CÁLCULO II - AGRUP. 4 - 2016/17

FORMULÁRIO DO EXAME FINAL

NOME DO ALUNO: Maria João Lavoura N.º MEC.: 84681

ASSINATURA DO VIGILANTE:

O conteúdo matemático deste formulário só pode aparecer abaixo desta linha e no verso

Primitivas

→ sem raiz

$\int u'u = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

• denominadores

grau 1 $\left\{ \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \right.$

grau ≠ 1 $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{u'}{1+u^2} = \text{arctg}\, u \\ \int \frac{u'}{u^n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1},\ n \neq 1 \end{array} \right.$

• produtos As e Bs

$\frac{}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$

$\frac{}{(x-a)^2 x} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x}$

sem raízes → $\frac{}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{x}$

→ com raiz

• no denominador

grau 1

$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}\, u$

→ se falhar subst.

$\sqrt{a^2-x^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = a\,\text{sen}(t) \\ 1-\text{sen}^2 t = \cos^2 t \end{array} \right.$

$\sqrt{x^2+a}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = a\,\text{tg}(t) \\ 1dx = a\sec^2(t)\,dt \\ \text{tg}^2(t)+1 = \sec^2(t) \end{array} \right.$

$\sqrt{x^2-a^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = a\sec(t) \\ 1dx = a\sec(t)\,\text{tg}(t)\,dt \\ \text{tg}^2(t)+1 = \sec^2(t) \end{array} \right.$

grau 1 ≥ $\sqrt[n]{\bigcirc}$ $\bigcirc = t^n$

→ exponencial/sen/cos

$\int u' e^u = e^u$

$\int u' \cos u = \text{sen}\, u$

$\int u' \text{sen}\, u = -\cos u$

falhar → partes

• sen e cos ou exp $\left\} \int u'u = \frac{u^{n+1}}{n+1} \right.$

• sen/cos grau par

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

• grau ímpar

grau 1 • grau par

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

→ divisões sen/cos

• grau = $\left\{ \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \right.$

• grau ≠ $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{u'}{1+u^2} = \text{arctg}\, u \\ \int \frac{u'}{u^n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} \end{array} \right.$

L → log; I → inv. trign.; A → algeb.; T → trign.; E → exp

→ ln e arctg

• numerador

$\int u'u = \frac{u^{n+1}}{n+1}$, falha → partes

• denominador

• grau 1 $\left\{ \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \right.$

• grau ≠ 1 $\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{u'}{1+u^2} = \text{arctg}\, u \\ \int \frac{u'}{u^n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} \end{array} \right.$

Teorema de Weierstrass → Se f tem um domínio fechado e limitado então f atinge em D um max e um min global | $f_R(D) \subset D$ $\exists_R : B_R : D \subset B_R(0)$

Limites

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 0$

Trignometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\, b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$

$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a\, \text{tg}\, b}$

Extremos condicionados

(método mult. Lagrange)

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right.$

• para avaliar os extremos, basta avaliar as imagens dos pontos críticos

Extremos locais

• determ. as deriv. parciais de f

• calcular os pontos críticos $\nabla f(x,y) = (0,0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$

• classif. os pontos críticos: matriz Hessiana

$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$

Para cd ponto crítico:

→ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ $|H_f(x,y)| > 0$ mínimo local

→ $|H_f(x,y)| < 0$ ponto de sela

→ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$ $|H_f(x,y)| > 0$ máximo local

→ outros casos: nd se conclui

EDOs (1ª ordem)

Variáveis Separáveis

$\boxed{q(y)\,dy = p(x)\,dx}$ nota: $y' = \frac{dy}{dx}$

método: aplicar $\int$ a ambos os membros

Homogéneas

$\boxed{y' = f(x,y)}$ onde $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

método: mudança da variável

$\left(\begin{array}{l} z' = \frac{dz}{dx} \\ z = z(x) \end{array} \right)$ $y = zx$, $y' = z'x + z$

Redutíveis homogéneas

$\boxed{y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)}$

onde $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

método: mudança var.

$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + u \\ y = \beta + z \end{array} \right.$ $z = z(u)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

onde $\left\{ \begin{array}{l} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{array} \right.$

Lineares 1ª ordem

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$

método: fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

1º) Calcular $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

2º) Multiplicar ambos os membros por $\mu(x)$

3º) Subst. o 1º membro por $(y \times \mu(x))'$

4º) "Passar" a derivada para o outro lado como primitiva

Bernoulli

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^\alpha}$ isolado

1º) Dividir a eq por y^α: $y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$

2º) Multipl. a eq por $(1-\alpha)$: $\underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{z'} + (1-\alpha)a(x)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{z} = b(x)(1-\alpha)$

$z' + (1-\alpha)a(x) \times z = b(x)(1-\alpha)$

M.V.

$z = y^{1-\alpha}$

$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Exatas

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ onde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

solução: $F(x,y) = C$ onde

$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

$\Leftrightarrow dF \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$

Não exatas

— faz-se a mesma verificação

transf exata → multipl. M e N por um fator integrante

1) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x) \quad \mu(x) = e^{\int g(x)dx}$

2) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = h(x) \quad \mu(x) = e^{-\int h(x)dx}$

Series numericas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

1. Cond Necess. Converg.
   $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow \lim a_n = 0$
   se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
2. Séries conhecidas
   2.1 Geometrica: $\sum_{n=0} a R^n$ ou $\sum_{n=1} a R^{n-1}$
   $|R|<1$ conv
   $|R|>1$ div soma: $S = \frac{a}{1-R}$
   2.2 Mengoli/Redut./Telescop.
   $\sum_{n=1} (u_n - u_{n+p})$
   conv finita / diverg infinita: $S = \sum_{k=1}^{p} u_k - \lim \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$
   2.3 Series Dirichlet
   $\sum_{n=1} \frac{1}{n^p}$ $p \leq 1$ div, $p > 1$ conv

Series potências

centradas em c

$\sum a_n (x-c)^n$

$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ ou $R = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)$

- $\to +\infty$ abs. conv. $D = \mathbb{R}$
- $\to 0$ abs. conv. $D = \{c\}$
- $\in \mathbb{R}^+$ abs. conv. $x \in]c-R; c+R[$

$\sum |a_n|$ conv? abs. conv.
senão $\sum a_n$ div? div
senão simpl conv.

Series funções $\sum_{n=0} f_n(x)$

$\sum_{n=0} x^n \quad \sum_{n=0} \frac{x}{n}$

Conv. pontual:
$\forall x \in D \; f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$

Conv. uniforme
$\Pi_n = \lim \sup |f_n(x) - f(x)|$

C. Weierstrass

Seja (f_n) uma sucessão de funções em D e $\sum a_n$ uma serie numerica conv. de termos não neg., tq $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in D$ então a serie $\sum f_n(x)$ conv. uniformemente

Completa $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$

- solução homogenea
  $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

$a_0 R^n + a_1 R^{n-1} + \dots + a_n = 0$

- $R \to$ raiz real simples $\to e^{Rx}$
- $\to$ raiz real dupla $\to e^{Rx}, \; x e^{Rx}$
- $\to R = \alpha \pm \beta i \to e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
  multip. k $\quad e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

sistema fundamental soluções
$SFS = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$y_h = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n, \; C_1 \dots C_n \in \mathbb{R}$

- variação das constantes
  $y_p = C_1(x)\varphi_1 + C_2(x)\varphi_2 + \dots + C_n(x)\varphi_n$

Determ. Cs

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1 + \dots + C_n'(x)\varphi_n = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1' + \dots + C_n'(x)\varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)} = \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

- $n=1 \quad C_1'(x)\varphi_1 = \frac{b(x)}{a_0(x)}$
- $n=2 \quad \begin{cases} C_1'(x)\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases}$

3 Criterios

3.1 Comparação $\sum_{n=0} a_n \quad a_n \geq 0$
a) $0 \leq a_n \leq b_n$
se b_n conv $\Rightarrow a_n$ conv.
b) $0 \leq b_n \leq a_n$
se b_n div $\Rightarrow a_n$ div

3.2 Comp. limite $\sum a_n \geq 0 \quad b_n > 0$
$L = \lim \frac{a_n}{b_n}$ $\quad L \in \mathbb{R}^+$ mesma natureza
$\to 0$ b_n conv $\Rightarrow a_n$ conv
$\to +\infty$ b_n div $\Rightarrow a_n$ div.

3.3 Crit integral
Seja $f \in [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ decresc. : $f(n) = a_n$
Então $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ e $\sum a_n$ tem mesma natureza
$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)dx \leftarrow$ existe finito $\Rightarrow$ conv.

3.4 Alembert
$L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
$\to <1$ conv
$\to >1$ diverge

3.5 Cauchy
$L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$
$\to <1$ conv.
$\to >1$ div.
nota: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

3.6 Leibniz
$\sum a_n(-1)^n$ $\quad a_n \geq 0$, $\lim a_n = 0$, $a_{n+1} - a_n < 0$ } conv.

nota: $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\ln(f(x)^{g(x)})}$

Conseq conv. unif. $\sum f_n$ para $f_n(x)$

Se (f_n) é uma sucess. de funções contínuas em $[a,b]$
1. f é cont em $[a,b]$
2. f é integravel em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int f_n(x)dx$
3. Se as funções f_n tem derivada continuas em $[a,b]$ e (f_n') conv. uniform/ então f é diferenciavel e $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$
4. Seja $S(x) = \sum_{n=1} f_n(x)$ (func. soma)
   4.1 S é cont em $[a,b]$
   4.2 $\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1} \int_a^b f_n(x)dx$
   4.3 Se $(f_n)'$ conv. uniform/, $S'(x) = \sum_{n=1} f_n'(x)$

coef indeterminados

$b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
$b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$
grau m

$y_p = x^k e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$
$k \to$ multipl $\alpha + \beta i$ na eq caract.

P e Q → grau m
$m=0 \quad P=A \quad Q=B$
$m=1 \quad P=Ax+B \quad Q=Cx+D$

1º) determ m, α, β, k
2º) subst y_p em y para obter EDO completa

Polinomios de Taylor

→ aprox funç.

$T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$

c=0 Maclaurin

Erro na aproximação: $|f(x) - T_c^n(f(x))|$
$\hookrightarrow R_c^n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$

majorante do erro:
$|R_c^n(f(x))| \leq \frac{M|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$

$M = \sup |f^{(n+1)}(y)|$ y entre x e c

formula Taylor: $f(x) = T_c^n + R_c^n$

Series Taylor

Quando $|R_c^n(f(x))| \to 0$
$f(x) = T_0^n(f(x)) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)(x-0)^n}{n!}$

$e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} \quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n \quad \cos x = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$\ln(x+1) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

derivação → atenção ao n (cria exp neg?)
primitivação → em ordem x

Series Fourier

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} [a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)]$
→ coef fourier

periodo 2π def em $[-\pi, \pi]$

$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$

f par $(f(-x) = f(x))$
$b_n = 0 \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

f impar $(f(-x) = -f(x))$
$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$

Teorema Dirichlet

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica e seccionalm/ dif e $c \in \mathbb{R}$. Então a serie de Fourier de f converge no ponto c p/ $\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$

Função soma:
$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ pto cont} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{ pto desc.} \end{cases}$

$\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n \quad \operatorname{sen}(n\pi) = \operatorname{sen}(-n\pi) = 0$