1 Tarea Examen 2

Instrucciones

La demostración de la l_x únicamente se realizo considerando el modelo de Gompertz tradicional, es decir, considerando únicamente a la edad x como factor de mortalidad (degradamiento de la edad a resistir la fuerza de la mortalidad).

Pero el mismísimo Gompertz dijo que una segunda causa el .ªzar"que no modeló, Su cuate Makeham sí lo modela. La tarea consiste es demostrar cómo queda la integral agregando una constante llamada .ªzar".

Makeham $\mu_x = (BC^x) + A$

Solución

Sabemos que

$$l_x = l_0 e^{-\int\limits_0^t \mu_x dx}$$

Sustituimos el valor de $\mu_x = (BC^x) + A$

$$l_x = l_0 e^{-\int\limits_0^t (BC^x + A) dx} \tag{1}$$

Resolvemos la integral

$$-\int\limits_0^t (BC^x + A)dx = -B\int\limits_0^t C^x dx - A\int\limits_0^t dx$$

Para $-A\int\limits_0^t dx$ es claro que

$$-A\int\limits_0^t dx = -Ax\Big|_0^t = -A(t-0) = -At$$

Por otro lado para $-B\int\limits_0^t C^x dx$ hacemos un cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= C^x \\ In(u) &= In(C^x) \\ In(u) &= xIn(C) \\ x &= \frac{In(u)}{In(C)} \end{aligned}$$

Derivamos

$$dx = d\left(\frac{In(u)}{In(C)}\right)$$
$$dx = \frac{1}{In(C)}d(In(u))$$
$$dx = \frac{1}{In(C)}\frac{1}{u}du$$
$$dx = \frac{du}{uIn(C)}$$

Sustituyendo en la integral tenemos

$$-B\int_0^t C^x dx = -B\int u\frac{du}{uIn(C)} = -B\int\frac{du}{In(C)} = -\frac{B}{In(C)}\int du = -\frac{B}{In(C)}u$$

Donde $u = C^x$

$$-\frac{B}{In(C)}C^x\Big|_0^t = -\frac{B}{In(C)}(C^t - C^0) = -\frac{B}{In(C)}(C^t - 1)$$

De manera general la integral queda como

$$-\int_0^t (BC^x + A)dx = -\frac{B}{In(C)}(C^t - 1) - At$$

Sustituyendo en (1)

$$l_t = l_0 e^{-\int_0^t \mu_x dx} = l_0 e^{-\left(\frac{B}{In(C)}(C^t-1)+At\right)} = l_0 e^{-\frac{B}{In(C)}(C^t-1)}e^{-At}$$

Si $In|h| = -\dfrac{B}{In(C)}$ entonces

$$In|h|(C^t - 1) = C^t In|h| - In|h| = In|h^{C^t}| + In|h^{-1}| = In|h^{-1}h^{C^t}|$$

Asi tenemos que

$$l_t == l_0 e^{In|h^{-1}h^{C^t}|}e^{-At} = l_0(h^{-1}h^{C^t})e^{-At} = l_0\frac{h^{C^t}}{h}e^{-At}$$

Sea $a = \dfrac{lo}{h}$

Tenemos que

$$l_t = ah^{C^t}e^{-At}$$

Finalmente

$$\therefore l_x = l_0 e^{-\left(\frac{B}{In(C)}(C^x-1)+Ax\right)} = ah^{C^x} e^{-Ax}$$

Respuesta

$$l_x = l_0 e^{-\left(\frac{B}{In(C)}(C^x-1)+Ax\right)} = ah^{C^x} e^{-Ax}$$