Tarea 2
Métodos Numéricos para la Ciencia e la Ingeniería

Francisco Loyola

1. Introducción

En esta tarea se estudia el movimiento de una pelota bajo la influencia de la gravedad y que colisiona periódicamente con un suelo móvil, con movimiento harmónico simple. Para ello se implementó un algoritmo que calcula la posición y velocidad del objeto para cada colisión,luego usando este código se variaron algunos parámetros de la simulación para estudiar el comportamiento del sistema después de suficientes colisiones para que alcance un estado de equilibrio dinámico.

2. Parte 1

En primer lugar se definieron las funciones de la posición y velocidad de tanto el suelo cómo la pelota:

$$y_{pelota} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$
$$v_{pelota} = -gt + v_0$$
$$y_{suelo} = Asen(\omega t + \phi_0)$$
$$v_{suelo} = A\omega cos(\omega t + \phi_0)$$

Una vez hecho esto se procede a calcular el tiempo en que ocurre una colisión dado los parámetros y_0, v_0, ϕ_0.

Para ello se debe encontrar el primer cero de la función $y_{pelota} - y_{suelo}$, debido a que puede haber más de una raíz pero solo nos interesa la primera se procedió de la siguiente manera:

Suponemos que la raíz está en un rango de, por ejemplo, 10ω, se divide este intervalo en una partición tal que se estudia el signo de la función en cada punto, cuando se encuentra un cambio se signo tenemos una estimación para la raíz. Con esta estimación pasamos a refinar nuestro cálculo implementando otro algoritmo, como en este caso Raphson-Newton, utilizando la estimación que calculamos como adivinanza del algoritmo. Se podría haber usado otro algoritmo,sin embargo el algoritmo de Newton tiene la virtud de ser bastante rápido, pero sufre de la deficiencia de que su convergencia no está asegurada,sin embargo si nuestra adivinanza es lo suficientemente buena tenemos virtualmente asegurada su convergencia.

Una vez calculado el tiempo de colisión, usando las ecuaciones de movimiento se calculan la posición y velocidad de la pelota cuando colisiona, usando la velocidad del suelo se calcula la velocidad de rebote de la pelota, también nos aseguramos de actualizar la fase ϕ de la oscilación del suelo para la siguiente iteración.

3. Parte 2

Usando los siguientes parámetros $\omega = 1{,}66$ $\eta = 0{,}15$, se observó la evolución del sistema y se confirmó que este alcanza un equilibrio en el cual los rebotes son siempre de la misma velocidad aproximadamente $v = 1{,}89$.
Como se puede notar en la figura 1, este comportamiento ocurre después de suficientes colisiones, de este gráfico podemos estimar que este numero de colisiones N_{relax} es de aproximadamente 50 colisiones, una mirada más detallada de los datos nos indica que tomando $N_{relax} = 75$ siempre se obtienen velocidades iguales con 10^{-4} ordenes de magnitud de precisión.

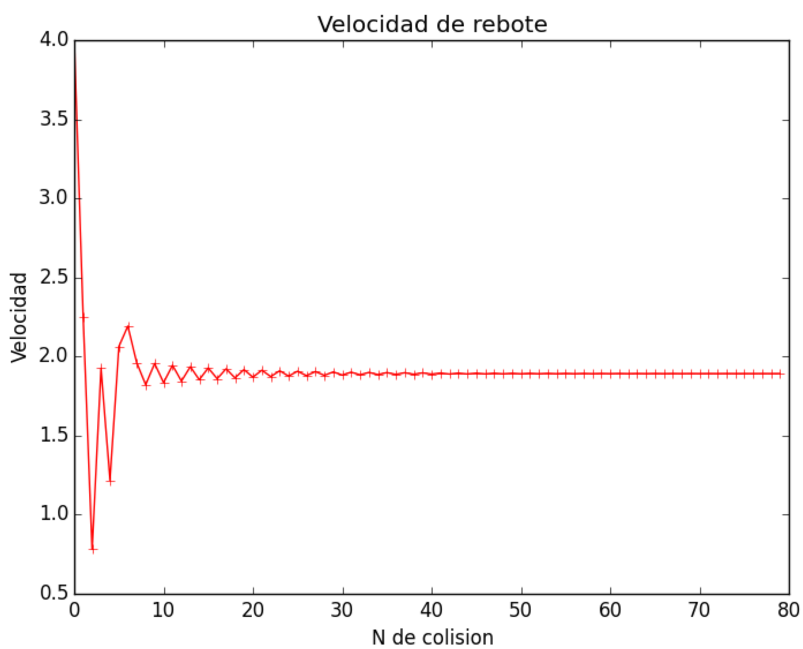
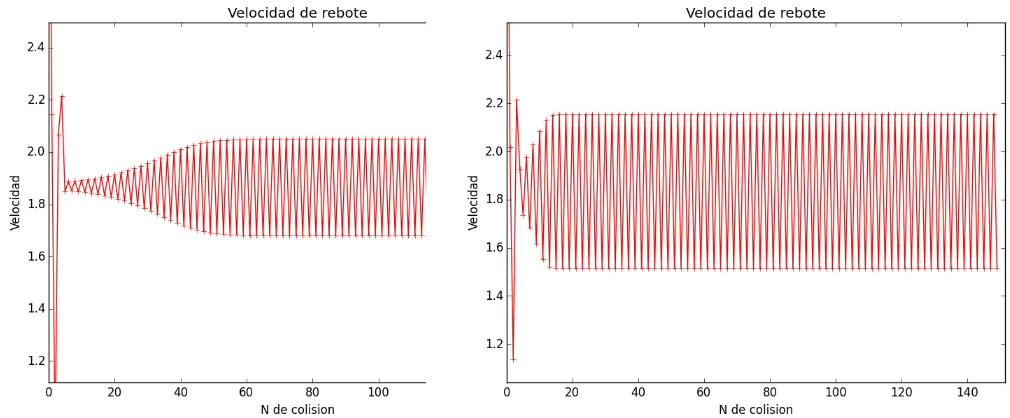


Figura 1: Velocidad despues de un rebote con $\omega = 1{,}66$



(a) $\omega = 1{,}68$ (b) $\omega = 1{,}70$

Figura 2: Velocidades para distintas frecuencias

4. Parte 3

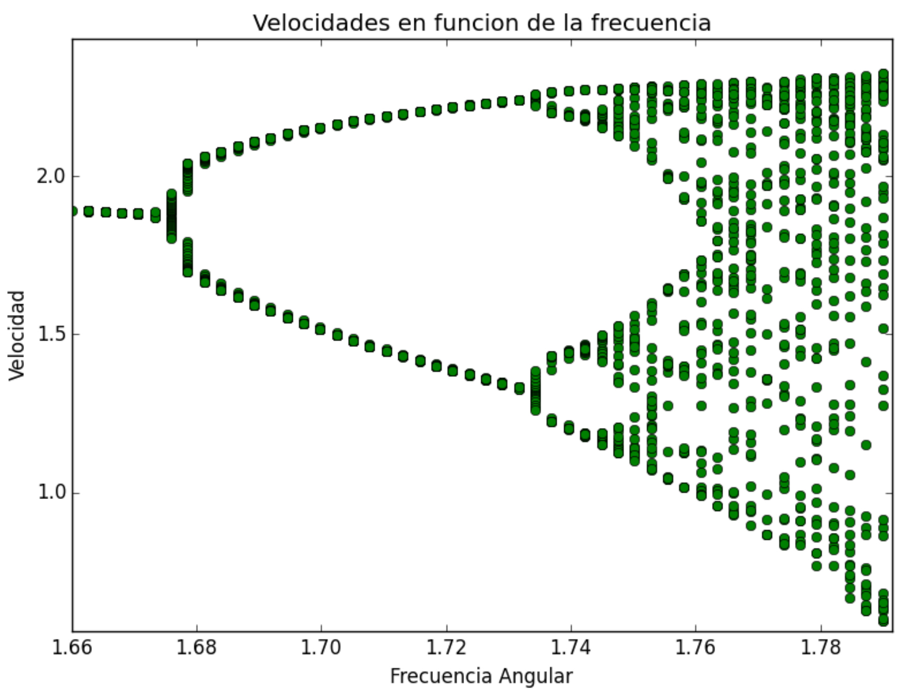
Se observa en la figura 2 que las frecuencias $\omega = 1{,}68$ y $\omega = 1{,}70$ no existe convergencia a un único valor para las velocidades, en vez de eso la velocidad oscila entre cierto rango. Sin embargo para suficientes colisiones, del orden de N_{relax} estimado en la parte anterior, el sistema oscila establemente entre estas velocidades, por lo que podemos confiar en esta estimación de N_{relax} para que el sistema no este en un régimen transiente.

5. Parte 4

Para esta parte se iteraron varias soluciones con distintas frecuencias, desde $\omega = 1{,}66$ a $\omega = 1{,}79$. Debido a que en el código original se definió ω como una variable global, se realizó un código ligeramente distinto (Parte4.py), en el cual ω es una variable dinámica, para que pueda ser iterada.

Se graficaron velocidades después de suficientes colisiones (Entre la colisión 150 y 200), como para ignorar el régimen transiente del sistema.

Se observa en la figura 3 el fenómeno de bifurcaciones en en el sistema, con frecuencias similares a 1.66 existe una única velocidad de equilibrio, luego a mayor frecuencia tenemos 2 velocidades, luego 4, y finalmente son tantas que el sistema es caótico.


Velocidades en funcion de la frecuencia
Velocidad
Frecuencia Angular
2.0
1.5
1.0
1.66
1.68
1.70
1.72
1.74
1.76
1.78