desenvolvendo a 1ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + xy^2 \iff F(x,y) = \int (x^3 + xy^2)\,dx$$

$$\iff F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y) \; * \iff g(y)$$

* nota: como a primitiva é em ordem a x, o y tb é uma constante, mas não sabemos se é uma const. real ou uma função de y

substituindo $F(x,y)$ na 2ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + y^2 \iff \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y)\right) = x^2y + y^3$$

$$\iff x^2y + \varphi'(y) = x^2y + y^3$$

$$\iff \varphi'(y) = y^3$$

$$\iff \varphi(y) = \int y^3\,dy$$

$$\iff \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

Assim $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{4}$

O integral geral é: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C \quad , \; C \in \mathbb{R}$

- <u>não exatas</u>

Para transformar em exata, multiplica-se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ por um fator integrante

1) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x) \quad : \quad \mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}$

2) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = h(x) \quad : \quad \mu(y) = e^{-\int h(y)\,dy}$

Exemplo

a) $\underbrace{y}_{M}\,dx + \underbrace{(y^2 - x)}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \qquad$ como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, a EDO não é exata

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \qquad g(y) = \frac{2}{M(x,y)} = \frac{2}{y}$$

escolhemos a opção 2 pq M está em função apenas de y

1.4

Fator integrante

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2\int \frac{1}{y} dy} = e^{-2\ln|y|} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

Multiplicar M e N por μ

$$(y^{-2} y) dx + y^{-2}(y^2 - x) dy = 0$$

$$(=) \underbrace{y^{-1}}_{M} dx + \underbrace{(1 - y^{-2}x)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1y^{-2} = -y^{-2} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -y^{-2}$$ Logo, a EDO é exata

A solução é do tipo $F(x,y) = C$, onde

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Desenvolvendo a 1ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^{-1} (=) F(x,y) = \int y^{-1} dx (=) F(x,y) = y^{-1} + \varphi(y)$$

Substituindo F na 2ª eq

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - y^{-2}x (=) \frac{\partial(y^{-1} + \varphi(y))}{\partial y} = 1 - y^{-2}x$$

$$(=) -\cancel{y^{-2}x} + \varphi'(y) = 1 - \cancel{y^{-2}x}$$

$$(=) \varphi'(y) = 1 (=) \varphi(y) = \int 1\, dy (=) \varphi(y) = y$$

Logo $F(x,y) = y^{-1}x + y$

O integral geral é $y^{-1}x + y = C,\ C \in \mathbb{R}$

b) $\underbrace{(2y-x^3)}_{M}dx + \underbrace{x}_{N}dy = 0$.

- $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$ $\quad$ como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial M}{\partial x}$, a EDO não é exata

- $g(x) = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x}$

- $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$

- $(x(2y-x^3))dx + x^2 dy = 0$

$\underbrace{(2xy - x^4)}_{M}dx + \underbrace{x^2}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, logo a EDO é exata

- A solução é do tipo $F(x,y) = C$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - x^4 \Leftrightarrow F(x,y) = \int 2xy - x^4 \, dx$

$\Leftrightarrow F(x,y) = \frac{2x^2y}{2} - \frac{x^5}{5} + \varphi(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \Leftrightarrow \frac{\partial(x^2y - x^5/5 + \varphi(y))}{\partial y} = x^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \varphi'(y) = \cancel{x^2} \Leftrightarrow \varphi(y) = 0$

O integral geral é $x^2y - \frac{x^5}{5} = c$, $c \in \mathbb{R}$

• EDO de ordem $n>1$ de coeficientes constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$$

A solução é do tipo $y = y_h + y_p$

$y_h \rightarrow$ solução da equação correspondente homogénea:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

$y_p \rightarrow$ solução particular (não sai)

Solução homogénea:

Obtém-se por combinação linear de funções obtidas através das raízes da equação característica

$$a_0 R^n + a_1 R^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Funções:

$\rightarrow$ caso 1: R é a raiz real simples $\rightarrow e^{Rx}$

$\rightarrow$ caso 2: R é raiz real dupla $\rightarrow e^{Rx}, xe^{Rx}$

↳ aparece 2x a mesma raiz

caso 3: R é raiz real de multipl. $k \rightarrow e^{Rx}, xe^{Rx}, x^2e^{Rx}, \ldots, x^{(k-1)}e^{Rx}$

$\rightarrow$ caso 4: $R = \alpha \pm \beta i$ é raiz complexa simples $\rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

caso 5: $R = \alpha \pm \beta i$ é raiz complexa multipl. k $\rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

sempre q há uma raiz complexa aparece sempre o seu conjugado

Ao conjunto de todas as funções $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ chamamos sistema fundamental de soluções (SFS)

$$SFS = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

$$y_h = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

Folha 2 parte 2

1) a) $y' + y = \operatorname{sen} x$

A eq homogénea correspondente é: $y' + y = 0$

a eq característica é:

$R + 1 = 0 \Leftrightarrow R = -1$

$SFS = \{e^{-x}\}$ $\quad y_h = C_1 e^{-x}, \; C_1 \in \mathbb{R}$

b) $y'' - y + \underbrace{2\cos x}_{b(x)} = 0$

A eq homogénea é $y'' - y = 0$

eq característ $R^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow R^2 = 1 \Leftrightarrow R = \pm 1$

$SFS = \{e^{x}, e^{-x}\}$

$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' + y' = 2y + \underbrace{3 - 6x}_{b(x)}$

eq homogénea é $y'' + y' - 2y = 0$

eq característica : $R^2 + R - 2 = 0 \Leftrightarrow R = -2 \vee R = 1$

$SFS = \{e^{-2x}, e^{x}\}$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$

eq homog. = $y'' - 4y' + 4y = 0$ $\quad$ Raiz dupla

eq característica $R^2 - 4R + 4 = 0 \Leftrightarrow R = 2 \vee R = 2$

$SFS = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$ $\quad y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Eq. homo $y''' + y' = 0$

Eq car : $R^3 + R = 0 \Leftrightarrow R(R^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \vee R^2 = -1$

$\Leftrightarrow R = 0 \vee R = i \vee R = -i$

$SFS = \{e^{0x}, e^{0x}\cos x, e^{0x}\operatorname{sen} x\} = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$