SOLUÇÕES

Questão 1

Item A

Como 2 pinos pretos valem 10 pontos e pinos de mesma cor têm o mesmo valor, concluímos que cada pino preto vale 10 ÷ 2 = 5 pontos.

Item B

Para saber quanto vale cada pino cinza, vamos calcular primeiramente quanto vale cada pino branco. Na segunda jogada, Mariana fez 12 pontos ao derrubar um pino branco e um preto. Já vimos que cada pino preto vale 5 pontos; logo, um pino branco vale 12 – 5 = 7 pontos. Na terceira jogada, Mariana fez 55 pontos e foram derrubados 3 pinos pretos (15 pontos), 1 pino branco (7 pontos) e 3 pinos cinzas (55 – 15 – 7 = 33 pontos). Logo, cada pino cinza vale 33 ÷ 3 = 11 pontos.

Item C

O enunciado informa que, na jogada em que Mariana fez 42 pontos, pelo menos um pino de cada cor foi derrubado. A resposta é única:

$$42 = 2 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 11 \text{ (2 pinos pretos, 3 pinos brancos e 1 pino cinza).}$$

Vejamos como essa resposta foi encontrada e por que não há outra solução:

- Se somente um pino cinza foi derrubado, o total dos valores dos pinos pretos e brancos derrubados deve ser 42 – 11 = 31. Observando a tabuada do 5 e a do 7, vemos que a única maneira de escrever 31 como uma soma de um múltiplo de 5 com um múltiplo de 7 é 31 = 2 × 5 + 3 × 7. Essa é a solução apresentada acima.
- Se dois pinos de cor cinza foram derrubados, o total dos valores dos pinos pretos e brancos derrubados deve ser 42 – 22 = 20. Observando a tabuada do 5 e a do 7, vemos, de maneira análoga, que a única forma de escrever 20 como uma soma de um múltiplo de 5 com um múltiplo de 7 é 20 = 4 × 5 + 0 × 7, mas essa solução não serve, pois o enunciado diz que ao menos um pino branco foi derrubado.
- Se três pinos de cor cinza foram derrubados, o total dos valores dos pinos pretos e brancos derrubados deve ser 42 – 33 = 9, e é impossível escrever 9 como soma de um múltiplo de 5 com um múltiplo de 7.
- Se quatro ou mais pinos de cor cinza foram derrubados, o total dos valores dos pinos derrubados ultrapassa 42 e, portanto, não é esse o caso.

Questão 2

Item A

Dividimos as 100 pessoas em blocos de 5 pessoas cada e obtemos 100 ÷ 5 = 20 blocos. Como em cada bloco há três mulheres, temos um total de 20 × 3 = 60 mulheres na fila.

Item B

Posição 1	Posição 2	Posição 3	Posição 4	Posição 5	Posição 6	Posição 7	Posição 8	Posição 9	Posição 10
homem	**mulher**	homem	**mulher**	**mulher**	**homem**	**mulher**	**homem**	**mulher**	**mulher**

Nas cinco primeiras posições, há dois homens, logo, as posições 2, 4 e 5 devem ser ocupadas por mulheres. Por outro lado, nas posições de 2 a 6, já há três mulheres e, portanto, a posição 6 deve ser ocupada por um homem. Daqui para frente o padrão se repete: nas posições de 3 a 7 já existem dois homens, então, a posição 7 deve ser ocupada por uma mulher, e assim por diante. Observamos que, de cinco em cinco, a sequência de homens e mulheres é sempre a mesma: HMHMM, HMHMM, HMHMM...

Item C

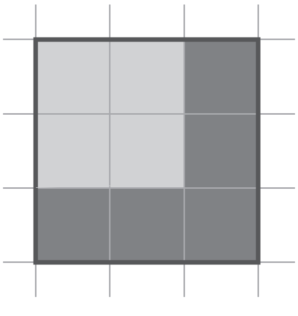
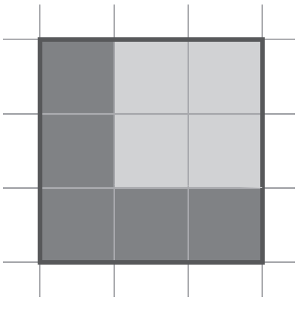
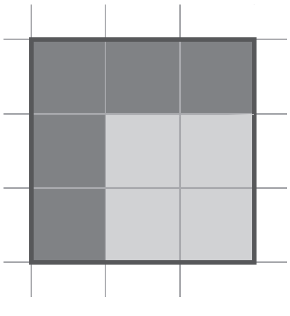
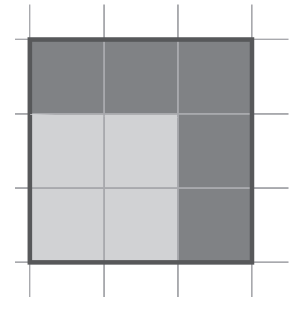
Posição 98	Posição 99	Posição 100
homem	**mulher**	**mulher**

A resposta correta é essa porque as últimas posições, de 95 a 100, também apresentam a sequência HMHMM.

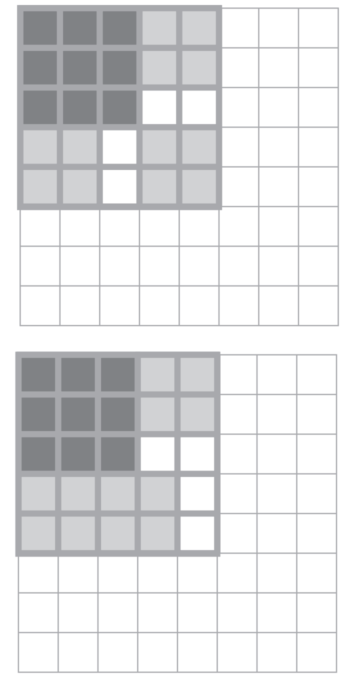
Questão 3

Item A

Para que a quantidade de quadrados usados para formar o quadrado de lado 3 seja a menor possível, Janaína deve usar os maiores quadrados possíveis. No caso, ela pode usar somente um quadrado de lado 2, porque, se usar mais um, o quadrado terá que ter lado 4, pelo menos. Ao usar um quadrado de lado 2, o restante deverá ser completado por 9 – 4 = 5 quadrados unitários, conforme a primeira figura abaixo. Há mais outras três posições possíveis para essa figura, basta girar a primeira figura abaixo ou, equivalentemente, deslocar o quadrado de lado 2 para os outros cantos do quadrado de lado 3.

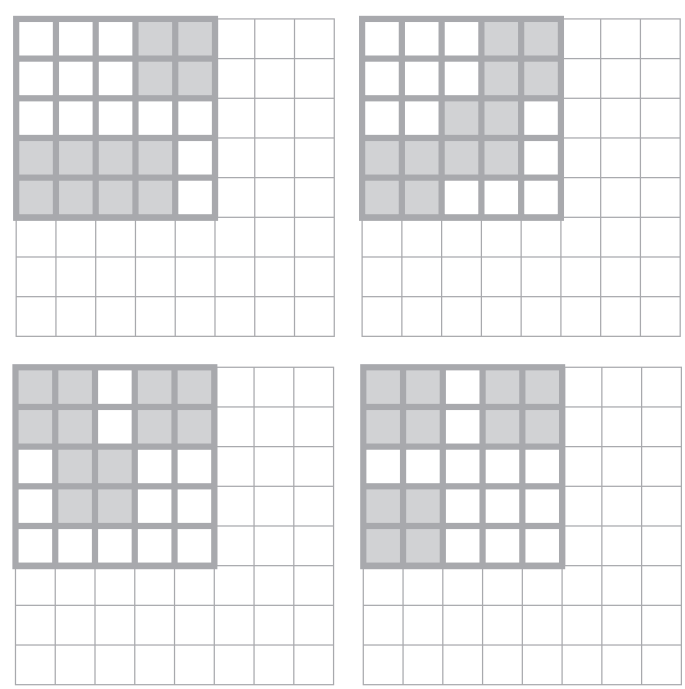





Item B



Se Janaína quer usar um quadrado de lado 3 e quadrados de lado 2 para formar o quadrado grande, então, este deverá ter lado de medida 5, pelo menos. Um quadrado de lado 5 corresponde a 25 quadrados unitários. Se, na sua composição, há um quadrado de lado 3, restam 25 – 9 = 16 quadrados unitários. Cada quadrado de lado 2 corresponde a 4 quadrados unitários. Em princípio, ela poderia usar quatro quadrados de lado 2, mas essa configuração não é possível, como pode ser visto com o teste de todas as possibilidades de encaixe. Entretanto, é possível usar três quadrados de lado 2, restando completar com quatro quadrados unitários, que é o número mínimo procurado. Vemos ao lado dois tipos diferentes de figuras que Janaína pode desenhar. Ela pode, como no item anterior, girar essas figuras, fazendo outros desenhos.

Item C



O menor quadrado contendo 13 quadrados unitários é o quadrado de lado 4. Mas, como 16 – 13 = 3, esse quadrado não serve ao propósito de Janaína, porque, para preencher o espaço de 3 quadrados unitários, ela só pode usar 3 quadrados unitários, e, daí, o total deles seria 16, contrariando o enunciado. No quadrado de lado 5, temos 25 – 13 = 12, o que corresponde a três quadrados de lado 2. De fato, Janaína pode desenhar o quadrado de lado 5, o menor possível, com três quadrados de lado 2 e 13 quadrados unitários de várias maneiras diferentes, quatro das quais exemplificadas ao lado.

Note que não é possível usar um quadrado de lado 3 para ocupar o espaço de 12 quadrados unitários, pois o espaço restante (12 – 9 = 3) só poderia ser ocupado com quadrados unitários, aumentando seu número de 13 para 16.

Questão 4

Uma solução:

Item A

Os números inteiros nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo é múltiplo do divisor, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que a é múltiplo de b. Como a e b são dois números diferentes do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, para cada possibilidade de divisor b em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, devemos contar as possibilidades de dividendo a em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, tais que a seja múltiplo de b e diferente de b. Temos:

- para b = 1 as possibilidades para a são {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 8 possibilidades;
- para b = 2 as possibilidades para a são {4, 6, 8}, ou seja, 3 possibilidades;
- para b = 3 as possibilidades para a são {6, 9}, ou seja, 2 possibilidades;
- para b = 4 a possibilidade para a é {8}, ou seja, 1 possibilidade;
- para b = 5, 6, 7, 8, 9 não existem possibilidades para a.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número inteiro em 8 + 3 + 2 + 1 = 14 divisões.

Item B

Os números maiores do que 0,5 nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo é maior do que a metade do divisor, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que a é maior do que a metade de b. Como a e b são dois números diferentes do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, para cada possibilidade de divisor b em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, devemos contar as possibilidades de dividendo a em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} tais que a seja diferente de b e maior do que a metade de b. Temos:

- para b = 1 as possibilidades para a são {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 8 possibilidades;
- para b = 2 as possibilidades para a são {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 7 possibilidades;
- para b = 3 as possibilidades para a são {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 7 possibilidades;
- para b = 4 as possibilidades para a são {3, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 6 possibilidades;
- para b = 5 as possibilidades para a são {3, 4, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 6 possibilidades;
- para b = 6 as possibilidades para a são {4, 5, 7, 8, 9}, ou seja, 5 possibilidades;
- para b = 7 as possibilidades para a são {4, 5, 6, 8, 9}, ou seja, 5 possibilidades;
- para b = 8 as possibilidades para a são {5, 6, 7, 9}, ou seja, 4 possibilidades;
- para b = 9 as possibilidades para a são {5, 6, 7, 8}, ou seja, 4 possibilidades.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 em 8 + 7 + 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 = 52 divisões.

Item C

Os resultados diferentes nas divisões que Joãozinho fez são aqueles em que o dividendo e o divisor não possuem fatores comuns, ou seja: divisões $\frac{a}{b}$ em que *a* e *b* são primos entre si, pois, se houver um fator comum *k* a *a* e *b,* então *a* = *k* × *a'* e *b* = *k* × *b'*, e esse fator comum *k* pode ser cancelado na divisão $\frac{a}{b} = \frac{k \times a'}{k \times b'} = \frac{a'}{b'}$ e a nova divisão $\frac{a'}{b'}$ também será uma divisão feita por Joãozinho. Como *a* e *b* são dois números diferentes do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, para cada possibilidade de divisor *b* em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, devemos contar as possibilidades de dividendo *a* em {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} tais que *a* e *b* sejam primos entre si. Temos:

- para *b* = 1 as possibilidades para *a* são {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 8 possibilidades;
- para *b* = 2 as possibilidades para *a* são {1, 3, 5, 7, 9}, ou seja, 5 possibilidades;
- para *b* = 3 as possibilidades para *a* são {1, 2, 4, 5, 7, 8}, ou seja, 6 possibilidades;
- para *b* = 4 as possibilidades para *a* são {1, 3, 5, 7, 9}, ou seja, 5 possibilidades;
- para *b* = 5 as possibilidades para *a* são {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}, ou seja, 8 possibilidades;
- para *b* = 6 as possibilidades para *a* são {1, 5, 7}, ou seja, 3 possibilidades;
- para *b* = 7 as possibilidades para *a* são {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, ou seja, 8 possibilidades;
- para *b* = 8 as possibilidades para *a* são {1, 3, 5, 7, 9}, ou seja, 5 possibilidades;
- para *b* = 9 as possibilidades para *a* são {1, 2, 4, 5, 7, 8}, ou seja, 6 possibilidades.

Logo, Joãozinho obteve 8 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 8 + 5 + 6 = 54 resultados diferentes nas suas divisões.

DENOMINADOR \ NUMERADOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$
7	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{7}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$		$\frac{9}{8}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	

Outra solução:

Como Joãozinho fez todas as divisões possíveis com dois números diferentes do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, no total ele fez 9 × 8 = 72 divisões, conforme mostra a tabela ao lado.

Item A

Joãozinho obteve como resultado um número inteiro nas divisões em que o numerador é um múltiplo do denominador, ou seja:

- nas oito divisões em que o denominador é igual a um: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}$;
- em três divisões em que o denominador é igual a dois: $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$;
- em duas divisões em que o denominador é igual a três: $\frac{6}{3}, \frac{9}{3}$;

- em uma divisão em que o denominador é igual a quatro: $\frac{8}{4}$.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número inteiro em 14 divisões.

Item B

Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 nas divisões em que o numerador é maior do que a metade do denominador, ou seja:

- nas oito divisões em que o denominador é igual a um: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}$;
- em sete divisões em que o denominador é igual a dois: $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{2}$;
- em sete divisões em que o denominador é igual a três: $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}$;
- em seis divisões em que o denominador é igual a quatro: $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}$;
- em seis divisões em que o denominador é igual a cinco: $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$;
- em cinco divisões em que o denominador é igual a seis: $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}$;
- em cinco divisões em que o denominador é igual a sete: $\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$;
- em quatro divisões em que o denominador é igual a oito: $\frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$;
- em quatro divisões em que o denominador é igual a nove: $\frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$.

Logo, Joãozinho obteve como resultado um número maior do que 0,5 em 8 + 7 + 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 = 52 divisões.

Item C

Para saber quantos resultados diferentes Joãozinho, obteve é preciso contar as divisões que não podem ser simplificadas, ou seja, aquelas em que o numerador e o denominador são primos entre si, ou seja:

- oito em que o denominador é igual a um: 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9;
- cinco em que o denominador é igual a dois: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$;
- seis em que o denominador é igual a três: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$;
- cinco em que o denominador é igual a quatro: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}$;
- oito em que o denominador é igual a cinco: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$;
- três em que o denominador é igual a seis: $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$;

- oito em que o denominador é igual a sete: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$;
- cinco em que o denominador é igual a oito: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$;
- seis em que o denominador é igual a nove: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$.

Logo, Joãozinho obteve 8 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 8 + 5 + 6 = 54 resultados diferentes.

Outra maneira de contar os resultados diferentes que Joãozinho obteve é retirar das 72 divisões que ele fez aquelas em que o numerador e o denominador são ambos múltiplos de 2, 3, 5 ou 7. Como os numeradores e denominadores são números diferentes do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, temos:

- numerador e denominador ambos múltiplos de 2:
  - 4 possibilidades para um (2, 4, 6 ou 8) e 3 possibilidades (*a* deve ser diferente de *b*) para outro: 4 × 3 = 12
- numerador e denominador ambos múltiplos de 3:
  - 3 possibilidades para um (3, 6, 9) e 2 possibilidades (*a* deve ser diferente de *b*) para outro: 3 × 2 = 6
- numerador e denominador ambos múltiplos de 5:
  - 1 possibilidade para um (somente o 5) e 0 possibilidade para outro: 1 × 0 = 0
- numerador e denominador ambos múltiplos de 7:
  - 1 possibilidade para um (somente o 7) e 0 possibilidade para outro: 1 × 0 = 0

Logo, Joãozinho obteve 72 − 12 − 6 = 54 resultados diferentes. Esses 54 números aparecem em cinza na tabela anterior.

Questão 5

Item A

Maria pode pintar de azul tanto o hexágono como o trapézio e, portanto, essa cor deve ser tratada separadamente.

Caso 1: se o hexágono for pintado de azul, então, para não repetir a mesma cor no trapézio, este só pode ser pintado de preto (1 possibilidade).

Caso 2: se o hexágono não for pintado de azul (2 possibilidades), Maria poderá pintar o trapézio de azul ou de preto (2 possibilidades). Pelo princípio multiplicativo da contagem, há, então, 2 × 2 = 4 possibilidades de pinturas.

Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 1 de 1 + 4 = 5 maneiras diferentes.

Item B

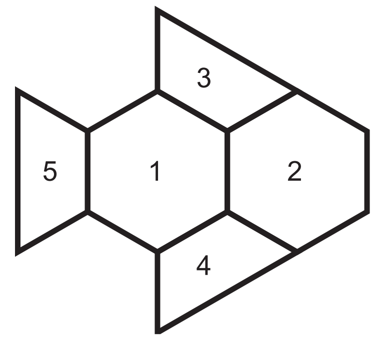
Novamente, façamos a divisão em casos.

Caso 1: se o hexágono for pintado de azul por Maria, todos os três trapézios devem ser pintados de preto (1 possibilidade).

Caso 2: se o hexágono não for pintado de azul (2 possibilidades), cada um dos três trapézios da Figura 2 pode ser pintado de azul ou preto. Pelo princípio multiplicativo, há 2 × 2 × 2 × 2 = 16 possibilidades de pinturas.

Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 2 de 1 + 16 = 17 maneiras diferentes.

Item C



Vamos enumerar as regiões de acordo com a figura ao lado:

Vamos dividir em 6 casos:

- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor bege. Nesse caso, os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor cinza. Nesse caso, também os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade).
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, mas o trapézio 5 pode ser pintado de azul ou preto (2 possibilidades).
- Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor cinza. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores (2 × 2 × 2 = 8 possibilidades).
- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto e o trapézio 5 pode ser pintado de duas cores (2 possibilidades).
- Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor bege. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores (2 × 2 × 2 = 8 possibilidades).

Logo, há 1 + 1 + 2 + 8 + 2 + 8 = 22 maneiras diferentes de Maria pintar a Figura 3.

Questão 6

Item A

Para uma data Dd/Mm/54 ser um dia fantástico, D, d, M, m devem ser 0, 1, 2 e 3, em alguma ordem, já que 4 e 5 estão presentes no ano. Como queremos o último dia fantástico desse ano, devemos buscar algum dia em dezembro. Assim, Mm = 12. Logo, como 30 é maior do que 03, o último dia fantástico de 2054 será 30/12/54.

Item B

No ano de 2001 não há dias fantásticos, pois não podemos escolher M, uma vez que, se

Dd/Mm/Aa é fantástico, então, M = 0 ou M = 1. Além disso, nos anos de 2002, 2003, 2004 ou 2005, só poderá existir um dia fantástico se M = 1, já que 0 já foi utilizado. Nesse caso, devemos ter necessariamente m = 2, pois não podemos repetir o 1. Isso exclui a possibilidade de termos um ano fantástico em 2002. Para um dia ser fantástico em 2003, devemos ter D e d iguais a 5 e 4 em alguma ordem. Isso é impossível, pois dias assim não existem. Para termos um ano fantástico em 2004, devemos ter D e d iguais a 3 e 5 em alguma ordem. Isso também é impossível. Para termos um ano fantástico em 2005, devemos ter D e d iguais a 3 e 4 em alguma ordem. Impossível novamente.

O próximo ano a ser testado é 2010. Nesse caso, M não pode ser 1 ou 0. A seguir testamos 2012. Nesse caso, M = 0. Assim, D, d e m são 3, 4, 5 em alguma ordem (o que é impossível). Finalmente, testamos 2013. Nesse caso, M = 0, enquanto D, d e m são, em alguma ordem, iguais a 2, 4 e 5. Como D = 0, 1, 2 ou 3, devemos ter D = 2. Assim, como queremos o primeiro dia após 1.º de janeiro de 2001, a resposta é 25/04/13, pois ela vem antes de 24/05/13.

Item C

Vimos que, entre 2001 e 2100, o primeiro ano com alguma data fantástica é 2013 (item b) e o último é 2054 (item a). Mantendo a notação Dd/Mm/Aa e lembrando que letras diferentes correspondem a números diferentes do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5}, podemos dividir a contagem em dois casos disjuntos:

Caso 1: {A, a} é um subconjunto com dois elementos distintos de {2, 3, 4, 5}.

Para um dia 1d/0m/Aa ser fantástico, basta que d, m, A, a sejam uma permutação de {2, 3, 4, 5}. Logo, se {A, a} for um subconjunto com dois elementos distintos de {2, 3, 4, 5}, esse ano terá pelo menos um dia fantástico do tipo 1d/0m/Aa. Podemos formar 4 × 3 = 12 anos com essa condição.

Caso 2: {A, a} $\subset$ {0, 1, 2, 3, 4, 5} não é um subconjunto com dois elementos distintos de {2, 3, 4, 5}. Há três subcasos:

- A $\in$ {2, 3, 4, 5} e a $\notin$ {2, 3, 4, 5} (são os anos de 2020, 2021, 2030, 2031, 2040, 2041, 2050 e 2051); ou
- A $\notin$ {2, 3, 4, 5} e a $\in$ {2, 3, 4, 5} (são os anos de 2013, 2014 e 2015, pois os anos de 2002, 2003, 2004, 2005 e 2012 não têm datas fantásticas, já que elas começam a aparecer em 2013); ou
- A $\notin$ {2, 3, 4, 5} e a $\notin$ {2, 3, 4, 5} (os anos de 2000, 2001, 2010 e 2011 não têm datas fantásticas, já que elas começam a aparecer em 2013).

Os anos 2020, 2030, 2040 e 2050 (terminados em 0) não têm datas fantásticas. De fato, nesses casos, M = 1, D = 2 (o caso D = 3 forçaria d = 0 ou d = 1, já utilizados) e m não poderia ser nenhum de seus possíveis valores 0, 1 ou 2, pois eles já foram utilizados.

O ano de 2021 não tem datas fantásticas. Nesse caso, como antes, M = 0, D = 2 e não poderíamos escolher m.

Todos os anos restantes — 2013, 2014, 2015, 2031, 2041, 2051 — têm datas fantásticas, que são da forma 2d/0m/A1 ou da forma 2d/0m/1a, bastando escolher d, m e a como elementos de uma permutação de {3, 4, 5}. No total do caso 2, há, portanto, 6 possibilidades.

Juntando os casos 1 e 2, vemos que há um total de 12 + 6 = 18 anos com pelo menos um dia fantástico. Os anos que possuem alguma data fantástica são os seguintes.

2013 (25/04/13 é um exemplo)

2014 (23/05/14)

2015 (23/04/15)

2023 (14/05/23)

2024 (15/03/24)

2025 (13/04/25)

2031 (24/05/31)

2032 (14/05/32)

2034 (12/05/34)

2035 (14/02/35)

2041 (23/05/41)

2042 (13/05/42)

2043 (12/05/43)

2045 (13/02/45)

2051 (23/04/51)

2052 (13/04/52)

2053 (14/02/53)

2054 (30/12/54)

Os demais anos entre 2001 e 2100 não possuem datas fantásticas.