JOB SCHEDULING

O tema do *job scheduling* é um dos mais cruciais na gestão da produção

A correcta utilização das máquinas para concluir diversas tarefas conduz a uma maior produtividade e eficiência

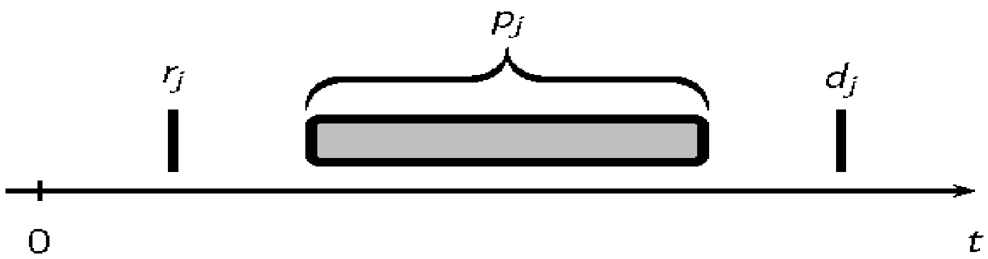
Genericamente, considera-se que um certo conjunto de tarefas J tem que ser processado por um certo conjunto de máquinas

É possível considerar um conjunto de critérios, que ajudam a definir o que será um "bom" escalonamento dessas tarefas

JOB SCHEDULING

Para cada tarefa j, considerem-se as seguintes características:

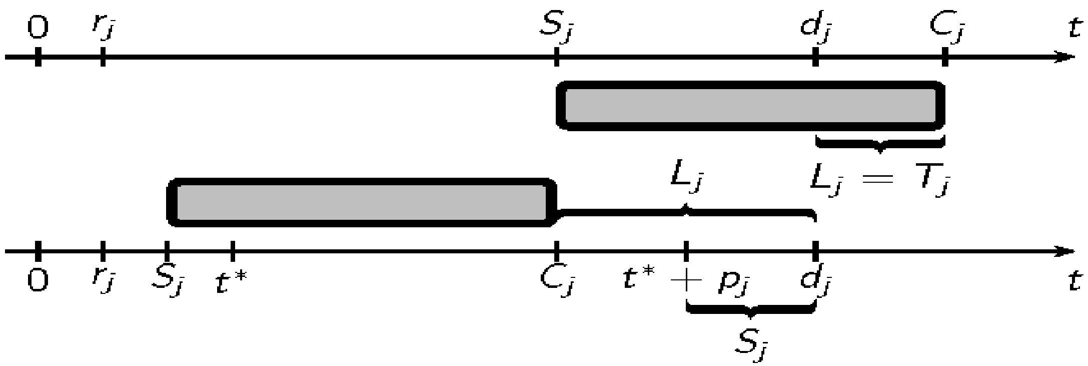
- Tempo de processamento (p_j)
- Data de disponibilização (r_j)
- Prazo pretendido (d_j)
- Peso/importância (w_j)



JOB SCHEDULING

Com base nas características da tarefa *j*, é possível deduzir algumas métricas:

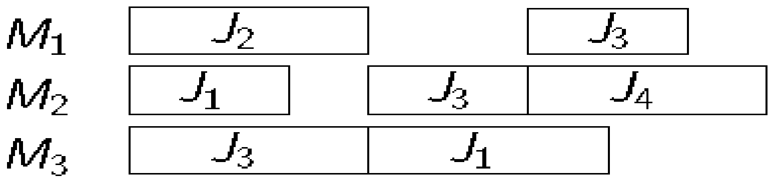
- Tempo de início do processamento (S_j)
- Data de conclusão (C_j)
- Atraso ($L_j = C_j – d_j$)
- Tardeza ($T_j = \max(L_j;0)$)
- Folga no instante t ($S_j(t) = \max(d_j – p_j – t;0)$)
- Tarefa em atraso ($U_j = 1$, se $T_j > 0$)

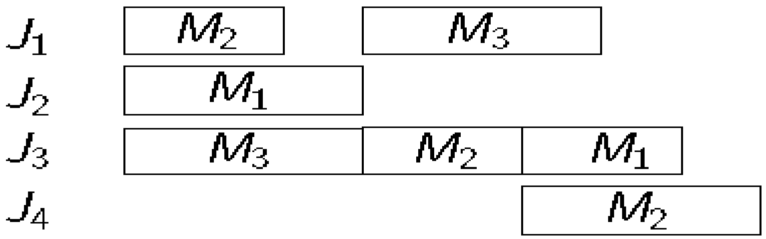


ESCALONAMENTO

De uma forma geral, é possível considerar que existem *m* máquinas e *n* tarefas a realizar

Um escalonamento pode ser representado com recurso a um diagrama de Gantt





ESCALONAMENTO – DEFINIÇÕES GERAIS

No quadro genérico do escalonamento (m máquinas, n tarefas), uma afectação entre uma tarefa *j* e uma máquina *i* é designada por operação e representada por (*i*,*j*)

O tempo de processamento da operação (*i*,*j*) é representado por p_{ij} (basta p_j, quando só existe uma máquina)

PRECEDÊNCIAS

Uma questão que pode ser importante no escalonamento das tarefas é a eventual existência de precedências

Caso existam precedências, considera-se como definida uma rede de precedências, onde a tarefa j_1 está ligada j_2, se a segunda só pode ser realizada depois da primeira estar concluída

Esta rede de precedências terá que ser, necessariamente acíclica

ESCALONAMENTO – PROBLEMAS

Os problemas de escalonamento são usualmente representados através da notação $\alpha|\beta|\gamma$

- α fornece informação sobre as máquinas
- β descreve as características das tarefas
- γ dá indicação do critério a considerar no escalonamento

Do ponto de vista das máquinas, consideram-se os seguintes problemas:

- Uma só máquina (α = 1)
- Máquinas paralelas (idênticas) (α = P ou Pm)
  - O tempo de processamento da tarefa j é sempre p_j
- Máquinas paralelas uniformes (α = Q ou Qm)
  - As máquinas têm velocidades diferentes (s_1, ..., s_m)
  - Os tempos de processamento são iguais a $p_{ij} = p_j / s_i$

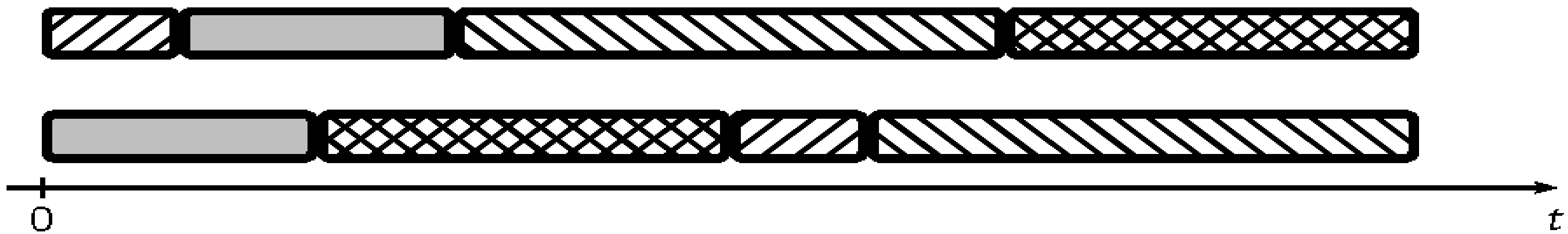
ESCALONAMENTO – PROBLEMAS

- Máquinas paralelas não relacionadas (= R ou R*m*)
  - As tarefas são processadas em velocidades diferentes pelas máquinas (s_{ij})
  - Os tempos de processamento são iguais a $p_{ij} = p_j / s_{ij}$
  - Cada tarefa tem que ser processada por uma máquina
- *Flow shop* (= F ou F*m*)
  - *m* máquinas em série
  - Cada tarefa tem que passar por cada uma das máquinas
- *Job shop* (= J ou J*m*)
  - Cada tarefa tem o seu percurso pelas máquinas pré-definido
  - É possível que uma tarefa não tenha que passar por todas as máquinas
- *Open shop* (= O ou O*m*)
  - Cada tarefa tem que ser processada por uma máquina, sem ordem pré-determinada

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA (1 | | C_{MAX})

Caso exista apenas uma máquina para as tarefas a realizar, a data máxima de conclusão (C_{max}) será sempre igual

- $C_{max} = \max(C_1, C_2, ..., C_n)$



Isto significa que a minimização de C_{max} é trivial e irrelevante

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1 || C_W$)

Uma questão que pode ser relevante no escalonamento de tarefas com uma só máquina é a data de conclusão ponderada C_W

- $C_W = \sum w_j C_j$

Um caso especial dá-se quando os pesos são todos unitários (w_j=1)

Nesse caso, C_W é igual à soma de todas as datas de conclusão

Para encontrar o escalonamento que minimize C_W nessas condições, basta aplicar a regra SPT (shortest processing time)

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA
$(1 \,|\,|\, C_W)$

Se os pesos atribuídos às tarefas forem distintos (caso sejam todos iguais, é possível reduzir a um caso unitário), é necessário aplicar a regra weighted shortest processing time, em que se escolhe primeiro as tarefas que apresentam menor rácio p_j / w_j

Exemplo:

Tarefas	**1**	**2**	**3**	**4**
p_j	10	20	40	30
w_j	2	5	8	1
p_j / w_j	5	4	5	30

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA (1 | | L_{MAX})

Se o objectivo for minimizar o atraso máximo (considerando que existem prazos), a regra *Earliest Due Date* fornece a solução óptima, se as datas de disponibilização forem todas iguais (por exemplo, iguais a 0)

Tarefas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p_j	20	20	50	40	30
d_j	70	180	60	100	90

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA (1 | PREC | L_{MAX})

Caso existam precedências estabelecidas entre as tarefas, é possível ainda assim resolver o problema de minimização de L_{max}

Para tal, basta considerar ir considerando as tarefas que têm os seus sucessores já calendarizados, e escolher dessas a que tem o menor atraso

Tarefas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
p_j	20	20	50	40	30
d_j	70	180	60	100	90
Prec.	-	4	1	1	2,3

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1|r_j|C_{max}$)

Caso existam datas de disponibilização das tarefas, o problema de minimizar a data máxima de conclusão pode ser convertido num problema de minimização do atraso máximo

Para tal, considere-se uma constante $K>\max\{r_j\}$ e definam-se prazos de conclusão $d_j=K-r_j$

Resolva-se o problema $1||L_{max}$, considerando esses prazos de conclusão

A solução óptima para o problema inicial é dada pela ordem inversa da solução obtida

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1 | r_j | L_{max}$)

Curiosamente, este problema tem elevada complexidade (*NP-hard*)

Para resolver este tipo de problemas, é necessário recorrer a processos mais sofisticados, embora o tempo de computação para a obtenção da solução óptima possa ser, em muitos casos, demasiadamente elevado

Um método de resolução está relacionado com outro problema associado

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA – *PREEMPTION* (INTERRUPÇÃO)

Em alguns contextos de escalonamento de tarefas, considera-se possível a interrupção da execução de tarefas, para que se possa avançar com outras por alguma motivo (prioridade)

Essa situação é designada habitualmente por *preemption*

Quando se admite esta situação, a regra *Earliest Due Date*, devidamente adaptada, resolve bem o problema da miminização do atraso máximo

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1 \mid pmtn, r_j \mid L_{max}$)

Exemplo:

Tarefas	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10

Ordenam-se as tarefas por ordem crescente do prazo de conclusão

Aplica-se a regra *Earliest Due Date* e, sempre que uma tarefa passar a estar disponível, interromper se adequado a que está a ser executada

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1 | r_j | L_{max}$)

Quando não é permitido interromper tarefas, é necessário recorrer a métodos mais complexos

Um desses métodos é do tipo branch-and-bound

No passo inicial, considera-se que t=0 e que a primeira decisão consiste em decidir qual a primeira tarefa a executar

Seja S o conjunto de tarefas já escalonadas, num certo ponto da árvore de pesquisa

Só deverão ser consideradas as tarefas para pesquisa que verifiquem a seguinte condição:

- $r_k < \min_{j \notin S}\{\max\{t, r_j\} + p_j\}$

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1|r_j|L_{max}$)

Em cada ponto da árvore de pesquisa é possível usar como limite inferior a resolução do problema com as tarefas ainda não escalonados de acordo com $1|pmtn,r_j|L_{max}$

Um limite superior geral é dado por uma solução admissível que tenha sido encontrada

O instante *t* associado a um ponto de pesquisa corresponde sempre ao instante anterior somado com o tempo de processamento da tarefa escalonada

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA
($1 \mid R_J \mid L_{MAX}$)

Exemplo:

Tarefas	1	2	3	4
p_j	4	2	6	5
r_j	0	1	3	5
d_j	8	12	11	10

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA ($1 || U_J$)

Estrutura de uma solução óptima:

- Conjunto S_1 de tarefas que cumprem o prazo de conclusão
- Conjunto S_2 de tarefas em atraso
- As tarefas de S_1 são escalonadas antes das tarefas de S_2
- As tarefas de S_1 estão escalonadas de acordo com a Earliest Due Date
- As tarefas de S_2 estão escalonadas arbitrariamente

Algoritmo:

- Ordenar as tarefas por ordem crescente do prazo de conclusão
- Escalonar as tarefas sucessivamente e, se uma ficar em atraso, remover a tarefa já escalonada com maior tempo de processamento
- As tarefas removidas ficam em atraso

ESCALONAMENTO COM UMA SÓ MÁQUINA
$(1 \mid\mid U_j)$

Exemplo:

Tarefas	1	2	3	4	5
p_j	7	8	4	6	6
d_j	9	17	18	19	21

O problema $(1 \mid\mid w_jU_j)$ é complexo (*NP-hard*)

Sugere-se a utilização de uma regra heurística para gerar soluções sub-optimais

Um desses métodos pode ser a aplicação da regra *Weighted Shortest Processing Time* (tarefas ordenadas por ordem crescente de p_j / w_j)

Esta complexidade verifica-se, mesmo que os prazos de conclusão sejam todos iguais

MÁQUINAS PARALELAS PM | | C_{MAX}

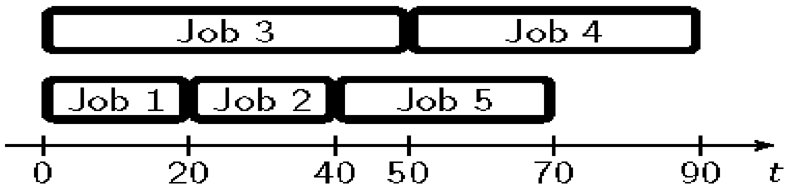
Caso só existisse uma máquina, a questão de minimizar C_{max} é irrelevante

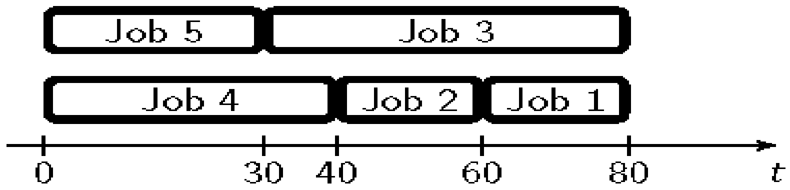
Quando existem máquinas paralelas, o problema passa a ser complexo (NP-hard)

O problema corresponde a balancear correctamente a ocupação das máquinas

Exemplo:

Tarefas	1	2	3	4	5
p_j	20	20	50	40	30





MÁQUINAS PARALELAS $Pm \| C_{max}$

Se as tarefas estiverem todas disponíveis no momento inicial, $r_j = 0$, a regra *Longest Processing Time* (LPT) fornece habitualmente bons resultados

As soluções obtidas com esta regra nunca estarão mais distantes, em termos do C_{max} gerado, de 33% do valor óptimo

Na realidade, o rácio de entre o valor dado pela solução assim gerada (LPT) e o valor óptimo não ultrapassa $4/3 - 1/(3m)$

MÁQUINAS PARALELAS $PM \mid\mid C_{MAX}$

Para observar um “pior caso”, considere-se a seguinte instância, para 4 máquinas

Tarefas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_j	7	7	6	6	5	5	4	4	4

A regra LPT dá um C_{max} igual a 15, mas é possível obter 12!

MÁQUINAS PARALELAS $Pm \mid\mid \sum C_J$

Caso se pretende minimizar o tempo total de conclusão das tarefas (equivalente a minimizar o tempo médio de conclusão), a regra *Shortest Processing Time* (SPT) fornece sempre a solução óptima

Porém, caso o problema seja $Pm \mid\mid \sum w_j C_j$, o problema passa a ser complexo

A regra WSPT (considerando os rácios p_j / w_j) pode fornecer boas soluções, mas só garante estar a 22% do óptimo

FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Nos problemas de *flow shop*, é necessário processar *n* tarefas que têm que atravessar *m* máquinas em série, pela ordem pré-especificada

Embora possa parecer que basta determinar a permutação ideal de tarefas e fazê-las passar sequencialmente pelas máquinas, é possível que uma tarefa “ultrapasse” outra na espera por uma máquina

Caso se dêem essas “ultrapassagens”, significa que não terá que se verificar, necessariamente, uma política *First Come First Served*

FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Um resultado importante em problemas de flow shop, é que uma solução óptima nunca têm "ultrapassagens" entre as duas primeiras máquinas e entre as duas últimas

Logo, as soluções óptimas dos problemas F2 | | C_{max} e F3 | | C_{max} nunca têm "ultrapassagens"

Já nos problemas F4 | | C_{max} podem existir "ultrapassagens" da segunda para a terceira máquina

A possibilidade de ultrapassagens é algo que traz muita complexidade ao problema

FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Quando não são permitidas "ultrapassagens" (permutation flow shop), é possível determinar recursivamente o tempo de conclusão de cada tarefas em cada máquina

Dada uma permutação $j_1, \ldots, j_n$ das tarefas, as datas de conclusão em cada máquina podem ser calculadas do seguinte modo:

$$C_{i,j_1} = \sum_{l=1}^{i} p_{l,j_1}, i = 1, \ldots, m$$

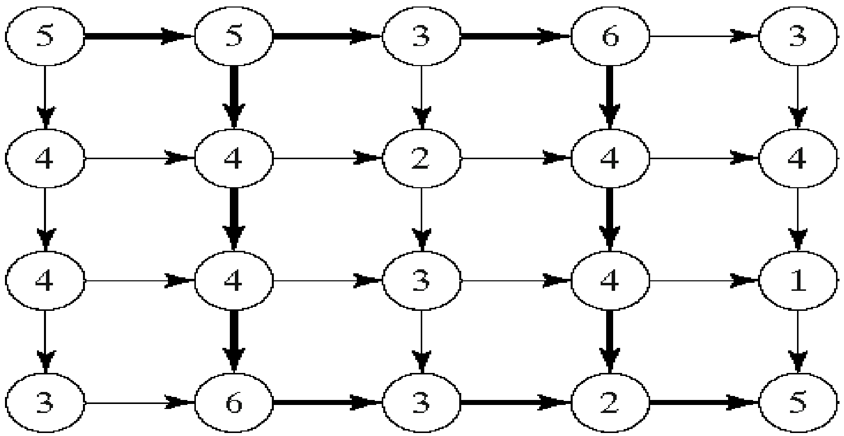
$$C_{1,j_k} = \sum_{l=1}^{k} p_{1,j_l}, k = 1, \ldots, n$$

$$C_{i,j_k} = \max\left(C_{i-1,j_k}, C_{i,j_{k-1}}\right) + p_{i,j_k}, i = 2, \ldots, m, k = 2, \ldots, n$$

FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Exemplo:

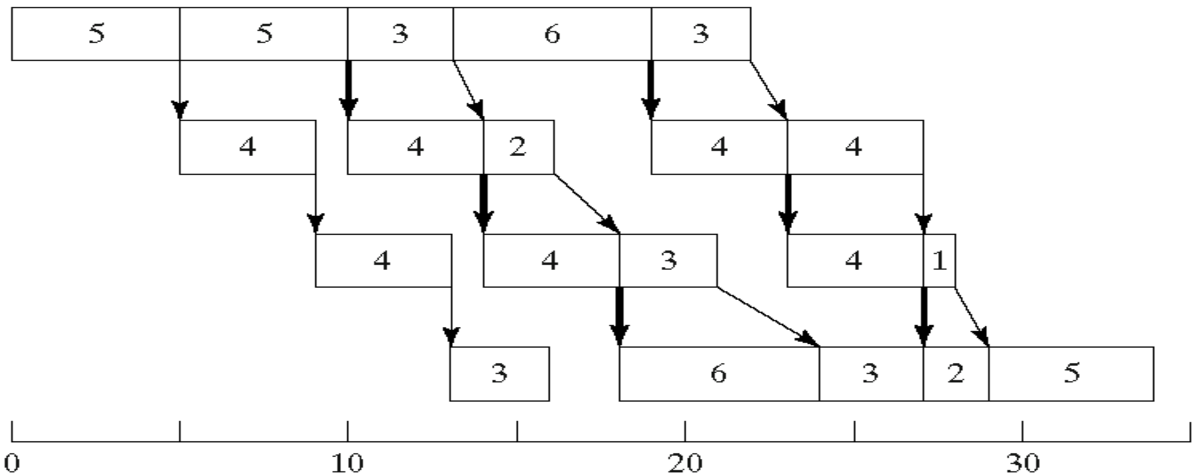
Tarefas	1	2	3	4	5
	5	5	3	6	3
	4	4	2	4	4
	4	4	3	4	1
	3	6	3	2	5



FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Exemplo:

Tarefas	1	2	3	4	5
	5	5	3	6	3
	4	4	2	4	4
	4	4	3	4	1
	3	6	3	2	5



FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

Um problema de flow shop dual corresponde a construir um outro problema com n tarefas e m máquinas, tal que o tempo de processamento da i-ésima tarefa, num problema, é igual ao da (m+1-i)-ésima, no outro

Tarefas	1	2	3	4	5
	3	6	3	5	5
	4	4	2	4	4
	1	4	3	4	4
	5	2	3	6	3

FLOW SHOP FM | | C_{MAX}

A permutação (j_1,j_2,j_3,j_4) no primeiro problema e a permutação (j_4,j_3,j_2,j_1) no problema dual apresentam o mesmo C_{max}

Para determinar a melhor permutação no caso F2 | | C_{max}, começa-se por dividir as tarefas em dois conjuntos

No conjunto I colocam-se as tarefas que têm um menor tempo de processamento na máquina 1 ($p_{1j}<p_{2j}$), e as restantes colocam-se no conjunto II

Uma permutação SPT(I)-LPT(II) é óptima para o problema F2 | | C_{max}

JOB SHOP $Jm \| \| C_{max}$

No job shop, cada tarefa tem a sua sequência de processamento pré-definida

O problema consiste em determinar qual a forma de colocar as tarefas nas máquinas

Exemplo:

- j_1:M1->M2->M3
- j_2:M2->M1->M4->M3
- j_3:M1->M2->M4

Tarefas\Máquinas	M1	M2	M3	M4
j_1	6	7	2	-
j_2	1	5	5	4
j_3	4	3	-	1

JOB SHOP J2 | | C_{MAX}

Quando existem apenas duas máquinas, é possível resolver o problema em tempo polinomial

Dividam-se as tarefas em dois conjuntos

- $J_{1,2}$ – conjunto das tarefas que têm que ser processadas em primeiro lugar pela máquina M1
- $J_{2,1}$ – conjunto das tarefas que têm que ser processadas em primeiro lugar pela máquina M2

Resolva-se o problema das tarefas em $J_{1,2}$ como se tratasse de um F2 | | C_{max}, ou seja, utilizando o método SPT(I)-LPT(II)

Faça-se o mesmo para as tarefas em $J_{2,1}$

JOB SHOP JM | | C_{MAX}

Quando o número de máquinas é superior a 2, o problema torna-se muito complexo

Uma alternativa à formulação em programação inteira é a utilização da heurística Shifting bottleneck

Tarefas\Máquinas	M1	M2	M3	M4
j_1	6	7	2	-
j_2	1	5	5	4
j_3	4	3	-	1