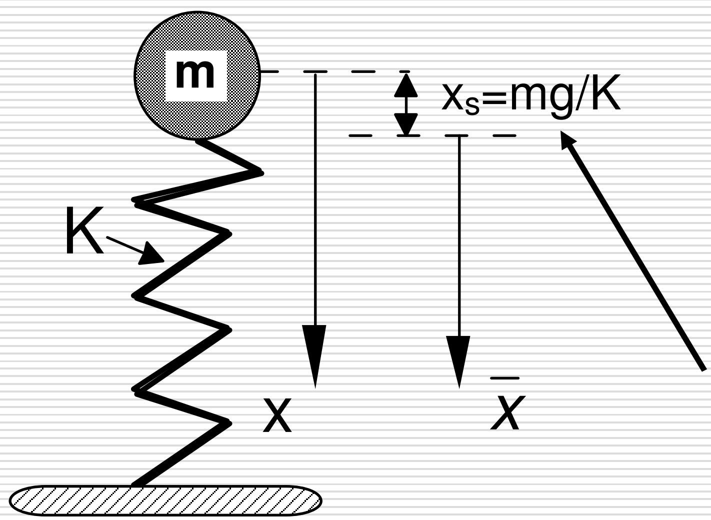
AE-712 - AEROELASTICIDADE

Aeroelasticidade Dinâmica

Introdução

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA/IEA

Equações do movimento da seção típica com 1 GDL - Introdução



$$\bar{x} = x - \frac{mg}{K}$$

Em problemas de vibração sempre medimos os deslocamentos dinâmicos a partir do ponto de equilíbrio.

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{x} + Kx = mg$$

EDO de 2ª ordem a coeficientes constantes

$$\ddot{\bar{x}} + \frac{K}{m}\bar{x} = 0$$

Solução da EDO:

$$\bar{x} = X e^{st} \qquad \ddot{\bar{x}} = s^2 X e^{st}$$

Substituindo a solução acima na equação de movimento podemos isolar a dependência temporal:

$$s^2 X e^{st} + \frac{K}{m} X e^{st} = 0 \Rightarrow X e^{st} \left(s^2 + \frac{K}{m} \right) = 0$$

$$s^2 = -\frac{K}{m} \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}} \therefore s = \pm i\sqrt{\frac{K}{m}} = \pm i\omega$$

Autovalores solução da equação característica

Solução final…

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\bar{x}(t) = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$\bar{x}(t) = (X_1 + X_2)\cos \omega t + i(X_1 - X_2)\sin \omega t$$

$$\bar{x}(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

Solução final

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{x}}(0) = v_0$$

$$\bar{x}(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \qquad \Rightarrow C_1 = \bar{x}_0$$

$$\dot{\bar{x}}(0) = -\omega \cdot C_1 \sin 0 + \omega \cdot C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Freqüência natural

É o resultado da solução da equação característica do sistema

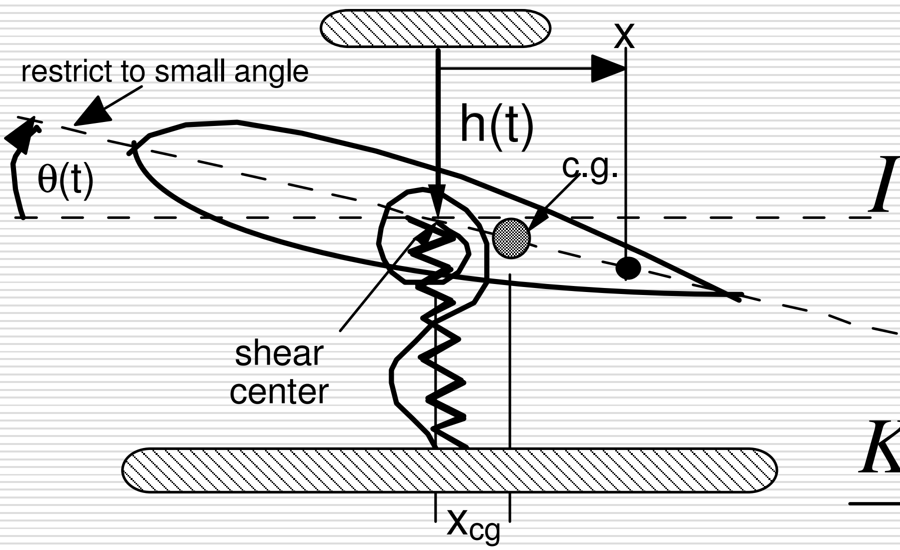
$$Xe^{st}\left(s^2+\frac{K}{m}\right)=0$$

$$equação\ característica$$

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Depende das características de rigidez e inércia do sistema

Exemplo: Seção típica com 1 GDL



$$I_\theta \ddot{\theta} + K_T \theta = qSeC_{L_\alpha} \theta$$

$$I_\theta \ddot{\theta} + \left(K_T - qSeC_{L_\alpha} \right) \theta = 0$$

$$\frac{K_T - qSeC_{L\alpha}}{K_T} = 1 - \frac{qSeC_{L\alpha}}{K_T} =$$

Equação torna-se homogênea

$$I_\theta \ddot{\theta} + \bar{K}_T \theta = 0$$

$$= 1 - \bar{q} \quad , \qquad \frac{qSeC_{L_\alpha}}{K_T} = \bar{q}$$

Solução elementar

$$\bar{K}_T = K_T\left(1-\bar{q}\right) = \underbrace{\left(K_T - qSeC_{L\alpha}\right)}_{\downarrow}$$

Note que esta é nossa velha conhecida, a rigidez aeroelástica

$$\theta\left(t\right) = \theta_0 e^{st}$$

$$s^2 I_\theta \theta_0 e^{st} + \bar{K}_T \theta_0 e^{st} = \left(s^2 I_\theta + \bar{K}_T\right)\theta_0 e^{st} = 0$$

$$\boxed{s^2 = -\frac{\bar{K}_T}{I_\theta} \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}}$$

Solução elementar

Análise das possibilidades de solução:
Se tivermos a rigidez aeroelástica menor que zero, o sistema apresentará uma solução composta por dois expoentes reais um positivo e outro negativo.

Esta solução caracteriza um crescimento exponencial de uma das parcelas da Solução para θ com o tempo indicando a instabilidade. Note que é análogo ao caso estático, rigidez aeroelástica menor que zero implica em uma instabilidade aeroelástica, no caso a divergência.

$$\overline{K}_T = K_T\left(1-\overline{q}\right)$$

$$\overline{K}_T < 0$$

$$\theta\left(t\right) = \theta_1 e^{pt} + \theta_2 e^{-pt}$$

$$p = \pm\, i\sqrt{\frac{-\overline{K}_T}{I_\theta}} =$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{\overline{K}_T}{I_\theta}}$$

Solução elementar

Por outro lado se a rigidez aeroelástica for maior que zero, o que indica que as forças aerodinâmicas são menores que as forças elásticas, a resposta do sistema será do tipo harmônica

$$\boxed{s^2 = -\frac{\bar{K}_T}{I_\theta} \Rightarrow s = \pm i\sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}}$$

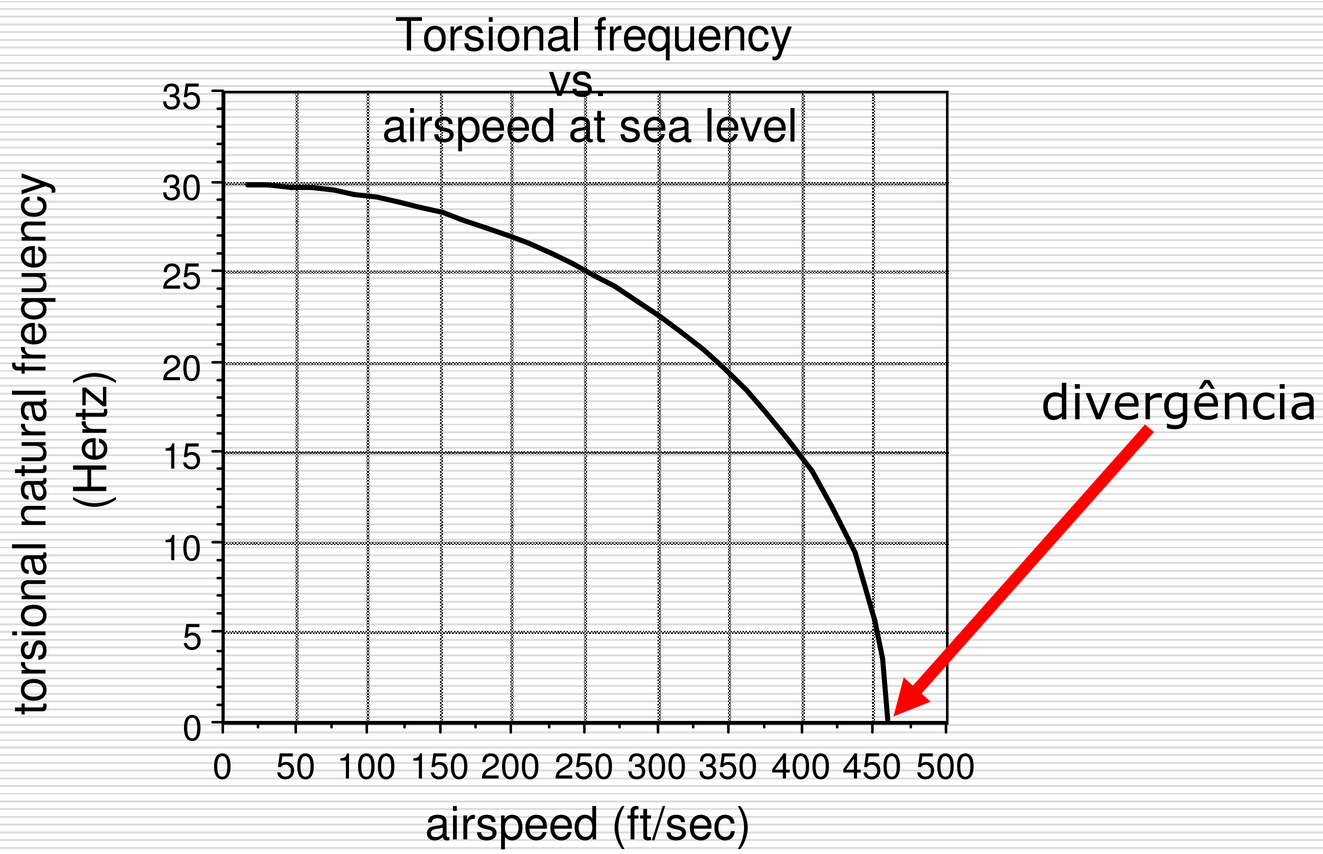
$$\theta(t) = \theta_1 e^{i\omega t} + \theta_2 e^{-i\omega t}$$

$$\theta(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$s = i\omega = \pm i\sqrt{\frac{\bar{K}_T}{I_\theta}}$$

Onde C1 e C2 são determinados a partir de condições iniciais e de contorno

Frequência X velocidade – 1 GDL



Conclusões

1. Sistema estável: apresenta um movimento oscilatório senoidal quando perturbado;
2. Sistema instável: apresenta um movimento exponencialmente divergente quando sistema é perturbado.
3. Sistema neutramente estável: apresenta um movimento constante com o tempo, podendo ser senoidal ou não.

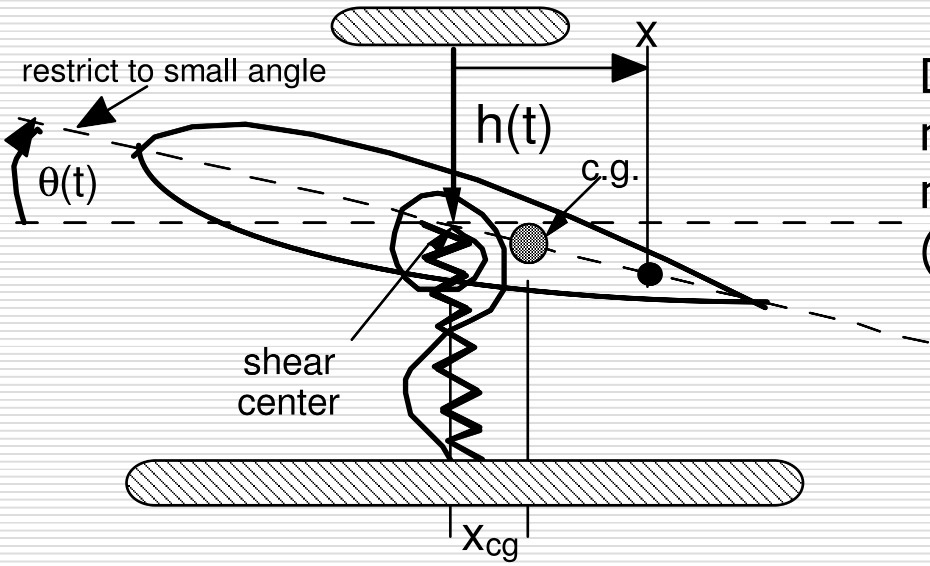
Rigidez aerodinâmica

- A rigidez aerodinâmica é um conceito decorrente da variação de um esforço aerodinâmico dado um deslocamento;
- Está explícito em aeroelasticidade estática;
- E também quando o fenômeno aeroelástico é dinâmico:

$$I_\theta \ddot{\theta} + \left(K_T - qSeC_{L_\alpha} \right) \theta = 0$$

- Entretanto, da mesma forma que a rigidez associada a um deslocamento promove um esforço aerodinâmico, podemos ter um amortecimento que estaria associado às velocidades do corpo, e também forças de inércia que estariam associadas às acelerações. **Note que agora o nosso problema é dinâmico.**

Modelo dinâmico do seção típica com 2 GDL

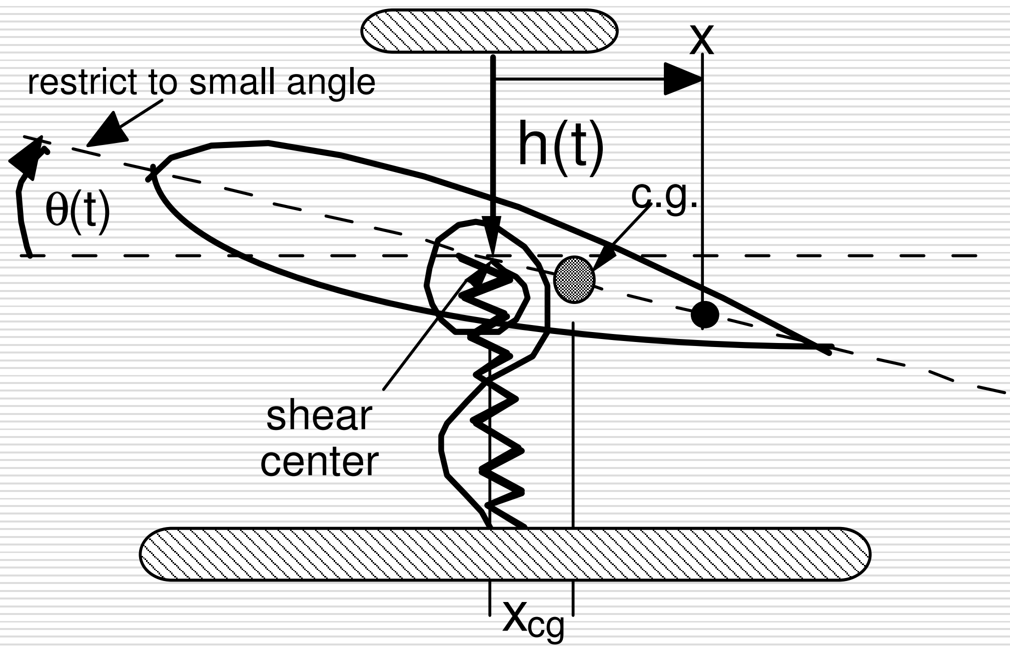


Derivação das equações de movimento empregando métodos de energia (Equações de Lagrange)

É um modelo clássico para dar início a compreensão dos fenômenos aeroelásticos. Assume-se que as molas são lineares e continuamos assumindo pequenas perturbações.

Seção típica com 2 GDL

a) Convenção de sinais por conveniência:
O "plunge" é positivo para baixo.
b) O sistema de referência possui origem no centro elástico (***Xce*** = 0)



h(t) = grau de liberdade em "plunge" (flexão)
θ(t) = grau de liberdade em "pitch" (torção)

Medidos a partir da posição de equilíbrio estático

Expressões de energia

z(t) é o deslocamento para baixo em uma posição x localizada após ao centro elástico $\rightarrow$ $z = h + x\sin\theta \cong h + x\theta$

Energia cinética $T = \dfrac{1}{2}\int_{x=-x_l}^{x=x_t} (\rho)(\dot{h} + x\dot{\theta})^2 dx$

Energia potencial $U = \dfrac{1}{2}K_h h^2 + \dfrac{1}{2}K_T \theta^2$

Equações de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\eta}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial\eta_i} = Q_i}$$

Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}\int_{x=-x_l}^{x=x_t}(\rho)(\dot{h}+x\dot{\theta})^2 dx$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(m\dot{h}^2 + 2S_\theta\dot{h}\dot{\theta}+I_\theta\dot{\theta}^2)}$$

x_θ* =*x_{CG} posição do centro de massa com relação ao sistema de coordenadas da seção. No caso representa um desbalanceamento com relação ao eixo elástico

m é a massa total da seção típica

$$m = \int \rho(x)dx$$

S_θ é o momento estático, ou desbalanceamento estático

$$S_\theta = mx_\theta = \int \rho(x)xdx$$

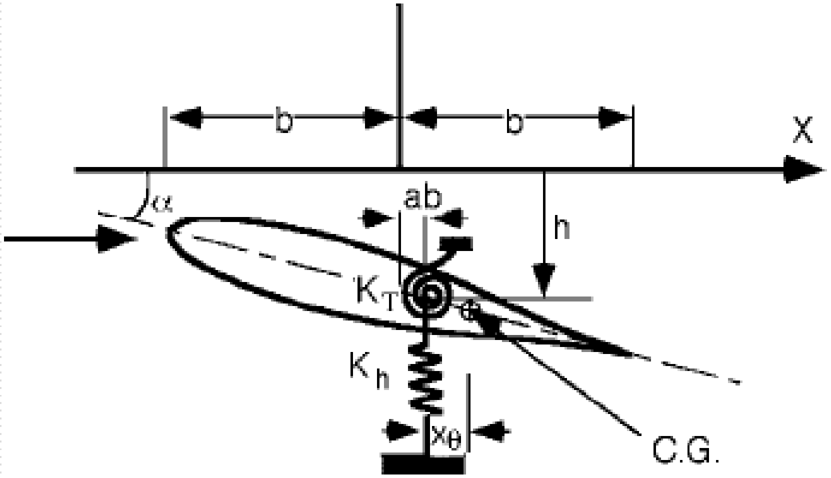
I_θ momento de inércia da seção típica, composto por:

$$I_\theta = \int \rho(x)x^2dx = I_o + mx_\theta^2$$

Equações do movimento

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} + mx_\theta \dot{\theta} \qquad \frac{\partial U}{\partial h} = K_h h$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mx_\theta \dot{h} + I_\theta \dot{\theta} \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = K_T \theta$$



Equações de movimento na forma matricial. Note que o acoplamento ocorre devido a excentricidade $\mathbf{x}_\theta$

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Parâmetros dinâmicos

- Definições:

$$r_\theta^2 = \frac{I_\theta}{m} \quad , \qquad \omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \quad ,$$

$$\omega_\theta^2 = \frac{K_T}{I_\theta} = \frac{K_T}{m r_\theta^2} \quad , \qquad r_\theta^2 = \frac{I_\theta}{m}$$

$$r_\theta^2 = r_0^2 + x_\theta^2 \quad , \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta} \quad ,$$

$$R = \frac{\omega_h}{\omega_\theta}$$

$r_0 \Rightarrow$ Raio de giração com relação ao cg

Solução elementar

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st}$$

Substituímos no sistema acoplado:

$$s^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Divide-se pelo termo exponencial

$$\boxed{\begin{bmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 mx_\theta) \\ (s^2 mx_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Determinante da matriz

$$\begin{vmatrix} (s^2 m + K_h) & (s^2 m x_\theta) \\ (s^2 m x_\theta) & (s^2 I_\theta + K_T) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(s^2 m + K_h\right)\left(s^2 I_\theta + K_T\right) - \left(s^2 m x_\theta\right)\left(s^2 m x_\theta\right) = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{K_h}{m}\right)\left(s^2 + \frac{K_T}{I_\theta}\right) - \left(s^2\right)\left(s^2 \frac{m x_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

Equação Característica

Parâmetros de freqüência desacoplados :

PERGUNTA: O QUE ACONTECE QUANDO O CG COINCIDE COM O CE?

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{m} \qquad \omega_\theta^2 = \frac{K_T}{I_\theta}$$

$$\boxed{m x_\theta^2 = I_0}$$

$$\left(s^2 + \omega_h^2\right)\left(s^2 + \omega_\theta^2\right) - \left(s^2\right)\left(s^2 \frac{m x_\theta^2}{I_\theta}\right) = 0$$

$$\boxed{\left(s^4\left(1 - \frac{m x_\theta^2}{I_\theta}\right) + s^2\left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2\right) + \omega_h^2 \omega_\theta^2\right) = 0}$$

Frequências naturais

$$\left(s^4 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right) + s^2 \left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2 \right) + \omega_h^2 \omega_\theta^2 \right) = 0 \quad , \quad \left(as^4 + bs^2 + c \right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad s^2 = \frac{-\left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2 \right) \pm \sqrt{\left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}}{2 \left(\frac{I_o}{I_\theta} \right)}$$

Finalmente, temos a expressão para *s* :

$$\boxed{s^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{I_\theta}{I_o} \right) \left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2 \right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{I_\theta}{I_o} \left(\omega_h^2 + \omega_\theta^2 \right) \right]^2 - \left(\frac{I_\theta}{I_o} \right) \omega_h^2 \omega_\theta^2}}$$

Cuidado, as frequências naturais são diferentes das frequências associadas a cada grau de liberdade do sistema desacoplado!

Movimento Harmônico Simples

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assume-se MHS -> $\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$

O que resulta em:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equações do Movimento Sistema Livre - Resumo

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Note que o sistema a dois graus de liberdade é um sistema acoplado dinamicamente, ou seja nas diagonais da matriz de massa temos os momentos estáticos;
- No domínio da frequência, assumindo MHS:

$$-\omega^2\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{h} \\ \overline{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{h} \\ \overline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Aerodinâmica Quase-Estacionária

- A proposta é estudar o problema da seção típica com dois graus de liberdade, considerando a teoria aerodinâmica quase-estacionária;
- Esta teoria pressupõem que as cargas aerodinâmicas são proporcionais aos deslocamentos, velocidades e acelerações associadas a condições de contorno estabelecidas sobre o corpo sujeito a um escoamento.

AN ELEMENTARY EXPLANATION OF THE FLUTTER MECHANISM

Samuel Pines
Chief Flutter & Computing Engineer
Republic Aviation Corporation

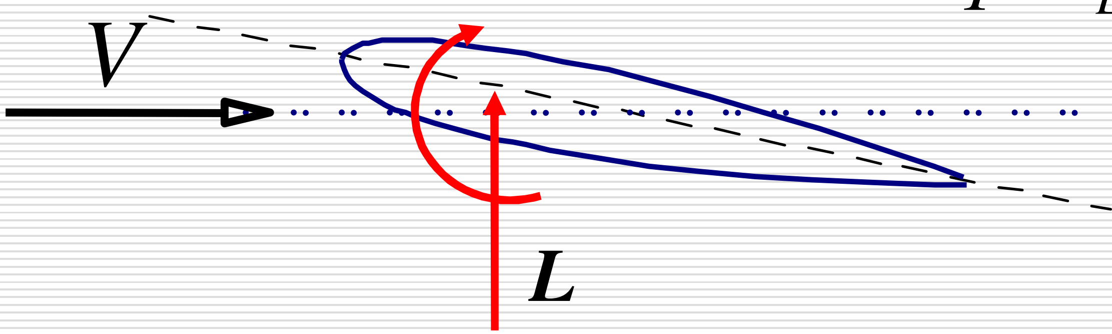
Flutter Quase-Estacionário

- Flutter é uma instabilidade dinâmica de natureza oscilatória e auto excitada que ocorre devido a interação entre dois modos de movimento distintos e um fornecimento de energia externo (carregamento aerodinâmico).
- Aerodinâmica quase-estacionária desconsidera efeitos associados ao atraso entre as forças aerodinâmicas geradas (auto-excitação) e o movimento da estrutura;
- Ou seja, o carregamento é função exclusivamente de deslocamentos, velocidades e acelerações do corpo (seção típica).
- Uma primeira aproximação assume que a sustentação e o momento é função de uma ângulo de ataque associado a variação em θ mais a velocidade de translação (dh/dt) dividida pela velocidade do escoamento não perturbado *V.*

Sustentação e Momento

(ref. Centro aerodinâmico)

$$L = qSC_{L_\alpha}\left(\theta + \frac{\dot{h}}{V}\right)$$



(ref. eixo elástico)

$$M_Y = L \cdot e = qS \cdot e \cdot C_{L_\alpha}\left(\theta + \frac{\dot{h}}{V}\right)$$

Sistema homogêneo

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A inclusão do carregamento aerodinâmico é feita adicionando ao lado direito a sustentação *L* e o momento *L.e*

Inclusão do carregamento aerodinâmico

$$\begin{bmatrix} m & mx_\theta \\ mx_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \\ Le \end{Bmatrix}$$

O sinal de L é trocado pois uma sustentação positiva age para cima enquanto que h é positivo para baixo

Dividimos por m, massa do aerofólio: , r_θ = raio de giração = $r_\theta^2 = \dfrac{I_\theta}{m}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L/m \\ Le/m \end{Bmatrix}$$

Substituindo o carregamento

- Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{V} & 0 \\ \frac{-e}{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \frac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Equação de vibração livre o aerofólio sujeito a um escoamento.

Problema estático:

- Derivadas temporais nulas:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{m} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_T}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L\alpha}}{m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Recuperamos o problema estático de onde podemos calcular a velocidade de divergência -> verificar!

Adimensionalizando...

$$\frac{1}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K_h}{m\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{K_T}{m\omega_\theta^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \big/ m\omega_\theta^2 \\ Le \big/ m\omega_\theta^2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L \big/ m\omega_\theta^2 \\ Le \big/ m\omega_\theta^2 \end{Bmatrix}$$

Carregamento Aerodinâmico é função dos deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} -L/m\omega_\theta^2 \\ Le/m\omega_\theta^2 \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} =$$

Fazemos a substituição das relações para a sustentação e o momento, como função dos deslocamentos apenas.

$$= \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} -1/V & 0 \\ e/V & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{Bmatrix} \cancel{\dot{h}} \\ \cancel{\dot{\theta}} \end{Bmatrix}}_{0} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Teoria de Pines

Teoria de Pines (1958)

- É uma maneira de chegarmos a solução do problema de estabilidade aeroelástica, através da solução de um sistema de equação homogêneo onde a contribuição aerodinâmica se dá através da rigidez somente.
- Ou seja, desconsidera-se os efeitos aerodinâmicos associados às velocidades de translação e rotação do aerofólio, uma vez que a sua inclusão implica em um amortecimento aerodinâmico o qual impediria tratar os sistema como um problema de vibração livre não amortecida.
- É uma forma conveniente e bastante simplificada para identificar uma condição de flutter.

Vibração livre com escoamento

$$\frac{1}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solução assumindo MHS

$$\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{st} = \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

Dividindo por $e^{i\omega t}$

$$\frac{-\omega^2}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} + \frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -e \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Associando a parâmetros de similaridade….

$$-\frac{\omega^2}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\Omega=\frac{\omega}{\omega_\theta}}$$

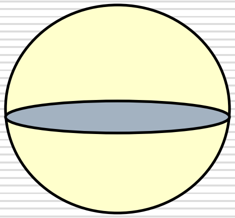
$$\boxed{q=\frac{1}{2}\rho V^2}$$

$$\boxed{-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & x_\theta \\ x_\theta & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0 \\ 0 & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{\rho V^2 SC_{L_\alpha}}{2m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h} \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}}$$

Definindo novos parâmetros

$$-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & x_\theta\\ x_\theta & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0\\ 0 & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{\rho V^2 S C_{L_\alpha}}{2m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$q=\frac{1}{2}\rho V^2,\quad \mu=\frac{m}{\pi\rho b^2 l}=\frac{massa\ da\ seção}{massa\ do\ volume\ de\ ar}\Rightarrow$$



μ = "massa aparente"

bω=[velocidade]

$$\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}=\frac{\rho V^2 c l C_{L_\alpha}}{2m\omega_\theta^2}=b\left(\frac{V}{b\omega_\theta}\right)^2\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu}\right)$$

Velocidade reduzida $=\dfrac{V}{b\omega_\theta}$

Parâmetros adimensionais

Estes parâmetros são úteis para caracterizarmos o fenômeno

$$\overline{V} = \frac{V}{b\omega_\theta}$$

Velocidade Reduzida

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

$$R^2 = \frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\overline{e} = \frac{e}{b}$$

$$\overline{r}_\theta = \frac{r_\theta}{b}$$

Adimensionalizando por b

1/b

1/b²

$$-\frac{\omega^2}{\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}1 & x_\theta\\ x_\theta & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2} & 0\\ 0 & r_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$R^2=\frac{\omega_h^2}{\omega_\theta^2}$$

$$\boxed{-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & \bar{x}_\theta\\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}R^2 & 0\\ 0 & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{qSC_{L_\alpha}}{mb\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\bar{e}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b\\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}}$$

Para surgir a massa aparente:

$$-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\frac{qSC_{L_\alpha}}{mb\omega_\theta^2}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -\bar{e}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\frac{qSC_{L_\alpha}}{m\omega_\theta^2}=b\left(\frac{V}{b\omega_\theta}\right)^2\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&-\Omega^2\begin{bmatrix}1 & \bar{x}_\theta \\ \bar{x}_\theta & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}R^2 & 0 \\ 0 & \bar{r}_\theta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}+\\ &\qquad+\left(\frac{C_{L_\alpha}}{\pi\mu}\right)\left(\frac{V}{b\omega_\theta}\right)^2\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & -\bar{e}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{h}/b \\ \bar{\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}\end{aligned}}$$

Sistema aeroelástico

- No domínio da frequência:

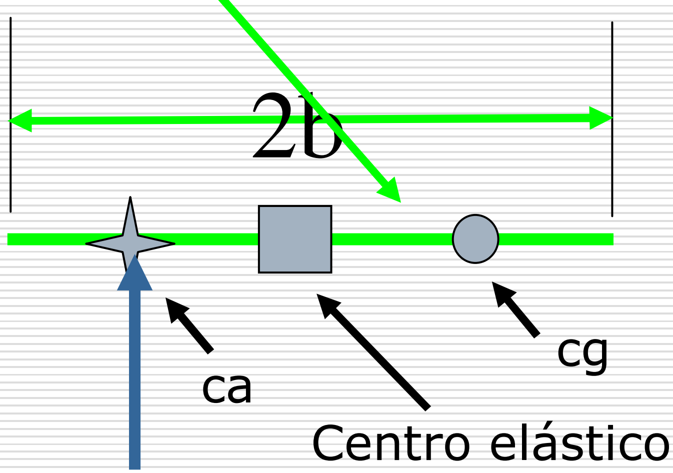
$$-1 \cdot \begin{bmatrix} \Omega^2 - R^2 & \Omega^2 \overline{x}_\theta - \overline{V}^2 \dfrac{C_{L\alpha}}{\pi\mu} \\ \Omega^2 \overline{x}_\theta & \Omega^2 \overline{r}_\theta^{\,2} - \overline{r}_\theta^{\,2} + \overline{V}^2 \dfrac{C_{L\alpha} e}{\pi\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{h} / b \\ \overline{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- E para estudar a estabilidade deste sistema, posso usar um critério de estabilidade.

Cálculo do Determinante

Para calcularmos a estabilidade, ou seja o flutter, busca-se a Equação característica para obter as suas raízes.

$$\left(\bar{r}_\theta^2 - \bar{x}_\theta^2\right)\Omega^4 - \left(\bar{r}_\theta^2\left[1 + R^2\right] - \frac{\left(\bar{e} + \bar{x}_\theta\right) C_{L\alpha} \bar{V}^2}{\pi\mu}\right)\Omega^2 + \left(\bar{r}_\theta^2 R^2 - R^2 \frac{\bar{V}^2 \bar{e} C_{L\alpha}}{\pi\mu}\right) = 0$$



$$\bar{d} = \bar{e} + \bar{x}_\theta$$

Distância adimensional entre o ca e o cg.

Equação quártica:

$$A\Omega^4 - B\Omega^2 + C = 0$$

Onde os coeficientes A, B e C são dados por:

$$\boxed{A = \left(\overline{r}_\theta^{\,2} - \overline{x}_\theta^{\,2}\right) = \overline{r}_0^{\,2} > 0}$$

-> Raio de giração ref. cg

$$B = \left(\overline{r}_\theta^{\,2}\left[1 + R^2\right] - \frac{\left(\overline{e} + \overline{x}_\theta\right) C_{L\alpha} \overline{V}^2}{\pi\mu} \right)$$

$$C = \left(\overline{r}_\theta^{\,2} R^2 - R^2 \frac{\overline{V}^2 \overline{e}\, C_{L\alpha}}{\pi\mu} \right)$$

Exame dos termos:

$$\boxed{B = \left(\bar{r}_\theta^{\,2}\left[1 + R^2\right]\right) - \left(\bar{d}\;{C_{L_\alpha}}\big/{\pi\mu}\right)\bar{V}^{\,2}}$$

Possui a forma:

$$B = b_1 - b_2\bar{V}^{\,2} \qquad b_1 = \bar{r}_\theta^{\,2}\left(1 + R\right) > 0$$

Como a solução para a eq. característica possui a forma:

$$\Omega^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_\theta}$$

Exame dos termos

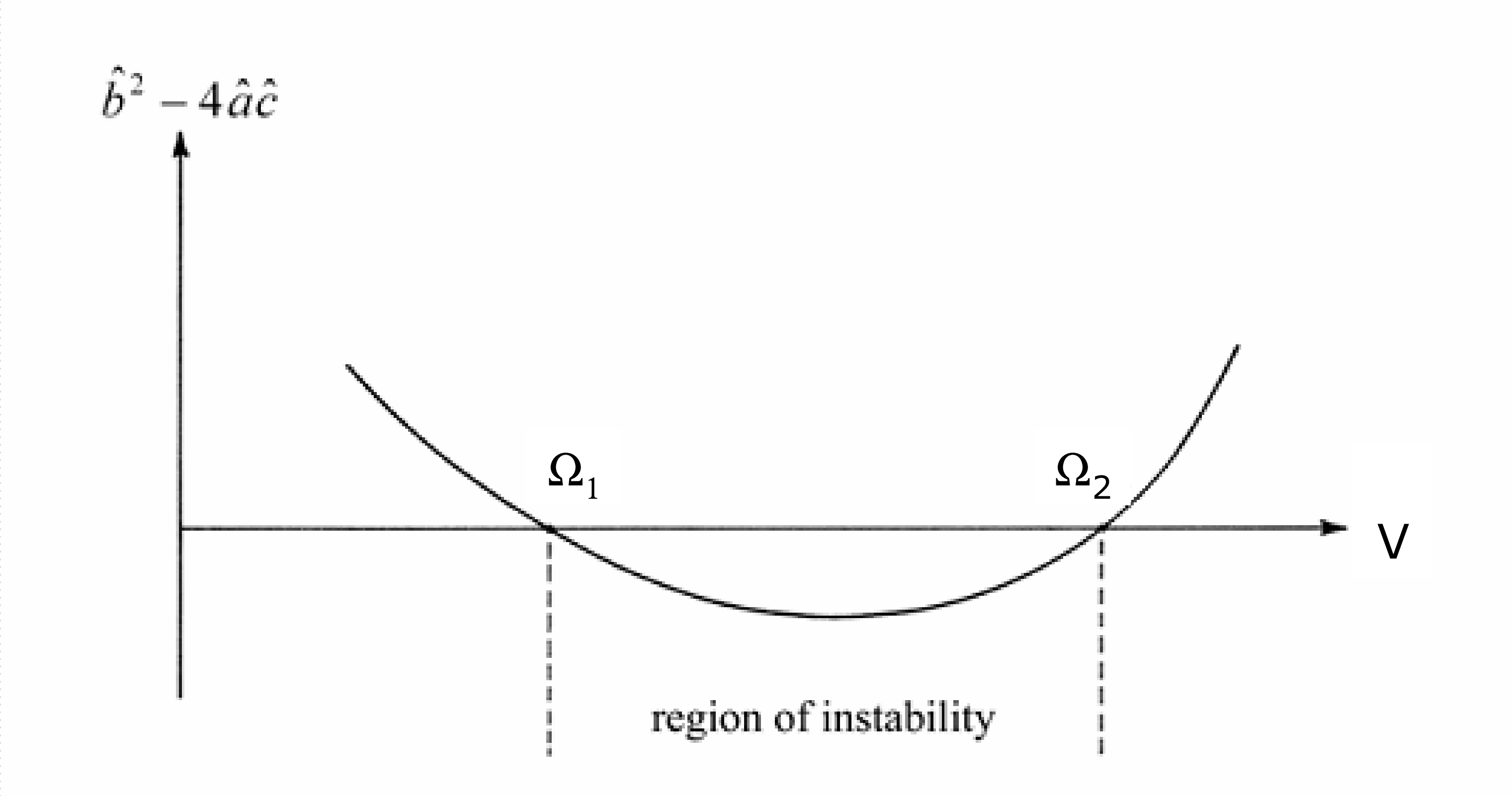
- Como b1 é maior que zero, e se V barra for igual a zero recuperamos as frequências naturais da seção típica.
- Uma mudança na velocidade reduzida (V barra) promove uma mudança dentro do radical.

$$\Omega^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- É positivo quando a velocidade reduzida é nula e decresce com o acréscimo nesta velocidade. Este efeito representa o acréscimo do acoplamento aerodinâmico causado pelo aumento da velocidade.

B^2-4AC em função de V

- Flutter em Ω_1



Ocorrência de flutter

- Com o acréscimo na velocidade reduzida, o termos dentro do radical decresce, torna-se **negativo** implicando em raízes complexas conjugadas;

$$\omega = \omega_0 \pm i\sigma \ , \quad \sigma > 0$$

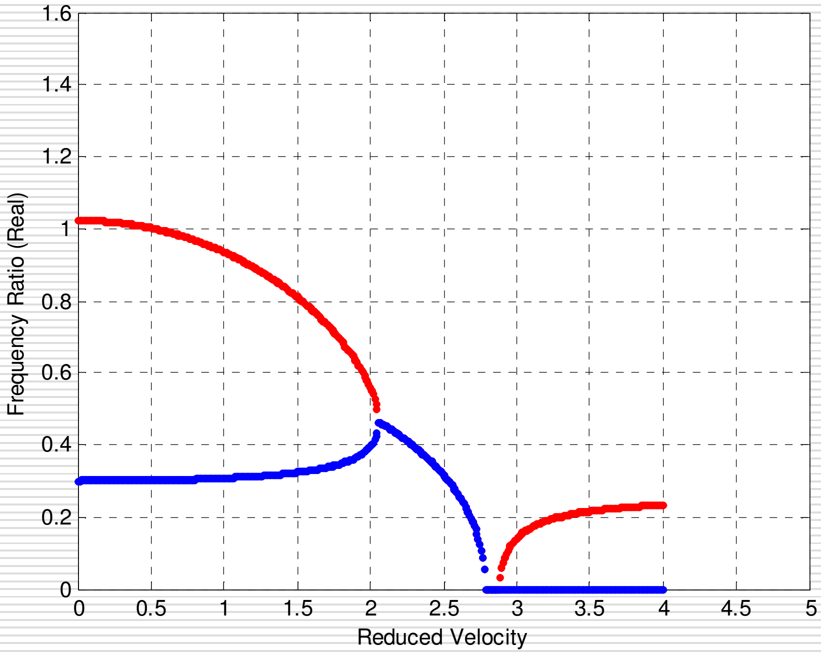
$$f(t) = a \cdot \begin{cases} e^{(i\omega_0 + \sigma)t} \\ e^{(i\omega_0 - \sigma)t} \end{cases}$$

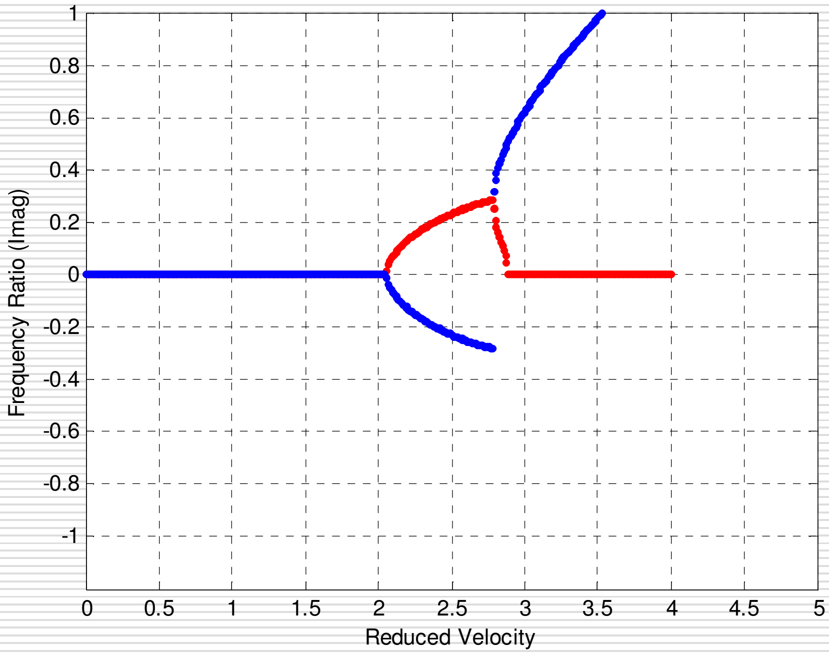
- Raízes complexas, indicam que o exponencial onde s é positivo indica um movimento divergente!

- Na situação quando B² = 4AC, temos a **velocidade reduzida** correspondente a **condição de flutter**.

Condições nominais

- Exemplo de um aerofólio com as seguintes características:
- X_θ = 0.10 , e = 0.30, R =0.30 ,ω_θ = 25 rad/s, μ = 20.0



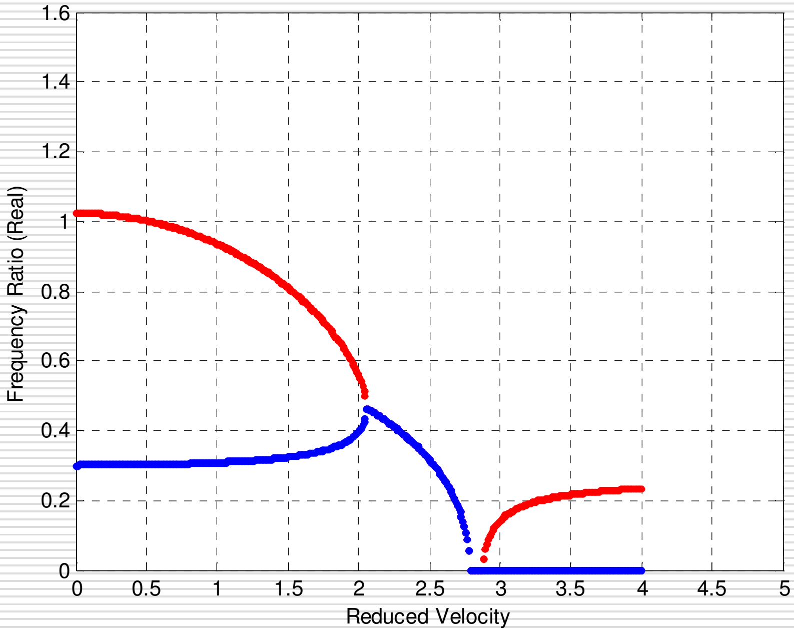


Efeito da massa aparente I

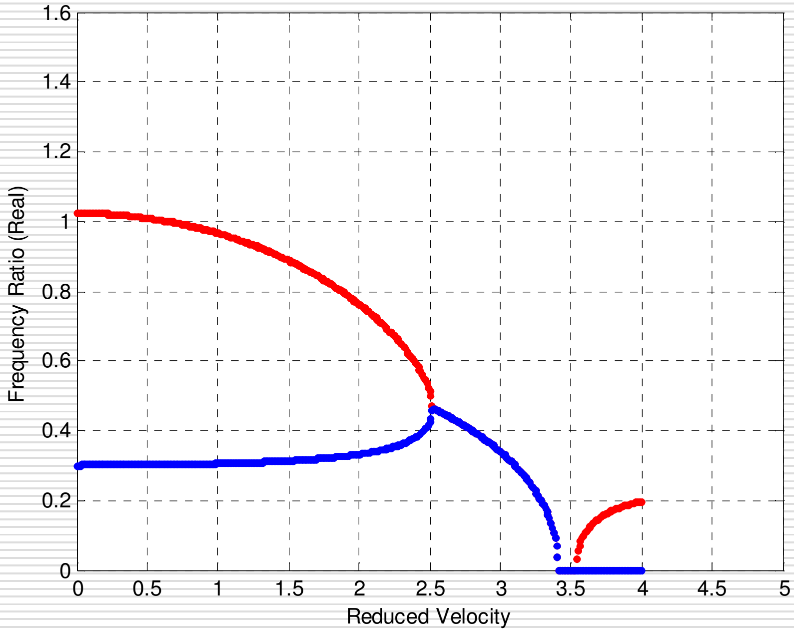
- Variando a massa aparente μ ...

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l}$$

$\mu = 20$



$\mu = 30$

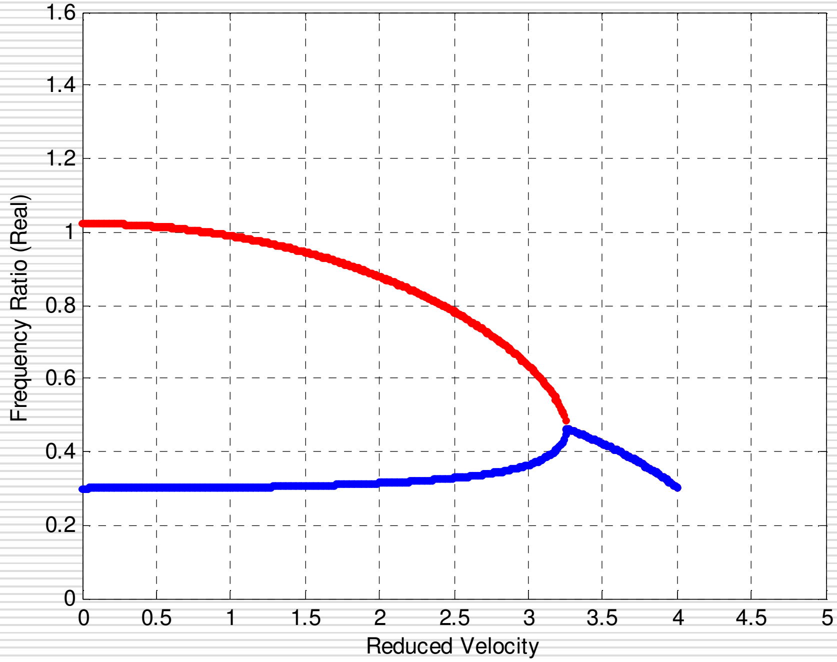


Efeito da massa aparente II

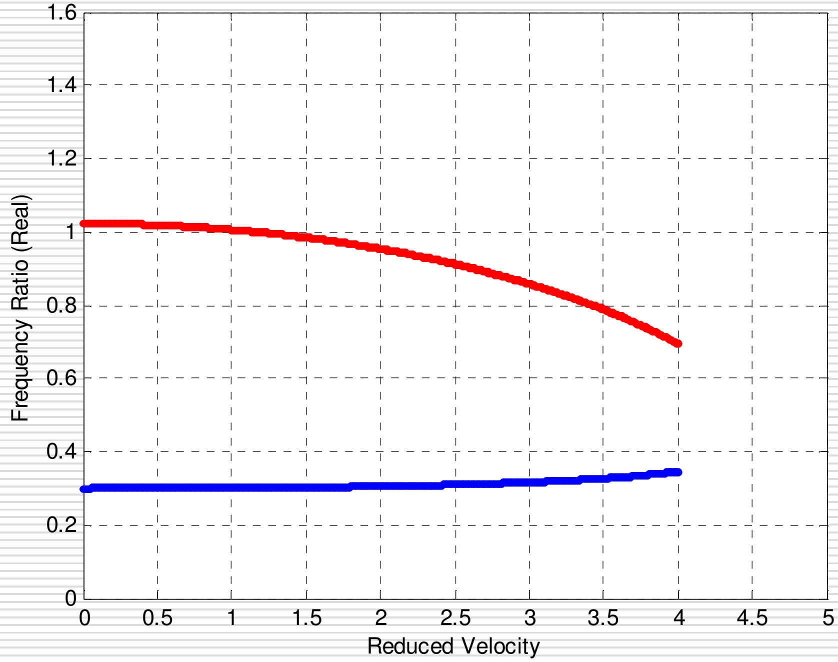
- E aumentando ainda mais a massa aparente...

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2 l}$$

μ = 50



μ = 100



Efeitos dos parâmetros no flutter

- Variação de posição do CG, CE e CA.
- A posição do CG em relação ao CE é dada por x_θ.
- A posição do CA em relação ao CE é dada por “e”.
- E a posição do CA ao CG é denotada por “d”.

- Vamos analisar a dinâmica da seção típica sujeita à variações paramétricas descritas em termos de posição do CA e do CG com relação ao CE.

- Programa em MATLAB (pines2gdl.m) ->

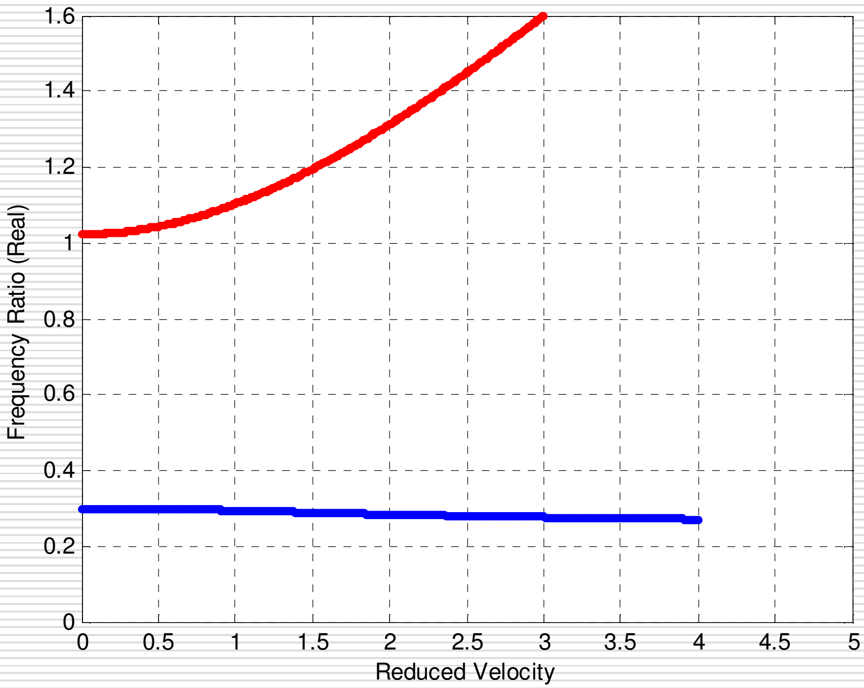
Método de Pines codificado:

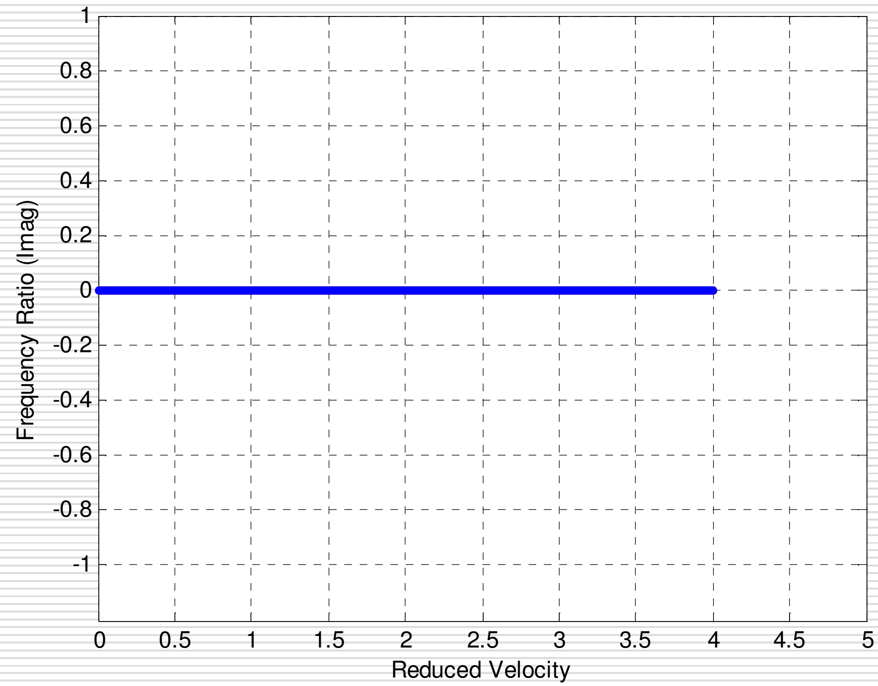
```
close all
clear all
%
% 2 dof system
% xth ; x _ theta
% rth2 ; ( r _theta)^2
% R2 ; (omega h /omega alpha)^2
% e -> distncia do CE ao CA - negativa atras do
      CE, positiva a frente do CE
b=3.0;
S = 1.0;
wth=25.0;
xth =0.10;
e= 0.30;
cla=2*pi;
d=e+xth;
R2 =(0.3)^2;
rth2=(0.5)^2;
mu =20.0 ;
%mu =30.0 ;
%mu =50.0 ;
%
```

```
for kk=1:400;
    vel(:,kk)=kk*0.01;
%
A=rth2-xth^2;
%
B=rth2*(1+R2)-(vel(:,kk)^2)*(d*cla)/(pi*mu);
%
C=R2*(rth2-(vel(:,kk)^2)*(e*cla)/(pi*mu));
%
rst1(:,kk)=sqrt((B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A));
rst2(:,kk)=sqrt((B-sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A));
%
end
figure(1);
plot(vel(1,:),real(rst1(1,:)),'.r',vel(1,:),
real(rst2(1,:)),'.b'),
axis([0.0 5.00 0 1.60]),xlabel('Reduced Velocity'),
ylabel('Frequency Ratio (Real)'),grid;
figure(2);
plot(vel(1,:),imag(rst1(1,:)),'.r',vel(1,:),
imag(rst2(1,:)),'.b'),
axis([0.0 5.00 -1.2 1.0]),xlabel('Reduced Velocity'),
ylabel('Frequency Ratio (Imag)'),grid;
```

Regra de Pines I

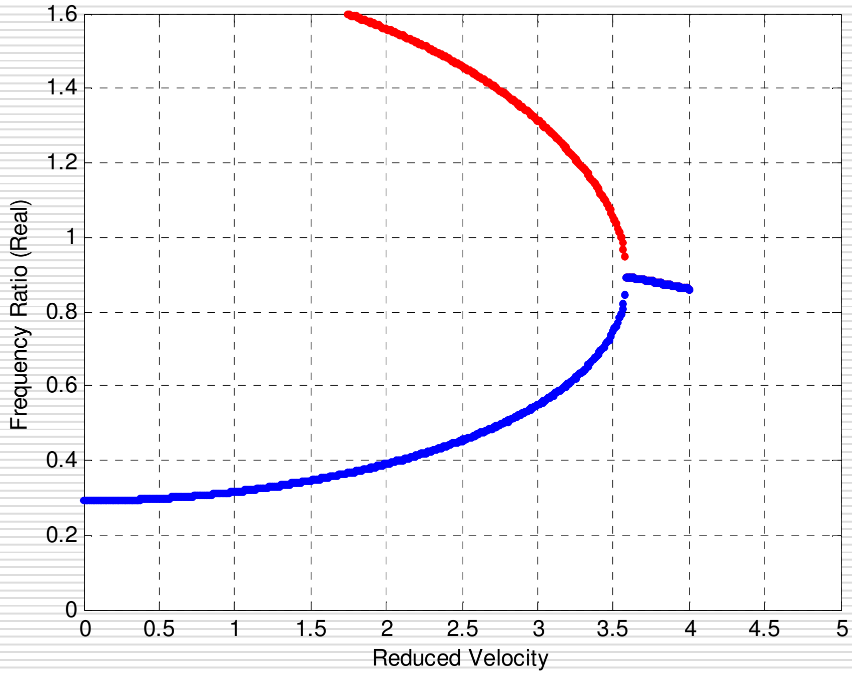
- CA atrás do CE e CG a frente do CE : x_θ = -0,10 , e =-0,30
- Nunca haverá flutter !

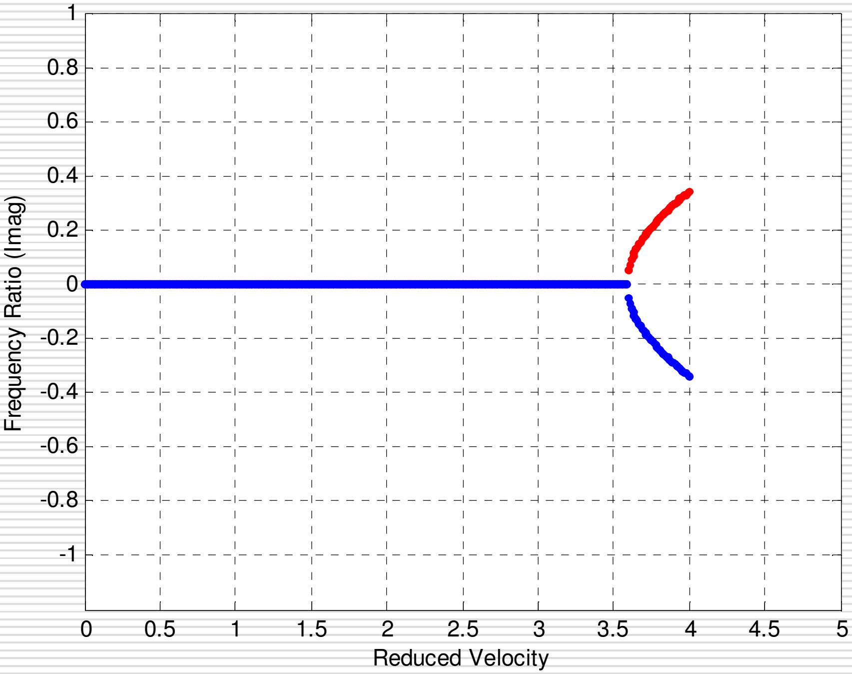




Regra de Pines II

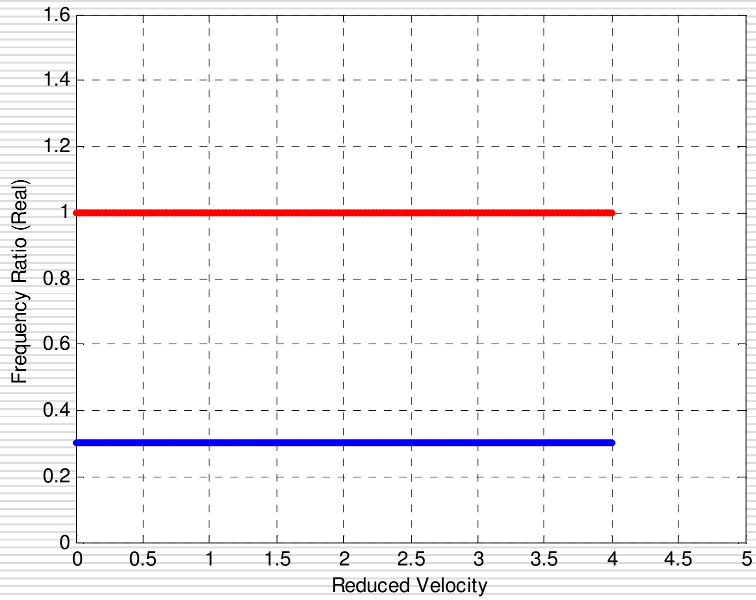
- CG e CA atrás do CE ($e = -0.30$, $x_\theta = 0.40$) -> flutter garantido pois $x_\theta > e$,
- Porém, se $x_\theta < e$ nunca haverá flutter !

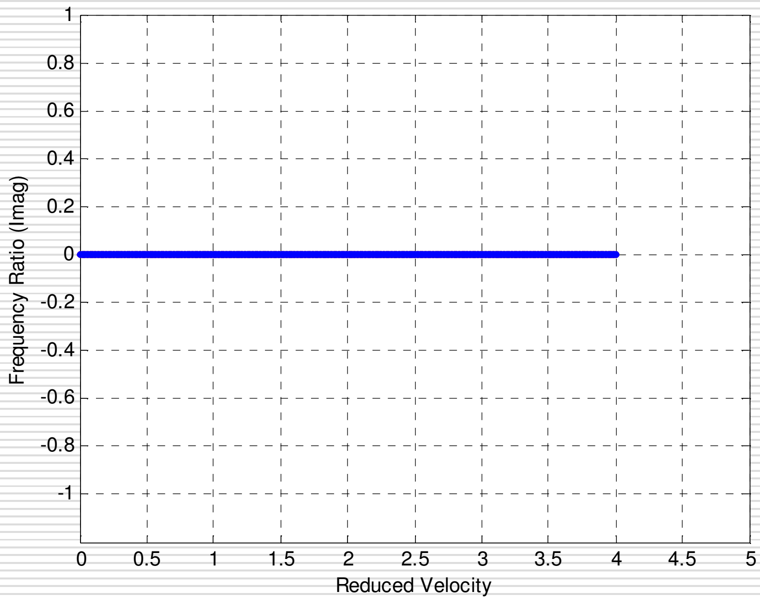




Regra de Pines III e IV

- CA a frente do CE e CM atrás do CE, bem como o CA e o CM atrás do CE, o flutter vai depender de parâmetros.
- Condição ideal CA=CE=CM (desacoplamnto dinâmico e aerodinâmico)



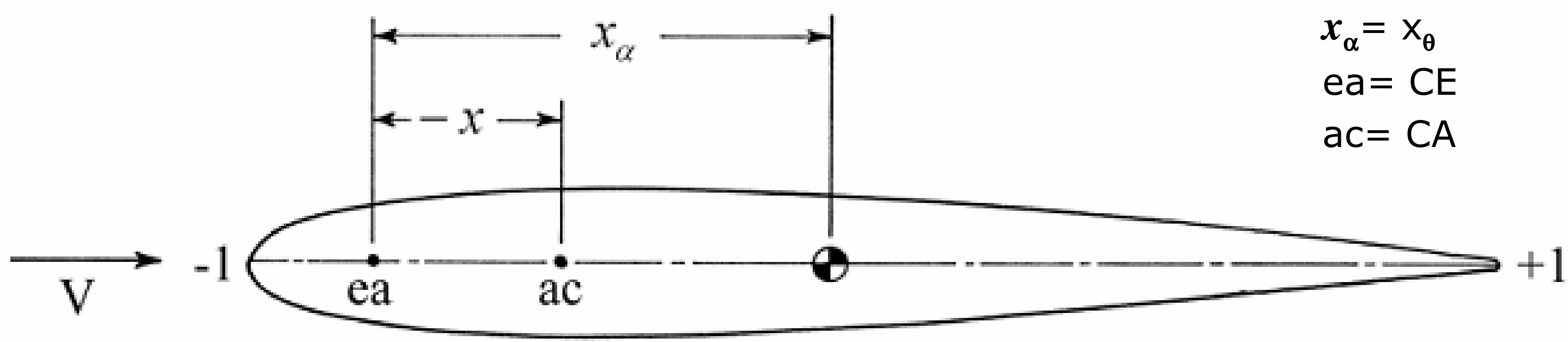


Conclusões

- Para evitar flutter, CG coincidente ou a frente do CE;
- Para evitar divergência, CA coincidente o ou a frente de CG;
- Flutter depende da combinação entre a altitude e a velocidade, isto é da pressão dinâmica;
- A pressão dinâmica de flutter é proporcional à rigidez em torção;
- O flutter é inversamente proporcional a $C_{L\alpha}$.

Conclusões

- Nunca teremos flutter quando o CG estiver a frente do eixo elástico ($x_\theta < 0$)
- Se o CG estiver atrás do CE, o flutter é possível somente se o CA estiver entre o CE e o CG.



$$x_\alpha \succ 0,\ x \prec 0,\ x_\alpha \succ |x|$$

e = $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}_\alpha = x_\theta$

ea= CE

ac= CA

CA a frente do CE

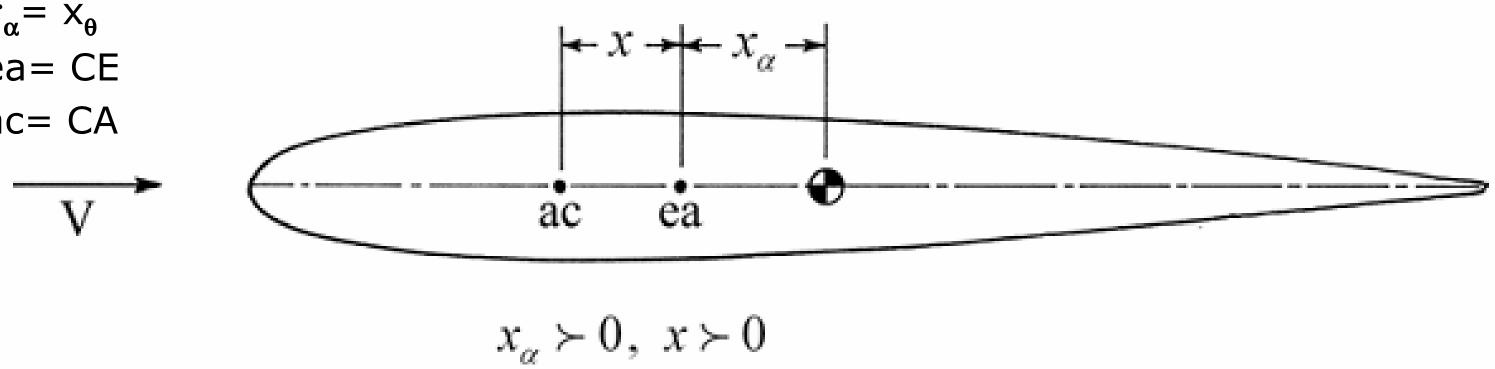
- O flutter será possível somente: $$\left(\frac{\omega_h}{\omega_\theta}\right)^2 \leq \frac{e + x_\theta}{e\left(1 + \frac{e \cdot x_\theta}{r_\theta^2}\right)}$$

e = $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x_\alpha}$ = x_θ

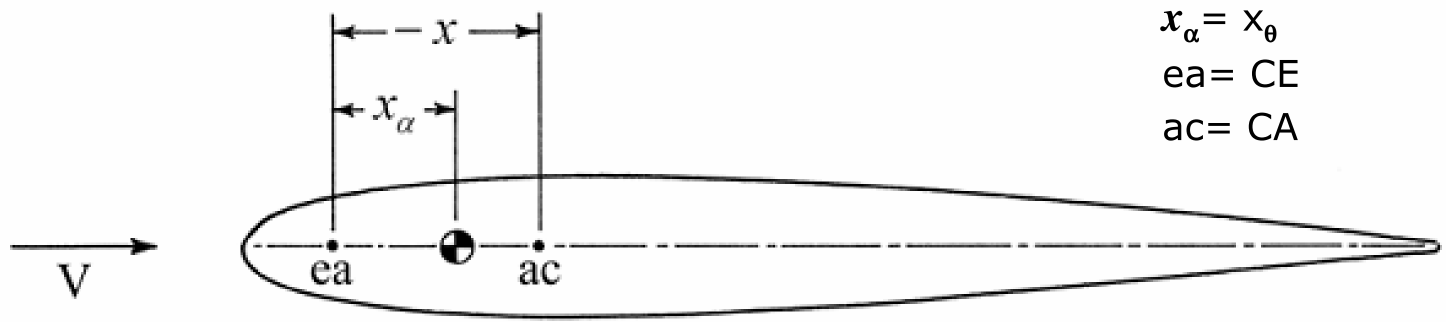
ea= CE

ac= CA



CA atrás do CG e CE

- O flutter ocorre somente se: $$\left(\frac{\omega_h}{\omega_\theta}\right)^2 > \frac{e - x_\theta}{e\left(1 + \frac{e \cdot x_\theta}{r_\theta^2}\right)}$$



$x_\alpha \succ 0,\ x \prec 0,\ |x| \succ x_\alpha$

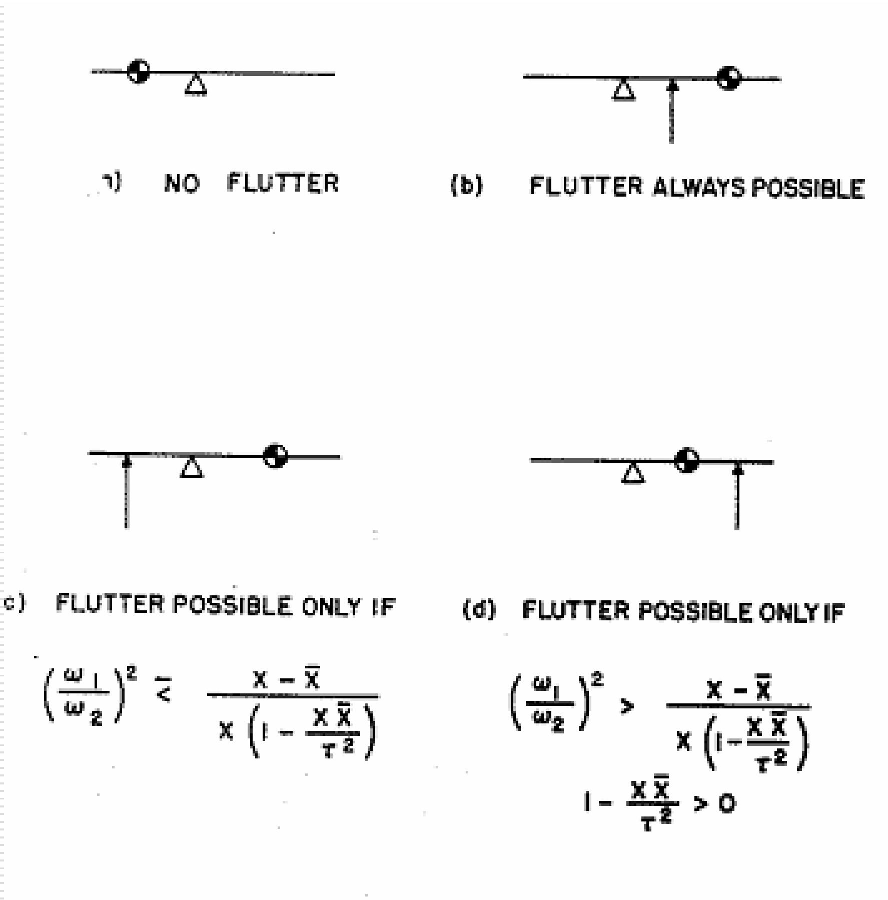
e = $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}_\alpha = x_\theta$

ea= CE

ac= CA

Esquema de Pines:



Causa do flutter

- O flutter clássico somente ocorre quando a interação de dois modos;
- Vamos supor que existam dois movimentos tais como os associados aos graus de liberdade da seção típica: h e α (ou θ como preferir).
- Ambos obedecem a um movimento harmônico simples, porém apresentam uma defasagem de um ângulo ϕ.
- Defasagem entre movimentos significa que em um determinado instante de tempo um deles atinge o seu máximo enquanto o outro não.
- Esta diferença de fase é essencial para o flutter.

O mecanismo do flutter

- Assume-se que os movimentos de arfagem e vertical são formados de forma que tenham amplitude e fase contantes
- Cálculo do trabalho realizado pelos esforços aerodinâmicos agindo no CA, durante um ciclo de dutação T_p.
- Lembre que:

$$\omega T_p = 2\pi \Rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega}$$

- O trabalho realizado pelo escoamento é representado pela força que que gera um carregamento (sustentação) a qual é aplicada no CA. O deslocamento resultante neste ponto é dado por:

$$z(t) = h - e \cdot \theta$$

Entendendo o Mecanismo de flutter

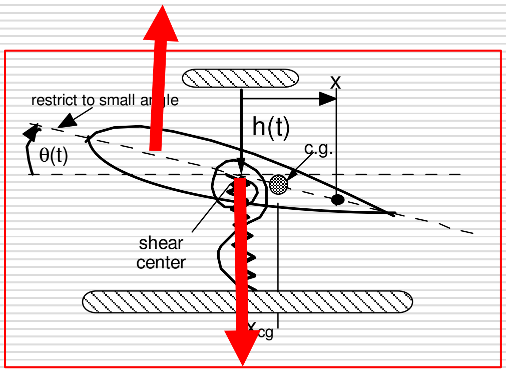
Assume-se um movimento defasado como:

$$\frac{h(t)}{b} = \left(\frac{h}{b}\right)_0 \cos \omega t \qquad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Vamos calcular o trabalho realizado pelo aerofólio em um ciclo de movimento:

$$\omega T_p = 2\pi = 1 \ ciclo$$

$$T_p = 2\pi / \omega$$



Trabalho realizado

- O trabalho realizado é representado pela seguinte relação:

$$W_{aero} = -\int_{o}^{T_p} L \bullet dz = -\int_{o}^{T_p} L \bullet \frac{dz}{dt} dt$$

- Como:

$$\frac{h(t)}{b} = \left(\frac{h}{b}\right)_0 \cos \omega t \quad \text{e} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$z(t) = h - e \cdot \theta \quad \text{e} \quad L = qSC_{L_\alpha}\theta$$

Trabalho por ciclo:

Temos:

$$L = qSC_{L_\alpha}\theta = qSC_{L_\alpha}\theta_o \cos(\omega t + \phi)$$

$$W_{aero} = -\int_o^{T_p} qSC_{L_\alpha}\theta_o \cos(\omega t + \phi) \bullet \left(\dot{h} - e\dot{\theta}\right) dt$$

$$W_{aero} = qSC_{L_\alpha}\theta_o \int_o^{T_p} \cos(\omega t + \phi) \bullet \omega \left(b\left(\frac{h}{b}\right)_o \sin \omega t - e\theta_o \sin(\omega t + \phi)\right) dt$$

$$W_{aero} = -qSC_{L_\alpha}\pi h_o \theta_o \sin\phi$$

Trabalho por ciclo

$$\boxed{W_{aero} = -qSC_{L_\alpha}\pi h_o \theta_o \sin\phi}$$

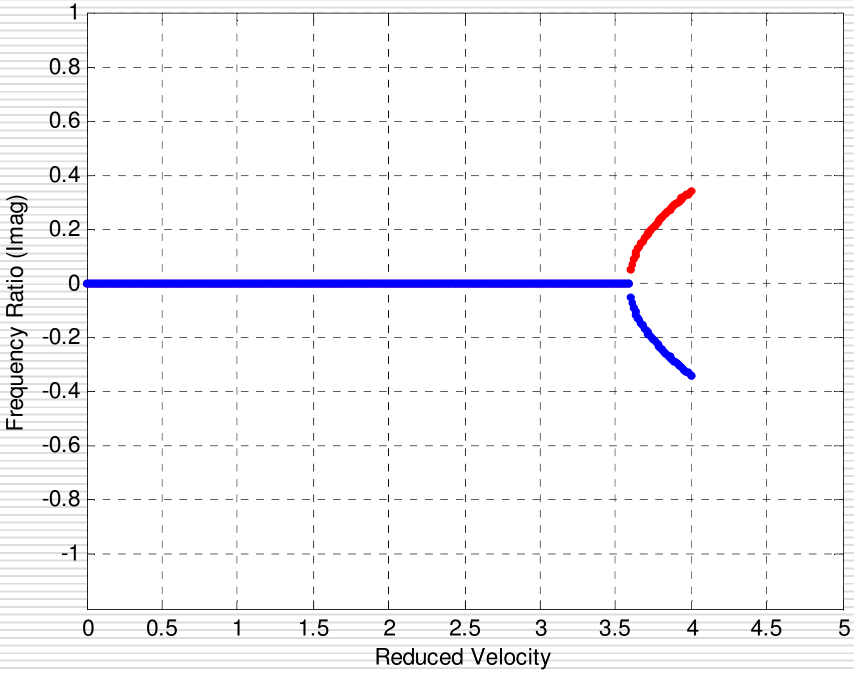
- Se $0 < \phi < 180^o$, $W_{aero} < 0$ → o aerofólio trasfere energia para o escoamento !

- Se $-180^o < \phi < 0$, $\sin\phi < 0$, o aerofólio absorve energia do escoamento, $W_{aero} > 0$, a tendência é aumentar a amplitude do movimento → Flutter !

- Quando $\phi = 180^o$ tem-se o ponto de estabilidade neutra, associado ao limite da condição onde o aerofólio começa a extrair energia do escoamento.

Acoplamento dos modos

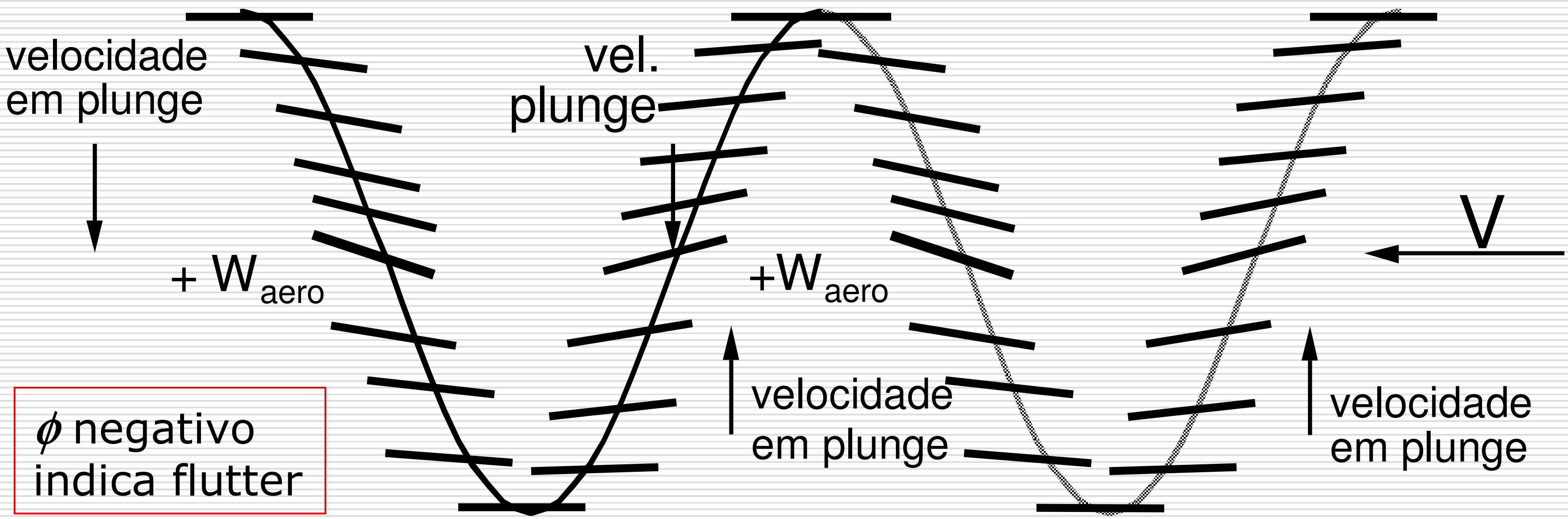
- Os movimentos de “pitch” e “plunge” estão defasados em 180º, o que é representado na solução de flutter pelo par de raízes complexas conjugadas que surgem na condição de flutter, onde ocorre o acoplamento destes dois graus de liberdade.



Defasagem entre os movimentos

$$W_{air} = -qSC_{L_\alpha}\pi h_o\theta_o \sin\phi$$

$$L \sim \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$



ϕ negativo indica flutter

Entendendo o movimento ...

- Analisando o movimento na amplitude mais negativa do movimento em plunge, o ângulo de arfagem é nulo (defasagem). A medida que a velocidade em plunge aumenta, o ângulo em arfagem decresce e a sustentação age na direção do movimento em plunge que aumenta.
- Quando o deslocamento em plunge é nulo, o ângulo em pitch é mais negativo. Aumentando o plunge, o pitch decresce porém sendo ainda negativo, a sustentação continua agindo na direção do movimento em plunge.
- Ao atingir o máximo deslocamento, a velocidade é nula, mas a partir deste ponto o ângulo de pitch aumenta (fica mais positivo) promovendo uma sustentação na direção do movimento restaurador em plunge, ou seja, trabalho positivo é realizado durante todo o ciclo, na condição em que a defasagem do movimento é em um ângulo onde $\sin \phi < 0$.