

# Valor temporal do dinheiro

- 1 Valor futuro
- 2 Valor actual
- 3 Rendas
- 4 Taxas nominais e efectivas

# Estudo financeiro

Estudo do **valor** e da tomada de decisão com base num modelo (quase!) universal de valorização.



- Tempo

*Qual o impacto da passagem de tempo na tomada de decisão? O tempo tem valor?*

- Incerteza

# Conceitos fundamentais

- 1 Valor actual - €
- 2 Valor futuro - €
- 3 Número de períodos ( $n$ )
- 4 Taxa de juro ( $r$ ) - %

## A recta do tempo

Descrição do problema em termos temporais

## Valor futuro

O valor de uma unidade monetária altera-se no tempo. €1 hoje vale mais do que €1 amanhã!

⇒ *Custo de Oportunidade do capital*

Investir/poupar implica abdicar de algo hoje e esse sacrifício deve ser recompensado:

- **Impaciência para consumir**
- **Inflação**
- **Risco**

# Valor futuro

- A passagem do tempo tem um valor medido pela taxa de juro

## Exemplo 1

- **Hip.A:** Receber 100€ hoje
  - **Hip.B:** Receber 100€ daqui a um ano
- 
- Custos e ganhos estão desfasados no tempo  $\Rightarrow$  *Como comparar?*
  - Actualizar as várias grandezas monetárias ao mesmo momento temporal

# Valor futuro

Valor futuro = Valor inicial + Juro acumulado

$$C_1 = C_0 \underbrace{(1 + r)}_{\text{Valor futuro de 1€}}$$

## Exemplo 2

Tem duas propostas de venda para um terreno

A Pagamento hoje de 10 000€.

B Pagamento daqui a um ano de 11 424€.

Qual das propostas aceitaria?

# Valor futuro

## Múltiplos períodos

### Exemplo 3

- Qual será o valor de 100€ daqui a dois anos?

# Valor futuro

## Exemplo 4

- Se investir hoje 500€ à taxa de juro anual de 7%, quanto terá acumulado ao fim de 10 anos?



# Valor futuro

## Exemplo 5

- Se investir hoje 100€ à taxa de juro anual de 5%, quanto terá acumulado ao fim de 100 anos?
- Se a taxa de juro duplicar (10%), o valor acumulado duplica também?

# Valor futuro

## Juro composto e juro simples

### Juro composto

$$C_n = C_0(1 + r)^n$$

- Reinvestimento do juro recebido em cada período

### Juro simples

$$C_n = C_0 + nC_0r$$

- Juro constante em cada período e igual a  $C_0r$

# Valor actual

## Exemplo 6

- À taxa de juro anual de 10%, quanto terei de investir hoje para obter 110€ daqui a um ano?

$$\text{Valor futuro} = \text{Valor inicial} (1 + r)$$

$$\underbrace{\text{Valor inicial}}_{\text{Valor actual}} = \text{Valor futuro} \underbrace{\frac{1}{(1 + r)}}_{\text{Valor actual de 1€}}$$

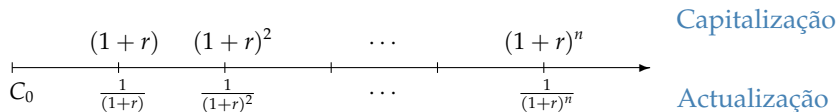
# Valor actual

## Exemplo 7

- À taxa de juro anual de 10%, quanto terei de investir hoje para obter 121 000€ daqui a dois anos?
- E daqui a 10 anos?

# Valor actual

Generalização:  $n$  períodos de tempo



# Valor actual

## Determinação da taxa de juro

### Exemplo 8

- Imagine que acabou de ganhar 10 000€ na lotaria e pretende adquirir um carro dentro de 5 anos. O preço do carro nessa data será de 16 105€. Se aplicar o montante que ganhou numa conta poupança, qual deverá ser a taxa de juro anual de forma a conseguir comprar o carro?

# Rendas

## Rendas / Anuidades / Prestações / Cash-flows

Pagamentos ou recebimentos realizados ao longo de um determinado período de tempo, sempre com a mesma frequência (mensais/anuais).

### Exemplo 9

Ano	Cash-flow	$\rightarrow n$	Valor futuro
0	0	3	0
1	C	2	
2	C	1	
3	C	0	

# Rendas

$$\begin{aligned}\text{Valor futuro} &= C(1+r)^2 + C(1+r) + C \\ &= C \left[ (1+r)^2 + (1+r) + 1 \right]\end{aligned}$$

Generalizando:

$$\begin{aligned}\text{Valor futuro} &= C \underbrace{\left[ (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1 \right]}_{\text{Soma dos termos de uma progressão geométrica}} \\ &= C \left[ \frac{(1+r)^n - 1}{r} \right] \\ &= C s_{\overline{n}|(r)}\end{aligned}$$



# Rendas

## Exemplo 10

- Durante os próximos 40 anos, espera depositar no final de cada ano o montante de 10 000€. O banco oferece-lhe uma taxa de juro de 8%. Quanto terá acumulado na maturidade?



Poupança

# Rendas

## Exemplo 11

- Daqui a 25 anos, quando estiver mais perto da idade da reforma, gostaria de ter acumulado o valor de 500 000€. Sabendo que o banco oferece-lhe uma taxa de juro de 8%, quanto terá de ser a sua poupança anual?
- Quanto teria acumulado na maturidade considerando a mesma prestação anual mas uma taxa de juro de 0%?

# Rendas

## Rendas / Anuidades / Prestações / Cash-flows

Pagamentos ou recebimentos realizados ao longo de um determinado período de tempo, sempre com a mesma frequência (mensais/anuais).

### Exemplo 12

Ano	Cash-flow	0 ←	Valor actual
0	0	0	0
1	C	1	
2	C	2	
3	C	3	

# Rendas

$$\begin{aligned}\text{Valor Actual} &= C \frac{1}{(1+r)} + C \frac{1}{(1+r)^2} + C \frac{1}{(1+r)^3} \\ &= C \underbrace{\left[ \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} \right]}_{\text{Valor actual de uma renda anual de 1€ com } n = 3}\end{aligned}$$

## Generalizando:

$$\begin{aligned}\text{Valor Actual} &= C \underbrace{\left[ \frac{1}{(1+r)} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right]}_{\text{Soma dos termos de uma progressão geométrica}} \\ &= C \left[ \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right] \\ &= C a_{\overline{n}|(r)}\end{aligned}$$

# Rendas

## Exemplo 13

- Se quiser obter um rendimento anual de 10 000€ durante os próximos 25 anos, quanto terá de depositar hoje? Assuma  $r = 5\%$ .
- Quanto teria de depositar hoje considerando o mesmo rendimento anual mas uma taxa de juro de 0%?

# Rendas

## Exemplo 14

- Contratou hoje um **empréstimo** de 100 000€ durante os próximos 5 anos a uma taxa de juro de 10%. Qual será a sua prestação anual?
- Se a taxa de juro fosse de 0%, qual seria o valor da prestação?
- Como podemos determinar em qualquer momento do tempo o valor em dívida?

# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 15 - Prestações futuras

- Daqui a 6 anos, o Jorge vai receber todos os anos a quantia de 500€, durante 4 anos. A uma taxa de juro de 10%, qual será o valor actual desta anuidade?

# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 16 - Prestações antecipadas

- Imagine que ganhou o euromilhões e vai receber todos os anos a quantia de 50 000€, durante 20 anos, com início já hoje. À taxa de juro de 8%, qual será o valor actual do prémio ganho?
- Qual seria o valor actual deste mesmo prémio caso os pagamentos só tivessem início daqui a um ano?



# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 17 - Prestações infrequentes

- A Carolina irá receber o montante de 450€ de dois em dois anos, durante 20 anos. Considerando uma taxa de juro de 6%, qual será o valor actual destes recebimentos?

# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 18 - Várias anuidades

- Filipe e Leticia acabaram de ser pais e pretendem constituir um fundo de poupança de forma a pagar os 4 anos de universidade da sua filha. Cada ano de universidade terá um custo de 30 000€, com o primeiro pagamento a ser feito daqui a 18 anos. A taxa de juro durante todo este período é constante e igual 14%. Qual deverá ser o montante anual a ser depositado no banco para fazer face a estes pagamentos? Assuma que a primeira poupança é realizada daqui a um ano e a última no final do 17º ano.

# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 19 - Anuidades com crescimento

- Prestes a terminar o seu mestrado, a Luísa recebeu uma oferta de emprego com um salário anual de 80 000€. Ao longo dos seus 40 anos de trabalho, estima que este salário cresça à taxa de 9% ao ano. Assumindo uma taxa de juro de 20% e que o primeiro salário é pago daqui a um ano, qual será o valor actual de todos estes recebimentos?

# Rendas

## Casos Especiais

### Anuidade com crescimento à taxa $g$

$$\text{Valor actual} = C \left[ \frac{1 - \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^n}{r - g} \right]$$

# Rendas

## Casos Especiais

### Exemplo 20 - Anuidades com crescimento

- Voltando ao exemplo 18, considere agora que a poupança anual feita pelo casal aumenta todos os anos em 4%. Calcule novamente o montante anual considerando esta nova situação.

# Rendas

## Perpetuidades

Pagamentos/recebimentos de igual valor (com ou sem crescimento associado) que se repetem com a mesma frequência e duração ilimitada no tempo.

Obrigação



Maturidade finita

Ação



Maturidade infinita

# Rendas

## Perpetuidades

### Exemplo 21

- Qual o valor actual de um recebimento anual sem termo de 10€, à taxa de juro anual de 10%?
- E se esse recebimento não for constante ao longo do tempo, mas aumentar à taxa  $g = 5\%$  ao ano?

# Rendas

## Perpetuidades

- Sem crescimento:

$$\text{Valor actual} = \frac{C}{r}$$

- Com crescimento à taxa  $g$ :

$$\text{Valor actual} = \frac{C}{r - g}$$



## Taxas nominais e taxas efectivas

Quando o período da taxa cotada difere do período de capitalização:

Taxa nominal



- Dividir pelo nº de períodos de capitalização  $m$

$$r_m = \frac{i}{m}$$

Taxa efectiva



- Calcular a taxa efectiva referente ao período de capitalização ( $p \neq m$ )

$$r_p = (1 + i/m)^{(m/p)} - 1$$

# Taxas nominais e taxas efectivas

## Exemplo 22

- No exemplo 14, se a taxa de juro anual nominal for de 10% mas os pagamentos forem mensais, qual será a nova prestação a pagar?
- Qual a taxa de juro anual efectiva?

# Valor temporal do dinheiro

## Problema final

Imagine que tem hoje 30 anos. Durante os próximos 20 anos, isto é, até fazer 50 anos, conseguirá poupar um certo valor anual. Nos 10 anos seguintes entre os seus 51 a 60 anos, estima um aumento considerável das suas despesas e portanto durante esse período não fará qualquer poupança. O objectivo é que nos anos seguintes, quando se reformar aos 60, consiga um rendimento anual de 100 000€. A sua esperança média de vida é de 80 anos.

- A uma taxa de juro anual de 8%, quanto deverá ser a sua poupança anual nos próximos 20 anos para fazer face ao consumo esperado pós-reforma?