EDOs (cont)

- **Lineares de 1ª ordem**

$$\boxed{y' + p(x)y = g(x)}$$

Método do fator integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

1º) Calcular $\mu(x)$

2º) Multiplicar ambos os membros por $\mu(x)$

3º) Substituir o 1º membro por $(y \times \mu(x))'$ ⚠ Este passo não é lógico $\Updownarrow$ não é óbvio

4º) "Passar" a derivada para o outro membro como primitiva

Ficha 2 parte 1

a) $\underset{\substack{\uparrow \\ p(x)}}{y' + 2y} = \cos x$ EDO linear 1ª ordem (método do fator integrante)

1º) $\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$

2º) $e^{2x}(y' + 2y) = e^{2x}\cos x$

3º) $(ye^{2x})' = e^{2x}\cos x$

4º) $ye^{2x} = \int e^{2x}\cos x\,dx$

C.A

$(ye^{2x})' = y'e^{2x} + y(e^{2x})' = y'e^{2x} + 2ye^{2x}$
$= e^{2x}(y' + 2y)$

C.A

$\underbrace{\int e^{2x}\cos x\,dx}_{I} = \frac{e^{2x}}{2}\cos x - \int -\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen} x\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} x - \int \frac{1}{2}\underbrace{e^{2x}\cos x\,dx}_{I}\right)$

$f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$g'(x) = e^{2x}$ $\quad g(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f'(x) = \cos x$
$g'(x) = e^{2x}$ $\quad g(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

$I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}I$

$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right)$

$I = \frac{4}{10}e^{2x}\left(\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right)$

4º) cont.

$ye^{2x} = \frac{2}{5}e^{2x}\left(\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) + c, \; c \in \mathbb{R}$

$y = \frac{2}{5}\left(\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) + c, \; c \in \mathbb{R}$

solução geral na forma explícita

b) $x^3y' - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y' - \frac{y}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ EDO linear de 1ª ordem

$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x^3} dx} = e^{-\int x^{-3} dx} = e^{-\frac{x^{-2}}{-2}} = e^{\frac{1}{2}x^{-2}}$

Multiplicando a equação por $\mu(x)$

$e^{\frac{1}{2}x^{-2}}\left(y' - \frac{1}{x^3}y\right) = e^{\frac{1}{2}x^{-2}} \times \frac{1}{x^3}$

$\left(y \times e^{\frac{1}{2}x^{-2}}\right)' = x^{-3} e^{\frac{1}{2}x^{-2}} \Leftrightarrow y e^{\frac{1}{2}x^{-2}} = -\int -x^{-3} \cdot e^{\frac{1}{2}x^{-2}} dx$

$\Leftrightarrow y e^{\frac{1}{2}x^{-2}} = -e^{\frac{1}{2}x^{-2}} + C, \ C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = -1 + \frac{C}{e^{\frac{1}{2}x^{-2}}}, \ C \in \mathbb{R}$

• de Bernoulli:

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}}$$

1) Dividir a equação por y^{α}

$\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = b(x)\frac{y^{\alpha}}{y^{\alpha}} \Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$

2) Multiplicar a equação por $(1-\alpha)$

$\underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{z'} + (1-\alpha)a(x)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{z} = (1-\alpha)b(x)$ M.V

$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)$

$z = y^{1-\alpha}$
$z' = (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y'$
$= (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

13

a) $xy' + y = y^2\ln(x)$ $(x>0)$

$\Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2\ln(x)}{x}$ EDO de Bernoulli $\alpha = 2$

M.V

$\Leftrightarrow z' + (-1)\frac{1}{x}z = -1\frac{\ln x}{x}$

$z = y^{1-2} = y^{-1}$
$z' = -y'$

$\Leftrightarrow \underbrace{z' - \frac{1}{x}}_{p(x)}z = \underbrace{-\frac{\ln x}{x}}_{q(x)}$ EDO linear de 1ª ordem

Fator integrante = $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}$

Multiplicando a eq por $\mu(x)$:

$x^{-1}\left(z' - \frac{1}{x}z\right) = x^{-1}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)$

$\Leftrightarrow (zx^{-1})' = \frac{\ln x}{x^2}$

$zx^{-1} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$

C.A

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

Voltando à equação:

$z x^{-1} = \frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) dx$

$(=) \; z x^{-1} = \frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$(=) \; z x^{-1} = \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c, \; c \in \mathbb{R}$

Voltando à variável inicial : $z = y^{-1}$

$y^{-1}x^{-1} = \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c, \; c \in \mathbb{R}$

$(=) \; \frac{1}{y} = \ln x - 1 + cx, \; c \in \mathbb{R}$

$(=) \; y = \frac{1}{\ln x - 1 + cx}, \; c \in \mathbb{R}$

• exatas

$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ onde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (condição a verificar)

A solução é $F(x,y) = C$ onde

$dF = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

$(=) \; dF = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$ (usar este sistema p/ determ. F)

Ex

8) $(\overbrace{x^3 + xy^2}^{M})\,dx + (\overbrace{x^2y + y^3}^{N})\,dy = 0$

$y(0) = 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$ logo a EDO é exata

A solução é da forma $F(x,y) = C$ onde

$\begin{cases} \frac{\partial F}{dx} = x^3 + xy^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + y^3 \end{cases}$

desenvolvendo a 1ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + xy^2 \Leftrightarrow F(x,y) = \int (x^3 + xy^2)\,dx$$

$$\Leftrightarrow F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y)^{*} \Leftrightarrow g(y)$$

* nota: como a primitiva é em ordem a x, o y tb é uma constante, mas não sabemos se é uma const. real ou uma função de y

substituindo $F(x,y)$ na 2ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + y^2 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y)\right) = x^2y + y^3$$

$$\Leftrightarrow x^2y + \varphi'(y) = x^2y + y^3$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(y) = y^3$$

$$\Leftrightarrow \varphi(y) = \int y^3\,dy$$

$$\Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

Assim $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{4}$

O integral geral é: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}$