UNIVERSIDAD DE MENDOZA

ANÁLISIS NUMÉRICO

Ingeniero José Luis Artal

Licenciado Sergio Fuentes

INTRODUCCIÓN

El análisis numérico o matemática computacional estudia la obtención de métodos para la resolución de problemas reales propuestos matemáticamente. Distinguiendo dos aspectos:

I. Metodología

II. Análisis o estudio de los principios matemáticos

INTRODUCCIÓN

El programa de la materia tiene como motivo ordenador lo siguiente:

Muchos de los problemas que surgen en matemática aplicada se puede expresar, formalmente así: **$f(x) = y$.**

En el lenguaje de la ingeniería de sistema x, y, f representan respectivamente la entrada, la salida y el sistema en sí. Existiendo 3 tipos de problemas:

1. Problema directo
2. Problema inverso
3. Problema de identificación

TEORIA DE ERRORES

Es posible esperar una respuesta exacta al plantearnos un problema en el mundo real?

1. Introducción de datos objeto de medición (erróneos)
2. Modelos aproximados (idealizados)
3. Computadores que no reconocen cualquier número real

Estas y otras fuentes de error hace que no podamos esperar una respuesta exacta, si bien no se pueden evitar el error en la respuesta es deseable que se lo cuantifique y se los controle en rangos de precisión deseados

FUENTES DE ERROR

- Errores en los datos de entrada
- Errores de redondeo
- Error de planteamiento
- Error de método
- Error de truncamiento
- Error de discretización
- Error de propagación

Estas fuentes deben ser investigadas por el alumno.

ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y PORCENTUAL

Utilizaremos la siguiente simbología:

- Los valores exactos (desconocidos), los indicaremos con letras minúsculas (x, y, π)
- Los valores aproximados (utilizados), con letras mayúsculas $(X, Y, \prod)$

Se define el error absoluto como la diferencia entre el valor exacto y el aproximado:

- Error absoluto: $\varepsilon_x = x - X$

Se define el error relativo como el error absoluto por unidad de valor exacto:

- Error relativo: Si x es $\neq 0$, $\rho_x = \frac{x - X}{x} = \frac{\varepsilon_x}{x}$

Tanto el error absoluto como el relativo si bien son valores desconocidos podemos asegurar que pueden ser tanto positivo como negativo.

ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y PORCENTUAL

En la práctica se utilizan cotas de error absoluto que la simbolizamos Δ_x, de un número aproximado X, que es un número positivo mayor o igual que el valor absoluto del error absoluto, $\Delta_x \geq |\varepsilon_x|$

es decir $|x-X| \leq \Delta_x$ (1)

donde $X - \Delta_x \leq x \geq X + \Delta_x$

lo que escribimos con la notación $x = X \pm \Delta_x$

ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y PORCENTUAL

En la práctica definimos la cota de error relativo que la simbolizamos ρ_x^0, de una aproximación X es cualquier número positivo mayor o igual que $|\rho_x|$,

es decir $$|\rho_x| = \frac{|x - X|}{|x|} = \frac{|\varepsilon_x|}{|x|} \leq \rho_x^0$$

Se puede establecer que una cota de error relativo esta dada por la cantidad $\frac{\Delta_x}{|X|}$, donde Δ_x es una cota de error absoluto y X la aproximación del número verdadero.

ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y PORCENTUAL

En efecto $|x| = |X + (x-X)| \geq |X| - |x-X| \geq |X| - \Delta_x$

luego $|x| \geq |X| - \Delta_x$,

teniendo en cuenta la expresión (1) y como $\Delta_x \ll |X|$

$$\frac{|x - X|}{|x|} \leq \frac{\Delta_x}{|X| - \Delta_x}$$

y por consiguiente $\frac{|x - X|}{|x|} \leq \frac{\Delta_x}{|X|}$ obteniéndose así la cota requerida.

Por último el error porcentual el error porcentual se simboliza: $\delta_{\%}$ y se calcula como $\delta_{\%} = 100\, \rho_x^0$

PROPAGACION DEL ERROR

Estudiaremos como afectan las operaciones matemáticas los errores cometidos en los datos de entrada.

SUMA

Se tienen dos aproximaciones X e Y de dos valores verdaderos x e y junto con sus respectivos errores relativos ε_x y ε_y.

Entonces, x + y = X + ε_x + Y + ε_y = X + Y + (ε_x + ε_y)

$\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

- En la suma se suman los errores absolutos
- En la práctica se suman las cotas de error absoluto
- El mismo comportamiento si se trata de una resta

PROPAGACION DEL ERROR

MULTIPLICACIÓN

$x \,.\, y = (X + \varepsilon_x) \,.\, (Y + \varepsilon_y) = X\,Y + X\,\varepsilon_y + Y\,\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y$

Si los errores son mucho mas pequeños que las aproximaciones e ignoramos el producto de los errores entonces:

$x \,.\, y = X\,Y + X\,\varepsilon_y + Y\,\varepsilon_x$, luego $\varepsilon_{xy} = x \,.\, y - X\,Y = X\,\varepsilon_y + Y\,\varepsilon_x$

$$\rho_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{xy} = \rho_y + \rho_x$$

- En la multiplicación se suman los errores relativos
- En la práctica se suman las cotas de errores relativos de los factores

PROPAGACION DEL ERROR

RADICACIÓN

$r = \sqrt{R}$ (radicando y raíz exacta),

$r_a = \sqrt{R_a}$(radicando y raíz aproximada)

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_R = R - R_a$ y la serie binomial:

$$\varepsilon_r = r - r_a = R^{1/2} - (R - \varepsilon_R)^{1/2} = R^{1/2} - (R^{1/2} + ½\, R^{-1/2} (- \varepsilon_R) + \ldots$$

$$\varepsilon_r = R^{1/2} - R^{1/2} + ½\, R^{-1/2}\ \varepsilon_R = ½\, R^{-1/2}\ \varepsilon_R$$

$$\rho_r = \frac{\varepsilon_r}{r} = \frac{½\, R^{-1/2}\ \varepsilon_R}{R^{1/2}} = ½ \frac{\varepsilon_R}{R} = ½\, \rho_R$$

- La radicación atempera el error

PROPAGACION DEL ERROR

DIVISIÓN

$\frac{x}{y}$ = $\frac{X+ \varepsilon_x}{Y+ \varepsilon_y}$ sacando factor común Y en el denominador y reacomodando $\frac{x}{y}$ = $\frac{X+ \varepsilon_x}{Y}$ $\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_y}{Y}}\right)$ = $\frac{X+ \varepsilon_x}{Y}$ $(1 + \frac{\varepsilon_y}{Y})^{-1}$ desarrollando la serie binomial

$\frac{x}{y}$ = $\frac{X+ \varepsilon_x}{Y}$ $(1-\frac{\varepsilon_y}{Y} + (\frac{\varepsilon_y}{Y})\ldots)$ = $\frac{X}{Y} + \frac{\varepsilon_x}{Y} - \frac{X}{Y^2} . \ \varepsilon_y + \cdots$

Finalmente $\varepsilon_{x/y}$ = $\frac{\varepsilon_x}{Y} - \frac{X}{Y^2}$

- Conclusión no utilizar divisores próximos a cero

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Consideremos una función f definida sobre D ⊆ R^n, con valores reales y diferenciables hasta el segundo orden.

Sean ε_{xi} = $x_i - X_i$ donde i = 1,….,n, los errores absolutos de la variable X_i que son aproximaciones de los valores verdaderos x_i.

Desarrollando en serie de Taylor la función f en torno del punto $(X_1,\ldots, X_n)$

$$f(x_1,\ldots, x_n) = f(X_1+ \varepsilon_{x1},\ldots, X_n+ \varepsilon_{xn}) =$$

$$= f(X_1,\ldots, X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\ldots, X_n)\, \varepsilon_{xi} + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_{ij}}}(X_1,\ldots, X_n)\ \varepsilon_{xi}\ \varepsilon_{xj} + \ldots$$

Donde ε_{xi} es un valor comprendido entre x_i y X_i para todo i =1,….,n ($\varepsilon_{xi} = x_i - X_i$)

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Luego,

$$|f\,(x_1,\ldots., x_n) - f\,(X_1,\ldots., X_n)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\ldots., X_n) \right| |\,\varepsilon_{xi}| + ½ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}} \left|(X_1,\ldots., X_n\right| |\,\varepsilon_{xi}|\,|\,\varepsilon_{xj}|$$

Por lo tanto, si designamos por ε_f la expresión del primer miembro, se tiene:

$\varepsilon_f \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\ldots., X_n) \right| |\,\varepsilon_{xi}|$, llegándose así a establecer una cota para el error absoluto de f $(X_1,\ldots., X_n)$ respecto del valor exacto f $(x_1,\ldots., x_n)$.

De aquí podemos obtener una expresión que nos proporcione una cota para el error relativo correspondiente. Suponiendo que f $(X_1,\ldots., X_n) \neq 0$, dividimos miembro a miembro por $|f\,(X_1,\ldots., X_n)|$ en la desigualdad anterior obteniendo

$$\rho_r \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\ldots., Xn)\right| |\,\varepsilon_{xi}|}{|f\,(X_1,\ldots., Xn)|}$$

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Si consideramos ahora las cota de error absoluto Δx_i respecto de x_i obtendremos la expresión de la práctica que nos permite calcular la cota de error absoluto de f $(X_1,\ldots, X_n)$ respecto de f $(x_1,\ldots, x_n)$:

$$\Delta_{f\,(X_1,\ldots,\,Xn)} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (X_1,\ldots, X_n) \right| \Delta x_i$$

y para la cota de error relativo

$$\rho^0{}_{\mathrm{f}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (X_1,\ldots, Xn) \right| \Delta x_i}{|\mathrm{f}\,(X_1,\ldots, Xn)|}$$

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Ejemplo: sea d = 3,7 ± 0,05(cm) el diámetro de una esfera. Determinar las cotas para el error absoluto, relativo y por lo cual en el cálculo de volumen v de la esfera, a π le consideramos la siguiente aproximación п=3,14.

Sabemos que v = 1/6 πd³ = 26,51 cm³

$$\Delta_v = \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_1,\ldots, X_n) \right| \Delta x_i = \left| \frac{\partial f}{\partial П}(П,D) \right| \Delta x_П + \left| \frac{\partial f}{\partial D}(П,D) \right| \Delta_D$$

Donde п y D son aproximaciones de π y d.

$$\left| \frac{\partial v}{\partial П}(П, D) \right| \Delta_V = \frac{D^3}{6} = \frac{3{,}7^3}{6} = 8{,}44$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial D}(П, D) \right| \Delta_D = \frac{\pi D^2}{2} = \frac{3{,}14\ (3{,}7)^2}{2} = 21{,}49$$

PROPAGACIÓN DEL ERROR EN LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES

Introduzcamos $\Delta x_{\Pi} = 0{,}005$ y $\Delta_{D} = 0{,}05$

$\Delta_{v} = (8{,}44)\ (0{,}005) + (21{,}49)\ (0{,}05) = \mathbf{1{,}12\ (cm^3)}$

$v = \mathbf{26{,}51 \pm 1{,}12\ (cm^3)}$

$$\rho_v^0 = \frac{1{,}12}{26{,}51} = \mathbf{0{,}04}$$

$\delta_{\%} = 100\ \rho_x^0 = 100\ (0{,}04) = \mathbf{4\%}$

MUCHAS GRACIAS