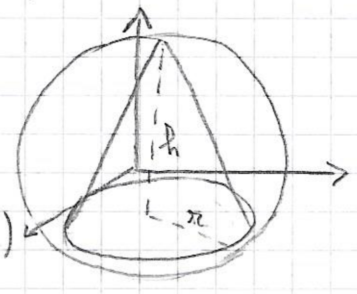
* (aula que faltei)

Use o metodo dos multiplicadores de Lagrange para calcular r e h para o qual o cone inserido na esfera unitária tem volume máximo.



$V_c = \frac{1}{3} A_b \times h$

$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$, a função a $\underline{\text{maximizar}}$, sujeita a $\underbrace{(h-1)^2 + r^2 - 1}_{?} = 0 = g(h,r)$

$x^2 + r^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow (h-1)^2 + r^2 = 1$

$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi}{3} r h \qquad \frac{\partial g}{\partial r} = 2r$

$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3} \pi r^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial h} = 2(h-1)$

$P_0 \begin{cases} \frac{2\pi r h}{3} = \lambda 2 r \\ \frac{\pi r^2}{3} = \lambda 2 (h-1) \\ (\lambda - 1)^2 + r^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\pi h}{3} \\ \frac{\pi r^2}{3} = \frac{\pi h}{3} \times 2(h-1) \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ r^2 = 2h(h-1) \\ (h-1)^2 = 2h(h-1) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ 3h^2 - 4h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ h(3h-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ r^2 = 0 \quad \vee \\ h = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{\pi \times 4/3}{3} \\ r^2 = 2 \times 4/3 \times (4/3 - 1) \\ h = 4/3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4\pi}{9} \\ r = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} \\ h = 4/3 \end{cases} \qquad P_0\ (0,0), \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}, 4/3\right), \left(\frac{\sqrt{8}}{3}, 4/3\right)$

A condição $(\lambda - 1)^2 + r^2 = 1$ corresponde a uma circunferência centrada em $(1,0)$ e de raio 1, logo é fechado e limitado. Pelo T. Weierstrass existe max e min globais

$V(0,0) = 0 \times \qquad V\left(-\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \pi \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 \times \frac{4}{3} = \frac{32\pi}{27}$

$V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{32\pi}{27}$ ← min global

Ficha 1

1D

8 $f(x,y) = x+y$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \wedge x+y \geq 1\}$

$int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1 \wedge y > -x+1\}$

$fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 = 1 \wedge 0<x<1 \wedge 0<y<1) \vee (y = -x+1 \wedge 0<x<1)\}$

Como $D \cap fr(D) \neq \emptyset$, D é fechado

$\exists M>0 : \|(x,y)\|$ para $M=2$ $\underset{?}{\checkmark}$, logo é limitada

Po em int (D)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$ Como as d.p. não se anulam não há Po em int(D)

Po em fr(D)

$x^2+y^2 = 1 \wedge x \in [0,1] \wedge y \in [0,1]$

seja $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2x \\ x = y \\ y^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\sqrt{1/2} \\ y = -\sqrt{1/2} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \sqrt{1/2} \\ y = \sqrt{1/2} \end{cases}$$

$P_0 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}_{\notin fr(D)} \qquad f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}$

- $y = -x+1 \wedge x \in [0,1]$

Analizar o comportam. de f

$f(x,-x+1) = x + (-x+1) = 1$, f é constante, logo tds os pontos são críticos

Max absoluto: 1, os maximizantes são tds os pontos $(x,-x+1)$ no 1º Q

Min absoluto: $\sqrt{2}$, minimizante $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Derivadas direcionais

$$f_{\vec{a}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{a}) - f(P_0)}{t} \quad (\|\vec{a}\| = 1)$$

Nota: se f é diferenciavel em P_0:

$$f_{\vec{a}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{a}$$

f é diferenciavel em P_0 se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Ficha 1.3 parte 1

baseado em 2) b) $f(x,y) = x^2 - 4y$ na direção e sentido do vetor $(1,1)$

$P_0 = (1,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4$

nota: qnd as d. p. são contínuas f é diferenciavel

vetor $\vec{u} = (1,1)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, não é unitário

↓ normalização

$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f'_{\vec{a}}(1,2) =$

$= \nabla f(1,2)\,\vec{a}$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -4\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(1, -\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$