Atividades de apoio para implementações e/ou simulações de métodos numéricos com o auxílio do software GNU Octave

BOLSISTAS DO PROJETO: PAULO HENRIQUE CARDOSO DE NOVAIS e YURE MORAES PIRES
ORIENTADOR DO PROJETO: PROFESSOR GISLAN SILVEIRA SANTOS

Soluções de equações diferenciais ordinárias

1 Método de Euler melhorado

Para definir o que é o método de Euler melhorado, é necessário introduzir o método geral explícito de 1-passo. Segundo a Franco (2006, p.401), tem-se:

DEFINIÇÃO 1.1 *Um método geral explícito de 1-passo é definido pela relação:*

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h). \tag{1}$$

onde ϕ *é uma função que depende de* x_n, y_n *e* h.

Então, após a definição do método geral explícito de 1-passo, é necessário introduzir o método geral de Runge-Kutta, visto que o método de Euler melhorado é um caso específico deste, com $R = 2$, sendo R a ordem do método.
Segundo a Franco (2006, p.403),

DEFINIÇÃO 1.2 *O método geral de Runge-Kutta de* R *estágios é definido por:*

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h), \tag{2}$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi(x, y, h) &= \textstyle\sum_{r=1}^{R} c_r k_r, \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_r &= f(x + a_r h, y + h \textstyle\sum_{s=1}^{r+1} b_{rs} k_s) \quad ; \quad r = 2, 3, \ldots, R, \\ a_r &= \textstyle\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} \qquad\qquad\qquad ; \quad r = 2, 3, \ldots, R. \end{aligned} \tag{3}$$

Dessa forma, o método de Runge-Kutta de ordem 2 é descrito como:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2, \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + a_2 h, y + h b_{21} k_1), \\ a_2 &= b_{21}. \end{aligned} \tag{4}$$

Portanto:

$$k_2 = f(x + a_2 h, y + h a_2 f)$$

Então, por fim, o método de Euler melhorado é o método de Runge-Kutta de ordem 2, com $c_1 = \frac{1}{2} \rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$ e

$a_2 = 1$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2), \\
k_1 &= f(x_n, y_n), \\
k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

1.1 Implementação

Apos definir o método na sessão anterior, o algoritmo será representado da seguinte forma.

```
function solucao=eulermelhorado(f,a,b,h1,y0)
  %"f" deve ser do tipo function handle @(x,y)
  %"a"   o in cio do intervalo
  %"b"   o final do intervalo
  %"y0"   o pvi (y(a)=y0)
  %"h1"   o passo (dever  ser um n mero inteiro, caso contr rio ser  definido um
  %novo h)
  %o m todo soluciona a edo para o ponto "b" (y(b))
  s=ceil((b-a)/h1);
  h=(b-a)/s
  t=(a:h:b)';
  y=[y0; zeros(length(t)-1,1)];
  k1=zeros(length(t),1);
  k2=zeros(length(t),1);
  for i=1:length(t)-1
    k1(i)=f(t(i,1),y(i,1));
    k2(i)=f(t(i,1)+h,y(i,1)+h*k1(i));
    y(i+1)=y(i)+h*(k1(i)+k2(i))/2;
  endfor
    solucao=[t y];
    plot(s,y)
```

2 Referências

1. CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P.. **Métodos Numéricos para Engenharia, 5ª Edição**. São Paulo, McGraw-Hill, 2011. 809p.

2. EATON, John W.; BATEMAN, David; HAUBERG, Soren; WEHBRING, Rik. **GNU Octave: A high-level interactive language for numerical computations, 5ª edição**. 2020. 1077p.

3. FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2006. 489 p.

4. Todos os Colaboradores. **Cálculo Numérico Um Livro Colaborativo Versão Octave**. Porto Alegre: Projeto REAMAT da UFRGS, 2020. Disponível em:
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/main.html