

# Aula 12

04 Junho 2019

# Resumo da aula passada

- Verificação de factibilidade.
- Gerenciamento de problemas de (não) factibilidade.

# Tópico da aula de hoje

- Robustez a incertezas de modelo: Uso de Desigualdades Matriciais Lineares.

# Motivação

Como visto anteriormente, é possível obter garantias de factibilidade recursiva e convergência do estado para a origem empregando um horizonte de predição infinito.

De modo a limitar o número de variáveis de decisão, pode-se empregar um horizonte de controle finito, com restrições terminais e custo terminal associado ao estado.

Alternativamente, pode-se utilizar um horizonte de controle infinito, adotando-se uma parametrização da forma  $\hat{u}(k+i|k) = F_k \hat{x}(k+i|k)$ , sendo  $F_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$  uma matriz de ganho a ser determinada a cada instante  $k$ . Nesse caso, as variáveis de decisão passam a ser os elementos de  $F_k$ .

Na formulação a ser apresentada, a matriz  $F_k$  será obtida como solução de um problema de otimização envolvendo Desigualdades Matriciais Lineares.

# O que são Desigualdades Matriciais Lineares ? (Linear Matrix Inequalities, LMI)

- Referências:

MACIEJOWSKI (2002), p. 235.

BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.

# Definição

Uma LMI é uma desigualdade matricial da forma

$$F(v) = F_0 + \sum_{i=1}^I v_i F_i > 0$$

sendo  $F_0, F_1, \dots, F_I$  matrizes simétricas.

$F(v)$  é uma função afim das variáveis escalares  $v_1, v_2, \dots, v_I$ .

Desigualdades da forma  $F(v) < 0$  e  $F(v) < G(v)$  são casos particulares da expressão acima. Com efeito, tais desigualdades podem ser reescritas como  $-F(v) > 0$  e  $G(v) - F(v) > 0$ .

## LMI em outras formas

Em muitos casos, LMIs podem não estar expressas diretamente nessa forma.

Considere, por exemplo, a desigualdade de Lyapunov:

$$A^T P + PA < 0$$

$$\text{com } A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, as variáveis são  $v_1, v_2, v_3$  e a LMI pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 & -2v_2 + v_3 \\ -3v_2 & -3v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 & -3v_2 \\ -2v_2 + v_3 & -3v_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 & -2v_2 + v_3 \\ -3v_2 & -3v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2v_1 + v_2 & -3v_2 \\ -2v_2 + v_3 & -3v_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -4v_1 + 2v_2 & -5v_2 + v_3 \\ -5v_2 + v_3 & -6v_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$v_1 \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} < 0$$



# Sistemas de LMIs

Um sistema de LMIs da forma

$$\begin{aligned} F_1(v) &> 0 \\ F_2(v) &> 0 \\ &\vdots \\ F_m(v) &> 0 \end{aligned}$$

é equivalente a uma única LMI escrita como

$$\begin{bmatrix} F_1(v) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(v) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_m(v) \end{bmatrix} > 0$$

# LMIs não estritas

LMIs da forma  $F(v) \geq 0$  são ditas não estritas.

Nesse caso, a LMI é dita **factível** se  $\exists v$  tal que  $F(v) \geq 0$  e **estritamente factível** se  $\exists v$  tal que  $F(v) > 0$ .

# Convexidade

O conjunto  $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^n | F(v) > 0\}$  é convexo.

Com efeito, sejam  $x, y \in \mathcal{V}$  e  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  com  $\lambda \in [0, 1]$ . Tem-se então que

$$\begin{aligned} F(z) &= F[\lambda x + (1 - \lambda)y] = F_0 + \sum_{i=1}^I [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] F_i \\ &= F_0 + \lambda \sum_{i=1}^I x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^I y_i F_i \\ &= F_0 + \lambda [F(x) - F_0] + (1 - \lambda) [F(y) - F_0] = \lambda \underbrace{F(x)}_{>0} + (1 - \lambda) \underbrace{F(y)}_{>0} \end{aligned}$$

Portanto,  $F(z) > 0$ , comprovando que  $z \in \mathcal{V}$ .

Da mesma forma, pode-se mostrar que  $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^n | F(v) \geq 0\}$  é convexo.

# Programação Semidefinida

Problemas de otimização do tipo

$$\min_v c^T v \quad \text{s.a.} \quad F(v) \geq 0,$$

sendo  $F(v) \geq 0$  uma LMI, são problemas convexos.

Problemas desse tipo (custo linear e restrições LMI) são conhecidos como **Problemas de Programação Semidefinida**.

## Complemento de Schur

Se  $Q(v) = Q^T(v)$ ,  $R(v) = R^T(v)$  e  $Q(v)$ ,  $R(v)$ ,  $S(v)$  são afins em  $v$ , então a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(v) & S(v) \\ S^T(v) & R(v) \end{bmatrix} > 0$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} R(v) &> 0 \\ Q(v) - S(v)R^{-1}(v)S^T(v) &> 0 \end{aligned}$$

ou então

$$\begin{aligned} Q(v) &> 0 \\ R(v) - S^T(v)Q^{-1}(v)S(v) &> 0 \end{aligned}$$

Essa equivalência permite expressar desigualdades quadráticas convexas como LMIs.

O complemento de Schur pode também ser generalizado para LMIs não estritas (Boyd et al., 1994):

A LMI

$$\begin{bmatrix} Q(v) & S(v) \\ S^T(v) & R(v) \end{bmatrix} \geq 0$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} R(v) &\geq 0 \\ Q(v) - S(v)R^\dagger(v)S^T(v) &\geq 0 \\ S(I - RR^\dagger) &= 0 \end{aligned}$$

sendo  $R^\dagger$  a pseudo-inversa de  $R$ .

Caso seja ainda imposta a condição  $R(v) > 0$ , tem-se simplesmente  $Q(v) - S(v)R^{-1}(v)S^T(v) \geq 0$ .

## Complemento de Schur: Exemplo (Maciejowski, p. 235)

Seja o seguinte PPQ:

$$\min_x (x^T Q x + q^T x + r) \quad \text{s.a.} \quad Ax \geq b$$

sendo  $Q = Q^T \geq 0$ .

Este problema é equivalente a

$$\min_{\gamma, x} \gamma$$

s.a.

$$\gamma - x^T Q x - q^T x - r \geq 0$$

$$Ax \geq b$$

$$\gamma - x^T Q x - q^T x - r \geq 0$$

Empregando o complemento de Schur, esta restrição pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} 1 & Q^{1/2} x \\ x^T Q^{1/2} & \gamma - r - q^T x \end{bmatrix} \geq 0$$



$$Ax \geq b$$

Estas restrições podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} (Ax - b)_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (Ax - b)_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (Ax - b)_m \end{bmatrix} \geq 0$$

em que  $(Ax - b)_i$  denota o  $i$ -ésimo elemento de  $Ax - b$ .

## LMI Lab (Matlab Robust Control Toolbox)

# Considerações preliminares

- No LMI Lab, LMIs são especificadas na forma  $F_{left}(x) < F_{right}(x)$ . Se  $F_{left}(x)$  ou  $F_{right}(x)$  não forem especificadas, assume-se 0 por *default*.
- Cada lado da LMI é estruturado na forma  $N^T M N$ , sendo  $M$  uma matriz simétrica. As matrizes  $N$  e  $M$  são chamadas outer e inner factor, respectivamente.
- Na maioria dos casos,  $N = I$ , não sendo necessário explicitá-la na especificação da LMI.

# Como especificar um conjunto de LMIs

## Passo 1: Inicialização

SETLMIS([]) resets the internal variables used for creating LMIs so that you can create a new system of LMIs.

SETLMIS(LMISYS0) uses an existing LMI system LMISYS0 as the starting point for creating a new system of LMIs.

## **Passo 2: Especificação das variáveis do problema**

$X = \text{LMIVAR}(\text{TYPE}, \text{STRUCT})$  adds a new matrix variable  $X$  to the LMI system currently specified

## TYPE - Structure of X:

- 1 -> symmetric block diagonal (blocos simétricos na diagonal)
- 2 -> full rectangular
- 3 -> other (elementos iguais a zero,  $x_n$  ou  $-x_n$  em posições especificadas)

STRUCT - Additional data on the structure of  $X$

TYPE = 1: the  $i$ -th row of STRUCT describes the  $i$ -th diagonal block of  $X$

STRUCT( $i,1$ )  $\rightarrow$  block size

STRUCT( $i,2$ )  $\rightarrow$  block type:

0 (scalar block  $t \times t$ ), 1 (full symmetric block), -1 (zero block)

TYPE = 2: STRUCT =  $[M,N]$  if  $X$  is a  $M \times N$  matrix

TYPE = 3: STRUCT is a matrix of the same dimension as  $X$  where  
STRUCT( $i,j$ ) is either 0 if  $X(i,j) = 0$ ,  $+n$  if  $X(i,j) = n$ -th decision variable,  
 $-n$  if  $X(i,j) = (-1) \times n$ -th decision variable.

## Exemplos:

$X = \text{lmivar}(1, [2 \ 1]) \rightarrow 2 \times 2$  full symmetric matrix

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

$Y = \text{lmivar}(2, [2 \ 3]) \rightarrow 2 \times 3$  matrix

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

$Z = \text{lmivar}(1, [3 \ 0]) \rightarrow 3 \times 3$  scalar matrix

$$Z = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$



### Passo 3: Inserção de cada LMI

LMITAG = NEWLMI adds a new LMI to the LMI system currently described and attaches the identifier LMITAG to it. Declaring LMIs with NEWLMI is optional and only meant to make the code more readable.

Output: LMITAG (identifier of the new LMI). Its value is L if there are already L-1 LMIs in the system. This value remains unchanged in all subsequent modifications of the LMI system

## Passo 4: Especificação de cada LMI

LMITERM(TERMID,A,B,FLAG) adds one term to some LMI in the LMI system currently specified. A term is either an outer factor, a constant matrix, or a variable term  $A*X*B$  or  $A*X'*B$  where  $X$  is a matrix variable. The first input TERMID specifies which LMI and block the term belongs to.

Note: Because the OFF-DIAGONAL blocks  $(i,j)$  and  $(j,i)$  are transposed of one another, specify the term content of **ONLY ONE** of these two blocks.

TERMID(1) = +n -> left-hand side

TERMID(1) = -n -> right-hand side

For outer factors, set TERMID(2:3) =  $[0 \ 0]$ . Otherwise, set TERMID(2:3) =  $[i \ j]$  if the term belongs to the  $(i,j)$  block of the LMI

TERMID(4) = 0 -> constant term

TERMID(4) = X -> variable term  $A*X*B$

TERMID(4) = -X -> variable term  $A*X'*B$

where X is the variable identifier returned by LMIVAR

A -> value of the outer factor, constant term, or left coefficient in variable terms  $A*X*B$  or  $A*X'*B$

B -> right coefficient in variable terms  $A*X*B$  or  $A*X'*B$

FLAG -> quick way of specifying the expression  $A*X*B+B'*X'*A'$  in a DIAGONAL block. Set FLAG='s' to specify it with only one command.

Observações (extraídas do manual do Robust Control Toolbox):

- Os blocos são zero por default.
- Um valor escalar  $\alpha$  pode ser especificado em lugar de uma matriz da forma  $\alpha I$ . A dimensão da matriz identidade  $I$  é inferida pelo contexto.

## Passo 5: Conclusão

LMISYS = GETLMIS returns a computer description LMISYS of the currently described LMI system.

LMIINFO(LMISYS) Gives information about:

- the variable matrices (dimensions and structure)
- the block structure and dimensions of the LMIs
- the term content of each LMI

NDECV = DECNBR(LMISYS) returns the number of decision variables NDECV in the system of LMIs.

## Como testar a factibilidade de um conjunto de LMIs

$$[TMIN, XFEAS] = FEASP(LMISYS)$$

Given an LMI feasibility problem:

Find  $x$  such that  $L(x) < R(x)$ ,

FEASP solves the auxiliary convex program:

Minimize  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t \cdot I$

TMIN  $\rightarrow$  value of  $t$  upon termination.

The LMI system is feasible iff  $TMIN \leq 0$

XFEAS  $\rightarrow$  corresponding minimizer.

If  $TMIN \leq 0$ , XFEAS is a feasible vector for the set of LMI constraints.

$[TMIN, XFEAS] = FEASP(LMISYS)$

Use DEC2MAT to get the matrix variable values from XFEAS.

$X = DEC2MAT(LMISYS, DECVARS, XID)$  returns the value of the matrix variable with identifier XID given the LMI system description LMISYS and the vector DECVARS of decision variable values.

## Exemplo: Análise de estabilidade

Seja um sistema com dinâmica descrita pela seguinte equação de estado a tempo contínuo:

$$\dot{x} = Ax$$

O sistema é assintoticamente estável (todos os autovalores de  $A$  possuem parte real negativa) se e somente se existir uma matriz  $P > 0$  que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$A^T P + PA < 0$$



Vamos realizar a análise de estabilidade com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são  $-1$  e  $-2$ .

## Passo 1: Inicialização

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

`setlmis([])`

## Passo 2: Especificação das variáveis

$P = \text{Imivar}(1, [2 \ 1])$

- Type = 1 (P é uma matriz simétrica bloco-diagonal)
- Struct = [2 1] (uma linha  $\rightarrow$  um único bloco):
- Block size = 2 (Bloco tem dimensões  $2 \times 2$ )
- Block type = 1 (Bloco é uma matriz cheia)

## Passo 3: Inserção de cada LMI

LMIs a serem inseridas:

$$A^T P + PA < 0 \quad (1)$$

$$P > 0 \quad (2)$$

**Primeira LMI:**  $A^T P + PA < 0$

LyapEq = newlmi

lmiterm([LyapEq 1 1 P],1,A,'s')

- LyapEq: Valor positivo (lado esquerdo da LMI)
- [1 1]: Bloco (1,1) da LMI
- Termo da forma  $A_{lmi} P B_{lmi}$  com  $A_{lmi} = 1$  e  $B_{lmi} = A$
- FLAG = 's': Simetrização do termo:  $A^T P + PA$

## Segunda LMI: $P > 0$

$P_{pos} = \text{newlmi}$

$\text{lmiterm}([-P_{pos} \ 1 \ 1 \ P], 1, 1)$

- $-P_{pos}$ : Valor negativo (lado direito da LMI)
- $[1 \ 1]$ : Bloco (1,1) da LMI
- Termo da forma  $A_{lmi} P B_{lmi}$  com  $A_{lmi} = 1$  e  $B_{lmi} = 1$

**Arquivo Matlab:** ex1.m

## Exemplo: Análise de estabilidade

Experimente repetir a análise de estabilidade com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são 1 e  $-2$ .

# Problemas de programação semidefinida

MINCX - Minimizes a linear objective under LMI constraints

$[COPT, XOPT] = \text{MINCX}(\text{LMISYS}, C)$  solves the optimization problem

Minimize  $c' * x$  subject to  $L(x) < R(x)$

where  $x$  is the vector of decision variables (free scalar variables).

→ A chamada a esta rotina não permite fazer distinção entre desigualdades estritas e não estritas. Contudo, se as LMIs não forem estritamente factíveis será retornado um diagnóstico de não factibilidade\*.

---

\*Vide [www.mathworks.com/help/robust/ug/advanced-topics.html](http://www.mathworks.com/help/robust/ug/advanced-topics.html)



## Controle preditivo robusto empregando LMIs

- Referências:

MACIEJOWSKI, p. 233 - 239.

KOTHARE, M. V.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained predictive control using linear matrix inequalities.

**Automatica**, v. 32, n. 10, p. 1361-1379, 1996.

# Incerteza politópica

Assume-se que a dinâmica da planta seja descrita por um modelo da forma

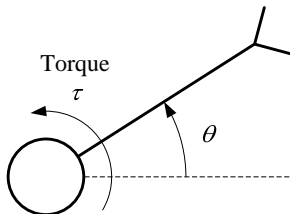
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

em que  $A, B$  são matrizes **incertas** que pertencem a um dado **politopo**  $\Omega$  com vértices  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_L, B_L)$ . Em outras palavras, existem escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L \geq 0$  tais que

$$A = \sum_{j=1}^L \lambda_j A_j, \quad B = \sum_{j=1}^L \lambda_j B_j$$
$$\sum_{j=1}^L \lambda_j = 1$$

**Notação:**  $\Omega = \text{Co}\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_L, B_L)\}$

## Exemplo: Servomecanismo posicionador



- Momento de inércia:  $J$  (conhecido)
- Coeficiente de atrito viscoso:  $b \in [b_{min}, b_{max}]$
- Característica do motor:  $\tau = \kappa u$ ,  $\kappa \in [\kappa_{min}, \kappa_{max}]$

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = \kappa u$$

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = \kappa u$$

- Variáveis de estado:  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ .
- Equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{J}x_2 + \frac{\kappa}{J}u\end{aligned}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}}_{A_c} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\kappa}{J} \end{bmatrix}}_{B_c} u$$

Discretização aproximada com período de amostragem  $T$ :

$$x(k+1) = \underbrace{(I + A_c T)}_A x(k) + \underbrace{B_c T}_B u(k)$$

$$A(b) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - \frac{bT}{J} \end{bmatrix}, \quad B(\kappa) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\kappa T}{J} \end{bmatrix}$$

$$b \in [b_{min}, b_{max}], \quad \kappa \in [\kappa_{min}, \kappa_{max}]$$

Neste caso, há dois parâmetros incertos independentes.

O politopo  $\Omega$  terá quatro vértices:

- ①  $A(b_{min}), B(\kappa_{min})$
- ②  $A(b_{min}), B(\kappa_{max})$
- ③  $A(b_{max}), B(\kappa_{min})$
- ④  $A(b_{max}), B(\kappa_{max})$

# Formulação do Problema

- Função de custo a ser minimizada no instante  $k$ :

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \|\hat{x}(k+i|k)\|_S^2 + \|\hat{u}(k+i|k)\|_R^2$$

com  $S = S^T > 0$  e  $R = R^T > 0$ .

- Problema min-max a ser resolvido:

$$\min_{\hat{\mathbf{u}}} \max_{(A,B) \in \Omega} J_{\infty}(k)$$

# Abordagem empregada

- Parametrizar o controle na forma  $\hat{u}(k+i|k) = F_k \hat{x}(k+i|k)$
- Determinar a matriz de ganho  $F_k$  de modo a minimizar um limitante superior  $\gamma$  para  $\max_{(A,B) \in \Omega} J_{\infty}(k)$ .

Expressando-se a matriz de ganho como  $F_k = YQ^{-1}$ , com  $Y$  e  $Q$  a serem determinadas, pode-se colocar o problema na seguinte forma:

$$\min_{\gamma > 0, Q > 0, Y} \gamma$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} Q & x(k) \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_j Q + B_j Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

desde que as LMIs (1) e (2) sejam factíveis com  $\gamma > 0$  e  $Q > 0$ .



- **Demonstração** de que  $\gamma$  é um limitante superior para  $J_\infty(k)$

Suponha que  $(\gamma, Q, Y)$  satisfaça as LMIs (1) e (2), com  $\gamma > 0$  e  $Q > 0$ .  
Sejam ainda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L \geq 0$  tais que

$$\sum_{j=1}^L \lambda_j = 1$$

Em vista de (2), tem-se

$$\sum_{j=1}^L \lambda_j \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_j Q + B_j Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

isto é,  $\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \sum_{j=1}^L \lambda_j A_j Q + \sum_{j=1}^L \lambda_j B_j Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0$

Portanto:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} Q & 0 & 0 & AQ + BY \\ 0 & \gamma I & 0 & S^{1/2}Q \\ 0 & 0 & \gamma I & R^{1/2}Y \\ \hline (AQ + BY)^T & QS^{1/2} & Y^T R^{1/2} & Q \end{array} \right] \geq 0$$

qualquer que seja  $(A, B) \in \Omega$ .

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$Q - \begin{bmatrix} (AQ + BY)^T & QS^{1/2} & Y^T R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AQ + BY \\ S^{1/2}Q \\ R^{1/2}Y \end{bmatrix} \geq 0$$

Ou seja:

$$Q - \begin{bmatrix} (AQ + BY)^T Q^{-1} & \gamma^{-1} Q S^{1/2} & \gamma^{-1} Y^T R^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AQ + BY \\ S^{1/2} Q \\ R^{1/2} Y \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Q - (AQ + BY)^T Q^{-1} (AQ + BY) - \gamma^{-1} Q S Q - \gamma^{-1} Y^T R Y \geq 0$$

$$Q \left[ Q^{-1} - (A + BYQ^{-1})^T Q^{-1} (A + BYQ^{-1}) \right. \\ \left. - \gamma^{-1} S - \gamma^{-1} Q^{-1} Y^T R Y Q^{-1} \right] Q \geq 0$$

Logo, como  $Q > 0$ , tem-se

$$Q^{-1} - (A + BYQ^{-1})^T Q^{-1} (A + BYQ^{-1}) \\ - \gamma^{-1} S - \gamma^{-1} Q^{-1} Y^T R Y Q^{-1} \geq 0$$

Ou seja:

$$(A + BYQ^{-1})^T Q^{-1} (A + BYQ^{-1}) - Q^{-1} \\ + \gamma^{-1} S + \gamma^{-1} Q^{-1} Y^T R Y Q^{-1} \leq 0$$

Definindo agora  $P = \gamma Q^{-1} > 0$  e fazendo  $F_k = YQ^{-1}$ , segue que

$$(A + BF_k)^T P \gamma^{-1} (A + BF_k) - P \gamma^{-1} \\ + \gamma^{-1} S + \gamma^{-1} F_k^T R F_k \leq 0$$

Logo, como  $\gamma > 0$ , tem-se

$$(A + BF_k)^T P (A + BF_k) - P + S + F_k^T R F_k \leq 0$$

$$(A + BF_k)^T P (A + BF_k) - P + S + F_k^T R F_k \leq 0$$

Portanto, tem-se

$$\hat{x}^T(k + i|k) \left[ (A + BF_k)^T P (A + BF_k) - P + S + F_k^T R F_k \right] \hat{x}(k + i|k) \leq 0$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(k + i|k) \left[ (A + BF_k)^T P (A + BF_k) \right] \hat{x}(k + i|k) - \hat{x}^T(k + i|k) P \hat{x}(k + i|k) \\ \leq -\hat{x}^T(k + i|k) S \hat{x}(k + i|k) - \hat{x}^T(k + i|k) F_k^T R F_k \hat{x}(k + i|k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(k+i|k) & \left[ (A + BF_k)^T P (A + BF_k) \right] \hat{x}(k+i|k) - \hat{x}^T(k+i|k) P \hat{x}(k+i|k) \\ & \leq -\hat{x}^T(k+i|k) S \hat{x}(k+i|k) - \hat{x}^T(k+i|k) F_k^T R F_k \hat{x}(k+i|k) \end{aligned}$$

Considerando agora  $\hat{u}(k+i|k) = F_k \hat{x}(k+i|k)$ , tem-se que

$$\hat{x}(k+i+1|k) = (A + BF_k) \hat{x}(k+i|k)$$

e portanto pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(k+i+1|k) P \hat{x}(k+i+1|k) & - \hat{x}^T(k+i|k) P \hat{x}(k+i|k) \\ & \leq -\hat{x}^T(k+i|k) S \hat{x}(k+i|k) - \hat{u}^T(k+i|k) R \hat{u}(k+i|k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(k+i+1|k)P\hat{x}(k+i+1|k) - \hat{x}^T(k+i|k)P\hat{x}(k+i|k) \\ & \leq -\hat{x}^T(k+i|k)S\hat{x}(k+i|k) - \hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k) \end{aligned}$$

Definindo-se  $V(x) = x^T P x$ , tem-se

$$\begin{aligned} & V\left(\hat{x}(k+i+1|k)\right) - V\left(\hat{x}(k+i|k)\right) \\ & \leq -\hat{x}^T(k+i|k)S\hat{x}(k+i|k) - \hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k) < 0, \forall \hat{x}(k+i|k) \neq 0 \end{aligned}$$

uma vez que  $S > 0$  e  $R > 0$ .

Portanto, conclui-se que  $V(x)$  é uma função de Lyapunov para a dinâmica descrita por

$$\hat{x}(k+i+1|k) = A\hat{x}(k+i|k) + B\hat{u}(k+i|k)$$

$$\hat{u}(k+i|k) = F_k\hat{x}(k+i|k)$$

mostrando que

$$\hat{x}(k+i|k) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$



$$\begin{aligned}
 & V\left(\hat{x}(k+i+1|k)\right) - V\left(\hat{x}(k+i|k)\right) \\
 & \leq -\hat{x}^T(k+i|k)S\hat{x}(k+i|k) - \hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k)
 \end{aligned}$$

Somando os dois lados desta desigualdade de  $i = 0$  a  $i = \infty$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \lim_{i \rightarrow \infty} V\left(\hat{x}(k+i|k)\right) - V\left(\hat{x}(k|k)\right) \\
 & \leq - \sum_{i=0}^{\infty} \hat{x}^T(k+i|k)S\hat{x}(k+i|k) - \hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k)
 \end{aligned}$$

Como  $\hat{x}(k|k) = x(k)$ ,  $\hat{x}(k+i|k) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$  e

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{x}^T(k+i|k)S\hat{x}(k+i|k) + \hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k)$$

tem-se

$$J_{\infty}(k) \leq V\left(x(k)\right)$$

Por outro lado, aplicando o complemento de Schur a

$$\begin{bmatrix} Q & x(k) \\ x^T(k) & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

(com  $Q > 0$ ), tem-se que  $x^T(k)Q^{-1}x(k) \leq 1$ , ou seja

$$x^T(k)\gamma^{-1}Px(k) \leq 1$$

$$\underbrace{x^T(k)Px(k)}_{V(x(k))} \leq \gamma$$

Portanto, conclui-se que

$$J_{\infty}(k) \leq \gamma$$

# Codificação empregando o LMI Lab

Variáveis:

$$\gamma \in \mathbb{R}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

```
setlmis([])
```

```
g = lmivar(1,[1 0])
```

```
Q = lmivar(1,[n,1])
```

```
Y = lmivar(2,[p,n])
```

Primeira LMI:

$$\begin{bmatrix} Q & x(k) \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

```
lmiterm([-1 1 1 Q],1,1)
```

```
lmiterm([-1 1 2 0],xk)
```

```
lmiterm([-1 2 2 0],1)
```

LMIs subsequentes - Para cada  $j = 1, 2, \dots, L$ :

$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_j Q + B_j Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

```

lmiterm([-2 1 1 Q],1,1)
lmiterm([-2 1 4 Q],Aj,1)
lmiterm([-2 1 4 Y],Bj,1)
lmiterm([-2 2 2 g],1,1)
lmiterm([-2 2 4 Q],Ssqr,1)
lmiterm([-2 3 3 g],1,1)
lmiterm([-2 3 4 Y],Rsqr,1)
lmiterm([-2 4 4 Q],1,1)

```

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma$$

$$F_k = YQ^{-1}$$

```

lmisys = getlmis
ndecvar = decnbr(lmisys)
c = zeros(ndecvar,1)
c(1) = 1
[copt,xopt] = mincx(lmisys,c)
Ysol = dec2mat(lmisys,xopt,Y)
Qsol = dec2mat(lmisys,xopt,Q)
Fk = Ysol*inv(Qsol)

```

# Exemplo

Arquivo Matlab: ex2.m

Vide observação a seguir sobre o cálculo do custo para comparação com DLQR.

## Observação

Seja

$$J_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) S x(k) + u^T(k) R u(k)$$

com  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  e  $u(k) = Fx(k)$ . Pode-se então escrever:

$$J_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) \Psi x(k)$$

e

$$x(k+1) = A_{mf} x(k)$$

sendo  $\Psi = S + F^T R F$  e  $A_{mf} = A + B F$ .



$$J_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) \Psi x(k)$$

$$= x^T(0) \Psi x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x^T(k) \Psi x(k)$$

$$= x^T(0) \Psi x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k+1) \Psi x(k+1)$$

$$= x^T(0) \Psi x(0) + \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) A_{mf}^T \Psi A_{mf} x(k)$$

$$= x^T(0) \Psi x(0) + x^T(0) A_{mf}^T \Psi A_{mf} x(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x^T(k) A_{mf}^T \Psi A_{mf} x(k)$$

Por indução, conclui-se que

$$J_{\infty} = x^T(0) \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (A_{mf}^T)^j \Psi A_{mf}^j \right] x(0)$$

ou então:

$$J_{\infty} = x^T(0) \Psi_{\infty} x(0)$$

sendo

$$\Psi_{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} (A_{mf}^T)^j \Psi A_{mf}^j$$

Como visto na Aula 10, considerando que os autovalores de  $A_{mf}$  estejam no interior do círculo unitário,  $\Psi_{\infty}$  pode ser obtida como solução da seguinte equação de Lyapunov:

$$A_{mf}^T \Psi_{\infty} A_{mf} - \Psi_{\infty} + \Psi = 0$$

# Introdução de Restrições

## Restrições sobre a entrada da planta

Serão consideradas restrições simétricas da forma

$$|\hat{u}_l(k+i|k)| \leq u_{\max,l}, \quad i \geq 0$$

para cada  $l = 1, 2, \dots, p$ .

Considerando que  $\hat{u}(k+i|k) = F_k \hat{x}(k+i|k)$ , com  $F_k = YQ^{-1}$ , tem-se

$$\max_{i \geq 0} |\hat{u}_l(k+i|k)|^2 = \max_{i \geq 0} |(YQ^{-1})_l \hat{x}(k+i|k)|^2$$

sendo  $(YQ^{-1})_l$  a  $l$ -ésima linha da matriz  $YQ^{-1}$ .

Por outro lado:

$$\left| (YQ^{-1})_i \hat{x}(k+i|k) \right|^2 = \left| \left( YQ^{-1/2} \right)_i Q^{-1/2} \hat{x}(k+i|k) \right|^2$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\left| \left( YQ^{-1/2} \right)_i Q^{-1/2} \hat{x}(k+i|k) \right|^2 \leq \left\| \left( YQ^{-1/2} \right)_i \right\|^2 \left\| Q^{-1/2} \hat{x}(k+i|k) \right\|^2$$

Analisemos o termo  $\left\| Q^{-1/2} \hat{x}(k+i|k) \right\|^2$ .

Sabendo que

$$V\left(\hat{x}(k+i+1|k)\right) - V\left(\hat{x}(k+i|k)\right) < 0, \forall \hat{x}(k+i|k) \neq 0$$

com  $V(x) = x^T P x = \gamma x^T Q^{-1} x$  e  $\gamma > 0$ , tem-se

$$\hat{x}^T(k+i+1|k) Q^{-1} \hat{x}(k+i+1|k) < \hat{x}^T(k+i|k) Q^{-1} \hat{x}(k+i|k), \forall \hat{x}(k+i|k) \neq 0$$

Por outro lado, tem-se ainda que  $x^T(k) Q^{-1} x(k) \leq 1$ . Logo:

$$\hat{x}^T(k+i|k) Q^{-1} \hat{x}(k+i|k) \leq 1, \forall i \geq 0$$

ou seja,

$$\left\| Q^{-1/2} \hat{x}(k+i|k) \right\|^2 \leq 1, \forall i \geq 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\max_{i \geq 0} |(YQ^{-1})_I \hat{x}(k + i|k)|^2 &\leq \max_{i \geq 0} \left\| (YQ^{-1/2})_I \right\|^2 \left\| Q^{-1/2} \hat{x}(k + i|k) \right\|^2 \\ &\leq \left\| (YQ^{-1/2})_I \right\|^2 = (YQ^{-1}Y^T)_{II}\end{aligned}$$

Desse modo, é suficiente impor

$$(YQ^{-1}Y^T)_{II} \leq u_{max,I}^2$$

$$(YQ^{-1}Y^T)_{ll} \leq u_{max,l}^2$$

Sabendo que  $A \geq B \Rightarrow A_{ll} \geq B_{ll}$ , pode-se ver que esta restrição será satisfeita se existir  $X = X^T$  tal que  $X_{ll} \leq u_{max,l}^2$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ , e

$$YQ^{-1}Y^T \leq X$$

Esta última desigualdade pode também ser reescrita como uma LMI:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

que pode ser agregada às demais LMIs envolvidas no problema de otimização.



A restrição  $X_{ll} \leq u_{max,l}^2$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ , pode ser imposta através da seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} e_1^T X e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^T X e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_p^T X e_p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{max,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{max,2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{max,p}^2 \end{bmatrix}$$

## Restrições sobre a saída da planta

Suponha que as variáveis de saída sujeitas a restrições estejam relacionadas com o estado através de uma equação da forma

$$y(k) = Cx(k)$$

sendo  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  uma matriz conhecida.

Serão consideradas restrições simétricas da forma

$$|\hat{y}_l(k+i|k)| \leq y_{\max,l}, \quad i \geq 1$$

para cada  $l = 1, 2, \dots, q$ .

Estas restrições poderiam ser tratadas de forma similar às do controle. Contudo, vale salientar que as restrições de saída estão relacionadas com o estado  $\hat{x}(k+i|k)$  a partir de  $i = 1$ , enquanto as restrições de controle partiam de  $i = 0$ .

Com efeito, não faz sentido impor restrições de saída em  $i = 0$ , pois o estado atual  $x(k)$  é uma constante no problema de otimização.

Já no caso do controle, as restrições em  $i = 0$  condicionam o ganho  $F_k$ , que será utilizado na geração de  $\hat{u}(k|k)$  a partir de  $x(k)$ .

Note-se inicialmente que

$$|\hat{y}_l(k+i|k)|^2 = |C_l \hat{x}(k+i|k)|^2$$

sendo  $C_l$  a  $l$ -ésima linha da matriz  $C$ .

Por outro lado, tem-se

$$\hat{x}(k+i|k) = (A + BF_k)\hat{x}(k+i-1|k), \quad i \geq 1$$

e, portanto,

$$\max_{i \geq 1} |C_l \hat{x}(k+i|k)|^2 = \max_{i \geq 1} |C_l (A + BF_k) \hat{x}(k+i-1|k)|^2$$

Tem-se ainda que

$$\begin{aligned} |C_l(A + BF_k)\hat{x}(k + i - 1|k)|^2 &= |C_l(A + BF_k)Q^{1/2}Q^{-1/2}\hat{x}(k + i - 1|k)|^2 \\ &\leq \left\| C_l(A + BF_k)Q^{1/2} \right\|^2 \left\| Q^{-1/2}\hat{x}(k + i - 1|k) \right\|^2 \leq \left\| C_l(A + BF_k)Q^{1/2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, basta impor

$$\left\| C_I(A + BF_k)Q^{1/2} \right\|^2 \leq y_{\max,l}^2$$

isto é,

$$\left\| C_I(A + BYQ^{-1})Q^{1/2} \right\|^2 \leq y_{\max,l}^2$$

ou seja,

$$C_I(A + BYQ^{-1})Q(A + BYQ^{-1})^T C_I^T \leq y_{\max,l}^2$$

$$C_I(AQ + BY)Q^{-1}(AQ + BY)^T C_I^T \leq y_{\max,l}^2$$

para todo  $(A, B) \in \Omega$ .

A restrição

$$C_l(AQ + BY)Q^{-1}(AQ + BY)^T C_l^T \leq y_{max,l}^2, \forall (A, B) \in \Omega$$

pode ser imposta acrescentando-se as seguintes LMIs ao problema de otimização:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C_l^T \\ \star & y_{max,l}^2 \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, 2, \dots, L$$

para cada  $l = 1, 2, \dots, q$ .

# MPC Robusto empregando LMIs

## Informação requerida sobre a planta:

- Vértices  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_L, B_L)$  do politopo  $\Omega$
- Matriz  $C$  que relaciona o estado com as saídas sujeitas a restrições
- Limitantes (simétricos) sobre a excursão dos controles:  $u_{max} \in \mathbb{R}^p$
- Limitantes (simétricos) sobre a excursão das saídas:  $y_{max} \in \mathbb{R}^q$

## Parâmetros de projeto:

- Matrizes de peso  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$



## Rotina principal:

- 1 Ler  $x(k)$  (estado da planta)
- 2 Resolver o problema de otimização

$$\min_{\gamma > 0, Q > 0, Y, X} \gamma$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} Q & x(k) \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$
$$\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & A_j Q + B_j Y \\ \star & \gamma I & 0 & S^{1/2} Q \\ \star & \star & \gamma I & R^{1/2} Y \\ \star & \star & \star & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \star & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} e_1^T X e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^T X e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_p^T X e_p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_{\max,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{\max,2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{\max,p}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C_l^T \\ \star & y_{\max,l}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L, \quad l = 1, 2, \dots, q$$

- 3 Calcular o ganho  $F_k = YQ^{-1}$
- 4 Atualizar o controle aplicado à planta:  $u(k) = F_k x(k)$
- 5 Fazer  $k = k + 1$
- 6 Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

# Implementação em Matlab

- `mpc_lmi.m`: S-function que implementa o controlador

Exemplo:

- `exemplo_mpc_lmi.m`: Definição das matrizes do modelo da planta (integrador duplo) e dos pesos do MPC.
- `sim_mpc_lmi.mdl`: Diagrama de simulação.

# Finalização do curso

## **Próxima aula: Prova**

- Duração: 150 minutos
- Consulta permitida a livros, anotações pessoais e material distribuído ao longo do curso.

## **Entrega dos trabalhos:**

- Data: 25 de junho de 2019 (3a feira da segunda semana de exames)
- Horário: 13:30 às 14:00
- Local: Sala 2204

**Obrigado pela atenção !**