Resumen Pierre Brémaud

Cadenas de Markov

Díaz Sanchéz David

31 de mayo de 2025

Matriz Fundamental

Los resultados visto previamente se refieren a la probabilidad de permanecer para siempre en el conjunto transitorio o, a la probabilidad de no ser absorbido por el conjunto recurrente. Queda por calcular la probabilidad de ser absorbido por una determinada clase recurrente R, partiendo de una estado inicial. Para ello nos ayudaremos del concepto de matriz fundamental, que esta vinculada a la matriz potencial, y por ende, al numero de visitas a un estado j cuando se inicia en el estado i.

Visitas

En el caso i $\in$ T, j $\in$ T, en este caso estamos mirando el número de visitas a j $\in$ T, antes de la absorción por $R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots$ cuando se inicia en i $\in$ T.
Cuando se inica en cualquier estado i, el número esperado de visitas a cualquier estado j es:

$$\mathbb{E}_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_n = j\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n)$$

Este es el elemento (i,j) de la matriz potencial

Matriz Fundamental

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} P^n .$$

Solo cuando los pares (i,j) donde i y j son transitorios requieren un análisis, porque en todos los demás casos son nulos o infinitos.

Matriz de Transición

Se utiliza la representación de la matriz de transición para obtener:

$$G = \begin{Bmatrix} E & 0 \\ F & S \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Donde

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n$$

Definición 6.1. Cadena Absobente y Matriz fundamental Una HMC con al menos un estado transitorio y un estado recurrente se llama absorbente, y la matriz S es su matriz fundamental.
Teorema 6.1. Máxima Caracterización de la Matriz Fundamental La matriz S mencionada anteriormente es la solución mínima de $S(I - Q) = I$

Matriz de Absorción

Buscamos calcular la probabilidad de absorción por una clase recurrente determinada cuando se parte de un estado transitorio determinado. Basta con tratar el caso en el que las clases recurrentes están aisladas. Por tanto, suponemos que la matriz de transición tiene la forma:

$$P = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ B & Q \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

f_{ij}

Sea f_{ij} la probabilidad de ser absorbido por la clase recurrente R_j =j cuando se parte del estado transitorio i.

$$P^n = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ L_n & Q^n \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Donde $L_n = (I + G + ... + G^n)B$. Por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} L_n = SB$

$$P_i(T_{R_j} < \infty) = (SB)_{ij}$$

Matriz de Acceso

Las probabilidades de absorción por las clases recurrentes se pueden obtener como producto de la matriz de acceso $F = f_{ij}$

Donde $f_{ij} = P_i(T_J \leq \infty)$ por que $f_{iR_j} = f_{ik}$ para cada $k \in R_j$ solo necesitamos las entradas de la matriz de acceso correspondiente a $i \in T, j \in R$

Propiedes de la Matriz

- Si i y j son de la misma clase de recurrencia $f_{ij} = 1$
- Si i y j son de diferente clase de recurrencia $f_{ij} = 0$
- Si i es recurrente y j es transitorio $f_{ij} = 0$
- Si i y j son transitorios con $i \neq j$

$$f_{ij} = \frac{g_{ij}}{g_{jj}}$$

$$f_{jj} = \frac{g_{jj} - 1}{g_{jj}}$$

Bibliografía

- Brémaud, P. (1999). Markov Chains. En Texts in applied mathematics.