1 Revisión de Calculo

1.1 Limite Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ Se dice que L es el limite de $f(x)$ en a si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que si $x \in Domf$ y $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

1.2 Continuidad Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in Domf$ se dice que $f(x)$ es continua en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ Es decir $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que si $x \in Domf$ y $|x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

1.3 Sucesión Convergente Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ converge a L si para cada $\epsilon > 0 \exists N$ tal que para cualquier $n > N$ se tiene que $|a_n - L| < \epsilon$ y se escribe $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ En caso contrario la sucesión diverge

1.4 Teorema Si f es una funcion definida en un conjunto X de numeros reales $x_0 \in X$ entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1. f es continua en x_0
2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesion en X, que converge a x_0 entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

1.5 Funciones Derivables Continuas Se denota a $C^{\infty}(X)$ como el conjunto de todas las funciones que tienen derivadas de todos los ordenes continuas en X

1.6 Teorema de Rolle Sea $f \in C[a,b] \quad n$-veces diferenciables en (a,b) Si $f(x) = 0$ en los $n+1$ numeros distintos a $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ entonces $\exists c \in (x_0, x_n) \longrightarrow c \in (a,b)$ con $f^{(n)}(c) = 0$

1.7 Teorema de Valor Medio Si $f \in C[a,b]$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

1.8 Teorema de Valor Extremo Si $f \in C[a,b]$ entonces existe $c_1, c_2 \in (a,b)$ tal que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \quad \forall x \in [a,b]$ Si f es diferenciable en (a,b), entonces c_1 y c_2 se presentan en los extremos de $[a,b]$ o donde $f' = 0$

1.9 Teorema de Valor Intermedio Si $f \in C[a,b]$ y $K \in [f(a), f(b)]$ entonces $\exists c \in (a,b)$ para el cual $f(c) = K$

1.10 Teorema de Valor Medio para Integrales Si $f \in C[a,b]$ la integral de Riemann de g existe en $[a,b]$ y $g(x)$ no cambio signo en $[a,b]$. Entonces $\exists c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

1.11 Polinomios y Series de Taylor Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo I, si es derivable hasta el orden $n+1$ en el intervalo y $c \in I$, entonces $\forall x \in I$ existe α entre x y c tal que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Nota: Si $c = 0$ entonces el polinomio de Taylor se conoce como el polinomio de Maclaurin

2 Errores de Redondeo y Aritmética Computacional

Como sabemos los números irracionales tienen una cantidad no finita de decimales, esto implica un problema ya que las computadores solo pueden trabajar con un numero finito de decimales al realizar cálculos esto lleva a errores de redondeo

2.1 Números Binarios Es una reprensión de 64 bits (061) s el primer bit indica el signo, los siguientes 11 bits son características c, y los últimos 52 bits son llamados mantisa f expresando los numero de la forma

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

2.2 Subdesbordamiento Son números menores a $2^{-1022}(1+0)$ y se configuran como 0 Para evitarlos se suele usar un factor de escala

2.3 Desbordamiento Son números superiores a $2^{1023}(2-2^{-52})$ y causan que los cálculos de detengan. Para evitarlos se suele usar un factor de escala

2.4 Números Decimales Se presentan en formato normalizado de punto flotante de la forma

$$y = 0.d_1 d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n$$

2.5 Corte Elimina los dígitos $d_{k+1}d_{k+2}\cdots$ dejando al numero como

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$$

2.6 Redondeo Elimina los dígitos $d_{k+1}d_{k+2}\cdots$ Si $d_{k+1} \geq 5$ suma 1 a d_k sino simplemente corta los dígitos

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$$

2.7 Errores Sea p^* una aproximación de $p \neq 0$ se definen los errores

- **Error Real** $p - p^*$
- **Error Absoluto** $|p - p^*|$
- **Error Relativo** $\dfrac{|p - p^*|}{|p|}$

2.8 Dígitos Significativos Se dice que el numero p^* se aproxima a p para t dígitos significativos donde t es el natural mas grande que satisface

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}$$

2.9 Aritmética de Dígitos Finitos Se realiza aplicando el valor flotante a los números $x\&y$ y al resultado de su operación es decir

- **Suma** $x + y = fl[fl(x) + fl(y)]$
- **Resta** $x - y = fl[fl(x) - fl(y)]$

- **Multiplicación** $x \cdot y = fl[fl(x) \cdot fl(y)]$
- **División** $x \div y = fl[fl(x) \div fl(y)]$

Finalmente para minimizar el valor de los errores computacionales los polinomios deben expresarse de forma anidada (factorizado) ya que reduce el error de redondeo al reducir el numero de cálculos

3 Algoritmos y Convergencias

3.1 Algoritmo Se trata de una secuencia de pasos finitos que tienen un orden especifico para dar solución a un problema

3.2 Pseudocódigo Describen algoritmos especificando los valores de entrada, salida y los pasos separados por '.' o ';' cuando se trata de tareas dentro del mismo paso,mediante condicional. Se debe escribir de manera simple para que pueda ser escrito en cualquier lenguaje de programación

3.3 Algoritmo Estable Cuando pequeños cambios en los datos iniciales producción pequeños cambios en los resultados finales se dice que el algoritmo es estable en caso contrario se dice que el algoritmo es inestable. Algunos algoritmos solo son estables bajo ciertas condiciones y reciben el nombre de estables condicionalmente

3.4 Crecimiento del Error $E_0 > 0$ denota un error y E_n denota la magnitud del error despues de n operaciones

- Si $E_n \approx C^n E_0$ donde C es una constante independiente de n el crecimiento del error es **lineal** que produce un algoritmo estable
- Si $E_n \approx C^n E_0$ donde $C > 1$ el crecimiento del error es **exponencial** que produce un algoritmo inestable

3.5 Tasas de Convergencia Sea $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \to 0$ y $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \to \alpha$ Si $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|$

Entonces decimos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \to \alpha$ con una rapidez de convergencia $O(\beta_n)$ y se escribe $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$

De manera análoga para funciones si $\lim\limits_{h\to 0} G(h) = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0} F(h) = L$ y además $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que $|F(h) - L| \leq K|G(h)|$ es la rapidez de convergencia para funciones y lo escribimos $F(h) = L + O[G(h)]$

4 Bibliografía

- Libro Análisis Numérico de Burden & Faires – 10ed pdf en español junto con su solucionario. (2019, 12 junio). HeavyPhysics. https://heavyphysicsblog.wordpress.com/libro-analisis-numerico-de-burden-faires-10ed-pdf-en-espanol-junto-con-su-solucionario/