

Inteligencia artificial

Lic. en Ciencias de la Computación

Tarea 0

Expediente: 211214526
Nombre: Francisco Javier Fernando Atondo Nubes
Colaboradores:

Al entregar esta tarea, declaro que todas las respuestas son producto de mi propio trabajo y de las personas que colaboraron especificadas arriba.

Optimización y probabilidad

1. Sean x_1, \dots, x_n números reales representando posiciones sobre una recta. Sean w_1, \dots, w_n números reales positivos representando la *importancia* de cada una de estas posiciones. Considera la función cuadrática,

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^n w_i (\theta - x_i)^2$$

y que θ es un escalar. ¿Qué valor de θ minimiza $f(\theta)$? Muestra que el óptimo que encuentraste es realmente un mínimo. ¿Qué cuestiones problemáticas pueden surgir si algunas de las w_i son negativas?

Solución:

$$\begin{aligned} d_{\theta} f(\theta) &= d_{\theta} \left(\sum_{i=1}^n w_i (\theta - x_i)^2 \right) \\ &\rightarrow \theta = \sum_{i=1}^n 2(\theta - x_i) \\ &\rightarrow \theta = \sum_{i=1}^n 2\theta - \sum_{i=1}^n 2x_i \end{aligned}$$

2. Considera las siguientes funciones,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \min_{s \in [-1, 1]} \sum_{i=1}^d s x_i \\ g(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^d \min_{s_i \in [-1, 1]} s_i x_i \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ es un vector real y $[-1, 1]$ el intervalo cerrado entre -1 a 1 . ¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta para toda \mathbf{x} ? Demuéstralo.

$$f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$$

Solución:

3. Supongamos que lanzas repetidamente un dado justo de seis caras hasta que obtienes un resultado de 1 (y luego te detienes). Cada vez que lanzas un 3 ganas a puntos, y cada vez que lanzas un 6 pierdes b puntos. No ganas ni pierdes puntos si lanzas un 2, 4 o 5. ¿Cuál es la cantidad de puntos (como función de a y b) que esperamos tener cuando te detengas?

Solución:

4. Supongamos que la probabilidad de que una moneda caiga en águila es p (donde $0 < p < 1$), y que lanzas esta moneda cinco veces obteniendo (S, A, A, A, A) . Sabemos que la probabilidad de obtener esta secuencia es,

$$L(p) = (1 - p)pppp = p^4(1 - p)$$

¿Qué valor de p maximiza $L(p)$? Muestra que este valor de p maximiza $L(p)$. ¿Cuál es una interpretación intuitiva de este valor de p ?

Solución:

5. Supongamos que A y B son dos eventos tales que $P(A | B) = P(B | A)$. También sabemos que $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y que $P(A \cap B) > 0$. Muestra que $P(A) > \frac{1}{6}$.

Solución:

6. Considera un vector columna $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ y vectores columna constantes $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y un entero positivo n . Define la función con valor escalar,

$$f(\mathbf{w}) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_i^\top \mathbf{w} - \mathbf{b}_j^\top \mathbf{w})^2 \right) + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|_2^2,$$

donde el vector es $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)^\top$ y $\|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^d w_k^2} = \sqrt{\mathbf{w}^\top \mathbf{w}}$ es conocida como la norma L_2 . Calcula el gradiente $\nabla f(\mathbf{w})$.

Solución:

Complejidad computacional

1. Supongamos que tienes una cuadrícula de puntos de $n \times n$, donde nos gustaría colocar 3 rectángulos alineados a los ejes (los lados del rectángulo son paralelos a los ejes). Cada esquina de cada rectángulo debe ser uno de los puntos en la cuadrícula, pero fuera de eso no hay restricciones sobre la ubicación o tamaño de los rectángulos. Por ejemplo, es posible que las cuatro esquinas de un rectángulo estén en el mismo punto (resultando en un rectángulo de tamaño 0), o que todos los 3 rectángulos estén encimados. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los 3 rectángulos sobre la cuadrícula? En general, solo nos importa la complejidad asintótica, entonces escribe tu respuesta de la forma $O(n^c)$ o de la forma $O(c^n)$ para algún entero c .

Solución: Como se trata de 3 rectángulos, y la posición y tamaño de estas no importa, mientras que las esquinas de estos estén en la cuadrícula, podemos usar dos esquinas opuestas de dos rectángulos diferentes para crear otro rectángulo, del cual seleccionamos otras 4 esquinas opuestas para crear otros dos rectángulos. Esto nos da un total de $n^2 * n^2 * n^2$, o n^6 opciones, el cual se debe dividir entre las formas de crear los rectángulos:

$$\frac{n^6}{3!}$$

Lo cual se puede expresar Asintoticamente como: $O(n^6)$

2. Supongamos que tienes una cuadrícula de puntos de $n \times 2n$. Comenzamos en el punto de la esquina superior izquierda (el punto en la posición $(1, 1)$), y nos gustaría llegar al punto de la esquina inferior derecha (el punto en la posición $(n, 2n)$) moviéndose exclusivamente o hacia abajo o hacia la derecha. Supongamos que se nos provee una función $c(i, j)$ que produce el costo asociado con la posición (i, j) , y supongamos que para cada posición toma tiempo constante calcular este costo. El costo puede ser negativo. Define el costo de un camino como la suma de $c(i, j)$ para todos los puntos (i, j) sobre el camino, incluyendo ambos extremos. Presenta un algoritmo para calcular el costo del camino de costo mínimo desde $(1, 1)$ hasta $(n, 2n)$ de la manera más eficiente posible (con la complejidad en tiempo más pequeña). ¿Cuál es el tiempo de ejecución?

Solución:

```
def costoMinimo(n, c):
    # Se inicializa el valor para la recurrencia.
    recurrencia[i][j] = [[0] * (2 * n + 1) for _ in range(n + 1)]

    #Como el primer punto se encuentra en (1,1),
    #se suma un 1 a los valores maximos.
    for i in range(1, n + 1):
        for j in range(1, 2 * n + 1):
            recurrencia[i][j] = min(recurrencia[i-1][j], recurrencia[i][j-1]) + c[i][j]

    return recurrencia[n][2*n]
```

Consideraciones éticas

1. Una empresa de inversión desarrolla un modelo simple de aprendizaje automático para predecir si es probable que un individuo incumpla con un préstamo a partir de una variedad de factores, incluida la ubicación, la edad, la puntuación crediticia y los registros públicos. Después de examinar sus resultados, se encuentra que el modelo predice principalmente en función de la ubicación y que el modelo acepta principalmente préstamos de centros urbanos y niega préstamos a solicitantes rurales. Además, al observar el género y el origen étnico de los solicitantes, se encuentra que el modelo tiene una tasa de falsos positivos significativamente mayor para los solicitantes negros y masculinos que para otros grupos. En una predicción falsa positiva, un modelo clasifica erróneamente a alguien que no incumple como probable que incumpla.

Solución: Si bien el origen de este problema podría ser socio-cultural, una solución es implementar una verificación especial sobre candidatos que cumplan ciertas características (como su etnicidad y localización) en la que se ignoren tales factores y se de prioridad a su Puntuación Crediticia y su Historial de Pagos actual.

2. La estilometría es una forma de predecir la autoría de un texto anónimo o impugnado, mediante el análisis de los patrones de escritura en el texto anónimo y otros textos escritos por los autores potenciales. Recientemente, se han desarrollado algoritmos de aprendizaje automático de alta precisión para esta tarea. Si bien estos modelos se utilizan normalmente para analizar documentos históricos y literatura, podrían usarse para desanonimizar una amplia gama de textos, incluido el código.

Solución:

3. Un grupo de investigación analizó millones de rostros de celebridades de las imágenes de Google para desarrollar una tecnología de reconocimiento facial. Las celebridades no dieron permiso para que sus imágenes se utilizaran en el conjunto de datos y muchas de las imágenes tienen derechos de autor. Para fotografías con derechos de autor, el conjunto de datos proporciona enlaces URL a la imagen original junto con cuadros delimitadores para la cara.

Solución:

4. Los investigadores han creado recientemente un modelo de aprendizaje automático que puede predecir especies de plantas automáticamente y directamente a partir de una sola fotografía. El modelo fue entrenado usando fotografías cargadas en una aplicación por usuarios que dieron su consentimiento para usar sus fotografías con fines de investigación, y el modelo solo se usa dentro de la aplicación para ayudar a los usuarios a identificar plantas que podrían encontrar en la naturaleza.

Solución:

Programación

Solución: Incorporada en `tarea0.py`.