarta ordem em duas variáveis espaciais independentes, admite 8 condições de contorno. Assim, sua solução pode ser colocada na forma

$$W(x, y) = A_{rs} \operatorname{sen} \left(r \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(s \pi \frac{y}{a} \right) \quad (6.88)$$

A aplicação da solução (6.88) à equação diferencial (6.86) fornece o seguinte problema de auto-valor

$$\left[\left(\frac{r \pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{r \pi}{a} \right)^2 \left(\frac{s \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{s \pi}{a} \right)^4 - \lambda^4 \right] W(x, y) = 0$$

Para que não tenhamos apenas soluções triviais, temos que admitir que o colchete nesta equação é nulo. Assim, obtemos

$$\left(\frac{r \pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{r \pi}{a} \right)^2 \left(\frac{s \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{s \pi}{a} \right)^4 - \lambda^4 = 0 \quad (6.89)$$

Existem infinitas combinações de pares (r, s) que permitem verificar esta condição. Para cada par (r, s) temos um modo de vibração da placa definido, a menos da amplitude A_{rs} , pela solução (6.88) adotada.

A Tabela 1 a seguir fornece diversos valores de λ que conduzem à frequência natural de vibração ω da placa através da relação (6.87). Note que, no caso particular da placa quadrada, existem infinitas frequências naturais de vibração que são coincidentes (observe a simetria da tabela). O fato de apresentar frequências naturais coincidentes é característico dessas estruturas, o que poderá ser um fato novo para o leitor.

Tabela 1 - Valores de λ que satisfazem à equação (6.89) para $a = 1$

r, s	1	2	3	4	5
1	4,443	7,025	9,935	12,953	16,019
2	7,025	8,886	11,327	14,050	16,918
3	9,935	11,327	13,329	15,708	18,318
4	12,953	14,050	15,708	17,772	20,116
5	16,019	16,918	18,318	20,116	22,214

A definição completa dos modos de vibração deste sistema pode ser obtida com uma regra de ortonormalização dos modos. Conforme adotado para a dinâmica de vigas, podemos utilizar para a placa a mesma regra de normalização pela massa do sistema. Assim,

$$\int_S \rho h W_r W_s dS = \delta_{rs} \quad (6.90)$$

Esta medida permite determinar o coeficiente A_{rs} dos auto-vetores (6.88).

6.6.4 Vibrações Forçadas

Uma vez conhecido o comportamento da placa da Figura 6.3 em vibração livre, temos em mãos os elementos analíticos para realizar um estudo do mesmo sistema em caso de vibrações forçadas. Aqui vamos mais uma vez fazer uso do método de Galerkin para obter a resposta desejada. Este método vai permitir transformar uma equação diferencial parcial com três variáveis independentes (x, y, t) em um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo. A resolução deste sistema de equações permitirá obter as respostas desejadas.

Se retornarmos à equação (6.83) com uma dada carga lateral distribuída $P(x, y, t)$ não-nula, podemos agora adotar como possível solução para o deslocamento $w(x, y, t)$ uma série dupla na forma

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}(t) \operatorname{sen} \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(j \pi \frac{y}{a} \right) \quad (6.91)$$

inspirada nos modos de vibração livre desta estrutura. Esta solução aproximada possui $m \times n$ incógnitas $A_{ij}(t)$. Se substituirmos esta solução na equação (6.83), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ D A_{ij} \left[\left(\frac{i \pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{i \pi}{a} \right)^2 \left(\frac{j \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{j \pi}{a} \right)^4 \right] \operatorname{sen} \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(j \pi \frac{y}{a} \right) \right. \\ \left. + \rho h \ddot{A}_{ij} \operatorname{sen} \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(j \pi \frac{y}{a} \right) \right\} + P = 0 \end{aligned} \quad (6.92)$$

Dentro da estrutura formal do método de Galerkin, como veremos a seguir neste capítulo, o lado direito da equação (6.92) não é exatamente igual a zero, mas equivale a um resíduo que pretendemos minimizar. Para tanto, vamos multiplicar este resultado por um determinado modo de vibração como

$$W(x, y) = \operatorname{sen} \left(k \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(l \pi \frac{y}{a} \right) \quad (6.93)$$

com

$$1 \leq k \leq m \quad \text{e} \quad 1 \leq l \leq n$$

Como resultado desta multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ D A_{ij} \left[\left(\frac{i \pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{i \pi}{a} \right)^2 \left(\frac{j \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{j \pi}{a} \right)^4 \right] \right. \\ \cdot \operatorname{sen} \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(j \pi \frac{y}{a} \right) \operatorname{sen} \left(k \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(l \pi \frac{y}{a} \right) \\ \left. + \rho h \ddot{A}_{ij} \operatorname{sen} \left(i \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(j \pi \frac{y}{a} \right) \operatorname{sen} \left(k \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(l \pi \frac{y}{a} \right) \right\} \\ + P \operatorname{sen} \left(k \pi \frac{x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(l \pi \frac{y}{a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.94)$$

Podemos agora integrar este produto sobre a superfície da placa (domínio matemático do problema). Como existem certas propriedades de ortogonalidade entre os modos de vibração ao longo das direções x e y , dependendo se $i = k$ ou $i \neq k$ e se $j = l$ ou $j \neq l$, muitas das integrais requeridas neste processo são nulas. O mais importante de tudo é que, como resultado, eliminamos a dependência espacial do problema e ficamos com uma equação diferencial ordinária em relação ao tempo.

Podemos repetir o procedimento detalhado anteriormente para os demais $(m \times n - 1)$ modos de vibração (6.93). Assim, ficamos com $m \times n$ equações diferenciais ordinárias para as correspondentes $m \times n$ incógnitas A_{ij} na análise do problema de vibração forçada (6.83). Essas equações podem ser apresentadas de forma sintética como

$$[\mathcal{M}] \{ \ddot{A} \} + [\mathcal{K}] \{ A \} = \{ \mathcal{P}(t) \} \quad (6.95)$$

Dependendo das propriedades da placa e dos modos de vibração utilizados na solução (6.91), as matrizes $[\mathcal{M}]$ e $[\mathcal{K}]$ podem ser mais ou menos populadas. No caso da placa quadrada uniforme

com os seus modos de vibração exatos, essas matrizes são diagonais. O desacoplamento resultante permite tratar cada um dos $m \times n$ problemas individualmente, como se retornássemos ao Capítulo 4 deste texto para uma particular coordenada generalizada A_{ij} . Caso contrário, a solução do sistema (6.95) vai requerer um procedimento numérico, como aqueles que serão discutidos na próxima seção.

No caso particular que estamos tratando, em que os modos de vibração são os exatos da placa quadrada, obtemos os seguintes componentes das matrizes e vetores envolvidos:

$$\mathcal{M}_{ijkl} = \int_S \rho h \sin\left(i\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(j\pi \frac{y}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(l\pi \frac{y}{a}\right) dS$$

$$\mathcal{K}_{ijkl} = \int_S D \left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a}\right)^4 \right] \cdot \sin\left(i\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(j\pi \frac{y}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(l\pi \frac{y}{a}\right) dS$$

e

$$\mathcal{P}_{kl}(t) = - \int_S P(x, y, t) \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(l\pi \frac{y}{a}\right) dS$$

Neste caso particular, tanto \mathcal{M}_{ijkl} quanto \mathcal{K}_{ijkl} são quantias escalares que resultam quando $i = k$ e $j = l$. Assim, a equação (6.95) representa, na realidade, $(m \times n)$ equações diferenciais ordinárias desacopladas para os coeficientes A_{ij} .

A solução aqui apontada deve convergir ao aumentarmos o número de termos da série (6.91), seja na direção x ou na direção y . Porém, lembre-se que o número de coordenadas generalizadas do problema é o produto do número de modos adotados para cada direção cartesiana. Além disso, dependendo das características próprias da excitação externa $P(x, y, t)$, muitos serão os modos requeridos para descrever o seu espectro espacial e capturar todos os seus detalhes. Assim, é comum termos que trabalhar com sistemas lineares de grande dimensão quando estivermos analisando vibrações de placas e cascas.

6.7 Métodos Numéricos

Dos métodos numéricos utilizados no tratamento da dinâmica de sistemas contínuos destacamos duas classes: os chamados métodos de Galerkin e métodos de integração direta. Os primeiros são necessários para transformar, via técnica modal, equações diferenciais parciais de movimento em equações diferenciais ordinárias. Como tais equações ordinárias não são necessariamente desacopladas, resta como opção de resolução algum método de integração direta. Após o emprego dessa integração, o analista terá em mãos a resposta da estrutura, permitindo-lhe extrair as conclusões desejadas sobre a dinâmica da estrutura. Portanto, esta seção não tem a pretensão de esgotar o assunto, mas restringir a exposição ao mínimo exigido para uma compreensão básica dos fenômenos envolvidos e de seus métodos de solução.

6.7.1 Métodos de Galerkin

Os chamados *métodos de Galerkin* são casos particulares dos chamados *métodos dos resíduos ponderados*. Prestam-se à resolução de equações diferenciais parciais e ordinárias. Para compreendermos a filosofia desses métodos, vamos aqui fazer uma abordagem elementar da teoria que suporta o funcionamento dos mesmos no que se refere à resolução de problemas de Dinâmica Estrutural.

Suponha que uma equação diferencial parcial possa ser escrita na forma

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad (6.96)$$

onde \mathcal{L} é um operador diferencial parcial unidimensional e $u(x, t)$ é uma função do espaço no domínio limitado $0 \leq x \leq l$ e do tempo no domínio aberto $0 \leq t$ que se deseja conhecer. O problema completa-se com as condições de contorno e iniciais necessárias.

Suponha agora que tenhamos uma *solução aproximada* para $u(x, t)$ na forma de uma expansão em série da forma

$$u_a(x, t) = \sum_{i=1}^n U_i(x) q_i(t) \quad (6.97)$$

onde cada termo $U_i(x)$ obedece às condições de contorno geométricas do problema e que exista entre dois termos diferentes $U_i(x)$ e $U_j(x)$ alguma propriedade de ortogonalidade.

Dentro desse quadro, se substituirmos a solução aproximada (6.97) na equação diferencial (6.96), não obtemos zero no lado direito, mas sim um resíduo \mathcal{R} , isto é

$$\mathcal{L}(u_a) = \mathcal{R} \quad (6.98)$$

Se multiplicarmos ambos os lados desta equação por $U_i(x)$, integrarmos o resultado no domínio espacial e forcarmos com que esta integral seja nula, ficamos com

$$\int_0^l U_i \mathcal{L}(u_a) dx = \int_0^l U_i \mathcal{R} dx = 0 \quad (6.99)$$

Este procedimento é matematicamente equivalente a fazer o resíduo \mathcal{R} ortogonal ao termo $U_i(x)$ da expansão em série (6.97). A integração faz com que a variável independente x desapareça do problema, transformando a equação diferencial parcial em ordinária (apenas no tempo). A repetição desse procedimento n vezes com $U_i(x)$ $i = 1, \dots, n$ produz n equações diferenciais ordinárias em $q_i(t)$. Após resolução desse sistema de equações diferenciais ordinárias, a solução aproximada $u_a(x, t)$ pode ser reconstruída conforme a sua definição (6.97).

As integrais a serem efetuadas neste processo são bastante facilitadas se houver, como apontado anteriormente, alguma propriedade de ortogonalidade entre diferentes termos da série. Isto é exatamente o que acontece quando são empregados modos de vibração de estruturas para os termos $U_i(x)$ da série (6.97).

A filosofia do método pode agora ser resumida da seguinte forma: tomada uma série com n termos, o método produzirá o melhor conjunto de n equações diferenciais ordinárias no sentido de minimizar o resíduo \mathcal{R} e maximizar a aproximação da solução aproximada $u_a(x, t)$ da solução exata $u(x, t)$. Teoricamente, $u_a(x, t)$ coincide com $u(x, t)$ no limite em que n tender a infinito. Note que esta otimização é feita simultaneamente para todo o domínio do problema, sendo indicada para casos em que se queira uma solução global, como é o caso de estruturas.

Se aplicada para equações diferenciais ordinárias, a técnica de Galerkin produz equações algébricas de mais fácil solução. Além disso, a discussão aqui apresentada pode ser generalizada para contextos mais complexos, como o de estruturas bidimensionais (e.g., placas) e tridimensionais (cascas). O leitor poderá exercitar estas e outras oportunidades para aprofundamento do assunto.

Assim, os métodos de Galerkin são métodos numéricos que otimizam a solução de equações diferenciais. São normalmente empregados para expansões em série do domínio espacial, mas não está descartada a aplicação de expansão em termos dependentes do tempo. Esses métodos são bastante empregados no estudo da dinâmica de estruturas modeladas como sistemas contínuos. Esses métodos foram utilizados informalmente no decorrer deste capítulo, com todos os detalhes, de forma que não se fazem necessárias outras aplicações nesta seção.

6.7.2 Métodos de Integração Direta

Quando estudamos neste capítulo a vibração forçada de estruturas contínuas, vimos que o uso de modos de vibração da própria estrutura em uma solução do tipo Galerkin produz um sistema de n equações diferenciais ordinárias desacopladas, isto é, de um único grau de liberdade. Neste caso, cada equação pode ser resolvida independentemente, de acordo com o que foi discutido no Capítulo 4. No entanto, este é um caso particular, pois nem sempre estão disponíveis os modos de vibração exatos da mesma estrutura para a resolução de sua dinâmica. A regra geral é aquela em que modos de vibração aproximados, de estruturas com propriedades uniformes, são utilizados para resolver uma estrutura mais complexa, de propriedades variáveis. Neste caso as n equações diferenciais ordinárias não se desacoplam e faz-se necessário empregar um método de integração direta para obter-se a resposta estrutural.

O problema matemático a ser resolvido é dado por

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (6.100)$$

com condições iniciais

$$\{x(t=0)\} = \{x_o\} \quad \text{e} \quad \{\dot{x}(t=0)\} = \{v_o\} \quad (6.101)$$

Para a resolução deste problema existem inúmeros métodos numéricos. Todos utilizam as informações dadas nas equações (6.100) e (6.101) para obter a evolução da resposta do sistema para instantes de tempo $t > 0$. Em geral, esses métodos dividem-se em dois grupos:

- *Métodos explícitos* - são aqueles que utilizam informação do passado e do presente para obter informação futura. São os de mais fácil implementação computacional. No entanto, podem apresentar problemas de precisão e de instabilidade numérica, dependendo do intervalo de tempo Δt de integração utilizado. Este intervalo deve ser escolhido de forma a atender requisitos de estabilidade e a capturar os efeitos significativos que resultam de componentes de alta frequência do movimento.
- *Métodos implícitos* - são aqueles que utilizam informação do passado, do presente e do futuro para fornecer informação futura. São os de mais difícil implementação computacional, pois podem requerer a inversão de matrizes em cada passo de execução. No entanto, podem ser incondicionalmente estáveis, o que permite o uso de intervalos de tempo de integração maiores que aqueles praticados nos métodos explícitos.

Para que o leitor possa compreender como funcionam tais métodos, vamos aqui comentar especificamente sobre um método explícito e um método implícito. No primeiro caso (explícito), escolhemos uma técnica de diferença central. No segundo caso, escolhemos a família Newmark de métodos implícitos. Para informações mais detalhadas sobre estes e outros métodos de integração, o leitor pode referir-se à bibliografia disposta no final deste capítulo.

Métodos de Diferença Central de Segunda Ordem

Se fizermos as expansões em série de Taylor do vetor deslocamento para os instantes de tempo $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$, a partir do instante t , ficamos com

$$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{\dot{x}\}_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\ddot{x}\}_t + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (6.102)$$

e

$$\{x\}_{t-\Delta t} = \{x\}_t - \Delta t \{\dot{x}\}_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\ddot{x}\}_t - \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (6.103)$$

Se retivermos nessas expansões os termos até segunda ordem em Δt , teremos erros da ordem $(\Delta t)^2$. Assim, a redução do intervalo de integração pela metade implica reduzir o erro a um quarto.

Se ignorarmos os termos de ordem $(\Delta t)^3$, a subtração da expansão (6.103) da expansão (6.102) fornece, após uma manipulação algébrica simples, uma aproximação para o vetor velocidade no instante de tempo t , isto é

$$\{\dot{x}\}_t = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_{t-\Delta t} \right\} \quad (6.104)$$

De maneira similar, a adição das expansões (6.102) e (6.103) fornece uma estimativa para o vetor aceleração no instante de tempo t , qual seja

$$\{\ddot{x}\}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - 2\{x\}_t + \{x\}_{t-\Delta t} \right\} \quad (6.105)$$

A substituição das aproximações (6.104) e (6.105) na equação diferencial ordinária de movimento (6.100) permite, então, eliminar as derivadas temporais, transformando-se em uma equação de diferenças, isto é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta t)^2} [M] \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - 2\{x\}_t + \{x\}_{t-\Delta t} \right\} \\ & + \frac{1}{2\Delta t} [C] \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_{t-\Delta t} \right\} + [K] \{x\}_t = \{F\}_t \end{aligned} \quad (6.106)$$

Deste resultado, podemos isolar o vetor deslocamento $\{x\}$ no instante futuro $t + \Delta t$ como sendo dado por

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [R]^{-1} \left\{ \{F\}_t - [S] \{x\}_t - [T] \{x\}_{t-\Delta t} \right\} \quad (6.107)$$

onde

$$\begin{aligned} [R] &= \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \\ [S] &= \left[[K] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] \right] \\ [T] &= \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \end{aligned}$$

Note que, para um dado intervalo de integração Δt , as matrizes $[R]$, $[S]$ e $[T]$ são constantes, de forma que a inversa da matriz $[R]$ é calculada uma única vez, sendo armazenada na memória do computador.

Para inicializar os cálculos, podemos utilizar as condições iniciais (6.101) do sistema para obter o vetor aceleração $\{\ddot{x}\}$ no instante $t = 0$ a partir da própria equação de movimento (6.100) do sistema, isto é

$$\{\ddot{x}(t=0)\} = \{a_o\} = [M]^{-1} \left\{ \{F(t=0)\} - [C] \{v_o\} - [K] \{x_o\} \right\} \quad (6.108)$$

Com este resultado, podemos calcular a posição fictícia do sistema no instante $t = -\Delta t$ através da expansão (6.103) até o termo de segunda ordem como sendo

$$\{x\}_{-\Delta t} = \{x_o\} - \Delta t \{v_o\} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{a_o\} \quad (6.109)$$

Com os elementos obtidos acima, o algoritmo deste método de integração direta pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Sendo conhecidas as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$, os vetores $\{F(t)\}$, $\{x_o\}$ e $\{v_o\}$ e o intervalo de integração Δt , calcule
 - a matriz $[M]^{-1}$;
 - o vetor aceleração inicial $\{a_o\}$ através da equação (6.108);
 - o vetor deslocamento $\{x\}_{-\Delta t}$ através da equação (6.109); e
 - as matrizes $[R]$, $[R]^{-1}$, $[S]$ e $[T]$ definidas anteriormente.
2. Obtenha o vetor deslocamento $\{x\}$ no instante $t + \Delta t$ utilizando a equação (6.107).
3. Caso seja de interesse e tenha-se avançado pelo menos dois passos de integração, calcule os vetores velocidade e aceleração no instante anterior através das equações (6.104) e (6.105), respectivamente.
4. Caso o instante final de interesse não tenha sido atingido, avance um intervalo de integração Δt , faça uma atualização dos vetores de deslocamentos e retorne ao passo 2.
5. Caso o instante final de interesse tenha sido atingido, pare os cálculos e disponibilize os resultados obtidos.

Note que o algoritmo é bastante simples. A inversão das matrizes $[M]$ e $[R]$ é feita uma única vez, quando estamos inicializando o processo no passo 1. Os demais passos envolvem apenas multiplicações de matrizes constantes por vetores e adições de vetores. Note também que o erro do método é de segunda ordem em Δt e que o título *central* aparece do fato de utilizarmos para cômputo da situação do sistema no instante t informação equilibrada entre o instante futuro $t + \Delta t$ e o instante passado $t - \Delta t$. Fica como exercício para o leitor explorar os detalhes desta família de métodos, particularmente no que se refere aos possíveis processos de inversão das matrizes. O leitor também fica convidado a explorar outros métodos de diferenças finitas que constam da literatura especializada.

Métodos da Família Newmark

Estes são os métodos implícitos de integração mais utilizados atualmente. Tais métodos são baseados nas duas hipóteses seguintes:

- $$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{x}\}_t + \Delta t \left\{ (1 - \gamma) \{\ddot{x}\}_t + \gamma \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \right\} \quad (6.110)$$

- $$\{x\}_{t+\Delta t} = \{x\}_t + \Delta t \{\dot{x}\}_t + (\Delta t)^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{x}\}_t + \beta \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} \right\} \quad (6.111)$$

onde os parâmetros β e γ são constantes reais, normalmente no intervalo $[0, 1]$. Como são infinitas as combinações possíveis desses parâmetros, fica caracterizada a existência de uma família de métodos. Por exemplo, o próprio Newmark propôs trabalhar com $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$. Nesse caso a aceleração durante o intervalo de integração é suposta ser constante e igual à média entre os extremos do intervalo. Uma outra opção consiste em fazer $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$, que corresponde a considerar a aceleração linear durante o intervalo de integração. Pode-se provar que o método é incondicionalmente estável se

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{(2\gamma + 1)^2}{16}$$

Além das hipóteses expressas pelas equações (6.110) e (6.111), o método considera a equação de movimento do sistema no instante $t + \Delta t$, isto é

$$[M] \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} + [K] \{x\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (6.112)$$

As equações (6.110), (6.111) e (6.112) podem agora ser utilizadas para resolver as suas três incógnitas: os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no instante $t + \Delta t$. Um bom caminho para isto consiste em

- extrair o vetor aceleração da equação (6.111)

$$\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{(\Delta t)^2} \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t - \Delta t \{\dot{x}\}_t \right\} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{x}\}_t \right\} \quad (6.113)$$

- substituir o vetor aceleração recém-obtido na equação (6.110)

$$\{\dot{x}\}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \{\dot{x}\}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \{\ddot{x}\}_t + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t \right\} \quad (6.114)$$

- e substituir as equações (6.113) e (6.114) na equação de movimento (6.112)

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [\bar{K}]^{-1} \left\{ \{F\}_{t+\Delta t} + [R] \{x\}_t + [S] \{\dot{x}\}_t + [T] \{\ddot{x}\}_t \right\} \quad (6.115)$$

onde

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= \left[[K] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} [M] \right] \\ [R] &= \left[\frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C] + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} [M] \right] \\ [S] &= \left[\left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) [C] + \frac{1}{\beta \Delta t} [M] \right] \\ [T] &= \left[\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t [C] + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) [M] \right] \end{aligned}$$

O algoritmo do método prevê os seguintes passos:

1. Sendo conhecidas as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$, os vetores $\{F(t)\}$, $\{x_o\}$ e $\{v_o\}$, o intervalo de integração Δt e os parâmetros β e γ , calcule
 - o vetor aceleração inicial $\{a_o\}$ através da equação (6.108); e
 - as matrizes $[\bar{K}]$, $[\bar{K}]^{-1}$, $[R]$, $[S]$ e $[T]$ definidas anteriormente.
2. Calcule o vetor deslocamento no próximo intervalo de tempo através da equação (6.115).
3. Com o conhecimento obtido no passo anterior, utilize as equações (6.113) e (6.114) para calcular os vetores aceleração e velocidade, respectivamente, no mesmo instante de tempo.
4. Caso o instante final de interesse não tenha sido atingido, avance um intervalo de integração Δt e retorne ao passo 2.
5. Caso o instante final de interesse tenha sido atingido, pare os cálculos e disponibilize os resultados obtidos.

Se compararmos os dois métodos apresentados aqui, podemos apresentar os seguintes comentários:

- O método de diferenças centrais é de inicialização um pouco mais difícil, por requerer o cálculo de uma inversão e de um vetor a mais.
- O método de Newmark requer mais memória por necessitar armazenar uma matriz e um vetor a mais por iteração com relação ao método de diferenças.
- Enquanto o cálculo dos vetores velocidade e aceleração em cada passo é opcional para o método de diferenças centrais, ele é compulsório para o método de Newmark. Portanto, o número de operações por passo de integração é maior no segundo caso.

Com o contínuo aperfeiçoamento dos recursos computacionais em termos de memória e de velocidade, existe uma tendência a favorecer mais métodos explícitos com Δt pequeno que métodos implícitos, o que permite capturar efeitos de alta frequência e evitar problemas de estabilidade numérica. Desta forma, apesar desta opção provocar um aumento significativo no número de passos de integração, isto pode ser compensado pela maior simplicidade dos métodos e maior rapidez de cálculo das plataformas.

6.8 Conclusões

Neste capítulo o leitor foi apresentado ao estudo da dinâmica de estruturas modeladas segundo entes contínuos, de propriedades distribuídas. Isto vem de contraste aos assuntos discutidos nos capítulos anteriores, onde as estruturas foram modeladas segundo entes discretos, com propriedades concentradas em pontos de interesse para a análise. Neste contexto, o leitor foi submetido a problemas matemáticos de maior complexidade, por envolverem equações de movimento do tipo diferencial parcial. No entanto, após transformação dessas equações em diferenciais ordinárias via métodos do tipo de Galerkin, o leitor pôde observar que na seqüência de resolução foram empregadas técnicas já conhecidas para a dinâmica de estruturas modeladas de forma discreta.

Para fundamentar a discussão e o trato de estruturas contínuas, foram aqui estudados os problemas de barras carregadas axial e torcionalmente, vigas carregadas em flexão e placas com cargas ortogonais aos seus planos. Finalmente, foram formalmente apresentados métodos numéricos relevantes para este estudo, notadamente técnicas do tipo de Galerkin e métodos de integração direta das equações diferenciais ordinárias em forma matricial.

Com este estudo, que conclui este texto, o leitor pôde ter um contato com os problemas fundamentais de dinâmica estrutural linear. Foram revisados conceitos de Mecânica Analítica, de sistemas discretos de um e vários graus de liberdade, de sistemas contínuos, de vibrações livres e forçadas, de amortecimento, transmissão e controle de vibrações, e, finalmente, de métodos numéricos adequados para o tratamento desses problemas. De posse desses conhecimentos, o leitor pode considerar-se habilitado para incursões de maior profundidade nos mesmos assuntos tratados, bem como para aventurar-se em novos campos de aplicação correlata, dentre eles, aqueles citados na seção 1.5.

6.9 Bibliografia

Para complementar o estudo das ferramentas matemáticas requeridas neste capítulo, recomendamos a seguir algumas referências úteis sobre cálculo variacional, placas e cascas, métodos

numéricos, métodos de integração direta das equações de movimento de estruturas e métodos de elementos finitos.

Sobre Cálculo Variacional e Aplicações

- KRASNOV, M. L. ET AL. - *Cálculo Variacional*, Editora Mir, Moscou, 1984.
- REDDY, J. N. - *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York, 1984.
- REDDY, J. N. - *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1986.

Sobre Teoria de Placas e Cascas

- DOWELL, E. H. - *Aeroelasticity of Plates and Shells*, Noordhoff International, Leyden, 1975.
- UGURAL, A. C. - *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- SOEDEL, W. - *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker, New York, 1981.

Sobre Métodos Numéricos e de Galerkin

- FLETCHER, C. A. J. - *Computational Galerkin Methods*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- DAVIES, G. A. O. (ED.) - *Mathematical Methods in Engineering*, John Wiley, New York, 1984.
- PRESS, W. H. ET AL. - *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

Sobre Métodos de Integração Numérica

- DAVIS, P. J. E RABINOWITZ, P. - *Methods of Numerical Integration*, 2a. ed., Academic Press, New York, 1984.
- DOKAINISH, M. A. E SUBBARAJ, K. - A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics - I - Explicit Methods, *Computers & Structures*, Vol 32, Nº 6, pp 1371-1386, 1989.
- DOKAINISH, M. A. E SUBBARAJ, K. - A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics - I - Implicit Methods, *Computers & Structures*, Vol 32, Nº 6, pp 1387-1401, 1989.

Sobre o Método de Elementos Finitos e Dinâmica Estrutural

- STRANG, G. E FIX, G. J. - *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- HUEBNER K. H. E THORNTON, E. A. - *The Finite Element Method for Engineers*, 2a. ed., John Wiley, New York, 1982.
- BISMARCK-NASR, M. N. - *Finite Elements in Applied Mechanics*, ITA, São José dos Campos, 1993.

6.10 Exercícios

Neste capítulo foram discutidos os conceitos mais sofisticadas deste texto. A seguir são apresentados alguns exercícios para estimular a compreensão dos temas e propostas estudadas.

Perguntas

1. Considere o problema de vibração em flexão da asa de um avião. Como você faria para fazer um modelamento de 4 graus de liberdade como estrutura unidimensional discreta e contínua. Quais são as conseqüências da adoção de uma opção ou de outra?
2. Por que o Princípio de Hamilton é mais adequado para a tarefa de obtenção de modelos matemáticos de sistemas modelados como estruturas contínuas?
3. No caso de vibrações livres de estruturas contínuas, obtemos um problema de auto-valor com infinitas soluções. A que correspondem cada uma dessas soluções? Quais são as distinções e semelhanças entre elas?
4. Aponte as similaridades existentes entre os problemas de vibração livre e forçada axial e torcional de barras.
5. Compare as teorias de flexão de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, destacando seus pontos comuns e suas diferenças.
6. Faça uma dissertação breve sobre as teorias existentes para tratar os problemas de vibração em flexão de vigas. Considere as hipóteses de Euler-Bernoulli, Timoshenko e Vlasov.
7. Vigas modernas feitas com materiais conjugados requerem análise utilizando teoria de flexão de Timoshenko com efeitos de retorção (teoria de Vlasov). Por que?
8. Que pontos interessantes você pode destacar sobre o problema de vibração livre e forçada de placas?
9. O que é e para que serve o método de Galerkin? Qual foi a aplicação deste método utilizada neste texto?
10. No estudo de vibração forçada de uma estrutura você utilizou modos de vibração aproximados para descrever a resposta espacial da estrutura. O que motivou esta escolha? Quais foram as suas vantagens e conseqüências?
11. O problema matemático

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\}$$

aparece na análise de sistemas discretos e contínuos. Descreva uma técnica de obtenção da resposta usando integração numérica para condições iniciais dadas.

12. Disserte sobre os métodos explícitos e implícitos de integração numérica das equações de movimento, destacando suas semelhanças, formas de implementação e de inicialização.
13. Com respeito à escolha de métodos de integração numérica das equações de movimento de sistemas estruturais, qual é a tendência moderna? Por que?
14. Neste texto vimos circunstâncias onde houve controle passivo ou ativo de vibrações. Aponte essas situações e faça os comentários que julgar pertinentes.

Exercícios Resolvidos

1. A Figura 6.4 mostra uma barra bi-engastada de comprimento l , feita de material de módulo de Young E , com a seguinte distribuição de propriedades de área e de massa:

$$A(x) = A_o \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \quad m(x) = m_o \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

A barra encontra-se carregada axialmente ao longo de seu centróide por

$$p(x, t) = p_o \cos \omega t$$

O valor de p_o é pequeno o suficiente para evitar a flambagem da barra quando no semiciclo de compressão. Para determinarmos a *resposta permanente* do sistema, pede-se que você siga o seguinte roteiro de estudo:

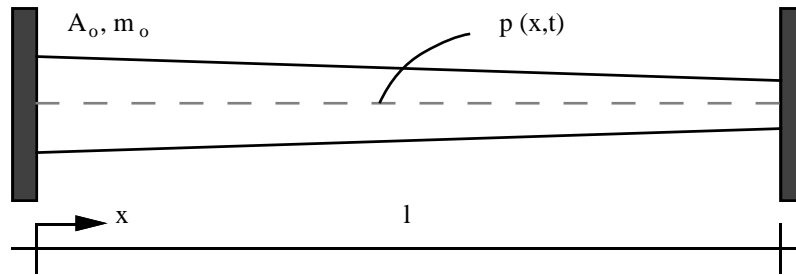


Figura 6.4: Barra de propriedades variáveis ao longo de seu comprimento.

- (a) Qual é a equação diferencial parcial de movimento e quais são as condições de contorno aplicáveis ao sistema?
- (b) Obtenha as três primeiras frequências naturais e modos ortonormais de vibração livre associados do problema acima para as condições de contorno dadas e para propriedades constantes A_o e m_o ao longo da barra.
- (c) Use os resultados do item anterior para expandir $u(x, t)$ em três modos de vibração $U_r(x)$ conhecidos, devidamente ponderados por $q_r(t)$ e, juntamente com o método de Galerkin, obter a equação matricial que fornece a resposta desejada.
- (d) As matrizes obtidas no item anterior são diagonais? Por que? O que você pode fazer para obter a resposta desejada?
- (e) Que diferenças/semelhanças você vê entre a matemática deste problema e a de sistemas discretos já estudada?
- (a) Trata-se de um problema de vibração axial, que foi discutido na seção 6.3 deste capítulo. Portanto, a equação que governa o movimento é dada por (6.19b), i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

a qual considera a possibilidade da barra ter propriedades variáveis ao longo de seu comprimento. Se substituirmos essas propriedades na equação, obtemos

$$E A_o \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{E A_o}{2l} \frac{\partial u}{\partial x} + p - m_o \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (a)$$

As condições de contorno aplicáveis ao problema são $u(0, t) = u(l, t) = 0$, que são condições geométricas herdadas do fato da barra ser engastada nas duas extremidades.

- (b) Se admitirmos que a barra tem propriedades uniformes com $A(x) = A_o$ e $m(x) = m_o$ ao longo de todo o seu comprimento, o problema de vibração livre é essencialmente o mesmo discutido na subseção 6.3.3, com exceção das condições de contorno. Os modos de vibração podem ser extraídos da seguinte solução:

$$U(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

Ao aplicarmos a condição de contorno $U(0) = 0$ ficamos com $C_2 = 0$. Ao aplicarmos a condição de contorno $U(l) = 0$ ficamos com o seguinte problema de auto-valor:

$$\sin \lambda l = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda l = r \pi \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Em consequência, os modos de vibração associados são dados por

$$U_r(x) = C_r \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right)$$

Como esses não são os modos exatos de vibração da estrutura da Figura 6.4, não precisamos nos preocupar agora com a determinação de valores ortonormalizados para os coeficientes C_r .

- (c) Podemos, então, expandir a solução do problema na seguinte aproximação:

$$u(x, t) = \sum_{r=1}^3 q_r(t) \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \quad (b)$$

a qual contém os três primeiros modos de expansão da barra uniforme. Se efetuarmos as derivadas parciais da solução (b) previstas na equação (a) e realizarmos as devidas substituições, ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^3 \left[E A_o q_r \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{x}{2l} - 1 \right) \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \right] - \sum_{r=1}^3 \left[\frac{E A_o}{2l} q_r \frac{r \pi}{l} \cos \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \right] \\ + p - \sum_{r=1}^3 \left[m_o \ddot{q}_r \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

onde sabemos que o lado direito não é *exatamente* igual a zero, mas constitui um resíduo que desejamos minimizar através da determinação das melhores expressões possíveis para os três $q_r(t)$ adotados na expansão (b).

O próximo passo no método de Galerkin consiste em multiplicar a aproximação (c) por um modo de vibração e integrar o resultado no domínio $0 \leq x \leq l$. Assim, começamos por

$$U_1(x) = \sin \left(\pi \frac{x}{l} \right)$$

Se repetirmos estas operações para os dois outros modos e coletarmos os termos resultantes em forma matricial, obtemos

$$[\mathcal{M}] \{\ddot{q}_r\} + [\mathcal{K}] \{q_r\} = \{\mathcal{F}\} \quad (d)$$

onde

$$\mathcal{M}_{rs} = m_o \int_0^l \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \sin \left(r \pi \frac{x}{l} \right) \sin \left(s \pi \frac{x}{l} \right) dx$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{rs} &= \frac{E A_o \pi^2}{l^2} \int_0^l r^2 \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \sin\left(r \pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(s \pi \frac{x}{l}\right) dx \\ &\quad + \frac{E A_o \pi}{2l^2} \int_0^l r \cos\left(r \pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(s \pi \frac{x}{l}\right) dx \\ \mathcal{F}_s &= p_o \cos \omega t \int_0^l \sin\left(s \pi \frac{x}{l}\right) dx\end{aligned}$$

Se efetuarmos as integrais previstas para $r, s = 1, 2, 3$, as matrizes de massa e de rigidez e o vetor forçante da equação (d) ficam expressos numericamente como

$$\begin{aligned}[\mathcal{M}] &= m_o l \begin{bmatrix} 0,37500 & 0,04503 & 0,00000 \\ 0,04503 & 0,37500 & 0,04863 \\ 0,00000 & 0,04863 & 0,37500 \end{bmatrix} \\ [\mathcal{K}] &= \frac{E A_o \pi^2}{l} \begin{bmatrix} 0,37500 & -0,09007 & 0,00000 \\ 0,31522 & 1,50000 & -0,04863 \\ 0,00000 & 0,68088 & 3,37500 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\{\mathcal{F}\} = p_o l \cos \omega t \begin{Bmatrix} 0,63662 \\ 0,00000 \\ 0,21221 \end{Bmatrix}$$

- (d) Como podemos observar, as matrizes de massa e de rigidez resultantes são populadas (não-diagonais), introduzindo acoplamentos entre os graus de liberdade q_r ($r = 1, 2, 3$). Isto resultou do fato de usarmos modos de vibração livre de uma barra uniforme para tentar resolver o problema de vibração forçada de uma barra de propriedades variáveis. Nota-se também que a matriz de massa é simétrica, mas a matriz de rigidez não é simétrica, o que é característico deste método. Os termos da diagonal principal ainda são dominantes (de maior módulo dentro da mesma linha). À medida que cresce a ordem do harmônico espacial (o valor de r), crescem também os módulos dos termos desta matriz.

Devido ao fato das matrizes serem não-diagonais, se desejarmos obter uma solução para a equação matricial (d), temos que recorrer a algum método de integração numérica. Portanto, fica aqui o convite para o leitor adotar alguns valores numéricos para os parâmetros da barra e prosseguir a resolução deste problema com os algoritmos de integração fornecidos neste capítulo, ou mesmo outros disponíveis na literatura, caso seja de seu interesse.

- (e) A matemática do problema de vibração forçada de uma estrutura contínua é mais desenvolvida, por requerer primeiro a transformação da equação diferencial parcial de movimento em equação diferencial ordinária. Esta é a grande diferença face aos problemas envolvendo sistemas modelados como discretos. Para esta primeira tarefa, um método do tipo Galerkin ou qualquer outra transformada integral poderia ser utilizada.

Quando, porém, o problema matemático recai na solução de uma equação diferencial ordinária matricial como a equação (d), os modelamentos discretos e contínuos tornam-se similares. Uma técnica de integração numérica pode ser utilizada em quaisquer dessas situações. No caso contínuo, se a geometria for complexa, esta é a única opção. No caso discreto ainda há a opção de emprego da técnica de análise modal para desacoplamento do sistema de equações.

2. Uma barra uniforme de comprimento l , massa por unidade de comprimento m e rigidez axial EA é engastada em uma extremidade e tem na outra extremidade uma mola de coeficiente de rigidez k ligada a uma base móvel (vide Figura 6.5). Se esta base se move axialmente de acordo com a expressão

$$x_b(t) = x_o \cos \omega t$$

deseja-se saber a força F_t transmitida à base em que a barra está engastada.

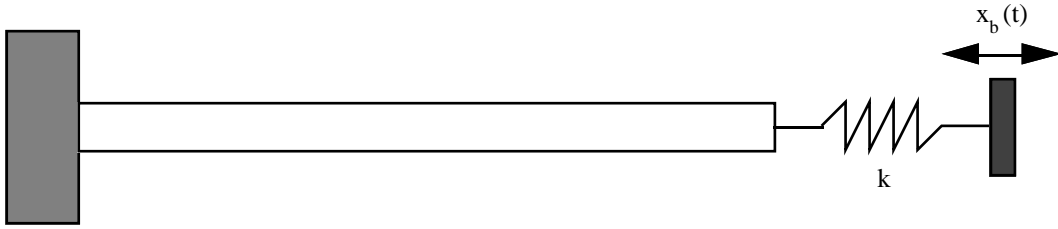


Figura 6.5: Modelo de uma barra em ressonância axial.

Através de uma resolução empregando o método de Galerkin, obtenha elementos analíticos suficientes para poder comentar como seria um gráfico do módulo da força F_t adimensionalizada por $k x_o$ versus a frequência de excitação ω . Para tanto, considere faixa de frequência suficiente para incluir pelo menos um modo de vibração axial da barra. Se necessário, inclua o amortecimento necessário para modelar as perdas de energia internas à estrutura.

Este problema tenta modelar uma técnica empregada na construção civil para inserção de fundações metálicas em solos. Ao vibrar em uma das frequências naturais da estrutura, a excitação fornecida na extremidade livre pode ser “multiplicada”, facilitando a penetração da outra extremidade no solo (modelada como uma extremidade engastada). Portanto, pretendemos investigar se, com um “pequeno” dispêndio energético de excitação conseguimos produzir uma “grande” carga transmitida à base fixa usando do fenômeno de ressonância mecânica.

Se retornarmos à seção 6.3, onde tratamos da vibração axial de barras, podemos obter para este problema a seguinte equação diferencial de movimento:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{EA} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{p}{EA} \quad (e)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{k x_o}{EA} \cos \omega t \quad (f)$$

Enquanto a condição geométrica em $x = 0$ traduz a condição de engastamento (obviamente idealizada), a condição natural em $x = l$ representa a condição de carga dinâmica excitadora nesta extremidade.

Se fizermos o diagrama de esforço axial desta estrutura, podemos com alguma facilidade reconhecer que

$$p(x, t) = \frac{k x_o}{l} \cos \omega t \quad (g)$$

já que $p(x, t)$ representa a carga axial por unidade de comprimento ao longo da barra.

Nosso objetivo é obter a força F_t transmitida à base $x = 0$. Para tanto, vamos criar um fator de amplificação η da força transmitida dado por

$$\eta = \frac{|F_t|}{k x_o} \quad (h)$$

fator este que é unitário no caso estático ($\omega = 0$).

Do problema de vibração livre associado à equação (e) (vide seção 6.3) chegamos à seguinte solução para o deslocamento axial:

$$U(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

onde

$$\lambda^2 = \frac{m \omega_n^2}{E A}$$

A aplicação da condição de contorno geométrica em $x = 0$ implica $A = 0$. Já a imposição da condição natural na extremidade $x = l$ leva ao seguinte problema de auto-valor:

$$\lambda l \cos \lambda l - \frac{k x_o}{E A} = 0 \quad (i)$$

De qualquer maneira, os modos de vibração têm a forma

$$U_r(x) = B_r \sin \lambda_r x$$

com os λ_r sendo soluções da equação transcendental (i). Na impossibilidade prática de usarmos tais soluções exatas, vamos adotar a seguinte solução aproximada:

$$u(x, t) = q_1(t) \sin \left(\frac{\pi x}{2 l} \right) + q_2(t) \sin \left(\frac{3\pi x}{2 l} \right) \quad (j)$$

Esta solução é exata (até o segundo harmônico) para a barra descarregada na extremidade $x = l$, conforme discutido na seção 6.3. Não é este o caso sob análise, mas também não é a primeira vez que utilizamos modos de vibração aproximados para tratar algum problema neste texto.

Se substituirmos a solução aproximada (j) e a carga aplicada (g) na equação de movimento (e), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{E A} \left[\ddot{q}_1(t) \sin \left(\frac{\pi x}{2 l} \right) + \ddot{q}_2(t) \sin \left(\frac{3\pi x}{2 l} \right) \right] \\ & + \left(\frac{\pi}{2 l} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi x}{2 l} \right) q_1 + \left(\frac{3\pi}{2 l} \right)^2 \sin \left(\frac{3\pi x}{2 l} \right) q_2 = \frac{k x_o}{E A l} \cos \omega t \end{aligned} \quad (k)$$

Para aplicarmos o método de Galerkin, multiplicamos a equação (k) pela forma do primeiro modo e integramos no domínio $0 \leq x \leq l$. O resultado é uma equação diferencial ordinária não-homogênea em q_1 apenas. A repetição deste procedimento para o segundo modo de vibração produz uma segunda equação diferencial, desta vez em q_2 . Essas equações são dadas por

$$\ddot{q}_1 + \frac{\pi^2 E A}{4 m l^2} q_1 = 1,27324 \frac{k x_o}{m l} \cos \omega t \quad (l)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{9 \pi^2 E A}{4 m l^2} q_2 = 0,42442 \frac{k x_o}{m l} \cos \omega t \quad (m)$$

As equações (l) e (m) têm como frequência natural, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\omega_{n_1} = \sqrt{\frac{\pi^2 E A}{4 m l^2}} \quad \text{e} \quad \omega_{n_2} = \sqrt{\frac{9 \pi^2 E A}{4 m l^2}} = 3 \omega_{n_1}$$

Se permitirmos existir um amortecimento viscoso equivalente para a estrutura em cada um desses casos, de acordo com a discussão apresentada na seção 4.2 deste texto, podemos escrever a solução permanente na forma

$$q_1(t) = C_1 \cos(\omega t - \phi_1) \quad \text{e} \quad q_2(t) = C_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

onde

$$C_1 = \frac{x_o}{\sqrt{(1 - \Omega_1^2)^2 + (2 \zeta_1 \Omega_1)^2}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{x_o}{\sqrt{(1 - \Omega_2^2)^2 + (2 \zeta_2 \Omega_2)^2}}$$

são as amplitudes,

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{2 \zeta_1 \Omega_1}{1 - \Omega_1^2} \right) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{2 \zeta_2 \Omega_2}{1 - \Omega_2^2} \right)$$

são os ângulos de fase e

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_{n_1}} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_{n_2}}$$

são as razões de frequências em cada um dos casos.

Com estes resultados, a resposta da barra à solicitação axial cíclica assume a seguinte expressão:

$$u(x, t) = C_1(\Omega_1, \zeta_1) \cos(\omega t - \phi_1) \sin\left(\frac{\pi x}{2 l}\right) + C_2(\Omega_2, \zeta_2) \cos(\omega t - \phi_2) \sin\left(\frac{3\pi x}{2 l}\right) \quad (n)$$

Vamos considerar como força transmitida à extremidade $x = 0$, além da carga de excitação aplicada em $x = l$, a carga de inércia devida à contribuição global da barra. Assim, podemos escrever

$$F_t(t) = k x_o \cos \omega t - \int_0^l m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (o)$$

Se substituirmos a resposta (n) na força transmitida (o), obtemos o seguinte resultado:

$$F_t(t) = k x_o \cos \omega t + 0,63662 \omega^2 m l x_o \left[|H_1| \cos(\omega t - \phi_1) + \frac{1}{3} |H_2| \cos(\omega t - \phi_2) \right] \quad (p)$$

onde $|H_i(\Omega_i, \zeta_i)|$ é o fator de amplificação dado pela equação (4.5) como função da razão de frequências e fator de amortecimento associado ao i -ésimo termo da solução (j).

Podemos agora expandir os termos em cosseno da diferença angular, coletar os termos semelhantes e buscar o módulo da força transmitida (p). Desta forma, o fator de amplificação η definido pela relação (h) fica dado por

$$\eta(\omega) = \left\{ \left[1 + 0,63662 \frac{\omega^2 m l}{k} \left(|H_1| \cos \phi_1 + \frac{|H_2|}{3} \cos \phi_2 \right) \right]^2 \right. \\ \left. \left[0,63662 \frac{\omega^2 m l}{k} \left(|H_1| \sin \phi_1 + \frac{|H_2|}{3} \sin \phi_2 \right) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

onde

$$\cos \phi_i = \frac{1 - \Omega_i^2}{\sqrt{(1 - \Omega_i^2)^2 + (2 \zeta_i \Omega_i)^2}} \quad \text{e} \quad \sin \phi_i = \frac{2 \zeta_i \Omega_i}{\sqrt{(1 - \Omega_i^2)^2 + (2 \zeta_i \Omega_i)^2}}$$

são funções trigonométricas que podem ser obtidas a partir das definições dos respectivos ângulos de fase ϕ_i , $i = 1, 2$.

Se fizermos um gráfico deste fator de amplificação η versus a frequência de excitação ω vamos verificar que, à medida que “varremos” o espectro da frequência de excitação ω a partir de $\omega = 0$, ocorrem picos nas duas primeiras frequências naturais da estrutura adotadas implicitamente na solução aproximada (j) para o deslocamento axial $u(x, t)$. Os valores desses picos vão naturalmente depender do nível da excitação proporcionada e do fator de amortecimento da estrutura nas respectivas frequências. De importante, podemos comentar o seguinte:

- Este problema pode ser encarado como mais uma demonstração da forma de determinar experimentalmente as frequências naturais de uma estrutura por excitação externa. Esta é uma prática industrial corrente.
 - O problema também demonstra a possibilidade prática de utilizar-se o fenômeno de ressonância para “amplificar” forças. Assim, como havíamos apontado no início desta resolução, a injeção de suportes de fundações no solo fica facilitada.
 - Ao leitor recomendamos um estudo das energias ou potências envolvidas: da excitação, a ser provida pelo usuário, e da resposta estrutural.
3. Uma placa plana quadrada de lado a , simplesmente apoiada em todos os seus bordos, sofre um carregamento ortogonal ao seu plano na situação não-deformada na direção contrária ao eixo z positivo dado por

$$P(x, y, t) = p_o \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{a}\right) \sin \omega t$$

onde p_o tem unidade de pressão (carga por unidade de área). Obtenha a resposta permanente desta estrutura utilizando para isto uma aproximação simples do deslocamento lateral da placa expandida com o auxílio dos seus modos de vibração livre, através do método de Galerkin.

Vamos utilizar para a resposta procurada um único modo de vibração da placa quadrada simplesmente apoiada em todos os seus bordos dado por

$$w(x, y, t) = A(t) \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) \quad (q)$$

A substituição desta aproximação na equação (6.83) do texto permite obter

$$4 D A \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) + \rho h \ddot{A} \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) + P = 0 \quad (r)$$

Agora, após a substituição, nós efetuamos o produto da equação (r) pelo próprio modo adotado para o deslocamento, i.e.

$$W(x, y) = \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) \quad (s)$$

Assim, obtemos

$$4 D A \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin^2 \left(\pi \frac{y}{a} \right) + \rho h \ddot{A} \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin^2 \left(\pi \frac{y}{a} \right) + p_o \sin \omega t \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) = 0 \quad (t)$$

Se integrarmos este resultado sobre a área da placa (domínio espacial do problema), obtemos a seguinte equação diferencial de equilíbrio dinâmico:

$$\rho h \mu \ddot{A} + 4 D \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \mu A = - \kappa p_o \sin \omega t \quad (u)$$

onde

$$\mu = \int_0^a \int_0^a \sin^2 \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin^2 \left(\pi \frac{y}{a} \right) dx dy = \frac{a^2}{4}$$

e

$$\kappa = \int_0^a \int_0^a \frac{xy}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{x}{a} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{a} \right) dx dy = 0,016643 a^2$$

Com esses resultados, a equação do movimento (u) simplifica-se para

$$\ddot{A} + \omega_n^2 A = \omega_n^2 d_o \sin \omega t \quad (v)$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4 \pi^4 D}{\rho h a^4}}$$

é a frequência natural de oscilação da placa e

$$d_o = - \frac{0,016643 a^4 p_o}{\pi^4 D}$$

é o deslocamento estático máximo da placa para a carga de pressão dada (fornecido pela presente estimativa).

Se compararmos a equação (v) ao modelo estabelecido no Capítulo 4 para vibrações forçadas de sistemas de um grau de liberdade (equação (4.3)), verificamos que a resposta permanente, na ausência de amortecimento, será dada por

$$A(t) = A_o \sin \omega t$$

com

$$A_o = \frac{d_o}{|1 - \Omega^2|}$$

Assim, a placa também poderá apresentar como resposta à carga harmônica dada o fenômeno de ressonância se for excitada nas proximidades da razão de frequências Ω unitária. O valor real do pico de ressonância vai depender do valor do fator de amortecimento associado a esta estrutura.

Vale observar que estes resultados estão condicionados à otimização produzida pelo método de Galerkin com um único modo de vibração. Estimativas melhores poderão ser obtidas com expansões mais completas para o deslocamento lateral, as quais poderão prever mais modos de vibração.

Exercícios Propostos

1. Como exercício de dinâmica estrutural de estruturas contínuas, vamos aqui estudar o problema de uma corda de violão, de uma corda de piano, ou do tirante de uma asa. Pede-se que você siga o seguinte roteiro de estudo:

- (a) Usando simples argumentos geométricos, mostre que o deslocamento axial $u(x, t)$ e o deslocamento lateral $y(x, t)$ da corda relacionam-se por

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

onde utilizamos a seguinte aproximação:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

o que é válido desde que $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \ll 1$.

- (b) Mostre, então, que a energia potencial de uma corda de comprimento L , submetida à tração variável $T(x)$, com deslocamento $y(x, t)$ normal à direção x , é dada por:

$$\mathcal{U} = \int_0^L \frac{1}{2} T(x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

- (c) Use o Princípio de Hamilton para obter a equação de movimento e as condições de contorno de uma corda de massa por unidade de comprimento $\mu(x)$, com carga lateral distribuída $q(x, t)$.
- (d) Comente o significado das condições de contorno e da carga lateral.
- (e) Determine as frequências e modos naturais de uma corda bi-apoiada, de propriedades constantes.
- (f) Descreva o procedimento de resolução do problema da corda forçada a vibrar pela carga lateral $q(x, t)$.
- (g) Que esquemas você consegue visualizar para produzir a tração T variável ao longo da corda?
2. A um sistema massa-mola é dada uma energia inicial sob forma de energia potencial elástica (deslocamento inicial $x_o \neq 0$ e velocidade inicial nula). Uma vez liberada, a massa oscila até parar, perdendo energia sob forma de atrito seco (Atrito de Coulomb). Dentro deste quadro, pede-se que você desenvolva o seguinte roteiro de estudo:
- (a) Obtenha a equação de movimento do sistema para cada semiciclo do movimento e suas respectivas condições iniciais.
- (b) Resolva analiticamente o problema para um coeficiente de atrito μ_o constante.
- (c) Repita o passo anterior, agora usando *qualquer* método de integração numérica, para o caso mais realista em que o coeficiente de atrito tem a seguinte dependência funcional:

$$\mu(\dot{x}) = \mu_o \left(1 + \alpha e^{-\beta|\dot{x}|} \right)$$

- (d) Plote em um gráfico as respostas analítica e numérica do sistema e tire as suas conclusões.

No passo c, deixe bem claro o método de integração utilizado e como este funciona. Como sugestão, use os seguintes valores numéricos para os parâmetros característicos do sistema:

$$x_o = 0,2 \text{ m} \quad k = 144 \text{ N/m} \quad \omega_n = 12 \text{ rad/s} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$\mu_o = 0,3 \quad \alpha = 0,2 \quad \beta = 2$$

3. Uma viga de propriedades constantes ao longo de seu comprimento, engastada em $x = 0$ e simplesmente apoiada em $x = l$, carregada verticalmente por uma distribuição $p(x, t)$, repousa sobre uma fundação elástica de coeficiente $k \text{ N/m}^2$, como mostrada na Figura 6.6. Pede-se:
 - (a) Usando o Princípio de Hamilton, obtenha a equação diferencial parcial do movimento e suas possíveis condições de contorno. Use para a viga as hipóteses de Euler-Bernoulli. Ressalte as condições de contorno aplicáveis ao caso.
 - (b) Admitindo oscilações harmônicas e separação de variáveis, obtenha a equação transcendental que fornece as frequências naturais e os modos de vibração associados.
 - (c) Compare os seus resultados com os de uma viga sem fundação elástica. Qual é o efeito da fundação no comportamento dinâmico do sistema?

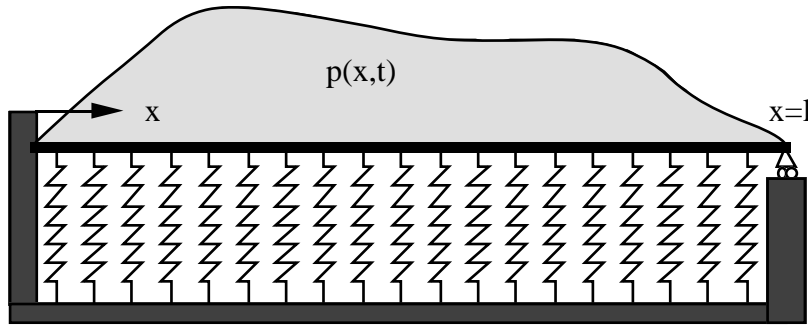


Figura 6.6: Viga apoiada sobre uma fundação elástica.

4. Em problemas de vibração em que sistemas são modelados discretamente ou continuamente chega-se, finalmente, a uma equação diferencial ordinária do seguinte tipo:

$$[M] \{\ddot{q}_r\} + [K] \{q_r\} = \{f_r\} \quad (A)$$

onde $\{q_r\}$ é o vetor de incógnitas e $\{f_r\}$ é o vetor de forças generalizadas. Como as matrizes $[M]$ e $[K]$ podem ser cheias, uma equação como do tipo (A) requer um método numérico de integração. Existem dezenas de métodos disponíveis, mas aqui vamos tentar explorar algo não muito comum. Para tanto pede-se que você siga o seguinte roteiro de estudo:

- (a) Considere um problema de vibração forçada axial ou em flexão de uma estrutura contínua de comprimento l e propriedades variáveis como modelo. Desenvolva a solução do problema através do método de Galerkin, conforme discutido no texto e mostrado nos exercícios resolvidos. Adote como solução uma expansão de três termos segundo os modos de vibração de uma estrutura de propriedades uniformes.
- (b) Adote para os três modos de vibração um amortecimento estrutural equivalente a aproximadamente 2% do crítico. Isto fará a equação (A) transformar-se em

$$[M] \{\ddot{q}_r\} + [C] \{\dot{q}_r\} + [K] \{q_r\} = \{f_r\} \quad (B)$$

- (c) Usando o conceito de variáveis de estado, transforme o conjunto (B) de três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, na forma

$$[A] \{\dot{y}\} + [B] \{y\} = \{F\} \quad (C)$$

onde

$$\{y\} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad \text{e} \quad \{F\} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

- (d) Para o sistema inicialmente em repouso, integre as equações usando o método de Euler progressivo (o mais simples), fazendo

$$\{\dot{y}\}_{t=t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \{y\}_{t=t+\Delta t} - \{y\}_{t=t} \right\} \quad (D)$$

o que lhe permite obter

$$\{y\}_{t=t+\Delta t} = \left[[I] - \Delta t [A]^{-1} [B] \right] \{y\}_{t=t} + \Delta t [A]^{-1} \{F\}_{t=t} \quad (E)$$

- (e) Obtenha o deslocamento axial $u(x, t)$ ou o deslocamento lateral $y(x, t)$ em $x = 2l/3$ desde o instante $t = 0$ até um instante t onde os transientes se hajam dissipado. Use para isso dois ou mais valores de Δt para estudar a convergência do método. Se necessário, adote para as propriedades da estrutura valores que julgar convenientes.
- (f) Compare o presente método com outros que você conhece em termos de acurácia, facilidade de implementação, custo computacional, limitações etc.

5. A Figura 6.7 mostra uma barra de propriedades

$$EA(x) = EA_o \left(2 - \frac{x}{l} \right) \quad m(x) = m_o \left(2 - \frac{x}{l} \right)$$

carregada axialmente com

$$p(x) = p_o \frac{x}{l} \sin \omega t$$

A barra está inicialmente em repouso, sem quaisquer deformações. Com base nestes dados, pede-se:

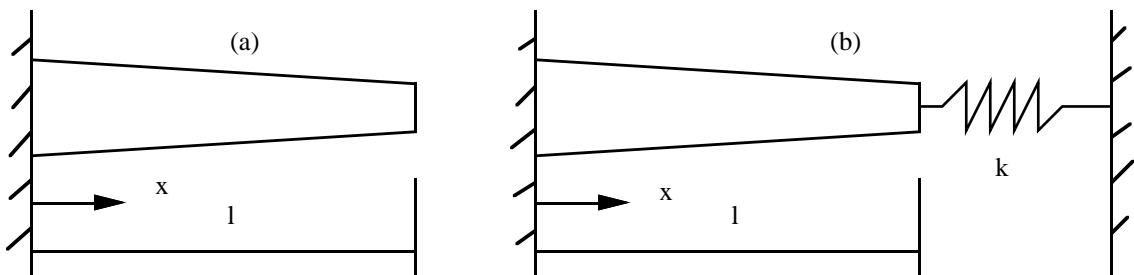


Figura 6.7: Uma estrutura em duas situações de carregamento axial.

- (a) Use o Princípio de Hamilton e obtenha a equação de movimento e condições de contorno do problema da Figura 6.7(a).
- (b) Em que muda o resultado anterior se, ao invés da Figura 6.7(a), tivermos o problema da Figura 6.7(b)?

6. Tente desenvolver um método numérico de integração direta utilizando diferenças finitas centrais que seja de quarta ordem em termos do intervalo de integração Δt adotado. Forneça todos os detalhes, incluindo formulações, algoritmo e esquema de inicialização.
7. Mostre que o método implícito de integração numérica Newmark com $\beta = 0$ e $\gamma = 0,5$ transforma-se no método explícito de diferenças finitas centrais de segunda ordem. Isto pode ser conseguido por uma análise simples das equações básicas dos dois métodos.
8. Tente repetir o estudo realizado na seção 6.6 para placas quadradas, desta vez generalizando-o para o caso de placas retangulares de lados a e b .
9. Tente repetir o estudo realizado na seção 6.6 para placas quadradas, desta vez alterando as condições de contorno em todas as bordas da placa para engastamento em vez de apoio simples.
10. Resolva o problema de vibrações forçadas da placa quadrada da seção 6.6 quando a carga $p(x, y, t)$ de pressão é dada por

$$P(x, y, t) = p_o + \Delta p \cos \omega t$$

com p_o e Δp constantes.

11. Use coordenadas cilíndricas para desenvolver o problema de uma placa circular submetida a uma carga de pressão variável no tempo e ortogonal à sua superfície média na condição não-deformada. Forneça a equação de movimento e as condições de contorno possíveis.

Índice Remissivo

acelerômetros	49
aeroelasticidade	5-6
algoritmos de integração	157-159
amortecimento	15
amortecimento crítico	43, 46-47
amortecimento estrutural	15
amortecimento generalizado	103
amortecimento subcrítico	44-46
amortecimento supercrítico	47-49
amortecimento viscoso equivalente	15
amplitude	42, 46, 62, 66
análise	3-4
análise de Fourier	69-74
análise modal	102-107
ângulo de fase	42, 46, 62-65, 100-101
anteprojeto	2-3
atrito seco (modelo de Coulomb)	51-53
auto-valores	100, 106-108
auto-vetores	100, 102
base móvel	29-31, 65-68
batimento	110-111
carga seguidora	144
cargas aleatórias	1, 6
cargas determinísticas	1, 74
cargas dinâmicas	1
Castigliano	27
CIM - Computer Integrated Manufacturing	8-9
cisalhamento de vigas	142-146
coeficiente de rigidez de mola	14
computação simbólica	98-99
concepção	2-3
condições de contorno	133, 139-140, 144-145, 149-150
condições iniciais	39-43, 102
configuração	19-20
constante de tempo	51
controle de vibrações	68
convolução	78-82
coordenadas generalizadas	20

decremento logarítmico	50
degrau unitário	76
delta de Dirac	75
desacoplamento	103-105
deslocamento	20
deslocamento estático	62
deslocamento virtual	20-21
determinação experimental de amortecimento	81-82
determinação experimental de frequências naturais	81-82
diagrama de Argand	42-43, 46
diagrama de corpo livre	17-19, 96-97
diferenças centrais	156-157
dinâmica de estruturas	2, 4-5
elementos finitos	7
energia cinética	22-24
energia potencial	22-24
equação característica	41, 44-47
equação de movimento	18
equações de movimento axial	132-134
equações de movimento em flexão	147-150
equações de movimento em torção	136-137
Equações de Lagrange	24-25, 27, 99, 129-131
equilíbrio	13, 27-29
espectro de frequência	65, 70
estabilidade	1, 3, 29, 42, 44-45
estado de um sistema	19-20
estática de estruturas	5
estruturas	1
estruturas unidimensionais	12
estruturas bidimensionais	12
estruturas tridimensionais	12-13
Euler-Bernoulli	137-142
excitações arbitrárias	75-82
excitações harmônicas	61-68
excitações periódicas	69-76
fadiga	29, 31
fasor	43
fator de amortecimento	43-51
fator de amplificação	62-64
fator de transmissibilidade	67-68
flexão de vigas	137-147
força de atrito	51
forças de inércia	18
forças generalizadas	21, 103
forças não-conservativas	130
forma de Hessenberg	108
frações parciais	41, 45-49

freqüência de excitação	62
freqüência natural amortecida	45
freqüência natural não-amortecida	40,100
freqüências naturais de sistemas contínuos	134,141,151
função de grau	76
função dissipação de Rayleigh	24-25,98
função ímpar	69
função Lagrangeana	24
função par	69
função sinal	51
funções generalizadas	75-76
graus de liberdade	12,13
gravidade	28,29
impulso unitário	75
integração de conhecimento	8
integração numérica	155-159
integral de Duhamel	78
isolamento de vibrações	66,68
Lei de Newton	16-18,27,96-107
lugar das raízes (“root-locus”)	44-45
massa equivalente	34-35
massa generalizada	103
matriz de amortecimento	97
matriz de massa	97
matriz de rigidez	97
matriz modal	102
Mecânica Analítica	16-27
Mecânica Lagrangeana	19-27
Mecânica Newtoniana	16-19
média quadrática	69
média rms	69
média temporal	69
método de Galerkin	135-136,142,152-155
método do determinante	107
método Q-R	107-108
métodos explícitos de integração	155-157
métodos implícitos de integração	155,157-159
modelo analítico	3,4,11,95-96
modelo contínuo	12,13
modelo discreto	12,13
modelo matemático	3,4,16,96-99
modos de vibração	101,135,141,152
momentos de inércia	18
movimento rotacional	17

Newmark	157-159
não-linearidade	7, 14, 29, 50, 70-71, 97
nó	101
normalização	135, 141, 152
onda quadrada	71-74
operador variacional	25-26
ortogonalização de Gram-Schmidt	107-108
placas	147-154
plano de fase	19, 42-43, 46
polo de um sistema	41
potência	22-23
Princípio da Ação Mínima	25-26
Princípio da Conservação de Energia	22-23, 27, 98
Princípio de D'Alembert	18-19, 27
Princípio de Hamilton	25-28, 129-134, 137-140, 143-145, 147-150
Princípio dos Deslocamentos Virtuais	21-22, 27
projeto	2-3
razão de frequências	63
realimentação	31
referencial inercial	16
referenciais	13-14, 30-31
resíduo	155
resposta a uma rajada	77-80
resposta em frequência	63-69
resposta estrutural	2-3
resposta homogênea	52-53
resposta particular	52-53
ressonância mecânica	63
restrição	20
retorção	146
rigidez	13-14
rigidez em flexão	148
rigidez equivalente	33-34
rigidez generalizada	103
ruído	31
simetria	97
sistemas conservativos	22-23, 42
sistemas dinâmicos	2
sistemas dissipativos	22-25
sistemas não-conservativos	22-25, 42
solução permanente	62
solução transiente	62
teste	3-4
Timoshenko	142-146

torção de barras	136-137
trabalho virtual	21, 25
trajetória dinâmica	19, 26
transformação de Householder	108
transformação modal	103
transformada de Laplace	40-41, 75-76
transmissibilidade	31, 65-68
vetor de acelerações	97
vetor de deslocamentos	97
vetor de velocidades	97
vibrações axiais	131-136
vibrações forçadas	61-94, 102-105
vibrações forçadas axiais	135-136
vibrações forçadas em flexão	142-143
vibrações livres axiais	134-135
vibrações livres em flexão	140-141
vibrações livres de sistemas discretos	99-102
vibrações livres com amortecimento	43-51
vibrações livres sem amortecimento	39-43
viga uniforme em flexão	140-142, 145-146
zero de um sistema	41