Atividades de apoio para implementações e/ou simulações de métodos numéricos com o auxílio do software GNU Octave

BOLSISTAS DO PROJETO: PAULO HENRIQUE CARDOSO DE NOVAIS e YURE MORAES PIRES
ORIENTADOR DO PROJETO: PROFESSOR GISLAN SILVEIRA SANTOS

Métodos Diretos

1 Método de Cholesky

O método consiste em decompor uma matriz simétrica quadrada em um produto de uma matriz triangular inferior (G) por uma matriz triangular superior (G^t). De acordo com Franco (2006, p.113 e p.130), pode-se definir o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada, simétrica e positiva definida de ordem n, e A_k é o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assume-se que $det(A_k) \neq 0$, para $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Então A pode ser decomposta unicamente no produto GG^t, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.*

Dessa forma, as matrizes G e G^t são definidas abaixo.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$G^t = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Como o método consiste em $GG^t = A$, então, será feito esse produto:

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} = A \tag{3}$$

Portanto, para encontrar o comportamento da matriz G, é analisado separadamente, os elementos diagonais e não diagonais de G.

Elementos diagonais de G:

$$\begin{cases} g_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2}, \; i = 2,3,\ldots,n \end{cases} \tag{4}$$

Elementos não diagonais de G:

$$\begin{cases} g_{i1} &= \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2,3,\ldots,n \\ g_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}\right)/g_{jj}, \; 2 \leq j < i \end{cases} \tag{5}$$

1.1 Implementação

Apos definir o método na sessão anterior, utiliza-se os sistemas (4) e (5) para preparar o algoritmo.

```
function [G,Gt]=decomposicaoggt(A)
    n=length(A);
    G=zeros(n,n);%cria uma matriz quadrada para G composta somente por zeros
    Gt=zeros(n,n);%cria uma matriz quadrada para Gt composta somente por zeros
    G(1,1)=sqrt(A(1,1));
    Gt(1,1)=sqrt(A(1,1));
    for s=[2:n]' %variável auxiliar
      G(s,1)=A(s,1)/G(1,1);%preenchendo a primeira coluna de G
      Gt(1,s)=A(1,s)/Gt(1,1);%preenchendo a primeira linha de Gt
    endfor
    for i=2:n; %início das iterações
      G(i,i)=sqrt(A(i,i)-G(i,1:i-1)*Gt(1:i-1,i));
      Gt(i,i)=G(i,i);
      G(i+1:n,i)=(A(i+1:n,i)-G(i+1:n,1:i-1)*Gt(1:i-1,i))/G(i,i);
      Gt(i,i+1:n)=G(i+1:n,i);
    endfor
  endfunction
```

2 Referências

1. CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P.. **Métodos Numéricos para Engenharia, 5ª Edição**. São Paulo, McGraw-Hill, 2011. 809p.

2. EATON, John W.; BATEMAN, David; HAUBERG, Soren; WEHBRING, Rik. **GNU Octave: A high-level interactive language for numerical computations, 5ª edição**. 2020. 1077p.

3. FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Universidade de São Paulo, Instituto de CiÃªncias MatemÃ¡ticas e de ComputaÃ§Ã£o, 2006. 489 p.

4. Todos os Colaboradores. **Cálculo Numérico Um Livro Colaborativo Versão Octave**. Porto Alegre: Projeto REAMAT da UFRGS, 2020. Disponível em:
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/main.html