Universidad de San Andrés
Práctica B: Aplicaciones de la derivada

1. Para cada una de las siguientes funciones, analizar si se cumplen o no y por qué las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado.

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $[1, 3]$.

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x}$ en $[0, 1]$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 9}{x - 3}$ en $[-3, 4]$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, analizar si se cumplen o no y por qué las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo indicado.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}$ en $[2, 6]$.

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $[0, 1]$.

   (c) $f(x) = \ln(x)$ en $[1, e]$.

3. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 7$. Verificar que $f(1) = f(-1)$, pero f' no se anula en $(-1, 1)$. Este hecho, ¿contradice el teorema de Rolle?

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. Verificar que $f(0) = 0, f(2) = 2$ y que no existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1$. Este hecho, ¿contradice el Teorema del Valor Medio?

5. La temperatura (medida en grados centígrados) de un animal pequeño sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo a la ley $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t es el tiempo medido en horas.

   (a) Sin derivar $T(t)$, mostrar que en algún instante del lapso $[0, 4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

   (b) Determinar $t_0 \in (0, 4)$ tal que $T'(t_0) = 0$.

6. Para una empresa, el costo de producción de x artículos de cierta clase está dado por $C(x) = 200x - x^2$, donde x varía entre 0 y 100. Justificar que debe haber algún valor de $x \in (0, 100)$ tal que el costo marginal iguala al costo promedio de producir 100 artículos. Hallar dicho valor.

7. Calcular los siguientes límites usando la Regla de L'Hôpital cuando sea posible.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^{3x}-1}$

   (b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$.

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)-x}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(5x)}{x^2}$

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin(3x)}{5x^4}$

   (g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)+x}{x\ln(1+x)}$

   (h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(5x)}{x^3+2x}$

   (i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+4x}{e^{2x}}$

   (j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^3}$

   (k) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+\sin(x)-1}{\ln(1+x)}$

8. Decidir si se puede aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$. Si la respuesta es afirmativa, aplicar la regla y calcular el límite. Si la respuesta es negativa explicar por qué no se puede y calcular el límite de otra manera.

9. Calcular el límite $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{\frac{1}{x}-1}$ primero usando la regla de L'Hôpital y luego sin usar esta regla.

   Decidir cuál de las dos maneras de calcular el límite le resultó más amable.

10. Calcular los siguientes límites usando la Regla de L'Hôpital cuando sea posible.

   (a) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ y $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   (b) $\lim_{x\to 0^+} x^{3/2}\ln(x^4+x^2)$

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)}$

   (d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}-\ln(x)$

   (e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - x$

   (f) $\lim_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{4x^2+1}$

   (g) $\lim_{x\to 0+} x^x$

   (h) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin 5x}$

   (i) $\lim_{x\to 0} (2x+e^x)^{\frac{1}{\sin x}}$

   (j) $\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{2x})^{\sqrt{x}}$