1. Algebra de Boole

1.1 Equivalencia entre expresiones lógicas

PROBLEMA 1 Demostrar que f=xz+y y g=y+xy'z son expresiones equivalentes.

a) Utilizando la tabla de la verdad

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

b) Mediante operaciones algebraicas

g=y+xy'z=y+yy'+xy'z=y+y'(y+xz)=(y+y')(y+y+xz)=y+xz=xz+y

PROBLEMA 2 Comprobar que x+y·z y (x+y)·(x+z) son expresiones equivalentes.

a) Utilizando la tabla de la verdad: f=x+y·z y g=(x+y)·(x+z)

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

b) Mediante operaciones algebraicas

g=(x+y)·(x+z)=xx+xz+yx+yz=x(1+z+y)+yz=x+yz

1.2 Construir una función lógica desde la tabla de la verdad

PROBLEMA 1 Para la siguiente tabla de la verdad determinar su función canónica (SOP y POS), simplificarla algebraicamente y mediante Karnaugh.

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

a) Función canónica SOP: f = a'b'c+a'bc'+ab'c+abc'
b) Función canónica POS: f = (a+b+c)(a+b'+c')(a'+b+c)(a'+b'+c')
c) Simplificación algebraica: f = (a'+a)b'c+(a'+a)bc' = b'c+bc'
d) Mediante Karnaugh: f = bc'+b'c = b⊕c

a,b \ c	0	1
00	0	1
01	1	0
11	1	0
10	0	1

Aunque en Automatización no se suele utilizar, la combinación ab'+a'b también se puede representar utilizando el operador lógico ⊕ (ab'+a'b=a⊕b), denominado O-exclusiva. Además, a⊕b representa la suma aritmética de a y b redondeada a una cifra (la suma aritmética de a=1 y b=1 es 0).

PROBLEMA 2 Para la siguiente tabla de la verdad determinar su función canónica SOP y simplificarla mediante Karnaugh.

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

a) Función canónica: f = a'b'c'+a'bc+ab'c+abc'+abc
b) Karnaugh: f = a'b'c'+ab+bc+ac

a,b \ c	0	1
00	1	0
01	0	1
11	1	1
10	0	1

PROBLEMA 3 Para la siguiente tabla de la verdad construir una función equivalente simplificada por Karnaugh.

u_0	u_1	u_2	u_3	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Solución:

u_0u_1 \ u_2u_3	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	0

f= $u_1'u_2'+u_0'u_3+u_2u_3+u_1u_2$

PROBLEMA 4 Para la siguiente tabla de la verdad construir una función equivalente simplificada por Karnaugh.

u_0	u_1	u_2	u_3	**f**
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

a) Utilizando los 1's: $f = u_1'+u_0'u_3+u_2$

u_0u_1 \ u_2u_3	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

b) Utilizando los 0's: $f = (u_1u_2'u_3'+u_0u_1u_2')'$

u_0u_1 \ u_2u_3	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

Aplicando Morgan: $f = (u_1'+u_2+u_3)(u_0'+u_1'+u_2)$

$f = u_1'u_0'+u_1'u_1'+u_1'u_2+u_2u_0'+u_2u_1'+u_2u_2+u_3u_0'+u_3u_1'+u_3u_2)$

Aprovechando que $u_1'u_1' = u_1'$ y $u_2u_2 = u_2$

$f = u_1'(u_0'+1+u_2+u_2+u_3)+u_2(u_0'+1+u_3)+u_3u_0' = u_1'+u_0'u_3+u_2$

Como ejercicio algebraico está bien aplicar Morgan, pero es más rápida la opción de ir directamente a través de los 1's.

PROBLEMA 5 Para la siguiente tabla de la verdad construir una función equivalente simplificada por Karnaugh.

u_0	u_1	u_2	u_3	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Solución:

u_0u_1 \ u_2u_3	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	0	1
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

$f = u_1'u_3'+u_0u_1'+u_0u_2+u_0'u_1u_2'u_3+u_2u_3'$

1.3 Construir una función lógica a partir de los requisitos

PROBLEMA 1 En una nave se han instalado cuatro depósitos de aceite de oliva (d1, d2, d3 y d4). Cada uno de ellos tiene instalado una boya en la parte superior para indicar que está completamente lleno. Para señalizar de forma simple el estado del conjunto de los depósitos se ha colocado un panel a la entrada de la nave que tiene tres pilotos rotulados como: Alta (A), Media (M) y Baja (B). La lógica de los pilotos es la siguiente:

- El piloto A se activa cuando el número de depósitos llenos es mayor o igual que 3.
- El piloto M se activa cuando el número de depósitos llenos es mayor o igual que 2.
- El piloto B se activa cuando el número de depósitos llenos es mayor o igual que 1.

Obtener las ecuaciones lógicas simplificadas del control de los tres pilotos mediante Karnaugh.

Solución:

Definición de variables:

Fuente, receptor, …	**Tipo variable**	**Variable**	**0**	**1**
Boya depósito d1	Proceso	d_1	No lleno	Lleno
Boya depósito d2	Proceso	d_2	No lleno	Lleno
Boya depósito d3	Proceso	d_3	No lleno	Lleno
Boya depósito d4	Proceso	d_4	No lleno	Lleno
Piloto Alta	Información	A	No >=3	>=3
Piloto Media	Información	M	No >=2	>=2
Piloto Baja	Información	B	No >=1	>=1

Definición de funciones:

Piloto A

d_1d_2 \ d_3d_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

Piloto M

d_1d_2 \ d_3d_4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

Piloto B

d_1d_2 \ d_3d_4	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$A = d_1d_2d_3 + d_1d_2d_4 + d_3d_4d_2 + d_3d_4d_1$$

$$M = d_1d_2 + d_2d_4 + d_2d_3 + d_1d_4 + d_1d_3 + d_3d_4$$

$$B = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = (d_1'd_2'd_3'd_4')'$$

En el caso de B se puede elegir realizar el cálculo a través de la única celda que tiene cero:

$$B = (d_1'd_2'd_3'd_4')' = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

PROBLEMA 2 En la fábrica de harinas LaMasRica hay instalados cuatro depósitos con cuatro tornillos sin fin (T_1, T_2, T_3 y T_4) para sacar la harina de dichos depósitos a una tolva común. El caudal que saca cada tornillo es aproximadamente 5 kg/s. Cada tornillo lleva asociado un contacto auxiliar que se cierra cuando dicho tornillo está funcionando. En la sala de control se ha instalado un panel de señalización con pilotos para indicar el caudal que está entrando a la tolva común. El número de pilotos son 4 con el siguiente rótulo:

- P4: 20 kg/s
- P3: 15 kg/s
- P2: 10 kg/s
- P1: 5 kg/s

Cuando un piloto se enciende indica que el caudal que entra a la tolva de harina es mayor o igual que la que indica su correspondiente rótulo (Ejemplo: en el caso de funcionar dos tornillos sin fin estarían encendidos P_1 y P_2.)

Obtener las ecuaciones lógicas del control de los cuatro pilotos simplificando por KARNAUGH cuando sea necesario.

Solución:

La solución es semejante a la del apartado anterior cambiando variables de entrada y de salida de las funciones lógicas.

P_1

T_1T_2 \ T_3T_4	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$P_1 = T_1+T_2+T_3+T_4$

P_2

T_1T_2 \ T_3T_4	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

$P_2 = T_1T_2+T_1T_4+T_1T_3+T_2T_3+T_2T_4+ T_3T_4$

P_3

T_1T_2 \ T_3T_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

$P_3 = T_1T_2T_4+T_1T_2T_3+T_3T_4T_2+T_3T_4T_1$

P_4

T_1T_2 \ T_3T_4	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

$P_2 = T_1T_2T_3T_4$

PROBLEMA 3 En un sistema clasificador de paquetes hay una báscula con cuatro salidas binarias (b3, b2, b1 y b0) que representan el peso del paquete como un número binario (0000 representa 0 Kg y 1111, 15 Kg). Después de la báscula hay tres compuertas (c1, c2 y c3) que dirigen el paquete hacia una de las tres cintas a las que dan acceso según su peso. La lógica de las compuertas es la siguiente:

- Se abre c1 para un paquete menor de 5 kg.
- Se abre c2 si es mayor de 9 kg.
- Se abre c3 para el resto de casos.

Obtener las ecuaciones lógicas simplificadas del control de las tres compuertas mediante Karnaugh.

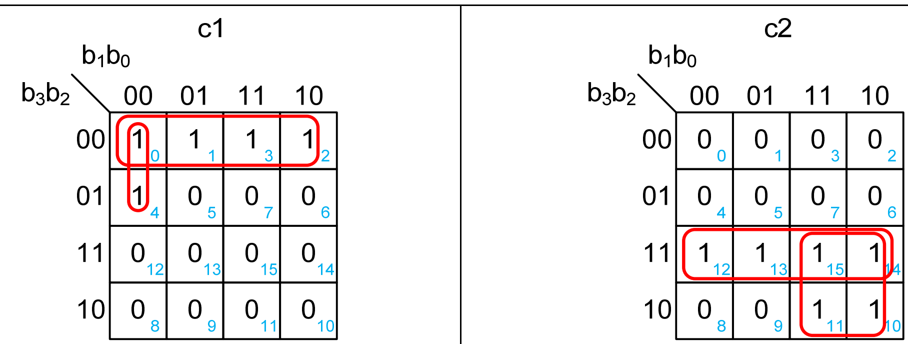
Solución:

Definición de variables:

Fuente, receptor, …	**Tipo variable**	**Variable**	**0**	**1**
Báscula b0	Proceso	b_0	Codifican en binario un número entre 0 y 15, donde b_0 es el bit menos significativo	
Báscula b1	Proceso	b_1		
Báscula b2	Proceso	b_2		
Báscula b3	Proceso	b_3		
Compuerta c1	Orden	c_1	No abrir	Abrir (<5 kg)
Compuerta c2	Orden	c_2	No abrir	Abrir (>9 kg)
Compuerta c3	Orden	c_3	No abrir	Abrir (resto)

Hay que suponer que las compuertas están diseñadas para que una vez recibida la orden, la mantengan el tiempo suficiente para que el paquete salga por la compuerta correspondiente. Nótese que cuando el paquete abandona la báscula, la salida binaria indicará 0 kg.

En este caso se puede ir directamente al mapa de Karnaugh. Es conveniente indicar en cada celda el número que representa. Se interpreta que cada ecuación lógica corresponde a la abertura de la correspondiente compuerta.



$c_1 = b_3'b_2'+b_3'b_1'b_0'$

$c_2 = b_3b_2+b_3b_1$

c3

$b_3b_2 \backslash b_1b_0$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$c_3 = b_3'b_2b_0+b_3'b_2b_1+b_3b_2'b_1'$

Si se hubiera interpretado que la lógica fuera la de cierre de cada compuerta (1:cerra compuerta), la solución sería la siguiente:

c1

$b_3b_2 \backslash b_1b_0$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$c_1 = b_3+b_2b_0+b_2b_1$

c2

$b_3b_2 \backslash b_1b_0$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$c_2 = b_3'+b_2'b_1'$

c3

$b_3b_2 \backslash b_1b_0$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

$c_3 = b_3'b_2'+b_3b_2+b_3'b_1'b_0'+b_3b_1$

Para evitar falsas aperturas de compuerta, se debería haber reservado la salida 0000 de la báscula para indicar que no hay paquete sobre la báscula.

PROBLEMA 4 En un sistema clasificador de paquetes hay una báscula con cuatro salidas binarias (b3, b2, b1 y b0) que representan el peso del paquete como un número binario (0000 representa 0 Kg y 1111, 15 Kg). Después de la báscula hay tres compuertas (c1, c2 y c3) que dirigen el paquete hacia una de las tres cintas a las que dan acceso según su peso. La lógica de las compuertas es la siguiente:

- Se abre c1 para un paquete menor de 6 kg.
- Se abre c2 si es mayor de 12 kg.
- Se abre c3 para el resto de casos.

Obtener las ecuaciones lógicas simplificadas del control de las tres compuertas mediante Karnaugh.

Solución:

Problema que se resuelve de la misma manera que el anterior:

c1

b_3b_2 \ b_1b_0	00	01	11	10
00	1_{0}	1_{1}	1_{3}	1_{2}
01	1_{4}	1_{5}	0_{7}	0_{6}
11	0_{12}	0_{13}	0_{15}	0_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}

$c_1 = b_3'b_2'+b_3'b_1'$

c2

b_3b_2 \ b_1b_0	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	0_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	0_{7}	0_{6}
11	0_{12}	1_{13}	1_{15}	1_{14}
10	0_{8}	0_{9}	0_{11}	0_{10}

$c_2 = b_3b_2b_1+b_3b_2b_0$

c3

b_3b_2 \ b_1b_0	00	01	11	10
00	0_{0}	0_{1}	0_{3}	0_{2}
01	0_{4}	0_{5}	1_{7}	1_{6}
11	1_{12}	0_{13}	0_{15}	0_{14}
10	1_{8}	1_{9}	1_{11}	1_{10}

$c_3 = b_3'b_2b_1+ b_3b_1'b_0'+b_3b_2'$

PROBLEMA 5 En un cuadro de control se han instalado tres pilotos verdes rotulados como NORMAL, MEDIO y ALTO para indicar el nivel de los cuatro depósitos de aceite de oliva instalados en el almacén (D1, D2, D3 y D4). Las capacidades de los depósitos son respectivamente: 10000, 10000, 15000 y 20000 litros. Además hay un cuarto piloto de color rojo que indica ALARMA. Cada depósito tiene una sonda (S1, S2, S3 y S4) para indicar si está lleno. La lógica de los pilotos es la siguiente:

- ALARMA se enciende cuando no se puede asegurar que haya más de 10000 litros en el almacén.
- NORMAL se enciende cuando hay con toda seguridad más de 20000 litros en el almacén.
- MEDIO se enciende cuando hay con toda seguridad más de 30000 litros en el almacén.
- ALTO se enciende cuando hay con toda seguridad más de 40000 litros en el almacén.

Obtener las ecuaciones lógicas del control de los pilotos simplificando mediante Karnaugh.

Solución:

Alarma (≤10000)

$S1_{10}S2_{10}$ \ $S3_{15}S4_{20}$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

Alarma = S1’S3’S4’+S2’S3’S4’

Normal (>20000)

$S1_{10}S2_{10}$ \ $S3_{15}S4_{20}$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

Normal = S2S4+S2S3+S1S4+S1S3+S3S4

Medio (>30000)

$S1_{10}S2_{10}$ \ $S3_{15}S4_{20}$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

Medio = S3S4+S1S2S3+S1S2S4

Alto (>40000)

$S1_{10}S2_{10}$ \ $S3_{15}S4_{20}$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

Alto = S1S3S4+S2S3S4