Atividades de apoio para implementações e/ou simulações de métodos numéricos com o auxílio do software GNU Octave

BOLSISTAS DO PROJETO: PAULO HENRIQUE CARDOSO DE NOVAIS e YURE MORAES PIRES
ORIENTADOR DO PROJETO: PROFESSOR GISLAN SILVEIRA SANTOS

Métodos Diretos

1 Decomposição LU

1.1 Definição

O método consiste em decompor uma matriz quadrada em um produto de uma matriz triangular inferior (L) por uma matriz triangular superior (U). De acordo com Franco (2006, p.113), tem-se o teorema:

Teorema 1.1 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k é o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assume-se que $det(A_k) \neq 0$, para $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Então existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = \cdots = L_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$ tal que $LU = A$. Além disso, $det(A) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.*

Dessa forma, as matrizes L e U são definidas abaixo.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{i1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Como o método consiste em $LU = A$, então, será feito esse produto:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{i1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Portanto, para saber o comportamento das matrizes L e U, é analisado, termo a termo, do produto, começando pela primeira linha da matriz U.

1ª linha de U:

$$\begin{gathered} u_{11} = a_{11}; \\ u_{11} = a_{11}; \\ \vdots \\ u_{1j} = a_{1j} \end{gathered} \qquad \text{(Eq. 1.1)}$$

Onde, $j = 1, 2, \cdots, n$.

Após determinar a primeira linha da matriz U, é determinado a primeira coluna de L.

1ª coluna de L:

$$\begin{gathered}
l_{11} = 1 \\
l_{21}u_{11} = a_{21} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\
l_1u_{11} = a_{31} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \\
\vdots \\
l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}
\end{gathered}$$

(Eq. 1.2)

Onde, $i = 2, 3, \cdots, n$.

Por fim, analogamente, as outras linhas e colunas das matrizes obedecem a seguinte regra:
Para a matriz U:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{n=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

(Eq. 1.3)

Onde, $j \geq i$ e $n > 1$.

Para a matriz L:

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{n=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj})/u_{jj}$$

(Eq. 1.4)

Onde, $j < i$ e $n > 1$.

1.2 Implementação

Após definir o método na sessão anterior, utiliza-se as Eq.1.1-1.4 para preparar o algoritmo.

```
function [L,U]=decomposicaolu(A)
    n=length(A);
    L=eye(n,n); %cria uma matriz quadrada para L, onde a diagonal principal é composta por 1%
    U=zeros(n,n); %cria uma matriz quadrada para U composta somente por zeros
    for s=[1:n]' %variável auxiliar
      U(1,s)=A(1,s); %preenchendo a primeira linha de U
      L(s,1)=A(s,1)/U(1,1); %preenchendo a primeira coluna de L
    endfor
    for i=2:n; %início das iterações
      U(i,i:n)=A(i,i:n)-L(i,1:i-1)*U(1:i-1,i:n);
      L(i-1:n,i)=(A(i-1:n,i)-L(i-1:n,1:i-1)*U(1:i-1,i))/U(i,i);
    endfor
```

2 Referências

1. CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P.. **Métodos Numéricos para Engenharia, 5ª Edição**. São Paulo, McGraw-Hill, 2011. 809p.

2. EATON, John W.; BATEMAN, David; HAUBERG, Soren; WEHBRING, Rik. **GNU Octave: A high-level interactive language for numerical computations, 5ª edição**. 2020. 1077p.

3. FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Universidade de São Paulo, Instituto de CiÃªncias MatemÃ¡ticas e de ComputaÃ§Ã£o, 2006. 489 p.

4. Todos os Colaboradores. **Cálculo Numérico Um Livro Colaborativo Versão Octave**. Porto Alegre: Projeto REAMAT da UFRGS, 2020. Disponível em:
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/main.html