Aula 9

14 Maio 2019

Resumo da aula passada

- Tratamento de restrições - Implementação do caso SISO
- Extensão ao caso MIMO

Tópicos da aula de hoje

- Estabilidade em malha fechada

Ponto de equilíbrio

Considere um sistema com dinâmica a tempo discreto descrita por um modelo da forma

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big)$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função possivelmente não linear.

Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um ponto de equilíbrio do sistema se

$$f(\bar{x}) = \bar{x}$$

Nas definições a seguir, consideraremos que a origem é um ponto de equilíbrio ($\bar{x} = 0$).

Estabilidade

O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é dito ser **estável** se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$||x(0)|| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||x(k)|| < \varepsilon \,, \ \ \forall k \geq 0$$

Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito ser **instável**.

Estabilidade assintótica

O ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é dito ser **assintoticamente estável** se for estável e se existir $\delta_1 > 0$ tal que

$$||x(0)|| < \delta_1 \Rightarrow ||x(k)|| \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Nesse caso, o conjunto B_{δ_1} definido por

$$B_{\delta_1} = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, ||x|| < \delta_1\}$$

é dito ser um **domínio** ("região", "bacia") **de atração** para a origem.

Se o domínio de atração for todo o $\mathbb{R}^n$, diz-se que o ponto de equilíbrio é **globalmente assintoticamente estável**.

Sistemas discretos lineares e invariantes no tempo

Considere um sistema com dinâmica a tempo discreto descrita por um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k)$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Pode-se mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se e somente se (s.s.s) todos os **autovalores** da matriz A tiverem **módulo menor do que um**.

Nesse caso, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e a estabilidade assintótica é global.

Por essa razão, costuma-se também dizer que o **sistema** é (assintoticamente) estável.

Exemplo (Maciejowski, p. 168)

Seja um sistema com dinâmica descrita por

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \end{aligned}$$

(Atraso de dois períodos de amostragem)

Suponha que o controle a ser aplicado no instante k seja obtido por meio da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\substack{\hat{x}_1(k+1|k),\ \hat{x}_2(k+1|k), \\ \hat{u}(k|k) \in \mathbb{R}}} J = \hat{x}_1^2(k+1|k) + 4\hat{x}_1(k+1|k)\hat{x}_2(k+1|k) + 6\hat{x}_2^2(k+1|k)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) \\ \hat{x}_2(k+1|k) &= x_1(k) \end{aligned}$$

Obs: O custo também poderia ser escrito como

$$J = \hat{x}^T(k+1|k)Q\hat{x}(k+1|k)$$

sendo

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Vale notar que $Q > 0$ (autovalores em 0,3 e 6,7).

$$\min J = \hat{x}_1^2(k+1|k) + 4\hat{x}_1(k+1|k)\hat{x}_2(k+1|k) + 6\hat{x}_2^2(k+1|k)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) \\ \hat{x}_2(k+1|k) &= x_1(k) \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de $\hat{x}_1(k+1|k)$, $\hat{x}_2(k+1|k)$ na função de custo, tem-se

$$J = \hat{u}^2(k|k) + 4\hat{u}(k|k)x_1(k) + 6x_1^2(k)$$

$$\frac{dJ}{d\hat{u}(k|k)} = 2\hat{u}(k|k) + 4x_1(k)$$

Impondo que esta derivada seja igual a zero, chega-se a

$$\hat{u}^*(k|k) = -2x_1(k)$$

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= u(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k)
\end{aligned}
$$

Fazendo $u(k) = \hat{u}^*(k|k) = -2x_1(k)$, obtêm-se as seguintes equações de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= -2x_1(k) \\
x_2(k+1) &= x_1(k)
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{mf}} x(k)
$$

Como A_{mf} possui um autovalor em -2 (fora do círculo unitário), conclui-se que o sistema é instável em malha fechada.

Neste caso, a instabilidade pode ser evitada introduzindo uma penalização do esforço de controle na função de custo:

$$J = \hat{x}_1^2(k+1|k) + 4\hat{x}_1(k+1|k)\hat{x}_2(k+1|k) + 6\hat{x}_2^2(k+1|k) + \rho\hat{u}^2(k|k)$$

com $\rho > 0$.

Substituindo as expressões de $\hat{x}_1(k+1|k)$, $\hat{x}_2(k+1|k)$ na função de custo, obtém-se

$$J = (1+\rho)\hat{u}^2(k|k) + 4\hat{u}(k|k)x_1(k) + 6x_1^2(k)$$

$$\frac{dJ}{d\hat{u}(k|k)} = 2(1+\rho)\hat{u}(k|k) + 4x_1(k)$$

$$\hat{u}^*(k|k) = -\frac{2}{1+\rho}x_1(k)$$

$$x_1(k+1) = u(k)\ ,\ \ x_2(k+1) = x_1(k)$$

Fazendo $u(k) = \hat{u}^*(k|k) = -\left(\dfrac{2}{1+\rho}\right) x_1(k)$, chega-se a

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{1+\rho} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{mf}} x(k)$$

Agora os autovalores da matriz A_{mf} são 0 e $-\dfrac{2}{1+\rho}$.

Logo, a dinâmica de malha fechada será assintoticamente estável s.s.s. $\rho > 1$.

Seria desejável formular o problema de otimização de modo que a estabilidade assintótica fosse garantida $\forall \rho > 0$.

Pode-se argumentar que um aspecto inconveniente, neste exemplo, é o horizonte de predição excessivamente curto ($N = 1$). De fato, tomando $N = 2$ e $M = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} J &= [\hat{x}_1^2(k+1|k) + 4\hat{x}_1(k+1|k)\hat{x}_2(k+1|k) + 6\hat{x}_2^2(k+1|k)] + \\ &\quad [\hat{x}_1^2(k+2|k) + 4\hat{x}_1(k+2|k)\hat{x}_2(k+2|k) + 6\hat{x}_2^2(k+2|k)] + \\ &\quad \rho\hat{u}^2(k|k) \end{aligned}$$

s.a.

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) \\ \hat{x}_2(k+1|k) &= x_1(k) \\ \hat{x}_1(k+2|k) &= \hat{u}(k+1|k) = \hat{u}(k|k) \\ \hat{x}_2(k+2|k) &= \hat{x}_1(k+1|k) = \hat{u}(k|k) \end{aligned}$$

considerando, como de costume, que $\hat{u}$ permanece constante após o final do horizonte de controle.

Pode-se argumentar que um aspecto inconveniente, neste exemplo, é o horizonte de predição excessivamente curto ($N = 1$). De fato, tomando $N = 2$ e $M = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
J = \; & [\hat{x}_1^2(k+1|k) + 4\hat{x}_1(k+1|k)\hat{x}_2(k+1|k) + 6\hat{x}_2^2(k+1|k)] + \\
& [\hat{x}_1^2(k+2|k) + 4\hat{x}_1(k+2|k)\hat{x}_2(k+2|k) + 6\hat{x}_2^2(k+2|k)] + \\
& \rho\hat{u}^2(k|k)
\end{aligned}
$$

s.a.

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_1(k+1|k) &= \hat{u}(k|k) \\
\hat{x}_2(k+1|k) &= x_1(k) \\
\hat{x}_1(k+2|k) &= \hat{u}(k+1|k) = \hat{u}(k|k) \\
\hat{x}_2(k+2|k) &= \hat{x}_1(k+1|k) = \hat{u}(k|k)
\end{aligned}
$$

considerando, como de costume, que $\hat{u}$ permanece constante após o final do horizonte de controle.

Substituindo as expressões para os valores preditos do estado na função de custo, obtém-se

$$
\begin{aligned}
J &= \hat{u}^2(k|k) + 4\hat{u}(k|k)x_1(k) + 6x_1^2(k) + \\
&\quad \hat{u}^2(k|k) + 4\hat{u}^2(k|k) + 6\hat{u}^2(k|k) + \rho\hat{u}^2(k|k) \\
&= (12+\rho)\hat{u}^2(k|k) + 4\hat{u}(k|k)x_1(k) + 6x_1^2(k)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dJ}{d\hat{u}(k|k)} = 2(12+\rho)\hat{u}(k|k) + 4x_1(k)
$$

$$
\hat{u}^*(k|k) = -\left(\frac{2}{12+\rho}\right)x_1(k)
$$

Com isso, tem-se

$$
A_{mf} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{12+\rho} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

o que permite concluir que a dinâmica de malha fechada é assintoticamente estável $\forall \rho > 0$.

Importância do horizonte de predição empregado

Como se vê, o horizonte de predição tem um papel importante na estabilidade da malha de controle.

Um resultado bem conhecido é o do Regulador Linear Quadrático (LQR) de **horizonte infinito**. Nesse caso, o problema consiste em minimizar uma função de custo da forma

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\hat{x}^T(k+i|k) Q \hat{x}(k+i|k) + \hat{u}^T(k+i|k) R \hat{u}(k+i|k) \right],$$

$$Q = Q^T > 0, \; R = R^T > 0$$

s.a.

$$\hat{x}(k+i+1|k) = A\hat{x}(k+i|k) + B\hat{u}(k+i|k), \quad i \geq 0$$

$$\hat{x}(k|k) = x(k)$$

Se o par (A, B) for controlável, pode-se mostrar que a solução ótima é dada por

$$\hat{u}^*(k+i|k) = -K\hat{x}^*(k+i|k)$$

com ganho K calculado como

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

sendo $P > 0$ obtida como solução da seguinte Equação Algébrica de Riccati:

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

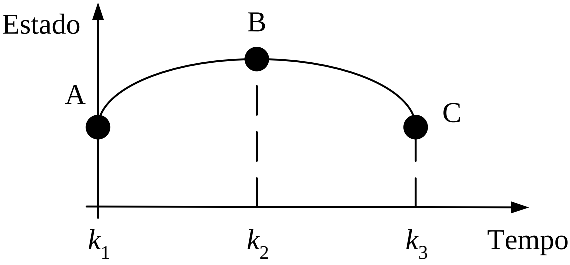
Empregando a lei de controle $u(k) = \hat{u}^*(k|k) = -Kx(k)$, a dinâmica de malha fechada é garantidamente estável.

De fato, se (A, B) for controlável, garantidamente existem matrizes K_{est} tais que os autovalores de $(A - BK_{est})$ estejam no interior do círculo unitário, tornando a malha estável.

Evidentemente, a solução ótima do LQR de horizonte infinito não pode resultar em uma malha instável.

O que se perde ao usar um horizonte de predição finito ?

Princípio da Otimalidade*

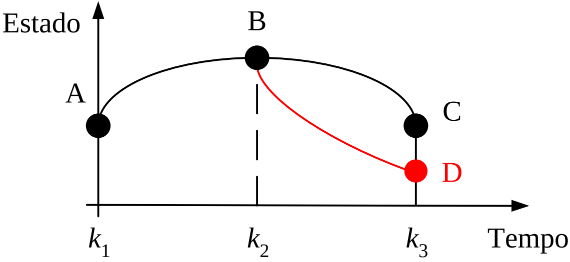


Se a trajetória $\overline{ABC}$ é ótima partindo de A, então a trajetória $\overline{BC}$ é ótima partindo de B.

---

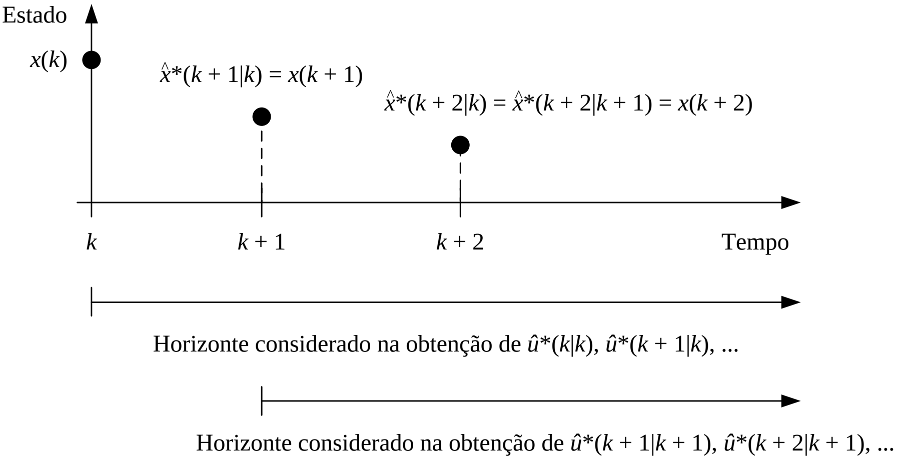
*Bellman, R. E. Dynamic Programming. Princeton University Press, 1957.

Com efeito, suponha por absurdo que a trajetória ótima partindo de B fosse $\overline{BD}$, como indicado abaixo:

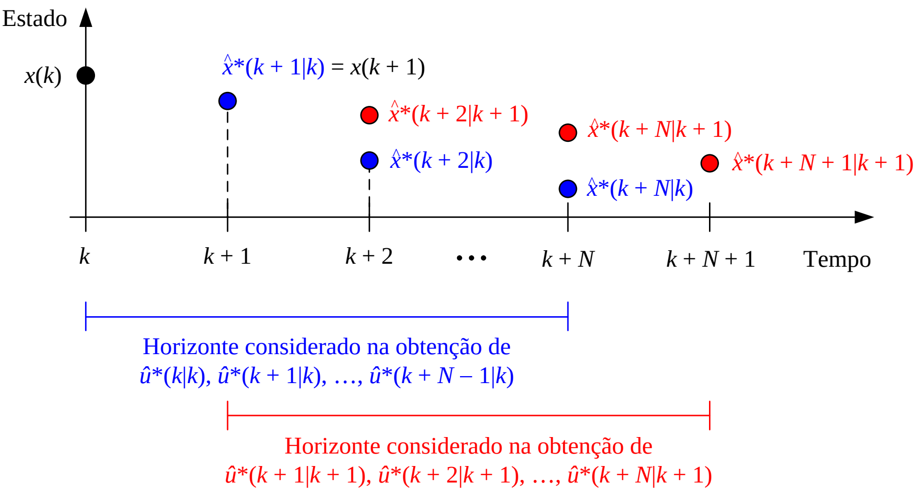


Nesse caso, a trajetória ótima partindo de A seria $\overline{ABD}$, e não $\overline{ABC}$.

Horizonte Infinito



Horizonte Finito



Uso de Horizonte de Predição Infinito com Horizonte de Controle Finito

- Dinâmica da planta:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^p$.

- Custo a ser minimizado no instante k:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}(k+i|k)||_R^2$$

sendo

$$||x||_Q^2 = x^T Qx \,, \quad ||u||_R^2 = u^T Ru$$

com $Q = Q^T > 0$ e $R = R^T > 0$.

- Equações de predição:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k|k) &= x(k) \\ \hat{x}(k+i+1|k) &= A\hat{x}(k+i|k) + B\hat{u}(k+i|k)\,,\ i = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \hat{x}(k+i+1|k) &= A\hat{x}(k+i|k)\,,\ i \geq N\end{aligned}$$

- Restrições sobre os controles e estados:

$$\begin{aligned}\hat{u}(k+i|k) &\in \mathcal{U}\,,\ \ i = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \hat{x}(k+i|k) &\in \mathcal{X}\,,\ \ i \geq 0\end{aligned}$$

sendo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ e $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos contendo a origem em seu interior.

- Lei de controle com horizonte retrocedente:

$$u(k) = \hat{u}^*(k|k)$$

Observações:

- Limitantes sobre a excursão dos estados e controles são um caso particular das restrições aqui consideradas.
- Restrições sobre o incremento de controle Δu podem ser incorporadas ao problema empregando um modelo com estado aumentado

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

Factibilidade Recursiva

Se o problema de otimização for factível no instante k, a factibilidade será mantida no instante $k + 1$.

Com efeito, seja

$$\hat{u}^*(k|k), \hat{u}^*(k+1|k), \ldots, \hat{u}^*(k+N-1|k)$$

a sequência ótima de controle obtida como solução do problema de otimização no instante k. Seja ainda

$$\hat{x}^*(k|k), \hat{x}^*(k+1|k), \ldots$$

a respectiva sequência de estados preditos, com

$$\hat{x}^*(k|k) = x(k)$$

Aplicando-se à planta o controle

$$u(k) = \hat{u}^*(k|k)$$

segue que

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = A\hat{x}^*(k|k) + B\hat{u}^*(k|k) = \hat{x}^*(k+1|k)$$

No instante $(k+1)$, deve-se encontrar uma sequência de controle

$$\hat{u}(k+1|k+1), \hat{u}(k+2|k+1), \ldots, \hat{u}(k+N|k+1)$$

satisfazendo a restrição

$$\hat{u}(k+i+1|k+1) \in \mathcal{U}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

e tal que a sequência de estados preditos por meio de

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1|k+1) &= x(k+1) \\ \hat{x}(k+i+2|k+1) &= A\hat{x}(k+i+1|k+1) + B\hat{u}(k+i+1|k+1)\,,\ i = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \hat{x}(k+i+2|k+1) &= A\hat{x}(k+i+1|k+1)\,,\ i \geq N \end{aligned}$$

satisfaça a restrição

$$\hat{x}(k+i+1|k+1) \in \mathcal{X}\,, \quad i \geq 0$$

Vamos mostrar que essas restrições são satisfeitas empregando-se a seguinte **solução candidata**:

$$\begin{aligned}
\hat{u}^c(k+1|k+1) &= \hat{u}^*(k+1|k) \\
\hat{u}^c(k+2|k+1) &= \hat{u}^*(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{u}^c(k+N-1|k+1) &= \hat{u}^*(k+N-1|k) \\
\hat{u}^c(k+N|k+1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{u}^c(k+1|k+1) &= \hat{u}^*(k+1|k) \\
\hat{u}^c(k+2|k+1) &= \hat{u}^*(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{u}^c(k+N-1|k+1) &= \hat{u}^*(k+N-1|k) \\
\hat{u}^c(k+N|k+1) &= 0
\end{aligned}$$

Essa solução trivialmente satisfaz as restrições de controle, uma vez que

$$\begin{aligned}
\hat{u}^*(k+1|k) &\in \mathcal{U} \\
\hat{u}^*(k+2|k) &\in \mathcal{U} \\
&\vdots \\
\hat{u}^*(k+N-1|k) &\in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

e $0 \in \mathcal{U}$.

A sequência de estados preditos associada à solução candidata é dada por

$$
\begin{aligned}
\hat{x}^c(k+1|k+1) &= x(k+1) \\
\hat{x}^c(k+2|k+1) &= A\hat{x}^c(k+1|k+1) + B\hat{u}^c(k+1|k+1) \\
&\vdots \\
\hat{x}^c(k+N|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N-1|k+1) + B\hat{u}^c(k+N-1|k+1) \\
\hat{x}^c(k+N+1|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N|k+1) + B\hat{u}^c(k+N|k+1) \\
\hat{x}^c(k+N+2|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N+1|k+1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Lembrando ainda que $x(k+1) = \hat{x}^*(k+1|k)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{x}^c(k+1|k+1) &= \hat{x}^*(k+1|k) \\
\hat{x}^c(k+2|k+1) &= A\hat{x}^c(k+1|k+1) + B\hat{u}^*(k+1|k) \\
&\vdots \\
\hat{x}^c(k+N|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N-1|k+1) + B\hat{u}^*(k+N-1|k) \\
\hat{x}^c(k+N+1|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N|k+1) + 0 \\
\hat{x}^c(k+N+2|k+1) &= A\hat{x}^c(k+N+1|k+1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, chega-se à sequência

$$
\begin{aligned}
\hat{x}^c(k+1|k+1) &= \hat{x}^*(k+1|k) \\
\hat{x}^c(k+2|k+1) &= \hat{x}^*(k+2|k) \\
&\vdots \\
\hat{x}^c(k+N|k+1) &= \hat{x}^*(k+N|k) \\
\hat{x}^c(k+N+1|k+1) &= A\hat{x}^*(k+1|k) = \hat{x}^*(k+N+1|k) \\
\hat{x}^c(k+N+2|k+1) &= A\hat{x}^*(k+N+1|k) = \hat{x}^*(k+N+2|k) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

que, como assumido inicialmente, satisfaz as restrições de estado.

Convergência do estado para a origem

Se o problema de otimização for inicialmente factível, o estado x(k) convergirá para a origem quando $k \to \infty$.

Com efeito, seja

$$J^*(k) = \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}^*(k+i|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}^*(k+i|k)||_R^2$$

o valor mínimo do custo resultante da solução do problema de otimização no instante k (sujeito às restrições de estado e controle). Seja ainda

$$J^*(k+1) = \min_{\substack{\hat{u}(k+i+1|k+1)\\ i=0,1,\ldots,N-1}} \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}(k+i+1|k+1)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}(k+i+1|k+1)||_R^2$$

o valor mínimo do custo para o problema de otimização no instante $k+1$.

Como visto anteriormente, as sequências de estado e controle dadas por

$$\begin{aligned} \hat{u}^c(k+1|k+1) &= \hat{u}^*(k+1|k) \\ \hat{u}^c(k+2|k+1) &= \hat{u}^*(k+2|k) \\ &\vdots \\ \hat{u}^c(k+N-1|k+1) &= \hat{u}^*(k+N-1|k) \\ \hat{u}^c(k+N|k+1) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{x}^c(k+1|k+1) &= \hat{x}^*(k+1|k) \\ \hat{x}^c(k+2|k+1) &= \hat{x}^*(k+2|k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

formam uma solução factível (não necessariamente ótima) para o problema de otimização no instante $k+1$.

Logo:

$$J^*(k+1) \leq \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}^c(k+i+1|k+1)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}^c(k+i+1|k+1)||_R^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}^*(k+i+1|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-2} ||\hat{u}^*(k+i+1|k)||_R^2$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}^*(k+i|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}^*(k+i|k)||_R^2 \right] - ||\hat{x}^*(k|k)||_Q^2 - ||\hat{u}^*(k|k)||_R^2$$

$$= J^*(k) - ||\hat{x}^*(k|k)||_Q^2 - ||\hat{u}^*(k|k)||_R^2 = J^*(k) - \underbrace{\left(||x(k)||_Q^2 + ||u(k)||_R^2 \right)}_{\geq 0}$$

$$J^*(k+1) - J^*(k) \leq - \underbrace{\left(||x(k)||_Q^2 + ||u(k)||_R^2 \right)}_{\geq 0}$$

Tem-se então que $J^*(k+1) \leq J^*(k)$. Como a sequência $\{J^*(k)\,,\ k = 0, 1, \ldots\}$ é limitada inferiormente (por zero), conclui-se que a mesma é convergente[§]. Portanto:

$$J^*(k) - J^*(k+1) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

[§] Vide, por exemplo: ZORICH, V. A. **Mathematical Analysis I**. Berlin: Springer-Verlag, 2004 (páginas 87 e 88).

Por outro lado, sabe-se que

$$0 \leq \left(||x(k)||_Q^2 + ||u(k)||_R^2 \right) \leq J^*(k) - J^*(k+1)$$

Lembrando que $Q > 0$ e $R > 0$, conclui-se que

$$u(k) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$x(k) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Obs: Esta linha de argumentação é apresentada por Kwon e Han (2005).

A demonstração de **estabilidade** da origem envolveria o uso da função-valor $J^*(k)$ como uma candidata a função de Lyapunov.

Alternativamente, pode-se argumentar que haverá uma vizinhança da origem na qual as restrições estarão inativas e, portanto: (i) o problema de otimização será factível e (ii) a aplicação do controle com horizonte retrocedente resultará em uma lei de controle linear. Como todas as trajetórias iniciadas dentro dessa vizinhança convergirão para a origem, com uma dinâmica linear e invariante no tempo, conclui-se que a origem é assintoticamente estável.

Referência: KWON, W.H.; HAN, S. **Receding Horizon control**, London: Springer-Verlag, 2005.

Implementação da lei de controle preditivo com horizonte de predição infinito e horizonte de controle finito

- Custo a ser minimizado no instante k:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}(k+i|k)||_R^2$$

com $Q = Q^T > 0$ e $R = R^T > 0$.

- Modelo de predição:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k|k) &= x(k) \\
\hat{x}(k+i+1|k) &= A\hat{x}(k+i|k) + B\hat{u}(k+i|k)\,,\ 0 \leq i \leq N-1 \\
\hat{x}(k+i+1|k) &= A\hat{x}(k+i|k)\,,\ i \geq N
\end{aligned}$$

Vamos inicialmente considerar o caso em que a planta é assintoticamente estável em malha aberta, isto é, a matriz A tem todos os autovalores no interior do "círculo unitário" (círculo centrado na origem do plano complexo, com raio unitário).

- Restrições sobre os controles e estados:

$$\begin{aligned} \hat{u}(k+i|k) &\in \mathcal{U}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \hat{x}(k+i|k) &\in \mathcal{X}\,, \quad i \geq 0 \end{aligned}$$

sendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{X}$ definidos por meio de desigualdades lineares da forma

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^p \,:\, S_u u \leq b_u \right\}$$

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, S_x x \leq b_x \right\}$$

Inicialmente, vamos reescrever o custo da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
J(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{u}(k+i|k)||_R^2 \\
&= \underbrace{\sum_{i=N}^{\infty} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2}_{J_f(k)} + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 + ||\hat{u}(k+i|k)||_R^2
\end{aligned}
$$

Lembrando que

$$\hat{x}(k+i+1|k) = A\hat{x}(k+i|k)\,,\ i \geq N$$

pode-se escrever

$$\hat{x}(k+i|k) = A^{(i-N)}\hat{x}(k+N|k)\,,\ i \geq N$$

Portanto:

$$J_f(k) = \sum_{i=N}^{\infty} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 = \sum_{i=N}^{\infty} ||A^{(i-N)}\hat{x}(k+N|k)||_Q^2$$

ou ainda, fazendo $j = i - N$:

$$J_f(k) = \sum_{j=0}^{\infty} ||A^j\hat{x}(k+N|k)||_Q^2 = \hat{x}^T(k+N|k)\underbrace{\left[\sum_{j=0}^{\infty}(A^j)^T Q A^j\right]}_{P_f}\hat{x}(k+N|k)$$

$$J_f(k) = \hat{x}^T(k+N|k)P_f\hat{x}(k+N|k)$$

$$P_f = \sum_{j=0}^{\infty}(A^j)^T Q A^j$$

A convergência dessa somatória é garantida pela hipótese de que os autovalores de A estão no interior do círculo unitário.

Como calcular P_f ?

$$P_f = \sum_{j=0}^{\infty} (A^j)^T Q A^j \Rightarrow A^T P_f A = \sum_{j=1}^{\infty} (A^j)^T Q A^j = P_f - Q$$

Portanto, P_f pode ser obtida como solução da seguinte **Equação de Lyapunov**:

$$A^T P_f A - P_f + Q = 0$$

Matlab: Função DLYAP

Obs: Se $Q > 0$, pode-se mostrar que $P_f > 0$. Com efeito, dado $x \neq 0$, tem-se

$$x^T P_f x = x^T \left(\sum_{j=0}^{\infty} (A^j)^T Q A^j \right) x = \underbrace{x^T Q x}_{>0} + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{x^T (A^j)^T Q A^j x}_{\geq 0} > 0$$

O custo pode ser reescrito como

$$J(k) = ||\hat{x}(k+N|k)||^2_{P_f} + \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{x}(k+i|k)||^2_Q + ||\hat{u}(k+i|k)||^2_R$$

ou ainda

$$J(k) = ||x(k)||^2_Q + \hat{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_f \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{u}}^T \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}$$

sendo

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}$$

As restrições sobre o controle:

$$S_u \hat{u}(k+i|k) \leq b_u \,, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

podem ser expressas como desigualdades lineares envolvendo $\hat{\mathbf{u}}$.

Resta tratar as restrições sobre o estado:

$$S_x \hat{x}(k+i|k) \leq b_x \,, \ i \geq 0$$

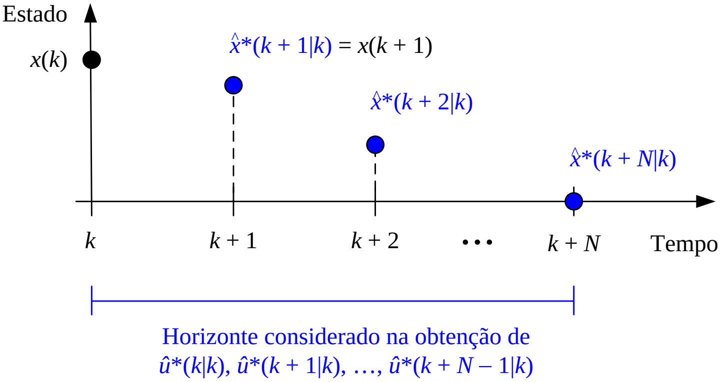
$\rightarrow$ **Infinidade de restrições !**

Uma forma de contornar essa dificuldade consiste na imposição de restrições terminais.

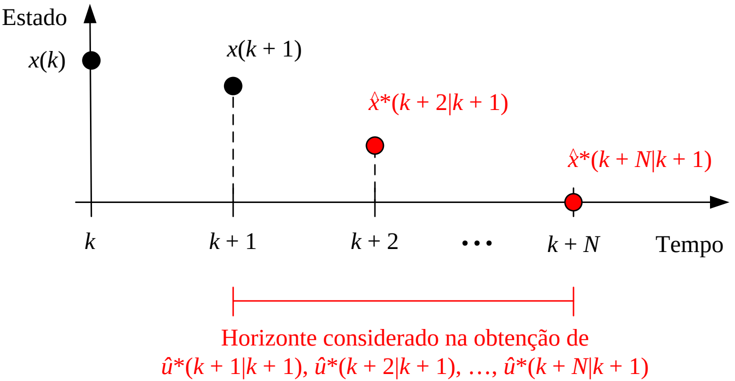
Uso de horizonte de predição finito e restrições terminais

Uma forma de garantir a estabilidade empregando horizonte de predição finito consiste em impor que a origem seja alcançada ao final do horizonte de predição (restrição terminal).

No instante k, impõe-se $\hat{x}(k+N|k) = 0$:



No instante $k+1$, impõe-se $\hat{x}(k+N|k+1) = 0$:



Se o problema de otimização for inicialmente factível, a origem será atingida em N passos.

Esta abordagem equivale a usar um horizonte de predição que vai sendo reduzido a cada passo.

Como alternativa, pode-se colocar a restrição sempre N passos à frente do instante atual, isto é, impor

$$\hat{x}(k+N|k) = 0$$

$$\hat{x}(k+N+1|k+1) = 0$$

e assim sucessivamente.

- Custo a ser minimizado no instante k:

$$J(k) = \sum_{i=0}^{N-1} ||\hat{x}(k+i|k)||_Q^2 + ||\hat{u}(k+i|k)||_R^2$$

- Restrições de controle e estado:

$$S_u \hat{u}(k+i|k) \leq b_u$$

$$S_x \hat{x}(k+i|k) \leq b_x$$

para $i = 0, 1, \ldots N-1$.

- Restrição terminal:

$$\hat{x}(k+N|k) = 0$$

Empregando argumentação similar à utilizada para o horizonte de predição infinito, pode-se mostrar que o problema de otimização tem factibilidade recursiva e que o estado $x(k)$ convergirá para a origem quando $k \to \infty$.

MPC para regulação com garantia de estabilidade nominal

Informação requerida sobre a planta:

- Matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ do modelo no espaço de estados
- Limitantes sobre a excursão dos estados: $x_{min}, x_{max} \in \mathbb{R}^n$
- Limitantes sobre a excursão dos controles: $u_{min}, u_{max} \in \mathbb{R}^p$

Parâmetros de projeto:

- Matrizes de peso $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$
- Horizonte de predição N

Inicialização:

- Fazer

$$H = \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix}, \quad \Phi_u = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q \end{bmatrix}_{qN \times qN}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R \end{bmatrix}_{pN \times pN}$$

- Calcular $H_n = \mathbf{Q}H$
- Fazer $H_{qp} = 2(H^T\mathbf{Q}H + \mathbf{R})$

- Fazer $A_{qp} = \begin{bmatrix} I_{pN} \\ -I_{pN} \\ H \\ -H \end{bmatrix}$
- Fazer $A_{eq} = \begin{bmatrix} 0_{n\times(n-1)N} & I_n \end{bmatrix} H$ (últimas n linhas de H).
- Fazer $k = 0$

Rotina principal:

1. Ler $x(k)$ (estado da planta)
2. Calcular $\mathbf{f_u} = \Phi_u x(k)$ e $f_{qp} = 2H_n^T \mathbf{f_u}$
3. Fazer

$$b_{qp} = \begin{bmatrix} [u_{max}]_N \\ -[u_{min}]_N \\ [x_{max}]_N - \mathbf{f_u} \\ \mathbf{f_u} - [x_{min}]_N \end{bmatrix}$$

4. Fazer $b_{eq} = -\begin{bmatrix} 0_{n\times(n-1)N} & I_n \end{bmatrix} \mathbf{f_u}$ (últimas n linhas de $\mathbf{f_u}$)
5. Resolver o problema de otimização

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \arg \min_{\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{pM}} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T H_{qp} \hat{\mathbf{u}} + f_{qp}^T \hat{\mathbf{u}}$$

s.a.

$$A_{qp}\hat{\mathbf{u}} \leq b_{qp}, \quad A_{eq}\hat{\mathbf{u}} = b_{eq}$$

6. Atualizar o controle aplicado à planta: $u(k) = \hat{u}^*(k|k)$
7. Fazer $k = k + 1$
8. Aguardar o próximo instante de amostragem e retornar ao passo 1.

Observação: Restrição de igualdade

A restrição $A_{eq}\hat{\mathbf{u}} = b_{eq}$ pode ser imposta por meio de uma parametrização do vetor $\hat{\mathbf{u}}$ na forma

$$\hat{\mathbf{u}} = Z\theta + \hat{\mathbf{u}}_0$$

sendo Z uma matriz cujas colunas formem uma base para o espaço nulo de A_{eq} e $\hat{\mathbf{u}}_0$ uma solução particular da equação $A_{eq}\hat{\mathbf{u}} = b_{eq}$.

Supondo que A_{eq} tenha posto completo de linhas, uma solução particular é dada por

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = A_{eq}^T(A_{eq}A_{eq}^T)^{-1}b_{eq}$$

Com isso, o problema de otimização pode ser reformulado em termos do vetor θ.

No Matlab, a matriz Z pode ser obtida fazendo $Z = null(A_{eq})$

Detalhes a respeito desse procedimento podem ser consultados em:

GOULD, N. I. M.; HRIBAR, M. E.; NOCEDAL, J. On the solution of equality constrained quadratic programming problems arising in optimization. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 23, n. 4, p. 1376-1395, 2001.

Implementação em Matlab

- `matrizes_regulador_estabilidade.m`: Monta as matrizes Φ_u,H_n,H_{qp},A_{qp},A_{eq}.
- `mpc_regulador_estabilidade.m`: S-function que implementa o controlador

Exemplo:

- `exemplo_regulador_estabilidade.m`: Definição das matrizes do modelo da planta (integrador duplo) e dos pesos do MPC.
- `regulador_estabilidade.mdl`: Diagrama de simulação.

Implementação em Matlab: Exemplo

Parâmetros do controlador:

- $N = 10$
- $u_{max} = -u_{min} = 0{,}2$
- $x_{max} = -x_{min} = [2 \;\; 2]^T$

Condições iniciais da planta:

- $x(0) = [1 \;\; 0]^T$

O que acontece se $x(0) = [1 \;\; 0{,}65]^T$?

Tópicos da próxima aula

- Caracterização do domínio de atração da origem ao se empregar a lei de controle preditivo.
- Alternativa para ampliação do domínio de atração: Uso de conjunto terminal.