# Probabilidad I

***Apuntes de Probabilidad***

Diego Antonio Zúñiga Galvám

25 de enero de 2023

# Índice

# 1 Primer Parcial

## 1.1 Espacios de Probabilidad

El espacio de probabilidad consiste en una terna ordenada, denotada usualmente por $(\Omega, F, P)$, en donde $\Omega$ es un conjunto arbitrario, $F$ es una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$, y $P$ es una medida de probabilidad.
Medida de probabilidad.

Una función $P$ definida sobre una $\sigma$-algebra $F$ y con valores en el intervalo $[0, 1]$ es una medida de probabilidad si $P(\Omega) = 1$ y es $\sigma$-aditiva, es decir, si cumple que:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

## 1.2 $\sigma$-álgebras

Una colección $F$ de subconjuntos de $\Omega$ es una$\sigma$-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in F$
2. Si A $\in F$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$
3. Si $A_1, A_2, ... \in F$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

A la pareja $(\Omega, F)$ se le llama espacio medible y a los elementos de $F$ se les llama eventos o conjuntos medibles.

La intersección de dos $\sigma$-álgebras es una $\sigma$-álgebra, pero en general no es cierto que la union de dos $\sigma$-álgebras produce una nueva $\sigma$-álgebra.

$\sigma$-ÁLGEBRA GENERADA. Sea $\zeta$ una colección no vacía de subconjuntos de $\Omega$. La $\sigma$-álgebra generada por $\zeta$, denotada por $\sigma(\zeta)$, es la colección

$$\sigma(\zeta) = \bigcap\{F : F\text{es una } \sigma\text{-álgebra y } \zeta \subseteq F\}$$

Es decir, la colección de $\sigma(\zeta)$ es la intersección de todas aquellas $\sigma$-álgebras que contienen a $\zeta$.

**Proposición:** Sean $\zeta_1$ y $\zeta_2$ dos colecciones de subconjuntos de $\Omega$ tales que $\zeta_1 \subseteq \zeta_2$. Entonces $\sigma(\zeta_1) \subseteq \sigma(\zeta_2)$.

**Proposición:** Si $F$ es una $\sigma$-álgebra, entonces $\sigma(F) = F$.

**Definición (Álgebra):** Una colección *A* de subconjuntos de $\Omega$ es una álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in$ *A*.
2. Si A $\in$ *A*, entonces A$^c \in$ *A*.
3. Si A$_1$, A$_2$, ..., A$_n \in$ *A*, entonces $\bigcup_{k=1}^{n}$ A$_k \in$ *A*.

## Conjuntos de Borel

La colección de todos los intervalos abiertos $(a,b)$ de $\mathbb{R}$, en donde $a \leq b$. A la mínima $\sigma$-álgebra generada por esta colección se le llama $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, y se denota por $B(\mathbb{R})$

**Definición ($\sigma$-álgebra de Borel):**

$$B(\mathbb{R}) = \sigma\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}$$

## Sucesiones de eventos

### Limite Superior e Inferior

1. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=a}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
2. $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

**Definición (Convergencia de Eventos):**

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos. Si existe un evento A tal que:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

entonces se dice que la sucesión converge al evento A, y se escribe $\lim_{n\to\infty} A_n = A$

**Proposición**

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión monota de eventos.

1. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
2. Si $A_1 \supseteq A_2 ...$, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

**Proposición**

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos. Defina.

$$B_1 = A_1 \quad \text{y} \quad B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

.

Entonces la sucesión de eventos $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $B_n \subseteq A_n$.
2. $B_n \bigcap B_m = \emptyset$, si $n \neq m$.
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

## 1.3 Medidas de Probabilidad