Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad Zaragoza

Práctica 2

Transformando un algoritmo en

$O(2^P) \rightarrow O(P) \rightarrow O(1)$

Jorge Solán Morote 816259

Francisco Javier Pizarro 821259

27/02/2023

Planteamiento del problema

El problema inicialmente se planteó de la forma original, es decir generando un árbol binario de profundidad P para posteriormente lanzar por el N bolas simuladas, esta primera solución se implementó empleando Python(código en el ANEXO I). La solución implementada tenía principalmente 2 problemas, Python es uno de los lenguajes más lentos a la hora de efectuar muchos cálculos como es este caso, además de necesitar de mucha memoria, otro problema de esta solución es el hecho de que el problema crece de forma exponencial a la profundidad dado que necesitamos generar todo el árbol binario por estos factores la solución de Python llega a resolver sin problemas y en un tiempo finito una solución de tan solo profundidad = 25, por esto quisimos mejorar la solución ya existente.

El segundo planteamiento que le dimos al problema era generar solo la parte del árbol que recorría cada una de las N bolas simuladas, dado el problema de tiempo y memoria causado en la solución anterior por el lenguaje elegido para implementar esta elegimos Haskell(código en el ANEXO II) dado que puede trabajar con números infinitos y al ser un lenguaje funcional está muy optimizado para la realización de operaciones de este estilo además de contar con una mecánica que se traduce en no necesitar memoria extra para las llamadas recursivas.

A mitad de implementación nos dimos cuenta de un problema al ser Haskell funcional no teníamos una forma de conservar el **estado** del árbol tras simular 1 bola por lo que tuvimos que replantear la solución.

El nuevo planteamiento fue el siguiente: no era necesario simular las N bolas solo era necesario simular la bola número N esto ocurre por la propia definición del problema dado que en cada nivel que descendemos del árbol pasan al siguiente subnivel solo n/2 bolas siendo n el número de bolas que ha alcanzado el nodo en el que nos encontrábamos, dependiendo de si n era par o impar el siguiente nodo a visitar será el izquierdo o el derecho, además dependiendo si era par hay que sumar 1 a n/2 para que la simulación sea correcta. Este nuevo planteamiento al no tener que crear el árbol entero con coste $O(2^P)$ solo debe recorrer P nodos 1 vez que va generando al vuelo por lo que el nuevo coste es O(P). Esta nueva solución calcula perfectamente para P = 1000000 con N = 1000000 bolas el nodo por el que sale la última bola en cuestión de **milisegundos**.

En un deseo de optimizar aún más la solución estuvimos tratando de plantear una solución en coste constante, si bien esto es imposible después de varias horas pensando el problema con árboles binarios sobre papel encontramos una solución con enfoque matemático que era lineal en N siendo su coste independiente por completo de P, el razonamiento seguido es este(Para simplificar la explicación llamaremos S(x,y) a la función que te devuelve el resultado en un árbol de profundidad ‘x’ y bola número ‘y’):

- S(x,1) es igual a 2^(x-1)
- S(x,0) es igual a 2^x
- Cuando haya más bolas de las que caben en la base del árbol se realiza el módulo del número de hojas y se empieza de 0 a lanzar las bolas.
- Cuando la bola es un número del estilo 2^n se puede calcular el resultado como 2^p-2^(p-1-n)

- Cuando la bola más 1 es un número del estilo 2^n se puede calcular el resultado como S(p,2^n) - 2^(p-2), como ya sabemos calcular la bola de un número del estilo 2^n en una profundidad x pues lo podemos hacer directo.
- Cuando la bola menos 1 es un número del estilo 2^n se puede calcular el resultado como S(p,1)+2^(p-2-n)
- Cuando la bola es mayor a la mitad de las hojas del árbol su resultado se calcula como S(p,(y-2^(p-2))) + 1 es decir es como su bola espejo + 1.
- Cuando la bola es un número par el resultado se calcula como S(p,y-1) + (y-2^(p-2)), dicho de otro modo, el resultado es igual a su número anterior más la mitad del número de hojas del árbol.
- En caso de que ninguna de estas premisas se cumplan el resultado es S(p,(y-2^(log2 y)) + 2^(x-2-(log2 y)). En este caso lo que se hace es restar a la bola el siguiente número del estilo 2^n más cercano a 'y', de ahí el 'log2 y' anterior, después calculamos desde esa bola sumando el 'desplazamiento' en el árbol con la fórmula anterior.

Juntando todas estas pautas podemos dar el valor directamente si nos dan una bola del modo 2^n+-1, o sino, con un bola de valor 'x' nos costará log2(x) operaciones calcular su valor final, cuyas operaciones son sumas, desplazamiento de bits y a lo mucho un logaritmo en base 2.

De nuevo lo implementamos en Haskell(código en el ANEXO II) por los buenos resultados obtenidos previamente.

Dado que tenemos 3 algoritmos diseñados para resolver el problema y por defecto el programa solo devolver un fichero por defecto se emplea el 2º algoritmo que es el más puro siguiendo la solución esperada del problema ya que este simula el árbol de forma más eficiente y aún así su rendimiento es extremadamente bueno. Para emplear las 3 soluciones se debe especificar mediante un flag en la ejecución del script.

Por versiones obsoletas tanto de Haskell como de Python3 en el servidor hendrix.cps.unizar.es se ha recurrido a emplear el servidor lab000.unizar.es

Tests realizados

Se han realizado 2 tipos de test para comprobar el correcto funcionamiento del sistema.

El primero de ellos se encarga de realizar ejecuciones correctas del programa siguiendo la especificación de su uso normal por terminal, para ejecutar este test se emplea el script **test.sh**, dicho script emplea 2 ficheros de entrada distintos, uno con valores de P < 25 y otro con valores mucho más grandes de P y n, ejecuta los 3 tipos de algoritmos sobre los ficheros de entrada y guarda sus salidas en ficheros concretos.

El segundo tipo de test se encarga de buscar fallos concretos tanto en el funcionamiento interno del código como en lo que se introduce en el mismo para ello se ha vuelto a emplear Python con el script **testsPinball.py** dicho script pone a prueba las siguientes casuísticas de fallo:

- Comprueba que en caso de números negativos se da la excepción esperada.

- Comprueba que en caso de cosas que no se pueden convertir a enteros da la excepción esperada.

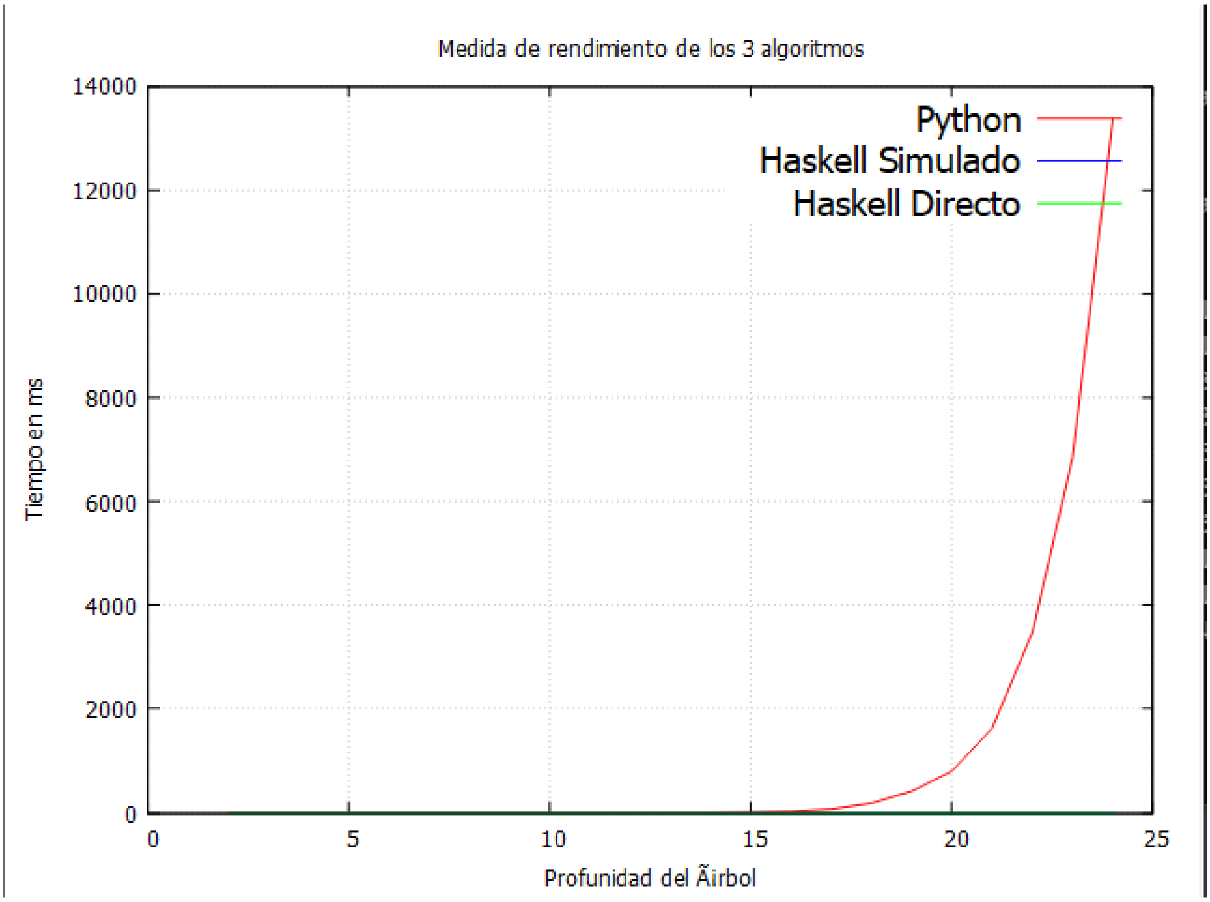
- Comprueba que en caso de que no aparezcan los elementos P y n en la línea del fichero lance la excepción esperada.

- Comprueba que en caso de lanzar el script con un número inadecuado de parámetros lance la excepción esperada.

- Comprueba que en caso de que el fichero de entrada no exista o no tenga los permisos adecuados se lance la correspondiente excepción.

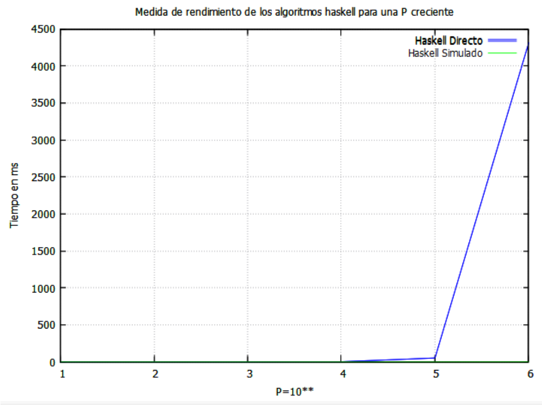
Test de rendimiento

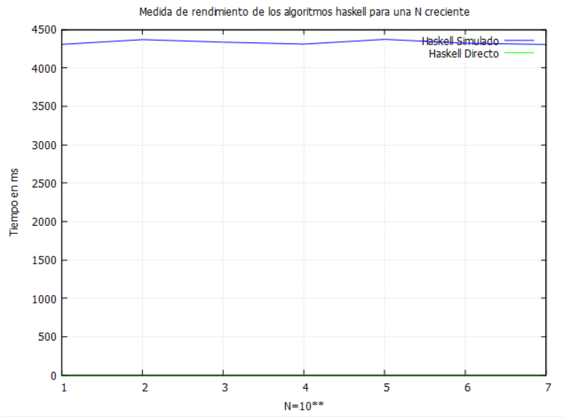
Para realizar el test de rendimiento con los módulos disponibles en hendrix se ha recurrido al uso del módulo básico time para cronometrar el coste temporal de las distintas funciones implementadas para resolver el problema. Dado que la solución programada en Python no puede competir con las soluciones realizadas en haskell se ha representado en una gráfica la comparativa de coste temporal de las 3 soluciones para profundidades 1-25 con 100 bolas simuladas. Cada función mencionada es cronometrada para cada profundidad, para generar la gráfica se ha empleado el programa de visualización gnuplot.



La diferencia entre los rendimientos es tan abrumadora que ni siquiera podemos visualizar apenas las líneas de los costes en Haskell.

Ahora para comparar las soluciones óptimas del problema dado que el coste de cada una crece de forma distinta se han empleado 2 gráficas para visualizar dichos crecimientos, la primera de ellas calcula el tiempo empleado para cada función para una N prefijada a 1000000 como valor arbitrario en función de P en el intervalo [1-10000000]. La segunda de ellas compara los costes temporales para una P prefijada a 1000000 como valor arbitrario en función de N en el intervalo [1-10000000].





De nuevo la diferencia entre métricas resulta tan absurda en ambas gráficas que apenas se visualiza la línea del algoritmo directo.

Por último para llevar al límite la mejor solución obtenida en este caso la del algoritmo directo programado en haskell la hemos ejecutado para encontrar con que valores de P y N cuesta más de 1s ejecutarla:

```
time ./simulation 3000000000 3000000000
1598.936168000 ms
real    0m1,613s
user    0m1,476s
sys     0m0,137s
```

Para hacernos una idea de la magnitud del cálculo realizado se adjunta el nodo por el que teóricamente sale la bola 3000000000 en un árbol binario de profundidad 3000000000 en el ANEXO III.

ANEXO I

Código fuente de Python para crear y simular el árbol binario:

```
maxNode = 1
class Node:
    def __init__(self):
      global maxNode
      self.left = None
      self.right = None
      self.data = False
      self.nodeId = maxNode
      maxNode += 1

    def insertLeft(self):
        self.left = Node()

    def insertRight(self):
        self.right = Node()

def _generateTree(P):
    raiz = Node()
    P -= 1
    pendientesDeGenerarSubnodos = []

    if P > 0:
        raiz.insertLeft()
        raiz.insertRight()
        pendientesDeGenerarSubnodos.append(raiz.left)
        pendientesDeGenerarSubnodos.append(raiz.right)
        P -= 1
    while P > 0:
        siguientesSubnodos = []
        for nodo in pendientesDeGenerarSubnodos:
            nodo.insertLeft()
            nodo.insertRight()
            siguientesSubnodos.append(nodo.left)
            siguientesSubnodos.append(nodo.right)
        P -= 1
        pendientesDeGenerarSubnodos = siguientesSubnodos

    return raiz


def _simularBola(raiz):
    nodo = raiz
    while nodo.left != None or nodo.right != None:
        nodo.data = not nodo.data
        if nodo.data:
            nodo = nodo.left
        else:
            nodo = nodo.right
    return nodo.nodeId
def _simularNBolas(raiz,n):
    for i in range(n):
        valorUltimaHojaRecorrida = _simularBola(raiz)
    return valorUltimaHojaRecorrida
def lanzarSimulacion(P,N):
    return _simularNBolas(_generateTree(P),N)
```

ANEXO II

Código fuente de Haskell para el 2º algoritmo:

```haskell
--Simula el recorrido de la última bola a lo largo de P, para entender como funciona tratar de ver sobre
--papel como resulta el tirar N bolas por un nodo de cara a sus dos nodos hijos
simularConRecorridoParcial :: Integer -> Integer -> Tree Integer -> Integer
simularConRecorridoParcial 1 _ (Branch valor) = valor -- caso base
simularConRecorridoParcial p n (Branch valor) = simularConRecorridoParcial p' n' subarbol where -- caso recursivo
    p' = p - 1
    valorMod = (n `mod` 2) == 1
    nuevoValor = 2*valor
    n' =  ((n `div` 2) :: Integer) + (if valorMod then 1 else 0)
    valorSiguienteNodo = if not valorMod then nuevoValor+1 else nuevoValor where
    subarbol = Branch valorSiguienteNodo
simularConRecorridoParcial p n _ = simularConRecorridoParcial p' n' subarbol where -- caso base de partida (_ == Empty)
    p' = p - 1
    valorMod = (n `mod` 2) == 1
    n' = ((n `div` 2) :: Integer) + (if valorMod then 1 else 0)
    valorSiguienteNodo = if not valorMod then 3 else 2 where
    subarbol = Branch valorSiguienteNodo
```

Código fuente de Haskell para el 3º algoritmo:

```haskell
--Aprovecha propiedades matemáticas del problema para resolverlo de forma mucho mas eficiente
simulacionDirecta :: Integer -> Integer -> Integer
simulacionDirecta x 0 = ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-1)))  - 1
simulacionDirecta x 1 = ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-2)))
simulacionDirecta x y
    | y >= ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-2)))    = simulacionDirecta x ( y `mod` ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-2))) )
    -- Cuando hay más bolas de las que caben en el árbol
    | y .&. (y-1) == 0                                       = ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-1))) - ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger
(x-2-(fromIntegral (floor (logBase 2 (fromIntegral y)))))))
    -- Cuando la bola es un número cuadrado de 2
    | (y+1) .&. y == 0                                       = simulacionDirecta x (y+1) - ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-3)))
    -- Cuando la bola más 1 es un número cuadrado de 2
    | y > ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-3)))     = simulacionDirecta x ( y - ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-3)))) + 1
    -- Cuando la bola pasa de la mitad del número de hojas del árbol
    | y `mod` 2 == 0                                         = simulacionDirecta x ( y-1 ) + ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-3)))
    -- Cuando la bola es un número par
    | (y-1) .&. (y-2) == 0                                   = simulacionDirecta x 1 + ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger (x-3-(fromIntegral (floor
(logBase 2 (fromIntegral (y-1))))))))
    -- Cuando la bola menos 1 es un número cuadrado de 2
    | otherwise                                              = simulacionDirecta x (y - (2 :: Integer) `shiftL`(fromIntegral (floor (logBase 2
(fromIntegral y)))-1)) + ((2 :: Integer) `shiftL` (fromInteger(x - 3 - (fromIntegral (floor (logBase 2 (fromIntegral y)))))))
    -- En cualqiuier otro caso
```

ANEXO III

Nodo por el que sale la bola 3000000000 en un árbol binario de profundidad 3000000000:
La solución es tan grande que no cabe en terminal y mucho menos en un archivo de texto, de hecho nos ha sido imposible siquiera calcular una aproximación numérica de la magnitud del número dado que ninguna calculadora online ha sido capaz de expresar el resultado o algo distinto de infinito o error. Posteriormente se ha tratado de mostrar con N = 100000 y P = 1000000 pero el número era tan grande que google docs crasheaba y no dejaba guardar el archivo como pdf.
Teniendo en cuenta esto y solo por fines ilustrativos se va a mostrar la siguiente N = 10000 y P = 100000:

969521043699659476841070127516461127525898042329773925171704175968075580389277585881421649893287089003632535026950736774582759033569561983877723075977858035046996
731932411543079611785708289642190953719047766106759424009197201995958323513621047602371349466568850640643185433915073222102257540596194165491278271712256893286380
611239455202405002073214467265712006877317691533039002398885216681077281004867126880830790216604684459796076330109726922557167741658655918709923126216091457525689
9986138169713655489017730364857277530664748506039198453238545991143375237485018763592231117476488658210912256771519062952105873971825232115212734920240712091997382
173539325643964727379869309191457005919948589483114037276881268337988949799516360961931130912589887659836420572135594941342865862174106352876528447320751331002914
490003054074910875100098910333008046817415606284201842411468612673830194670049864991637979805521791580049138640283828097288765789586332743524955563911945926428664
113922743792126467458263052439152685570769958096292132312832256700410122998090428765641507030095486201985086904928869987196241553450050149213120073917181692766220
238016891691671585963468719507549943523962832124589648252003954167788993633521903061484041695449096232528451024187485212745972747808385939247513415930229850838406
018598703542895273951733668708940768124966207502344774766813161718729350332136897695284414235439705712499219983411610630262412227957754569366908345132903022020790
492425733737883915078372685013208181499514961383738123547323335172778052710061161865083935073328471786935996498789599939770172469474231313285164771249312032111258
225769970805944984082967605335824609347960891920284502904496135805908524067971831282171532817522579603047453412472826861958282224270952635483464690684787103570069
901723132353627535290922391142351832418037848355203803892813780425936547172964451588185788709582418776376783796135369339658981953843955561083403529430009949937162
680442150411336561617905320670692968931121122879068958713577798258825477556209436735237956836292579916360539269515599907382584260080897027676169284123187209623031
972493377253600810279747493774200608006124076943991458668139704069766287199652651836553414490077133595567906337821584933297534333361354496271802559262812541992859
265368599201157829231880130363215112642884764366753337706293662786953259144552728406471709043393225548862319316380487425078705279559966944929370026677041941417830
936348609104900814156667159450080181897464595180428117432295063964995216580058292333127437320753134119921695121837532341451321578206575073319176484239866349717358
374601163902510572210160474850278179894811346868953423833960948886629786629847895992870889133460696490320620539322899267040908316030130098231775465675018818257904
645952078016874837722985339807473821421989943729472027193882444966639268040317490005417083785673901784708823125754815467030710142903539861051707168193026342480618
971739684855739663808287844133917756351618351625634524296673814413373544149340920097089707245938069607162979368851777656560987413998897277360229011257922712552440
951318560402834560615904948319587224604303008893620967671446483341997209348210816119086911934855263619148727387381971680189369284743342402971237081851779315481217
360734853008296529888443665584486206178907832115953447459610245895893792023797845612717471638960650275095954230090199941066608110400490773793667726233754039062315
018061772079790265843546924741611301280058684556736750725883432884787229304399881708049104715144265511692487589198496671159536265815474174832691890454780896707347
263772014980033853416047384720961865250501919440518493946256948448299156377533822325143103193499810605391063468752509164767449195053508092877668806341805335702749
562887081228499062047799804727494268062014247606028169626796811957062073080410020920992627831252835383994227254580014262649392536034702620501032381797928353576839
573266279911741808659664777881814007274438660537870023780921281018742014487904021874020689228858725272355718701534639152003527036003917408723763754194581537098895
0546681817617696117532785434544955867323112410650731126811956094275264175496893763236979225562056570856583761796501228135263526460228411490200150791718528289311204
550635315878271143720021078226918764499296562257106774862191271319221033080696063210851546054041440908282501826576497814855341856440648358186528777356085544370251
100701804019976822047392704199865198233786716416956307557055485632575295247689806936837432623872603097041177872108660758761244047609998257802856010353739430049140
077894223150085716243859398643551735141574976390939622997364133615007296835931777640552860764878898261381431002015276359558629922843761807508551100490767982356320
652182301791719055700700466574149973978050050778220180264708737567440335707853737294397284738046310271113934419604701295832550188730171620625238507906937381251728
139168429176012018495657752588658587145624098494199165540051825043182045382839828210796660108257680519656762234025274210349934090755231905989788760260006427076891
288300468272358262336717001549498192906881208075653515106390650273433912413225746968881265688374235692123348447626325268876533560507551813123959198536677908464764
277136953802810847443042686236377362292151622484350295624126526065693333183757789979444345768512068256093186953738778201139165045851479522102641158571144884443088
747038650389770659075113554750028883286876485544255025326039758170936749386581913688610609749737912952012460512758254578530930245929027518961106221563384713631759
607742967933222816489148406354405870931361353022967883216203104542877692086118330250826022317404184847099646463572427688370749661278347228468128030443499780199087
327661926383472368908095356384944910324341087954533467690600508504380857244219441766585330313030722527399879028988132603928097549607142996738018767228080536878806
583844293033211463540575494268238825557393974015972441119688854275134154635094504710145168426244609879794658132123463205555742099398665603752375156303159182575601
228447452150957977971722012367150206033981281603186552765389514363838995405712591514490270997292335090554636740012958402940123083969183249617837473886771324816544
158576215575800729192011040728458128877733299547801434803791216318378122528287887203745576467642615356218146946575104998318767452361527948024177507458265484805868
964351995228435648480689479364602288529705435257962570272519631456519121649451116648749870674394124769071522654173480986894094129921796118099618605195041474005697
5637248846841135140500541011833633181381305383161327718053184020064097950785931157317254653955147221744729783731356636477275584781231424684704536565659764884391196
315966303718082845429268298715377593002384751454705258314552933065196818498863612320735019345926626877348358874602466396088602673275392229652919996624611430486637
107663319919924564736066439200651409983735712579901041347303820751823905558391728698007675692697573642565178367018319172085022434429807413111706885523618608323107
923972609140570552826548952961399077909668349239916601958778350663450450114451585895859846765231504895239825762349932096527126106638926048975188878268046373907547
3049533273525156053960285870849735308968782131113983490255607618385003005092759148588870549500162907042482890293054708909519992621341662784622742414411372321116934
857032617308591296145435777948428252337697385850806050025444336127184853977227543957590167407484740434974680193141928167278087936258590042695218246042582089292220
721884876035456153439846044668260127068547030301837490242360358858719078124276036714677634687083342660749476668369242096717651593457111604983809707239184076698497
848642591371665333389561230594629144817110427803943043529396654217624209577884688027155822411270120073592216075673611514032529406426216438068653856999065537565565
001918838094196547684219815222217846387591955310800062941620870627524927181521706605068497972072035961177525672184809166440557831297063064541988776129706946116884
1031097997441908576338105729510968436522335311187599022497826907995582124669290420522261933303246804838194552938084331191102228517388485172184364571497711790173424
202826348592925343939883949921974848688520910150892780082226585774729565214903932531885084614899180845954260656312500629159627644629601677943210217258183144998868
021146595429544345938971064737803550879732484437518618590949722697200480315145111323456226092427979456207531456318725051759915760225707741746481366936981788909160
2094796067117031734313017394600460708364935899528983741124206000623202448646642889707078265971890009879550663657494135696314242429054596611805717531378582680872007
676969723093589169729274028685519983289459355262392816690158652365462458922947508686249892285225274768349064099819686835556731960578944629102488919137528152575099
828186568401461648161060454910694874415372887464521601202791363253881230348502596266713355854502668300482979397747403030108009585359739005477798337714455453951651
036196566912738282189153529367824644908002507728218845316419281522974252535731190414064178028113417543251365469496839106230729970959166353777557559101880037053024
476809595310829336617073074598640983829574427475204371960411900392048047740419501003004833792668981712750697601134567474493343284935559133229939582747931598813647
439875852618082312789338820690347647016514137720138211144382067222912724803878208996325679841365332322708191547901997862491223683234066828493936374682213884558677
238999537932270084043463539348782399614877264757706350154236883863923809702072189079072609329763302777638444787853323099732509821961598723470466984021767872875295
692548807783779321308888482053053164920064245384192385613420947993025424466462598197629209015206733288347217229473364318285680028439988089850809866221519491838315
521999715088681437047051525079072825823900103368968540178461660580321153483784663101730466240984968902382640873908917273025985111753107397234989061851544554385729
686913820582774466825582475182624835152766856125824502968488568521060457910623419379734327716357631863250741686351861897071207303486313556469337176589797057006772
7054447066968450430891142463817546040219641291928056339484118285858798125922161284799047785149311092141999991916091490989499580058886698126649524081504144658328666
8501969563730397420196815847381080486184124758383761891194324070781631821840003675183980608170267069711433312565424118866604973199117992747530481806106811373164085
236494080329865719777976472347939287868284676043571279826109727839547902870876272544992752924332499221962532272785500854606746534361760536942029661079050513128852
014794059449477300772867276062074680697689353464761956496980963735424459209308026311232084953170842072865107625240167070425102172896761296394760542431891931582951
276614222374056080316481430494046770504418794110402296651718873310091614794657141705755487497607277402659220477571020879046474938197813626971796255804951337991478
425725705863577588167088400165365304150589088358828435855979222731129166920955355569866812807371465947885721584223981305208024854243179110032085447511373838317893
960537554135392922917830529952691749416355407803081953696445040454852362041601794692332594276712059394870348870093592661654135505396202296666271942260479991439996
413248432939943528922772896103222927718799836744523778692112276336664732254585160306141722652958937358123769668828610443919383860847995635400611280072571862169475
518409753499888685318179473496464104096237012387662565756561356917687859067504765703282249473473694341083557470084343418418952719232674700692385437039677797659213
903014442325524427438045308103806318994379830714871811469018906005284232214841535863269518652170327800910494229357639811942177485594434357506854190443499451790080
362830968316458075182476500955125914040974842877698679431093328582140211052136241160949795157473024383749670518931805298309935991612513130589747602200788401290160
4821057895557563434079011409974923410569271266227706828022374619001113920520222823497401316099195318027966790272650662697117313087920845451545872612095031215822395
356408809554762203808489774476130998093278752279361062057184076420748028122217827423220838448460708933710188637316699195573035362590592565684377004269742598807609
237470391648117729769460701330473876731776381247001165384745947382254609108037338632904934325332128590445228319934474981586943401895487310766356950675850299527896
121343536214211600617440336900461352029305006916106603525418355586167958713253895291525365661049775222309576327621712025517521296244593665035141885927892815436881
142661886140457355705215257931549109558679894809080293259470104819200873448473907779335096196739794954053618883860078409583735758136050859985834795540295842341262
382198686290739365125572323392523409625182997770312159767581494710680241105152371463457682904055420085018669864657763763518864248477701786514979380414397299025376
120262283429938606673220287076925524749086412126287448608688259627562060730636416379589366626934814968065996869599300995549378529677265860912569227795667485909340
6889011114483315842491516093978279111981825891337814293176568086161211023530834702873743770534205978281869279115684052528265386669754658128167671614219267736390170

366470655611429220566801738968035883285714885454544205064943047778792245297646759332480969081061295425384083248469032307735168556746671649263296311643391851295692
492836331648083754334662900424659524752347040253912774290721771762937064040391454206980375286050221086273193500944710269567645222218532475351594192418678243136641
062159665059435060216805224973248556922159689474467028280022176976455198335331997906825829489564013027861239041858984524338946460890522393615907446747522221236512
980154585839441153284266318943382287936950126962048940033177522737319273299095813938599900377552540117608280722706978621884339140057979595935138495247646588433782
118092820160912132074318559249110489848607817938746888543862494515400597771603893086693124636245535337569483592278299579774385404158925604524028205867754229491343
492815730716326647367112377623819857814034829966953897509992756629885495453209025900626967600729634094739340605813567253002127580003589588345863180549811718704475
172643698512127864089777349620558318409327474371556864302950071221086814167818334732149674762805744415836504635782432857564065065570677315533530992259647482038334
7256366122367258115621361004425808344046511672166206429250628121311133000592350619372764794624025234801942238362056547807646087604474379175431166739761949827062325
651022479016567224378330116975791126116144231630250296072602696840932254666470027734993168782766339335886553783841458152820975092885802341284748701393863046359993
155603738101781224213505834685998457912115686116293427931269699378276596370155650836919603822888446628402508050001296440689958190918639388295256377945683717994329
460682580832212098013954117331795489836119891445913189504098044684652748149958521000079035613671463559488935737352790700615495521873976068094038686227574535237382
666029214726278101842123451168421630591126248120796213293652995655201105585473077068412602480689848794326653256837922776385945459491359437761835543087522964412960
926799446966943912184290934055560065172260431489498231009483128974130937531434526610299871549546912868047692267031464610871714126889716826397731344516956790240877
988796750135250034605319900986840281990187769343345938478939413373696103523936126752595040955325440522914357788011777083733534507873731647196172943366154024779208
997163428861975290224227102148175475988502653395455967165901570434375044757556617609788197955012582116021794634329925800866141326121171922322992548190298682730617
461458739810460343579651298843347150955482592058498828698036411095365242039257579955650890312310153212219052628646023261398183733415765939228718214336637344682613
557601717893390116493937857737628926421576439161003379613552222938037364700596570619873879403629186643836913863525206213201269334264762870194710295068692713625686
989471823742578819813695471528742954669500230192848950592129861366428628657884546172669241142841733252117939302081703571905126114626960349279737463515369912746675
791969067953164319145949212284686336867068295408730618411345139708576298806585863634370773108119054922167762208936068606761585088073904759283858212238604185853371
623207149481731012749920703979628049046293037505093629802505518652314057291649820869608425652486217507107654034217374277413814046025711248138435491475689468220001
019120128919216613967767737349826353571146502173251435626019698008906674982751760606872173032237920347965828057585141839558739198767764451360762135680475807753890
612000017961845934158457287786557668950495864626754884997306450929551109211630431890402165786392899912330253019349476396486976665807019995904369347601471382255272
8640615017010086776761384472231511110076959412989739404969638644423654593318334739342012102451129585844746648472166540991703751648919558700226305832246329309284385
090131977845875103349222013271767583648764150873622311463901162616654765774144353883758043065510036648140707499826376301943842893196537623333289426212459195500869
9475097067294027219903278136902098751132173326814711479154711544239488919126158447159157994590704334191575941120789204105973564275774885422181056711493701310545260
311754564928275762301027276721620377346901462338554587844924143721746309371478730035249632049974921039783647241853027851505617405784907045158304674192866254603798
2880010286467756918372020650927012507454516456234111713579634263338311694226088283757533301195434123321252943506088107434392958126270364715565447241881945898781340
986776065415114582219994376585309251946953093116947728861780033738683788883524302267415663152347866014231233064591919041123580799095096943319167481866478789491956
008204175017612543906368817894481641134161485762181609747295377721779004965103884623978222744464050060184646040975407128450439284870059169922562948101974562820487
866426606734696576747046760541619258706964055386499903538944467560504167718891326741226928105972069964552815559439084236642261868918799255358564521654323205547878
872654518523798978882057803953714110968137565657966472635914946790544707799635407497993319802075231282138946409793477934162074305309568370550033276040420773973225
095276423695581861416144080106214438372949300962923374049132101121129466876491805116426539209376260164568082435876333252387675627448960679994864336423795391266637
557419527069448280203799363572516612017137392685980227007409263489864378028193494394703894287523011210120922851628549352845490747459998253625532832318555424322234
851204441298182042964207013035159953133149658996894429445374407823640499054163275215578366843490486601234234327277611917276563703492290115668633270853337933141423
1464730874074112721780034611890677219119086652968372988642063127349931488788808655411730052791190760215084006289088849765052570276277203841944612734504361412592058 5
051034352500101601592732914424853798134728625175839104038469003943546442688080736263875799497439564907927037592035774430175469921783795338490940265625982743320635
257820977749423178881238406725339808833333303239312627047824487963914079804351701669537637141087472533201162472058381520991193928749884973875150324798612346772660
796637818910497153926936683853261998190628629016603898062791597549255075110702871479317993136158773919611194272724560836124549396100339015385486630921474020042858
989712304492563359536650023835598893836724326075305851963868446166200090643741384916613128916461923051716970012075708139906624899192873309632746118237192786799191
964451243206099015147585025967382084871191251601867575188747066096108573043181783797726787045509936108684313394061353235207414399747908133163915871832642414049598
125434948445056514326039147323058976218168116089229669885275922893213085778901344580637859800759063569397269321377543853245040016734801670952459085130863782173698
570241424363847555059121159687417200151641236279677029964948038419557428250808443212675146659771263724139447611208660152460135925881226612527247881806886925060588
651892664110990038123378495230586259217190133001934762800301022448188108430728623060252963707118717010180049871058378314038282647874255551012577375838861186865801
788737966010043484152365508494789167973258069737434144770024026313842798853520582217439717144685878848414676463832715606136013138113268821870112247654564631531159
501045436667693534866985325642162590161437907965050767780617223374521612550573856933248764384747266227737917353870869620385786526579637490587065587990588431661354
099650458308442047520620560902938194178424930167857113416939234649055767938360808549349298260554245118605146759719071148554559814051080070168976048096803667945831
839886663915458458438379593952878423035919560422218777633890630749932137108075483253112396899632831154286035637815264268768202435180323028916761633682475329388579
7872664246725825745116986257469782156613816412296574114480718096631023170362171999460161533143321015821233358711107360750318452419039819628476537290349450935406008
367511785676362944790500567374695892899577368861447905584537248781697128312112586041109422436354233657086801601345486822878215573381042653784067435284509570066248
7273622911973426417620745272620668181663838795611173031198556899849718818928614861419124869249982763183415276726009466365733673590249583609841843983902839544167456
6164304166206471201110749593767187648162688696779873525754649321959121450077199035881305774395119118747903757252149979211495643788006024215309621750769688269748349
594512865551329306494460209578930475560798683022679629738848403877794124973595061868344072296538373056154204350655179475903302576361675175857705914562395147332097
4894953120016100281381171834477466319610408734626254008503407491438309443259263589646020477323953147011119543800977246885485157368280193774220926027665140258763451
431714938564886732205868983237866605799093935101704157720310284351198581286323362044854216783737059606964561340331188887342335521213961839964896960309070441205722
156175008069052912341142530854238622423713914675652510583996954547168596826532489981324705083633612892964642609464267102780394327010418129429656174523897175590836
233269392333644932028195199885364799825698761227120981571043684446341783404227413937154005733087060853340073213728830526883837400244432099860729015513477998809878
2366173271898411485378072673226818226639950587370216792526599555841179442962437827517121735988331166328536087105238376212411567892153425064354374747049168851338419
806395883886876320155535239556907460521493015987734193233744270715912264563967267945750345331037648545137810328207927816994031843316211752363298871819090506309422
669551875490509998990990175813187637106698538746659110950706407549541485260083409093609816303035598298119873086428580250297718687935803600221759226808793542530278
897948415745342741353533398006866145197491034978015892841437144658317600338682179157432268700978797180350010478153809877921459387978451152062937082066791404363805
675075447700288172581640024766605240626133753271314965952740170338276179927586343565636769631705162062191265149364555563852064111775477072542132548960619137812448
4639963073249624344496406343156779585515175219309753125080250174496724697415715928002796766109079522098173692743296224644589978652734471113565927756500717243446640
478215419023533479712463959471150920141898659371504478756887485601044142763608080989084580952223618207419534667208327139964897952589094902200958074421260839144077
937355643809427445814401106199069153715428428162607914814775426762975343204415810675880626065247674902997983940704712521312089133648793188046323466576687263303916
6711574289059358503211729161835998670889638547636237991863113205001507636269050370997786900199242588625831841378127070322447450451905119095943376617613295231284858
693222802420838456193381507856457091951445227908276056580396743023871595122528507581642959235907996165228654392057034748062176306696811057614657314560514375129315
5529561997649488838497380094018104046447013309877388673474236759238035327479888999003717733810630956467235453847657727313962539042677996635724738261143489290124311
307640759169228435907249228703936746560414279155379250754283257468654435941514868685779576813418309712670438183825559965200411658752183623162779156329017617582439
917521862951310607162632341418497335735132142265150350426443466193590002004863867167381299196456404443196022298720509166585150643285252204418466419470869605344338
1115908663085941533578912960039166436042142725821034045552712133483435120952358843017136330742798614400530517054211185089091134330398571032510372766935540574799439
155199706178267854024277976069384095994126947486188991431009163982473712872590560894304336660356413253982299421390035622185094359965612127550584013501821285254157
468590124253874285202902592680589270174077485799700202891951918192960927296002561396875833970446214525531795744186871385423059858429844923988697100947117194511964
148627994553912571062730328176260573265627434655458401965018825434607634439504635729058269357284195774884364208812181461583220406178292321637500088461776465740457
903510513888246619536365225790407158378034090122784447955651395015470861472539626835687865535328663660548125738928283147324004978748171005165271942136640184601895
758337715757548771245010038161819454286146757094147886171318860071937121837445043397165818033997031747232798564631482788951830363191896394221811331738607245820039
428228547391789738889897399220445586491272194396430564407659683395280121572715808672782837124445734657152285965222106048300357189414442767969430040138988305264856
792104085417895555147598981248696414882995024312048179816467495159559498112942869043542711318060288241650668411571053879246523620782339823149060979025662181253273
020108386871913394906292937277005150145706763954053905203173730497285234675843604396076325504817231288613676306865956070038862194215705031515000406984635283493569
1054057697898110429704068700273714043455464017228909286797217795055233653293648986111980521590415253110508797617843442929248139965257574377099161969935324946511357
8065291926563467878553050836928958430049739550380802488124480437387235702542754210655964606871424472967534011574171887290107974656886870884691111769293988994778457
187494147967877099357615520589502263956745735040136953018954198778654322370153893856004996032094611061870478216497800629497042966088907881950601925119856095033747
083192862134153944392838324108450297295676308882479911288611262587213604572861561782299362901247404062866624642836784704298282852833672543013238607977880004381847
737946205381664757696740075415037364376765360203245572983807829922448405145490045369521471218807168845576682591609406387958729665697087290757626767971386015816790
2636701847832852124788577630119500327691809546106770311934559942012114253082397972711949968039072991794279417963798052106094835543063392966824605425823792014644434
250939602459555621672372547718230223934283454790967990207667928143227092456471699705325016070002619790286273308231100595228626485873097751818467586040070941276202
5813668478813049911054361896598011362136484033642212786897504156376206532835137565522012173131138096015774829760231005448306157765969608404112817349562784079157797
036461234581551303386797768876746609635883189915986578811305431584975413327192098045978874321244670249717469368342707616475371824665423032194853934900993769539477
070411472178104123592558296627051003076734840081206780306787190155327630614773561665058804291598839617595640298187744333432879031100421305260950501261405585941165
7989763674711367595777543934664265319134567460481649828539704711825522375642614391099276999922271391777406726900662696947579719340353333888018729688115961746401 36
616916582544881357413766549152853001823109555534761160223254314597273481757212921721528866119025856852279462982306480793819084264394887985420452034082038151257724
365138305105069529911276160734747271276662242123877890531171027700821275467878238508172455623036982294902243563333602100003522373265572536928741763825262020497135
9432563102782492766856308477538153709305724994018055520522634806847814788226991311019175888912502913973501546282710900131115321321486223368800574904390528181824702
5398045654395807221218670510905297364912811118720725092847896695547646907466173310478748411221978595494367032932122025116746110373743939193507475302078425764161349
489478798443619390075850015291427990024381529561117060398389993591592820818214990485587384261480913787344290888009185569312080680924529616579265113360687870751516
569913207955326746900570324444449733717975051884343087259625782087585861105816144728844836701769076104764794500521179666981423276166471753306430524079950340181623
740237982875449948272997187641505147245617558292782610764667736461368208706118907196062661432874907037627378232186542802366335830517422557426465421520562299848221
9510807470243043699148592746118785304204001171964136311143623395282317303304438170565367433644186103775874063717630219605198561194633356970868133504309475343175330
131275360075339734908887946306137153278555794426327333224390193687654730499236940595808755070488381619794409506887092447176305483535456063008997272107891750006346
129228177290856383371151834258622563110530148443492732035632235026284719504552102585014733545552023566571794840353232586776953357051846597925312759610454337944347
388769415935673335151601795851944115665602339403124040526731215090649580547879535826866356453067004575936444309635422632292842233422777238023598991915387028111929
8042394521629412172949716249747195488053377909179417211538677913911150178576691214912647030600405021235840311087597247159849241473295643276180599106891944990772943
708245356763774961929992571870854593224052492948043004338063320366562276319836261051941175633885156623450639331374617361724701476457649716203271873561092472471339
099341037118679996773848852561636471405211325768337368890593808653237487921788964060890703806328503269307395161004682781431274891303213871582346064573457005902041
166946273703035086698385598089555627651955849434171534902424869321772597569642111933589225314912325103839053403309802228301332053752082370616082648354636775398882
2698489546718767985466615941456379276694700176284197433525455775197954354682934905639555781428782125023232