Quiz No 3 Investigación:Números Complejos,Raíz Cuadrada y raíz n-ésima de números complejos

Angel Francisco Morales Ramirez

26 de Septiembre del 2022

Índice

1. Números Complejos

1.1 Definición. Un número complejo es una expresión de la forma $z = a+bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ donde a es la parte real y bi es la parte imaginaria.

Los números complejos de la forma $a + 0i = a$ son los números reales, de manera que todos los números reales son números complejos, es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

El número imaginario i tiene la siguiente propiedad:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

1.2 Ejemplo.

$$z = 8 + 12i$$

1.1. Suma de Números Complejos

1.3 Definición. Sean $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, entonces la suma de números complejos se define como:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

1.4 Ejemplo. Sea $z_1 = 8 + 12i$ y $z_2 = 7 + 5i$

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (8 + 12i) + (7 + 5i) \\
z_1 + z_2 &= 8 + 7 + 12i + 5i \\
z_1 + z_2 &= 15 + 17i
\end{aligned}$$

1.2. Multiplicación de Números Complejos

1.5 Definición. Sean $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, entonces la multiplicación de números complejos se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

1.6 Ejemplo. Sea $z_1 = 4 + 9i$ y $z_2 = 6 + 3i$

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (4 + 9i) \cdot (6 + 3i)\\
z_1 \cdot z_2 &= 4 \cdot (6 + 3i) + 9i \cdot (6 + 3i)\\
z_1 \cdot z_2 &= 24 + 12i + 54i + 27i^2\\
z_1 \cdot z_2 &= 24 + 12i + 54i + 27(-1)\\
z_1 \cdot z_2 &= 24 - 27 + 66i\\
z_1 \cdot z_2 &= -3 + 66i
\end{aligned}$$

1.3. Módulo

1.7 Definición. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces el módulo de un número complejo se define como:

$$mod(z) = mag(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Aplicando esta definición podemos demostrar lo siguientes teoremas

1.8 Teorema. $|z| = 0 \iff z = 0$ con $z \in \mathbb{C}$

1.9 Teorema. Sea $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$

1.10 Ejemplo. Sea $z = 3 + 4i$

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{3^2 + 4^2}\\
|z| &= \sqrt{9 + 16}\\
|z| &= \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

1.4. Conjugado

1.11 Definición. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces el conjugado de un número complejo se define como:

$$\overline{z} = a - ib$$

1.12 Ejemplo. Sea $z = 23 - 7i$

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= 23 - (-7i)\\
\overline{z} &= 23 + 7i
\end{aligned}$$

1.5. Forma polar

Al graficar un número complejo podemos observar varias relaciones trigonométricas que nos permiten expresar cualquier número complejo en una forma polar

1.13 Definición. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, entonces la forma polar de un número complejo se define como:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = re^{i\cdot\theta}$$

1.14 Ejemplo. Sea $z = 1 + i$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \\ \theta &= \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi\cdot i}{4}}$$

2. Raíz Cuadrada

En el estudio del campo $\mathbb{R}$ de los números reales, se aprendió que cada número real positivo tiene exactamente 2 raíces cuadradas una positiva y otra negativa, es decir:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \text{ entonces sus raíces son: } \sqrt{a} \in \mathbb{R}^+ \text{ y } -\sqrt{a} \in \mathbb{R}^-$$

Por otra parte si a es un número real negativo entonces no tiene raíz cuadrada, es decir:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \text{ entonces } x^2 \neq a, \forall x \in \mathbb{R}$$

2.1 Definición. Sea $z = a + bi \neq 0, z \in \mathbb{C}$, entonces $(x+yi)^2 = z, \quad x, y \in \mathbb{R}$ tendrá exactamente 2 raíces cuadradas de la forma:

$$x = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

donde $r = \sqrt{a^2+b^2}$

Los números reales negativos también tendrán 2 raíces cuadradas que serán números complejos

Si z es un número complejo distinto de 0, la ecuación $x^n = z$ tiene exactamente n soluciones, en otras palabras todo número complejo , distinto de 0 tiene n raíces n-ésimas , distintas entre si.

Para encontrar las raíces cuadradas de cualquier número complejo. Suponemos que $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(x+yi)^2 &= a+bi \\
(x+yi)^2 &= x^2+2xyi+y^2i^2 \\
(x+yi)^2 &= x^2+2xyi-y^2 \\
x^2+2xyi-y^2 &= a+bi \\
x^2-y^2+2xyi &= a+bi
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$x^2-y^2 = a \tag{1}$$

$$2xy = b \tag{2}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones

$$x^4-2x^2y^2+y^4 = a^2 \tag{1}$$

$$4x^2y^2 = b^2 \tag{2}$$

Sumando 1 y 2

$$\begin{aligned}
x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^4 &= a^2+b^2 \\
x^4+2x^2y^2+y^4 &= a^2+b^2 \\
(x^2+y^2)^2 &= a^2+b^2 \\
x^2+y^2 &= \sqrt{a^2+b^2} = r
\end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = r \tag{3}$$

Sumando 1 y 3 tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + x^2 - y^2 &= r + a \\ 2x^2 &= r + a \\ x &= \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}} \end{aligned}$$

Restando 3 menos 1 tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - (x^2 - y^2) &= r - a \\ x^2 + y^2 - x^2 + y^2 &= r - a \\ 2y^2 &= r - a \\ y &= \pm\sqrt{\frac{r-a}{2}} \end{aligned}$$

De esta manera encontramos las soluciones para x y y tal que
$(x + yi)^2 = a + bi$

Para encontrar la raíz de un número real negativo se hace un procedimiento análogo. Suponemos que $z = -a, a > 0$ y que $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (x + yi)^2 &= -a \\ (x + yi)^2 &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 \\ (x + yi)^2 &= x^2 + 2xyi - y^2 \\ x^2 + 2xyi - y^2 &= -a \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= -a + 0i \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -a \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Donde $x = 0$ para que todas las ecuaciones tengan soluciones reales, entonces:

$$\begin{aligned} 0^2 - y^2 &= -a \\ y^2 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{a} \in \mathbb{R} \\ y = -\sqrt{a} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Entonces las raíces de $-a$ serán: $\sqrt{a}i$ ó $-\sqrt{a}i$

2.2 Ejemplo. Sea $z = -36$

$$\begin{aligned} y^2 &= -36 \\ y &= \pm\sqrt{36}i \\ y &= \pm 6i \end{aligned}$$

3. Raíz n-ésima de números complejos

Sabemos que podemos expresar a cualquier número complejo en su forma polar como:

$$z = a + bi = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

Donde r es el módulo de z es decir $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Donde θ es el argumento principal y se obtiene como $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$ siempre que $0 \leq \theta < 2\pi$

3.1 Definición. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces su raíz n-ésima sera:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n} \cdot i}$$

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Para $k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$

3.2 Ejemplo. Sea $z = 1 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $r = 1$ y $\theta = 0$ calcularemos su raíz cuarta

$$\begin{aligned} &z^{\frac{1}{4}} = \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\ &z_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = \cos 0 = 1 \\ &z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i \\ &z_2 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = \cos\pi = -1 \\ &z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i \end{aligned}$$

4. Bibliografía

Referencias

[1] Cárdenas, H. et al.: Álgebra Superior. Editorial Trillas, 1990.

[2] Gómez, C.: Álgebra superior: Curso completo. Las Prensas de Ciencias, 2014.

[3] Raíces enésimas de números complejos o imaginarios. (2022). Revisado el 23 de Septiembre del 2022, disponible en: https://www.matesfacil.com/BAC/complejos/raices/raices-n-esimas-numeros-complejos-imaginarios-poligono-regular-argumento-modulo-ejemplos.html